

TRABALHO DE GRADUAÇÃO

MÉTODOS DE OTIMIZAÇÃO
PARA A
SELEÇÃO DE CARTEIRAS DE INVESTIMENTOS

Marilia de Oliveira Telles
Yasmin Carla Marchioro Mendes

Brasília, julho de 2008

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

FACULDADE DE TECNOLOGIA

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA

TRABALHO DE GRADUAÇÃO
MÉTODOS DE OTIMIZAÇÃO
PARA A
SELEÇÃO DE CARTEIRAS DE INVESTIMENTOS

Marília de Oliveira Telles
Yasmin Carla Marchioro Mendes

*Relatório submetido ao Departamento de Engenharia
Elétrica como requisito parcial para obtenção
do grau de Engenheiro Eletricista*

Banca Examinadora

Prof. João Yoshiyuki Ishihara , ENE/UnB
Orientador

Prof. Francisco Damasceno Freitas, ENE/UnB
Examinador interno

Prof. Janaína Gonçalves Guimarães, ENE/UnB
Examinador interno

Dedicatórias

Em memória de meu pai

Yasmin Carla Marchioro Mendes

*Dedico este trabalho a todos que me apoiaram
durante o curso.*

Marilia de Oliveira Telles

Agradecimentos

Agradeço a Deus, por estar presente em minha vida e tornar tudo possível; e à minha família, por ter me dado todo o suporte nas horas mais difíceis.

Marília de Oliveira Telles

Agradeço à minha família, que me deu suporte e tranquilidade para que eu pudesse dedicar-me exclusivamente às minhas obrigações acadêmicas.

Yasmin Carla Marchioro Mendes

RESUMO

Este trabalho apresenta um estudo comparativo de métodos de seleção ótima de uma carteira de investimento. Em especial, são estudados o modelo clássico de média-variância, o modelo de índice único e um modelo de média-variância robusto. Cada um dos modelos foi aplicado na determinação de carteiras ótimas de ações da BOVESPA. Os resultados dos testes mostraram a superioridade do modelo robusto sobre os demais.

ABSTRACT

This work presents a comparative study of asset allocation methods. Specifically, the classical mean-variance optimization, the single index model and a robust formulation of the mean-variance optimization problem. Each of the models was applied in the determination of BOVESPA optimal portfolios. The results have shown the advantage of the robust formulation among the others.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	CONTEXTUALIZAÇÃO	1
1.2	MOTIVAÇÃO.....	2
1.3	OBJETIVOS DO PROJETO.....	2
1.4	ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO	2
2	DEFINIÇÃO DO PROBLEMA DE SELEÇÃO DE CARTEIRAS DE INVESTIMENTO...	3
2.1	SELEÇÃO DE CARTEIRAS	3
2.2	PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO	3
3	SELEÇÃO DE CARTEIRAS PELO MODELO DE MÉDIA-VARIÂNCIA	5
3.1	INTRODUÇÃO	5
3.2	MODELAGEM DO PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO DE MÉDIA-VARIÂNCIA.....	7
4	RETORNO E RISCO PELO MODELO DE ÍNDICE ÚNICO	9
4.1	INTRODUÇÃO	9
4.2	O MODELO DE ÍNDICE ÚNICO: VISÃO GERAL.....	9
4.3	RETORNO MÉDIO E ELEMENTOS DA MATRIZ DE COVARIÂNCIA	10
4.4	CARACTERÍSTICAS DO MODELO DE ÍNDICE ÚNICO	12
4.5	ESTIMATIVA DE BETA E ALFA	13
5	MODELO ROBUSTO: SELEÇÃO DE CARTEIRAS QUANDO HÁ INCERTEZAS NO RETORNO E NO RISCO	14
5.1	INTRODUÇÃO	14
5.2	O PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO POR MÉDIA-VARIÂNCIA ROBUSTO	15
5.3	DETERMINAÇÃO DA CARTEIRA ROBUSTA.....	15
5.3.1	FORMULAÇÃO GERAL.....	15
5.3.2	CASO SIMPLES	16
5.4	DETERMINAÇÃO DO INTERVALO DE INCERTEZA.....	19
5.4.1	TÉCNICA DE BOOTSTRAP	19
5.4.2	TÉCNICA DE MÉDIA MÓVEL	20
6	RESULTADOS	21
6.1	INTRODUÇÃO	21
6.2	MODELO CLÁSSICO DE MÉDIA VARIÂNCIA	23

6.3	MODELO DE ÍNDICE ÚNICO	28
6.4	MODELO ROBUSTO	33
6.4.1	INTERVALO DE INCERTEZA OBTIDO PELA TÉCNICA DE BOOTSTRAP	33
6.4.2	INTERVALO DE INCERTEZA OBTIDO POR MÉDIA MÓVEL	37
6.5	COMPARAÇÃO GERAL ENTRE OS MODELOS	41
7	CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	42
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	44
	ANEXOS	45
I	CONVEXIDADE	46
II	GLOSSÁRIO FINANCEIRO	48
III	ARQUIVOS DO <i>MATLAB</i>[®]	52
III.1	TRANSFERÊNCIA DOS DADOS DO EXCEL PARA O <i>MATLAB</i> [®]	52
III.2	CÁLCULO DAS TAXAS DE RETORNO	52
III.3	SELEÇÃO DAS 15 AÇÕES COM OS MAIORES RETORNOS MÉDIOS	53
III.4	CÁLCULO DAS CARTEIRAS E RENDIMENTOS POR MEIO DO MODELO CLÁSSICO DE MÉDIA VARIÂNCIA	53
III.5	CÁLCULO DAS CARTEIRAS E RENDIMENTOS POR MEIO DO MODELO DE ÍNDICE ÚNICO	55
III.6	CÁLCULO DAS CARTEIRAS E RENDIMENTOS POR MEIO DA FORMULAÇÃO RO- BUSTA COM INTERVALO DE INCERTEZA CALCULADO PELA TÉCNICA DE BOOT- STRAP	57
III.7	CÁLCULO DAS CARTEIRAS E RENDIMENTOS POR MEIO DA FORMULAÇÃO RO- BUSTA COM INTERVALO DE INCERTEZA CALCULADO PELA TÉCNICA DE MÉDIA MÓVEL	60
IV	CONTEÚDO DO CD	63

LISTA DE FIGURAS

3.1	Exemplo de fronteira eficiente	8
4.1	Regressão linear	13
6.1	Fronteira eficiente pelo método MVO - julho de 2007.....	24
6.2	Composição das carteiras eficientes pelo método MVO - julho de 2007	24
6.3	Rendimento acumulado em 2007 - método MVO.....	26
6.4	Rendimento acumulado em 2005 - método MVO.....	27
6.5	Fronteira eficiente pelo método de índice único - julho de 2007	28
6.6	Composição das carteiras eficientes pelo método de índice único - julho de 2007.....	28
6.7	Rendimento acumulado em 2007 - modelo de índice único	31
6.8	Rendimento acumulado em 2005 - modelo de índice único	32
6.9	Fronteira eficiente robusta com intervalo de incerteza obtido por bootstrap - julho de 2007	33
6.10	Composição das carteiras eficientes robustas com intervalo de incerteza obtido por bootstrap - julho de 2007.....	34
6.11	Rendimento acumulado em 2007 - carteiras robustas com intervalo de incerteza obtido por bootstrap.....	35
6.12	Rendimento acumulado em 2005 - carteiras robustas com intervalo de incerteza obtido por bootstrap.....	36
6.13	Fronteira eficiente robusta com intervalo de incerteza obtido por média móvel - julho de 2007	37
6.14	Composição das carteiras eficientes robustas com intervalo de incerteza obtido por média móvel - julho de 2007	38
6.15	Rendimento acumulado em 2007 - carteiras robustas com intervalo de incerteza obtido por média móvel	39
6.16	Rendimento acumulado em 2005 - carteiras robustas com intervalo de incerteza obtido por média móvel	40
6.17	Comparação da evolução do investimento em carteiras com nível médio de risco - Retornos históricos: 2004-2007.....	41
6.18	Comparação das fronteiras eficientes para os diferentes modelos - julho de 2007	41

LISTA DE TABELAS

6.1	Valores do Parâmetro Alfa obtidos para cada ação no período de 2007 (multiplicados por 10^2).	29
6.2	Valores do Índice Beta de cada Ação para cada Período de 2007	30

LISTA DE SÍMBOLOS

A^T	transposta de matriz
$A \geq 0$	para $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$, define-se $A \geq 0$ se $a_{ij} \geq 0, \forall i, j$
$cov(x, y)$	covariância entre x e y
$E[\cdot]$	valor esperado
\mathbb{R}	conjunto dos números reais
\mathbb{R}^n	espaço de vetores n -dimensionais de elementos reais
$Q \succeq 0$	matriz simétrica positiva semidefinida
$Var[\cdot]$	variância
$x \geq 0$	para $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]$, define-se $x \geq 0$ se $x_i \geq 0, \forall i = 1, \dots, n$

Siglas

BOVESPA	Bolsa de Valores de São Paulo
CAPM	Capital Asset Pricing Model
Ibovespa	Índice BOVESPA
MVO	Mean-Variance Optimization

Capítulo 1

Introdução

1.1 Contextualização

Os conceitos de otimização e diversificação têm sido úteis no desenvolvimento e na compreensão dos mercados financeiros e do processo de decisão financeira. Harry Markowitz foi o primeiro a modelar o compromisso entre risco e retorno na seleção de carteiras como um problema de otimização [1]. Sua idéia serviu de base para o *Capital Asset Pricing Model* (CAPM), a mais fundamental Teoria de Equilíbrio Geral, e deu início a muitas pesquisas referentes à teoria e prática de gerenciamento de risco de carteiras. Contudo, mais de 50 anos após a publicação do artigo de Markowitz, a otimização de carteiras só é feita em firmas mais quantitativas, as quais já possuem processos automáticos para geração de previsões e controle de risco [2].

Durante muitos anos, os princípios expostos por Markowitz para a seleção de carteiras foram pouco implementados, não devido à descrença com relação à sua validade, mas sim devido ao número excessivo de estimativas necessárias para o cálculo do risco das carteiras. Uma alternativa proposta ao modelo de Markowitz foi o modelo de índice único, que simplificava a estrutura de correlação entre os ativos, relacionando os retornos dos mesmos a um fator comum, o retorno do mercado, e tornando assim o cálculo dos riscos mais viável. Porém, foi o grande avanço computacional dos anos 80 e 90 que permitiu a aplicação da teoria de otimização por média-variância de forma rápida e eficiente.

Nos dias de hoje, apesar da disponibilidade de softwares de otimização avançados, muitos gerentes de ativos têm problemas em aplicar a metodologia de otimização ou, em geral, a evitam. Uma razão é que a aplicação prática da otimização de carteiras revela muita sensibilidade às entradas (retornos esperados dos ativos e suas covariâncias), e carteiras ótimas frequentemente apresentam pesos extremos ou não intuitivos em alguns ativos. Geralmente, a solução prática é a adição de restrições ao problema original de otimização, de forma a limitar resultados não intuitivos. Contudo, como resultado, as restrições - e não as previsões - acabam por determinar a carteira, de forma que o processo de otimização baseado no compromisso entre risco e retorno perde o sentido.

1.2 Motivação

Do ponto de vista prático, é importante tornar o processo de seleção de carteiras robusto com relação a diferentes fontes de risco - incluindo risco de estimação e de modelagem. Há algumas técnicas por meio das quais pode-se obter estimativas robustas dos parâmetros do modelo, entre elas o bootstrap e a média móvel, utilizados neste trabalho. A otimização robusta aqui apresentada possui uma forma eficiente e intuitiva de se modelar a incerteza na estimação das entradas. Além disso, a implementação computacional é direta, com nível de complexidade comparável ao de uma formulação não robusta [2].

1.3 Objetivos do projeto

Este projeto visa à aplicação e avaliação de métodos quantitativos no processo de seleção de carteiras de ações da Bolsa de Valores de São Paulo. É estudada a formulação clássica de média-variância, proposta por Markowitz, e uma formulação alternativa, o modelo de índice único. Especial atenção é dedicada à formulação robusta do modelo de média-variância. O principal objetivo é fazer uma análise comparativa da eficácia de tais modelos quando empregados ao mercado financeiro brasileiro.

1.4 Organização do trabalho

Este trabalho está dividido em sete capítulos. No primeiro, foi apresentado o contexto teórico no qual se insere o estudo desenvolvido, e os objetivos do projeto.. O segundo capítulo define um problema geral de otimização e introduz o problema da seleção de carteiras de investimentos como um problema de otimização quadrática. No terceiro capítulo é apresentada a análise clássica de média-variância, sendo expostas as considerações e definições deste modelo. O capítulo quatro apresenta o modelo de índice único, cujos pressupostos simplificam a aplicação prática dos princípios do modelo de média-variância. No quinto capítulo é apresentada uma modelagem robusta para a composição ótima de uma carteira de investimentos. O sexto capítulo apresenta os resultados práticos obtidos com a aplicação das teorias apresentadas à escolha de carteiras de ações da BOVESPA. Por fim, o sétimo capítulo sintetiza as conclusões acerca do desempenho de cada um dos modelos.

Capítulo 2

Definição do Problema de Seleção de Carteiras de Investimento

2.1 Seleção de Carteiras

Uma carteira de investimentos é um conjunto de ativos financeiros, como ações ou títulos de renda fixa, pertencente a um investidor. Dispondo-se de certa quantia destinada ao investimento, a escolha da carteira consistirá na determinação de quais ativos serão adquiridos e qual fração do montante total será investida em cada um. Tal composição de carteira pode ser resultado de ponderações intuitivas, observação casual de tendências ou resultado de planejamento deliberado. Essa última abordagem é a considerada neste trabalho. Supõe-se haver um investidor racional, ou seja, maximizador, que deseja encontrar a melhor solução de compromisso entre risco e retorno.

Ao se modelar matematicamente o processo de decisão de um indivíduo racional, formulamos tal processo como um problema de otimização.

2.2 Problemas de Otimização

Otimização é um ramo da matemática aplicada cuja importância deriva da grande variedade de suas aplicações e da disponibilidade de algoritmos eficientes. Matematicamente, refere-se à minimização (ou maximização) de uma função, chamada função objetivo, sujeita a certas restrições. As variáveis a serem determinadas são denominadas variáveis de decisão. Assim, os três elementos essenciais de um problema de otimização são a função objetivo, as variáveis de decisão e as restrições. Uma descrição genérica de um problema de otimização é a seguinte:

Dada uma função $f(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, e um conjunto $S \subset \mathbb{R}^n$, determinar $x^* \in \mathbb{R}^n$ que satisfaça

$$\begin{aligned} \min_x f(x) \\ \text{s.a. } x \in S \end{aligned} \tag{2.1}$$

onde S é denominada região admissível. Se S é vazia, o problema é dito não-admissível. Se é possível encontrar uma seqüência $x^k \in S$ tal que $f(x^k) \rightarrow -\infty$ quando $k \rightarrow +\infty$, o problema é

não limitado. Se o problema é admissível e limitado, é possível encontrar uma solução $x^* \in S$ que satisfaz

$$f(x^*) \leq f(x), \forall x \in S. \quad (2.2)$$

Tal x^* é denominado mínimo global do problema. Se

$$f(x^*) < f(x), \forall x \in S, x \neq x^*, \quad (2.3)$$

x^* é denominado mínimo global estrito. Em outros casos, talvez só se encontre $x^* \in S$ que satisfaça

$$f(x^*) \leq f(x), \forall x \in S \cap B_{x^*}(\varepsilon) \quad (2.4)$$

para algum $\varepsilon > 0$, onde $B_{x^*}(\varepsilon)$ é o círculo aberto de raio ε centrado em x^* , i.e.,

$$B_{x^*}(\varepsilon) = \{x : \|x - x^*\| < \varepsilon\}. \quad (2.5)$$

Tal x^* é denominado mínimo local do problema. Um mínimo local estrito é definido de forma similar. Na maior parte das vezes, o conjunto admissível S é descrito explicitamente usando-se restrições (igualdades e desigualdades), ou seja, S pode ser dado por

$$S := \{x : g_i(x) = 0, i \in \mathcal{E} \text{ e } g_i(x) \geq 0, i \in \mathcal{I}\}, \quad (2.6)$$

onde \mathcal{E} e \mathcal{I} são os conjuntos dos índices das restrições de igualdade e desigualdade, por exemplo, $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ e $\mathcal{I} = \{i_1, i_2, \dots, i_n\}$. Assim, o problema genérico de otimização tem a forma:

$$\begin{aligned} \min_x \quad & f(x) \\ & g_i(x) = 0, \quad i \in \mathcal{E} \\ & g_i(x) \geq 0, \quad i \in \mathcal{I}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

De acordo com as escolhas das funções $f(x)$ e $g(x)$, o problema de otimização (2.7) pode ser classificado como linear, quadrático, cônico, dinâmico, discreto, entre outros. Do ponto de vista computacional, é importante que o problema seja polinomial. Isso porque algoritmos de tempo polinomial sempre encontram uma solução ótima em um espaço de tempo que é no máximo uma função polinomial do tamanho da entrada, sendo, nesse sentido, eficientes [3].

De volta ao problema da seleção de uma carteira de investimentos, vimos que um investidor racional deseja obter a melhor solução de compromisso entre retorno esperado e risco da carteira. Tal processo decisório pode ser modelado como um problema de otimização. Mais tarde, mostraremos tal modelagem e verificaremos que se trata de um problema de otimização quadrática, a qual se refere ao problema de minimizar uma função quadrática sujeita a restrições lineares de igualdade e desigualdade. Na sua forma padrão, esse problema é descrito como:

$$\begin{aligned} \min_x \quad & \frac{1}{2}x^T Qx + c^T x \\ & Ax = b \\ & x \geq 0, \end{aligned} \quad (2.8)$$

onde $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$, $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ são dados, e $x \in \mathbb{R}^n$. Quando Q é uma matriz positiva semidefinida, ou seja, quando $y^T Q y \geq 0, \forall y \in \mathbb{R}^n$, a função objetivo é convexa. Tal condição equivale a dizer que Q só possui autovalores não-negativos. Nesse caso, o conjunto admissível é um poliedro, e, portanto, convexo. Assim, quando Q é positiva semidefinida, todo ótimo local do problema é também um ótimo global. Quando isso ocorre, o problema passa a ser polinomial [3].

Capítulo 3

Seleção de Carteiras pelo Modelo de Média-Variância

3.1 Introdução

Para se escolher uma carteira ótima, é preciso, primeiramente, obter informações acerca das ações que vão compô-la. De primordial importância é conhecer as potencialidades e as fraquezas de cada ação. Por potencialidades, podemos considerar os retornos futuros que a ação pode render ao investidor, e por fraquezas, a incerteza na realização desses retornos, ou seja, o risco do investimento. No entanto, não é possível ter o conhecimento preciso de tais características, pois estas são, em geral, não observáveis. Podemos apenas fazer prognósticos, os quais estarão sempre sujeitos à não confirmação futura.

Contudo, isso não significa que a elaboração de previsões é inútil. Identificando-se os fatores que influenciam os retornos e riscos das ações, e tratando-os de forma adequada, pode-se reduzir a probabilidade de previsões errôneas [4]. Um fator comumente usado na determinação dos retornos futuros é o histórico de retornos das ações. Ou seja, faz-se a suposição de que ações que apresentaram bom desempenho no passado são candidatas a ter bons desempenhos futuros.

Com base nessa suposição, o modelo de média-variância proposto por Markowitz considera que os retornos históricos das ações constituem variáveis aleatórias e possuem, portanto, uma média e um desvio padrão. A média representa o retorno esperado da ação, e assim,

$$\mu_i = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T r_{ti}, \quad (3.1)$$

onde r_{ti} é o retorno da ação i em um período de tempo t , compreendido entre 1 e T , e μ_i é o valor esperado da ação.

Sendo o risco uma medida da incerteza com respeito à realização do retorno esperado, pode-se usar uma medida de dispersão em torno da média para aproximá-lo. A utilização da variância, ou do desvio-padrão, como uma aproximação do risco, confere vantagens práticas à modelagem do processo de decisão, como ficará explícito mais adiante.

O risco de uma ação individual é definido, portanto, como seu desvio-padrão,

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (r_{ti} - \mu_i)^2}. \quad (3.2)$$

Assim, avaliam-se as potencialidades e fraquezas das ações individuais. Contudo, este é apenas o ponto de partida, pois o objetivo final é a composição de carteiras de ativos.

Como a média da soma de variáveis aleatórias é a soma das médias destas, é fácil determinar a potencialidade de uma carteira de ações, ou seja, o seu retorno esperado. Basta realizar a soma dos retornos esperados das ações que a compõem, ponderando cada retorno pela fração do investimento total alocada em cada ação. Assim, define-se o retorno esperado de uma carteira como

$$R_c = x_1\mu_1 + x_2\mu_2 + \dots + x_i\mu_i = \mu^T x, \quad (3.3)$$

onde $\mu = [\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_i]^T$ e $x = [x_1, x_2, \dots, x_i]^T$ é o vetor de pesos das ações.

