



Universidade de Brasília

Análise e Aplicação de Valor em Risco Para Valores Financeiros

Caio Nogueira Gonçalves

Monografia apresentada para obtenção do
título de Bacharel em Estatística.

**Brasília
2013**

Caio Nogueira Gonçalves
Bacharel em Estatística

Análise e Aplicação de Valor em Risco Para Valores Financeiros

Orientador:
Prof. Dr. **Jhames Matos Sampaio**

Monografia apresentada para obtenção do título de Bacharel
em Estatística.

Brasília
2013

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	5
2 OBJETIVOS	6
3 CONCEITOS BÁSICOS	7
4 METODOLOGIA	9
5 VALOR EM RISCO	9
6 RISCO DE MERCADO	10
6.1 Crise Mundial de 2008	11
6.2 Aplicações do VaR	11
7 DISTRIBUIÇÃO NORMAL	15
7.1 Modelo Linear	17
7.2 Aplicação na Distribuição Normal	18
8 VALORES EXTREMOS	27
8.1 Aplicação da Teoria dos Valores Extremos	28
9 COMPARAÇÃO DE MODELOS	33
10 CONCLUSÃO	36
REFERÊNCIAS	37

1 INTRODUÇÃO

VaR (Value at Risk) é um método de mensuração de risco que utiliza técnicas estatísticas padrões, ele mede a pior perda esperada ao longo de determinado intervalo de tempo, sob condições normais de mercado e dentro de um determinado nível de significância.

Esse método se estabeleceu nos últimos 15 anos como a principal medida de risco de mercado, resumindo a exposição do ativo a este risco e indicando uma probabilidade de uma oscilação adversa de maneira simples e eficiente. Hoje o método é muito utilizado por entidades financeiras e órgãos reguladores. O risco de mercado está associado à volatilidade das taxas de juros e de câmbio e dos preços de ações e commodities.

O monitoramento apropriado dos riscos de mercado é fundamental para atividades financeiras. Barings Bank, Société Générale, Orange County, Metallgesellschaft, Amaranth, e Sadia e Aracruz no Brasil, são exemplos de empresas que tiveram grandes perdas devido a forma ineficiente de avaliar a exposição ao risco de mercado. O VaR foi criado pelos principais bancos e entidades financeiras com o intuito de estimar possíveis perdas decorrentes das oscilações de mercado, assim como ajudar na administração de derivativos, que são considerados instrumentos financeiros de alto risco. A expansão do uso de derivativos e o grande foco em sua gestão levou a disseminação em grande escala do VaR.

A ISDA (International Swaps and Derivatives Association) sugere o VaR como um dos métodos a serem utilizadas no gerenciamento de riscos e na mensuração da margem inicial solicitada nas operações de derivativos.

Entre seus diversos propósitos o VaR pode ser usado para:

- fornecer informações gerenciais, ao dar assistência a investidores e a alta gerencia dos riscos em transações e operações de investimento;
- auxiliar na alocação de recursos, onde é utilizado no estabelecimento de limites para traders e na decisão de onde alocar recursos limitados;
- avaliar a performance de investimentos, permitindo que o desempenho seja ajustado ao risco.

“O VaR pode beneficiar qualquer entidade exposta a risco financeiro e está sendo adotado em massa por instituições financeiras e usuários finais preocupados com derivativos, bem como por órgão reguladores.” (Jorion 1997).

O Comitê de Basileia, criado pelo grupo do G-10 e integrado pelo Brasil desde 2009, estabelece recomendações, que devem ser seguidas pelos países membros, com o intuito de aprimorar a supervisão e a estabilidade dos sistemas financeiros. As recomendações conhecidas como Acordo de Basileia II, de 2003, propõem para acompanhamento dos riscos de mercado das posições financeiras o emprego de metodologias de VaR com a utilização de intervalo de confiança de 99%, ou seja, a perda potencial é calculada considerando-se que em apenas 1% dos casos a variação dos fatores de risco gerará perdas superiores ao estimado como perda potencial.

O objetivo principal é estimar o VaR utilizando alguns dos métodos mais aplicados com o intuito de entender sua aplicação no mercado financeiro de gerenciamento de riscos. Como existem várias formas de se estimar o VaR, concentraremos o trabalho nos métodos que consideramos fundamentais para a sua compreensão: Método da Distribuição Normal e Método dos Valores Extremos.

- **Distribuição Normal**

A distribuição normal é utilizada em uma grande variedade de aplicações estatísticas sendo muitas vezes a primeira distribuição proposta para dados a serem estudados. Apesar da comprovada inadequação da utilização da distribuição normal para a medida VaR quando utilizamos dados financeiros, sua importância acadêmica nos leva a um estudo mais aprofundado de suas características e aplicações.

- **Valores Extremos** O Método dos Valores Extremos apresenta uma distribuição mais robusta, que busca estimar o VaR para os períodos de maior perda possível, como grandes crises de mercado, pois analisa o comportamento da cauda da distribuição e possibilita quantificar o comportamento probabilístico de grandes perdas não esperadas. Leonard Henry Caleb Tippett e Ronald Aylmer Fisher foram os primeiros a definir os três tipos possíveis de distribuições assintóticas de valores extremos. Gumbel desenvolveu esta teoria em seu livro de 1958 “Estatísticas de Extremos”, que deu origem a conhecida distribuição Gumbel ou distribuição de extremos.

Com o estudo e aplicação prática de dados financeiros tratados com as metodologias mencionadas acima, observaremos o comportamento de dados financeiros quando assumimos as distribuições sugeridas. Trataremos suas diferenças e adequações no computo do VaR.

3 CONCEITOS BÁSICOS

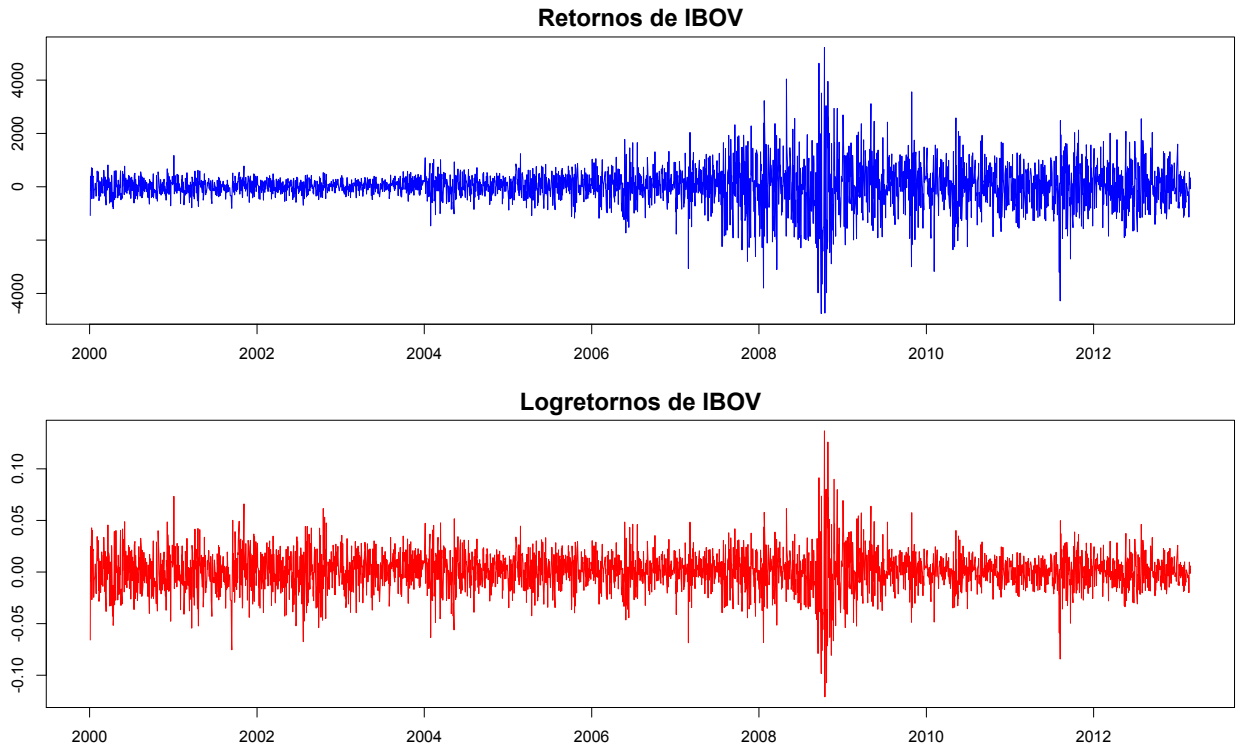
- **Série Temporal:** Qualquer conjunto de observações ordenadas no tempo. Uma série temporal pode ser contínua ou discreta, neste estudo estaremos utilizando somente séries discretas. Um série temporal pode ser entendida, formalmente, como a realização de um processo estocástico.
- **Ativos:** Em contabilidade, ativo é um termo básico utilizado para expressar o conjunto de bens, valores, créditos, direitos e assemelhados que formam o patrimônio de uma pessoa, singular ou coletiva, num determinado momento, avaliado pelos respectivos custos. Uma carteira de investimentos é um grupo de ativos que pertence a um investidor, pessoa física ou pessoa jurídica.
- **Retorno:** Denotando P_t como preço de um ativo no instante t e supondo que não haja dividendos pagos no período, a variação de preço entre o instante t e $t - 1$ é dada por $\Delta P_t = P_t - P_{t-1}$ e a variação relativa de preços (retorno líquido simples) deste ativo, entre os mesmos instantes é dado por :

$$R_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} = \frac{\Delta P_t}{P_{t-1}}. \quad (1)$$

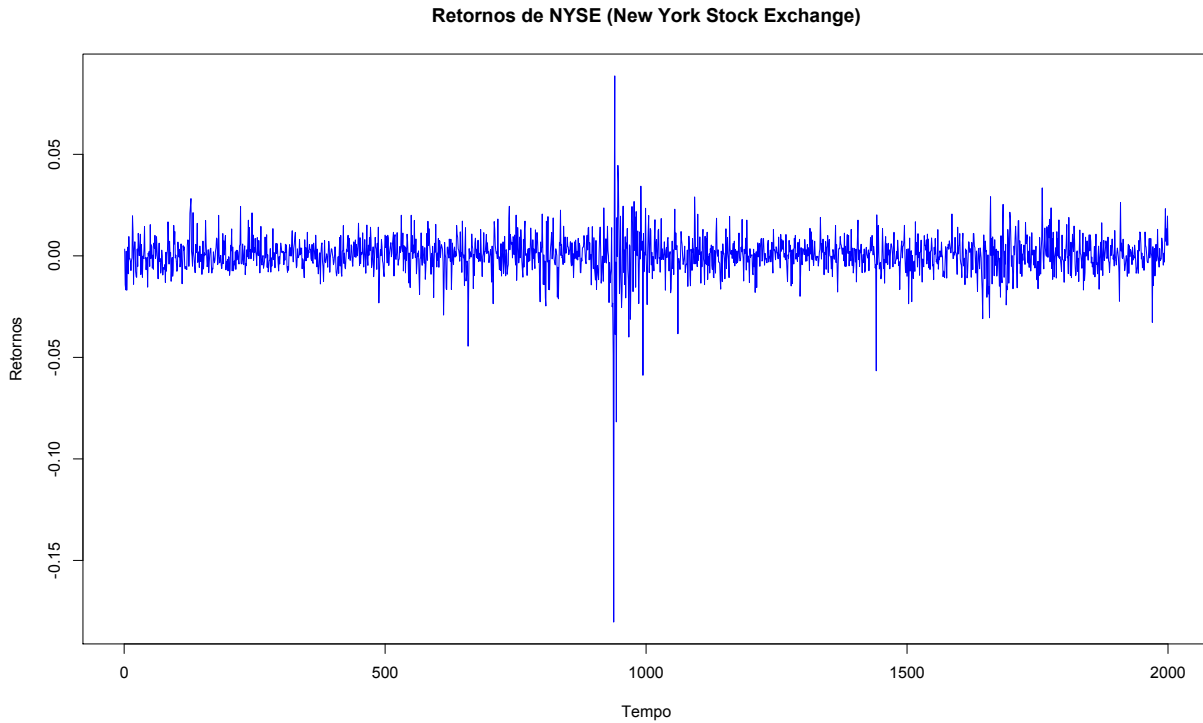
Neste estudo iremos utilizar com mais frequência o log-retorno, que chamaremos comumente de retorno

$$r_t = \log \frac{P_t}{P_{t-1}} = \log(1 + R_t) = p_t + p_{t-1} = \log P_t - \log P_{t-1} = \Delta \log P_t. \quad (2)$$

Note que R_t e r_t são valores muito próximos pois $\log(1 + u) \approx u$ para valores pequenos de u .



- **Volatilidade:** É uma medida de dispersão dos retornos de um título ou índice de mercado. Representa uma variável relativa à intensidade e frequência das oscilações nas cotações de um ativo financeiro e um dos parâmetros mais frequentemente utilizados como forma de mensurar o risco de um ativo em particular.



- **RiskMetrics:** Desenvolvido por Dennis Weatherstone, quando ele trabalhava para a agência bancária J.P. Morgan, o RiskMetrics é uma metodologia que utiliza a hipótese de normalidade para os retornos. Para mais detalhes veja (Longerstaey and More, 1995).

4 METODOLOGIA

Os métodos para a estimação do VaR serão apresentadas separadamente. Primeiro o método utilizando a distribuição normal, em seguida aplicaremos a medida pelo método normal para o portfólio e por fim utilizaremos o método dos valores extremos. Os dados utilizados foram retirados do site <http://www.nasdaq.com> onde extraímos as cotações das empresas Microsoft, AT&T e Apple.

Tendo em vista analisar o comportamento da medida, focaremos no ano de 2008 quando a crise econômica mundial apresentou maior efeito nos ativos financeiros globais. Para o cálculo do VaR utilizaremos o programa de análise estatística R versão 3.0.0.

5 VALOR EM RISCO

Iremos discutir alguns métodos relacionados no livro "Um Curso em Séries Temporais Financeiras" (Moretin, 2011) para o computo do VaR, entretanto a compreensão do significado desta medida será essencial para o entendimento dos procedimentos. A volatilidade de valores financeiros em momentos relativamente estáveis no mercado sempre foi estudada para maximização de ganho e minimização de perda em qualquer empresa que se envolve no mercado financeiro. O VaR é utilizado quando tal mercado foge desta estabilidade com valores extremos de variação da volatilidade ocorrendo, provavelmente, devido a alguma grande crise: como a queda do mercado de ações em Wall Street em 1987 ou, mais recentemente, a crise Europeia de 2012 que ainda repercute tanto no âmbito financeiro como social. Na tentativa de controlar melhor o risco a que estas empresas e órgãos estão expostos, o VaR se tornou amplamente utilizado especificamente no caso de ativos financeiros.

Conforme (Moretin, 2011) a medida VaR pode ser melhor entendida se a separarmos em dois casos: posição financeira comprada, ou *long*, e posição financeira vendida, ou *short*. A posição comprada significa possuir um determinado ativo, enquanto a posição vendida significa a venda de um ativo que não se possui, como a venda de ações alugadas.

Suponha ΔP_t como a diferença entre $P(t+h)$ e $P(t)$. Esse valor irá representar o lucro ou perda da posição no espaço de tempo h .

Definição 5.1. *Definimos o VaR de uma posição comprada sobre o horizonte h , com probabilidade p , e $0 < p < 1$, como o valor tal que*

$$p = \mathcal{P}(\Delta P(h) \leq VaR) = F_h(VaR) \quad (3)$$

Onde $F_h(\cdot)$ é a função de distribuição acumulada de $\Delta P(h)$.

