



**Universidade de Brasília - UnB  
Faculdade UnB Gama - FGA  
Curso de Engenharia de Energia**

**OTIMIZAÇÃO DE SISTEMAS FLUIDODINÂMICOS  
MEDIANTE A UTILIZAÇÃO DE ALGORITMOS  
GENÉTICOS**

**Autor: Guilherme Schlaepfer Pereira  
Orientador: Dr. Luciano Gonçalves Noletto**

**Brasília, DF  
2014**



**GUILHERME SCHLAEPFER PEREIRA**

**ESTUDO DA OTIMIZAÇÃO DE SISTEMAS FLUIDODINÂMICOS MEDIANTE A  
UTILIZAÇÃO DE ALGORITMOS GENÉTICOS**

Monografia submetida ao curso de graduação em Engenharia de Energia da Universidade de Brasília, como requisito parcial para obtenção do Título de Bacharel em Engenharia de Energia.

Orientador: Dr. Luciano Gonçalves Noletto.

**Brasília, DF  
2014**

## **CIP – Catalogação Internacional da Publicação**

Pereira, Guilherme Schlaepfer Pereira.

Estudo da otimização de sistemas fluidodinâmicos mediante a utilização de algoritmos genéticos. Guilherme Schlaepfer Pereira. Brasília: UnB, 2014.

Monografia (Graduação) – Universidade de Brasília  
Faculdade do Gama, Brasília, 2014. Orientação: Nome do Orientador.

1. Algoritmos genéticos. 2. Otimização. 3. Golpe de aríete. I.  
Noletto, Luciano. II. Estudo da otimização de sistemas fluidodinâmicos  
mediante a utilização de algoritmos genéticos.

CDU Classificação



**ESTUDO DA OTIMIZAÇÃO DE SISTEMAS FLUIDODINÂMICOS MEDIANTE A  
UTILIZAÇÃO DE ALGORITMOS GENÉTICOS**

**GUILHERME SCHLAEPFER PEREIRA**

Monografia submetida como requisito parcial para obtenção do Título de Bacharel em Engenharia de Energia da Faculdade UnB Gama - FGA, da Universidade de Brasília, apresentada e aprovada pela banca examinadora abaixo assinada:

---

**Prof. Dr.: Luciano Gonçalves Noletto, UnB/ FGA**  
Orientador

---

**Prof. Dra.: Taís Calliero Tognetti, UnB/ FGA**  
Membro Convidado

---

**Prof. Dr.: Augusto César de Mendonça Brasil, UnB/ FGA**  
Membro Convidado

Brasília, DF  
2014

Esse trabalho é dedicado a minha família.

## AGRADECIMENTOS

Primeiramente gostaria de agradecer a Deus, que me proporcionou todas as oportunidades que tive e que sempre me deu forças, motivação e sabedoria para chegar até aqui.

Também quero agradecer a minha família por sempre ter me apoiado em todas as minhas decisões dentro e fora da universidade. Minha mãe Rosa, meu pai William, minha madrasta Isis, meu irmão Eduardo e meu 'irmão' Luiz, agradeço a cada um de vocês por cada palavra de apoio e motivação.

Agradeço também a minha linda namorada Marina, por toda a compreensão e paciência comigo durante o curso e pelos fins de semana sem se ver.

Ao meu professor orientador prof. Dr. Luciano Gonçalves Noletto, que me orientou e acompanhou de perto meu trabalho desde o início até sua entrega final.

E aos meus amigos pois seria impossível chegar até aqui sem vocês me acompanhando durante todo esse trajeto. Todas as noites viradas, ajudas em trabalho que recebi de vocês e também pude dar, tudo isso acrescentou muito o meu aprendizado, e fizeram de mim o que sou hoje. Agradeço por poder dizer que vocês fazem parte, não só da minha graduação, mas da minha vida.

*“O sucesso nasce do querer, da determinação e persistência em se chegar a um objetivo. Mesmo não atingindo o alvo, quem busca e vence obstáculos, no mínimo fará coisas admiráveis.”*

*José de Alencar*

## RESUMO

O presente trabalho consiste na utilização de um Algoritmo Genético a fim de otimizar um modelo transiente hidráulico hipotético em escala reduzida. Estão inseridos no escopo deste projeto a definição do modelo bem como seu respectivo equacionamento, os parâmetros a serem otimizados e o algoritmo usado para realizar essa otimização. Resultados obtidos computacionalmente por meio do algoritmo elaborado foram comparados com resultados oriundos de trabalhos publicados a fim de validar o algoritmo proposto. Após a definição e subsequente equacionamento do modelo e da validação do algoritmo, a otimização dos parâmetros foi feita visando obter a operação ótima considerando impactos gerados por golpes de aríete em partes do sistema avaliado.

**Palavras-chave:** Algoritmos genéticos, otimização, golpe de aríete.



## ***ABSTRACT***

*The main objective of this work consists in using a genetic algorithm in order to optimize a hypothetical transient hydraulic system in reduced scale. The definition of the model, as well as its equating, the parameters to be optimized and the optimization algorithm are included in the scope of this project. Results that were obtained using the developed algorithm were compared to published results of other papers in order to validate the developed algorithm. After the definition and equating of the model and the validation of the algorithm, the optimization of the parameters was performed to obtain optimal operation considering impacts generated by water hammer in parts of the evaluated system.*

***Keywords:*** Genetic algorithms, optimization, water hammer.

## LISTA DE FIGURAS

|   |    |
|---|----|
| Figura 1 - Usina de Sayano Shushenskaya na Rússia 2009.....                       | 15 |
| Figura 2 - Tubulação danificada por golpe de aríete.....                          | 15 |
| Figura 3 - Sistema hidráulico a ser otimizado.....                                | 19 |
| Figura 4 - Estrutura básica de um algoritmo genético. ....                        | 24 |
| Figura 5 - Roleta de Probabilidades.....  | 28 |
| Figura 6 - Cruzamento de um único ponto.....                                      | 29 |
| Figura 7 - Cruzamento de ponto duplo. ....  | 30 |
| Figura 8 - Cruzamento em pontos aleatórios. ....                                  | 30 |
| Figura 9 - Mutação no cromossomo de codificação binária. ....                     | 31 |
| Figura 11 - Comportamento da Equação 16.....                                      | 35 |
| Figura 12 – Comportamento da Equação 17.....                                      | 35 |
| Figura 13 – Comportamento da equação 18.....                                      | 36 |
| Figura 14 – Resultado gráfico da resposta do algoritmo.....                       | 37 |
| Figura 15 – Resultado gráfico da resposta do algoritmo.....                       | 38 |
| Figura 16 – Resultado gráfico da resposta do algoritmo.....                       | 39 |
| Figura 17 – Resultado gráfico da resposta do algoritmo.....                       | 41 |
| Figura 18 – Resultado gráfico da resposta do algoritmo.....                       | 42 |
| Figura 19 – Resultado gráfico da resposta do algoritmo.....                       | 43 |
| Figura 20 – Relatório de saída emitido pelo algoritmo.....                        | 46 |
| Figura 21 - Resposta do algoritmo para f1 com taxa de crossover igual a 80%. .... | 47 |
| Figura 22 - Resposta do algoritmo para f1 com taxa de crossover igual a 90%. .... | 47 |
| Figura 23 – Resposta do algoritmo para f2 com taxa de crossover igual a 80%. .... | 48 |
| Figura 24 - Resposta do algoritmo para f2 com taxa de crossover igual a 90%. .... | 49 |

**LISTA DE TABELAS**

|  |    |
|--|----|
| Tabela 1 – Exemplos de dados para roleta de probabilidades.....                  | 28 |
| Tabela 2 – Resultados obtidos no caso um considerando a situação um.....         | 37 |
| Tabela 3 – Resultados obtidos para o caso dois considerando a situação um.....   | 38 |
| Tabela 4 – Resultados obtidos para o caso três considerando a situação um.....   | 39 |
| Tabela 5 – Resultados obtidos para o caso um considerando a situação dois.....   | 41 |
| Tabela 6 – Resultados obtidos para o caso dois considerando a situação dois..... | 42 |
| Tabela 7 – Resultados obtidos para o caso três considerando a situação dois..... | 43 |
| Tabela 8 – Resultados finais para f1 com taxa de crossover igual a 80%.....      | 47 |
| Tabela 9 - Resultados finais para f1 com taxa de crossover igual a 90%.....      | 47 |
| Tabela 10 - Resultados finais para f2 com taxa de crossover igual a 80%.....     | 48 |
| Tabela 11 - Resultados finais para f2 com taxa de crossover igual a 90%.....     | 49 |

## SUMÁRIO

|  |           |
|--|-----------|
| <b>1. INTRODUÇÃO .....</b>                                 | <b>13</b> |
| <b>1.1. MOTIVAÇÃO.....</b>                                 | <b>13</b> |
| <b>1.2. OBJETIVOS.....</b>                                 | <b>16</b> |
| <b>1.3. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA .....</b>                    | <b>16</b> |
| 1.3.1. Algoritmos Genéticos .....                          | 16        |
| <b>2. METODOLOGIA .....</b>                                | <b>19</b> |
| <b>2.1. SISTEMA FLUIDODINÂMICO ESTUDADO.....</b>           | <b>19</b> |
| <b>2.2. ADAPTAÇÃO DO MODELO.....</b>                       | <b>19</b> |
| 2.2.1. Determinação de $l_t(t)$ .....                      | 20        |
| 2.2.2. Determinação de $l_t(t, X)$ .....                   | 20        |
| 2.2.2.1. Determinação de $l_t(t, f_1)$ .....               | 20        |
| 2.2.2.2. Determinação de $l_t(t, f_2)$ .....               | 21        |
| 2.2.3. Função Objetivo.....                                | 22        |
| <b>3. FORMULAÇÃO DO ALGORITMO GENÉTICO.....</b>            | <b>23</b> |
| <b>3.1. CARACTERÍSTICAS DOS ALGARÍTMOS GENÉTICOS .....</b> | <b>23</b> |
| 3.1.1. Codificação.....                                    | 24        |
| 3.1.1.1. Codificação binária.....                          | 24        |
| 3.1.1.2. Codificação Real .....                            | 25        |
| 3.1.2. Função de Aptidão ( <i>Fitness</i> ).....           | 25        |
| 3.1.3. Elitismo.....                                       | 26        |
| 3.1.4. Seleção .....                                       | 26        |
| 3.1.4.1. Dizimação.....                                    | 26        |
| 3.1.4.2. Seleção proporcional.....                         | 27        |
| 3.1.5. Operadores Genéticos .....                          | 29        |
| 3.1.5.1. Cruzamento.....                                   | 29        |
| 3.1.5.1.1. Cruzamento em codificação binária.....          | 29        |
| 3.1.5.1.2. Cruzamento em codificação real.....             | 30        |
| 3.1.5.2. Mutação.....                                      | 31        |
| 3.1.5.3. Critérios de Convergência.....                    | 31        |
| <b>3.2. DESCRIÇÃO DO CÓDIGO ELABORADO .....</b>            | <b>32</b> |
| <b>4. RESULTADOS .....</b>                                 | <b>35</b> |
| <b>4.1. RESULTADOS PRELIMINARES.....</b>                   | <b>35</b> |
| <b>4.2. RESULTADOS PARA O MODELO ESTUDADO.....</b>         | <b>44</b> |
| <b>5. CONCLUSÕES.....</b>                                  | <b>50</b> |
| <b>6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....</b>                 | <b>51</b> |
| <b>ANEXOS.....</b>   | <b>53</b> |

## 1. INTRODUÇÃO

### 1.1. MOTIVAÇÃO

Técnicas de otimização são utilizadas para se obter, ao fim de uma pesquisa, um produto final que não só realize a função para a qual foi projetado, mas que desempenhe sua função da melhor maneira possível, com desempenho ótimo (RODRIGUES, 2007).

Para que se efetue uma otimização é necessária primeiramente uma análise das soluções existentes acerca do tema estudado e o levantamento de aspectos que ainda podem ser melhorados. A otimização consiste em determinar novos parâmetros de modo a aumentar a eficiência do produto final, reduzir custos de projeto, além de outras vantagens associadas (SOUZA, 2013).

Com o intuito de se realizar essa determinação de parâmetros é necessária a elaboração de um modelo matemático do problema a ser otimizado, relacionando as variáveis de projeto em uma função objetivo que forneça, quantitativamente, a qualidade do projeto otimizado, bem como as restrições e condições de contorno que a otimização está sujeita, para que se possa garantir a viabilidade do produto (RODRIGUES, 2007).

A busca do melhor produto pode ser feita de forma puramente experimental, testando-se vários protótipos com características distintas e selecionando aquele que apresentar melhor desempenho nos testes realizados, ou alterando metodicamente um único protótipo até obter-se o desempenho desejado. Entretanto, além de demorado, esse processo pode ser extremamente custoso (RODRIGUES, 2007).

Um problema de otimização consiste matematicamente na determinação de máximos e mínimos de funções objetivo, que são aquelas que se deseja otimizar, obedecendo as condições de contorno impostas pelo projeto (SOUZA, 2003).

Ao longo dos últimos anos, diversos métodos de otimização numérica foram desenvolvidos. A existência de muitos métodos é relacionada ao fato de que, dependendo das características de projeto, um método pode se mostrar mais eficiente que outro.

A maior parte desses métodos tomam mão do gradiente das funções objetivo para encontrar os pontos ótimos associados. A utilização dos gradientes funciona muito bem quando o espaço de busca do projeto é convexo, com variáveis contínuas e onde a função objetivo, bem como suas respectivas condições de contorno, não apresentam comportamento de não linearidade.

Entretanto, tanto na engenharia como em outras áreas do conhecimento, os problemas que devem ser resolvidos são muito complexos, com funções não lineares e espaços de busca não convexos, impossibilitando dessa forma a utilização de muitos dos métodos conhecidos.

Como já mencionado, existem muitos métodos numéricos de otimização, entre eles os algoritmos auto adaptativos, que são algoritmos inspirados em fenômenos naturais que procuram se auto ajustar para encontrar as soluções ideais de um dado problema. A busca por esses algoritmos baseados em fenômenos naturais pode ser devido ao fato de que esses fenômenos em geral são encontrados na natureza de maneira otimizada e são processos de alta complexidade e, assim, esses algoritmos podem ser usados em problemas mais complexos.

Entre esses algoritmos estão as redes neurais artificiais, que são inspiradas no funcionamento do cérebro humano, os algoritmos baseados no comportamento social de formigas e no processo de recozimento do metal, e também estão inseridos nesse contexto os algoritmos genéticos, inspirados na teoria da evolução (SOUZA, 2003).

A definição do melhor algoritmo a ser usado depende do problema em questão. É necessário conhecer o problema e, a partir de suas características, selecionar o algoritmo correto tendo em vista a complexidade e precisão esperada.

Dos algoritmos inspirados pela natureza, que utilizam busca global e são aplicados à otimização de problemas complexos, destacam-se o Recozimento Simulado e, principalmente, os Algoritmos Genéticos (GOLDBERG, 1989). Tais algoritmos podem ser vistos como uma representação matemática algorítmica da teoria de Darwin e da genética, chamada de a nova sintaxe da teoria da evolução. Esse tipo de algoritmo, juntamente com o sistema hidráulico associado, são os principais objetos de estudo deste trabalho (BARCELOS, 2000).

A utilização de sistemas hidráulicos, por sua vez, compreende um contexto muito mais amplo do que se possa imaginar em um primeiro momento. O uso desses sistemas é de suma importância para a atividade humana. Eles estão presentes em casas, edifícios comerciais e também em usinas hidroelétricas, capazes de transformar a energia proveniente de um volume de água armazenado em energia elétrica (LIMA, 2006).