Já a determinação do risco da carteira não é feita de forma tão simples, já que a variância de uma soma não é dada pela soma das variâncias de cada termo. Foi esta simples constatação que acabou por revolucionar a análise de carteiras de investimentos. Harry Markowitz foi o primeiro a demonstrar formalmente que a combinação de diferentes ações é capaz de reduzir o risco do investimento a um valor menor do que o de qualquer ação componente da carteira [1]. Ou seja, a diversificação é uma estratégia interessante na composição de carteiras de investimento.

Levando em consideração apenas os retornos e riscos individuais das ações, poder-se-ia encontrar uma determinada ação com um perfil retorno/risco interessante e daí concluir que todo dinheiro deveria ser alocado nela. Contudo, tal procedimento não seria indicado devido à falta de diversificação no investimento. Assim, Harry Markowitz demonstrou que na composição de uma carteira deve-se avaliar o risco desta como um todo, e não apenas os riscos individuais das ações. Ou seja, deve-se escolher carteiras e não ações individuais.

Além disso, o modelo de seleção de carteiras proposto por Markowitz forneceu uma maneira de determinar matematicamente o risco de carteiras de investimento. A consideração crucial em tal determinação diz respeito à forma como os riscos das diferentes ações se combinam na formação do risco da carteira. Na modelagem de tal interação, foi utilizada a definição da covariância entre variáveis aleatórias.

A covariância entre os retornos r_i e r_j de dois ativos i e j quaisquer é dada por

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (r_{it} - \mu_i)(r_{jt} - \mu_j). \quad (3.4)$$

Note que a covariância é o valor esperado do produto de dois desvios: os desvios do ativo i com relação à sua média, $(r_{it} - \mu_i)$, e os desvios do ativo j com relação à sua média, $(r_{jt} - \mu_j)$. Nesse sentido, ela é muito semelhante à variância. Contudo, trata-se do produto de dois desvios diferentes, podendo, portanto, ser positiva ou negativa. Seu valor será positivo quando retornos acima do esperado para cada ativo ocorrerem juntos ou quando retornos abaixo do esperado para cada ativo ocorrerem juntos. Ao contrário, se altos retornos para um ativo estiverem associados a baixos retornos para o outro ativo, a covariância será negativa. Quando os desvios dos ativos não

estiverem relacionados, a covariância será nula. Portanto, a covariância é uma medida de como os retornos dos ativos se movem conjuntamente, e é necessária na determinação do risco da carteira como um todo. Em muitas ocasiões, é útil normalizar a covariância. Dividir a covariância entre dois ativos pelo produto dos desvios-padrão de cada ativo produz uma variável com as mesmas propriedades da covariância, porém situada no intervalo de -1 a +1. Tal medida é denominada coeficiente de correlação. O coeficiente de correlação entre os ativos i e j , ρ_{ij} , é definido como

$$\rho_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i \sigma_j}. \quad (3.5)$$

Assim, a variância da carteira como um todo é calculada a partir da matriz de covariância, na qual cada termo fora da diagonal representa a covariância entre um par de ações, e os termos da diagonal representam as variâncias individuais das ações.

Dessa forma, a variância da carteira é dada por

$$Var[x] = x^T Q x. \quad (3.6)$$

onde Q é a matriz de covariância da carteira, sendo cada elemento de Q , q_{ij} dado por

$$q_{ij} = cov(r_i, r_j). \quad (3.7)$$

3.2 Modelagem do Problema de Otimização de Média-Variância

Seja N o número de ações candidatas a compor a carteira. A escolha do investidor compreende, então, um vetor N - dimensional $x = [x_1, x_2, \dots, x_N]^T$ de pesos, onde x_i representa a porcentagem da carteira composta pelo i -ésimo ativo. Suponha que, para cada ativo i , $i = 1, \dots, n$, estimativas de seu retorno esperado e variância σ_i^2 são dados. Além disso, suponha que se conhece a covariância σ_{ij} entre quaisquer dois ativos i e j a partir de séries temporais dos retornos históricos destes.

Portanto, o investidor que pretenda minimizar o risco associado a determinado investimento atingindo um retorno desejável deve solucionar o seguinte problema de otimização:

$$\min_x \quad x^T Q x \quad (3.8)$$

$$s.a. \quad \mu^T x \geq R \quad (3.9)$$

$$\sum_{i=1}^N x_i = 1 \quad (3.10)$$

$$x_i \geq 0, \forall i. \quad (3.11)$$

A restrição (3.9) significa que o retorno da carteira não deve ser inferior ao retorno R mínimo aceito pelo investidor. A restrição (3.10) significa que todo o dinheiro disponível para investimento deve ser alocado na carteira. Por fim, a restrição (3.11) significa que vendas a descoberto¹ são proibidas. Neste trabalho, esta hipótese foi assumida em todas as análises.

Em função do exposto, o problema de seleção de carteiras torna-se um problema de otimização quadrática. Como Q é uma matriz de covariâncias, trata-se, por construção uma matriz positiva semidefinida.

¹Ver Glossário no Anexo II.

Resolvendo-se o problema de minimização de variância sem a restrição (3.11), obtém-se a carteira de retorno esperado mínimo, R_{\min} , devido ao compromisso entre risco e retorno. Da mesma forma, resolvendo o problema de maximização de retorno esperado sem uma restrição referente a risco máximo, obtém-se a carteira de retorno esperado máximo, R_{\max} . Resolvendo o problema (3.8) para diferentes R 's variando de R_{\min} a R_{\max} obtém-se o conjunto de todas as carteiras ótimas, ou eficientes.

Representando tais carteiras em um plano cartesiano, no qual o eixo x representa o desvio-padrão da carteira e o eixo y seu retorno esperado, obtém-se uma curva como a da Figura 3.1, na qual fica claro o compromisso entre risco e retorno enfrentado pelo investidor.

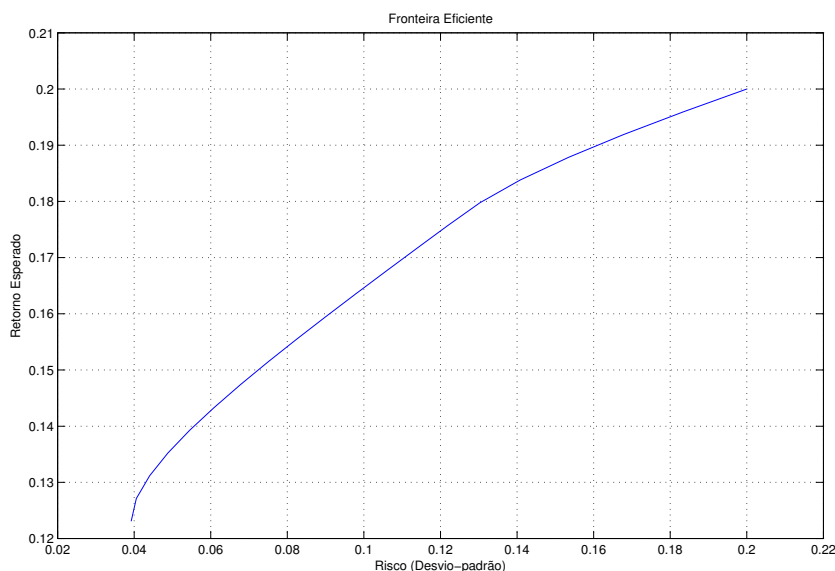


Figura 3.1: Exemplo de fronteira eficiente

A curva encontrada é denominada fronteira eficiente, por ser o conjunto de pontos que representa as carteiras eficientes. Pontos abaixo da fronteira eficiente representam carteiras admissíveis, porém não eficientes. Pontos acima da fronteira representam carteiras não admissíveis. O investidor racional deve, portanto, escolher uma carteira dessa fronteira. A carteira escolhida depende da propensão ao risco de cada investidor, ou do retorno que ele deseja obter com o investimento.

Capítulo 4

Retorno e Risco pelo Modelo de Índice Único

4.1 Introdução

Uma questão prática importante na aplicação da teoria de carteiras de investimento é a estimação dos retornos esperados μ_i 's e das covariâncias σ_{ij} 's. O método clássico, visto no capítulo anterior, calcula tais entradas com base nos retornos históricos de cada ativo e na covariância entre pares de ativos dados, respectivamente, por (3.1) e (3.4).

Assim, sendo N o número de ações candidatas a compor a carteira, é preciso calcular N retornos esperados, o que é simples do ponto de vista computacional. Contudo, a determinação da matriz de covariâncias exige um número mais elevado de cálculos, pois é necessário estimar σ_{ij} para cada par de ações i e j , a partir de suas séries de históricos. Para o cálculo dos termos fora da diagonal da matriz de covariâncias, o primeiro índice assume N valores diferentes, e o segundo índice, $N - 1$. Como a matriz de covariâncias é simétrica, ou seja, $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$, faz-se necessário estimar $\frac{N(N-1)}{2}$ valores. Somam-se a isso as N variâncias que compõem a diagonal, num total de $\frac{N(N+1)}{2}$ valores estimados. Somando o cálculo de N retornos esperados ao cálculo dos $\frac{N(N+1)}{2}$ elementos da matriz de covariância, obtemos, então, no total $\frac{N(N+3)}{2}$ valores estimados.

Um modelo que simplifica a estrutura de correlações dos retornos é o modelo de índice único, descrito a seguir [5].

4.2 O modelo de índice único: visão geral

A observação casual dos preços de ações revela que quando a bolsa sobe (o que é indicado por algum índice, como o Ibovespa¹), o preço da maioria das ações tende a subir, e quando a bolsa cai, o preço da maioria das ações tende a cair. Isso sugere que uma das razões pelas quais os retornos das ações devem estar correlacionados é devido a uma resposta comum às mudanças do mercado, e uma medida útil dessa correlação pode ser obtida relacionando-se o retorno de uma

¹Ver Glossário Financeiro no Anexo II

ação ao retorno de um índice de mercado. O retorno de uma ação i pode ser escrito como

$$R_i = a_i + \beta_i R_m, \quad (4.1)$$

onde

- a_i é a componente do retorno da ação que é independente da performance do mercado - uma variável aleatória
- R_m é a taxa de retorno do índice de mercado - uma variável aleatória
- β_i é uma constante que mede a variação esperada em R_i dada uma variação em R_m

Observe que (4.1) simplesmente divide o retorno de uma ação em duas partes, uma relacionada ao mercado e outra independente deste. O termo β_i na expressão mede quão sensível é o retorno de uma ação ao retorno do mercado. Um β_i de 2 significa que quando o índice do mercado aumenta (ou diminui) em 1%, espera-se que o retorno da ação aumente (ou diminua) em 2%.

O termo a_i representa a componente do retorno insensível ao retorno do mercado. É interessante dividir o termo a_i em duas componentes. Seja α_i o valor esperado de a_i e e_i o elemento aleatório (incerto) de a_i . Então

$$a_i = \alpha_i + e_i, \quad (4.2)$$

onde e_i tem valor esperado igual a zero. O retorno de uma ação pode agora ser escrito como

$$R_i = \alpha_i + \beta_i R_m + e_i. \quad (4.3)$$

Sendo variáveis aleatórias, e_i e R_m têm uma distribuição de probabilidade, assim como uma média e um desvio-padrão. Sejam seus desvios-padrão σ_{e_i} e σ_m , respectivamente. É conveniente que e_i e R_m não estejam correlacionados. Formalmente,

$$\text{cov}(e_i, R_m) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (e_{it} - 0)(R_{mt} - \overline{R_m}) = 0, \quad (4.4)$$

onde $\overline{R_m}$ é o retorno médio do mercado.

Estimativas de α_i , β_i , e σ_{e_i} são muitas vezes obtidas a partir da regressão linear de séries temporais, caso do presente trabalho. A análise de regressão é uma técnica que garante que e_i e R_m não serão correlacionados, ao menos durante o período ao qual se ajustou a equação.

A suposição chave do modelo de índice único é que e_i é independente de e_j para todos os valores de i e j , ou seja, $\text{cov}(e_i, e_j) = 0$. Isso implica que a única razão pela qual ações variam juntas, sistematicamente, é um co-movimento com o mercado.

4.3 Retorno médio e elementos da matriz de covariância

Segundo o modelo de índice único, o retorno de um ativo é dado por (4.3). Sendo $E(R_i)$ o retorno esperado de uma ação,

$$E(R_i) = E[\alpha_i + \beta_i R_m + e_i]. \quad (4.5)$$

Como o valor esperado da soma de variáveis aleatórias é a soma dos valores esperados, temos

$$E(R_i) = E(\alpha_i) + E(\beta_i R_m) + E(e_i). \quad (4.6)$$

Já que α_i e β_i são constantes, e por construção o valor esperado de e_i é zero,

$$E(R_i) = \alpha_i + \beta_i \overline{R_m}. \quad (4.7)$$

A variância do retorno de uma ação i qualquer é

$$\sigma_i^2 = E(R_i - \overline{R_i})^2 \quad (4.8)$$

$$\sigma_i^2 = E[(\alpha_i + \beta_i R_m + e_i) - (\alpha_i + \beta_i \overline{R_m})]^2 \quad (4.9)$$

$$\sigma_i^2 = \beta_i^2 E(R_m - \overline{R_m})^2 + 2\beta_i E[e_i(R_m - \overline{R_m})] + E(e_i)^2. \quad (4.10)$$

Já que $E[e_i(R_m - \overline{R_m})] = 0$,

$$\sigma_i^2 = \beta_i^2 \sigma_m^2 + \sigma_{e_i}^2. \quad (4.11)$$

A covariância entre duas ações pode ser escrita como

$$\sigma_{ij} = E[(R_i - \overline{R_i})(R_j - \overline{R_j})] \quad (4.12)$$

$$\sigma_{ij} = E\{[(\alpha_i + \beta_i R_m + e_i) - (\alpha_i + \beta_i \overline{R_m})] \cdot [(\alpha_j + \beta_j R_m + e_j) - (\alpha_j + \beta_j \overline{R_m})]\} \quad (4.13)$$

$$\sigma_{ij} = E[(\beta_i(R_m - \overline{R_m}) + e_i)(\beta_j(R_m - \overline{R_m}) + e_j)] \quad (4.14)$$

$$\sigma_{ij} = \beta_i \beta_j E(R_m - \overline{R_m})^2 + \beta_j E[e_i(R_m - \overline{R_m})] + \beta_i E[e_j(R_m - \overline{R_m})] + E(e_i e_j). \quad (4.15)$$

Como, pelo modelo, os três últimos termos são nulos

$$\sigma_{ij} = \beta_i \beta_j \sigma_m^2. \quad (4.16)$$

Resumindo:

$$E(R_i) = \alpha_i + \beta_i \overline{R_m} \quad (4.17)$$

$$\sigma_i^2 = \beta_i^2 \sigma_m^2 + \sigma_{e_i}^2 \quad (4.18)$$

$$\sigma_{ij} = \beta_i \beta_j \sigma_m^2 \quad (4.19)$$

Percebe-se então que, para o cálculo dos valores esperados e para a construção da matriz de covariâncias são necessárias estimativas de β_i , α_i e σ_{e_i} de cada ação, além do retorno esperado ($\overline{R_m}$) e da variância (σ_m^2) do mercado. Assim, caso se tenha N ações, serão necessárias $3N + 2$ estimativas, ao invés do total de $\frac{N(N+3)}{2}$ estimativas quando se consideram as correlações entre cada par de ações. No presente trabalho, utilizamos em média 15 ações na composição de cada carteira. Dessa forma, o modelo de índice único reduz o número de estimativas necessárias de 135 para 47. Caso fosse necessário analisar um maior número de ações, a diferença seria ainda mais significativa. Por exemplo, para uma carteira de 200 ações, o modelo de índice único reduz o número de estimativas necessárias de 20300 para 602, o que é muito vantajoso do ponto de vista computacional.

4.4 Características do modelo de índice único

Seja o **Beta de uma carteira** a média ponderada dos β_i 's individuais de cada ação, onde os pesos são a fração da carteira investida em cada ação. Então

$$\beta_c = \sum_{i=1}^N x_i \beta_i. \quad (4.20)$$

De forma similar, seja o **Alfa da carteira**

$$\alpha_c = \sum_{i=1}^N x_i \alpha_i. \quad (4.21)$$

Assim, o retorno médio da carteira fica

$$\overline{R_c} = \alpha_c + \beta_c \overline{R_m} \quad (4.22)$$

e a variância da carteira pode ser escrita como

$$\sigma_c^2 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N x_i x_j \beta_i \beta_j \sigma_m^2 + \sum_{i=1}^N x_i^2 \sigma_{e_i}^2. \quad (4.23)$$

Rearranjando os termos

$$\sigma_c^2 = \left(\sum_{i=1}^N x_i \beta_i \right) \left(\sum_{i=1}^N x_j \beta_j \right) \sigma_m^2 + \sum_{i=1}^N x_i^2 \sigma_{e_i}^2, \quad (4.24)$$

e, finalmente,

$$\sigma_c^2 = \beta_c^2 \sigma_m^2 + \sum_{i=1}^N x_i^2 \sigma_{e_i}^2. \quad (4.25)$$

Suponha que um investidor forma uma carteira distribuindo o dinheiro igualmente entre as ações. Nesse caso,

$$\sigma_c^2 = \beta_c^2 \sigma_m^2 + \frac{1}{N} \left(\sum_{i=1}^N \frac{1}{N} \sigma_{e_i}^2 \right). \quad (4.26)$$

O último termo desta equação pode ser visto como $\frac{1}{N}$ vezes o risco residual médio da carteira. Conforme o número de ações aumenta, a importância do risco residual médio diminui. Como o efeito de $\sigma_{e_i}^2$ no risco da carteira tende a zero com o aumento desta, é comum referir-se a $\sigma_{e_i}^2$ como risco diversificável. Por outro lado, o risco associado ao termo β_c não diminui com o aumento da carteira. Se assumirmos que o risco residual tende a zero, o risco da carteira tende a

$$\sigma_c = [\beta_c^2 \sigma_m^2]^{\frac{1}{2}} = \beta_c \sigma_m = \sigma_m \left[\sum_{i=1}^N x_i \beta_i \right]. \quad (4.27)$$

Como σ_m é o mesmo, independentemente de qual ação se examina, a medida da contribuição de uma ação ao risco de uma carteira com muitas ações é β_i . Assim, β_i pode ser considerado o risco não-diversificável da carteira.

4.5 Estimativa de Beta e Alfa

Espera-se que (4.3) seja válida a qualquer momento, embora os valores de α_i , β_i , ou $\sigma_{e_i}^2$ possam variar com o tempo. Quando se observam os dados históricos, não se pode observar diretamente α_i , β_i , ou $\sigma_{e_i}^2$. Ao invés disso, observam-se os retornos passados das ações e do índice de mercado.

Note que (4.3) representa uma linha reta. Se $\sigma_{e_i}^2$ fosse zero, seria possível estimar α_i e β_i com apenas duas observações. Contudo, a presença da variável aleatória e_i implica que o retorno real dispersa-se em torno da linha reta [5]. A Figura 4.1 representa esse padrão.

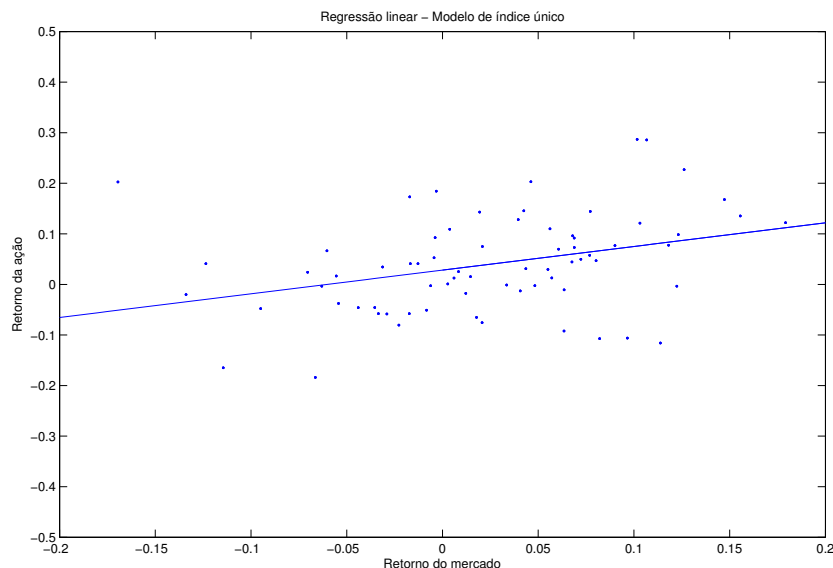


Figura 4.1: Regressão linear

O eixo vertical é o retorno da ação i e o eixo horizontal o retorno do mercado. Cada ponto no diagrama é o retorno da ação i em um particular instante de tempo (no caso do presente trabalho, ao fim de um mês) plotado contra o retorno do mercado para o mesmo instante. Há várias formas de se determinar a localização da linha reta dados os pontos amostrais. A forma mais comum é via análise de regressão, a qual considera ótima a reta que minimiza a soma dos quadrados das distâncias de cada ponto à linha. A inclinação da reta assim determinada é o coeficiente β_i da ação e o ponto onde a reta intercepta o eixo vertical, o coeficiente α_i . Tais cálculos foram realizados, no presente trabalho, utilizando-se o software *Matlab*^{®2}.

