

PROJETO DE GRADUAÇÃO

ESTUDO DA DINÂMICA NÃO-LINEAR DE BACKLASH EM ENGRENAGENS DE DENTES RETOS

Por,
Fernando Faleiro Pires

Brasília, 04 de Dezembro de 2013

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECANICA

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
Faculdade de Tecnologia
Departamento de Engenharia Mecânica

PROJETO DE GRADUAÇÃO

**ESTUDO DA DINÂMICA NÃO-LINEAR DE
BACKLASH EM ENGRENAGENS DE DENTES
RETOS**

POR,

Fernando Faleiro Pires

Relatório submetido como requisito parcial para obtenção
do grau de Engenheiro Mecânico.

Banca Examinadora

Prof. Marcus Vinicius Girão de Moraes, UnB/ ENM
(Orientador)

Prof. Aline Souza de Paula, UnB/ ENM

Prof. Antônio Manoel Dias Henriques, UnB/ ENM

Brasília, 04 de Dezembro de 2013

Dedicatória

*A meus pais Fernando e Maria Heloisa e
meus irmãos Gustavo, Juliana e Isadora.*

Fernando Faleiro Pires

Agradecimentos

Agradeço à minha família, pelo apoio e carinho que sempre me deram em todas as etapas da minha vida e sempre serão meu bem mais precioso.

A meus amigos, que durante esses anos de estudo sempre estiveram ao meu lado, em Orizona, em Goiânia e em Brasília.

A todos os professores que me acompanharam durante a graduação, ao Grupo de Dinâmica de Sistema da UnB, GDS, e em especial ao Prof. Marcus Vinicius Girão, responsável pela realização deste trabalho.

RESUMO

O trabalho relatado neste documento apresenta a metodologia adotada e os resultados obtidos para a simulação numérica de engrenagens simples dando ênfase ao contato entre seus dentes. São apresentados modelos matemáticos utilizados para os sistemas analisados, o método numérico empregado e uma análise do comportamento não-linear dos sistemas por meio de ferramentas adequadas como diagramas de bifurcação e seção de Poincaré. O objetivo principal deste trabalho é de analisar o comportamento dinâmico dos sistemas e comparar os resultados obtidos para contato entre engrenagens com os resultados disponíveis na literatura, uma vez que neste trabalho são utilizados outros métodos de integração numérica e outro modelo para mecânica do contato.

ABSTRACT

The study presented in this report shows the methodology and the obtained results for the numerical simulation of simple gears giving emphasis to the contact between your teeth. It is presented the mathematical models for the analyzed systems, the numerical method used for the simulation and an analysis of the non-linear behavior of the systems through specific tools such as bifurcation diagrams and Poincaré sections. The main goal of the study is to evaluate an analysis of system dynamics and to compare the obtained results with the ones available on the literature, since in this work it is employed a different method for the numerical integration and a different model to describe the contact mechanics.

Sumário

1	INTRODUÇÃO E OBJETIVOS	1
2.	DINÂMICA DE ENGRENAGENS	3
2.1	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	3
2.2	MECÂNICA DO CONTATO	4
3	SISTEMAS DINÂMICOS NÃO-LINEARES	10
3.1	ESPAÇO DE FASE.....	11
3.2	SEÇÃO DE POINCARÉ.....	11
3.3	DIAGRAMA DE BIFURCAÇÃO.....	13
4	MODELO DE VALIDAÇÃO	15
4.1	MÉTODOS DE INTEGRAÇÃO NUMÉRICA.....	15
4.1.1	MÉTODO DE RUNGE-KUTTA-FEHLBERG	15
4.1.2	EQUAÇÃO DIFERENCIAL RÍGIDA.....	17
4.2	SISTEMA DE 1 GRAU DE LIBERDADE	18
4.3	SISTEMA DE UM GRAU DE LIBERDADE E DUPLO CONTATO.....	24
5	MODELO DE ENGRENAGEM DE DENTES RETOS	29
5.1	MODELO DE MECÂNICA DO CONTATO	29
5.2	MODELO PRÁTICO	35
6	CONCLUSÃO	40