Uma posição de compra é aquela na qual um indivíduo ou empresa toma posse de um determinado ativo, como a compra de uma determinada ação ou, no caso empresarial, a compra de uma marca. Um exemplo seria a Kolynos sendo adquirida pela Colgate.

Podemos observar a partir da equação (3) que ela depende de p e de h , onde o risco aumenta conforme p diminui ou quando h aumenta. Da definição (5.1) podemos notar que o VaR é o p -quantil da distribuição $F_h(\cdot)$ e um dos nossos desafios será a estimação deste quantil. O VaR na definição (5.1) terá um valor negativo pois quem tem uma posição comprada sofre perda se $\Delta P(h) < 0$. Vejamos um exemplo retirado de (Moretin, 2011).

Exemplo 5.1. Uma empresa possui 100 milhões de reais aplicados num fundo de câmbio. Suponha que há uma chance de 95% de que a taxa de câmbio não caia em um dia.

Uma série temporal dos seus retornos com volatilidade σ_t poderá nos dar sua variância. Admitindo que os retornos possuam uma distribuição normal que iremos aprender como utilizar na seção 7, podemos estimar tal volatilidade. Suponhamos então que σ_t seja 0,46% e que 1,65 é o (0,95)-quantil da $\mathcal{N}(0, 1)$ então teremos

$$VaR = (1,65)(\sigma_t) = (1,65)(0,46) = 0,759\%$$

Isto significa que com 95% de chance a taxa de câmbio não cairá mais de 0,759%. Assim podemos calcular o valor esperado de perda do investimento caso isso venha a ocorrer

$$\text{Perda} = 100.000.000,00 \times 0,759\% = 759.000,00$$

Concluimos que existe uma chance 5% de que haja uma perda de 759 mil ou mais.

No caso de uma posição vendida, haverá perda quando $\Delta P(h) > 0$ e definiremos o VaR como o valor tal que

$$p = \mathcal{P}(\Delta P(h) \geq \text{VaR}) = 1 - F_h(\text{VaR}), \quad (4)$$

que será positivo para valores pequenos de p .

Isso nos indica que se usarmos $-\Delta P$ na equação (3) teremos (4) e vice-versa. Também podemos concluir que, na equação (3), olhamos para a calda esquerda de $F_h(\cdot)$ para o cálculo do VaR, enquanto, na equação (4), olhamos para a calda direita.

6 RISCO DE MERCADO

Quando falamos em risco de mercado associamos imediatamente a um eventual "perigo de perda", quando o que se mede no mercado financeiro como risco é a possibilidade da ocorrência de uma situação inesperada devido a flutuações nos valores de variáveis financeiras. Ou seja, a perda como o ganho resultantes de uma situação não prevista. O perigo esta no fato de que os sistemas utilizados para a análise dos dados não foram capazes de prever o resultado real.

A grosso modo, podemos dividir o risco de mercado pelo comportamento das taxas de juros, do câmbio, dos preços das ações e dos preços das commodities. Uma das formas mais utilizadas para medir o devido risco relacionado é através da volatilidade observada nas situações inesperadas, que é o desvio padrão observado ou σ . O risco de mercado também vai depender de quem efetivamente está correndo esses riscos, suas motivações, suas razões, seus objetivos, os níveis onde operam, seus métodos e poder financeiro. Estes fatos são relacionados e influenciam na medida de risco que será utilizada.

Kevin Dowd faz um bom trabalho ao colocar a situação em seu contexto. Suponhamos uma situação de compra e venda de ações. Os situados dentro deste cenário seriam corretoras e outras firmas que lidam com o mesmo tipo de mercado. Estes operariam em curto prazo, com atividade no intervalo de três semanas a múltiplas operações em apenas um dia. A sofisticação de instrumentos para a avaliação do investimento varia muito para estas situações, indo da utilização dos métodos mais simples e comuns aos mais complicados. Também trabalhariam com métodos avançados de mensuração de risco.

Agora suponhamos um contexto de investimento, como muitos ativos bancários. Neste caso temos firmas operando a longo prazo, utilizando instrumentos que normalmente envolvem altos níveis de risco de crédito e a análise dos ativos se torna difícil pois os mercados secundários são poucos ou não existentes em muitos casos. Aqui os métodos de mensuração de risco são mais simples, é incomum que faça sua análise para os ativos relacionados. Existem outros contextos como o de títulos do tesouro, seguros etc. Cada um com um foco diferente e utilizando um método diferente para avaliar seus riscos.

Risco em geral pode ser definido como "a incerteza de resultados" (Jorion 2007) e é melhor medido em termos de distribuições de probabilidades. Que por sua vez tem raízes nos jogos de azar onde jogadores buscavam a melhor oportunidade de ganho ao utilizar matemática para reduzir seu risco. Datando o inicio da probabilidade em 1565.

6.1 Crise Mundial de 2008

A crise mundial de 2008 foi uma das maiores vistas até hoje, com repercussões que faliram países. Primeiro vamos falar sobre suas causas, uma combinação de fatores causados por vários erros de regulamentação do governo, pela má administração das empresas e pela insensata avidez do risco de Wall Street, segundo as conclusões de um inquérito federal. Em maio de 2009 o governo dos estados unidos ordenou a criação da comissão bipartidária, a intenção do Congresso e do presidente Barack Obama foi empreender um exame abrangente das causas da crise. O relatório final acusava o Banco Central Americano e outras agências reguladoras que permitiram uma mistura calamitosa: a concessão descuidada de empréstimos hipotecários, a excessiva combinação de instrumentos financeiros e as vendas de empréstimos a investidores, além das apostas arriscadas com títulos respaldados pelos empréstimos. O documento final não foi assinado por todos os membros, somente os seis nomeados pelos democratas endossaram o relatório final. Os outros quatro nomeados pelos republicanos publicaram documentos falando sobre pontos de discórdia com foco na política do governo que promoveu a compra da casa própria. Alguns profissionais da área também atribuem o estouro da bolha imobiliária aos gastos do governo com as duas guerras que enfraqueceram a economia americana.

Com medo da recessão o governo americano aprovou um pacote de US\$ 168 bilhões de estímulo, que incluiu o envio de cheques de restituição de impostos a milhões de cidadãos do país. A partir deste ponto a interferência governamental era frequente com a injeção de centenas de bilhões de dólares ao decorrer dos meses, um dos pontos mais criticados da resposta à crise e ponto de ataque contra o governo do presidente Bush.

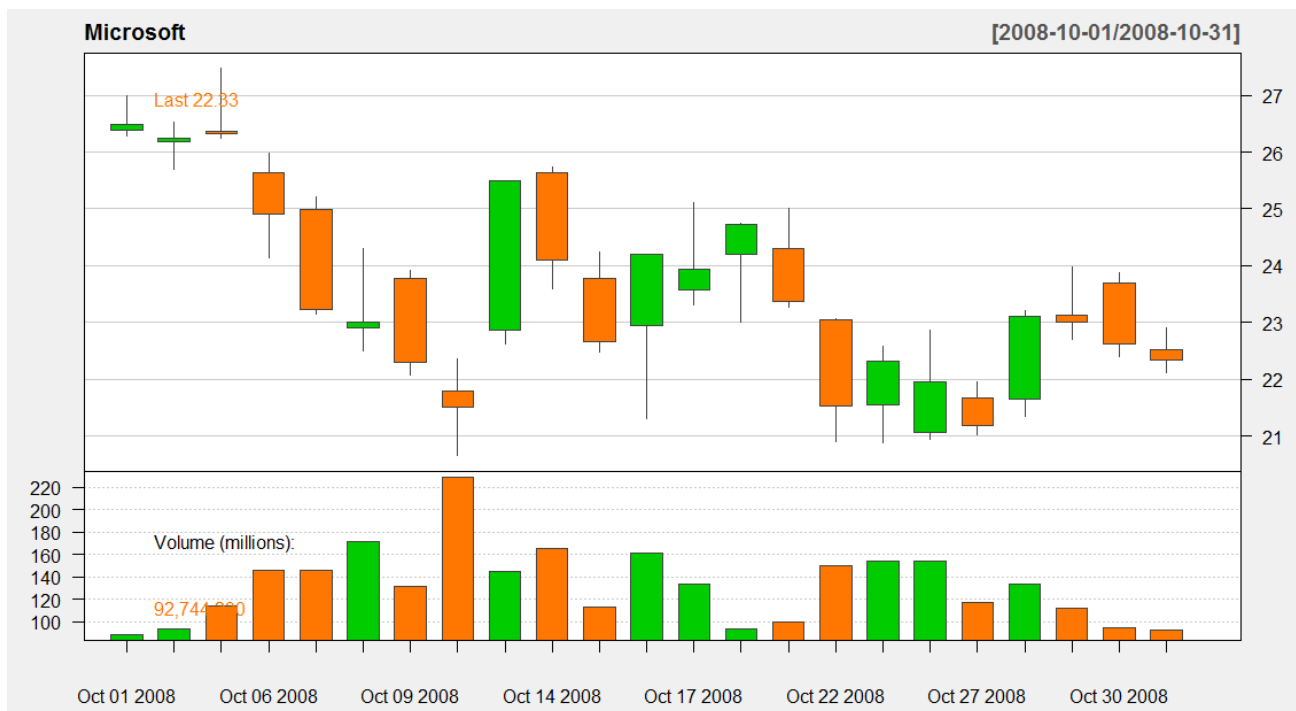
Como resultado a dívida americana saiu de controle. Nos últimos anos, essa situação criou a necessidade de elevar o limite de endividamento público do país, para que fosse possível pagar tal dívida. Isso levou a um prolongado embate político entre democratas e republicanos, que gerou enorme estresse nos mercados financeiros e levou a agência de classificação de risco S&P a rebaixar a nota de crédito americana. Altos índices de desemprego, desaceleração do crescimento econômico além da constante briga política sobre pacotes de estimulação de empregos e de mercado. A dívida imobiliária faliu muitas empresas. O banco Lehman Brothers representou uma das maiores quebras resultantes da crise, chegou a ser utilizado um pacote de estimulação de cinco anos para amenizar o impacto financeiro.

Os países Europeus foram os mais atingidos. A dívida criada durante a crise se tornou muito alta para alguns países da União Europeia, o problema veio à tona com mais intensidade em meados de 2011 e se tornou um dos maiores desafios que o bloco já enfrentou desde a adoção do Euro em 2002. Além da Grécia, países como Portugal, Irlanda, Itália e Espanha sofrem os efeitos do endividamento descontrolado e buscam apoio financeiro da zona do Euro e do Fundo Monetário Internacional. Desemprego, corte de benefícios sociais e aumento nas taxas de impostos assolam os países da Europa até hoje.

6.2 Aplicações do VaR

Em seu contexto o VaR poderia ser usado como critério de decisão quando avaliando a aplicação em uma devida ação. Nesta avaliação é feita uma análise financeira onde se estuda o cenário financeiro mundial, o comportamento do setor e por final um estudo da empresa da qual a ação pertence. Não faremos tal estudo, mas temos uma idéia geral do mercado mundial devido a seção anterior e também poderemos observar que o setor de tecnologia estava em ascensão.

Após a análise financeira é feita uma análise técnica, onde é feito o estudo das cotações. É nesta fase onde examinamos as tendências das ações no momento em que faremos a aplicação e as que esperamos no futuro. O gráfico de velas é o mais utilizado para a análise, para as ações da Microsoft temos o seguinte gráfico:



Neste caso podemos observar uma clara tendência de queda da cotação, mas quando avaliando um ativo é aconselhado ter em vista ao menos três horizontes. Por exemplo, se formos aplicar com foco diário na aplicação é costumeiro observar a movimentação diária, mensal e a anual. Na figura acima tomamos a observação mensal. Observaremos agora a anual.



Novamente é obvia tendência de queda. O que nos indica que a principio ao investimento nas ações da Microsoft nos teremos uma perda no período recente. Agora vamos um veremos 5 anos da ação.



Em longo prazo pode se esperar uma estabilidade no valor entre 25-30 apesar da formação na parte direita do gráfico apresentar uma indicação de queda e cria insegurança nos valores esperados. A formação é chamada de ombro cabeça ombro onde o ativo apresenta alta, estabilidade, alta, estabilidade, queda, estabilidade, queda.

Após todo este processo o VaR é calculado para estimar o Máximo que pode ser perdido quando aplicando na ação desejada. vejamos outro exemplo de (Moretin, 2011).

Exemplo 6.1. Dada uma probabilidade de 5%, o VaR para o dia seguinte será $(1,65)(\sigma_{t+1})$. Para os próximos k dias teremos então que

$$\text{VaR}[k] = \sqrt{k}(1,65)(\sigma_{t+1})$$

que é o 95th percentil de $\mathcal{N}(0, \sigma_{t+1})$, isso será melhor explicado na seção 7. Considerando o Exemplo 5.1 teremos então que o valor de perda potencial

$$\text{VaR} = (1,65)(\sigma_t) = \sqrt{k}(1,65)(0,46) = \sqrt{k} \times (0,759\%)$$

$$\text{Perda} = 100.000.000,00 \times \sqrt{k} \times (0,759\%) = \sqrt{k} \times (759.000,00)$$

Então se quisermos saber o quanto poderemos perder em 10 dias.

$$\text{Perda} = 100.000.000,00 \times \sqrt{10} \times (0,759\%) = 2.400.168,7440678$$

Quando enxergamos em um espectro financeiro empresarial nacional o VaR é de grande importância regulamentar tendo o fornecimento dos valores do VaR dos ativos de todas as empresas financeiras nacionais obrigatório ao Banco Central do Brasil para o calculo das taxas PRE, que regulamentam o valor em caixa que as empresas tem de possuir para que elas possam cobrir perdas repentinas e significativas que podem trazer sérios perigos econômicos a empresa. Conforme o artigo 6 da circular numero 3.498 publicado por (Banco Central do

Brasil, 2011) temos que o valor diário referente às parcelas P_{JUR} , P_{ACS} , P_{COM} e P_{CAM} do PRE, calculado por meio de modelos internos de risco de mercado, deve corresponder à seguinte fórmula:

$$P_{RM_t} = \max\{\max\{(M/60 \sum_{i=1}^{60} VaR_{t-i}), VaR_{t-1}\} + S_2 \times \max\{(M/60 \sum_{i=1}^{60} sVaR_{t-i}), sVaR_{t-1}\}, S_1 \times VPad_t\},$$

- PRM_t = valor diário referente ao conjunto das parcelas P_{JUR} , P_{ACS} , P_{COM} e P_{CAM} do PRE, para o dia útil t , calculado por meio de modelos internos de risco de mercado;
- VaR_t = valor em risco (VaR) do dia útil t ;
- $sVaR_t$ = VaR estressado do dia útil t ;
- M = multiplicador definido no art. 13;

a circular segue em anexo para maiores informações.

7 DISTRIBUIÇÃO NORMAL

Utilizamos a abordagem RiskMetrics que supõe normalidade para a distribuição condicional dos retornos com média 0 e variância σ_t^2 , ou seja

$$r_t | \mathcal{F}_{t-1} \sim \mathcal{N}(0, \sigma_t^2). \quad (5)$$

A grande questão, obviamente, concerne na estimação da volatilidade σ_t^2 que será feita à partir do famoso modelo de suavização EWMA (*exponential weighted moving average*)

$$\sigma_t^2 = \lambda \sigma_{t-1}^2 + (1 - \lambda) r_{t-1}^2, \quad 0 < \lambda < 1. \quad (6)$$

O método RiskMetrics afirma que λ possui valores entre 0,9 e 1, o que não é verdade conforme (Manteiga 2002) para a maioria das empresas brasileiras. Por isso adotaremos valores entre 0,83 e 0,91.