²O mfile correspondente encontra-se no Anexo III

Capítulo 5

Modelo Robusto: Seleção de Carteiras quando há Incertezas no Retorno e no Risco

5.1 Introdução

Tanto o modelo de média-variância quanto sua formulação alternativa de índice único, fornecem apenas uma estimativa dos retornos μ_i 's e das covariâncias σ_{ij} 's dos ativos considerados. Infelizmente, observa-se que pequenas mudanças nas séries de tempo r_{it} (devido a consideração, por exemplo, de horizontes de tempo T diferentes) levam a mudanças significativas nos parâmetros de entrada μ e Q que acabam por conduzir a mudanças significativas na composição carteira ótima. Como mostrado pelas simulações realizadas neste projeto, e cujos resultados encontram-se no Capítulo 6, diferentes composições da carteira podem resultar em rendimentos radicalmente diferentes. Conclui-se, portanto, que uma deficiência fundamental do problema até agora considerado é a elevada sensibilidade da solução a pequenas variações das entradas.

Otimização robusta, um ramo emergente da área de otimização, oferece formas de incorporar riscos de estimação no processo de decisão de carteiras de ativos. Ela refere-se à modelagem de problemas de otimização com parâmetros incertos de forma a obter uma solução que é garantidamente satisfatória para todas, ou quase todas, realizações dos parâmetros incertos. Deve-se observar, contudo, que há diferentes interpretações de robustez que conduzem a diferentes formulações matemáticas. Neste projeto, procura-se a solução que apresente a melhor performance no pior caso de realização dos parâmetros.

Nesta abordagem, a incerteza é descrita por um conjunto que inclui todas, ou quase todas, possíveis realizações dos parâmetros de entrada incertos. Dado um problema com entradas incertas e um conjunto de incerteza para estas entradas, deve-se escolher as variáveis que minimizem a função objetivo de pior desempenho [6].

5.2 O problema de otimização por média-variância robusto

O problema de otimização por média-variância apresentado no Capítulo 2 para a seleção de carteiras eficientes é um problema de otimização quadrática, conforme (3.8).

Como afirmado, uma das principais críticas ao modelo clássico de otimização por média-variância é centrada na observação de que as carteiras ótimas são muito sensíveis aos parâmetros de entrada: vetor de retornos esperados, μ , e matriz de covariância Q . Tais parâmetros são não-observáveis e é preciso estimá-los por meio de alguma técnica particular. Na presença de múltiplas estimativas igualmente confiáveis, a melhor forma de se integrar toda a informação disponível não é clara. Neste trabalho, a estratégia adotada para conferir robustez à escolha é representar toda a informação disponível dos parâmetros de entrada desconhecidos na forma de um conjunto de incerteza, i.e., um conjunto que contém a maioria dos valores possíveis destes parâmetros. Assim, os conjuntos de incerteza do vetor de retornos μ e da matriz de covariância Q tomam a forma de intervalos:

$$\mathcal{U}_\mu = \{\mu : \mu^L \leq \mu \leq \mu^U\}, \quad (5.1)$$

$$\mathcal{U}_Q = \{Q : Q^L \leq Q \leq Q^U, Q \succeq 0\}, \quad (5.2)$$

$$\mathcal{U} = \{(\mu, Q) : \mu \in \mathcal{U}_\mu, Q \in \mathcal{U}_Q\}. \quad (5.3)$$

Acima, μ^L , μ^U , Q^L , Q^U são os valores extremos dos intervalos de incerteza. A restrição $Q \succeq 0$ indica que Q é uma matriz simétrica positiva semidefinida. Dado o conjunto \mathcal{U} , a versão robusta do problema de otimização por média-variância pode ser expressa como

$$\min_x \{ \max_{Q \in \mathcal{U}_Q} x^T Q x \} \quad (5.4)$$

$$x \in \mathcal{X} \quad (5.5)$$

$$\min_{\mu \in \mathcal{U}_\mu} \mu^T x \geq R \quad (5.6)$$

onde \mathcal{X} é o conjunto admissível de carteiras. Na maioria dos problemas de alocação de ativos, não são permitidas vendas a descoberto. Neste caso,

$$\mathcal{X} = \{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n x_i = 1, x \geq 0\} \quad (5.7)$$

A restrição $\sum_{i=1}^n x_i = 1$ é necessária para assegurar que todo dinheiro disponível para investimento seja alocado.

5.3 Determinação da carteira robusta

5.3.1 Formulação geral

Deseja-se encontrar uma solução para o problema (5.4), (5.5), (5.6) e (5.7), onde $x \in \mathbb{R}^n$ é um vetor não negativo e \mathcal{U} dado por (5.3).

Primeiro, deve-se notar que a restrição (5.6) pode ser simplificada para $(\mu^L)^T x \geq R$ já que $x \geq 0$. Seja

$$\phi(x, Q) := x^T Q x, x \in \mathcal{X}, Q \in \mathcal{U}_Q \quad (5.8)$$

Para uma Q fixa tal que $Q \in \mathcal{U}_Q$, a função ϕ é uma função quadrática convexa de x . Similarmente, para x fixo, a função ϕ é uma função linear de Q . Este último fato segue da observação de que $x^T Q x = \sum_{ij} (x_i x_j) q_{ij}$.

Combinando estas observações com as considerações de que os conjuntos \mathcal{X} e \mathcal{U} são não-vazios e limitados, e o lema 2.3 de [7], chega-se à seguinte conclusão: definindo $\mathcal{X}_R := \{x \in \mathcal{X} : (\mu^L)^T x \geq R\}$, valores ótimos para o seguinte par de problemas,

$$\min_{x \in \mathcal{X}_R} \{ \max_{Q \in \mathcal{U}_Q} \phi(x, Q) \} \quad (5.9)$$

$$\max_{Q \in \mathcal{U}_Q} \{ \min_{x \in \mathcal{X}_R} \phi(x, Q) \} \quad (5.10)$$

são iguais e obtidos em um ponto de sela da função $\phi(x, Q)$. Em outras palavras, existe um vetor $\bar{x} \in \mathcal{X}$ e uma matriz $\bar{Q} \in \mathcal{U}_Q$ tais que

$$\phi(\bar{x}, Q) \leq \phi(\bar{x}, \bar{Q}) \leq \phi(x, \bar{Q}), \quad \forall x \in \mathcal{X}_R, Q \in \mathcal{U}_Q \quad (5.11)$$

e

$$\bar{x} \in \mathcal{X}_R, \bar{Q} \in \mathcal{U}_Q \quad (5.12)$$

resolvem coletivamente os problemas em (5.9) e (5.10).

Portanto, o problema de minimax (5.4),(5.5),(5.6) e (5.7) é equivalente a um problema de determinação do ponto de sela da função $\phi(x, Q)$. Podem-se deduzir condições caracterizando pontos de sela da função $\phi(x, Q)$ usando o otimalidade de \bar{x} para $\min_{x \in \mathcal{X}_R} \phi(x, \bar{Q})$, e de \bar{Q} para $\max_{Q \in \mathcal{U}_Q} \phi(\bar{x}, Q)$, o que forma a base do algoritmo desenvolvido em [7] para a determinação da fronteira eficiente robusta [6].

5.3.2 Caso simples

Quando a matriz Q^U resulta positiva semidefinida torna-se desnecessária a aplicação do algoritmo de ponto de sela desenvolvido por [7] para a resolução do problema robusto. Isso porque, neste caso, o problema robusto de alocação de ativos pode ser resolvido de forma sequencial, i.e., encontrando primeiro o pior caso das entradas e, em seguida, a melhor alocação para estas. Assim, o problema se reduz a um problema simples de otimização por média variância.

Lema ([6]): Seja $x \in \mathbb{R}^n$ um vetor não negativo e seja $\mathcal{U} = \{(\mu, Q) : \mu \in \mathcal{U}_\mu, Q \in \mathcal{U}_Q\}$ com uma matriz positiva semidefinida Q^U . Então, uma solução ótima do problema

$$\max_{Q \in \mathcal{U}_Q} \quad x^T Q x \quad (5.13)$$

$$x \in \mathcal{X} \quad (5.14)$$

$$\min_{\mu \in \mathcal{U}_\mu} \quad \mu^T x \geq R \quad (5.15)$$

é $\mu^* = \mu^L$ e $Q^* = Q^U$ independentemente da carteira x .

Prova([6]): Deve-se resolver dois problemas menores:

$$\begin{array}{ll}
\max_Q x^T Q x & e \\
s.a. Q^L \leq Q \leq Q^U & \min_{\mu} \mu^T x \\
Q \succeq 0 & s.a. \mu^T x \geq R \\
& \mu^L \leq \mu \leq \mu^U
\end{array}$$

Já que $x \geq 0$, o valor objetivo do segundo problema é minimizado quando cada elemento do vetor μ se encontra em seu limite inferior, i.e., quando $\mu = \mu^L$. Para o primeiro problema, ignore por ora a restrição $Q \succeq 0$. Como $x_i x_j \geq 0$ para todo i e j , $x^T Q x = \sum_{i,j} q_{ij} x_i x_j$ será maximizado quando todos q_{ij} alcançarem seu maior valor realizável, i.e., quando $Q = Q^U$. Como assumiu-se que Q^U é uma matriz positiva semidefinida, ela é uma solução ótima também quando se leva em consideração $Q \succeq 0$.

A proposição acima indica que quando vendas a descoberto são proibidas e os limites superiores na matriz de covariância geram uma matriz de covariância aceitável, então a realização de pior caso dos parâmetros é a mesma independentemente de qual carteira é escolhida - os retornos esperados se realizam nos mais baixos valores possíveis e as covariâncias se realizam nos mais altos valores possíveis. Sob este cenário, o problema robusto de seleção de carteira por média-variância se reduz a

$$\min_x x^T Q^U x \quad (5.16)$$

$$s.a. x \in \mathcal{X} \quad (5.17)$$

$$(\mu^L)^T x \geq R \quad (5.18)$$

A grande maioria dos testes com dados reais não resultou em matrizes Q^U positivas semidefinidas. Portanto, estudamos a formulação de ponto de sela desenvolvida por [7]. Contudo, tal formulação é de recente desenvolvimento, de forma que só encontramos referências a esta nos artigos dos próprios autores do algoritmo. Tais referências não explicitam a origem e significado de todas as funções contidas no algoritmo de ponto de sela. Tal ausência de informação tornou impraticável a aplicação deste.

Observamos então que, quando a matriz Q^U apresentava pelo menos um autovalor negativo (não sendo, portanto, positiva semidefinida), mesmo o menor autovalor apresentava módulo próximo de zero. Assim, foi proposta uma alternativa para tornar a matriz Q^U sempre positiva definida, de forma que o problema robusto pudesse ser resolvido como dois problemas clássicos em sequência. A alternativa foi a aplicação do seguinte lema:

Lema 5.1 Sejam $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ os autovalores de uma matriz simétrica $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ordenados de forma decrescente:

$$\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n.$$

Para $\delta \in \mathbb{R}$ fixo, defina μ_1, \dots, μ_n os autovalores de

$$A_c := A + (|\lambda_n| + \delta) I_n$$

(aqui, I_n é a matriz identidade de ordem n) ordenados de forma decrescente:

$$\mu_1 \geq \dots \geq \mu_n.$$

Temos que

$$(1) \mu_i = \lambda_i + (|\lambda_n| + \delta);$$

$$(2) \text{ se } \lambda_n < 0, \text{ então } \mu_n = \delta.$$

$$(3) \text{ se } \lambda_n < 0 \text{ e } \delta > 0 \text{ então } A_c \text{ é uma matriz simétrica positiva definida.}$$

Prova: Como A é simétrica, A é ortogonalmente similar a uma matriz diagonal [8], ou seja, existe uma matriz P tal que

$$P^T A P = \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} \quad (5.19)$$

com $P^T P = P P^T = I$. Como as colunas de P formam uma base de A [8], podemos alternar as colunas de forma que $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$. Multiplicando A_c à esquerda por P^T e à direita por P e usando 5.19 temos

$$P^T A_c P = P^T (A + (|\lambda_n| + \delta) I_n) P = P^T A P + (|\lambda_n| + \delta) P^T P = \Lambda + (|\lambda_n| + \delta) I_n$$

ou seja,

$$P^T A_c P = \begin{bmatrix} \lambda_1 + (|\lambda_n| + \delta) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n + (|\lambda_n| + \delta) \end{bmatrix}$$

Usando a propriedade de ortogonalidade de P e o fato de que o determinante do produto é igual ao produto dos determinantes, temos que o polinômio característico pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} \det(sI_n - A_c) &= \det(sP P^T - A_c) \\ &= \det(P (sI_n - A_c) P^T) \\ &= \det(P (sI_n - P^T A_c P) P^T) \\ &= \det(P) \det(sI_n - P^T A_c P) \det(P^T) \\ &= \det(P) \det(P^T) \begin{vmatrix} s - (\lambda_1 + (|\lambda_n| + \delta)) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & s - (\lambda_n + (|\lambda_n| + \delta)) \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Como P é não singular, $\det(P) \neq 0$ e $\det(P^T) \neq 0$. Portanto, o polinômio característico de A_c se anula apenas para

$$s = \mu_i := \lambda_i + (|\lambda_n| + \delta), \quad i = 1, \dots, n.$$

Assim, provamos o item (1) do Lema.

Se $\lambda_n < 0$, então $|\lambda_n| = -\lambda_n$. Portanto, do item (1) do Lema,

$$\begin{aligned}\mu_n &= \lambda_n + (|\lambda_n| + \delta) \\ \mu_n &= \lambda_n - \lambda_n + \delta \\ \mu_n &= \delta,\end{aligned}$$

o que prova o item (2).

Portanto, se $\lambda_n < 0$ e $\delta > 0$, todos os autovalores de A_c são reais estritamente positivos. Por definição [8], uma matriz simétrica é definida positiva se e só se todos seus autovalores são reais estritamente positivos. Portanto, se $\lambda_n < 0$ e $\delta > 0$, a matriz A_c é definida positiva, o que prova o item (3).

Assim, sempre que algum autovalor de Q^U resultava negativo, aplicávamos tal transformação, obtendo uma nova matriz Q'^U , pouco diferente da original. Dessa forma, foi feita uma simplificação do modelo robusto que resolveu o obstáculo inicial e proporcionou a implementação computacional direta e eficiente do problema. Os resultados obtidos mostraram que tal artifício manteve a robustez da modelagem, como poderá ser comprovado no Capítulo 6.

5.4 Determinação do intervalo de incerteza

Diferentes técnicas podem ser usadas na determinação dos intervalos de incerteza dos retornos esperados e da matriz de covariância. O fundamental é obter uma série de estimativas de tais parâmetros de entrada, de forma a ordená-los e identificar o menor vetor de retornos esperados e a matriz de covariância com os maiores elementos. Contudo, a disponibilidade de dados para a realização de tais estimativas é limitada, e é preciso encontrar uma forma de extrair o máximo de informação dos dados escassos. Uma alternativa é a aplicação de um método de reamostragem, como o bootstrap [6].

5.4.1 Técnica de Bootstrap

Suponha que dispõe-se de uma amostra aleatória $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Uma amostra do tipo bootstrap é uma amostra aleatória de tamanho n obtida com reposição da população de n objetos (x_1, x_2, \dots, x_n) . Assim, obtém-se um novo conjunto $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$. A notação “*” indica que x^* não é o conjunto de dados x , mas sim uma versão randomizada, ou reamostrada, de x . É possível obter-se por exemplo $x_1^* = x_7, x_2^* = x_3, x_3^* = x_3, x_4^* = x_9, \dots, x_n^* = x_7$. O conjunto bootstrap $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ é composto por membros do conjunto original (x_1, x_2, \dots, x_n) , alguns não aparecendo vez alguma, alguns aparecendo uma vez, alguns aparecendo duas vezes, etc.

Suponha que se aplique uma função $s(\cdot)$ ao conjunto de amostras x . Por exemplo, no presente trabalho aplicamos a média simples ao conjunto de amostras de retornos passados de cada ação, obtendo o vetor μ . Denotando por θ o resultado da aplicação de $s(\cdot)$ a x , ou seja, $\theta = s(x)$, podemos obter uma réplica bootstrap de θ ,

$$\theta^* = s(x^*). \tag{5.20}$$

A quantidade $s(x^*)$ é o resultado de se aplicar a mesma função $s(\cdot)$ a x^* que fora aplicada a x . Por exemplo, se $s(x)$ é a média μ , então $s(x^*)$ é a média do conjunto bootstrap, $\mu^* = \sum_{i=1}^n x_i^*/n$ [9].

A título de ilustração, considere o seguinte exemplo: seja um vetor $x = [1, 2, 3, 4, 5]$. A utilizando a técnica de bootstrap cinco vezes, por exemplo, pode-se obter os seguintes vetores:

$$x1 = [1, 1, 2, 3, 5]$$

$$x2 = [2, 3, 4, 4, 5]$$

$$x3 = [1, 2, 4, 5, 5]$$

$$x4 = [1, 2, 2, 3, 3]$$

$$x5 = [1, 2, 3, 4, 5]$$

No presente trabalho, o método bootstrap foi usado para o cômputo de μ^L e Q^U , respectivamente, o limite inferior do intervalo de incerteza dos retornos e o limite superior do intervalo de incerteza da matriz de covariância. Assim, sendo B o número de reamostragens bootstrap, obteve-se o conjunto $\mu^* = (\mu_1^*, \mu_2^*, \dots, \mu_B^*)$ de médias e definiu-se μ^L como o mínimo valor deste conjunto. No caso de Q^U , fez-se a escolha termo a termo. Para cada termo q_{ij} da matriz de covariância, computou-se $q^* = (q_1^*, q_2^*, \dots, q_B^*)$ e definiu-se q_{ij}^U como o maior termo do conjunto q^* .

5.4.2 Técnica de Média Móvel

A média móvel, diferentemente do bootstrap, não é uma técnica de reamostragem. No entanto, a sua aplicação permite a obtenção de várias estimativas dos mesmos parâmetros a partir de um único conjunto de amostras.

A média móvel é uma técnica muito usada na análise de séries temporais para identificação de tendências ou ciclos, pois suaviza as flutuações de curto prazo de uma curva.

Dada uma sequência de n valores x_1, x_2, \dots, x_n e uma janela de tamanho $k > 0$, $k \in \mathbb{N}$, a i ésima média móvel simples y_i da sequência é definida como se segue:

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{1}{k}(x_1 + x_2 + \dots + x_k) \\ y_2 &= \frac{1}{k}(x_2 + x_3 + \dots + x_{k+1}) \\ y_3 &= \frac{1}{k}(x_3 + x_4 + \dots + x_{k+2}) \\ y_{n-k+1} &= \frac{1}{k}(x_{n-k+1} + x_{n-k+2} + \dots + x_n) \end{aligned} \tag{5.21}$$

Assim, a sequência de médias móveis tem $n - k + 1$ elementos.

Neste trabalho, as médias móveis foram usadas com a mesma finalidade da técnica bootstrap, para gerar μ^L e Q^U . Dadas as sequências de retornos mensais das ações, computou-se, para uma dada janela, uma sequência de médias móveis para cada ação e o menor termo de cada sequência foi selecionado, formando assim o vetor μ^L . Da mesma forma, computou-se uma sequência de elementos σ_{ij} para cada par de ações e o maior elemento de cada sequência foi selecionado, gerando a matriz Q^U .

Capítulo 6

Resultados

6.1 Introdução

A BOVESPA disponibiliza dados referentes à maioria das ações comercializadas em seus pregões [10]. Dentre as informações disponíveis, encontram-se a data do pregão, o nome da ação comercializada, seus códigos de identificação no mercado e o preço da ação em diversos momentos do pregão, como na sua abertura, fechamento, seus valores máximo e mínimo diários.

Neste trabalho, levamos em consideração apenas ações do lote fracionário das empresas. Ações do lote padrão só podem ser adquiridas em quantidades pré determinadas pelo lote. Por exemplo, certas ações só podem ser adquiridas em dezenas, outras em centenas. Assim, se uma pessoa dispõe de uma quantia de V reais a ser investida em ações do lote padrão que só são vendidas, digamos, em dezenas, só poderá ser efetivamente gasta na compra de tais ações uma quantia múltipla de $10 \times p$, onde p é o preço da ação. No cálculo das carteiras, não são levadas considerações práticas desse tipo, sendo obtidas simplesmente as frações do investimento total a serem investidas em cada ação. Portanto, a utilização de ações do lote padrão levaria a determinação de carteiras que dificilmente poderiam ser montadas na prática.