Esse tipo de usina faz uso de grandes condutos forçados, válvulas, turbinas e outros equipamentos pelos quais grandes volumes de água transitam diariamente. Manobras operacionais, tais como a abertura e o fechamento de válvulas, falhas mecânicas de dispositivos de proteção e controle, dentre outras causas podem em certos casos ocasionar variações de pressão, aumentando ou diminuindo a pressão, que por sua vez, podem danificar o sistema, resultado em acidentes e grandes prejuízos (CAMARGO, 1989).

Em 2009, na Rússia, ocorreu um grave acidente na usina de Sayano Shushenskaya, causando 75 mortes. O acidente foi causado por vibrações excessivas de uma das turbinas, que com o passar dos anos acabou desprendendo-a de sua estrutura. A variação de pressão causada no fluxo fez com que o local fosse inundado e devastado.



**Figura 1 - Usina de Sayano Shushenskaya na Rússia 2009.**

O acidente mostrado na Figura 1 foi causado por uma redução brusca da pressão no fluxo de água. Existem também acidentes causados pela variação súbita da pressão, estes recebem o nome de golpe de aríete (GIBSON, 1908).



**Figura 2 - Tubulação danificada por golpe de aríete.**

Como já mencionado, os fenômenos mostrados acima representam riscos para aqueles que trabalham nas usinas e prejuízos para as empresas, além de serem um risco para qualquer sistema hidráulico nos quais eles ocorram e, portanto, devem ser evitados ao máximo.

Existem dispositivos de segurança que são instalados nos sistemas a fim de se prevenir e amenizar essas variações de pressão. Uma das medidas adotadas para esse fim é o próprio dimensionamento dos condutos utilizados. Os condutos devem ser dimensionados com uma margem de segurança para uma eventual sobre pressão.

Conhecendo o grande potencial da utilização de algoritmos genéticos na resolução de problemas, a principal motivação desse trabalho é buscar, por meio da aplicação desse tipo de algoritmo, novas alternativas para a otimização de sistemas transientes hidráulicos sujeitos a golpes de aríetes, fazendo com que esse fenômeno possa ser melhor suportado pelo sistema e, conseqüentemente, gerando menos danos e prejuízos ao mesmo.

## 1.2. OBJETIVOS

Mesmo com dispositivos de segurança que visam mitigar o fenômeno, ainda assim ocorrem casos de golpe de aríete e, portanto, deve-se também dimensionar e selecionar condutos que sejam capazes de suportar esse fenômeno. Com o intuito de fornecer informações para a seleção e dimensionamento do conduto, propõe-se uma otimização do sistema mediante a utilização de um algoritmo genético.

O objetivo do presente trabalho é a otimização de sistemas fluidodinâmicos com o uso de algoritmos genéticos. O caso de estudo que será considerado é a otimização de um sistema hidráulico para mitigação do fenômeno do golpe de aríete.

Como objetivos específicos desse trabalho tem-se:

- a elaboração e testes do algoritmo genético;
- definição dos parâmetros internos do algoritmo genético;
- definição do modelo hidráulico e dos parâmetros a serem otimizados;
- realização das otimizações.

## 1.3. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

### 1.3.1. Algoritmos Genéticos

Algoritmos genéticos são algoritmos que foram desenvolvidos inspirados na teoria da seleção natural de Charles Darwin (1809-1882). Darwin observou que em todas as espécies, indivíduos que possuem características que possam representar vantagens evolutivas em relação a outros indivíduos tem uma probabilidade maior de se reproduzir, passando essa



determinada característica para futuras gerações. Dessa forma, a característica que representa uma vantagem evolutiva, que auxilia a sobrevivência, é preservada, enquanto que as características que não apresentam essa vantagem tendem a se extinguir. A longo prazo, a espécie se torna mais adaptada e evoluída, obtendo maiores chances de sobrevivência dentro de um determinado contexto que abrange aspectos climáticos e ambientais (RODRIGUES, 2007).

Darwin defendia que o homem, juntamente com todos os outros seres vivos, são resultados da evolução e que todos estão em constante mutação, buscando a melhor adaptação do ser vivo dentro do ambiente que ele está inserido (RODRIGUES, 2007).

A ideia apresentada por Darwin é tida até os dias atuais como sendo uma das maiores conquistas no ramo da Biologia, uma vez que a seleção natural é responsável por, de certa forma, administrar o processo evolutivo das espécies. O processo evolutivo, por sua vez, pode ser observado em duas etapas. A primeira delas é a variabilidade genética, oriunda de mutações genéticas que possam ter ocorrido de uma geração para outra. Essa etapa é aleatória e, portanto, não pode ser prevista. A segunda etapa consiste em verificar se a mutação ocorrida aumenta ou diminui a probabilidade do indivíduo sobreviver e se reproduzir considerando fatores ecológicos e climáticos (RODRIGUES, 2007).

Por meio dessa seleção, um indivíduo que apresenta melhores características genéticas tem maior probabilidade de sobreviver e gerar descendentes com genótipo similar, ao passo que indivíduos que não possuam esse genótipo tendem a viver menos, e conseqüentemente gerarão menos descendentes (RODRIGUES, 2007).

É importante ressaltar que essas variações genéticas também podem tornar um indivíduo menos adaptado. Nesse caso, a seleção atua fazendo com que suas características sejam cada vez menos repassadas às gerações seguintes até se extinguirem (RODRIGUES, 2007).

Assim, a presença de um determinado gene tende a aumentar se ele oferecer ao indivíduo condições de proteção e sobrevivência, caso contrário, a frequência do genótipo tende a diminuir (RODRIGUES, 2007).

Em 1930, a primeira tentativa de representação da teoria de Darwin como um modelo matemático foi publicada. O livro *The Genetical Theory of Natural Selection*, de R. A. Fisher, trata a evolução como um processo de aprendizagem que possui uma escala temporal diferente, tendo gerações como parâmetro ao invés de anos.

Depois, em 1975, John Holland publicou o trabalho *Adaptation in Natural and Artificial Systems* (HOLLAND, 1975), como resultado de anos de pesquisa a cerca de

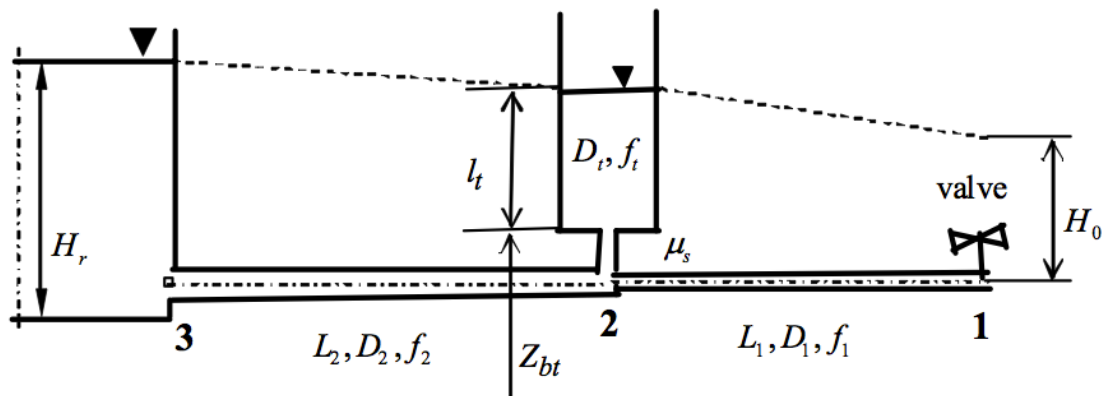
algoritmos genéticos. Em 1988, Holland, juntamente com David Goldberg publicaram *Genetic Algorithms and Machine Learning* (Holland & Goldberg, 1988), e em 1989, Goldberg publica o livro *Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning* (GOLDBERG, 1989), que introduziu os algoritmos genéticos como uma técnica de otimização (DEB, 2001).

Desde então, estudos acerca de algoritmos genéticos se intensificaram e já foram feitas muitas publicações visando aperfeiçoar o método e expandir sua aplicabilidade em problemas reais de engenharia e outras áreas do conhecimento. Também ocorreu o desenvolvimento de pacotes comerciais utilizando algoritmos genéticos, como o *Evolver* e um pacote específico do *Matlab* (LINDEN, 2006).

## 2. METODOLOGIA

### 2.1. SISTEMA FLUIDODINÂMICO ESTUDADO

Tendo em vista a otimização de parâmetros dentro de um sistema hidráulico, deve-se primeiramente definir o sistema e os parâmetros que devem ser otimizados. Para os fins de estudo desse trabalho, o sistema considerado será o sistema exibido na Figura 3.



**Figura 3 - Sistema hidráulico a ser otimizado. Fonte: NEAGOE & POPA, 2013.**

O sistema mostrado consiste de um reservatório de altura  $H_r$ , dois trechos constituídos por condutos forçados com seus respectivos comprimentos  $L_1$  e  $L_2$ , diâmetros  $D_1$  e  $D_2$  e fatores de atritos  $f_1$  e  $f_2$ , um tanque de alívio de pressão com altura  $l_t$ , diâmetro  $D_t$  e fator de atrito  $f_t$ , além de uma válvula situada no final do trecho 1.

Nesse trabalho será realizada a otimização dos fatores de atrito  $f_1$  e  $f_2$ . Os demais parâmetros do sistema são conhecidos por meio da aplicação de um método algébrico analítico. Esses parâmetros serão abordados mais adiante na seção metodologia.

O modelo mostrado pela figura 3 foi escolhido por ser um modelo em escala que representa a usina hidroelétrica de Râul-Mare Retezat, localizada na Romênia. Uma vez que o objetivo do trabalho é criar um algoritmo que possa ser utilizado em sistemas reais, a escolha desse modelo reflete o objetivo final desse trabalho.

### 2.2. ADAPTAÇÃO DO MODELO

Com base na literatura especializada, para o modelo hidráulico considerado tem-se a seguinte função objetivo descrita pela equação 1:

$$\min \left\{ f(X) = \sum (l_t(t) - l_t(t, X))^2 \right\} \quad (1)$$

Onde  $l_t(t)$  é a altura de coluna de água no tanque de alívio de pressão em função do tempo e  $l_t(t, X)$  é a altura de coluna de água em função do tempo e do parâmetro a ser otimizado, no caso,  $f_1$  e, posteriormente,  $f_2$  (NEAGOE & POPA, 2013).

### 2.2.1. Determinação de $l_t(t)$

Para determinar o termo  $l_t$  da equação 1, foi estimada uma altura máxima do tanque de alívio de pressão  $l_{tmax}$  e, com esse termo, determinou-se o volume máximo  $vol_{max}$  do tanque, conforme a equação 2.

$$vol_{max} = \frac{\pi D_t^2}{4} l_{tmax} \quad (2)$$

Onde  $D_t$  representa o diâmetro do tanque de alívio de pressão.

Dessa maneira tem-se que para o tanque de alívio de pressão, o volume de água em função do tempo pode ser escrito como o volume total do tanque menos o volume que sai do tanque, dado pela vazão ( $Q_0$ ) do sistema multiplicado pelo tempo, como descrito pela equação 3.

$$vol(t) = vol_{max} - Q_0 t \quad (3)$$

Uma vez que o volume no instante  $t$  pode ser escrito como:

$$vol(t) = \frac{\pi D_t^2}{4} l_t(t) \quad (4)$$

Pode-se combinar as equações 3 e 4 e isolar  $l_t(t)$  para encontrar a expressão deste termo que será inserido na função objetivo.

$$l_t(t) = \frac{4 \cdot (vol_{max} - Q_0 t)}{\pi D_t^2} \quad (5)$$

### 2.2.2. Determinação de $l_t(t, X)$

Com o intuito de se determinar o termo  $l_t(t, X)$  da equação 1 para que a função seja implementada no algoritmo realizando a otimização dos parâmetros  $f_1$  e  $f_2$ , foi aplicada a equação de Bernoulli modificada entre o topo do tanque de alívio de pressão e a válvula de saída do sistema para  $f_1$ , e entre o topo do tanque e um ponto no trecho 2 para  $f_2$ .

#### 2.2.2.1. Determinação de $l_t(t, f_1)$

Aplicando-se a equação de Bernoulli modificada entre os trechos  $t$  e 1 tem-se:

$$\frac{P_t}{\rho} + \frac{V_t^2}{2} + gl_t + f_t \frac{l_t}{D_t} \frac{V_t^2}{2} = \frac{P_1(t)}{\rho} + \frac{V_1^2}{2} + gZ_1 + f_1 \frac{L_1}{D_1} \frac{V_1^2}{2} \quad (6)$$

Uma vez que  $D_t$  e  $D_1$  são iguais, os termos de velocidade  $\frac{V_t^2}{2}$  e  $\frac{V_1^2}{2}$  se anulam. Sabe-se também que  $P_t = P_{atm}$  e  $Z_1 = 0$ , pois esta cota foi adotada como referência. Logo, a equação 6 torna-se:

$$\frac{P_{atm}}{\rho} + gl_t + f_t \frac{l_t V_t^2}{D_t} = \frac{P_1(t)}{\rho} + f_1 \frac{L_1 V_1^2}{D_1} \quad (7)$$

Isolando-se  $l_t$ , encontra-se uma expressão para  $l_t$  que é função do fator  $f_1$  e do tempo  $t$ , pois  $P_1 = P_1(t)$ .

$$l_t = \frac{\frac{P_1(t) - P_{atm}}{\rho} + f_1 \frac{L_1 V_1^2}{D_1}}{g + \frac{f_t V_t^2}{D_t}} \quad (8)$$

Para se encontrar uma função que descreva  $l_t$  unicamente em função de  $t$  e  $f_1$  pode-se substituir a função  $P_1(t)$  pela função  $l_t(t)$  encontrada no item 2.1.1. Sabe-se que a pressão em  $P_1$  será a altura da coluna d'água  $l_t$  quando o sistema estiver em repouso (condição hidrostática imposta), portanto, a aproximação  $P_1(t) \approx l_t(t)$  pode ser feita. Obtendo-se assim:

$$l_t(t, f_1) = \frac{\frac{4 \cdot (vol_{max} - Q_0 t)}{\pi D_t^2} - P_{atm}}{\rho} + f_1 \frac{L_1 V_1^2}{D_1}}{g + \frac{f_t V_t^2}{D_t}} \quad (9)$$

#### 2.2.2.2. Determinação de $l_t(t, f_2)$

Aplicando-se a equação de Bernoulli modificada entre os trechos 2 e  $t$  obtém-se:

$$\frac{P_t}{\rho} + \frac{V_t^2}{2} + gl_t + f_t \frac{l_t V_t^2}{D_t} = \frac{P_1(t)}{\rho} + \frac{V_2^2}{2} + gZ_2 + f_2 \frac{L_2 V_2^2}{D_2} \quad (10)$$

Uma vez que  $P_t = P_{atm}$  e  $Z_2 = 0$ , pois esta cota foi adotada como referência, a equação 10 torna-se:

$$\frac{P_{atm}}{\rho} + \frac{V_t^2}{2} + gl_t + f_t \frac{l_t V_t^2}{D_t} = \frac{P_2(t)}{\rho} + \frac{V_2^2}{2} + f_2 \frac{L_2 V_2^2}{D_2} \quad (11)$$

Uma vez que  $P_2 = P_2(t)$ , pode-se isolar  $l_t$ , encontrando-se assim uma expressão para  $l_t$  em função do fator  $f_2$  e do tempo  $t$ .

$$l_t = \frac{\frac{P_2(t) - P_{atm}}{\rho} + \frac{V_2^2 - V_t^2}{2} + f_2 \frac{L_2 V_2^2}{D_2}}{g + \frac{f_t V_t^2}{D_t}} \quad (12)$$

Para se encontrar uma função que descreva  $l_t$  unicamente em função de  $t$  e  $f_2$  pode-se, assim como foi feito no item 2.1.2.2., substituir a função  $P_2(t)$  pela função  $l_t(t)$  encontrada no

item 2.1.1. Assumindo-se assim que a pressão em  $P_2$  será a altura da coluna d'água  $l_t$  (condição hidrostática imposta), portanto,  $P_2(t) \approx l_t(t)$ . Substituindo tem-se:

$$l_t(t, f_2) = \frac{\frac{4 \cdot (vol_{max} - Q_0 t)}{\pi D_t^2} - P_{atm}}{\rho} + \frac{V_2^2 - V_t^2}{2} + f_2 \frac{L_2 V_2^2}{D_2^2} \quad (13)$$

$$g + \frac{f_t V_t^2}{D_t^2}$$

### 2.2.3. Função Objetivo

Tomando posse das expressões que determinam os termos  $l_t(t)$ , descrito pela equação 5, e os termos  $l_t(t, X)$ , descritos pelas equações 9 e 13 para  $f_1$  e  $f_2$  respectivamente, pode-se substituir os termos na equação 1, que é a função objetivo do sistema considerado. Dessa maneira, obtém-se a função objetivo que deve ser inserida no algoritmo para que a otimização seja realizada.