O λ pode ser escolhido minimizando o erro quadrático médio de ajuste ou previsão. Seja $\hat{\lambda}_i$ o valor ótimo para o i -ésimo ativo, e seja τ_i o correspondente valor do erro quadrático médio de uma carteira com m ativos. Se $\pi = \sum_{i=1}^m \tau_i$, os pesos para os ativos são obtidos por meio de $w_i = \frac{\Theta_i^{-1}}{\sum \Theta_i^{-1}}$, tendo $\Theta_i = \frac{\tau_i}{\pi}$. Com isso podemos estipular o valor ótimo como $\tilde{\lambda} = \sum_{i=1}^m w_i \hat{\lambda}_i$.

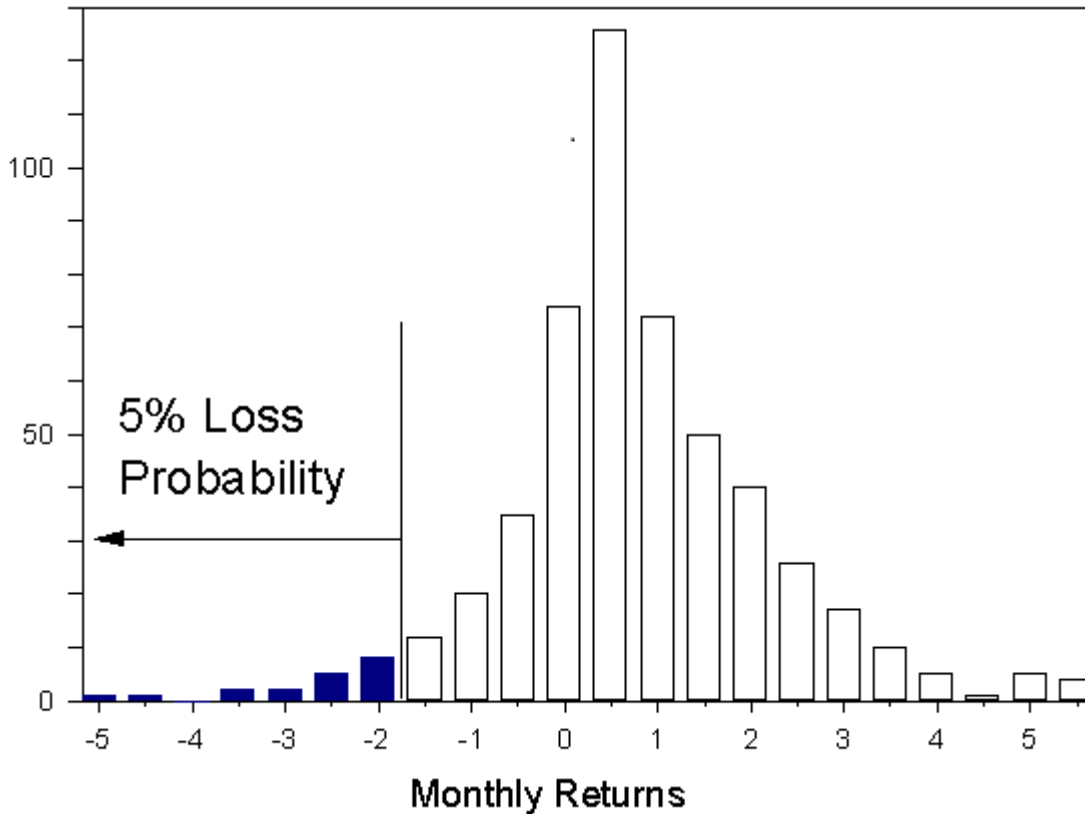
O log-retorno de k períodos ($r_i[k]$) do instante $t + 1$ ao instante $t + k$ é dado por

$$r_i[k] = r_{t+1} + r_{t+2} + \dots + r_{t+k},$$

de modo que podemos escrever

$$r_t[k] | \mathcal{F}_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma_t^2[k])$$

Note que para a distribuição normal o retorno possui distribuição simétrica com media 0. Isso faz com que a função de perda seja igual para a posição vendida e para a posição comprada.



Usualmente no cálculo da medida VaR, usa-se a volatilidade estimada em dias, mas nem sempre os dados são fornecidos neste formato levando a necessidade de um ajuste da volatilidade. Vamos supor uma volatilidade σ_y referente a um ativo medido por ano e suponha que precisamos da medida σ_d em dias. Assumindo 252 dias de movimento do ativo durante um ano teremos $\sigma_y = \sigma_d \sqrt{252}$. É comum que a volatilidade diária seja aproximadamente 6% da anual.

Uma das maneiras mais utilizadas para a estimação do VaR é a abordagem de construção de modelos. Vamos observar o caso para um único ativo, supondo que tenhamos 100 milhões investidos em uma ação que tem volatilidade diária de 2%, e conseqüentemente um desvio padrão da nossa ação de 200 mil. Estamos interessados em adquirir o VaR para uma posição de 10 dias e confiabilidade 99%.

É costumeiro assumir que a mudança do valor de uma variável de mercado seja aproximadamente zero, apesar de não ser sempre o caso. A mudança do preço de mercado costuma ser menor que a volatilidade do ativo, veja por exemplo que se nossa ação tiver um retorno esperado de 20% no final do ano, em um dia o retorno será $0,2/252 = 0,08\%$ com o desvio padrão de 2% e em 10 dias teremos

$$r_{10} = 0,08 \times 10 = 0,8\%$$

$$\sigma_{10} = 0,2\sqrt{10} = 6,3\%$$

Assumindo que nossa ação tenha seus retornos, r_t , distribuídos como uma normal teremos para uma confiabilidade de 99%, com o valor do quantil de 99% de confiabilidade sendo 2,33, que nosso VaR para um dia será dado por

$$\text{VaR} = 2,33 \times 200.000 = 466.000$$

Isso indica que com 99% de confiabilidade o retorno não será menor que 2,33 vezes o desvio padrão e que a perda máxima será que 466 mil no espaço de um dia. Fazendo o cálculo para dez dias seu VaR será

$$\text{VaR} = 466.000 \times \sqrt{10} = 1.473.621$$

Consideremos agora que possuímos 10 milhões investidos em uma ação A e 5 milhões em uma ação B onde a medida VaR para um dia de A será

$$\text{VaR} = 2,33 \times 200.000 = 466.000$$

e para dez dias será

$$\text{VaR} = 466.000 \times \sqrt{10} = 1.473.621.$$

Da mesma forma, o VaR para a ação B para um dia é

$$\text{VaR} = 2,33 \times 50.000 = 116.500$$

e para dez dias é

$$\text{VaR} = 116.500 \times \sqrt{10} = 368.405$$

Agora suponha que $r_{a,t}$ e $r_{b,t}$, os retornos das ações A e B , tenham distribuição normal bivariada com correlação de $\rho = 0,3$. Podemos encontrar a volatilidade conjunta à partir da seguinte equação

$$\sigma_{A+B} = \sqrt{\sigma_A^2 + \sigma_B^2 + 2\rho\sigma_A\sigma_B} \quad (7)$$

aplicando a equação (7) nas nossas ações teremos a volatilidade relativa a um dia

$$\sigma_{A+B} = \sqrt{200.000^2 + 50.000^2 + 2 \times 0,3 \times 200.000 \times 50.000} = 220.227$$

Desta maneira o calculo do VaR pode ser feito para uma carteira com m ativos, no nosso caso o VaR com 99% de confiabilidade sera $220.227 \times 2,33 = 513.129$ para um dia e $513.129\sqrt{10} = 1.622.657$ para dez dias. Note que há diferença entre calcular a medida para as duas ações separadamente e de maneira conjunta.

$$\text{VaR}_A + \text{VaR}_B = 1.842.026 \neq 1.622.657 = \text{VaR}_{A+B}$$

A única maneira do VaR ser igual nas duas ocasiões é quando houver correlação perfeita entre as ações. Em qualquer outra situação parte da perda será reduzida por causa da diversificação.

7.1 Modelo Linear

Imagine uma carteira C com n ativos e suponha que possuímos q_i investido no ativo i , onde i pertence a C .

$$\Delta C = \sum_{i=1}^n q_i r_i \quad (8)$$

onde r_i é o retorno da ação i em um dia e ΔC é o valor total da mudança da carteira C .

Exemplo 7.1. Uma carteira de ações é constituída por ativos que iremos chamar A e B , com $q_1 = 10$ milhões e $q_2 = 5$ milhões a mudança do valor da carteira em um dia será

$$\Delta C = 10.000.000r_{1,1} + 5.000.000r_{2,1}$$

Onde $r_{1,1}$ e $r_{2,1}$ são os retornos das ações A e B no primeiro dia.

ΔC terá uma distribuição normal se considerarmos que r_i em (8) seja normal multivariada, nesse caso teremos que achar a média e o desvio padrão de ΔC para calcular o VaR.

Para acharmos a média do valor da carteira podemos supor r_i com média zero, como previamente estipulado, desta maneira a media de ΔC também será zero. Agora nos falta encontrar o desvio padrão. Consideremos que σ_i seja a volatilidade do ativo i no dia um e que ρ_{ij} seja a correlação entre o ativo i e o j , desse modo a variância de ΔC é dada por

$$\sigma_C^2 = \sum_{i=1}^n q_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j<i}^n \rho_{ij} q_i q_j \sigma_i \sigma_j \quad (9)$$

A volatilidade de k dias da carteira será $\sigma_C \sqrt{k}$.

Exemplo 7.2. Usando os ativos do exemplo anterior, com A e B tendo suas volatilidades dadas por $\sigma_1 = 0,02$ e $\sigma_2 = 0,01$ respectivamente, a correlação entre elas $\rho_{1,2} = 0,3$ teremos a variância é

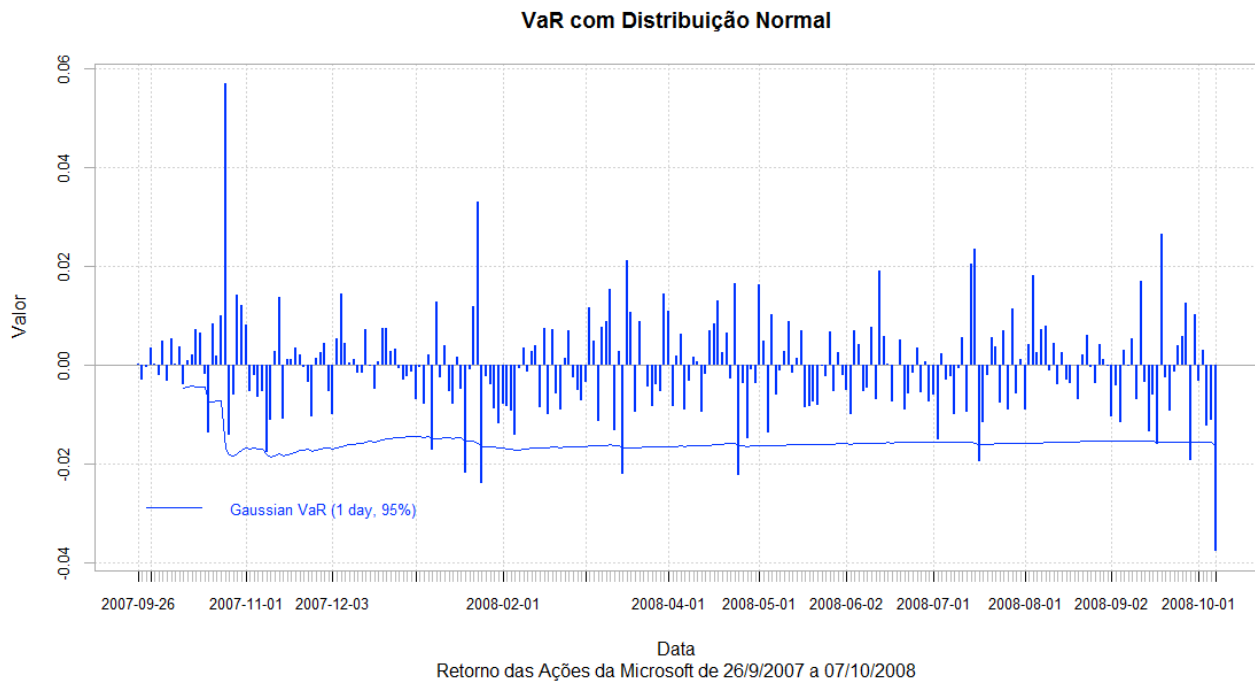
$$\sigma_C^2 = (10 \times 10^6)^2 \times 0,02^2 + (5 \times 10^6)^2 \times 0,01^2 + 2 \times 10 \times 10^6 \times 5 \times 10^6 \times 0,3 \times 0,02 \times 0,01 = 48,5 \times 10^6$$

A volatilidade de C será $\sigma_C = \sqrt{0,0485} = 220.000$ e o VaR para 10 dias com 99% de confiança

$$\text{VaR} = 2,33 \times 220.000 \times \sqrt{10} = 1.620.983$$

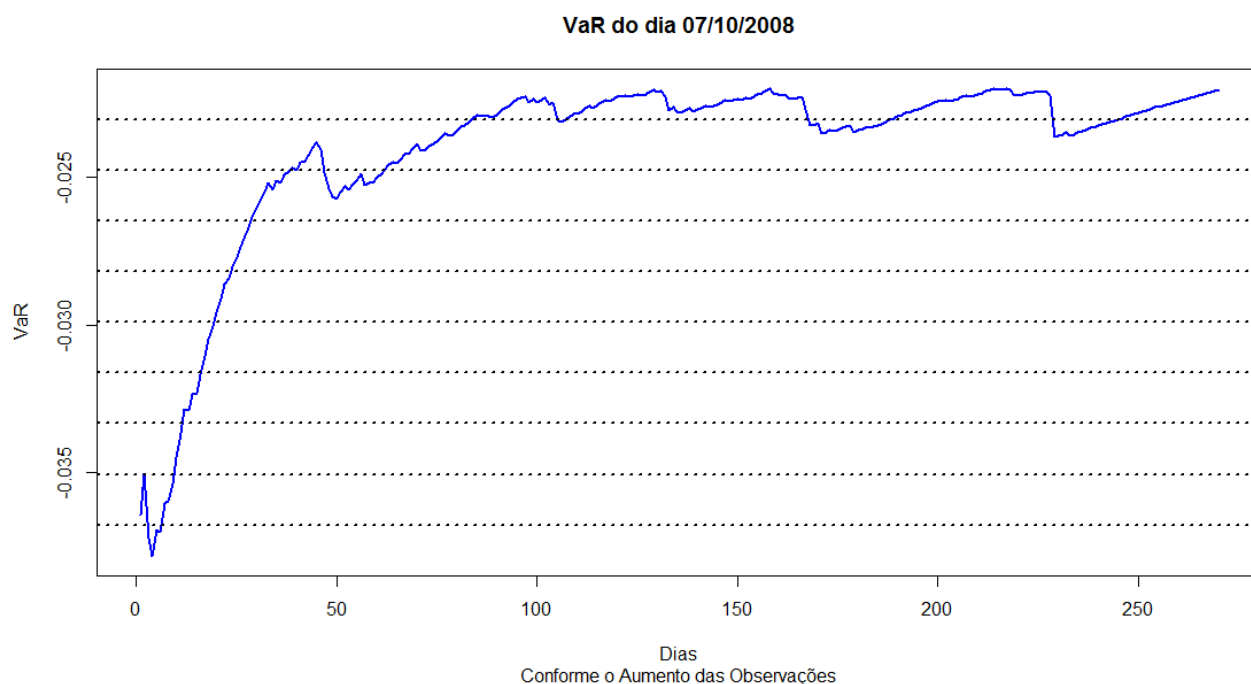
7.2 Aplicação na Distribuição Normal

Utilizando a o calculo pela normal mencionado anteriormente aplicaremos o VaR a nossa distribuição se retornos da Microsoft para o maior retorno negativo observado durante a crise.