LISTA DE FIGURAS

2	Ilustração do backlash.....	3
2.1	Sistema massa mola simples com impacto.....	5
2.2	Malha da engrenagem e sistema com um grau de liberdade equivalente.....	7
2.3	Esquemática do contato entre os dentes	8
3.1	Espaço de fase – Orbita periódica e caótica	11
3.2	Seção de Poincaré	12
3.3	Ilustração demonstrativa da seção de Poincaré.....	13
3.4	Exemplo de diagrama de bifurcação	13
4	Equações Diferenciais Rígidas	17
4.1	Modelo de um grau de liberdade apresentado por Sándor (2006)	19
4.2	Comparação dos resultados deste estudo com os de Sándor (2006)	20
4.3	Comparação dos resultados deste estudo com os de Sándor (2006)	22
4.4	Comparação dos resultados deste estudo com os de Sándor (2006)	23
4.5	Comparação dos resultados deste estudo com os de Sándor (2006)	24
4.6	Modelo de um grau de liberdade e contato duplo	25
4.7	Diagrama de bifurcação para ρ variável e contato duplo	26
4.8	Espaço de fase e seção de Poincaré, para ρ variável com contato duplo	27
4.9	Diagrama de bifurcação para folga variável e contato duplo	28
4.10	Espaço de fase e seção de Poincaré, para δ variável com contato duplo	29
5.1	Estado transiente para o sistema de Balanchandran et al. (2009)	31
5.2	Estados estacionários para diferentes valores de ϵ , comparação	32
5.3	Espaço de fase e seção de Poincaré para diferentes valores de ϵ	33
5.4	Diagrama de bifurcação para $\epsilon = 0$	33
5.5	Diagrama de bifurcação para $\epsilon = 0,1$	34
5.6	Diagrama de bifurcação para $\epsilon = 0,2$	34
5.7	Diagrama de bifurcação para $\epsilon = 0,4$	34
5.8	Espaço de Fase e seção de Poincaré para $0,48 \leq \Omega_M \leq 0,52$	36
5.9	Desenho de conjunto do redutor.....	37
5.10	Modelo de viga engastada	38
5.11	Diagrama de Deflexão para dente da engrenagem	39
5.12	Estado estacionário para engrenagem simples.....	40
5.13	Espaço de Fase e Seção de Poincaré para uma engrenagem.....	40
5.14	Diagrama de bifurcação para engrenagem	41

LISTA DE TABELAS

4.1	Parâmetros de simulação para sistema de Sándor (2006)	19
4.2	Primeiro conjunto de parâmetros testados para o modelo de Sándor (2006)	19
4.2	Segundo conjunto de parâmetros testados para o modelo de Sándor (2006).....	19
5.1	Parâmetros para o sistema de Balanchandran (2011).....	31
5.2	Parâmetros para o novo sistema.....	39

1 INTRODUÇÃO E OBJETIVOS

Na engenharia, o conceito de sistemas dinâmicos nasce da exigência de se construir um modelo geral de como todos os sistemas evoluem. Esses sistemas são regidos por equações diferenciais que são responsáveis por descrever a forma como esses sistemas evoluem no tempo. Elas podem ser lineares ou não-lineares. Na grande maioria dos problemas de engenharia os sistemas são regidos por equações não-lineares, mas por muito tempo foram tratados de forma linear, devido a uma série de vantagens resultantes do princípio da superposição de suas soluções. Essa aproximação muitas vezes, no entanto, não produz os resultados adequados. As equações não-lineares são mais complexas e não desfrutam das facilidades de solução e entendimento dos sistemas lineares, apresentando comportamentos muito mais ricos e diversos. Esses sistemas podem apresentar soluções caóticas, que são extremamente sensíveis às mais sutis perturbações e para um entendimento do funcionamento do sistema diversas ferramentas devem ser utilizadas.