Para efeito de simplificação, utilizamos dados a partir do ano 2000, por dois motivos: primeiramente, antes de 1995, houve diversas mudanças na unidade monetária brasileira, o que dificultaria os cálculos das taxas de retorno. Além disso, até o ano 2000, a quantidade total de dados disponíveis era escassa, havendo muitos períodos nos quais os preços das ações não estavam disponíveis.

O site não disponibiliza dados referentes a todas as ações durante todos os períodos considerados. Além disso, nem todas as ações foram comercializadas por todo o período em estudo, como aquelas referentes a empresas que deixaram de existir, novas empresas, ou mesmo empresas que só abriram seu capital recentemente.

Os dados foram tomados com periodicidade mensal, considerando, para isso, o preço da ação no encerramento do pregão do último dia útil de cada mês. Sendo assim, dependendo do horizonte de tempo utilizado para os cálculos das carteiras, selecionamos apenas as ações cujos dados estavam o mais completo possível, aceitando-se a ausência de, no máximo, 3 amostras por ano dos dados referentes a cada ação. Quando da ausência de dados, decidimos aproximá-los de maneira linear.

Por exemplo, se havia disponível o preço da ação i nos períodos t e $t + 2$, mas não no período $t + 1$, este era aproximado como:

$$p_{t+1,i} = \frac{p_{t,i} + p_{t+2,i}}{2}, \quad (6.1)$$

onde $p_{t+1,i}$ é o preço da ação i no período $t + 1$, $p_{t,i}$ é o preço da ação i no período t e $p_{t+2,i}$ é o preço da ação i no período $t + 2$.

Após esses ajustes iniciais, foi necessário ainda ajustar o preço das ações ao número atual de ações em cada empresa de acordo com os eventos corporativos destas. Tais eventos podem ser proventos em dinheiro ou proventos em ações. Os dados só foram corrigidos pelos proventos em ações, visto que os proventos em dinheiro não afetam a série temporal dos preços das ações, apenas conferem ao investidor um rendimento extra quando da distribuição destes. Existem diferentes tipos de proventos em ações:

- Desdobramento (em inglês, *split*): aumento da quantidade de ações de uma empresa, sem que haja alteração na participação dos sócios [10]. Quando isso ocorre, cada sócio aumenta o seu número de ações proporcionalmente à quantidade que tinha antes do desdobramento, mas o capital da empresa continua o mesmo. Sendo assim, cada ação passa a valer menos.

Efeito do desdobramento na série de preços: quando há um desdobramento de $x\%$ nas ações de uma determinada empresa no período t , deve-se dividir o preço das ações até o período $t - 1$ por $\frac{x\%}{100} + 1$.

- Grupamento (em inglês, *split down* ou *reverse split*): redução da quantidade de ações de uma empresa, sem que haja alteração na participação dos sócios [10]. É o contrário do desdobramento. Cada sócio passa a possuir uma quantidade menor de ações, proporcionalmente à que possuía antes do grupamento, mas cada ação passa a valer mais, de forma que o capital da empresa permanece inalterado.

Efeito do grupamento na série de preços: quando há um grupamento de $x : 1$ nas ações de uma empresa no período t , deve-se multiplicar o preço das ações até o período $t - 1$ por x .

- Bonificação em ações : distribuição de resultados da companhia mediante emissão de ações, quando de incorporação de reservas ao capital social. As ações bonificadas são entregues gratuitamente aos acionistas, na proporção da quantidade de ações possuídas. A bonificação aumenta a quantidade de ações da empresa, sem alterar o valor do patrimônio [10].

Efeito da bonificação em ações na série de preços: é o mesmo do desdobramento; se houve uma bonificação de $x\%$ das ações de uma determinada empresa no período t , deve-se dividir o preço das ações até o período $t - 1$ por $\frac{x\%}{100} + 1$.

Ao realizar essas modificações nas séries de preços, cria-se uma situação em que a empresa tem sempre o mesmo número de ações, e os retornos são então referentes somente às valorizações e desvalorizações das mesmas. Se essas alterações não fossem realizadas, a série de retornos apresentaria, nos períodos em que houve os eventos, variações muito grandes, que não representam de fato um retorno para o acionista.

Para cada modelo estudado, utilizamos horizontes de tempo de n anos, onde $n = 2, 4, 6$. Dessa forma, para cada ação considerada, tínhamos uma série temporal de $n \times 12$ valores, referentes ao preço desta no decorrer dos meses.

Dados esses preços, calculamos os retornos mensais para todo o período. A fórmula utilizada para esse cálculo foi a seguinte:

$$r_{t,i} = \frac{p_{t,i} - p_{t-1,i}}{p_{t-1,i}} \quad (6.2)$$

onde r_{ti} é o retorno da ação i no período t , p_{ti} é o preço da ação i no período t e $p_{t-1,i}$ é o preço da ação i no período $(t - 1)$, com t dado em meses. Após o cálculo dos retornos, cada ação passou a ser representada por uma série temporal com $n \times 12 - 1$ valores.

O tratamento descrito acima possibilitou que obtivéssemos um conjunto suficiente de dados, a serem usados na aplicação de cada modelo estudado. Com o intuito de possibilitar a verificação do desempenho real das carteiras derivadas dos modelos, utilizamos como período de teste os dados referentes aos últimos doze meses do horizonte total considerado.

Depois desse ajuste, restringiu-se o total de ações utilizadas na composição das carteiras a 15. O critério de decisão utilizado para tal seleção foi a média da taxa de retorno durante todo o período anterior ao ano no qual as carteiras seriam compostas e avaliadas. Assim, somente as ações com as 15 maiores taxas médias de retorno eram candidatas a compor as carteiras.

Para cada modelo, e para cada período de teste, obtivemos a fronteira eficiente e a composição das carteiras ótimas para diferentes níveis de risco, refazendo os cálculos mensalmente a cada um dos doze meses. Durante esse período, a cada novo mês, incluíam-se nos dados de entrada os retornos referentes ao mês anterior, e descartavam-se aqueles referentes ao período mais antigo, mantendo, dessa forma, constante o número de amostras utilizadas nos cálculos de retorno esperado e risco. Além disso, para verificar o desempenho das carteiras obtidas por cada modelo, analisou-se o retorno real que tal carteira forneceria ao investidor passado um mês de sua aquisição. Isso foi feito durante o período de um ano, e considerou-se que o montante ao final de cada mês seria todo reinvestido na carteira ótima recém recalculada.

6.2 Modelo clássico de média variância

No modelo clássico de média variância, o retorno esperado de cada ação é dado pela média dos retornos históricos e o retorno esperado da carteira é dado pela soma destes retornos ponderada pela fração alocada em cada ação. A variância da carteira é dada por (3.6).

A Figura 6.1 é a fronteira eficiente obtida pelo método MVO para julho de 2007. Cada ponto marcado representa o perfil risco/retorno de uma carteira eficiente, ou seja, uma alocação que maximiza o retorno da carteira para um dado nível de risco. É evidente o compromisso entre risco e retorno: quanto maior o retorno esperado, maior o risco. A carteira de retorno esperado máximo aloca 100% do investimento na ação que apresentou maior média de retornos nos períodos passados. A carteira de retorno esperado mínimo é obtida minimizando-se $x^T Q x$, com a única imposição de que nenhum peso seja negativo.

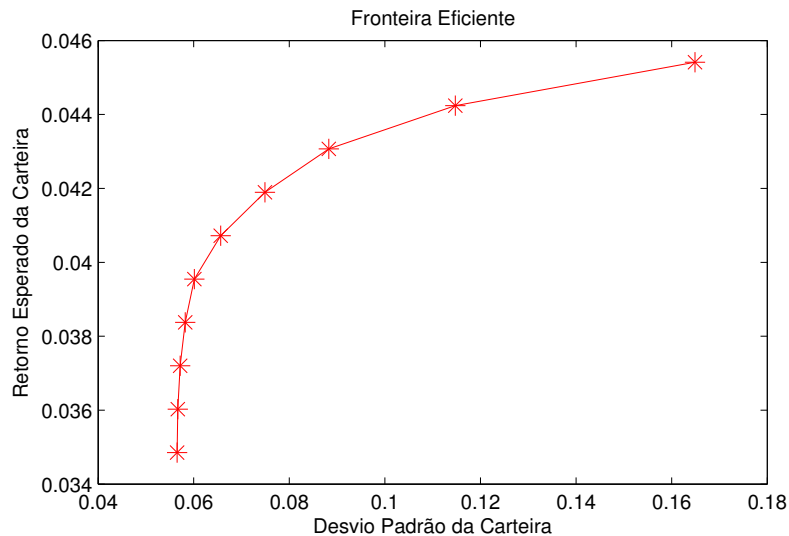


Figura 6.1: Fronteira eficiente pelo método MVO - julho de 2007

A Figura 6.2 apresenta a composição das carteiras eficientes da Figura 6.1. A composição é ilustrada da seguinte forma: no eixo x situam-se os retornos esperados de cada carteira. Para cada retorno, o eixo y mostra a porcentagem acumulada em diferentes ações, de forma que a distância vertical entre as curvas representa a fração do capital investida na ação referente à curva superior. Note que, para cada carteira, as frações somam 100%.

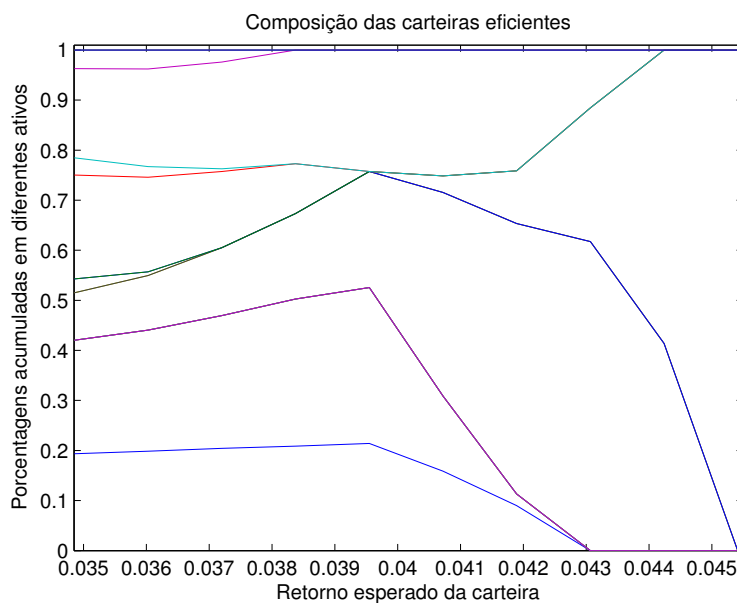


Figura 6.2: Composição das carteiras eficientes pelo método MVO - julho de 2007

Comprova-se que a carteira de retorno esperado mais alto concentra todo o investimento em uma única ação. Já a carteira que minimiza o risco diversifica o investimento entre oito ações.

Além disso, verifica-se o benefício da diversificação: a carteira menos arriscada tem desvio padrão de 0,0565. Identifica-se que o menor elemento da diagonal de Q corresponde a um desvio

padrão de 0,0831¹. Assim, comprova-se que a diversificação é capaz de reduzir o risco, de forma que este seja menor do que qualquer um dos riscos individuais das ações.

Calculamos então o rendimento acumulado das carteiras ao longo de um ano, atualizando as carteiras mensalmente. Ou seja, com dados até dezembro do ano anterior, calcularam-se as carteiras eficientes para 10 níveis de risco e observou-se o retorno destas carteiras ao final de janeiro. Reaplicou-se o método no mês seguinte, desprezando-se os dados mais antigos, e incorporando os retornos recém realizados. Assim foi feito até dezembro. A Figura 6.3 representa os rendimentos acumulados para diferentes carteiras ao longo de 2007. Para servir de referência, acrescentamos o rendimento acumulado da carteira hipotética do Ibovespa, representando o comportamento geral do mercado. Esse procedimento foi repetido para diferentes séries temporais de retornos históricos, especificamente os períodos 2002-2007, 2004-2007 e 2006-2007.

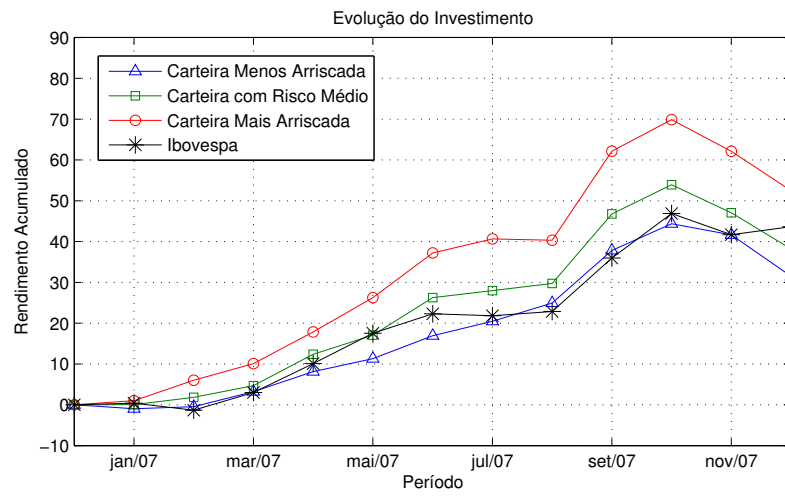
Comparando-se as figuras, notam-se tendências comuns: os rendimentos das carteiras tendem a acompanhar o mercado, oscilando em torno deste. A carteira mais arriscada é a mais oscilante apresentando ora o maior, ora o menor rendimento. Contudo, o principal a ser notado é a divergência entre os desempenhos quando se utilizam séries temporais diferentes na estimativa dos parâmetros de entrada. Por exemplo, o rendimento da carteira de risco médio varia entre 25% e 55% ao final do ano, de acordo com a série temporal de históricos utilizada. Quando se comparam as carteiras mais arriscadas, a diferença é claramente ainda maior. Isso revela a sensibilidade do modelo clássico de média variância a variações dos parâmetros de entrada.

Poder-se-ia pensar que seria possível identificar um número ótimo de períodos anteriores a serem utilizados na estimação dos parâmetros. Por exemplo, identifica-se na Figura 6.3 que a utilização de 5 anos de retornos históricos forneceu os resultados mais desejados: rendimentos crescentes e acima do mercado durante a maior parte do período, com taxas de retornos moderadamente constantes. Para testar se realmente havia um padrão no desempenho das carteiras com relação às séries temporais utilizadas, obtivemos os rendimentos acumulados para o ano de 2005, seguindo os mesmos procedimentos anteriores. Esses resultados são mostrados na Figura 6.4.

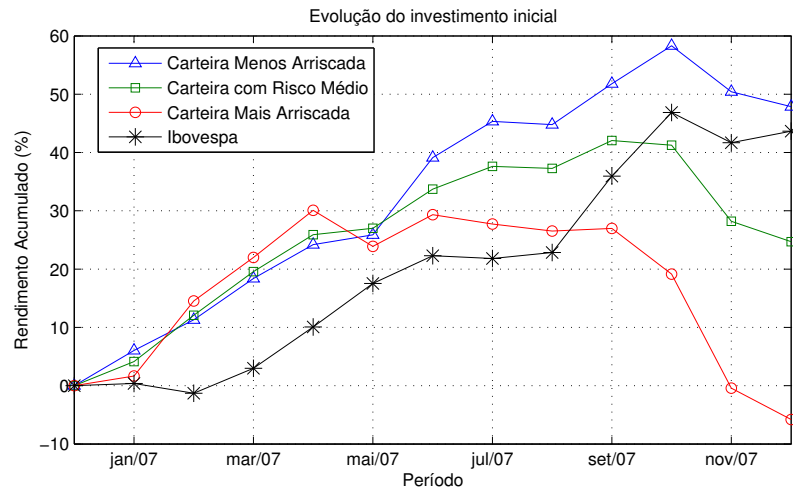
Observa-se, no entanto, que tal suposição não se sustenta. Com a utilização de 5 anos de retornos históricos, apenas a carteira menos arriscada teve desempenho satisfatório. As outras carteiras tiveram desempenho sempre abaixo do mercado. O desempenho mais consistente foi o observado com a utilização de apenas um ano de histórico. Para 2007 e 2005, as carteiras assim obtidas seguiram razoavelmente o mercado, rendendo, contudo, menos do que este durante boa parte do período.

Ao investir, o objetivo não é sujeitar-se às oscilações do mercado, e sim conseguir uma alocação de capital que seja razoavelmente imune a tais oscilações, e apresente comportamento previsível. Observa-se que tais objetivos não são alcançados pelo método MVO, pois não é possível escolher com segurança um intervalo de dados que forneça um rendimento satisfatório.

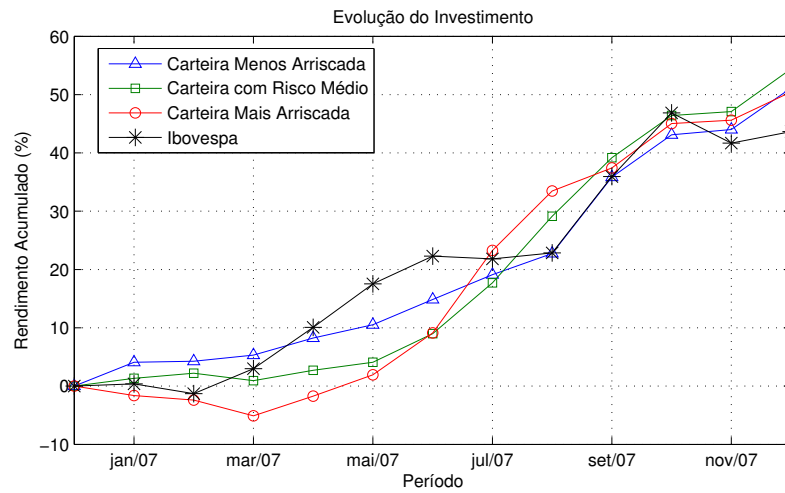
¹A matriz de covariância Q, não mostrada nesse relatório, é facilmente obtida pelos mfiles criado no Matlab, disponibilizados no Anexo III.



(a) Retornos históricos: 2002-2007

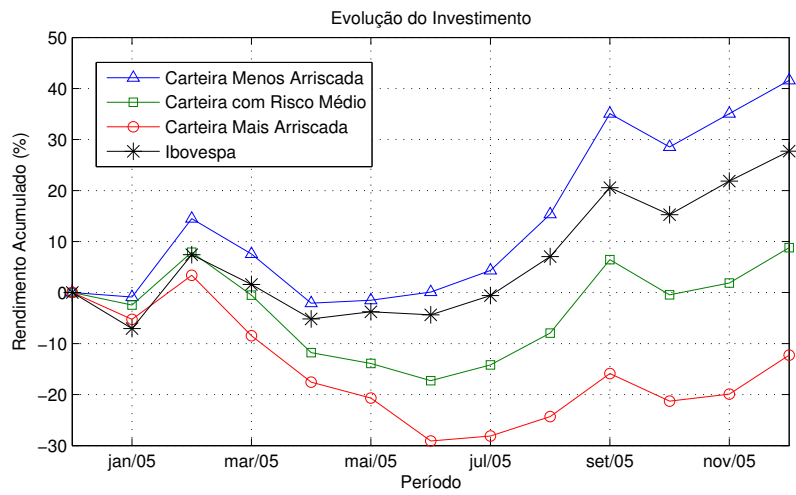


(b) Retornos históricos: 2004-2007

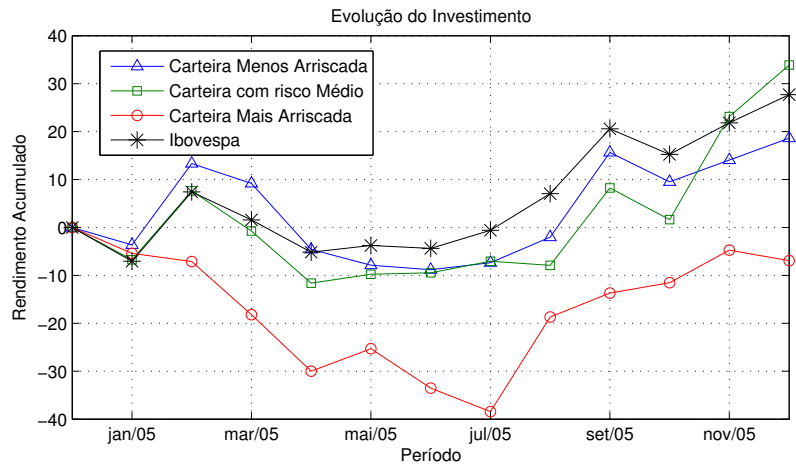


(c) Retornos históricos: 2006-2007

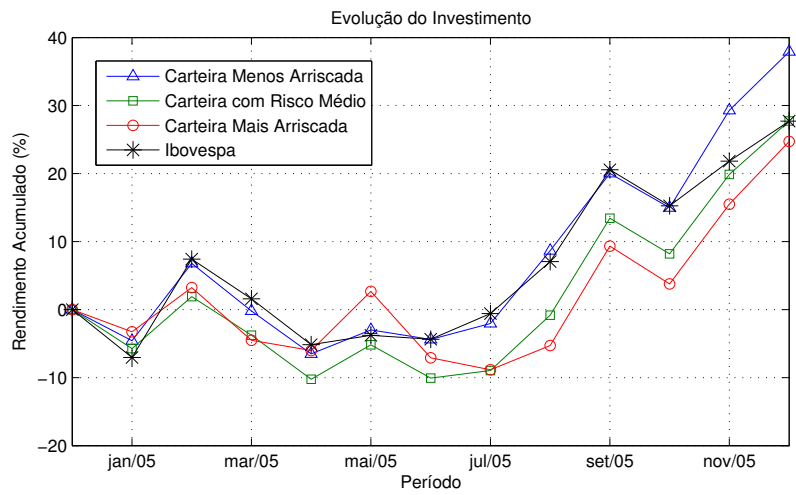
Figura 6.3: Rendimento acumulado em 2007 - método MVO



(a) Retornos históricos: 2000-2005



(b) Retornos históricos: 2002-2005



(c) Retornos históricos: 2004-2005

Figura 6.4: Rendimento acumulado em 2005 - método MVO

6.3 Modelo de índice único

O modelo de índice único calcula o valor esperado de cada ação a partir dos coeficientes alfa e beta, obtidos por meio de regressão linear a partir dos retornos históricos das ações e do mercado (representado pelo Ibovespa), segundo (4.3). O valor esperado do retorno de mercado foi calculado como a média aritmética dos retornos passados do Ibovespa, e a matriz de covariância foi calculada a partir de (4.17), (4.18) e (4.19). Com esses dados, calculamos a fronteira eficiente para cada período de teste, da mesma forma obtida para o modelo MVO. A Figura 6.5 mostra a fronteira para julho de 2007.