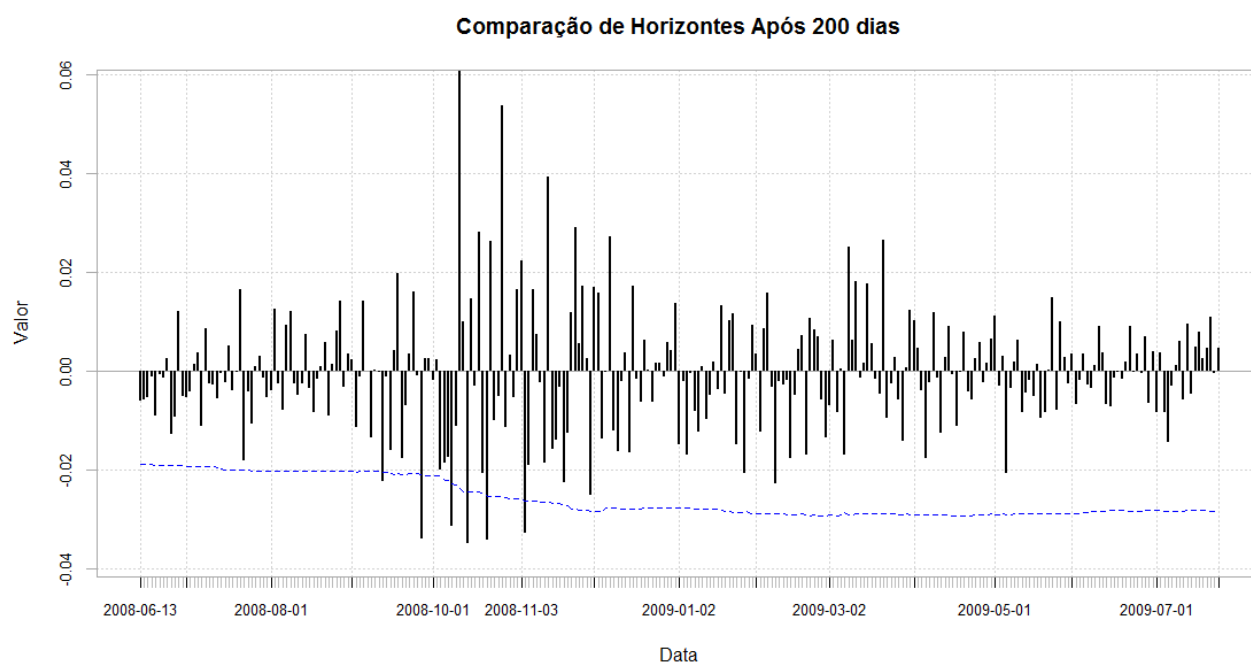


A figura acima mostra o calculo do VaR a partir do dia 08/10/2007 até o dia 07/10/2008. onde o VaR é calculado diariamente e o horizonte utilizado cresce conforme os dias observados.

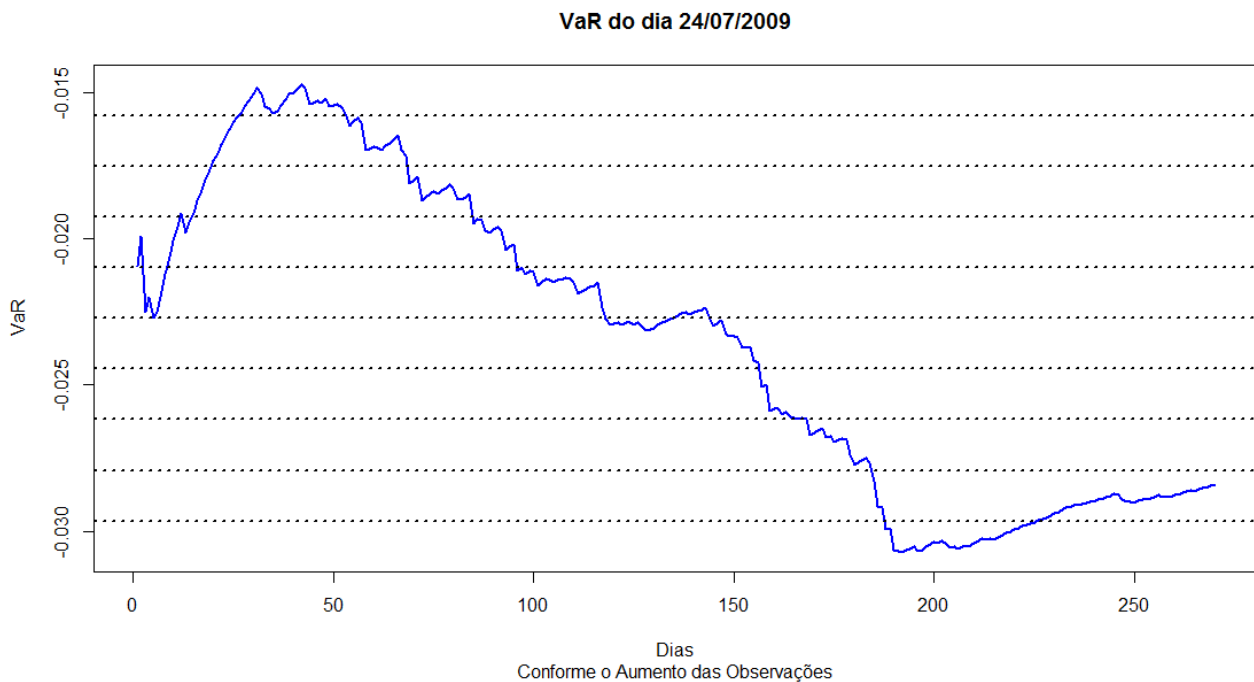
Para a medida usualmente é utilizado o equivalente a um ano de observações, que neste caso nos fornece o var de (-0.02315209) quando a perda do dia foi de (-0.037757) , mas o que aconteceria se utilizarmos horizontes diferentes para o cálculo do VaR do dia desejado?



O valor com apenas 10 dias observados (-0.03728172) é muito mais próximo do real (-0.037757) , sendo que o maior VaR para a data foi de (-0.03786265) com 14 observações. Isso nos trás a questão, vale a pena calcular grandes intervalos de tempo sendo que os valores mais próximos foram os com pequenos intervalos? Vejamos o valor da medida após 200 dias.

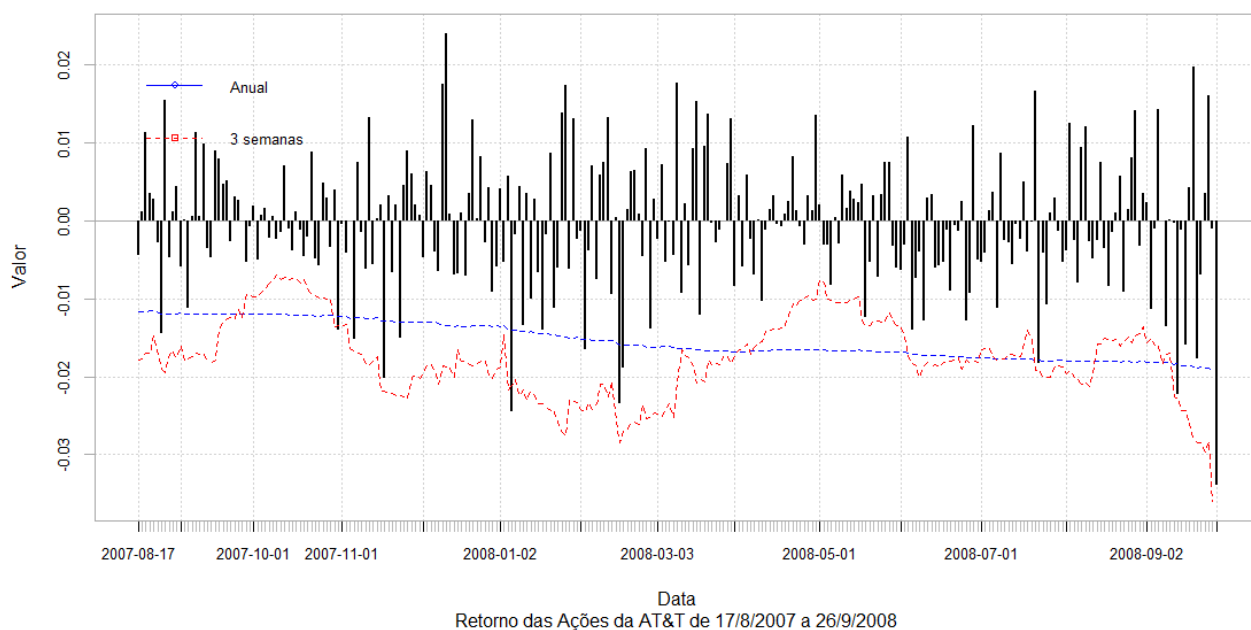


Devido a crise o VaR futuro do ativo tem o valor maior numa situação de normalidade, no caso da Microsoft (-0.02890673).



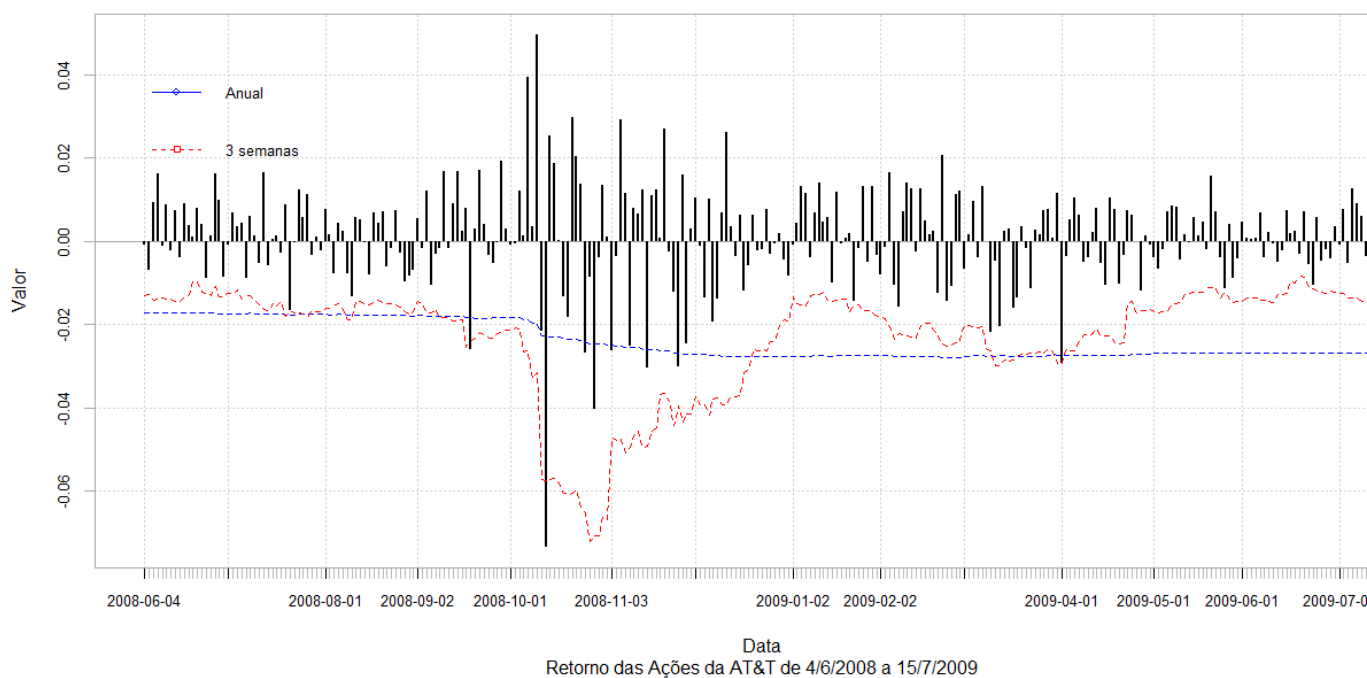
Podemos notar na figura acima a situação oposta a que vimos anteriormente. Agora devido a volatilidade passada, a medida tende a diminuir conforme o crescimento do horizonte utilizado. Isso ocorre devido à forma de estimação da volatilidade, pela equação (6) no modelo EWMA os pesos alocados aos retornos não possibilitam a detecção de grandes perdas. Vejamos o exemplo abaixo. Aqui temos os retornos da empresa AT&T, a linha azul representa o VaR calculado com 280 observações (aproximadamente um ano em dias uteis) e a linha vermelha representa o VaR calculado com 15 observações (três semanas).

Comparação de Horizontes



Devido ao maior peso das observações mais recentes o VaR com apenas 15 dias de observações foi capaz de se adaptar mais rápido as perturbações dos retornos enquanto o anual apresentou um leve crescimento que não acompanhou as grandes alterações dos retornos.