Os demais parâmetros do sistema foram determinados pela aplicação do método algébrico analítico *AWM* (*Algebraic Waterhammer Method*), resultando em  $L_1 = 1000$  m;  $D_1 = 0.6$  m;  $L_2 = 2000$  m;  $D_2 = 0.75$  m;  $H_r = 75$  m;  $Q_0 = 0.75$  m<sup>3</sup>/s;  $a = 1000$  m/s;  $Z_{bt} = 2.3$  m;  $D_t = 0.6$  m;  $f_t = 0.02$  and  $\mu_s = 0.6$  (NEAGOE & POPA, 2013).

Os valores de  $f_1$  e  $f_2$  também foram determinados por esse método e os valores encontrados servirão como base de comparação para os resultados obtidos por meio da otimização dos parâmetros.

### **3. FORMULAÇÃO DO ALGORITMO GENÉTICO**

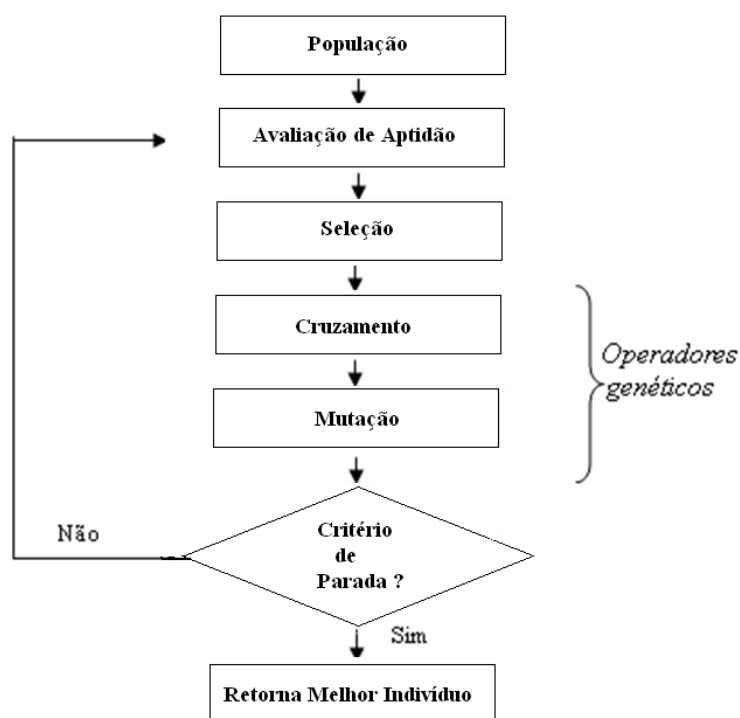
#### **3.1. CARACTERÍSTICAS DOS ALGORITMOS GENÉTICOS**

Em um algoritmo genético, uma população de possíveis soluções para um determinado problema deve evoluir para as soluções consideradas ótimas do problema por meio de métodos baseados em probabilidades provenientes de metáforas biológicas aplicadas em sua codificação. Isso tende a fazer com que as soluções obtidas convirjam para soluções cada vez melhores à medida que o processo continua (SILVA, 2005).

De maneira geral, os algoritmos genéticos funcionam realizando iterações, ou seja, processos repetitivos. A partir de uma população inicial, geralmente gerada aleatoriamente, os indivíduos são submetidos a um processo de avaliação de sua aptidão para o fim desejado, depois os indivíduos são selecionados com base em sua aptidão. Os indivíduos selecionados são aqueles que darão origem a uma nova geração de indivíduos, em outras palavras, são os indivíduos que irão se reproduzir (SILVA, 2005).

Esses indivíduos passam pelos operadores genéticos que irão realizar o cruzamento dos genótipos e causar mutações nas gerações seguintes. O processo é repetido até que sejam atendidos os critérios de parada (SILVA, 2005).

Muito embora algoritmos genéticos usem métodos heurísticos e probabilísticos para obter os novos elementos, eles não podem ser considerados uma simples busca aleatória. Essa afirmação baseia-se no fato de que os mesmos buscam explorar, de forma inteligente e pautando-se nas informações disponíveis, a procura de novos indivíduos ou soluções capazes de melhorar ainda mais um critério de desempenho. Esses algoritmos tendem a dirigir a procura para regiões do espaço de busca onde é provável que estejam os pontos ótimos (SILVA, 2005).



**Figura 4 - Estrutura básica de um algoritmo genético. Fonte: RODRIGUES, 2007.**

### 3.1.1. Codificação

Para que a aplicação de um algoritmo genético seja viabilizada em um determinado problema, a primeira etapa deve ser a representação das variáveis dentro do código, ou seja, a codificação das variáveis e parâmetros (MOGNON, 2004).

É lógico pensar que, para cada tipo de codificação, estarão atrelados a elas características específicas que podem auxiliar ou não na resolução de um dado problema. Portanto, deve-se conhecer suas características e peculiaridades a fim de se selecionar o tipo de codificação mais adequada para o problema confrontado (MOGNON, 2004).

Algoritmos genéticos processam populações de indivíduos ou cromossomos. Os cromossomos são estruturas de dados, normalmente representados por vetores binários, reais ou mistos, que representam uma possível solução para o problema a ser otimizado (SILVA, 2005).

Os principais tipos de codificação são a codificação binária e a codificação real.

#### 3.1.1.1. Codificação binária

A codificação binária consiste na representação das possíveis soluções como vetores de zeros e uns. Dessa forma, cada parâmetro intrínseco a uma determinada solução é representado por um *bit*, que atua como gene. O número de *bits* de uma solução pode ser



modificado e interfere diretamente no tamanho do espaço de busca da solução bem como com a precisão da solução fornecida (RODRIGUES, 2007).

Esse tipo de codificação possui maior facilidade de implementação, uma vez que a programação dos operadores genéticos se torna mais simples utilizando apenas vetores binários (SILVA, 2005).

Teoricamente, essa representação é independente do problema, pois uma vez encontrada a representação em vetores binários, as operações padrões podem ser utilizadas, facilitando o seu emprego em diferentes classes de problemas (SPEARS ET AL., 1993; CORRÊA, 2000).

A codificação binária possui muita importância histórica, uma vez que foi utilizada nos primeiros trabalhos a respeito de algoritmos genéticos. Porém, a codificação binária possui algumas limitações, como a dificuldade de lidar com múltiplas dimensões, principalmente com alto grau de precisão, causada pelo fato de que para altos graus de precisão é necessária a utilização de vetores extremamente grandes (SILVA, 2005).

#### 3.1.1.2. Codificação Real

Uma vez que a codificação binária pode ser amplamente utilizada, a codificação real é geralmente aplicada em problemas de alta complexidade, representando cada cromossomo como vetores de números reais (MOGNON, 2004).

Esse tipo de codificação é muito útil quando as variáveis a serem otimizadas são contínuas e com mais de uma dimensão. Por trabalhar diretamente com números reais, a codificação real permite a utilização de cromossomos menores para representar soluções complexas. Para representar soluções muito complexas em codificação binária, faz-se necessário o uso de cromossomos maiores (RODRIGUES, 2007).

Em termos computacionais, utilizam-se números de ponto flutuante para representar o cromossomo, sendo seu comprimento o mesmo do vetor que representa a solução do problema, onde cada gene representa uma variável do problema. No entanto, modificações nos operadores genéticos são necessárias (RODRIGUES, 2007).

#### 3.1.2. Função de Aptidão (*Fitness*)

A função *fitness* é uma função utilizada no código para verificar o quão boa, ou ruim, é uma possível solução para o problema estudado. Esse dado é de extrema importância para a seleção, etapa que será explicitada mais adiante (MOGNON, 2004; SILVA, 2005).

Não existe uma função *fitness* que seja absoluta, que deve ser usada em todos os algoritmos. Como já mencionado, os problemas de otimização, em geral, se resumem em

determinar máximos e mínimos das funções objetivo. Dependendo se o algoritmo desenvolvido procura máximos ou mínimos, a função *fitness* varia (SILVA, 2005).

Fazendo uma analogia com a natureza, essa função determinaria se o indivíduo está mais ou menos apto ao ambiente no qual ele está inserido (RODRIGUES, 2007).

### 3.1.3. Elitismo

O elitismo visa garantir que, em uma população artificial, um número  $n$  de indivíduos que sejam soluções melhores que as soluções geradas na geração seguinte não sejam eliminados durante o processo iterativo (RODRIGUES, 2007).

Como já dito, o algoritmo deve buscar as melhores soluções, e os cruzamentos e mutações que ocorrem de uma geração para outra pode acabar por gerar soluções piores que as existentes na geração anterior (RODRIGUES, 2007).

O elitismo tem a função de garantir que  $n$  boas soluções não sejam descartadas caso o algoritmo não consiga gerar soluções melhores (RODRIGUES, 2007).

### 3.1.4. Seleção

O processo de seleção é o processo responsável em determinar, com base na aptidão, quais os indivíduos que irão se reproduzir, passando suas características para a próxima geração, e quais indivíduos não irão se reproduzir e serão extintos (MOGNON, 2004).

Esse processo, análogo a seleção natural, de acordo com a aptidão de cada indivíduo, determina se ele irá se reproduzir ou não. No entanto, devido a probabilidade do melhor indivíduo não estar perto da solução ótima global, indivíduos com aptidão relativamente baixa também possuem chances de participarem do processo de reprodução (SILVA, 2005).

As estratégias de seleção podem ser classificadas como determinísticas ou estocásticas (SILVA, 2005). A estratégia determinística está relacionada com a aferição de um determinado valor. Já a estocástica se relaciona com as probabilidades relacionadas a cada valor.

#### 3.1.4.1. Dizimação

A dizimação é uma estratégia determinística simples que consiste em ordenar os indivíduos através do valor de sua função *fitness* e remover um número fixo de indivíduos que apresentarem baixa aptidão. Estipula-se assim um valor mínimo aceitável para o valor da função *fitness* e elimina-se quem não atingir esse valor mínimo (SILVA, 2005).

A grande vantagem dessa estratégia de seleção consiste na simplicidade de implementação da mesma no código. No entanto, a dizimação apresenta uma grande

desvantagem: características genéticas únicas podem ser perdidas em definitivo uma vez que um indivíduo é removido da população. A perda da diversidade é uma consequência natural do processo evolutivo, entretanto, em um algoritmo genético essa perda ocorre de maneira muito rápida, antes que os benefícios de uma característica possam ser verificados no processo, diferentemente do que ocorre na natureza (MOGNON, 2004).

#### 3.1.4.2. Seleção proporcional

A seleção proporcional, por sua vez, é um método de seleção estocástica que fornece chance a todos os indivíduos de participarem do processo de reprodução, respeitando o valor da função *fitness* associada. Portanto, todos poderão participar do processo de formação da nova geração. Entretanto, aqueles que possuem maiores valores de *fitness* são escolhas mais prováveis (MOGNON, 2004).

Um dos métodos de seleção proporcional mais utilizado em algoritmos genéticos é denominado método da roleta. Nesse método, quando se deseja determinar máximos das funções objetivo, a probabilidade de seleção ( $P_s$ ) é calculada pelo valor da função *fitness* do indivíduo ( $f(i)$ ) dividida pelo somatório dos valores da função *fitness* para cada indivíduo, como expressa na equação 14.

$$P_s = \frac{f(i)}{\sum f(i)} \quad (14)$$

Para se determinar mínimos da função objetivo, o valor da probabilidade de seleção ( $P_s$ ) é calculado somatório dos valores de função *fitness* menos o valor da função *fitness* do indivíduo, dividido pelo somatório dos valores da função *fitness* para cada indivíduo, como expressado na equação 15.

$$P_s = \frac{\sum f(i) - f(i)}{\sum f(i)} \quad (15)$$

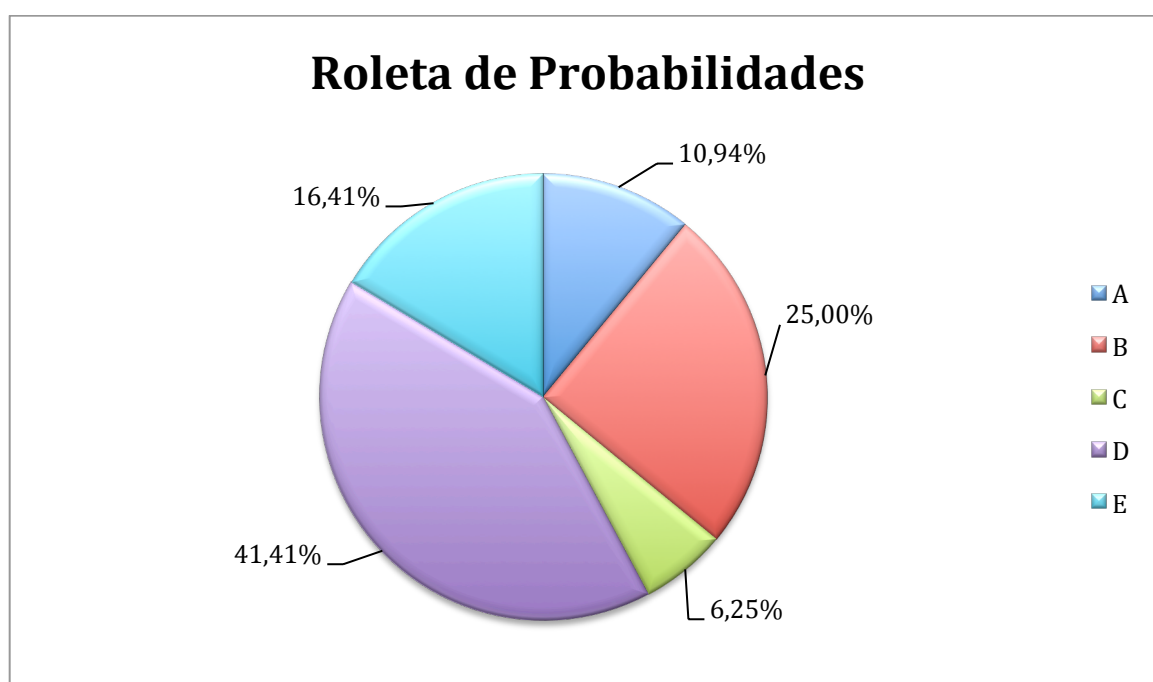
Com a probabilidade de seleção em mãos, gera-se um número aleatório que definirá qual indivíduo foi selecionado para o processo reprodutivo (MOGNON, 2004).

Para exemplificar o método descrito acima, segue a Tabela 1, onde o valor *fitness* representa o valor absoluto obtido como resultado da função *fitness* para as características do indivíduo, e a probabilidade de seleção indica o quanto esse valor representa, considerando o total, expressa em termos percentuais, buscando-se um máximo associado.

**Tabela 1 – Exemplos de dados para roleta de probabilidades.**

| Indivíduo | Valor <i>fitness</i> | Probabilidade de Seleção |
|-----------|----------------------|--------------------------|
| A         | 14                   | 10,94 %                  |
| B         | 32                   | 25,00 %                  |
| C         | 8                    | 6,25 %                   |
| D         | 53                   | 41,41 %                  |
| E         | 21                   | 16,41 %                  |

Observando a Tabela 1, pode-se elaborar um gráfico representando proporcionalmente a probabilidade de cada indivíduo ser escolhido.