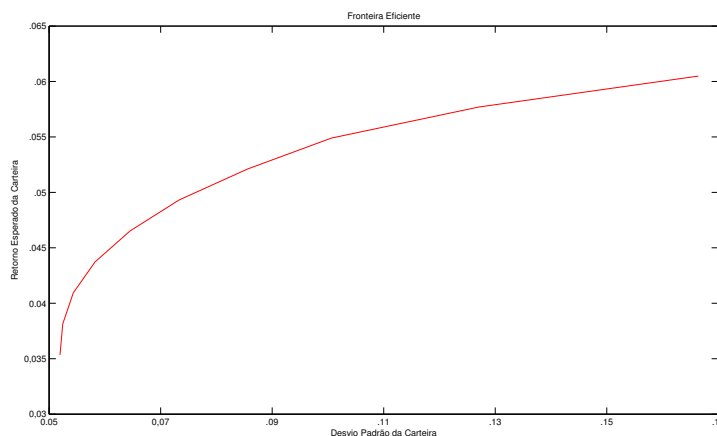


Figura 6.5: Fronteira eficiente pelo método de índice único - julho de 2007

A Figura 6.6 mostra a composição das carteiras eficientes. Observa-se que, como no modelo anterior, a carteira menos arriscada aloca o investimento entre 8 ações. Porém, tal distribuição é mais homogênea.

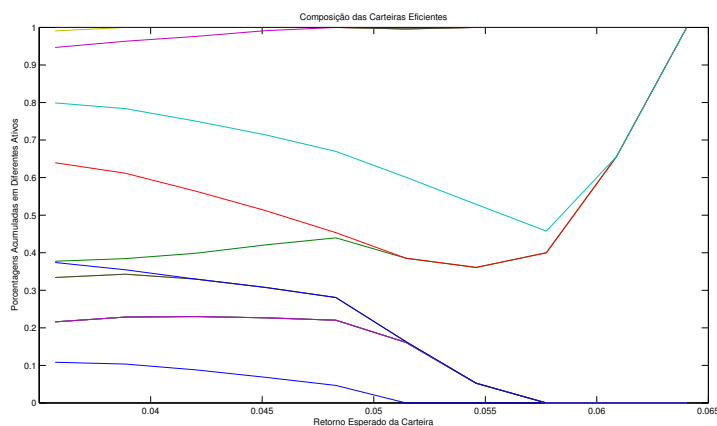


Figura 6.6: Composição das carteiras eficientes pelo método de índice único - julho de 2007

Observa-se que a fronteira é bastante semelhante à obtida com o modelo MVO. A carteira menos arriscada alcança, contudo, um desvio padrão ainda mais baixo, de 0,0519, e a carteira

mais arriscada alcança um retorno esperado mais alto, de 0,0605. Assim, o modelo de índice único fornece, para o período em questão, estimativas mais otimistas dos parâmetros de entrada.

Verifica-se que o desempenho das carteiras obtidas pelo método de índice único superou aquele das carteiras obtidas pelo MVO. Isso significa que o modelo de índice único foi mais eficiente na previsão dos retornos e dos riscos, ou seja, grande parte da estrutura de correlação entre as ações, obtida pelo MVO e não considerada pelo modelo de índice único é, na verdade, ruído. Assim, conclui-se que o modelo de índice único, ao invés de perder informação devido à simplificação envolvida, apresenta resultados melhores do que a utilização do conjunto completo de covariâncias entre ações.

Os valores do parâmetro alfa e do índice beta atualizados mensalmente estão contidos nas tabelas 6.1 e 6.2

Tabela 6.1: Valores do Parâmetro Alfa obtidos para cada ação no período de 2007 (multiplicados por 10^2).

	Jan	Fev	Mar	Abr	Mai	Jun	Jul	Ago	Set	Out	Nov	Dez
1	2,68	2,71	2,72	2,93	3,10	3,11	2,81	2,84	3,13	3,20	3,12	3,02
2	2,04	1,65	1,63	1,45	1,34	1,20	0,94	1,03	0,45	0,43	0,35	0,35
3	1,34	1,42	1,06	0,54	0,54	1,21	0,59	0,60	0,83	0,80	0,76	0,91
4	1,72	1,99	1,95	2,15	2,43	2,56	2,55	2,68	2,64	2,66	2,74	2,45
5	1,12	1,32	1,46	1,56	1,80	1,89	1,66	1,93	2,06	2,12	2,07	1,88
6	0,10	0,42	0,19	0,06	0,27	0,60	0,52	0,65	-0,15	-0,14	-0,34	-0,78
7	1,57	1,48	1,43	1,12	1,14	0,82	0,36	0,26	0,26	0,23	0,39	0,37
8	2,60	2,56	2,60	2,37	2,48	2,35	1,97	1,88	1,51	1,35	1,41	1,33
9	4,18	4,01	3,56	3,49	3,60	3,66	3,37	3,35	2,96	2,80	2,71	2,17
10	-0,28	-0,27	-0,37	-0,49	-0,21	-0,15	0,23	0,42	0,26	0,16	0,25	0,29
11	1,13	0,91	0,88	0,78	0,75	0,27	-0,20	-0,08	-0,46	-0,52	-0,27	-0,55
12	-2,31	-1,60	-0,74	-0,80	-0,56	-1,42	-0,57	-0,11	-0,04	0,00	-0,09	0,05
13	-2,79	-2,46	-2,29	-2,10	-1,95	-0,90	-1,21	-0,57	-1,11	-1,22	-1,32	-1,30
14	-0,12	-0,07	-0,21	-0,44	-0,29	-0,47	-0,22	-0,23	0,14	0,16	0,42	0,16
15	1,72	1,71	2,02	1,91	1,71	1,62	1,83	1,89	1,84	1,77	1,65	1,76

É importante notar que todos os índices alfa se situaram próximos de zero, ou seja, a componente do retorno das ações independente do retorno do mercado foi muito pequena. Isso reforça a validade do modelo, que considera o mercado o principal fator de influência nos retornos das ações.

Observa-se também que grande parte dos índices beta situa-se em torno de um, o que sugere que os preços das ações se movem para cima ou para baixo proporcionalmente à variação do Ibovespa. Nenhuma ação apresentou um valor de beta negativo, o que significaria um movimento com tendência contrária à do mercado. As ações com beta superior a um permitem, se as estimativas do modelo forem confiáveis, o alcance de retornos superiores ao do mercado, se o investimento for concentrado nelas. Ao mesmo tempo, fica-se mais propenso a sofrer desvalorizações também mais acentuadas que as do mercado.

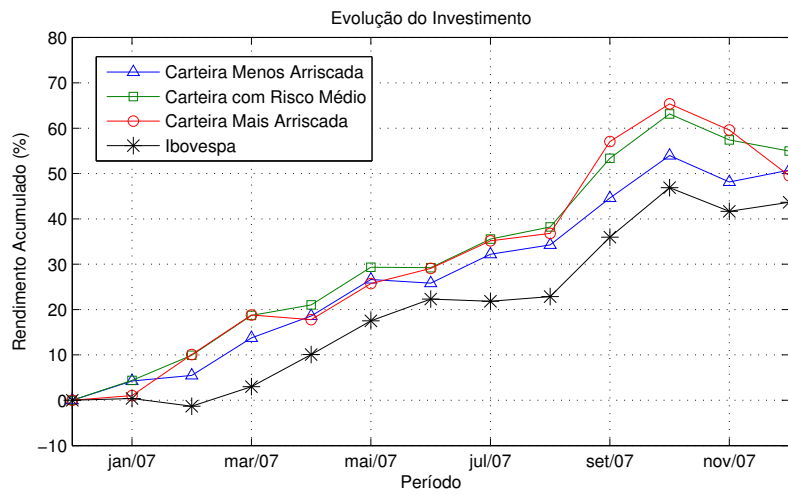
Tabela 6.2: Valores do Índice Beta de cada Ação para cada Período de 2007

	Jan	Fev	Mar	Abr	Mai	Jun	Jul	Ago	Set	Out	Nov	Dez
1	0,61	0,60	0,61	0,61	0,59	0,55	0,58	0,57	0,52	0,40	0,41	0,41
2	0,14	0,11	0,11	0,11	0,12	0,15	0,21	0,24	0,36	0,43	0,42	0,41
3	1,14	1,13	1,16	1,18	1,17	1,08	1,18	1,16	1,10	1,07	1,06	1,08
4	0,86	0,87	0,88	0,86	0,85	0,84	0,83	0,83	0,83	0,97	0,96	0,95
5	1,03	1,03	1,02	1,00	0,99	0,98	1,00	1,00	0,98	1,06	1,04	1,04
6	0,85	0,82	0,84	0,85	0,85	0,85	0,85	0,86	0,96	0,99	0,98	1,04
7	1,16	1,14	1,15	1,16	1,16	1,21	1,31	1,31	1,30	1,20	1,20	1,21
8	0,86	0,85	0,85	0,86	0,86	0,87	0,97	0,99	1,04	1,11	1,12	1,08
9	0,94	0,90	0,94	0,95	0,92	0,90	0,96	0,94	0,99	1,18	1,18	1,17
10	0,86	0,89	0,91	0,91	0,88	0,88	0,83	0,82	0,85	0,83	0,81	0,79
11	1,07	1,08	1,07	1,08	1,06	1,11	1,19	1,22	1,29	1,29	1,29	1,36
12	1,13	1,13	1,05	1,04	1,01	1,12	1,00	1,00	0,99	0,85	0,83	0,83
13	0,92	0,96	0,95	0,93	0,88	0,75	0,79	0,76	0,87	0,88	0,86	0,85
14	1,23	1,25	1,26	1,27	1,26	1,29	1,24	1,23	1,16	1,11	1,12	1,07
15	1,40	1,41	1,39	1,40	1,38	1,40	1,35	1,35	1,35	1,37	1,36	1,35

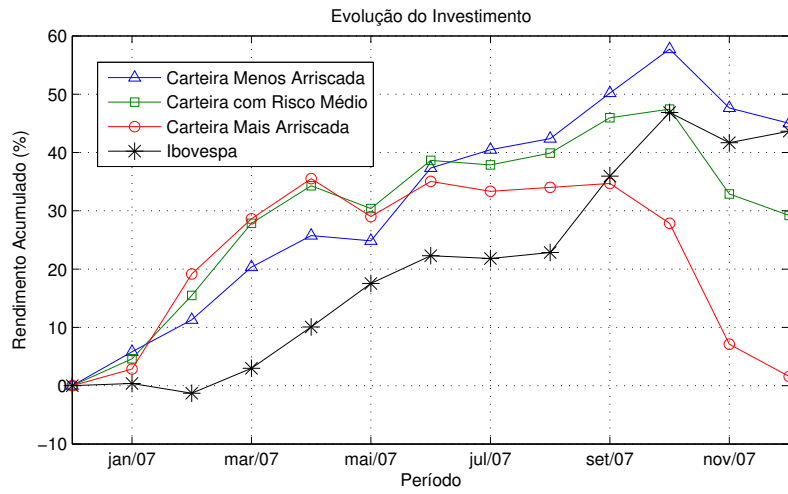
Analisando-se a evolução do rendimento em 2007 mostrada na Figura 6.7(a), verifica-se que o modelo de índice único encontra respaldo na realidade. As três carteiras moveram-se relativamente em conformidade com o mercado, alcançando durante a maior parte do período retornos superiores ao deste, sofrendo, contudo, uma queda mais abrupta que a do mercado, no final do período.

Apesar da vantagem com relação ao MVO (simplificação sem perda de informação), o modelo de índice único ainda sofre variações significativas nos resultados com a mudança da série temporal utilizada no cálculo dos parâmetros de entrada. Por exemplo, em 2007, a carteira mais arriscada resultaria em um retorno anual próximo de 50% ou próximo de zero, dependendo do horizonte temporal considerado. Comparando-se os rendimentos em 2005 (Figura 6.8) com os rendimentos em 2007, a utilização de 3 anos de históricos foi vantajosa durante a maior parte do ano de 2007, sendo a mais desfavorável em 2005.

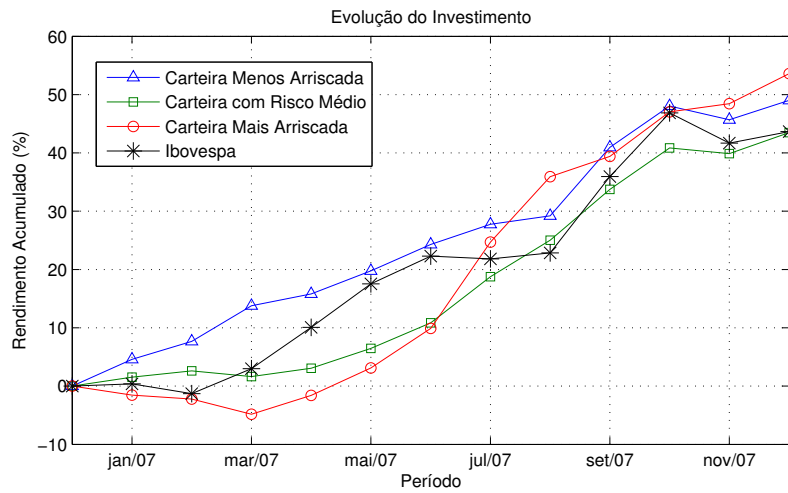
Assim, conclui-se que o modelo de índice único ainda sofre com a mesma desvantagem do MVO: grande sensibilidade dos resultados às estimativas dos parâmetros de entrada.



(a) Retornos históricos: 2002-2007

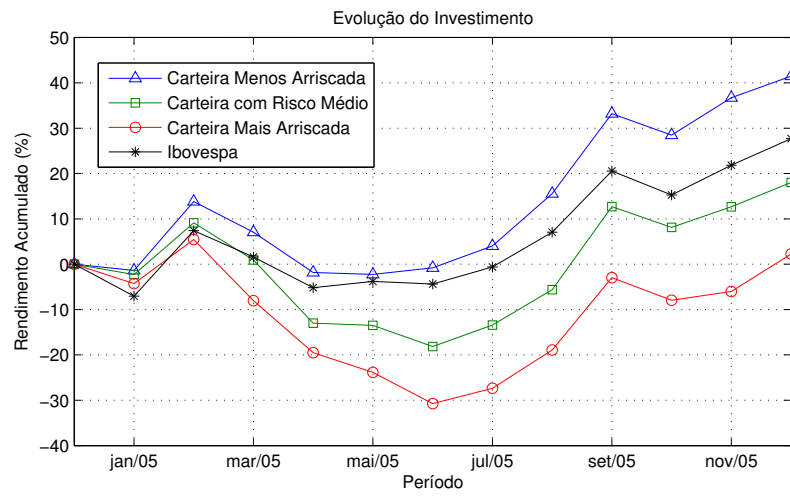


(b) Retornos históricos: 2004-2007

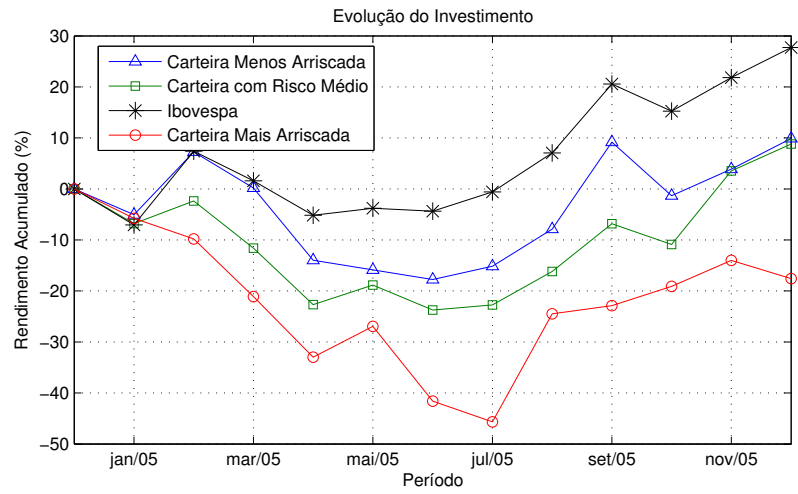


(c) Retornos históricos: 2006-2007

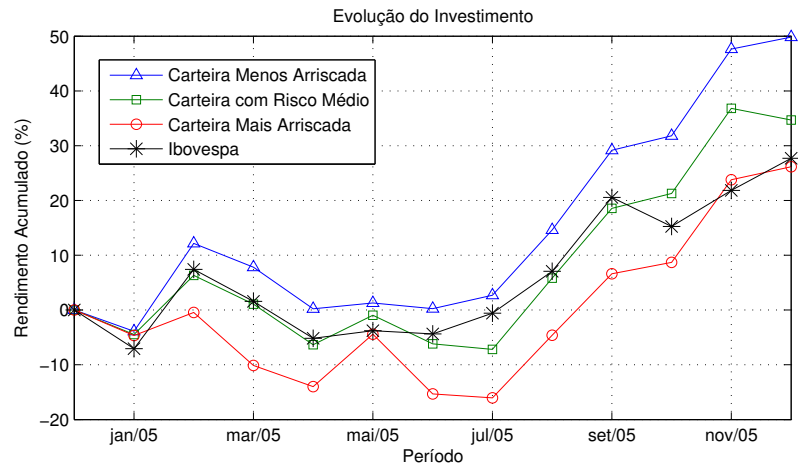
Figura 6.7: Rendimento acumulado em 2007 - modelo de índice único



(a) Retornos históricos: 2000-2005



(b) Retornos históricos: 2002-2005



(c) Retornos históricos: 2004-2005

Figura 6.8: Rendimento acumulado em 2005 - modelo de índice único

6.4 Modelo Robusto

O estudo do modelo robusto foi motivado pela inconsistência dos resultados obtidos com o modelo MVO e de índice único. A obtenção de intervalos de incerteza para os retornos esperados e matriz de covariância visa à construção de carteiras para investidores mais conservadores, menos propensos ao risco.

O modelo robusto aqui estudado é, por assim dizer, uma versão pessimista do modelo clássico de média variância. Com os métodos de bootstrap ou de média móvel obtiveram-se várias estimativas de retornos e matrizes de covariância. As estimativas mais pessimistas (retornos mais baixos e covariâncias mais altas) foram usadas no mesmo algoritmo utilizado pelo MVO para determinação das carteiras eficientes.

6.4.1 Intervalo de incerteza obtido pela técnica de bootstrap

Pelo método de bootstrap, reamostramos os dados das séries temporais e calculamos, para cada reamostragem, retornos e covariâncias. Assim, o método foi uma forma de aumentar o número de estimativas sem a necessidade de obtenção de mais dados. De posse do vetor de retornos mínimos, μ^L , e da matriz de máximas covariâncias, Q^U , obteve-se a fronteira eficiente da Figura 6.9.