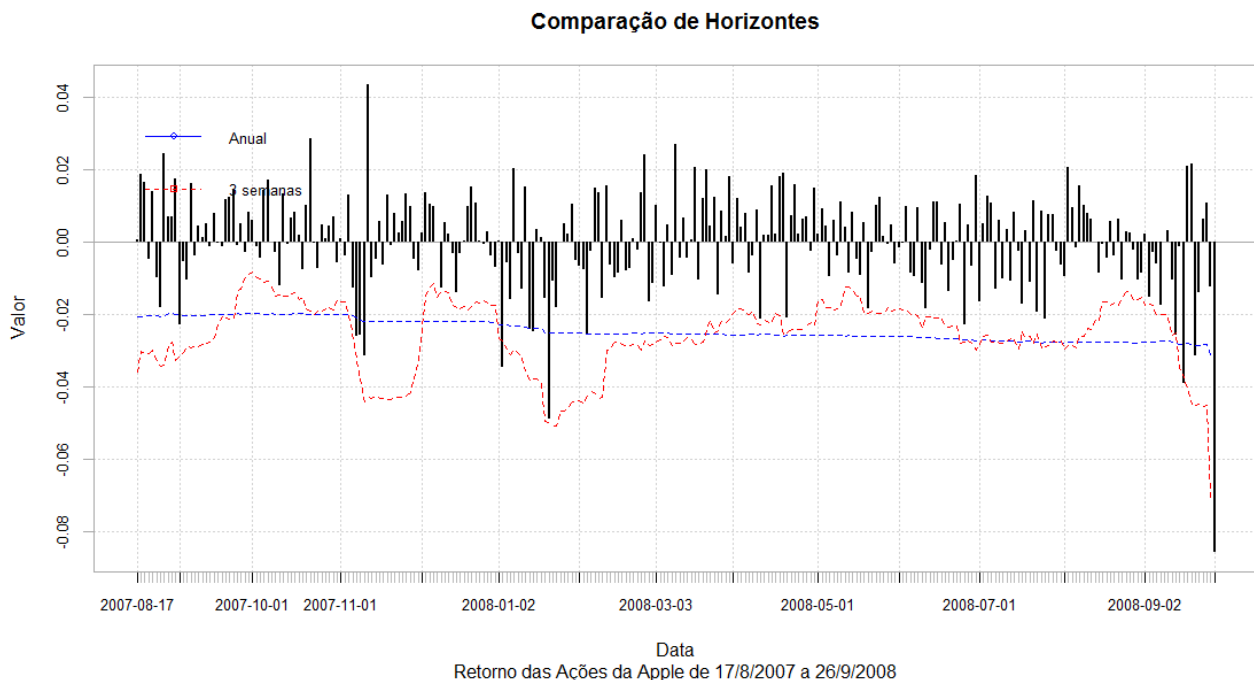
Comparação de Horizontes Após 200 dias



Observando novamente a mesma ação e as mesmas medidas com 200 dias a mais a medida anual se apresenta estável e sempre abaixo dos retornos observados após a crise

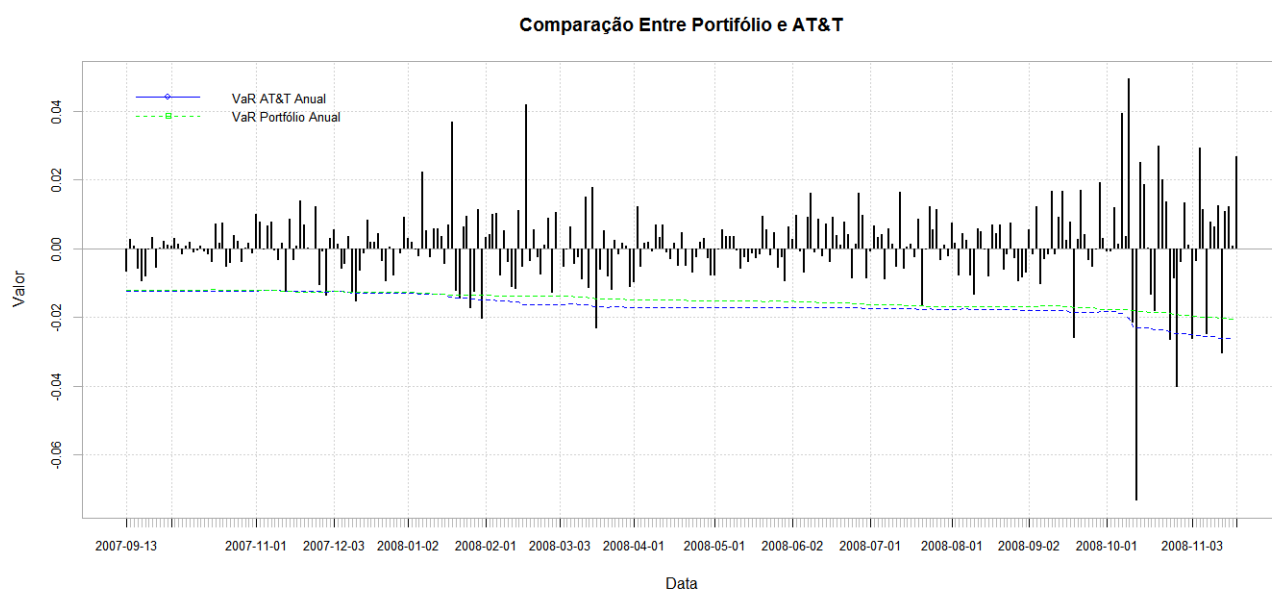
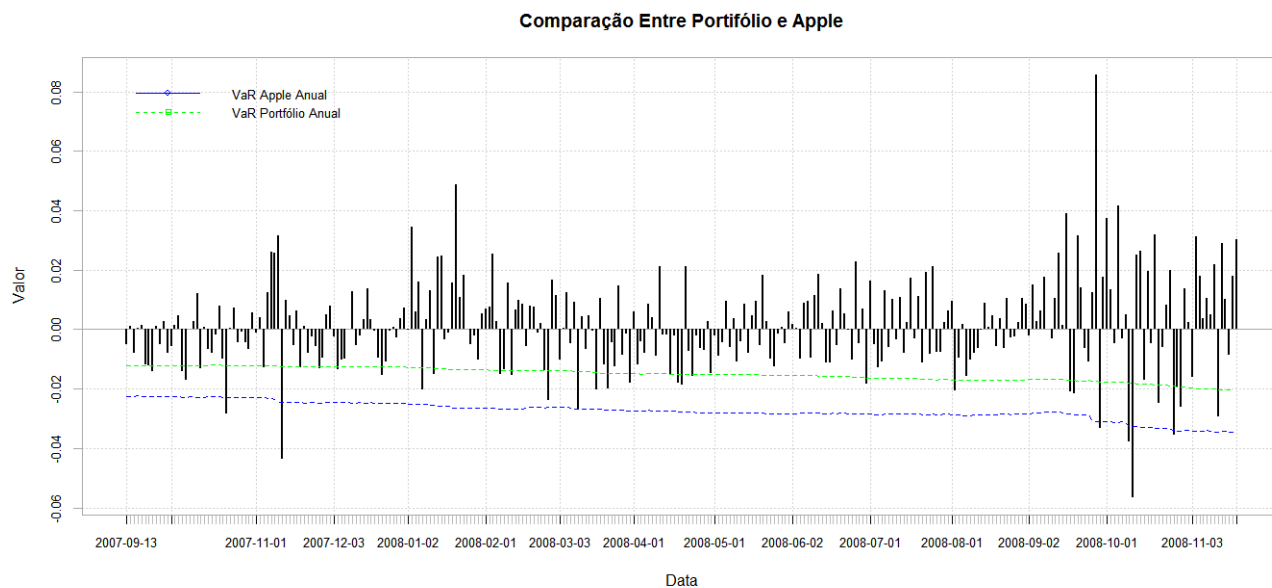
enquanto a de quinze dias modifica com frequência e chega a apresentar valores abaixo dos observados. A estabilidade do VaR pode ser um fator a se considerar tendo que a medida só pode se calculada com valores já observados, assim a única maneira de se ter uma noção do valor da medida amanhã ($t+1$) temos de avaliar pela medida de hoje (t) onde o $\sigma_{t+k} = \sigma_t \times \sqrt{k}$.

Nos dados relacionados com as ações da empresa Apple temos um comportamento similar as ações mencionadas anteriormente. Podemos ver mais claramente uma das maiores falhas da medida quando utilizamos poucas observações.



Quando existem retornos com aumento progressivo, a medida consegue acompanhar bem os grandes picos, mesmo que a progressão seja rápida, porém se o retorno for repentinamente alto, sem nenhuma indicação de crescimento, a medida irá falhar.

Utilizando este mesmo método podemos medir o valor do ativo e o valor da carteira. Supomos uma carteira com as nossas duas ações, AT&T com 5000 reais investidos e Apple com 3000 investidos. Calculando a medida para o portfólio temos a seguinte medida.



Comparando os gráficos temos que o VaR do portfólio é maior do que o observado para as ações da AT&T, mas menor quando comparando com as ações da Apple. Em 19/11/2008 utilizando um ano de observações temos as seguintes medidas de VaR:

- Microsoft com (-0.02569872),
- AT&T com (-0.02618953)e
- Apple com (-0.03448748).

E seus respectivos σ .

- Microsoft com (0.01035555),

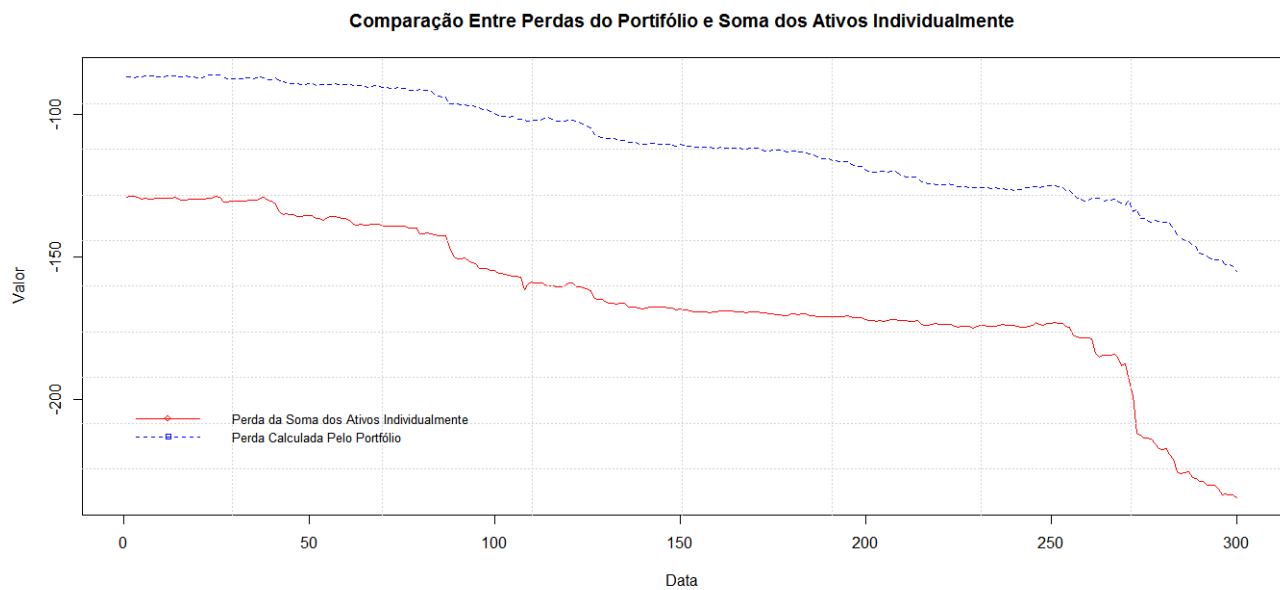
- AT&T com (0.01031949) e
- Apple com (0.01444003).

assim teríamos conforme a equação (9) perda de

$$\text{Valor da Soma dos VaR} = (-0.02618953)5000 + (-0.03448748)3000 = -234.4101$$

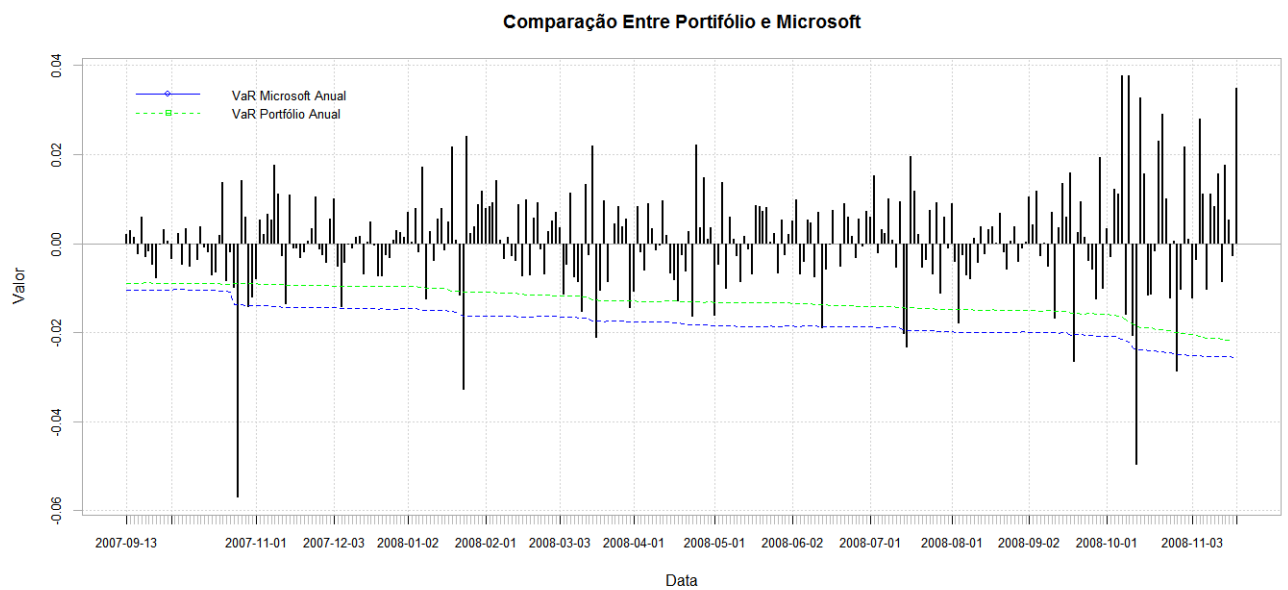
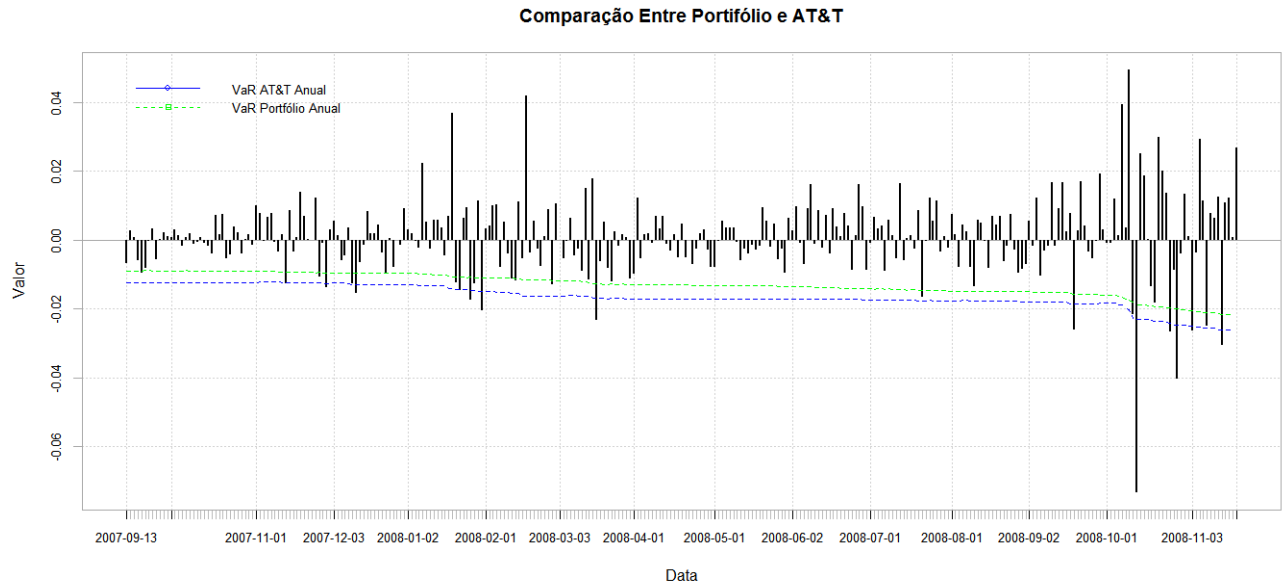
$$\begin{aligned} \text{Valor do } \sigma \text{ do portfólio} &= \sqrt{(0.01031949)^2 5000^2 + (0.01444003)^2 3000^2} \\ &\sqrt{+2 \times (-0.02380435)(0.01031949)(0.01444003) \times 3000 \times 5000} = 66.57711 \end{aligned}$$

$$\text{Valor do VaR do portfólio} = 66.57711 \times 2.33 \times (-1) = -155.1247$$



Como vimos no exemplo (7.2).

O valor do risco conjunto é menor, quando medido com um portfólio o VaR dos ativos mais seguros e suas correlações compensam pelos ativos de alto risco. É de se esperar que pelo menos um dos valores no portfólio tenha o valor do VaR menor que o valor de um dos ativos em algum momento, isso fica mais claro na comparação seguinte.