Neste trabalho será analisado o caso particular do comportamento dinâmico de engrenagens, em especial o contato entre os dentes da engrenagem devido ao *backlash*. Com a crescente demanda por altas velocidades, transmissões pesadas e leves e o funcionamento silencioso voltados para sistemas modernos, a redução de fatores de fadiga dos materiais e ruídos, além do aumento da eficiência dos engrenamentos e redução de perdas em transmissão tornam-se cada vez mais importantes. Isso exige uma avaliação mais precisa da carga dinâmica entre os dentes das engrenagens e as respostas de vibrações para estes casos são relacionados com aspectos não-lineares. O *backlash*, a rigidez do dente variante no tempo, o atrito entre as faces dos dentes das engrenagens são alguns dos principais fatores de não-linearidades do sistema.

O contato entre os dentes das engrenagens devido ao *backlash* geram mudanças repentinas das características do sistema, em especial o impacto, e essa descontinuidade torna o sistema não-linear.

Muitos trabalhos já foram realizados nessa área. E diferentes metodologias foram utilizadas, são considerados nesses trabalhos quatro grupos de interação entre as engrenagens, que levam em consideração a rigidez dos dentes das engrenagens, a rigidez dos apoios dos rolamentos, ambos podendo ou não serem funções do tempo e o *backlash*. O objetivo principal deste trabalho é o estudo de um sistema engrenado com *backlash*, onde se considera a rigidez do

dente da engrenagem como variante no tempo e desconsidera a rigidez dos eixos, dos rolamentos e dos apoios. Neste trabalho para a modelagem do sistema serão utilizadas equações não-lineares ordinárias rígidas, que apresentaram resultados mais rápidos na simulação computacional e apresentam um modelo simplificado em relação à outros métodos comumente utilizados nesse tipo de estudo. Por se tratar de um sistema não-linear algumas ferramentas específicas devem ser utilizadas, como o diagrama de bifurcação e as seções de Poincaré, buscando uma melhor compreensão do comportamento destes sistemas.

O trabalho é dividido em 5 capítulos. Neste primeiro capítulo é apresentada uma introdução, onde suas motivações e objetivos são apresentados. O segundo capítulo apresenta conceitos básicos da dinâmica de engrenagens e da mecânica do contato. No terceiro, conceitos sobre identificação e classificação de sistemas não-lineares e as principais ferramentas para o entendimento do comportamento do sistema são apresentados. No quarto, apresenta-se o método de integração utilizado e a validação do método empregado é apresentada. No último capítulo é apresentada a conclusão parcial do trabalho, e uma apresentação sobre a continuação do trabalho.

2. DINÂMICA DE ENGRENAGENS

As engrenagens são objeto recorrente do estudo de dinâmica. Elas são usadas em milhares de dispositivos mecânicos, são responsáveis por realizar várias tarefas importantes, entre elas as que fornecem redução e amplificação na transmissão em equipamentos motorizados. E isso é essencial porque, frequentemente, é necessário transformar baixas velocidades angulares em altas rotações, como no caso das turbinas eólicas e hidrocinéticas. A existência de elementos que giram com determinada velocidade sofrerá uma vibração com pelo menos um componente. O objetivo da análise de engenharia é manter os efeitos das vibrações dentro de limites que não prejudiquem as funcionalidades das máquinas. Vibrações excessivas podem prejudicar a estrutura das máquinas e causar desgastes acelerados, ocasionando diminuição da vida útil dos equipamentos.

Nessa perspectiva é importante realizar o estudo da dinâmica existente no contato entre os dentes das engrenagens. Um par de engrenagens é obrigado a ter alguma folga, que pode ser tanto projetada para melhor lubrificação e para eliminar a interferência ou devido a erros de fabricação e de desgaste. Vibrações de torção induzida por *backlash* podem causar a separação dos dentes e impactos excessivos. Os impactos resultam em problemas de vibrações e ruídos intensos e grandes cargas dinâmicas podem afetar a confiabilidade e a vida da engrenagem.