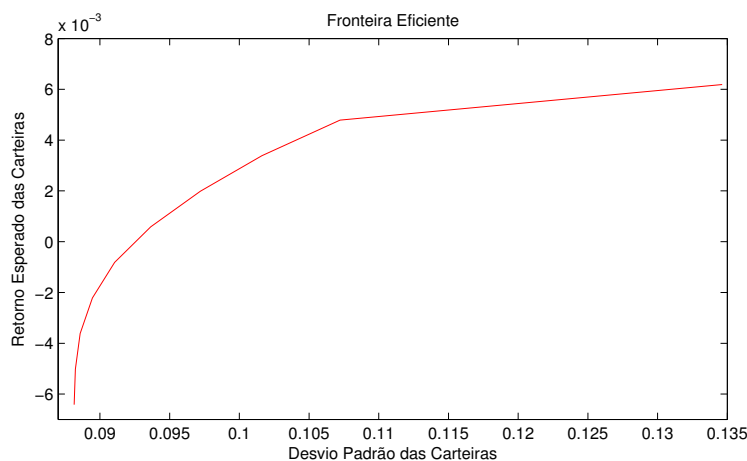


Figura 6.9: Fronteira eficiente robusta com intervalo de incerteza obtido por bootstrap - julho de 2007

Observa-se que os retornos esperados da carteira foram bem menores que os verificados nas fronteiras eficientes anteriores, e os valores de desvio padrão mais altos. Tal resultado era previsível, devido à utilização de μ^L e Q^U , e significa que a modelagem é realmente mais conservadora.

Deve-se atentar para o fato de que a técnica de bootstrap, ao reamostrar os dados, gera estimativas aleatórias. Assim, a aplicação do mesmo procedimento repetidas vezes gera resultados distintos de carteiras eficientes. Para evitar diferenças significativas, recomenda-se utilizar um número elevado de reamostragens, em torno de 100 a 500 [2]. Optamos por utilizar 100 reamostragens, porque o tempo de simulação era proporcional ao número destas, sendo já consideravelmente alto (em torno de 15 minutos).

A Figura 6.10 mostra a composição das carteiras eficientes robustas com parâmetros de entrada obtidos pela técnica de bootstrap. Observa-se uma diversificação ainda menor do que a verificada para o modelo clássico. Sendo o objetivo a minimização do risco, tal resultado não é muito intuitivo. Afinal, a diversificação é a forma conhecida de reduzir o desvio padrão da carteira. Uma possível explicação para tal resultado é que, tentando encontrar uma solução de compromisso entre risco e retorno, o algoritmo de média variância, de certa forma, monta duas listas de ações - uma de ações com os maiores potenciais de retorno e outra de ações com os menores potenciais. Carteiras cujo retorno esperado é alto são obtidas selecionando-se uma ou mais ações do topo da primeira lista. Conforme o algoritmo vai determinando carteiras de menor retorno esperado (menos arriscadas), as ações anteriormente escolhidas são gradualmente substituídas por aquelas do topo da segunda lista. Ações que não encontram posição no topo de nenhuma das listas acabam muitas vezes não sendo incluídas em nenhuma das carteiras[6].

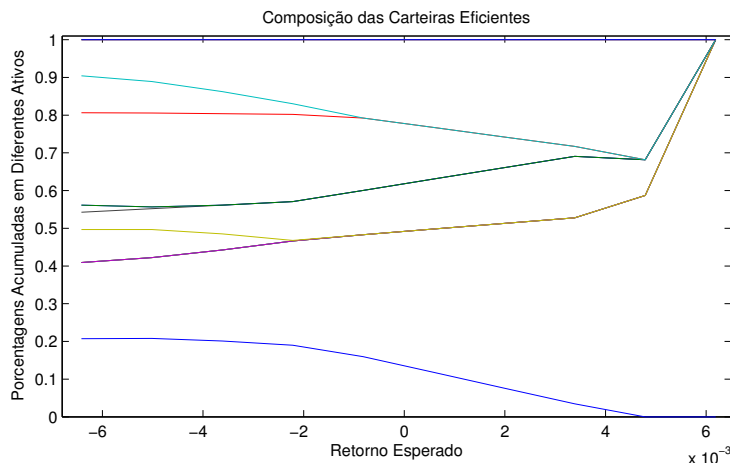
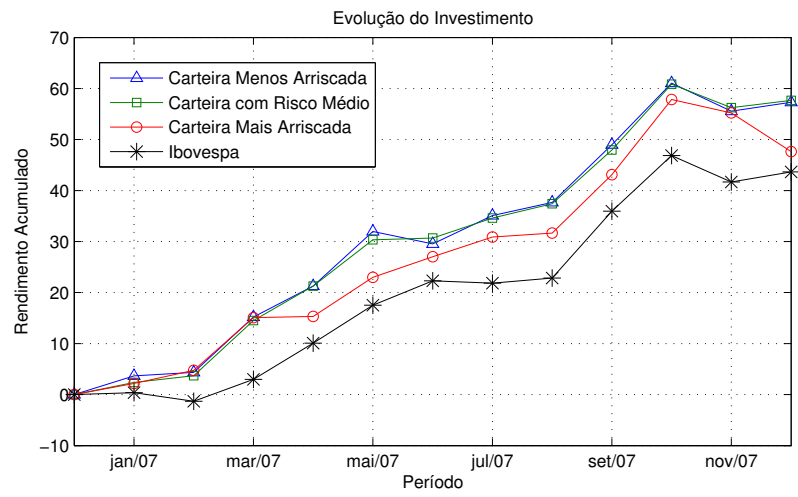
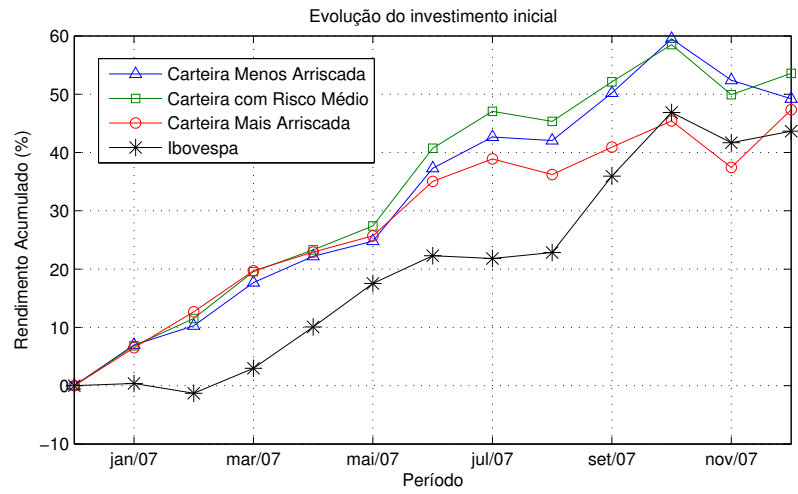


Figura 6.10: Composição das carteiras eficientes robustas com intervalo de incerteza obtido por bootstrap - julho de 2007

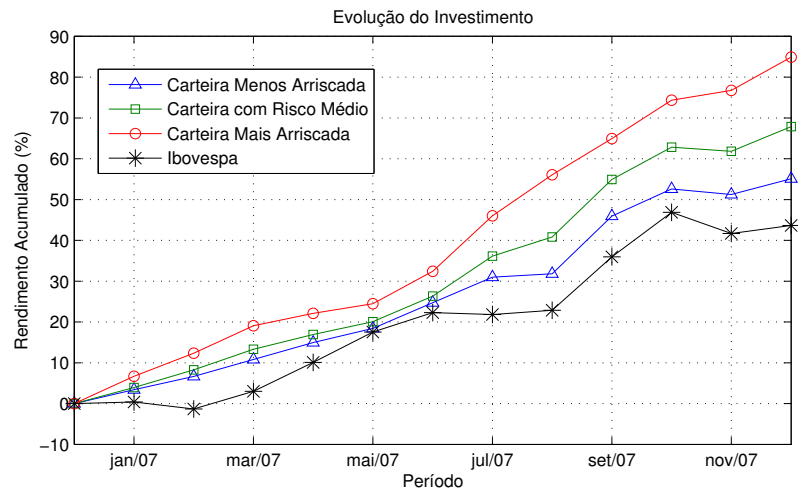
Os rendimentos acumulados para 2007 e 2005 encontram-se nas Figuras 6.11 e 6.12, respectivamente. Fica evidente a vantagem da formulação robusta: retornos acima do mercado para a maior parte dos períodos, com menor variação negativa em períodos de queda da bolsa.



(a) Retornos históricos: 2002-2007

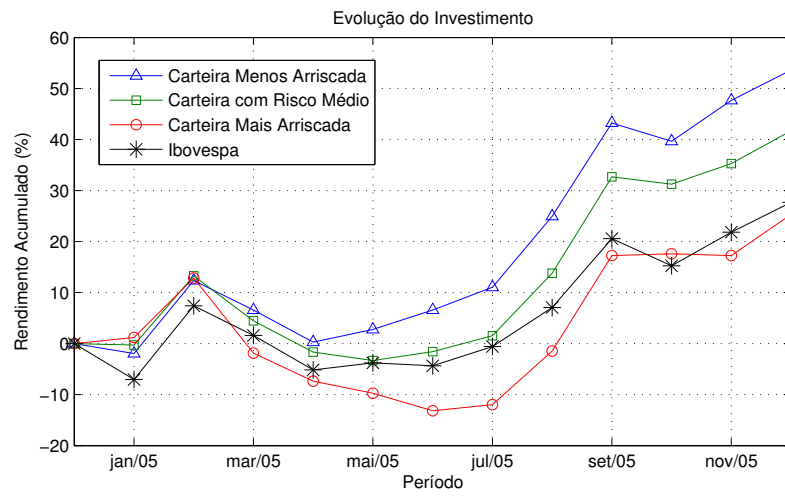


(b) Retornos históricos: 2004-2007

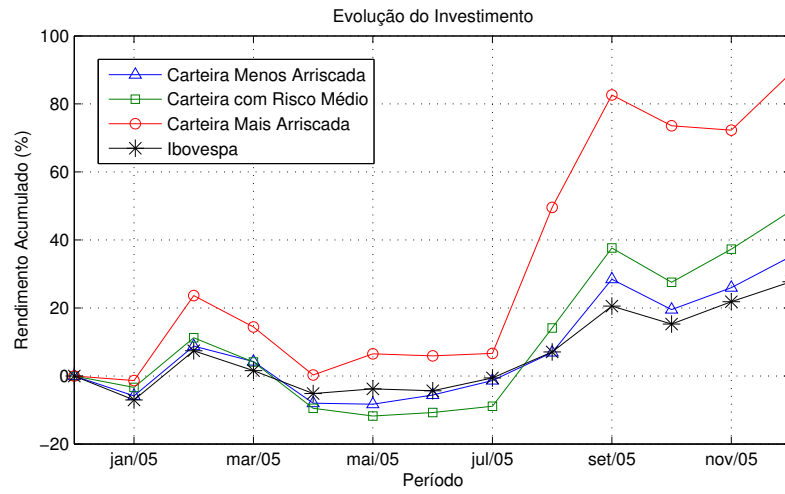


(c) Retornos históricos: 2006-2007

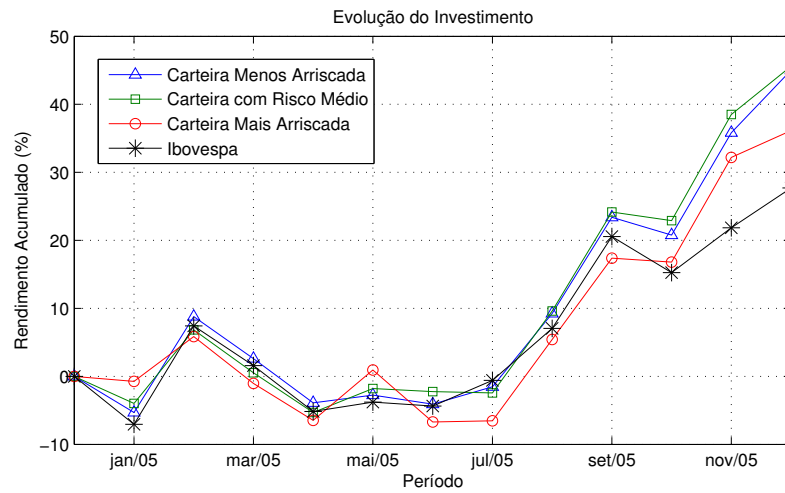
Figura 6.11: Rendimento acumulado em 2007 - carteiras robustas com intervalo de incerteza obtido por bootstrap



(a) Retornos históricos: 2000-2005



(b) Retornos históricos: 2002-2005



(c) Retornos históricos: 2004-2005

Figura 6.12: Rendimento acumulado em 2005 - carteiras robustas com intervalo de incerteza obtido por bootstrap

6.4.2 Intervalo de incerteza obtido por média móvel

A segunda técnica para determinação dos intervalos de incerteza foi a média móvel. Assim como o bootstrap, ela permite a obtenção de várias estimativas dos parâmetros (retornos esperados e matriz de covariância) a partir do mesmo conjunto de amostras. Contudo, seus resultados são determinísticos, o que é uma vantagem, pois permite a repetição dos resultados das simulações.

O que a média móvel faz, ao computar estimativas dentro de uma janela que vai percorrendo a série temporal de retornos, é identificar os intervalos de tempo nos quais os retornos médios e elementos da matriz de covariância foram maiores ou menores.

Cada elemento do vetor de retornos esperados mínimos μ^L é dado pela média no interior da janela que apresentou menor média. Para cada ação e par de ações, computou-se, respectivamente, a variância e a covariância dentro de cada janela. Os maiores valores identificados compuseram Q^U .

Nota-se que o método de média móvel não fornece tantas estimativas quanto o método de bootstrap. Enquanto que para o último o número de estimativas é muito provavelmente dado pelo número de reamostragens², o número de estimativas fornecidas pela técnica de média móvel é limitado pelo tamanho da série temporal e da janela. Além disso, o método de média móvel apresenta a desvantagem de o resultado variar com a mudança do tamanho da janela.

Neste trabalho, utilizou-se uma janela de 4 meses para séries temporais de 12 meses e o tamanho das outras duas janelas foi obtido de forma proporcional ao número de meses componentes da série temporal (sendo, portanto, de 12 e 20 meses).

Observa-se que a fronteira eficiente (Figura 6.13) assemelha-se à obtida pelo bootstrap, apresentando maior variação para os retornos esperados das carteiras.

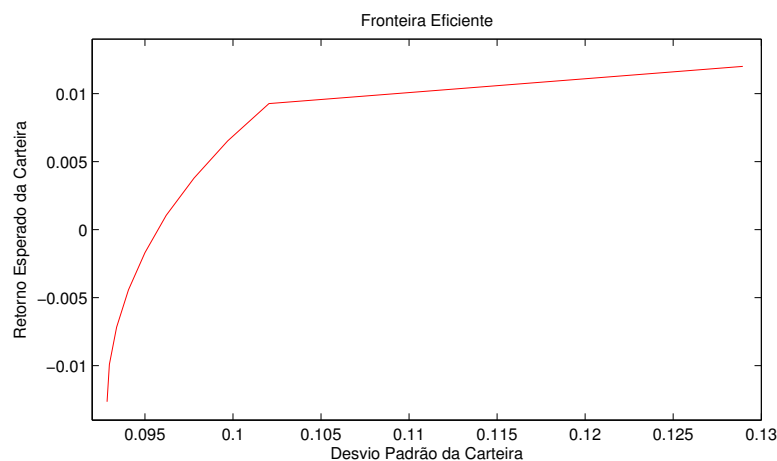


Figura 6.13: Fronteira eficiente robusta com intervalo de incerteza obtido por média móvel - julho de 2007

A composição das carteiras eficientes (Figura 6.14), é extremamente parecida com a composição obtida com o bootstrap, sendo também pouco diversificada.

²Esse não vai ser o caso quando todas as colunas forem reamostradas identicamente em mais de uma iteração.

Os rendimentos acumulados (Figuras 6.15 e 6.16) apresentaram-se também melhores que os obtidos pelo método clássico, pela pouca diferença observada ao final do período para as diferentes carteiras e pela menor sensibilidade a quedas do mercado. Contudo, os resultados foram significativamente piores com relação aos obtidos por bootstrap, com rendimentos não tão superiores aos do mercado e também mais oscilantes em torno deste. Uma justificativa possível para esses resultados é que o método de média móvel utiliza um número bem menor de estimativas na determinação dos intervalos de incerteza.

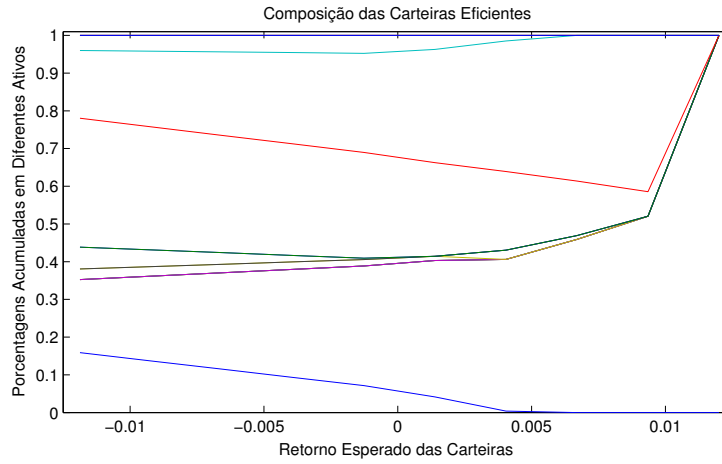
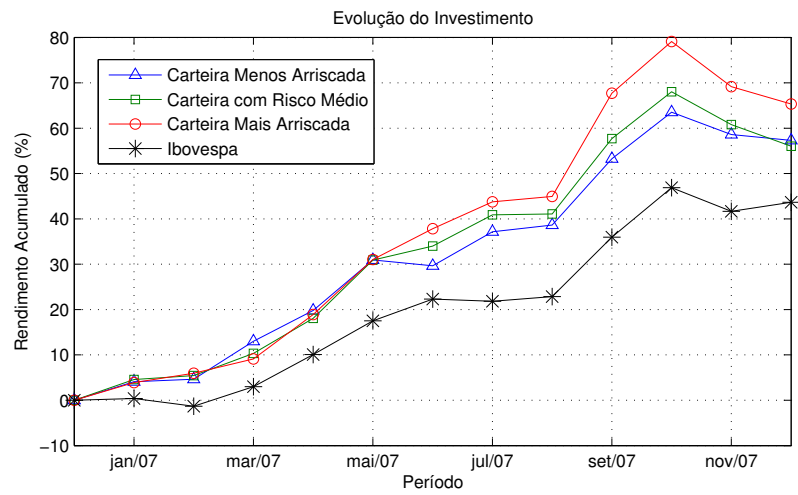
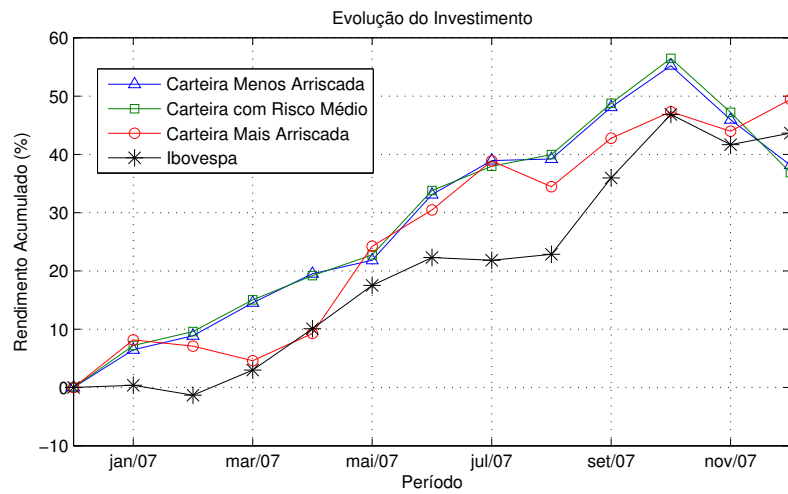


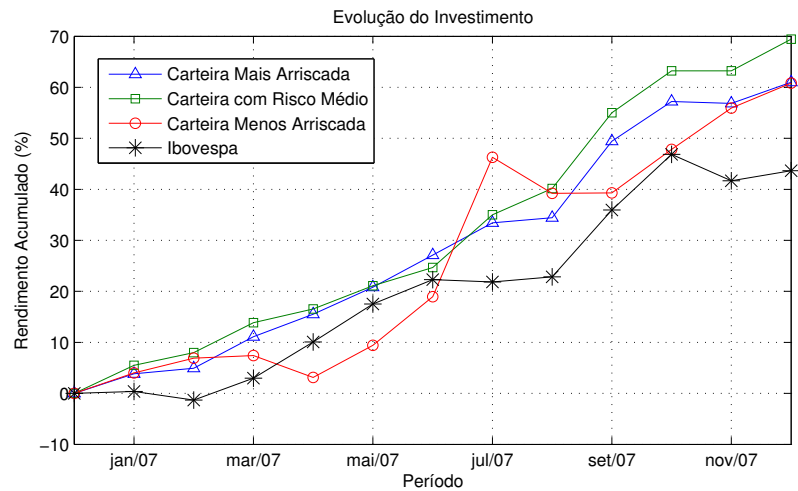
Figura 6.14: Composição das carteiras eficientes robustas com intervalo de incerteza obtido por média móvel - julho de 2007