**Figura 5 - Roleta de Probabilidades.**

Tendo dividido o espaço de seleção por intervalos, considerando as probabilidades calculadas, gera-se um número aleatório e define-se os indivíduos que passarão seus genótipos para a geração seguinte (SILVA, 2005).

Outro possível método de seleção proporcional é a seleção por torneio, onde os indivíduos são divididos em amostras menores, e o melhor de cada amostra é selecionado como reprodutor (SILVA, 2005).

O tamanho da amostra é um importante parâmetro desse tipo de seleção, pois valores muito grandes tendem a diminuir as chances de um indivíduo com menor valor *fitness* ser

selecionado. O valor mínimo para esse parâmetro é 2, visto que caso seja menor que isso, não há competição (LINDEN, 2006; MOGNON, 2004).

### 3.1.5. Operadores Genéticos

Operadores genéticos são os responsáveis pela transformação das populações por meio de sucessivas gerações buscando melhorar os indivíduos da geração seguinte. Esses operadores são o grande diferencial dos algoritmos genéticos e são elaborados com o intuito de evoluir a população, preservando as boas características observadas em populações anteriores (MOGNON, 2004).

Uma vez definidos os indivíduos que darão origem à nova geração, obedecendo aos critérios de seleção supracitados, os filhos são gerados a partir da recombinação dos cromossomos dos pais, utilizando operadores genéticos básicos, o cruzamento, ou *crossover*, e a mutação (RODRIGUES, 2007).

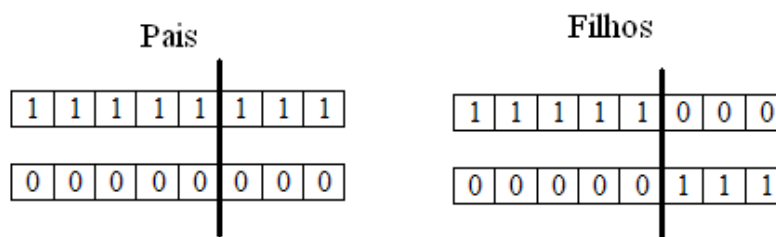
#### 3.1.5.1. Cruzamento

O *crossover* consiste na recombinação do material genético dos indivíduos selecionados. Ele é o responsável por juntar características de dois indivíduos e colocar em um único indivíduo (RODRIGUES, 2007).

##### 3.1.5.1.1. Cruzamento em codificação binária

Dentro de um algoritmo genético essa recombinação de genes pode ser feita de três maneiras, que podem ser mescladas ou não.

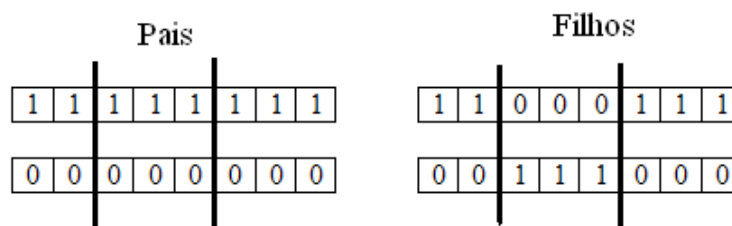
Uma das formas mais simples de realizar esse cruzamento é dividir os cromossomos dos pais em dois segmentos e os descendentes receberem um segmento de cada pai, colocando assim características de cada um dos pais em cada indivíduo da geração seguinte. Essa forma é denominada cruzamento de ponto único e pode ser melhor entendida na figura 6 a seguir.



**Figura 6 - Cruzamento de um único ponto. Fonte: RODRIGUES, 2007.**

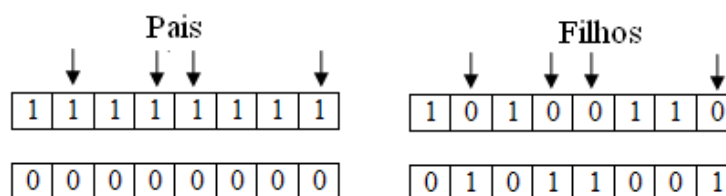
Outro tipo de *crossover* é o de ponto duplo. Onde segmenta-se o cromossomo dos pais em três partes ao invés de duas, e os filhos recebem esses segmentos intercaladamente. Pode

ser entendido como um tipo de *crossover* um pouco mais complexo, uma vez que o material genético é mais segmentado (MOGNON, 2004).



**Figura 7 - Cruzamento de ponto duplo. Fonte: RODRIGUES, 2007.**

Há também o chamado *crossover* em pontos aleatórios, entretanto, esse pode ser visto como uma generalização do *crossover* de ponto duplo. Gerar pontos aleatórios para definir qual gene passa de um ou outro pai para o filho pode ser visto como a definição de  $n$  segmentos onde os cromossomos serão divididos (MOGNON, 2004).



**Figura 8 - Cruzamento em pontos aleatórios. Fonte: RODRIGUES, 2007.**

### 3.1.5.1.2. Cruzamento em codificação real

Uma vez que na codificação real os vetores que contêm as características das soluções é de natureza contínua, o processo de cruzamento é bem distinto daquele aplicado a codificação binária.

Os operadores para a codificação real não atuam no cromossomo como um todo, mas sim em um gene de cada vez. Isso significa que o processo de cruzamento atuará distintamente para cada variável real do problema (MOGNON, 2004).

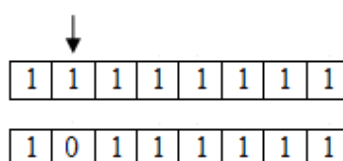
Há diversas maneiras de se gerar descendentes a partir da derivação genética na codificação real, como a utilização da média ponderada ou utilizando uma metodologia similar ao cruzamento binário, onde ocorre a segmentação do cromossomo em duas partes e acontece o cruzamento genético entre dois pais. Entretanto, essas técnicas não serão abordadas em detalhes no presente trabalho (RODRIGUES, 2007).

### 3.1.5.2. Mutação

A etapa da mutação consiste na alteração aleatória e sem previsão de um gene. A taxa de ocorrência desse fenômeno dentro do algoritmo deve ser baixa ( $\geq 10\%$ ), a fim de não deixar que a busca se torne uma busca aleatória (SILVA, 2005).

Essa etapa é de extrema importância, pois caso o algoritmo esteja convergindo para um mínimo local, a mutação de um indivíduo pode acabar levando-o para outras regiões do espaço de busca, espaços que não seriam alcançados apenas com a recombinação genética que podem conter ou não outras soluções (SILVA, 2005).

A mutação é um operador genético muito simples de ser realizado. No caso da codificação binária, um bit aleatório é selecionado no cromossomo, tendo seu valor invertido (SILVA, 2005).



**Figura 9 - Mutação no cromossomo de codificação binária. Fonte: RODRIGUES, 2007.**

Algoritmos genéticos que utilizam codificação real podem realizar a mutação com uma permutação aleatória em genes aleatórios. Essa permutação pode ser um valor escolhido de uma distribuição simétrica com média zero. Usualmente, a distribuição utilizada é a distribuição uniforme ou a gaussiana, com desvio padrão aproximadamente igual a 10% da possível variação do gene em questão (MOGNON, 2004).

### 3.1.5.3. Critérios de Convergência

A convergência de um algoritmo genético ocorre de acordo com critérios impostos ao mesmo em sua codificação.

Alguns critérios de convergência utilizados são a estipulação de um erro máximo aceitável para um valor *fitness*, assim, se um indivíduo atingir um valor *fitness* que gere um erro menor ou igual ao máximo, o algoritmo para. Mas, para que isso seja implementado, é necessário conhecer um valor *fitness* de referência, o que nem sempre é possível (RODRIGUES, 2007).

Pode-se utilizar também a convergência pautada na diversidade genética dos indivíduos da população. Uma vez que não exista mais diversidade entre os indivíduos, significa que todos eles convergiram para um mesmo valor e, portanto, não há razão para continuar o processo iterativo (MOGNON, 2004).

Outro critério que pode ser utilizado é estipular o número máximo possível de gerações que o algoritmo pode gerar. Assim, atingindo determinado número, ele cessa (MOGNON, 2004).

Entretanto, a melhor maneira é associar esses métodos em um só. Pois, analisando puramente pela variabilidade genética, pode acontecer do algoritmo convergir para máximos ou mínimos locais, convergindo prematuramente. Analisando apenas pelo número máximo de gerações, pode ser que o número estipulado não seja o número necessário para que o algoritmo convirja corretamente (MOGNON, 2004).

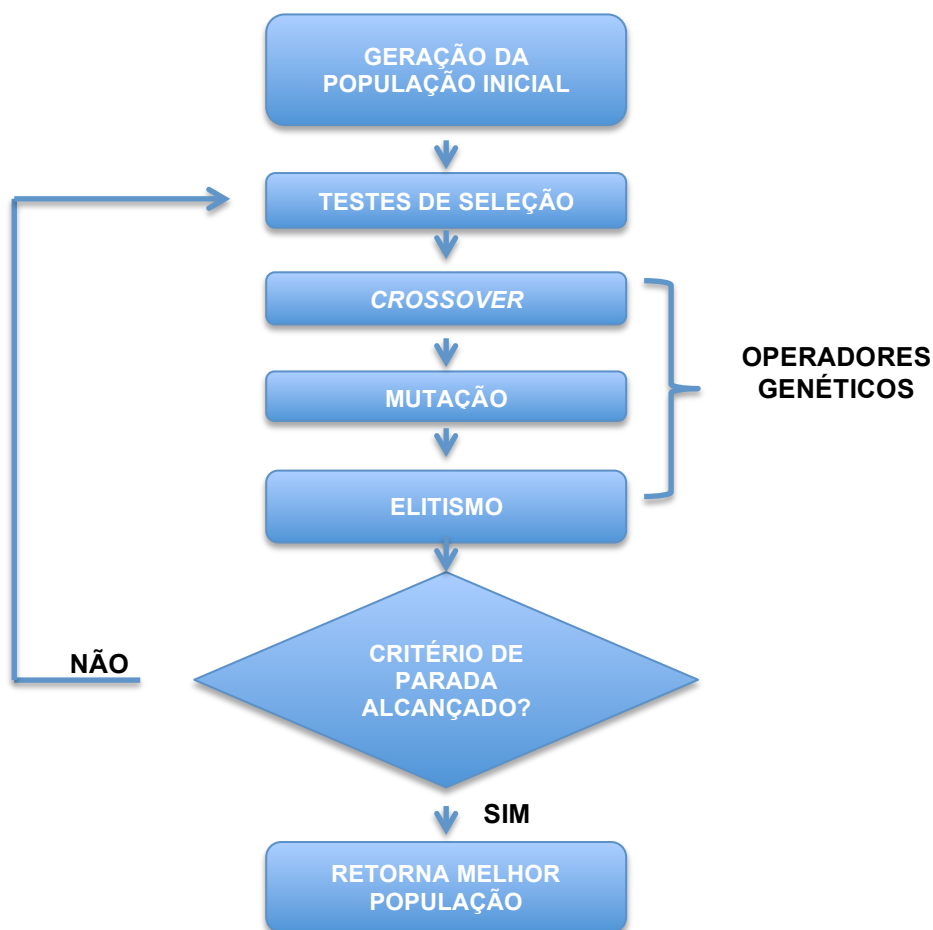
Portanto, um bom sistema de convergência pode ser estipular um número máximo de iterações, e quando esse número for atingido, verificar a variabilidade genética. Caso ainda haja variabilidade genética entre os indivíduos, estende-se o número máximo de gerações (RODRIGUES, 2007).

### 3.2. DESCRIÇÃO DO CÓDIGO ELABORADO

O algoritmo desenvolvido para a otimização de um sistema transiente hidráulico, prevendo a ocorrência de golpes de aríete no mesmo, foi desenvolvido com o auxílio da ferramenta *Matlab*. Elaborado para encontrar máximos das funções objetivo, uma vez definido o modelo a ser otimizado, caso haja a necessidade da determinação de mínimos, o algoritmo pode ser facilmente adaptado para o fim.

O código em si foi dividido em funções, as quais cada uma representa uma das etapas expostas a seguir no fluxograma do código desenvolvido.





**Figura 10 - Fluxograma do algoritmo elaborado.**

Para o algoritmo proposto, a função *fitness* adotada foi a própria função objetivo. Uma vez que se procura o máximo ou o mínimo da função, analisa-se a resposta de cada indivíduo quando inseridos nela, o que fornece um parâmetro *fitness* adequado.

Acerca do critério de seleção, optou-se pela utilização do método estocástico da roleta. A justificativa para a escolha desse método pauta-se nas vantagens já apresentadas na sessão 2.1.4.2, principalmente considerando que esse método não elimina por completo os indivíduos, tendendo assim a preservar suas características que podem ser vantajosas.

A codificação adotada para os genes de cada indivíduo foi a codificação binária, tendo em vista a maior facilidade de programação da mesma, bem como a maior facilidade para a codificação dos operadores genéticos existentes no algoritmo.

O *crossover* inserido no código foi o *crossover* de ponto único. Essa escolha foi feita para facilitar a programação, entretanto, em etapas posteriores, os outros tipos de *crossover* também podem ser implementados visando o aprimoramento do algoritmo, podendo assim diminuir o tempo de convergência e reduzir esforços computacionais.

As taxas de *crossover* e mutação, bem como o número de indivíduos de uma população são parâmetros que não foram fixados, com o objetivo de observar suas influências em testes preliminares.

## 4. RESULTADOS

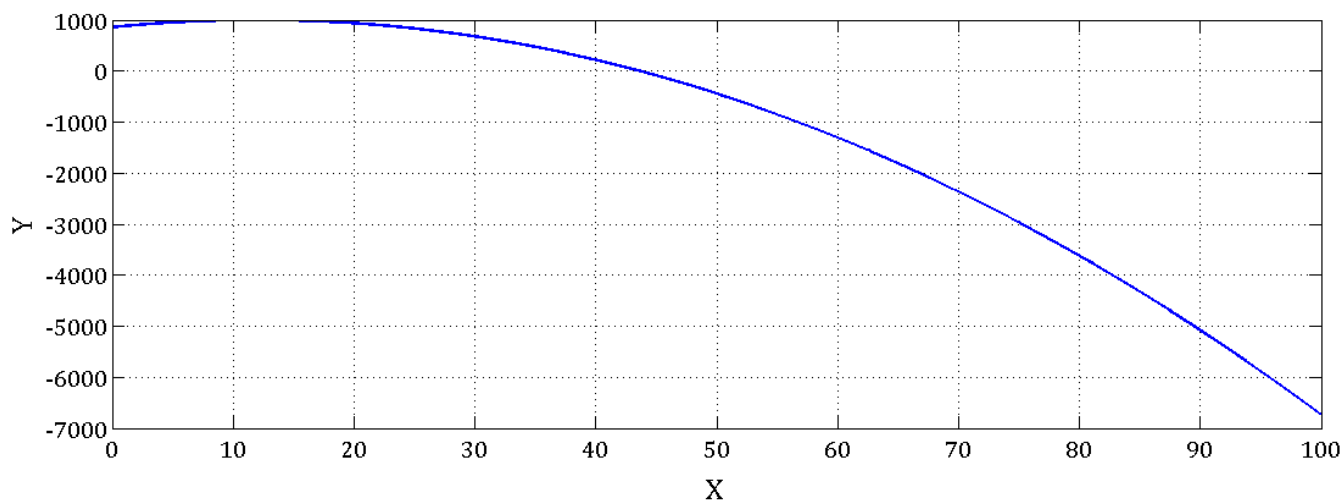
### 4.1. RESULTADOS PRELIMINARES

Com o intuito de testar o algoritmo elaborado, o mesmo foi utilizado para otimizar funções com comportamento conhecido. Os resultados apresentados a seguir foram gerados a partir de uma população aleatória com 20 indivíduos. Ao final do processo, pode-se verificar os resultados graficamente, observando a taxa de *crossover*, mutação e número total de iterações.