Ao fazermos um portfólio com os dois extremos calculados para nossa medida, Microsoft com 3000 investidos e AT&T com 5000 investidos, podemos ver claramente a vantagem de usar. Aplicando nesse novo portfólio temos um VaR que de certa forma balanceia o risco ao estimar a o desvio padrão conjunto para o portfólio, deixando o valor da medida menor quando comparado a Microsoft e AT&T separadamente. Calculando novamente o VaR para 19/11/2008 conforme a equação (9) utilizando um ano de observações temos:

$$\text{Valor do } \sigma \text{ do portfólio} = \sqrt{(0.01031949)^2 5000^2 + (0.01035555)^2 3000^2}$$

$$\sqrt{+2 \times (0.6530068)(0.01031949)(0.01035555) \times 3000 \times 5000} = 75.63677$$

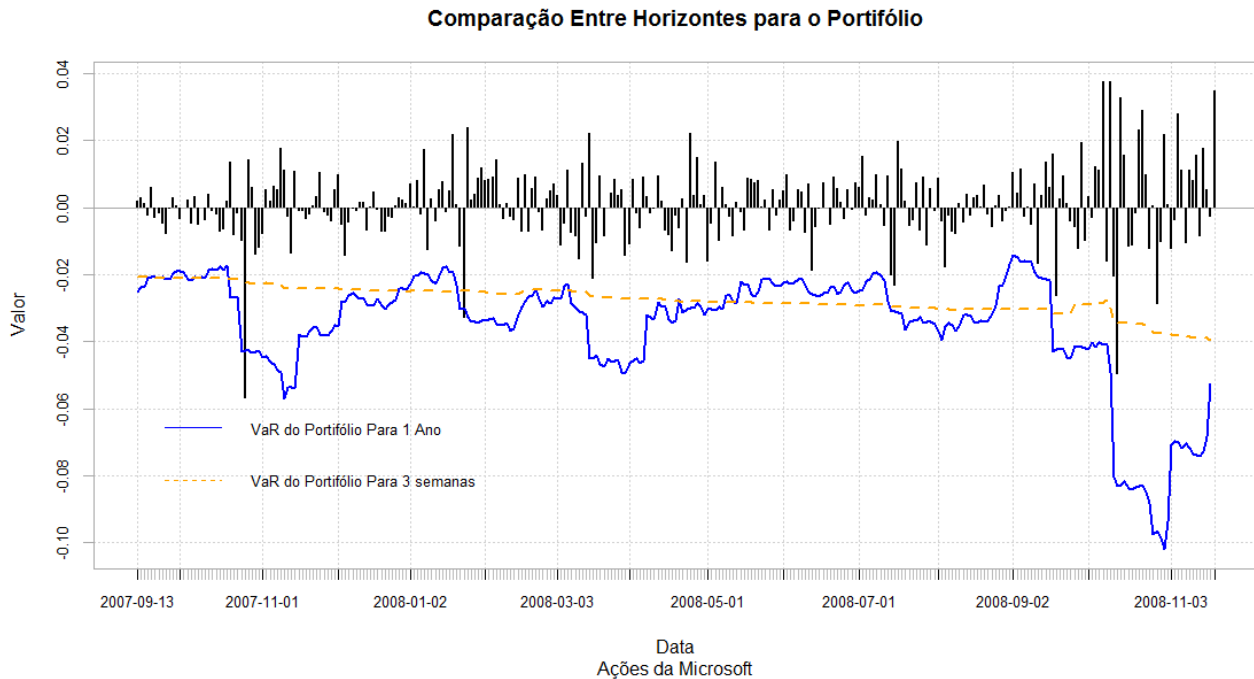
$$\text{Valor do VaR do portfólio} = 75.63677 \times 2.33 \times (-1) = -176.2337$$

Note que

$$\text{Valor do VaR da Microsoft} = 8000 \times (-0.02569872) = -205.5898$$

$$\text{Valor do VaR da AT\&T} = 8000 \times (-0.02618953) = -209.5162$$

Tendo 8000 como a soma de todo o investimento, vemos que ambos os valores dos VaRs dos ativos foram menores do que a medida do portfólio. Demonstrando o benefício causado pela diversificação.



O comportamento das linhas é semelhante aos observados nos ativos individualmente quando comparamos quantidades de observação. Apesar da soma de duas normais não ser necessariamente uma normal é razoável assumir que possui um comportamento parecido com o Var utilizando poucas observações das ações individualmente.

8 VALORES EXTREMOS

Segundo (Moretin, 2011), se existirem seqüências de constantes $\{a_T > 0\}$ e $\{b_T\}$ tal que r_T convirja para uma distribuição $G(z)$ quando $T \rightarrow \infty$, com G não-degenerada, então G pertence a uma das famílias:

- Tipo I de Gumbel:

$$G(z) = \exp \{ - \exp [- (z - b) / a] \}, \quad -\infty < z < +\infty$$

- Tipo II de Fréchet:

$$G(z) = \begin{cases} 0, & \text{se } z \leq b \\ \exp \{ - [(z - b) / a]^{-\alpha} \}, & \text{se } z > b \end{cases}$$

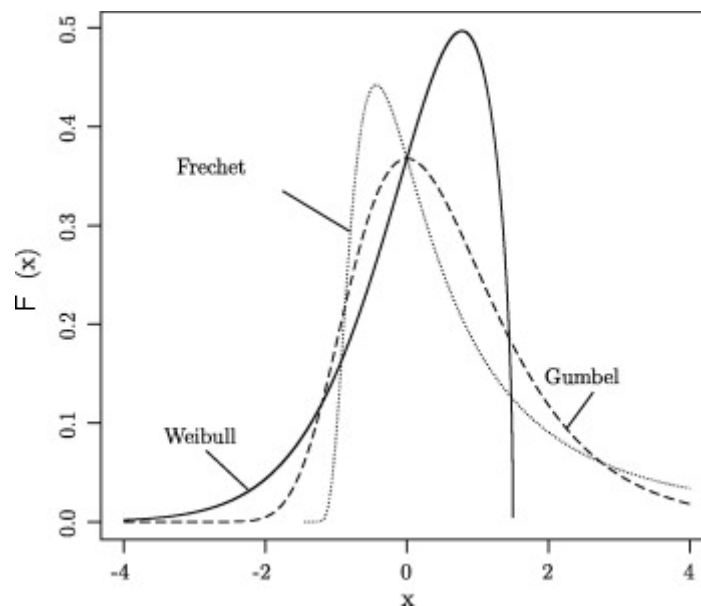
- Tipo III de Weibull:

$$G(z) = \begin{cases} \exp [- [- (z - b) / a]^\alpha], & \text{se } z < b \\ 1, & \text{se } z \geq b \end{cases}$$

Os três tipos podem ser escritas numa unica forma:

$$G(z) = \exp \left\{ - \exp \left[1 + \xi \left(\frac{z - \mu}{\sigma} \right)^{-1/\xi} \right] \right\} \quad (10)$$

definida em $\{z : 1 + \xi(z - \mu)/\sigma > 0\}$, com $-\infty < \mu < +\infty$, $\sigma > 0$ e $-\infty < \xi < +\infty$. Esta equação tem o nome de GVE (família generalizada de valores extremos) sendo μ o parâmetro de posição, σ o parâmetro de escala e ξ o parâmetro de forma. A família será determinada por ξ , onde para $\xi = 0$ teremos uma distribuição tipo I, para $\xi > 0$ tipo II e para $\xi < 0$ tipo III.



Para aplicarmos a teoria dos valores extremos (TVE) iremos nos focar nos máximos e nos mínimos dos retornos. Dada as estatísticas de ordem $r_{(1)} \leq r_{(2)} \leq \dots \leq r_{(T)}$ o mínimo será $r_{(1)} = \min(r_1, \dots, r_T)$, que é relevante para ativos na posição comprada e o máximo será $r_{(T)} = \max(r_1, \dots, r_T)$, que é relevante para posição vendida de um ativo. Estamos interessados nos valores mais altos ou baixos dos retornos para que possamos calcular o quanto poderíamos perder em um certo ativo no pior dos casos. Mesmo que os retornos sejam dependentes os consideramos independentes para que possamos aplicar o método. Primeiramente, queremos obter a distribuição limite (aproximado) para o máximo normalizado

$$f_T = \frac{r_{(T)} - b_T}{a_t} \quad (11)$$

Suponha que os retornos independentes com distribuição F, se existirem sequências como r_T , tenha distribuição que convirja para $G(z)$ então G pertence a uma das três famílias.

Com isso seguiremos os seguintes passos para que o procedimento possa ser realizado:

1. dividimos a série observada de retornos em m blocos de tamanho n ;
2. obtemos o máximo de cada bloco e ajustamos uma distribuição GVE para ele;
3. estimamos os quantis da distribuição e calculamos o VaR.

Para dados financeiros e cálculo de risco usaremos em principio Frécher que inclui uma distribuição estável t-student. Para estimarmos os quantis usaremos a função de probabilidade de densidade

$$f(x) = \begin{cases} \mu_n - \frac{\sigma_n}{\xi_n} \{1 - [-n \log(1 - p)]^{-\xi_n}\} & \text{se } \xi \neq 0 \\ \mu_n - \sigma_n \log[-n \log(1 - p)] & \text{se } \xi = 0 \end{cases} \quad (12)$$

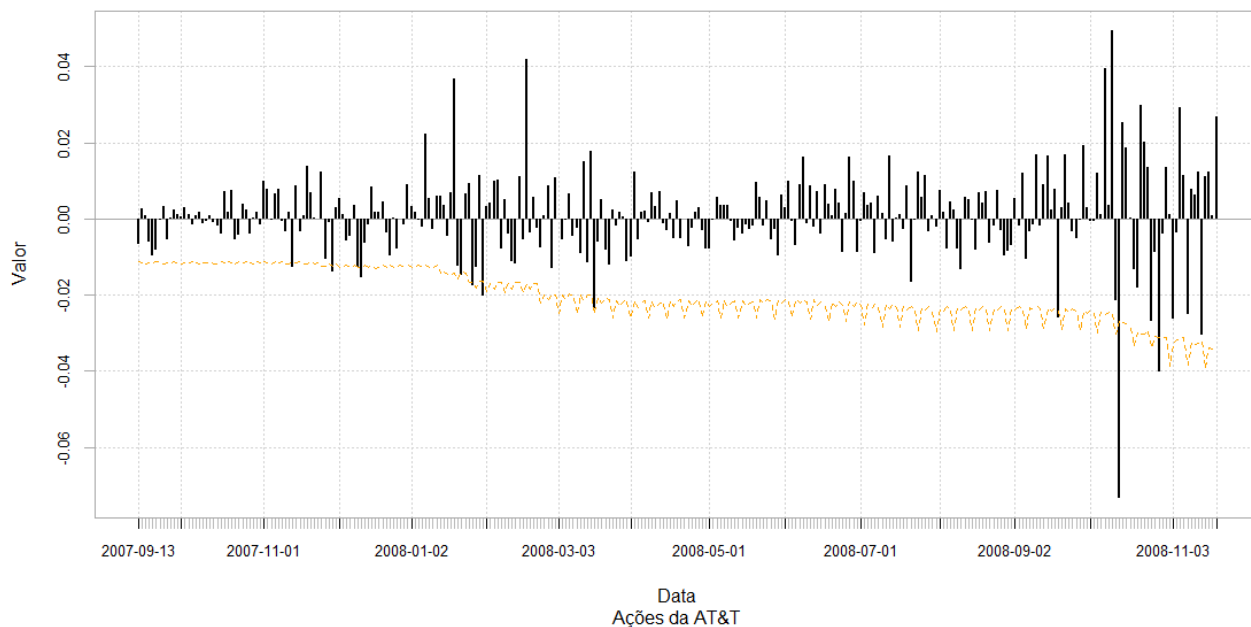
Sendo $x = (z - b)/a$, esta função pode ser encontrada a partir da equação (10). Onde $-\infty < x < \infty$ para $\xi = 0$, $x < -1/\xi$ para $\xi < 0$ e $x > -1/\xi$ para $\xi > 0$.

A teoria dos valores extremos mencionada tem duas implicações importantes. Em primeiro lugar, o comportamento da cauda da função de distribuição acumulada $F(x)$ de r_t , não a distribuição específica, determina a limitação à distribuição de função de distribuição acumulada do máximo (normalizado). Assim, a teoria é em geral, aplicável a uma grande variedade de distribuições de regressão para o retorno r_t .

8.1 Aplicação da Teoria dos Valores Extremos

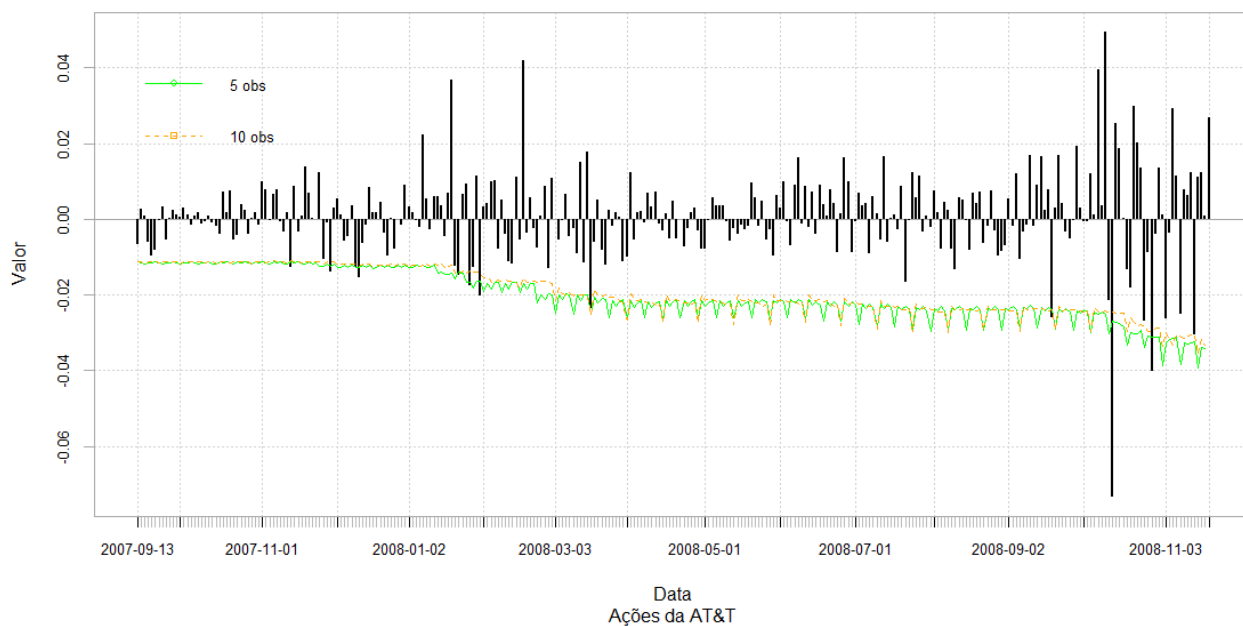
A primeira questão que vem à cabeça quando olhamos o método dos valores extremos é quantidade. Quantas observações para cada bloco e quantas repetições de tais blocos nos forneceram a melhor estimativa para a nossa medida? Vamos começar então com blocos separados por semana, cinco observações, no período de um ano ($n = 5, m = 52$).

VaR para o Método Valores Extremos com Blocos de 5 obs



Notasse imediatamente a formação de sazonalidade na medida, com o mesmo intervalo dos blocos e que aparenta ter maior variação quando os retornos apresentam diferenças significantes. A medida em si aparenta se comportar muito bem, tem uma relativa estabilidade, mas também se ajusta com as variações significantes das observações e possui na maioria do tempo pelo menos o maior ponto de sua sazonalidade acima dos retornos críticos. Vejamos agora quando utilizamos 10 observações para repetição dos blocos ($n = 10, m = 26$).