(a) Retornos históricos: 2002-2007

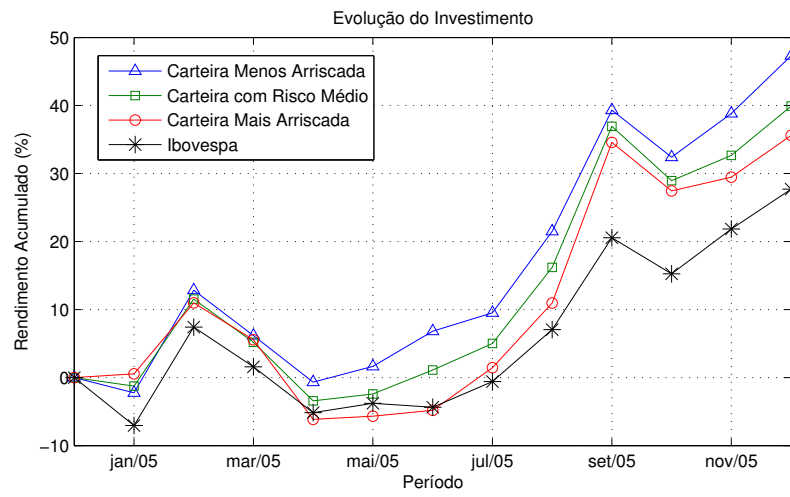


(b) Retornos históricos: 2004-2007

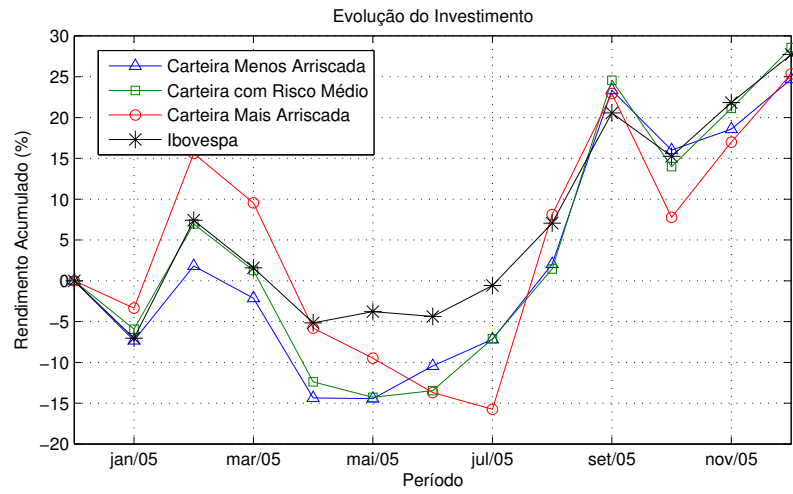


(c) Retornos históricos: 2006-2007

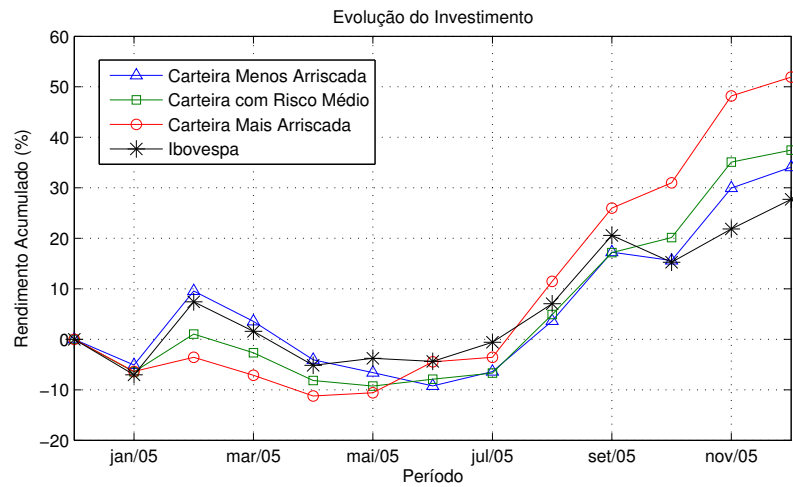
Figura 6.15: Rendimento acumulado em 2007 - carteiras robustas com intervalo de incerteza obtido por média móvel



(a) Retornos históricos: 2000-2005



(b) Retornos históricos: 2002-2005



(c) Retornos históricos: 2004-2005

Figura 6.16: Rendimento acumulado em 2005 - carteiras robustas com intervalo de incerteza obtido por média móvel

6.5 Comparação geral entre os modelos

Pelas análises anteriores observou-se que o modelo de índice único, apesar de mais simples, mostra-se tão eficiente quanto o modelo clássico de média variância na previsão dos retornos e riscos das carteiras. Contudo, tais modelos compartilham também a mesma fraqueza: extrema sensibilidade a variações dos parâmetros de entrada. Os modelos robustos mostram-se menos suscetíveis a essas variações e também a variações do mercado.

A Figura 6.17 compara a evolução dos investimentos em carteiras de nível médio de risco, para os dois modelos não robustos e os outros dois modelos robustos. Tal figura mostra a superioridade dos modelos robustos.

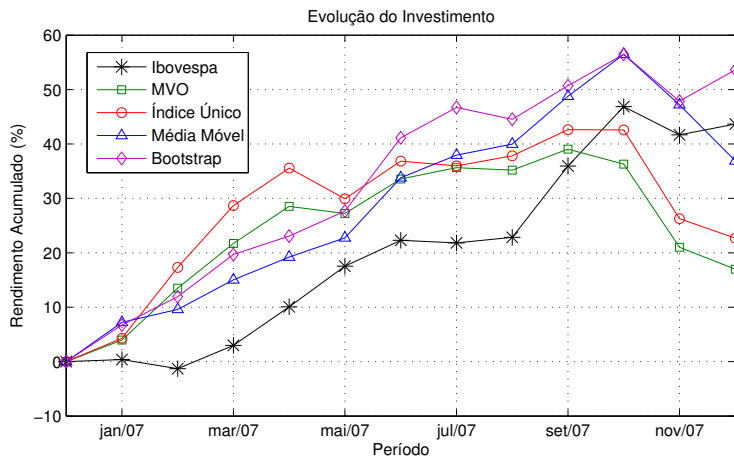


Figura 6.17: Comparação da evolução do investimento em carteiras com nível médio de risco - Retornos históricos: 2004-2007

A Figura 6.18 compara as fronteiras eficientes para os quatro modelos, ilustrando conjuntamente as fronteiras das Figuras 6.1, 6.5, 6.9 e 6.13, e deixando claras as semelhanças dos modelos clássicos entre si, e também dos robustos entre si.

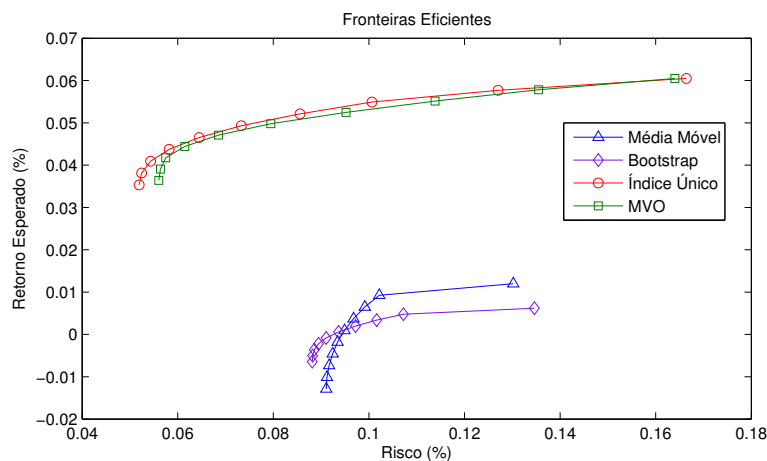


Figura 6.18: Comparação das fronteiras eficientes para os diferentes modelos - julho de 2007

Capítulo 7

Conclusões e Sugestões para Trabalhos Futuros

Ao longo deste trabalho foram estudados diferentes modelos para a determinação dos retornos esperados e da matriz de covariância, parâmetros de entrada do problema de otimização de carteiras de investimentos. Os modelos estudados foram: modelo clássico de média-variância (MVO), modelo de índice único e modelo de média-variância robusto. Para este último, foram vistas duas técnicas diferentes para determinação dos intervalos de incerteza das entradas: a técnica de bootstrap e a média móvel.

Para realizar uma análise comparativa dos modelos, foi acompanhado o desempenho que carteiras ótimas obtidas por cada um destes apresentariam, quando compostas por ações da BOVESPA.

As simulações, feitas considerando-se diferentes horizontes temporais para os dados de entrada e diferentes períodos de teste para a análise de desempenho, revelaram que o desempenho de carteiras obtidas pelos modelos robustos superaram aquele das obtidas pelos modelos não robustos. Em particular, observou-se que o desempenho das carteiras não robustas era muito sensível à série temporal utilizada para determinação dos retornos esperados e da matriz de covariância. Ou seja, para um mesmo período de teste, foram obtidos rendimentos acumulados finais radicalmente diferentes, chegando a diferenças de 60%. Essa inconsistência nos desempenhos foi sensivelmente reduzida pelo modelo robusto. As carteiras assim constituídas apresentaram não só menor sensibilidade à série temporal utilizada para determinação dos retornos e covariâncias, como também menor sensibilidade às oscilações do mercado, representado pelo Ibovespa.

Quando comparamos os modelos não robustos, chegamos a um resultado não esperado: o modelo de índice único, que simplifica a estrutura de covariâncias utilizada pelo modelo clássico de média-variância (MVO), foi o que apresentou melhor desempenho. Disso concluímos que grande parte das correlações entre pares de ativos identificados pelo MVO não passava de ruído.

Quando comparamos o desempenho de carteiras robustas obtidas pelas duas técnicas diferentes de determinação do intervalo de incerteza dos parâmetros de entrada, identificamos uma leve superioridade da técnica de bootstrap sobre a média móvel. Atribuímos tal diferença ao maior

número de estimativas dos parâmetros obtido pela primeira técnica. Enquanto o número de estimativas bootstrap é facilmente aumentado por um maior número de reamostragens, o número de estimativas de média móvel está restrito ao horizonte temporal dos dados e à janela utilizada.

Por fim, devemos ressaltar que foi proposta uma forma de simplificação do intervalo de incerteza robusto quando a matriz Q^U resultava não positiva semidefinida. Tal simplificação permitiu que o problema pudesse ser resolvido como dois problemas robustos em sequência, o que resultou numa implementação computacional direta. Como já afirmado, o modelo robusto mostrou-se eficiente, o que significa que a simplificação sugerida não resultou em deterioração dos resultados.

Como sugestões para trabalhos futuros, propõe-se a utilização de técnicas que melhorem a previsão dos retornos futuros das ações. Por exemplo, a utilização de mais momentos do conjunto de dados, no lugar da utilização da média e da variância, apenas. Esses momentos forneceriam informações a respeito da série temporal antes ignorados na análise. Pode-se utilizar, também um filtro de Kalman, que forneça uma estimativa ótima do valor esperado do retorno da ação e do risco.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] MARKOWITZ, H. Portfolio selection. *Journal of Finance*, v. 7, p. 77–91, 1952.
- [2] FABOZZI P. N. KOLM, D. A. P. F. J.; FOCARDI, S. M. *Robust Portfolio Optimization and Management*. [S.l.]: John Wiley & Sons, Inc., 2007.
- [3] CORNUEJOLS, G.; TUTUNCU, R. *Optimization Methods in Finance*. First. [S.l.]: Cambridge University Press, 2007.
- [4] MARKOWITZ, H. *Portfolio Selection - Efficient Diversification of Investments*. [S.l.]: Blackwell Publishing, 1991.
- [5] ELTON, E. J.; GRUBER, M. J. *Modern portfolio theory and investment analysis*. Fifth. [S.l.]: John Wiley & Sons, Inc., 1995.
- [6] TUTUNCU, R. H.; KOENIG, M. Robust asset allocation. *Annals of Operations Research*, v. 132, p. 157–187, 2004.
- [7] HALLDORSSON, B.; TUTUNCU, R. An interior-point method for a class of saddle-point problems. *Journal of Optimization Theory and Applications*, v. 116, n. 3, p. 559–590, March 2003.
- [8] MEYER, C. *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*. [S.l.]: Soc for Industrial & Applied Math, 2000.
- [9] EFRON, B.; TIBSHIRANI, R. J. *An Introduction to the Bootstrap*. [S.l.]: Chapman & Hall/CRC, 1993.
- [10] Disponível em: <<http://www.bovespa.com.br>>.
- [11] SANDRONI, P. *Dicionário de Economia do Século XXI*. [S.l.]: Record, 2006.

ANEXOS

Este capítulo foi retirado de [3]. Apresentamos aqui esse material para maiores esclarecimentos.

Convexidade é um conceito importante em matemática (e especialmente em otimização), o qual é usado para descrever certos conjuntos e funções. Conjuntos convexos e funções convexas estão relacionados, sendo contudo entidades matemáticas separadas.

Sejam x e y pontos dados em algum espaço vetorial. Então, para cada $\lambda \in [0, 1]$, o ponto $\lambda x + (1 - \lambda)y$ é chamado uma combinação convexa de x e y . O conjunto de todas as combinações convexas de x e y é o segmento linear ligando estes dois pontos.

Um subconjunto S de um dado espaço vetorial X é dito convexo se $x \in S$, $y \in S$ e $\lambda \in [0, 1]$, sempre implicam em $\lambda x + (1 - \lambda)y \in S$. Em outras palavras, um conjunto convexo é caracterizado pela seguinte propriedade: para quaisquer dois pontos do conjunto, o segmento de linha que os conecta está inteiramente contido no conjunto.

Poliedros são conjuntos definidos por igualdades e desigualdades lineares. Assim, a região admissível de um problema de otimização quadrática é um poliedro. É fácil demonstrar que poliedros são convexos.

Dado um conjunto convexo S , uma função $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ é dita uma função convexa se $\forall x \in S$, $y \in S$ e $\lambda \in [0, 1]$ a seguinte desigualdade é válida

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

Diz-se que f é estritamente convexa se $\forall x \in S$, $y \in S$ e $\lambda \in [0, 1]$

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) < \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

Dada $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ com $S \subset X$, $\text{epi}(f)$ - o epígrafo de f , é o seguinte subconjunto de $X \times \mathbb{R}$:

$$\text{epi}(f) := \{(x, r) : x \in S, f(x) \leq r\}. \quad (\text{I.1})$$

f é uma função convexa se, e somente se, $\text{epi}(f)$ é um conjunto convexo.

Para uma função duas vezes continuamente diferenciável $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ com $S \subset \mathbb{R}^n$, tem-se uma simples caracterização de convexidade: f é convexa em S se, e somente se, $f''(x) \succeq 0, \forall x \in S$. Para funções de múltiplas variáveis, tem-se a seguinte generalização: Se $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ com $S \subset \mathbb{R}^n$ é duas vezes continuamente diferenciável, então f é convexa em S se, e somente se, $\nabla^2 f(x)$ é positiva semidefinida para todo $x \in S$. Aqui, $\nabla^2 f(x)$ denota a matriz Hessiana simétrica de f ; de fato, $[\nabla^2 f(x)]_{ij} = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j}, \forall i, j$. É preciso lembrar que uma matriz simétrica $H \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é positiva semidefinida se $y^T H y \geq 0, \forall y \in \mathbb{R}^n$ ($y^T H y > 0, \forall y \in \mathbb{R}^n, y \neq 0$).

O teorema seguinte é uma das muitas razões que justificam a importância de funções convexas e conjuntos convexos em problemas de otimização:

Teorema I.1 [3] *Considere o problema de otimização 2.1.*

Se S é um conjunto convexo e se f é uma função convexa de x em S , então todos ótimos locais do problema são também ótimos globais.

II. GLOSSÁRIO FINANCEIRO

Definições extraídas de [11], exceto a do índice Ibovespa.

Ação

Documento que indica ser seu possuidor o proprietário de certa fração de determinada empresa. Existem vários tipos de ações, cada um dos quais definindo formas diversas de participação na propriedade e nos lucros da empresa.

Ações Ordinárias

Conferem a seu possuidor o direito de eleger a diretoria da empresa; em contrapartida, seus possuidores somente têm direito à distribuição dos dividendos depois de paga a porcentagem prioritária a que têm direito os portadores de ações preferenciais.

Ações Preferenciais

São aquelas cujos possuidores têm direito de receber uma porcentagem fixa dos lucros, antes de distribuídos os dividendos da empresa.

Análise de Mercado

Estudo e acompanhamento do comportamento do mercado de ações, como material para inferir seu comportamento futuro. São analisadas informações como as cotações, variações de preço em função do tempo, volumes negociados e até assuntos econômicos gerais que possam influir no comportamento de determinados setores industriais ou comerciais e reduzir ou melhorar o rendimento de determinados investimentos.

Cotação

Preço de cada um dos títulos, ações, moedas estrangeiras ou mercadorias que estão sendo transacionadas. O termo é usado principalmente nas Bolsas de Valores ou de mercadorias. A Cotação de Abertura é a primeira cotação de uma ação num dia de pregão; a Cotação de Fechamento é a última negociação com uma ação num dia de pregão; a Cotação Máxima é a mais elevada que uma ação teve durante um pregão; a Cotação Mínima é a mais baixa que uma ação teve num pregão; e a Cotação Média é o preço médio pelo qual uma determinada ação foi negociada em Bolsa durante um pregão.

Debênture

Título mobiliário que garante ao comprador uma renda fixa, ao contrário das ações, cuja renda é variável.

Dividendo

Renda atribuída a cada ação de uma sociedade anônima. É obtida dividindo-se o lucro do exercício financeiro pelo número total de ações.

Fechamento

Termo utilizado nas Bolsas de Valores para indicar o último leilão realizado no pregão. O fechamento pode ser em alta, quando os preços superam a média do dia, ou em baixa, quando os preços são inferiores à média do dia.

O Índice Bovespa é o mais importante indicador do desempenho médio das cotações do mercado de ações brasileiro. Sua relevância advém do fato do Ibovespa retratar o comportamento dos principais papéis negociados na BOVESPA e também de sua tradição, pois o índice manteve a integridade de sua série histórica e não sofreu modificações metodológicas desde sua implementação em 1968.

Índice Bovespa [10]

É o valor atual, em moeda corrente, de uma carteira teórica de ações constituída em 02/01/1968, a partir de uma aplicação hipotética¹. Supõe-se não ter sido efetuado nenhum investimento adicional desde então, considerando-se somente os ajustes efetuados em decorrência da distribuição de proventos pelas empresas emissoras (tais como reinversão de dividendos recebidos e do valor apurado com a venda de direitos de subscrição, e manutenção em carteira das ações recebidas em bonificação). Dessa forma, o índice reflete não apenas as variações dos preços das ações, mas também o impacto da distribuição dos proventos, sendo considerado um indicador que avalia o retorno total de suas ações componentes.

A finalidade básica do Ibovespa é a de servir como indicador médio do comportamento do mercado. Para tanto, sua composição procura aproximar-se o mais possível da real configuração das negociações à vista (lote-padrão) na BOVESPA.

Em termos de liquidez, as ações integrantes da carteira teórica do Índice Bovespa respondem por mais de 80% do número de negócios e do volume financeiro verificados no mercado à vista (lote-padrão) da BOVESPA.

Em termos de capitalização bursátil, as empresas emissoras das ações integrantes da carteira teórica do Índice Bovespa são responsáveis, em média, por aproximadamente 70% do somatório da capitalização bursátil de todas as empresas com ações negociáveis na BOVESPA.

A BOVESPA calcula seu índice em tempo real, considerando os preços dos últimos negócios efetuados no mercado à vista (lote-padrão) com ações componentes de sua carteira.

Sua divulgação é feita pela rede de difusão da BOVESPA e também retransmitida por uma série de "vendedores", sendo possível, dessa forma, acompanhar "on line" seu comportamento em qualquer parte do Brasil ou do mundo.

Uma metodologia de cálculo simples, com seus dados à disposição do público investidor, assegura uma grande confiabilidade ao Índice Bovespa. Isto pode ser constatado pela chancela do mercado, traduzida pelo fato do Ibovespa ser o único dos indicadores de performance de ações brasileiras a ter um mercado futuro líquido (um dos maiores mercados de contrato de índice do

¹O Índice sofreu, unicamente para efeito de divulgação e sem prejuízo de sua metodologia de cálculo, as seguintes adequações: 1. divisão por 100, em 03/10/1983; 2. divisão por 10, em 02/12/1985; 3. divisão por 10, em 29/08/1988; 4. divisão por 10, em 14/04/1989; 5. divisão por 10, em 12/01/1990; 6. divisão por 10, em 28/05/1991; 7. divisão por 10, em 21/01/1992; 8. divisão por 10, em 26/01/1993; 9. divisão por 10, em 27/08/1993; 10. divisão por 10, em 10/02/1994; 11. divisão por 10, em 03/03/1997.

mundo).