Os testes realizados consistiram na otimização das seguintes funções objetivo descritas pelas Equações 16, 17 e 18, expostas a seguir como casos 1, 2 e 3:

#### *Caso 1*

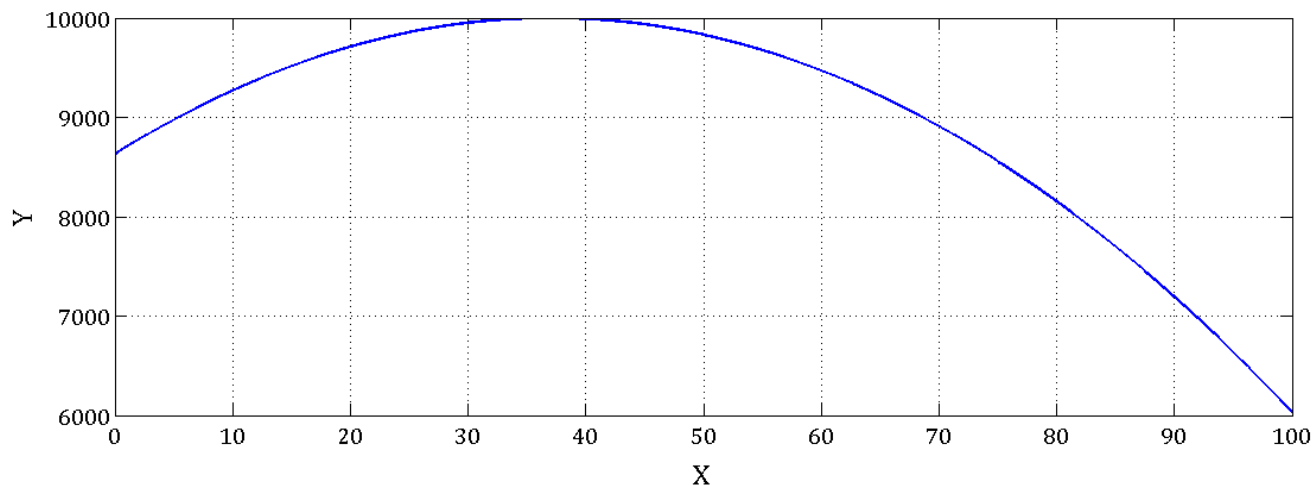
$$f(x) = -(x - 12)^2 + 1000 \quad (16)$$



**Figura 11 - Comportamento da Equação 16.**

#### *Caso 2*

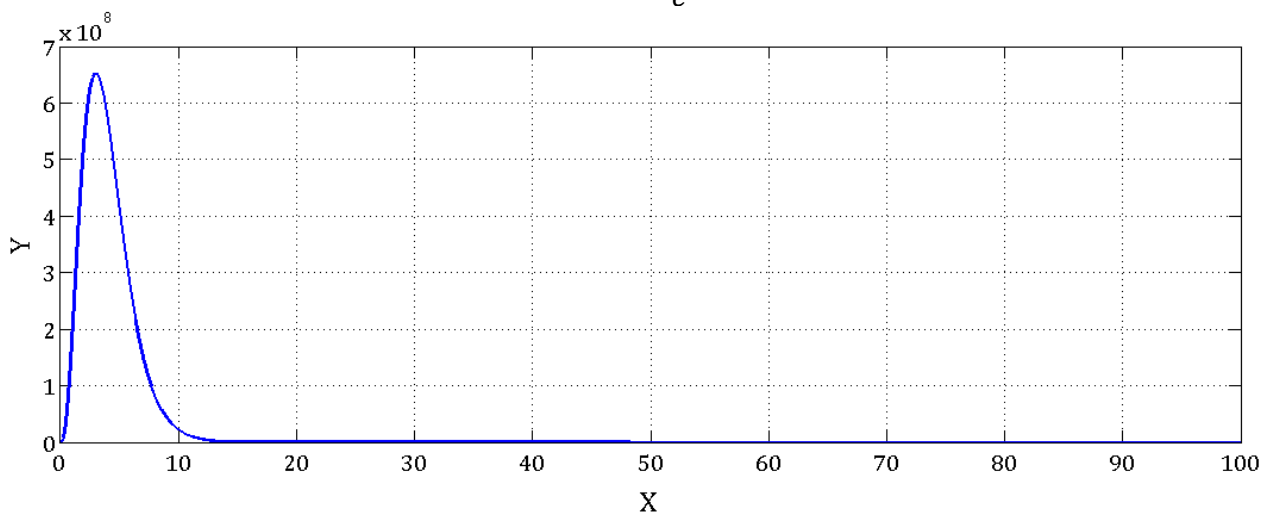
$$f(x) = -(x - 37)^2 + 10000 \quad (17)$$



**Figura 12 – Comportamento da Equação 17.**

**Caso 3**

$$f(x) = \frac{x^3}{e^{x-20}} \quad (18)$$



**Figura 13 – Comportamento da equação 18.**

Nos casos mostrados acima, suas equações juntamente com seus gráficos, observa-se que as funções descritas pelas equações 16 e 17 são funções similares que variam a posição do pico da parábola e seu valor máximo, para que se possa avaliar a influência desses dados na convergência do algoritmo.

Nota-se que para o primeiro caso o valor do máximo global, objetivo do algoritmo, se encontra na coordenada  $x = 12$ , no segundo caso em  $x = 37$  e no terceiro caso em  $x = 3$ . Tendo em vista o comportamento das funções, as mesmas foram inseridas dentro do algoritmo e seus resultados estão expostos a seguir.

Para a realização dos testes, considerou-se duas situações:

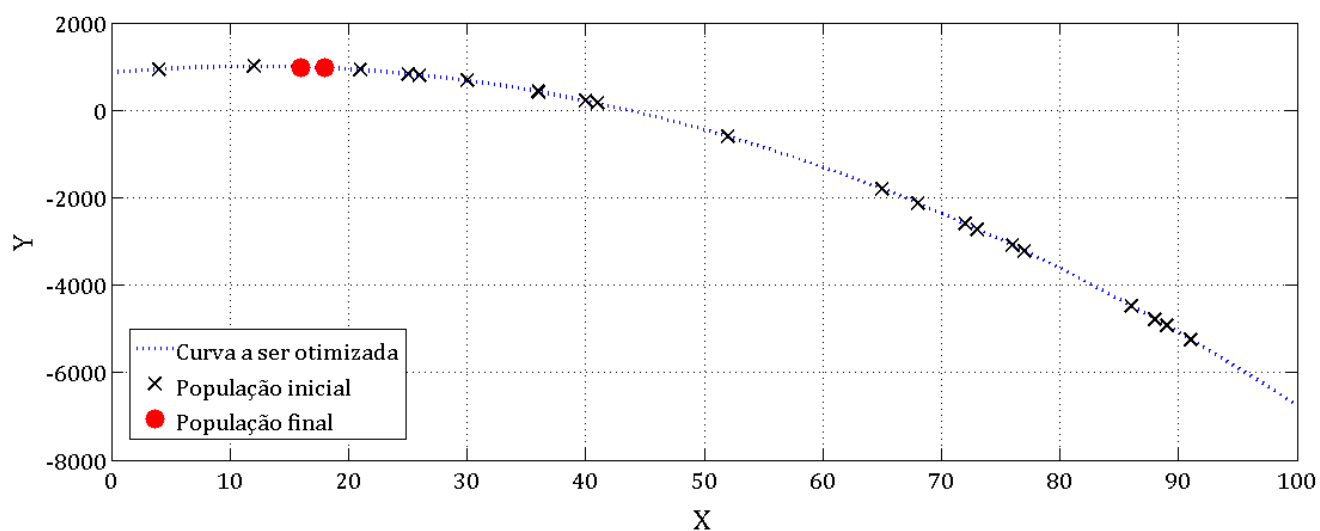
**Situação 1**

- Taxa de *crossover* igual a 80%;
- Taxa de mutação igual a 5%;
- Número total de iterações igual a 500.

**Situação 2**

- Taxa de *crossover* igual a 90%;
- Taxa de mutação igual a 1%;
- Número total de iterações igual a 1000.

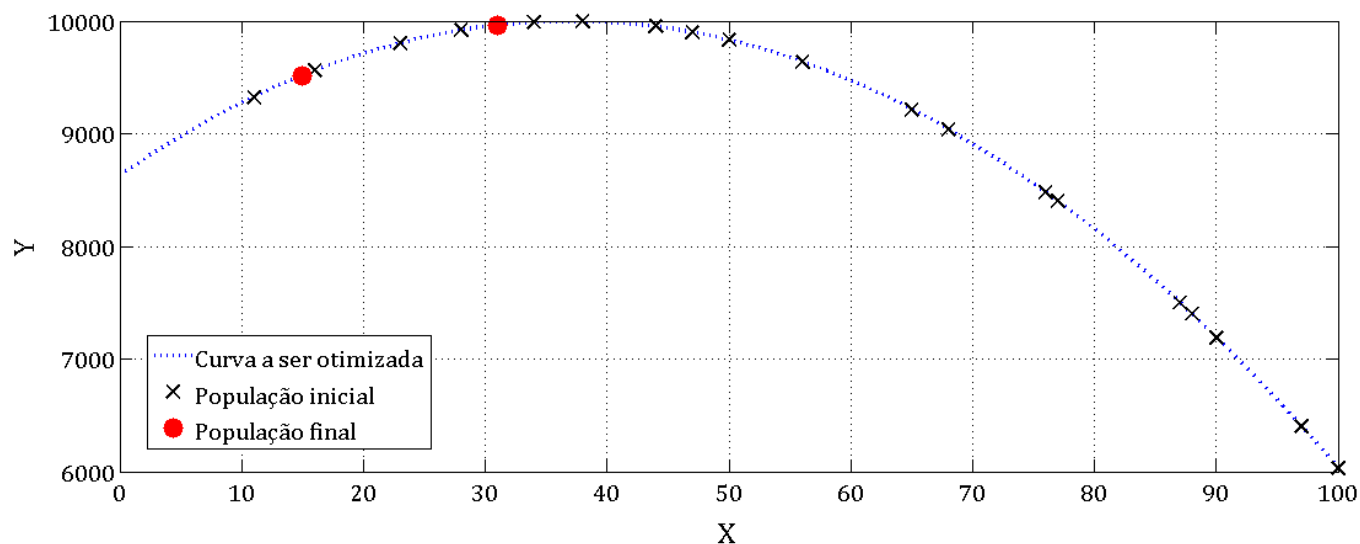
Considerando a situação 1 foram obtidos os seguintes resultados.

**Caso 1****Figura 14 – Resultado gráfico da resposta do algoritmo.****Tabela 2 – Resultados obtidos no caso um considerando a situação um.**

| População Inicial<br>(Coordenada $x$ ) | População Final<br>(Coordenada $x$ ) |
|--|--------------------------------------|
| 30                                     | 16                                   |
| 12                                     | 18                                   |
| 26                                     | 18                                   |
| 76                                     | 18                                   |
| 25                                     | 18                                   |
| 40                                     | 18                                   |
| 91                                     | 18                                   |
| 89                                     | 18                                   |
| 65                                     | 18                                   |
| 72                                     | 18                                   |
| 77                                     | 18                                   |
| 86                                     | 18                                   |
| 36                                     | 18                                   |
| 21                                     | 18                                   |
| 41                                     | 18                                   |
| 4                                      | 18                                   |

|    |    |
|----|----|
| 68 | 18 |
| 73 | 18 |
| 88 | 18 |
| 52 | 18 |

**Caso 2**



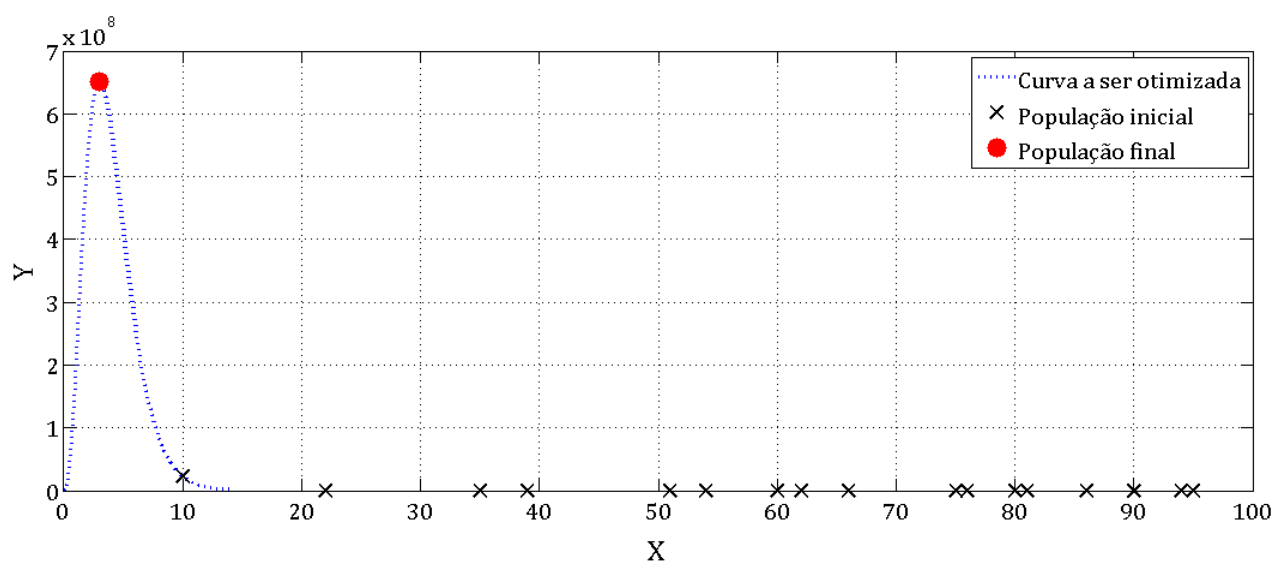
**Figura 15 – Resultado gráfico da resposta do algoritmo.**

**Tabela 3 – Resultados obtidos para o caso dois considerando a situação um.**

| População Inicial<br>(Coordenada $x$ ) | População Final<br>(Coordenada $x$ ) |
|--|--------------------------------------|
| 90                                     | 31                                   |
| 65                                     | 31                                   |
| 23                                     | 31                                   |
| 44                                     | 15                                   |
| 50                                     | 15                                   |
| 100                                    | 31                                   |
| 16                                     | 31                                   |
| 87                                     | 31                                   |
| 77                                     | 31                                   |
| 68                                     | 31                                   |
| 11                                     | 15                                   |
| 88                                     | 15                                   |

|    |    |
|----|----|
| 56 | 15 |
| 34 | 15 |
| 28 | 15 |
| 97 | 31 |
| 47 | 31 |
| 38 | 15 |
| 76 | 15 |
| 47 | 31 |

### Caso 3



**Figura 16 – Resultado gráfico da resposta do algoritmo.**

**Tabela 4 – Resultados obtidos para o caso três considerando a situação um.**

| População Inicial<br>(Coordenada $x$ ) | População Final<br>(Coordenada $x$ ) |
|--|--------------------------------------|
| 76                                     | 3                                    |
| 81                                     | 3                                    |
| 62                                     | 3                                    |
| 35                                     | 3                                    |
| 10                                     | 3                                    |
| 22                                     | 3                                    |
| 86                                     | 3                                    |
| 95                                     | 3                                    |

---

|    |   |
|----|---|
| 62 | 3 |
| 75 | 3 |
| 39 | 3 |
| 86 | 3 |
| 54 | 3 |
| 60 | 3 |
| 94 | 3 |
| 0  | 3 |
| 80 | 3 |
| 51 | 3 |
| 90 | 3 |
| 66 | 3 |