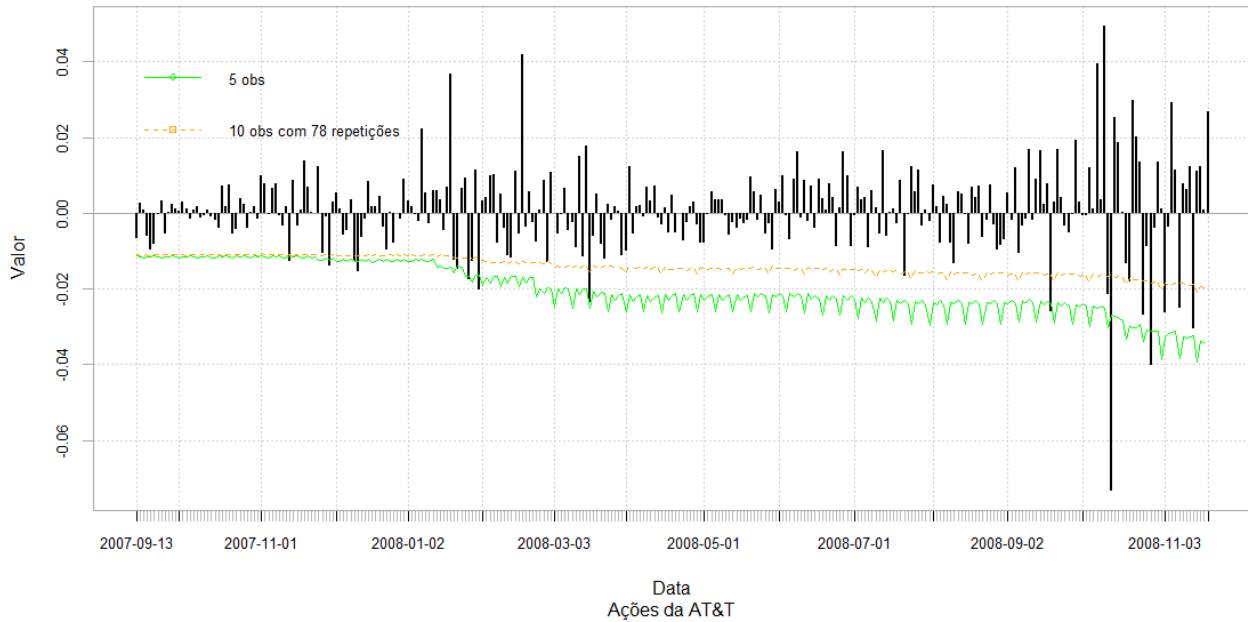
VaR Utilizando o Métodos de Valores Extremos



A única diferença aparente é que o nosso novo caso apresenta menor capacidade de

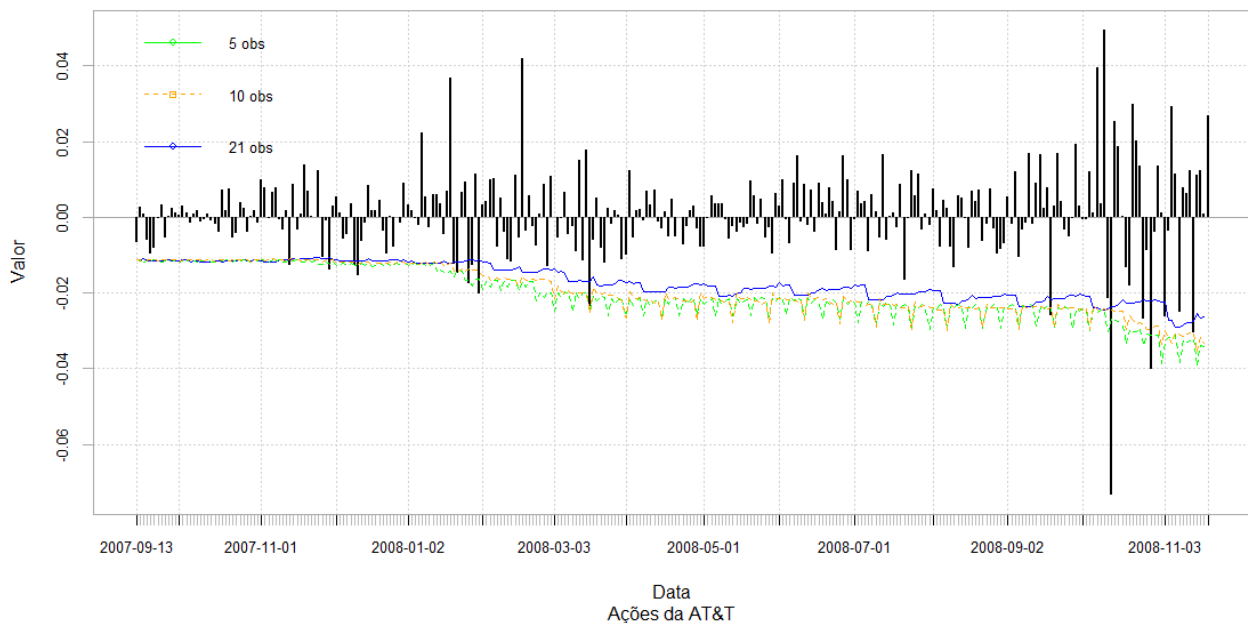
adaptação aos retornos incomuns quando utilizando 10 observações. Quando utilizamos apenas uma semana não podemos utilizar mais de um ano devido a alguns blocos tornarem incapaz o cálculo da matriz hessiana quando ajustando para a distribuição GVE. O mesmo não acontece quando utilizando duas semanas, assim podemos ter o equivalente de três anos de repetições ($n = 10, m = 78$).

VaR Utilizando o Métodos de Valores Extremos Com 3 Anos Observados

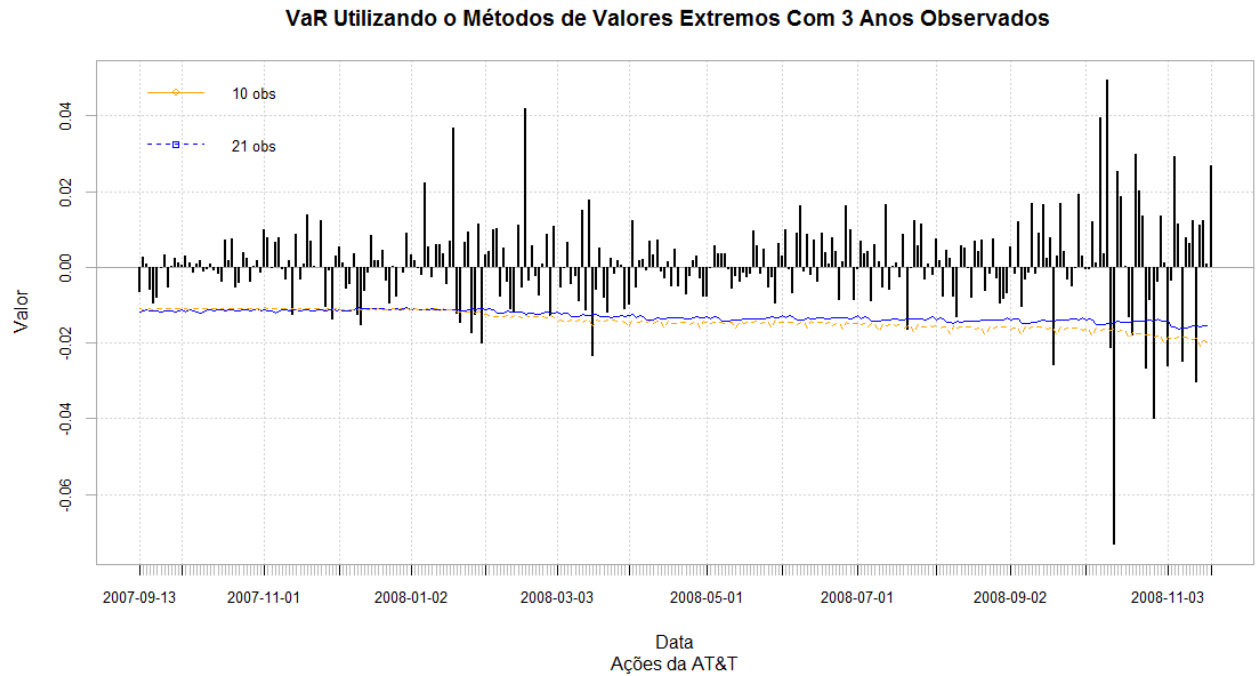


A medida se tornou mais estável, com a sazonalidade variando menos e com influências significativamente mais baixas que as observadas anteriormente. Vamos aumentar novamente o tamanho do nosso bloco para um mês ($n = 21, m = 14$).

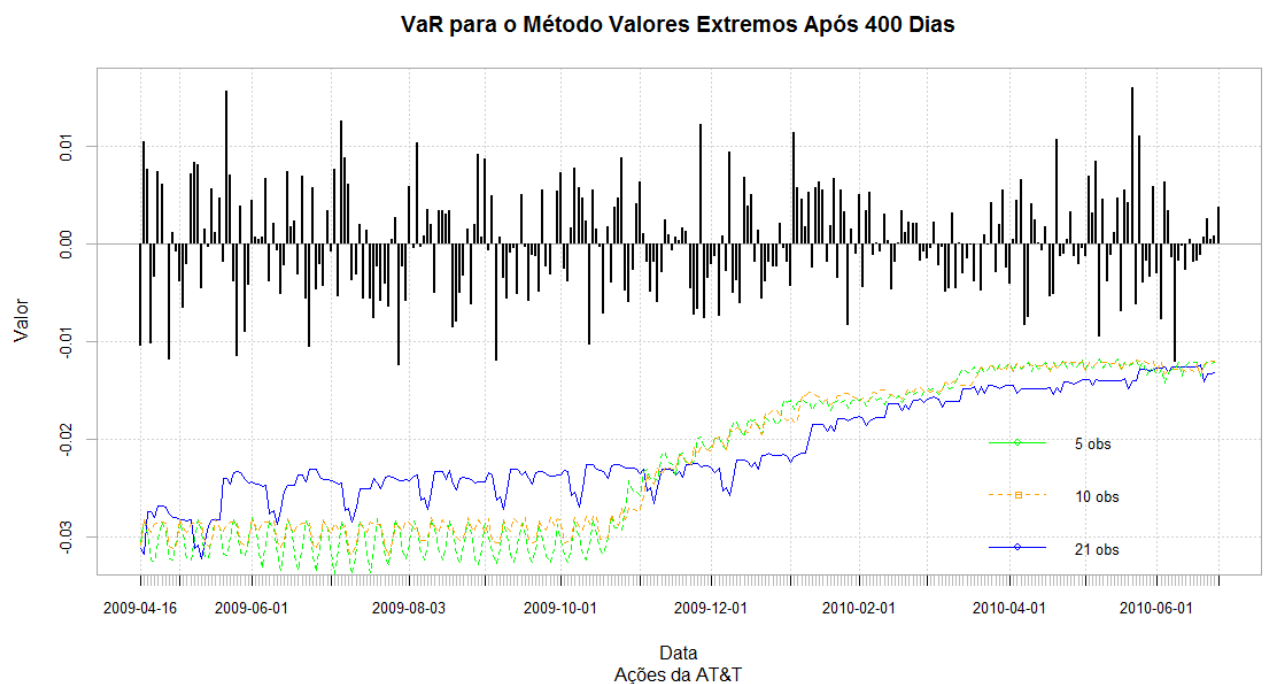
VaR Utilizando o Métodos de Valores Extremos



Novamente a medida sofre os mesmos efeitos que anteriormente. Algo interessante a notar é a clara existência da sazonalidade nos resultados do VaR, note como as ondas se encaixam umas nas outras. Vejamos agora uma comparação entre as medidas com três anos de observações ($n = 21, m = 42$).

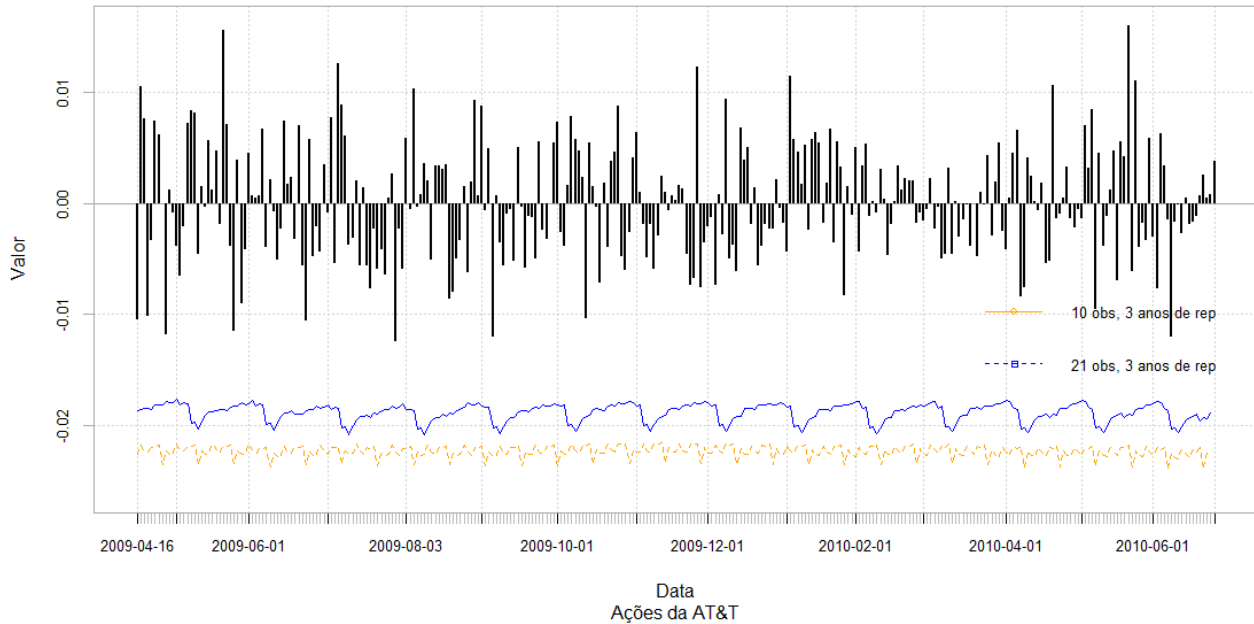


Com esta comparação fica bem claro que blocos menores se ajustam melhor a o ativo, sendo a questão então de quantas observações você necessita para tornar seu calculo possível. Vejamos agora como as mesmas medidas se comportam após quatrocentos dias.