A BOVESPA é responsável pela gestão, cálculo, difusão e manutenção do Ibovespa. Essa responsabilidade assegura a observância estrita às normas e procedimentos técnicos constantes de sua metodologia.

Investimento

Aplicação de recursos (dinheiro ou títulos) em empreendimentos que renderão juros ou lucros, em geral a longo prazo.

Liquidez

Disponibilidade em moeda corrente, meios de pagamento, ou posse de títulos ou valores conversíveis rapidamente em dinheiro.

Lote

Grupo de bens ou valores iguais ou diferentes, colocados à venda em leilão. No mercado de títulos, é o grupo de ações ou títulos de qualquer natureza, arrematado em leilão ou em pregão normal das Bolsas.

Lote Padrão

Denominação dada nas Bolsas de Valores à quantidade mínima de ações vendidas e compradas nos pregões.

Lote Fracionário

Denominação dada nas Bolsas de Valores a um lote que não contenha um número de unidades igual a um múltiplo inteiro de lote padrão.

Mercado de Capitais

Toda a rede de Bolsas de Valores e instituições financeiras (bancos, companhias de investimento e de seguro) que opera com compra e venda de papéis (ações, títulos de dívida em geral) a longo prazo.

Mercado Financeiro

Conjunto formado pelo mercado monetário e pelo mercado de capitais. Abrange todas as transações com moedas e títulos e as instituições que as promovem: Banco Central, caixas econômicas, bancos estaduais, bancos comerciais e de investimentos, corretoras de valores, distribuidoras de títulos, fundos de investimentos etc, além das Bolsas de Valores.

Mercado Monetário

Designa o setor do mercado financeiro que opera a curto prazo. Compõe-se da rede de entidades ou órgãos financeiros que negociam títulos e valores, concedendo empréstimos a empresas ou particulares, a curto ou curtíssimo prazo, contra o pagamento de juros. Além dos bancos comerciais e de empresas financeiras de crédito e mercado monetário, comereende também o mercado paralelo e o de divisas.

Portfolio (Carteira de Títulos)

Conjunto de ativos financeiros (títulos, ações, debêntures, etc) pertencentes a uma empresa, classificados por prazo de maturação, devedor, taxas de juros, de remuneração esperada, etc.

Portfolio Selection

Expressão em inglês que significa a utilização de técnicas matemáticas e da teoria da decisão e da análise de riscos para selecionar novas áreas de negócios ou aquisição de novas empresas.

Pregão

Anúncio em voz alta que os corretores fazem nas Bolsas de Valores dos preços e condições de compra e venda de ações. O termo se aplica por extensão ao local da Bolsa de Valores onde se realizam essas atividades e se concretizam os negócios.

Rentabilidade

Grau de rendimento proporcionado por determinado investimento. Pode ser expressa pela porcentagem de lucro em relação ao investimento total. Na maior parte dos casos, a rentabilidade é inversamente proporcional à segurança do investimento e à liquidez.

Risco

Situação em que, partindo-se de determinado conjunto de ações, vários resultados são possíveis e as probabilidades de cada um acontecer são conhecidas. Quando tais probabilidades são desconhecidas, a situação denomina-se incerteza. Em sentido mais concreto, é a condição de um investidor, ante as possibilidades de perder ou ganhar dinheiro.

Série Temporal

Série de observações sobre determinada variável, feitas em sequências periódicas - por dia, por semana, por mês, por ano -, que fornecem uma visão geral sobre o comportamento do aspecto em questão ao longo do período escolhido.

Short Sale

Expressão em inglês utilizada no mercado financeiro para designar o operador que vendeu títulos, ações, etc, que não possui (venda a descoberto ou "vendido") e que, para consumir a operação, tem de tomá-los por empréstimo ou, em último caso, adquiri-los pelo preço vigente no mercado, que pode ser desfavorável ao operador.

Título

Documento que certifica a propriedade de um bem ou de um valor. Dividem-se em títulos comerciais (letra de câmbio, nota promissória, duplicata) e títulos de renda (ações, debêntures, títulos de dívida pública).

Volatilidade

Medida da intensidade e frequência das flutuações dos preços de um ativo financeiro ou dos índices numa Bolsa de Valores. É o desvio-padrão das mudanças do logaritmo dos preços de um ativo (financeiro), expressos numa taxa anual.

III.1 Transferência dos Dados do Excel para o *MATLAB*[®]

```
%Arquivo inicial: lê os dados, separa os ativos em colunas

tempo = 72; \%horizonte de tempo, em meses considerado
x = 12; \%horizonte de tempo futuro, para verificar a evolução do investimento

%lê o arquivo em excel contendo os preços dos ativos, disponibilizados em
%ordem cronológica e em uma única coluna

dados = xlsread('fracionario.xlsx', '00-05');
%lê o arquivo em excel contendo o valor do índice Ibovespa
ibov = [xlsread('ibovespa.xlsx', '00-05')];

%arruma os dados em colunas, cada coluna com os preços de um ativo

s_dados = size(dados);
n_ativos = s_dados(1)/tempo;
for i = 1:n_ativos
    precos(:,i) = dados(i*tempo-(tempo-1):i*tempo);
end

%interpolação linear
precos(isnan(precos))= interp1(find(~isnan(precos)), ...
    precos(~isnan(precos)), find(isnan(precos)), 'linear');
```

III.2 Cálculo das taxas de retorno

```
%calcula das taxas de retorno

%retornos das ações
retornos = price2ret(precos,[],'Periodic');

%retornos do mercado
retibov = price2ret(ibov,[],'Periodic');
```

III.3 Seleção das 15 ações com os maiores retornos médios

```
%seleciona os ativos com os 15 maiores retornos médios

r_medios = mean(retornos(1:tempo-13,:));
r_med_ordenados = sort(r_medios,2,'descend');

j = 0;
for i = 1:n_ativos
    if r_medios(i) >= r_med_ordenados(15)
        j = j + 1;
        r_ativos(:,j)= retornos(:,i);
        acoes(j)=i
    end
end
```

III.4 Cálculo das carteiras e rendimentos por meio do modelo clássico de média variância

```
% Arquivo que calcula carteiras e rendimentos por meio do modelo clássico
% de média variância

%faz o cálculo dos retornos das carteiras eficientes por n meses
%consecutivos, adicionando o dado de mais um mês em cada cálculo
matriz_risco_mvo = [];
matriz_retorno_mvo = [];
matriz_pesos_mvo = [];
%delta_pesos = [];
for k = 1:x
    r_ativos_n = r_ativos(k:(tempo-13+k),:);
    s_r_ativos_n = size(r_ativos_n);
    n = s_r_ativos_n(2);
    ret = mean(r_ativos_n(1:s_r_ativos_n(1)-1,:));
    Q = covmat(r_ativos_n(1:s_r_ativos_n(1)-1,:));

%verifica se a matriz Q é positiva semidefinida
    if any(eig(Q))<0;
        disp('matriz não é positiva semidefinida');
    end

%plota a fronteira eficiente e determina as carteiras ótimas
carteiras = 10;
```

```

[risco_mvo, retorno_mvo, pesos_mvo] = frontcon(ret, Q, carteiras);
matriz_risco_mvo = [matriz_risco_mvo risco_mvo];
matriz_retorno_mvo = [matriz_retorno_mvo retorno_mvo];
matriz_pesos_mvo = [matriz_pesos_mvo pesos_mvo];

%plota a fronteira eficiente
plot(risco_mvo,retorno_mvo)
hold all

%retornos reais dos ativos no período calculado
ret_reais = r_ativos_n(s_r_ativos_n(1),:);

%desempenho da carteira ótima para cada período
desempenho_mvo(:,k) = pesos_mvo*ret_reais';

%desempenho do mercado para cada período
desempenho_mercado(k)= retibov(tempo-13+k);
end

%calcula o rendimento acumulado em um período de um ano após o começo da
%análise
rendimento_mvo = zeros(carteiras,x+1);
rendimento_mvo(:,1) = 10000;
rendimento_mercado = zeros(x+1,1);
rendimento_mercado(1)=10000;
for i=1:carteiras
    for j=2:x+1
        rendimento_mvo(i,j) = rendimento_mvo(i,j-1)*(1 + desempenho_mvo(i,j-1));
        rendimento_mercado(j) = rendimento_mercado(j-1)*
(1 + desempenho_mercado(j-1));
    end
end

%gráfico do rendimento acumulado para as carteiras calculadas
figure
for i=2:3:carteiras
    plot(1:x+1,rendimento_mvo(i,:))
    hold all
end
plot(1:x+1,rendimento_mercado,'black')
title('Evolução do Investimento')
xlabel('Período')
ylabel('Rendimento Acumulado (%)')

```



```
grid
```

```
%plota a composição das carteiras eficientes para cada retorno  
%esperado(mês=julho)  
figure  
mes = 7;  
y=0;  
for i=mes*(s_r_ativos_n(2))-(s_r_ativos_n(2)-1):mes*(s_r_ativos_n(2))  
y = y + matriz_pesos_mv(:,i);  
x1 = matriz_retorno_mv(:,mes);  
plot(x1,y)  
title('Composição das carteiras eficientes')  
xlabel('Retorno esperado')  
ylabel('Porcentagens acumuladas em diferentes ativos')  
hold all  
end
```

III.5 Cálculo das carteiras e rendimentos por meio do modelo de índice único

```
matriz_risco_si = [];  
matriz_retorno_si = [];  
matriz_pesos_si = [];  
for k = 1:x  
    r_ativos_n = r_ativos(k:(tempo-13+k),:);  
    s_r_ativos_n = size(r_ativos_n);  
    r_ibov = retibov(k:(tempo-14+k));  
    eixox = r_ibov;  
  
    %regressão linear  
    for i=1:s_r_ativos_n(2)  
        eixoy = r_ativos_n(1:s_r_ativos_n(1)-1,i);  
        regressao = polyfit(eixox,eixoy,1);  
        beta(k,i) = regressao(1);  
        alfa(k,i) = regressao(2);  
        f = polyval(regressao,eixox);  
        erros(1:length(f),i) = eixoy - f;  
  
        %retornos dos ativos  
        ret(k,i)= alfa(k,i) + beta(k,i)*mean(r_ibov);  
    end  
end
```

```

%matriz de covariância
for i=1:s_r_ativos_n(2)
    for j=1:s_r_ativos_n(2)
        if i==j
            Q(i,j)=((beta(k,i))^2)*var(r_ibov) + var(erros(:,i));
        else
            Q(i,j)=beta(k,i)*beta(k,j)*var(r_ibov);
        end
    end
end

%verifica se a matriz Q é positiva semidefinida
if any(eig(Q))<0;
    disp('matriz não é positiva semidefinida');
end

%plota a fronteira eficiente e determina as carteiras ótimas
carteiras = 10;
[risco_si, retorno_si, pesos_si] = frontcon(ret(k,:), Q, carteiras);
matriz_risco_si = [matriz_risco_si risco_si];
matriz_retorno_si = [matriz_retorno_si retorno_si];
matriz_pesos_si = [matriz_pesos_si pesos_si];

%retornos reais dos ativos no período calculado
ret_reais = r_ativos_n(s_r_ativos_n(1), :);

%desempenho da carteira ótima para cada período
desempenho_si(:,k) = pesos_si*ret_reais';

%desempenho do mercado para cada período
desempenho_mercado(k)= retibov(tempo-13+k);
end

%calcula o rendimento acumulado em um período de um ano após o começo da
%análise
rendimento_si = zeros(carteiras,x+1);
rendimento_si(:,1) = 10000;
rendimento_mercado = zeros(x+1,1);
rendimento_mercado(1)=10000;
for i=1:carteiras
    for j=2:x+1

```

```

rendimento_si(i,j) = rendimento_si(i,j-1)*(1 + desempenho_si(i,j-1));
rendimento_mercado(j) = rendimento_mercado(j-1)*
(1 + desempenho_mercado(j-1));
end
end

%gráfico do rendimento acumulado para as carteiras calculadas
figure
for i=2:3:carteiras
    plot(1:x+1,rendimento_si(i,:))
    hold all
end
plot(1:x+1,rendimento_mercado,'-x')
title('Evolução do investimento inicial')
xlabel('Período')
ylabel('Quantia acumulada')
grid

%plota a composição das carteiras eficientes para cada retorno
%esperado(mês=julho)
figure
mes = 7;
y=0;
for i=mes*(s_r_ativos_n(2))-(s_r_ativos_n(2)-1):mes*(s_r_ativos_n(2))
y = y + matriz_pesos_si(:,i);
x1 = matriz_retorno_si(:,mes);
plot(x1,y)
title('Composição das carteiras eficientes')
xlabel('Retorno esperado')
ylabel('Porcentagens acumuladas em diferentes ativos')
hold all
end

```

III.6 Cálculo das carteiras e rendimentos por meio da formulação robusta com intervalo de incerteza calculado pela técnica de Bootstrap

```

%faz o cálculo dos retornos das carteiras eficientes por n meses
%consecutivos, adicionando o dado de mais um mês em cada cálculo
matriz_risco_boot = [];
matriz_retorno_boot = [];
matriz_pesos_boot = [];

```

```

delta_pesos = [];
for k = 1:x
    r_ativos_n = r_ativos(k:(tempo-13+k),:);
    s_r_ativos_n = size(r_ativos_n);
    n = s_r_ativos_n(2);
    iteracoes = 100;
%faz n reamostragens de cada coluna e já calcula a media pra cada reamostragem
    media = bootstrp(iteracoes, @mean, r_ativos_n(1:(s_r_ativos_n(1)-1),:));
%coloca as medias em ordem crescente dentro de cada coluna
    media_ordenada = sort(media,1);
    m_menor = media_ordenada(1,:) ;

    for i=1:s_r_ativos_n(2)
        for j=1:s_r_ativos_n(2)
            m = bootstrp(iteracoes, 'covnum', r_ativos_n(1:(s_r_ativos_n(1)-1),i),
r_ativos_n(1:(s_r_ativos_n(1)-1),j));
            m_ordenada = sort(m,1);
            Qu(i,j)= m_ordenada(iteracoes);
            Qu(j,i) = Qu(i,j);
        end
    end

%checa se Qu é positiva semidefinida e, caso contrário, faz uma pequena
%modificação para que seja
    ni=0.0001;
    if any(eig(Qu)<0);
        disp ('matriz não é positiva semidefinida');
        Qu = Qu + (abs(min(eig(Qu)))+ni)*eye(s_r_ativos_n(2));
    end

%plota a fronteira eficiente e determina as carteiras ótimas
    carteiras = 10;
    [risco_boot, retorno_boot, pesos_boot] = frontcon(m_menor, Qu, carteiras);
    matriz_risco_boot = [matriz_risco_boot risco_boot];
    matriz_retorno_boot = [matriz_retorno_boot retorno_boot];
    matriz_pesos_boot = [matriz_pesos_boot pesos_boot];

%fronteira eficiente
    plot(risco_boot, retorno_boot)
    hold all

%retornos reais dos ativos no período calculado
    ret_reais = r_ativos_n(s_r_ativos_n(1),:);

```

```

%desempenho da carteira ótima para cada período
desempenho_rob_bootstrap(:,k) = (pesos_boot)*(ret_reais)';

%desempenho do mercado para cada período
desempenho_mercado(k)= retibov(tempo-13+k);
end

%calcula o rendimento acumulado em um período de um ano após o começo da
%análise
rendimento_rob_bootstrap = zeros(carteiras,x+1);
rendimento_rob_bootstrap(:,1) = 10000;
rendimento_mercado = zeros(x+1,1);
rendimento_mercado(1)=10000;
for i=1:carteiras
    for j=2:x+1
        rendimento_rob_bootstrap(i,j) = rendimento_rob_bootstrap(i,j-1)*
(1 + desempenho_rob_bootstrap(i,j-1));
        rendimento_mercado(j) = rendimento_mercado(j-1)*
(1 + desempenho_mercado(j-1));
    end
end

%gráfico do rendimento acumulado para as carteiras calculadas
figure
for i=2:3:carteiras
    plot(1:x+1,rendimento_rob_bootstrap(i,:))
    hold all
end
plot(1:x+1,rendimento_mercado,'-x')
title('Evolução do investimento inicial')
xlabel('Período')
ylabel('Quantia acumulada')
grid

%plota a composição das carteiras eficientes para cada retorno
%esperado(mês=julho)
figure
mes = 7;
y=0;
for i=mes*(s_r_ativos_n(2))- (s_r_ativos_n(2)-1):mes*(s_r_ativos_n(2))
y = y + matriz_pesos_boot(:,i);
x1 = matriz_retorno_boot(:,mes);

```

```

plot(x1,y)
title('Composição das carteiras eficientes')
xlabel('Retorno esperado')
ylabel('Porcentagens acumuladas em diferentes ativos')
hold all
end

```

III.7 Cálculo das carteiras e rendimentos por meio da formulação robusta com intervalo de incerteza calculado pela técnica de Média Móvel

```

%faz o cálculo dos retornos das carteiras eficientes por n meses
%consecutivos, adicionando o dado de mais um mês em cada cálculo
matriz_risco_medmov = [];
matriz_retorno_medmov = [];
matriz_pesos_medmov = [];
delta_pesos = [];
for k = 1:x
    r_ativos_n = r_ativos(k:(tempo-13+k),:);
    s_r_ativos_n = size(r_ativos_n);
    n = s_r_ativos_n(2);
    win = 20;
    output = tsmovavg(r_ativos_n, 's', win, 1);
    m_mov = output(win:s_r_ativos_n(1)-1,:); %nao usa a ultima linha
    m_menor = min(m_mov);

    for i=1:s_r_ativos_n(2)
        for j=1:s_r_ativos_n(2)
            for ii =1:s_r_ativos_n(1)-win %pega até a penultima linha
                array(ii) = covnum(r_ativos_n(ii:win+ii-1, i),
r_ativos_n(ii:win+ii-1, j));
            end
            Qu(i,j)= max(array);
            Qu(j,i)= Qu(i,j);
        end
    end

end

%checar se Qu é positiva semidefinida e, caso contrário, faz uma pequena
%modificação para que seja
ni=0.0001;
if any(eig(Qu)<0);
    disp ('matriz não é positiva semidefinida');
end

```

```

        Qu = Qu + (abs(min(eig(Qu)))+ni)*eye(s_r_ativos_n(2));
    end

%plota a fronteira eficiente e determina as carteiras ótimas
    carteiras = 20;
    [risco_medmov, retorno_medmov, pesos_medmov] =
frontcon(m_menor, Qu, carteiras);
    matriz_risco_medmov = [matriz_risco_medmov risco_medmov];
    matriz_retorno_medmov = [matriz_retorno_medmov retorno_medmov];
    matriz_pesos_medmov = [matriz_pesos_medmov pesos_medmov];

    %fronteira eficiente
    plot(risco_medmov, retorno_medmov)
    hold all

%retornos reais dos ativos no período calculado
    ret_reais = r_ativos_n(s_r_ativos_n(1),:);

%desempenho da carteira ótima para cada período
    desempenho_rob_medmov(:,k) = pesos_medmov*ret_reais';

%desempenho do mercado para cada período
desempenho_mercado(k)= retibov(tempo-13+k);
end

%calcula o rendimento acumulado em um período de um ano após o começo da
%análise
rendimento_rob_medmov = zeros(carteiras,x+1);
rendimento_rob_medmov(:,1) = 10000;
rendimento_mercado = zeros(x+1,1);
rendimento_mercado(1)=10000;
for i=1:carteiras
    for j=2:x+1
        rendimento_rob_medmov(i,j) = rendimento_rob_medmov(i,j-1)*
(1 + desempenho_rob_medmov(i,j-1));
        rendimento_mercado(j) = rendimento_mercado(j-1)*
(1 + desempenho_mercado(j-1));
    end
end

%gráfico do rendimento acumulado para as carteiras calculadas
figure
for i=2:3:carteiras

```

```

    plot(1:x+1,rendimento_rob_medmov(i,:))
    hold all
end
plot(1:x+1,rendimento_mercado,'-x')
title('Evolução do investimento inicial')
xlabel('Período')
ylabel('Quantia acumulada')
grid

%plota a composição das carteiras eficientes para cada retorno
%esperado(mês=julho)
figure
mes = 7;
y=0;
for i=mes*(s_r_ativos_n(2))- (s_r_ativos_n(2)-1):mes*(s_r_ativos_n(2))
y = y + matriz_pesos_mvo(:,i);
x1 = matriz_retorno_mvo(:,mes);
plot(x1,y)
title('Composição das carteiras eficientes')
xlabel('Retorno esperado')
ylabel('Porcentagens acumuladas em diferentes ativos')
hold all
end

```


IV. CONTEÚDO DO CD

No CD encontra-se o arquivo em pdf deste trabalho de graduação.