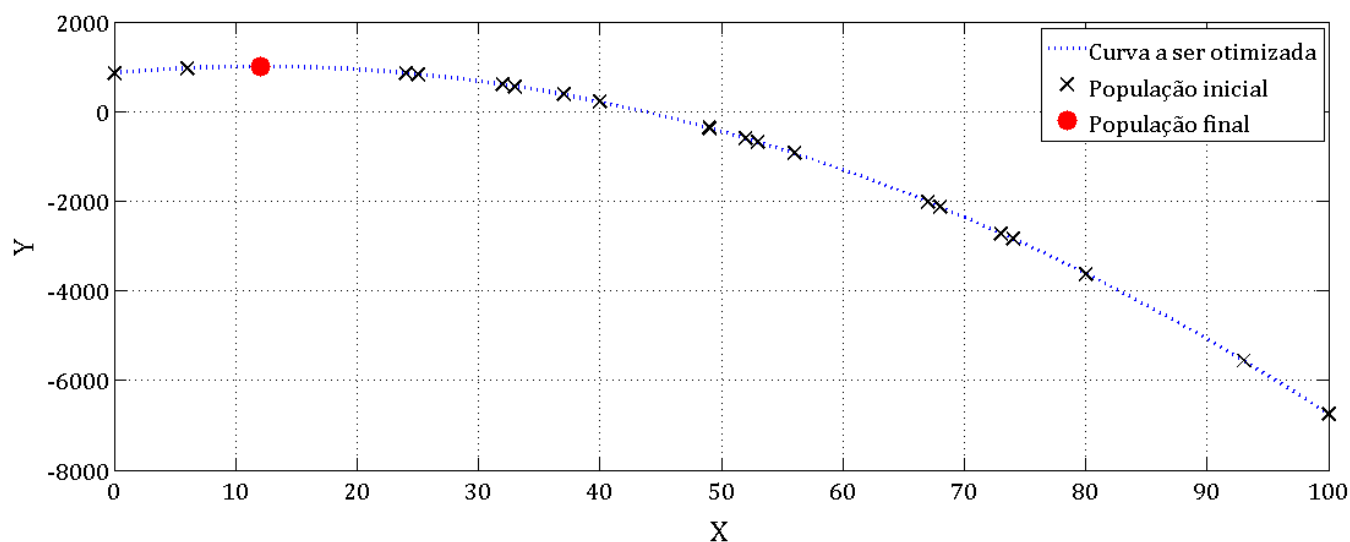
---

Tendo em vista os resultados apresentados para a situação 1, nota-se que para os casos 1 e 2 a presença de variabilidade genética nos resultados obtidos relata a necessidade de aumento do número total de iterações. Além disso, para os mesmos casos, verifica-se que o algoritmo tende a convergir valores próximos ao máximo, mas não para o máximo global. Isso pode ser justificado pela taxa de *crossover* e de mutação, que influenciaram a reprodução das populações.

Para o caso 3, nota-se que o algoritmo convergiu para o máximo global, cumprindo seu objetivo de maneira satisfatória. O fato do algoritmo ter convergido corretamente para o caso 3, e não para os demais casos analisados, pode se justificar pela função objetivo associada, bem como pela natureza estocástica do método.

Considerando a situação 2, foram obtidos os seguintes resultados.



*Caso 1*

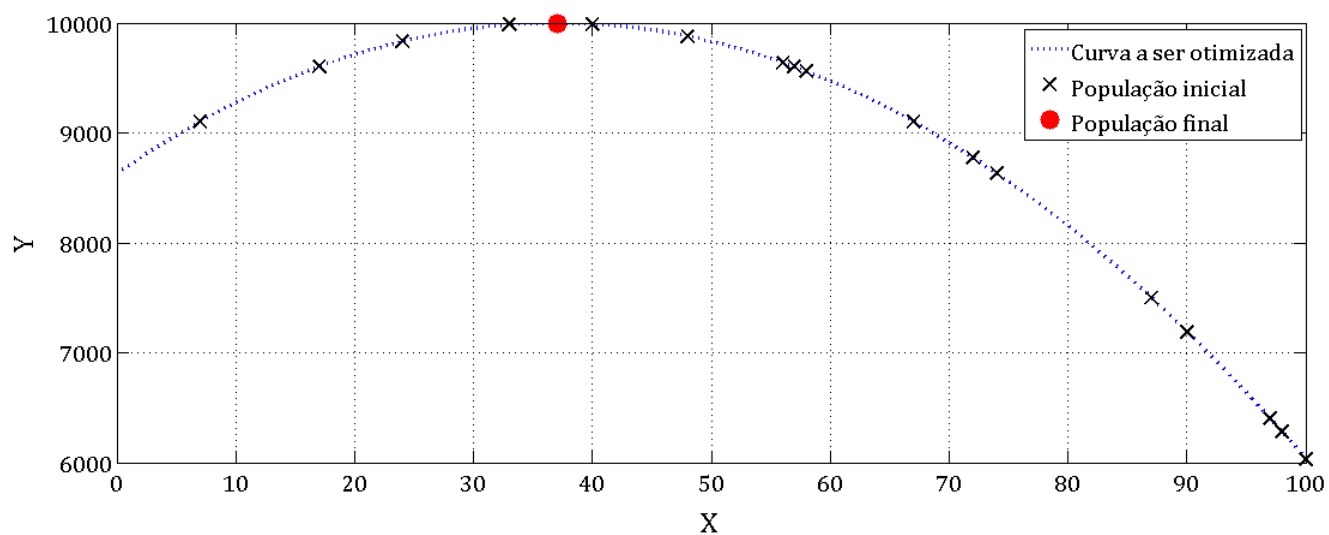
**Figura 17 – Resultado gráfico da resposta do algoritmo.**

**Tabela 5 – Resultados obtidos para o caso um considerando a situação dois.**

| População Inicial<br>(Coordenada $x$ ) | População Final<br>(Coordenada $x$ ) |
|--|--------------------------------------|
| 100                                    | 12                                   |
| 25                                     | 12                                   |
| 6                                      | 12                                   |
| 40                                     | 12                                   |
| 74                                     | 12                                   |
| 80                                     | 12                                   |
| 68                                     | 12                                   |
| 73                                     | 12                                   |
| 24                                     | 12                                   |
| 93                                     | 12                                   |
| 52                                     | 12                                   |
| 37                                     | 12                                   |
| 32                                     | 12                                   |
| 56                                     | 12                                   |
| 67                                     | 12                                   |
| 32                                     | 12                                   |
| 33                                     | 12                                   |

|    |    |
|----|----|
| 0  | 12 |
| 53 | 12 |
| 49 | 12 |

**Caso 2**



**Figura 18 – Resultado gráfico da resposta do algoritmo.**

**Tabela 6 – Resultados obtidos para o caso dois considerando a situação dois.**

| População Inicial<br>(Coordenada $x$ ) | População Final<br>(Coordenada $x$ ) |
|--|--------------------------------------|
| 58                                     | 37                                   |
| 74                                     | 37                                   |
| 56                                     | 37                                   |
| 87                                     | 37                                   |
| 90                                     | 37                                   |
| 7                                      | 37                                   |
| 33                                     | 37                                   |
| 100                                    | 37                                   |
| 67                                     | 37                                   |
| 90                                     | 37                                   |
| 98                                     | 37                                   |
| 97                                     | 37                                   |
| 48                                     | 37                                   |

|    |    |
|----|----|
| 72 | 37 |
| 58 | 37 |
| 17 | 37 |
| 57 | 37 |
| 40 | 37 |
| 24 | 37 |
| 74 | 37 |

### Caso 3

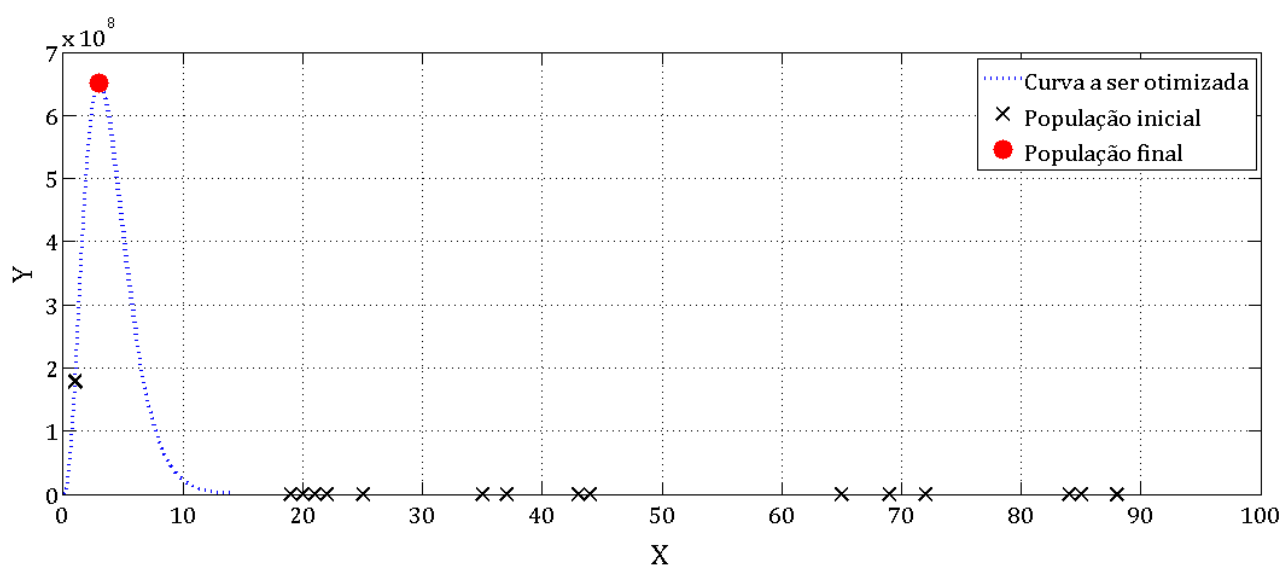


Figura 19 – Resultado gráfico da resposta do algoritmo.

Tabela 7 – Resultados obtidos para o caso três considerando a situação dois.

| População Inicial<br>(Coordenada $x$ ) | População Final<br>(Coordenada $x$ ) |
|--|--------------------------------------|
| 88                                     | 3                                    |
| 22                                     | 3                                    |
| 25                                     | 3                                    |
| 20                                     | 3                                    |
| 43                                     | 3                                    |
| 37                                     | 3                                    |
| 35                                     | 3                                    |
| 21                                     | 3                                    |
| 65                                     | 3                                    |

---

|    |   |
|----|---|
| 21 | 3 |
| 19 | 3 |
| 44 | 3 |
| 1  | 3 |
| 85 | 3 |
| 44 | 3 |
| 69 | 3 |
| 84 | 3 |
| 21 | 3 |
| 72 | 3 |
| 84 | 3 |

---

Considerando a situação 2 e os casos para os quais o algoritmo foi implementado, é possível perceber que o algoritmo determinou os máximos globais das funções objetivos consideradas de maneira satisfatória.

Nota-se que em todos os três casos a população final convergiu para um único valor, o que garante que o número total de iterações pré-estabelecido não limitou o algoritmo. Quando o número de iterações é baixo, o resultado final exibido ainda apresenta variabilidade genética, como observado na situação 1.

Para os três casos avaliados, o algoritmo convergiu para o máximo global, mostrando assim que as taxas de *crossover* e mutação estão mais adequadas para essas situações.

Ressalta-se que os testes realizados fizeram a busca apenas de máximos globais, entretanto, caso seja desejado encontrar um mínimo, basta substituir a função que calcula a probabilidade de seleção associada.

#### 4.2. RESULTADOS PARA O MODELO ESTUDADO

Depois da validação do algoritmo como descrito no item acima, a função objetivo que descreve o modelo hidráulico (equação 1) foi implementada no algoritmo a fim de se realizar a otimização dos fatores de atrito  $f_1$  e  $f_2$  dentro do sistema hidráulico proposto.

$$\min \left\{ f(X) = \sum (l_t(t) - l_t(t, X))^2 \right\} \quad (1)$$

Os parâmetros internos do algoritmo foram definidos conforme as situações 1 e 2 descritas nos resultados preliminares. A taxa de mutação foi fixada em 5%, uma vez que ela é necessária para que o espaço de busca possa ser melhor explorado, e o número de iterações foi

fixado em 1000, visto que nos resultados preliminares esse número foi suficiente para o algoritmo convergir.

As simulações foram feitas com duas taxas de crossover, 80% e 90%, assim como nas situações 1 e 2 dos resultados preliminares. Porém, diferentemente dos resultados preliminares, onde foi avaliada a convergência dos indivíduos de uma população para um máximo ou mínimo associado, nessa sessão será avaliada as médias das respostas para cada situação dentro do escopo deste projeto.

Para cada parâmetro que foi feita a otimização foram realizadas aproximadamente 100 simulações e o resultado final foi obtido pela média de todos os indivíduos gerados em todas as simulações. Ao final de cada simulação, foi avaliada a média, a variância e o desvio padrão dos indivíduos. As simulações em que a variância entre os indivíduos foram superior a 1 foram desconsideradas no cálculo da média final, uma vez que com esse valor de variância a convergência da população não pode ser garantida. Assim, foram gerados valores que podem acabar por comprometer os resultados finais.

Os parâmetros do modelo hidráulico que foram inseridos no problema são os mostrados na metodologia desse trabalho. O parâmetro  $l_{tmax}$  foi estimado em 5 metros. Esse valor foi assumido com base na ordem de grandeza dos demais parâmetros do modelo.

Depois de feitas todas as simulações, o algoritmo emite um relatório contendo todos os parâmetros do algoritmo e do problema considerados, juntamente com o resultado de cada simulação, suas respectivas médias, variâncias e desvios padrão, bem como a média, variância e desvio padrão final. A figura 20 abaixo mostra o formato do relatório e os relatórios para cada caso simulado encontram-se presente no anexo 1.

```

===== DADOS DO ALGORITMO =====
Tamanho do Cromossomo: 20 bits
Taxa Crossover: 80 Numero total de iteracoes: 1000
Tamanho da populacao: 40 individuos gerados aleatoriamente com valores entre 0 e 1
=====

RESULTADOS OBTIDOS PARA F1 SABENDO FT

===== DADOS DO MODELO TEORICO =====

g: 9.81 m/s2
Ro: 1000 kg/m3
q0: 0.75 m3/s
Patm: 100000 Pa
L1: 1000 m
D1: 0.6 m
A1: (3.1416.*(D1.^2))./4 m2
V1: q0./A1 m3

ft: 0.02
Dt: 0.6 m
At: (3.1416.*(Dt.^2))./4 m2
Vt: q0/At m3
lt_max: 5 m
vol = (3.1416.*(Dt.^2)./4).*lt_max m3
=====

Média      Var      DP
0.025600   0.000000  0.000000
0.025600   0.000000  0.000000
0.022800   0.000000  0.000000
0.022800   0.000000  0.000000
0.019100   0.000000  0.000000
0.025600   0.000000  0.000000
0.022700   0.000000  0.000000
0.025700   0.000000  0.000000
0.022300   0.000000  0.000000
0.024800   0.000000  0.000000
0.022900   0.000000  0.000000
0.022700   0.000000  0.000000
0.025600   0.000000  0.000000
0.025600   0.000000  0.000000
0.025600   0.000000  0.000000
0.022800   0.000000  0.000000
0.025600   0.000000  0.000000
0.024000   0.000000  0.000000
0.025600   0.000000  0.000000
0.032000   0.000000  0.000000
0.022800   0.000000  0.000000
0.025600   0.000000  0.000000
0.024080   0.000066  0.008095
0.025600   0.000000  0.000000
0.023600   0.000000  0.000000
0.025600   0.000000  0.000000
0.022300   0.000000  0.000000
0.024000   0.000000  0.000000
0.028800   0.000000  0.000000