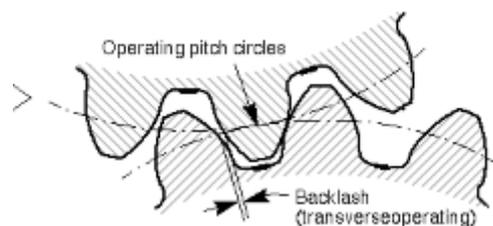


Figura 2 – Ilustração do Backlash

Neste capítulo são introduzidas as primeiras noções que formam a base para o estudo do *backlash* em engrenagens simples. Inicialmente é apresentada uma breve revisão bibliográfica de alguns estudos que modelam o efeito *backlash* em sistemas engrenados. Em seguida a modelagem matemática de contato entre os dentes das engrenagens.

2.1 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Comparin e Singh (1989) apresentam um estudo em que engrenagens com *backlash* não-linear são essencialmente uma função descontínua e não-diferenciável e representa uma forte interação não-linear na equação diferencial que governa o sistema. Os autores concluíram que a maioria das técnicas de

solução disponíveis na literatura até então não poderiam ser aplicadas diretamente para analisar o contato entre os dentes das engrenagens. Os autores empregaram o método de equilíbrio harmônico e construíram soluções analíticas para as características de resposta de frequência não-linear de um par de engrenagens com folga com excitação por torque externo.

Lees et al. (2011) apresentam uma abordagem simples de um modelo torcional desenvolvido para dois eixos ligados por meio de um único par de engrenagens. Neste trabalho os eixos são considerados como molas e amortecedores, as engrenagens como massas concentradas e o par de engrenagens é considerado como perfeito. O modelo apresentado do sistema assume pequenas vibrações e o efeito da não-linearidade é descartada. O erro é assumido somente como função do tempo e tratado com série de Fourier.

Wang (1978) apresenta modelos torcionais de dois e três graus de liberdade com *backlash* e assume que os dentes das engrenagens são rígidos e a engrenagem conduzida possui inércia infinita. Foram utilizadas técnicas lineares por partes, no entanto, essas técnicas forneceram soluções apenas para sistemas lineares equivalentes.

Kahraman e Singh (1990) apresentam um modelo com dois graus de liberdade de um par de engrenagens de dentes retos com inércias de rotação, assumindo que os eixos e rolamentos são rígidos. A engrenagem é descrita por *backlash* e rigidez do dente da engrenagem não varia com o tempo e o amortecimento é considerado viscoso. Os autores analisam o contato e a flexibilidade de cada dente da engrenagem.

O objetivo deste trabalho é verificar a influência do *backlash* em sistemas engrenados. Para isso utiliza-se o método de Range-Kutta-Fehlberg, assumindo as equações diferenciais como sendo rígidas.

2.2 MECÂNICA DO CONTATO

Um problema recorrente na mecânica é o contato entre dois ou mais corpos sólidos e o ponto crítico da análise é a transição entre as duas configurações: com contato e sem contato. A ocorrência dessa transição brusca provocam não-linearidades no sistema.

Sándor (2006) desenvolveu um estudo do comportamento de um sistema não-linear com um grau de liberdade e contato intermitente. São apresentadas no trabalho uma análise teórica e experimental de um modelo para brocas de perfuração, e os seus resultados são comparados. O pesquisador utilizou um modelo de mecânica do contato que envolve uma hiper-superfície de transição do estado sem contato para um estado com contato. Os resultados apresentados são comparados com os obtidos neste trabalho.

Para que essa transição seja modelada de maneira correta é necessário que se estabeleça com precisão as condições de contorno do problema, principalmente nas transições, o contato pode ser

definido por uma inequação estabelecendo o ponto a partir do qual as forças de contato surgirão e agirão sobre o sistema.

A Fig. 2.1 apresenta um modelo de contato, representado por um sistema massa mola simples com uma restrição rígida que limita o deslocamento, e corresponde a um oscilador com impacto.