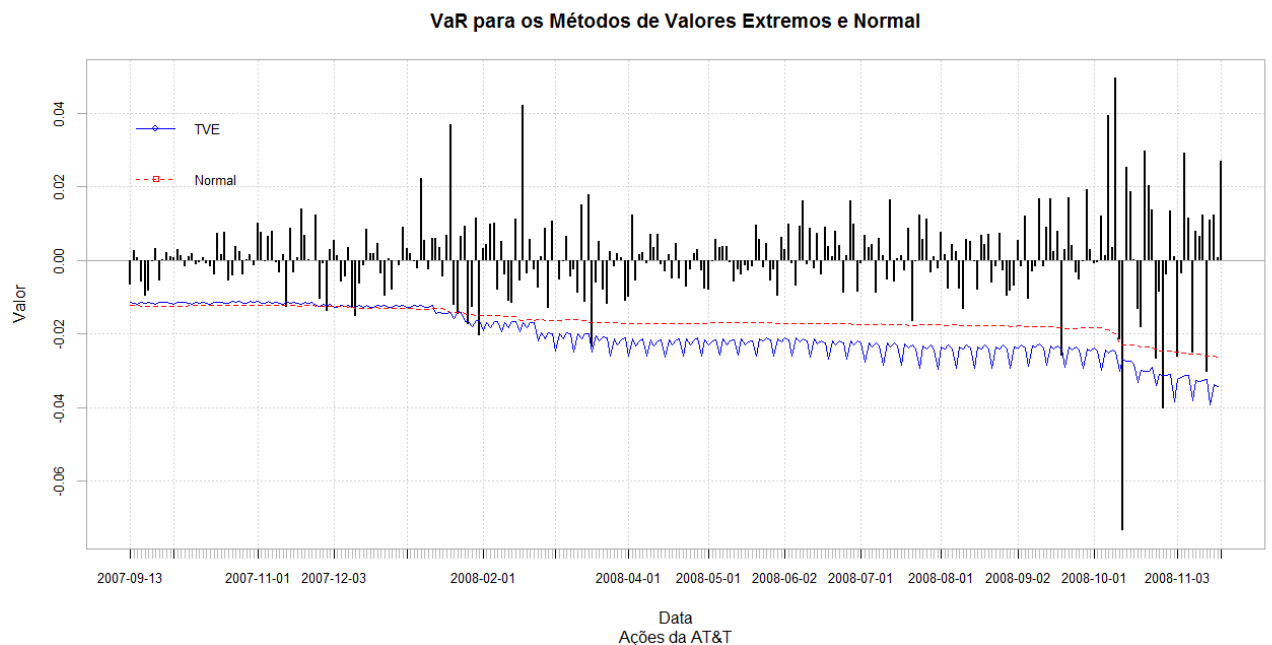
Podemos notar novamente como o VaR medido com 21 observações demora a se adaptar a mudanças nos retornos. A neste gráfico acima temos o momento onde as medidas param de contabilizar a crise e se unem em um valor próximo de (-0.013) . É de se esperar que a medida com maior quantidade de observações esta mantendo valores mais elevados próximo de $(-0,02)$ que pelo principio do conservadorismo seria o usado para este ativo.

VaR para o Método Valores Extremos Após 400 Dias



9 COMPARAÇÃO DE MODELOS

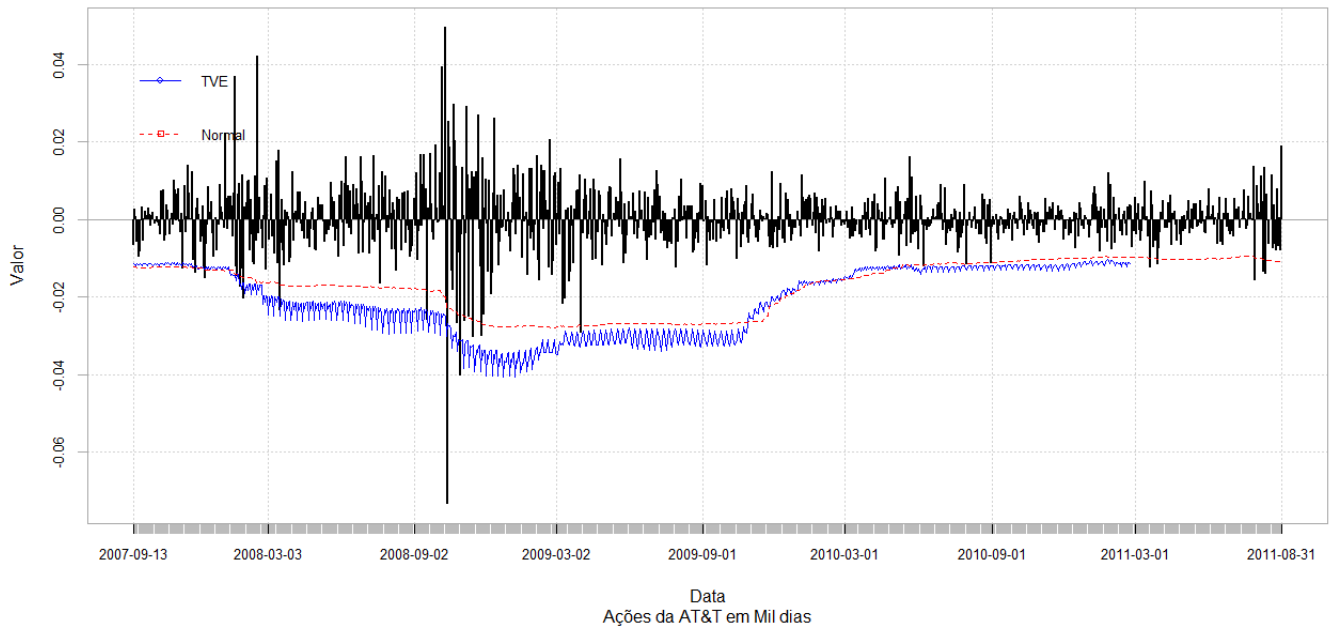
Analisamos o comportamento dos métodos utilizando a distribuição normal e utilizando o teorema dos limites extremos. Neste seguimento faremos uma breve comparação entre eles, começando com uma comparação gráfica entre os modelos para os retornos das cotações das ações da empresa AT&T.



Utilizaremos o valor da medida com um ano de observações para a normal e um ano de observações separados em blocos de cinco observações para o TVE, escolhemos a quantidade de um ano pois conforme a circular 3.478 emitida pela Banco Central do Brasil o VaR tem de ser calculado com no mínimo um ano de observações e , quando possível, teremos blocos com a menor quantidade de observações possíveis quando utilizando o TVE. No gráfico acima é possível observar claramente que o TVE é seria utilizado pelo principio do conservadorismo. O Banco Central do Brasil pede que sempre que for possível utilizar o principio do conservadorismo para decidir o valor do VaR.

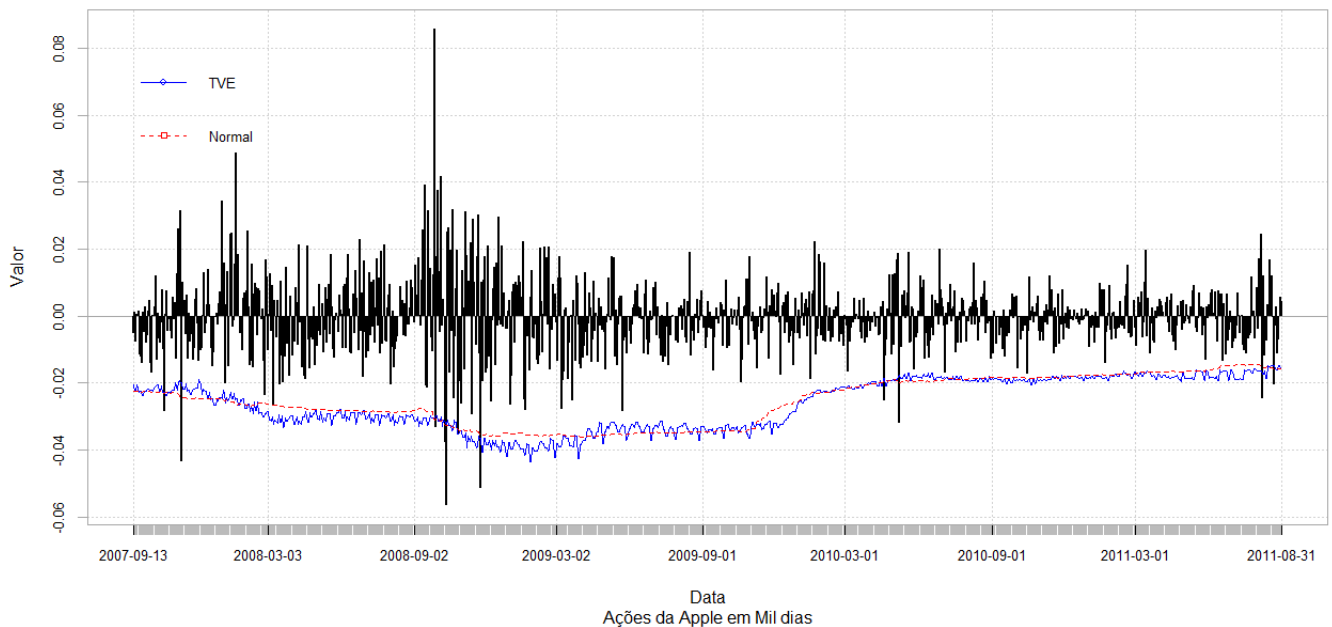
Vejamos como as ações se comportam durante um período maior de tempo.

VaR para os Métodos de Valores Extremos e Normal



O gráfico confirma a nossa escolha de método, porém ao final de abril de 2011 o método se torna incapaz de se calcular com o TVE utilizando blocos de cinco observações devido à inadequação ao modelo GEV. Vamos observar as ações da Apple no período de mil dias.

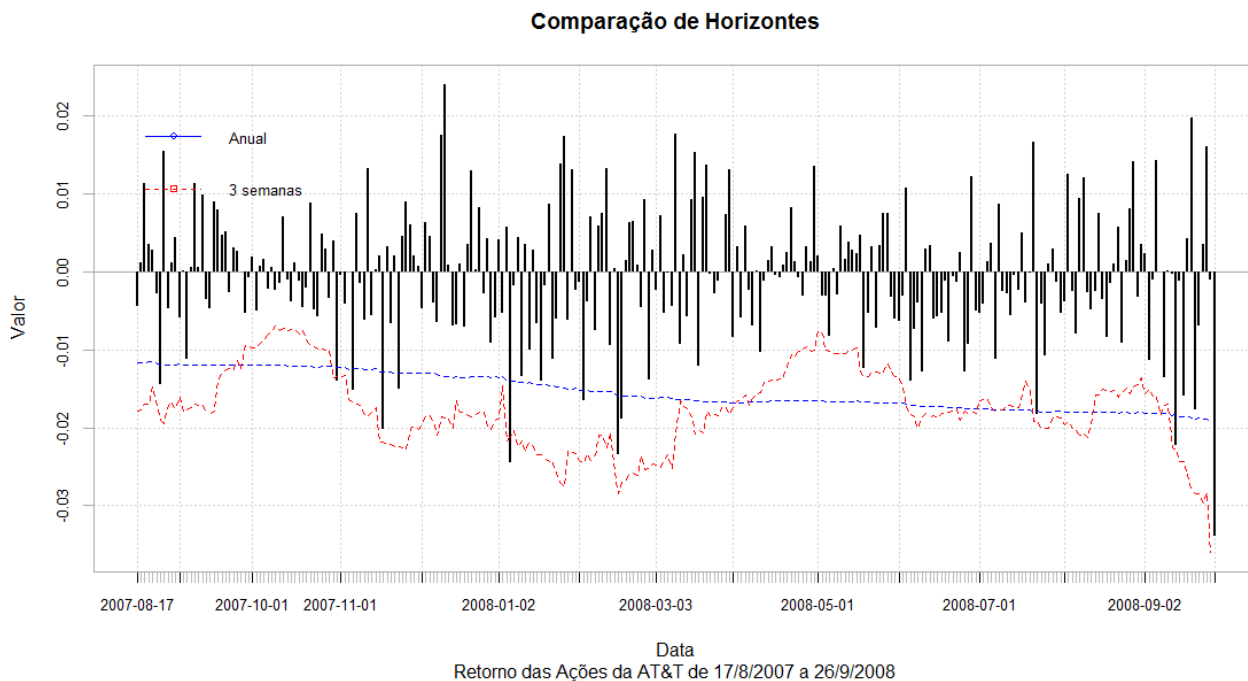
VaR para os Métodos de Valores Extremos e Normal



No cálculo tanto dos ativos da Apple quanto da Microsoft o cálculo para o VaR utilizando o método dos valores extremos apresentou-se inviável com menos de vinte e uma observações devido a inadequação dos valores extraídos, as ações da Microsoft não puderam ser calculadas pois mesmo com vinte e uma observações não foi possível realizar os cálculos e blocos acima

deste valor geram quantis muito viesados. No gráfico acima quando fazemos o cálculo do VaR para o TVE utilizando blocos maiores o VaR não se diferencia da normal. Neste caso a preferência fica pela normal que é estável e sem sazonalidade.

Com o que aplicamos em nosso estudo ficou claro como o VaR pode ser variável, quando utilizado a medida queremos um valor estável, mas que também se adapte a mudanças significantes nos retornos dos ativos ao qual esta medindo. Dependendo da medida esse tipo de equilíbrio pode se mostrar extremamente difícil e muitas vezes inviável, como observamos ao tentar medir o VaR da ações da Microsoft Usando o TVE.



Além do difícil ponto de equilíbrio também temos de adequar uma distribuição ao ativo para extrair uma volatilidade relevante. Esse obstáculo é mais problemático quando estabelecendo regulamentos para a medida. A circular do Banco Central deixa claro apenas que o VaR deve ser calculado com um ano de observações, com 99% de confiabilidade e que se deve usar o princípio do conservadorismo. A circular deixa completamente nas mãos do analista que método será utilizado para medir tal VaR. Tem diversas maneiras de se obter a medida e com a medida ótima sendo quase particular de cada caso ainda é muito difícil de se estabelecer como uma sólida medida de risco de mercado.

Além do seu quesito formal, o VaR ainda é uma ferramenta muito boa quando falamos em análise de investimento, onde o conhecimento aproximado da perda relativa pode levar o investidor a ter alguma ideia do risco do seu ativo e até mesmo como vimos anteriormente o perigo correlacionado de sua carteira de ativos(portfólio).

REFERÊNCIAS

- MORRETIN, P.A. TOLOI, C.M.C (2006), *Análise de Séries Temporais*. São Paulo: ABE Projeto Fisher, ed. 2.
- MORRETIN, P.A. (2011), Um Curso em Séries Temporais Financeiras. *Econometria Financeira*. São Paulo: Blucher, ed. 2.
- MAGALHÃES, M.N. (2006), *Probabilidade e Variáveis Aleatórias*. São Paulo: Edusp, ed. 2.
- TSAY, R.S. (2010), *Analysis of Financial Time Series*. John Wiley & Sons, ed. 3.
- BUSSAB, W.O. MORRETIN, P.A. (2011), *Estatística Básica*. São Paulo: Saraiva, ed. 7.
- HULL, J.C. (2012), *Options, Futures, and Other Derivatives*. Boston, MA: Prentice Hall, ed. 8.
- JORION, P. (1997), A Nova Fonte de Referência para o Controle do Risco de Mercado *Value at Risk*. São Paulo: BM&F, ed. 5.
- GUMBEL, E.J. (1958), *Statistics of Extremes*. New York, NY: Columbia University Press.
- LONGERSTAEY, J. MORE, L. (1995), *Introduction to RiskMetricsTM*. New York, NY: Morgan Guaranty Trust Company, ed. 4.
- MANTEIGA, S.M. (2002), Comparação de Metodologias para Estimaco de Volatilidades para Clculo do VaR- Valor-em-Risco e Modelagem de Perdas No Previstas pelo VaR em Momentos de Crise. Dissertao de Mestrado, FEA-IME, Universidade de So Paulo.
- COX, D.R. HINKLEY, D.V. (1979), *Theoretical Statistics*. London: Chapman and Hall.
- Banco Central do Brasil (2011), *CARTA-CIRCULAR No 3.498*
http://www.bcb.gov.br/pre/normativos/busca/normativo.asp?tipo=c_circ&ano=2011&numero=3498