```

**Figura 20 – Relatório de saída emitido pelo algoritmo.**

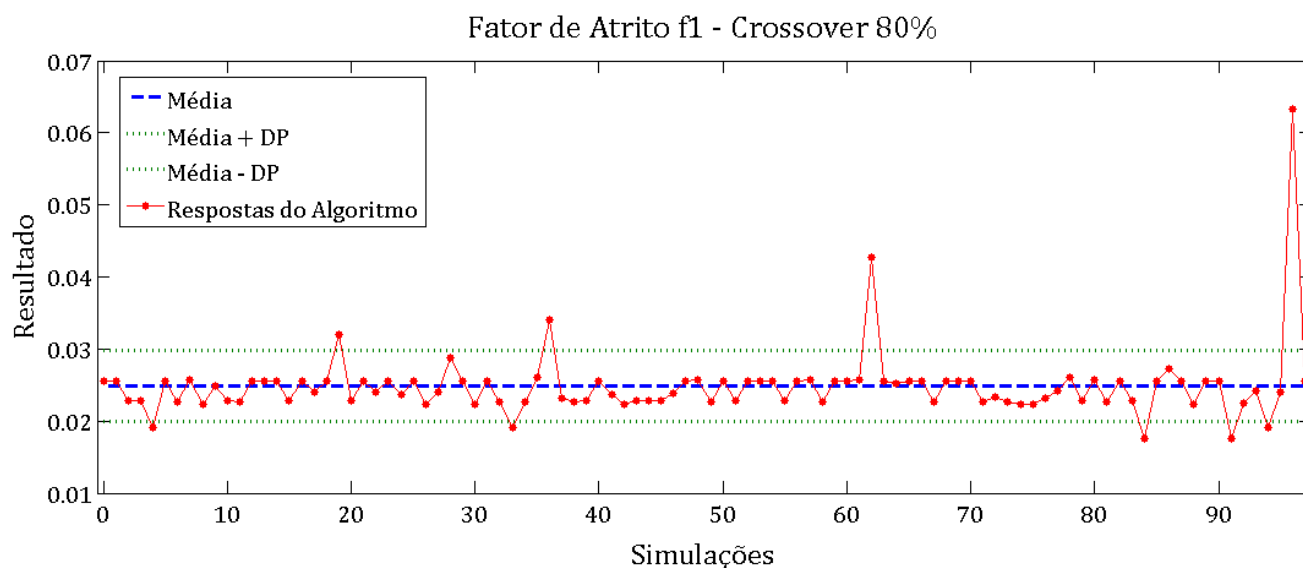
Como relatado na metodologia desse trabalho os valores dos fatores de atrito  $f_1$  e  $f_2$  que foram obtidos algebricamente por NEAGOE & POPA (2013), serão usados aqui como base de comparação para os resultados obtidos.

Algebricamente, os valores obtidos para  $f_1$  e  $f_2$  foram:

$$f_1 = 0,024$$

$$f_2 = 0,016$$

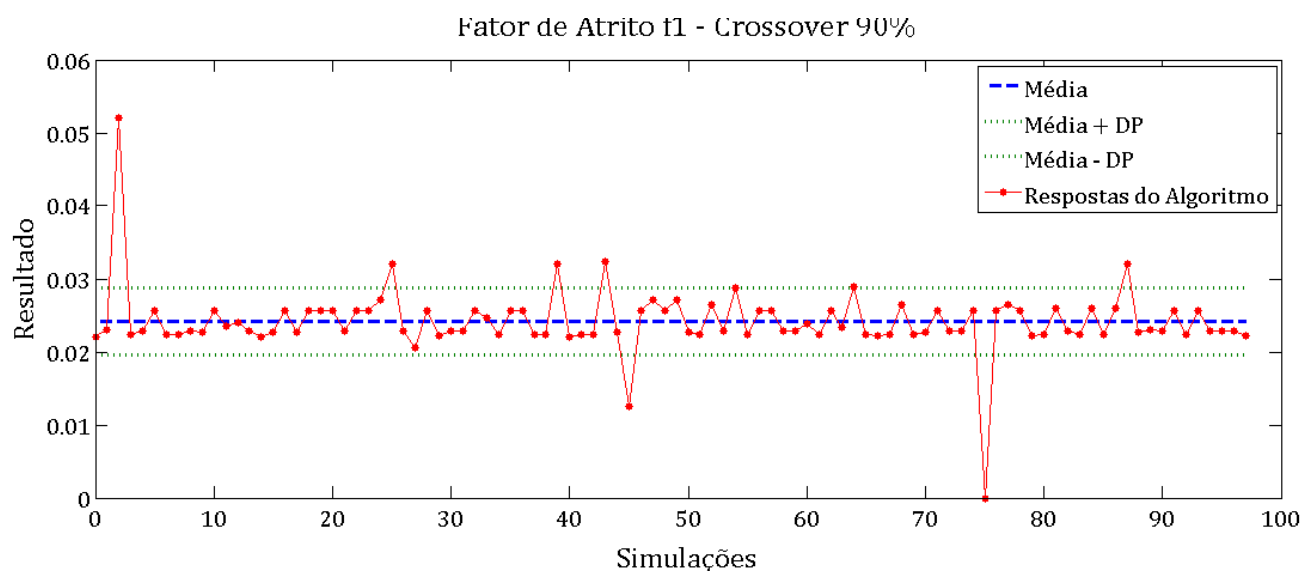
Para a otimização do fator de atrito  $f_1$  foram obtidos os resultados expostos pelas figuras 21 e 22 para as taxas de crossover 80% e 90% respectivamente.



**Figura 21 - Resposta do algoritmo para  $f_1$  com taxa de crossover igual a 80%.**

**Tabela 8 – Resultados finais para  $f_1$  com taxa de crossover igual a 80%.**

| Média    | Variância | Desvio Padrão |
|----------|-----------|---------------|
| 0.024317 | 0.000036  | 0.006000      |



**Figura 22 - Resposta do algoritmo para  $f_1$  com taxa de crossover igual a 90%.**

**Tabela 9 - Resultados finais para  $f_1$  com taxa de crossover igual a 90%.**

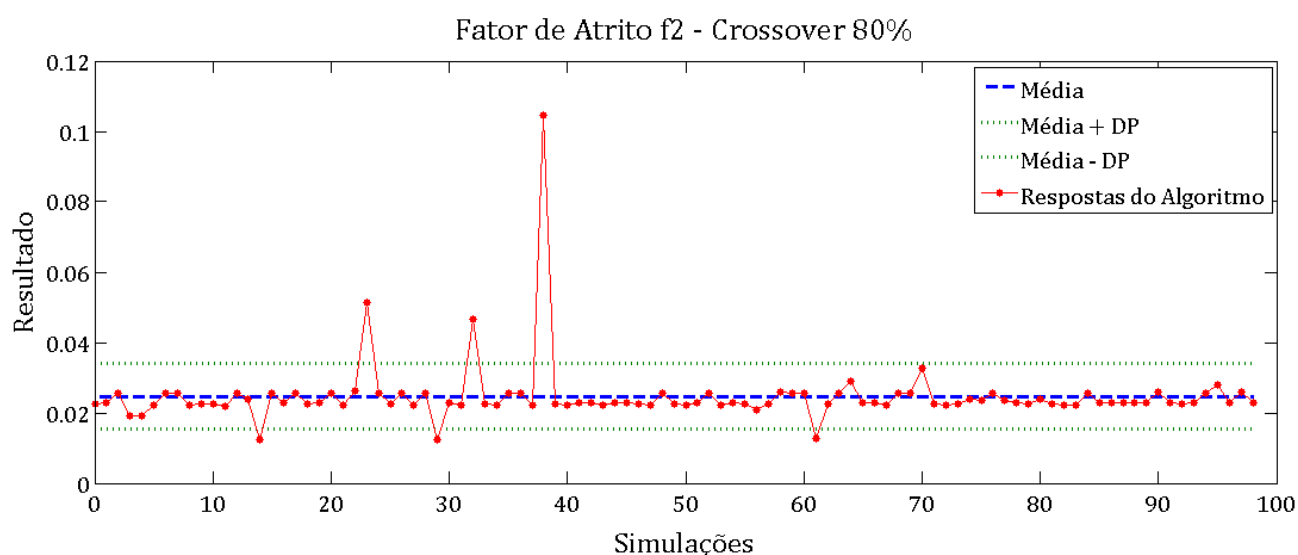
| Média    | Variância | Desvio Padrão |
|----------|-----------|---------------|
| 0.023676 | 0.023676  | 0.023676      |

Como pode ser observado, os valores obtidos para as duas taxas de crossover estão próximos. Analisando os erros associados em comparação com o resultado algébrico tem-se um erro de 13% e de 13,7% para as taxas de 80% e 90% respectivamente.

O valor próximo dos erros e dos valores absolutos de  $f_1$  sugere que, embora o erro tenha sido verificado maior em um dos casos, a taxa de crossover não foi tão influente no algoritmo, uma vez que a diferença pode ser justificada pela natureza estocástica do método.

Dessa forma, os resultados encontrados apresentam boa aproximação com os resultados obtidos algebricamente para  $f_1$ . Valida-se assim o algoritmo para sua utilização em otimizações de sistemas hidráulicos, assim como o modelo matemático descrito na metodologia desse trabalho, que, tomando mão da equação de Bernoulli modificada, buscou relações para descrever a função objetivo associada.

Para o fator de atrito  $f_2$  foram obtidos os resultados apresentados nas figuras 23 e 24 para as taxas de crossover de 80% e 90% respectivamente.

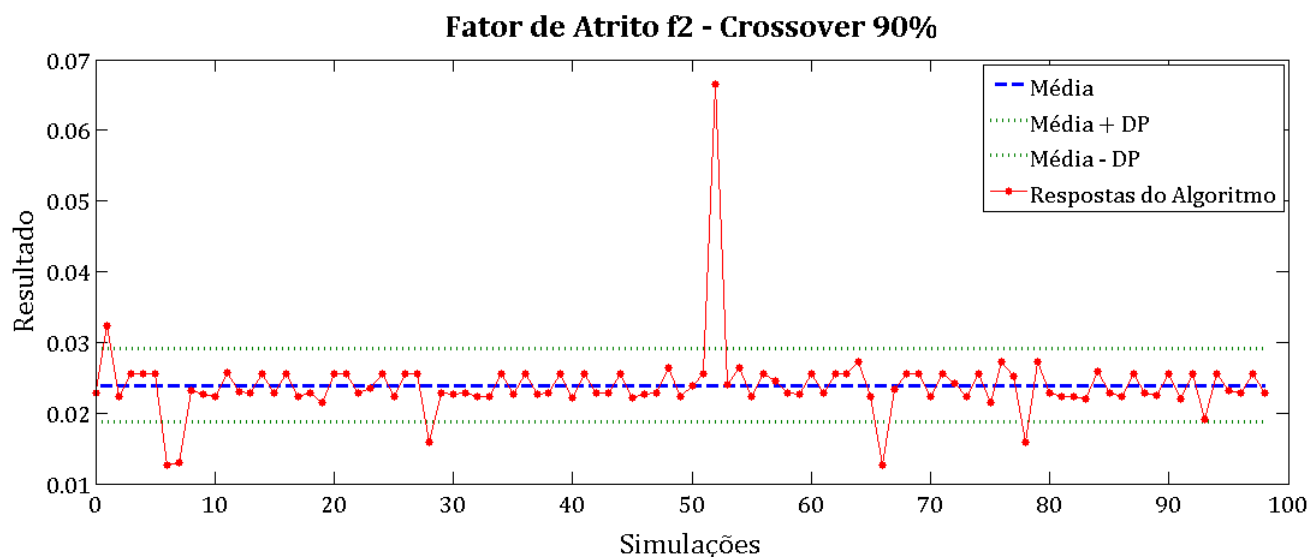


**Figura 23 – Resposta do algoritmo para  $f_2$  com taxa de crossover igual a 80%.**

**Tabela 10 - Resultados finais para  $f_2$  com taxa de crossover igual a 80%.**

| Média    | Variância | Desvio Padrão |
|----------|-----------|---------------|
| 0.024395 | 0.000092  | 0.009574      |





**Figura 24 - Resposta do algoritmo para  $f_2$  com taxa de crossover igual a 90%.**

**Tabela 11 - Resultados finais para  $f_2$  com taxa de crossover igual a 90%.**

| Média    | Variância | Desvio Padrão |
|----------|-----------|---------------|
| 0.023674 | 0.000032  | 0.005698      |

Para o parâmetro  $f_2$ , embora os valores encontrados para as duas taxas de *crossover* consideradas tenham sido próximos, ambos os valores se encontram mais distantes do valor algébrico encontrado para o parâmetro do que o parâmetro  $f_1$ .

Analisando o fator  $f_2$ , os erros associados para as taxas de *crossover* de 80% e 90% são de 34,4% e de 32,4% respectivamente. Como ocorreu com o fator  $f_1$ , a taxa de *crossover* não foi tão influente nos resultados obtidos, uma vez que variando a taxa, obteve-se resultados muito próximos.

Os altos valores de erro determinados são oriundos da adequação do modelo matemático. A modelagem realizada para o fator  $f_1$  mostrou-se efetiva e válida, uma vez que originou resultados satisfatórios, com valores de erros associados menores. Entretanto, a modelagem feita para o parâmetro  $f_2$  ainda pode ser complementada, de modo a alterar a função objetivo, podendo assim proceder em resultados mais precisos.

Em um sistema hidráulico que esteja sujeito a sofrer golpes de aríete, o fator de atrito dos condutos é um fator que influencia nessa brusca variação de pressão. O termo  $f$  na equação de Bernoulli modificada se relaciona com a perda de carga, ou seja, com a perda de energia que o fluido sofre ao escoar pelos condutos. Por isso, a determinação de um fator de atrito otimizado faz parte da mitigação do fenômeno, uma vez que ele será responsável por causar uma perda de energia no escoamento.

## 5. CONCLUSÕES

O presente trabalho apresentou a otimização de um sistema fluidodinâmico mediante a utilização de algoritmos genéticos, onde foi considerado a otimização de um sistema hidráulico, visando a mitigação do fenômeno do golpe de aríete.

Durante esse trabalho foi desenvolvido o algoritmo genético que foi utilizado para otimizar parâmetros dentro de um sistema fluidodinâmico. Optou-se pela utilização da codificação binária tendo em vista que a mesma pode ser usada em uma ampla variedade de problemas. Dessa forma, o código pode ser facilmente adaptado para a aplicação em outros problemas.

Durante os testes preliminares do algoritmo, ele se mostrou eficiente nos testes realizados. Mediante ao ajuste de seus parâmetros internos é possível ajustar o algoritmo para determinar máximos e mínimos globais com eficiência. Dentre os testes realizados, constatou-se que, preliminarmente, os valores mais eficientes para a taxa de *crossover* e taxa de mutação são respectivamente 90% e 1%. O número total de iterações estipulado foi de 1000 iterações. Esse número foi utilizado por se verificar nos testes que ele é suficiente para fazer com que a população não convirja prematuramente, visto que todos os resultados apresentados para esse número de iterações apresentaram baixa variabilidade genética.

Considerando o modelo transiente hidráulico otimizado, o algoritmo proposto mostrou-se muito eficiente na otimização do parâmetro  $f_1$ , e apresentou resultados mais imprecisos durante a otimização do fator  $f_2$ . A diferença nas precisões das otimizações obtidas são justificadas pelo modelamento matemático, que modelou de forma satisfatória o sistema para o fator  $f_1$ , mas que pode ser aprimorada para o fator  $f_2$ .

Entretanto, mediante ajustes do modelo algébrico e melhorias no próprio algoritmo, conclui-se que a utilização de algoritmos genéticos para a otimização de sistemas fluidodinâmicos é viável, apresentando resultados com boa precisão.

## 6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Abdelbary, A. M., (2008). *Optimization of Water Distribution Systems Subjected to Water Hammer Using Genetic Algorithms*. Mansoura University. Dissertação de Mestrado.
- Afshar M.H., Rohani M., (2008). *Water hammer simulation by implicit method of characteristic*. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*.
- Arora, J.S. (1989). *Introduction to Optimum Design*. MacGraw-Hill Series in Mechanical Engineering.
- Barcelos J. C. H., (2000). **Algoritmos Genéticos Adaptativos: Um estudo comparativo**. Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, Dissertação de Mestrado.
- Camargo, L. A., (1989). **O Golpe de Aríete em Tubulações de Recalque. Análise Simplificada**. Joinville, Trabalho apresentado no XV encontro de engenheiros de assistência técnica.
- Corrêa, E. (2000). **Algoritmos Genéticos e Busca Tabu Aplicados ao Problema das Medianas**. Dissertação de M.Sc., Universidade Federal do Paraná.
- Deb, K. and Beyer, H.G. (2001). *Self-Adaptive Genetic Algorithms with Simulated Binary Crossover*. *Evolutionary Computation Journal*, 9 (2), 197--221.
- Ghidaoui, M. S., Zhao, M., McInnis, D. A., Axworthy, D. H., (2005). *A Review of Water Hammer Theory and Practice*. *Applied Mechanics Reviews*, Vol. 58.
- Gibson, A. H., (1908). *Water Hammer in Hydraulic Pipe Lines*. Archibald Constable & Co., LTD, Londres.
- Goldberg, D.E., (1989). *Genetic algorithms in search, optimization, and machine learning*. New York: Addison-Wesley Publishing, 1989.
- Holland, John H., (1975). *Adaptation in Natural and Artificial Systems*. Ann Arbor: University of Michigan Press.
- Lima, L. F. M., (2006). **Termo de Atrito em escoamentos Transitórios para Condutos Forçados**. Dissertação de Mestrado, Universidade de São Paulo, São Paulo.
- Linden, R., (2006). **Algoritmos Genéticos – Uma importante ferramenta da inteligência computacional**. Rio de Janeiro.
- Mognon V. R., (2004). **Algoritmos Genéticos Aplicados na Otimização de Antenas**, UFPR, Dissertação de Mestrado.
- Neagoe, A., Popa, R (2010). *Transient Flows With Inertial Effects In Water Supply System Of The Hydropower Plants*. *U.P.B. Sci. Bull., Series D, Vol. 72, Iss. 3*.

- Neagoe, A., Popa, R (2013). ***Genetic Algorithm Calibration of the Transient Flow Model for the Water Supply System of a Hydropower Plant***. *U.P.B. Sci. Bull., Series A, Vol. 75, Iss. 2*.
- Spears, W. M., Jong, K. A. D., Back, T., Fogel, D. B. & Garis, H. (1993). ***An overview of evolutionary computation***, *European Conference on Machine Learning*, pp. 442.459.
- Rodrigues, A. P. S. P. (2007). **Parametrização e Simulação Numérica da Turbina Hidrocinética – Otimização via Algoritmos Genéticos**. Dissertação de Mestrado em Engenharia Mecânica, Publicação ENM.DM-119A/07, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 94p.
- Rodrigues, A. P. S. P. (2012). **Uma Metodologia Híbrida de Otimização Aplicada às Pás de Turbinas Hidráulicas Axiais**. Tese de Doutorado em Ciências Mecânicas, Publicação ENM.TD - 013 A/2012, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 175p.
- Silva A. J. M., (2005). **Implementação de um Algoritmo Genético Utilizando o Modelo de Ilhas**, COPPE/UFRJ. Dissertação de Mestrado.
- Sousa F. L., (2003). **Otimização Extrema Generalizada: Um novo Algoritmo Estocástico para o Projeto Ótimo**. INPE. Tese de Doutorado, São José dos Campos.
- Wood, D. J., (2005). ***Waterhammer Analysis—Essential and Easy (and Efficient)***. *Journal Of Environmental Engineering* ©, ASCE.

## ANEXOS

- ANEXO 1 – Relatório de saída para a otimização de  $f_1$  com taxa de *crossover* de 80%

===== DADOS DO ALGORITMO =====

Tamanho do Cromossomo: 20 bits

Taxa Crossover: 80 Numero total de iteracoes: 1000

Tamanho da populacao: 40 individuos gerados aleatoriamente com valores entre 0 e 1

=====

RESULTADOS OBTIDOS PARA F1 SABENDO FT

===== DADOS DO MODELO TEORICO =====

g: 9.81 m/s<sup>2</sup>

Ro: 1000 kg/m<sup>3</sup>

q0: 0.75 m<sup>3</sup>/s

Patm: 100000 Pa

L1: 1000 m

D1: 0.6 m

A1:  $(3.1416 \cdot (D1.^2)) / 4$  m<sup>2</sup>

V1:  $q0 / A1$  m<sup>3</sup>

ft: 0.02

Dt: 0.6 m

At:  $(3.1416 \cdot (Dt.^2)) / 4$  m<sup>2</sup>

Vt:  $q0 / At$  m<sup>3</sup>

lt\_max: 5 m

vol =  $(3.1416 \cdot (Dt.^2) / 4) \cdot lt\_max$  m<sup>3</sup>

=====

| Média    | Var      | DP       |
|----------|----------|----------|
| 0.025600 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.025600 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.022800 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.022800 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.019100 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.025600 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.022700 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.025700 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.022300 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.024800 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.022900 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.022700 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.025600 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.025600 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.025600 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.025600 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.022800 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.025600 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.024000 | 0.000000 | 0.000000 |

|          |          |          |
|----------|----------|----------|
| 0.025600 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.032000 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.022800 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.025600 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.024080 | 0.000066 | 0.008095 |
| 0.025600 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.023600 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.025600 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.022300 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.024000 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.028800 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.025600 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.022300 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.025600 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.022700 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.019100 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.022700 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.026000 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.034000 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.023100 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.022700 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.022800 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.025600 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.023600 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.022300 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.022900 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.022800 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.022800 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.023900 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.025600 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.025800 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.022700 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.025600 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.022800 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.025600 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.025600 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.025600 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.022900 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.025600 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.025700 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.022700 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.025600 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.025600 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.025800 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.042780 | 0.016777 | 0.129527 |
| 0.025600 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.025200 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.025600 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.025600 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.022700 | 0.000000 | 0.000000 |

|          |          |          |
|----------|----------|----------|
| 0.025600 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.025600 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.025600 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.022700 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.023400 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.022700 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.022300 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.022300 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.023103 | 0.000000 | 0.000016 |
| 0.024200 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.026000 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.022800 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.025700 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.022700 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.025600 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.022800 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.017500 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.025600 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.027200 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.025600 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.022300 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.025600 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.025600 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.017500 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.022540 | 0.000001 | 0.001012 |
| 0.024200 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.019100 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.024000 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.063260 | 0.067109 | 0.259054 |
| 0.025600 | 0.000000 | 0.000000 |

## TOTAIS

| Média    | Var      | DP       |
|----------|----------|----------|
| 0.024317 | 0.000036 | 0.006000 |

- ANEXO 2 – Relatório de saída para a otimização de  $f_1$  com taxa de *crossover* de 90%

===== DADOS DO ALGORITMO =====

Tamanho do Cromossomo: 20 bits

Taxa Crossover: 90 Numero total de iteracoes: 1000

Tamanho da populacao: 40 individuos gerados aleatoriamente com valores entre 0 e 1

===== DADOS DO MODELO TEORICO =====

g: 9.81 m/s<sup>2</sup>

Ro: 1000 kg/m<sup>3</sup>

q0: 0.75 m<sup>3</sup>/s

Patm: 100000 Pa

L1: 1000 m

D1: 0.6 m

A1:  $(3.1416 \cdot (D1.^2)) / 4$  m<sup>2</sup>

V1:  $q0 / A1$  m<sup>3</sup>

ft: 0.02

Dt: 0.6 m

At:  $(3.1416 \cdot (Dt.^2)) / 4$  m<sup>2</sup>

Vt:  $q0 / At$  m<sup>3</sup>

lt\_max: 5 m

vol =  $(3.1416 \cdot (Dt.^2) / 4) \cdot lt\_max$  m<sup>3</sup>

| Média    | Var      | DP       |
|----------|----------|----------|
| 0.022100 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.023100 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.052000 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.022300 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.022800 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.025600 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.022300 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.022300 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.022800 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.022700 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.025600 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.023500 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.024000 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.022900 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.021980 | 0.000004 | 0.002024 |
| 0.022700 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.025600 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.022700 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.025600 | 0.000000 | 0.000000 |



|          |          |          |
|----------|----------|----------|
| 0.025600 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.025600 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.022900 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.025600 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.025600 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.027200 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.032000 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.022800 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.020600 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.025600 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.022200 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.022800 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.022800 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.025600 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.024600 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.022300 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.025600 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.025600 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.022300 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.022300 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.032000 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.022100 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.022300 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.022300 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.032320 | 0.001049 | 0.032382 |
| 0.022700 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.012600 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.025600 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.027200 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.025600 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.027200 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.022700 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.022300 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.026400 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.022800 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.028800 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.022300 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.025600 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.025600 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.022800 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.022900 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.023800 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.022300 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.025600 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.023400 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.028900 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.022300 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.022200 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.022300 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.026400 | 0.000000 | 0.000000 |

|          |          |          |
|----------|----------|----------|
| 0.022300 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.022700 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.025600 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.022900 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.022900 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.025600 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.000000 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.025600 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.026400 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.025600 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.022140 | 0.000001 | 0.001012 |
| 0.022300 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.025920 | 0.000004 | 0.002024 |
| 0.022800 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.022300 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.026000 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.022300 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.026003 | 0.000000 | 0.000016 |
| 0.032000 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.022720 | 0.000000 | 0.000506 |
| 0.023100 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.022800 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.025600 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.022300 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.025600 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.022800 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.022800 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.022800 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.022200 | 0.000000 | 0.000000 |

## TOTAIS

| Média    | Var      | DP       |
|----------|----------|----------|
| 0.023676 | 0.000032 | 0.005671 |

- ANEXO 3 – Relatório de saída para a otimização de  $f_2$  com taxa de *crossover* de 80%

===== DADOS DO ALGORITMO =====

Tamanho do Cromossomo: 20 bits

Taxa Crossover: 80 Numero total de iteracoes: 1000

Tamanho da populacao: 40 individuos gerados aleatoriamente com valores entre 0 e 1

===== DADOS DO MODELO TEORICO =====

g: 9.81 m/s<sup>2</sup>

Ro: 1000 kg/m<sup>3</sup>

q0: 0.75 m<sup>3</sup>/s

Patm: 100000 Pa

L2: 2000 m

D2: 0.75 m

A1:  $(3.1416 \cdot (D2.^2)) / 4$  m<sup>2</sup>

V2:  $q0 / A2$  m<sup>3</sup>

ft: 0.02

Dt: 0.6 m

At:  $(3.1416 \cdot (Dt.^2)) / 4$  m<sup>2</sup>

Vt:  $q0 / At$  m<sup>3</sup>

lt\_max: 5 m

vol =  $(3.1416 \cdot (Dt.^2) / 4) \cdot lt\_max$  m<sup>3</sup>

| Média    | Var      | DP       |
|----------|----------|----------|
| 0.022700 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.022800 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.025600 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.019100 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.019100 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.022200 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.025600 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.025600 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.022300 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.022700 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.022400 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.021900 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.025600 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.023800 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.012300 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.025600 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.022800 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.025600 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.022400 | 0.000000 | 0.000000 |

|          |          |          |
|----------|----------|----------|
| 0.023000 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.025600 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.022300 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.026400 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.051300 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.025600 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.022502 | 0.000000 | 0.000016 |
| 0.025700 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.022300 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.025600 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.012500 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.022800 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.022200 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.046480 | 0.016777 | 0.129527 |
| 0.022500 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.022100 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.025600 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.025700 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.022300 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.104620 | 0.268435 | 0.518108 |
| 0.022700 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.022300 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.022900 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.022800 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.022300 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.022800 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.022800 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.022500 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.022100 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.025600 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.022700 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.022300 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.022800 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.025600 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.022300 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.022900 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.022700 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.021000 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.022700 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.025800 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.025600 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.025600 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.012700 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.022500 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.025600 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.028900 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.022800 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.022800 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.022200 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.025600 | 0.000000 | 0.000000 |

|          |          |          |
|----------|----------|----------|
| 0.025600 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.032800 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.022700 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.022300 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.022700 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.023800 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.023600 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.025700 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.023400 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.022800 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.022700 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.024000 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.022700 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.022300 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.022200 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.025600 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.022800 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.022800 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.022800 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.022900 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.022800 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.026000 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.022800 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.022500 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.022800 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.025600 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.028000 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.022800 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.026000 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.022900 | 0.000000 | 0.000000 |

## TOTAIS

| Média    | Var      | DP       |
|----------|----------|----------|
| 0.024395 | 0.000092 | 0.009574 |

- ANEXO 4 – Relatório de saída para a otimização de  $f_2$  com taxa de *crossover* de 90%

===== DADOS DO ALGORITMO =====

Tamanho do Cromossomo: 20 bits

Taxa Crossover: 90 Numero total de iteracoes: 1000

Tamanho da populacao: 40 individuos gerados aleatoriamente com valores entre 0 e 1

=====

RESULTADOS OBTIDOS PARA F2 SABENDO FT

===== DADOS DO MODELO TEORICO =====

g: 9.81 m/s<sup>2</sup>

Ro: 1000 kg/m<sup>3</sup>

q0: 0.75 m<sup>3</sup>/s

Patm: 100000 Pa

L2: 2000 m

D2: 0.75 m

A1:  $(3.1416 \cdot (D2.^2)) / 4$  m<sup>2</sup>

V2:  $q0 / A2$  m<sup>3</sup>

ft: 0.02

Dt: 0.6 m

At:  $(3.1416 \cdot (Dt.^2)) / 4$  m<sup>2</sup>

Vt:  $q0 / At$  m<sup>3</sup>

lt\_max: 5 m

vol =  $(3.1416 \cdot (Dt.^2) / 4) \cdot lt\_max$  m<sup>3</sup>

=====

| Média    | Var      | DP       |
|----------|----------|----------|
| 0.022800 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.032400 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.022400 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.025600 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.025600 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.025600 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.012700 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.013020 | 0.000004 | 0.002024 |
| 0.023100 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.022700 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.022300 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.025700 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.023000 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.022800 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.025600 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.022800 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.025600 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.022300 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.022900 | 0.000000 | 0.000000 |

=====

|          |          |          |
|----------|----------|----------|
| 0.021400 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.025600 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.025600 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.022800 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.023440 | 0.000016 | 0.004048 |
| 0.025600 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.022300 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.025600 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.025600 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.015900 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.022800 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.022700 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.022900 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.022300 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.022300 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.025600 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.022700 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.025600 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.022700 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.022900 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.025600 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.022100 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.025600 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.022800 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.022800 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.025600 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.022200 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.022700 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.022900 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.026400 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.022300 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.023800 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.025600 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.066560 | 0.067109 | 0.259054 |
| 0.024000 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.026400 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.022300 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.025600 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.024600 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.022800 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.022700 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.025600 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.022800 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.025600 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.025600 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.027300 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.022400 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.012700 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.023400 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.025600 | 0.000000 | 0.000000 |

|          |          |          |
|----------|----------|----------|
| 0.025600 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.022300 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.025600 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.024200 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.022300 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.025600 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.021400 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.027200 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.025200 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.015900 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.027200 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.022800 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.022300 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.022300 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.021900 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.025920 | 0.000004 | 0.002024 |
| 0.022800 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.022300 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.025600 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.022800 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.022500 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.025600 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.021900 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.025600 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.019100 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.025600 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.023100 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.022800 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.025600 | 0.000000 | 0.000000 |
| 0.022800 | 0.000000 | 0.000000 |

## TOTAIS

| Média    | Var      | DP       |
|----------|----------|----------|
| 0.023674 | 0.000032 | 0.005698 |