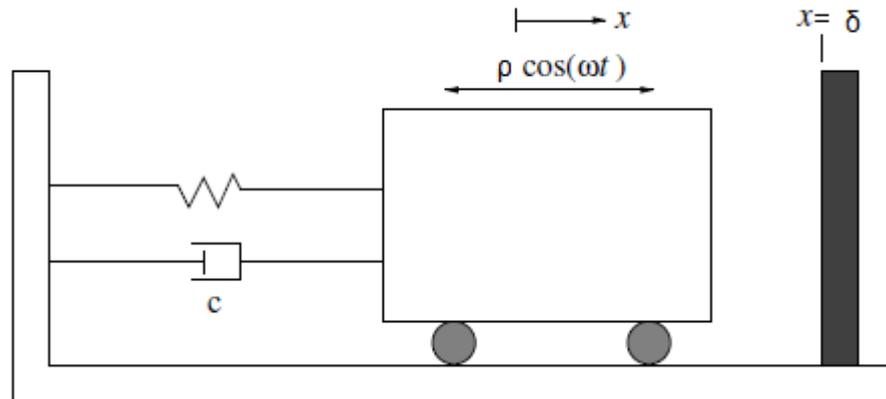


Figura 2.1 - Sistema massa mola simples com impacto

Esse sistema, composto por um conjunto massa-mola-amortecedor, está sujeito a uma excitação harmônica. Além disso, existe uma limitação de deslocamento devido à restrição em $x = \delta$, que corresponde a uma parede rígida, onde o oscilador colide inelasticamente.

Entre dois impactos sucessivos, ocorre um movimento suave o aparecimento da força de contato, e a equação governante do sistema é dada por:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + c\dot{x} + kx &= \rho \cos \omega t & x < \delta \\ m\ddot{x} + c\dot{x} + kx &= \rho \cos \omega t - Fc & x \geq \delta \end{aligned} \quad (1)$$

onde c é o coeficiente de amortecimento linear, m é a massa do sistema, k é a rigidez da mola, ρ é a amplitude de excitação, ω é a frequência de excitação do sistema e Fc é a força de contato que deve ser calculada. Wriggers (2002) apresenta dois métodos para o cálculo da força de contato: o método de multiplicadores de Lagrange e o método da penalidade.

O método de multiplicadores de Lagrange considera que a restrição $x \geq \delta$ deve ser satisfeita, obtêm-se então a força de contato necessária para atender a condição. Assim é possível obter a igualdade $Fc * x = 0$, sempre que força de contato é nula, quando $x < \delta$. Quando ocorre contato, $Fc > 0$ em $x = \delta$. Este método apresenta uma maior estabilidade, por limitar o valor do deslocamento, mas não descreve um sistema real. Este método não inclui a deformação dos corpos durante e contato e não é capaz de reproduzir impactos sucessivos em um curto período de tempo.

O segundo método é chamado de método de penalidade. Este método é mais simples e descreve com maior exatidão o modelo real. Para este caso, a força de contato é calculada como função da penetração do corpo com a parede, ponderado por um coeficiente de penalidade ε . Porém, as descontinuidades do sistema, que geram grandes mudanças de rigidez, podem acarretar instabilidade na simulação numérica computacional.

Sándor (2006) apresenta uma alternativa para diminuir os erros numéricos na simulação, utilizando uma alternativa que inclui a utilização de uma superfície de transição com o objetivo de reduzir o custo computacional do problema.

Brandão (2011) apresenta um método de integração com passo de tempo variável. Caso ocorra a transição da situação sem contato para com contato e se o erro for superior a determinado valor, os cálculos são refeitos com um passo de interação menor $dt = dt/2$, até que o valor do erro seja inferior ao estipulado. Esse passo é mantido enquanto há contato permanente. Quando não há contato o passo é maior e constante.

2.3 INTERAÇÃO DINÂMICA DE DENTES DE ENGRENAGENS

Na modelagem matemática de engrenamentos é importante considerar a interação que ocorre entre os dentes das engrenagens e a folga na qual o sistema está submetida e a rigidez da malha dos dentes.

A equação governante do sistema para um par de engrenagens incorpora as características de rigidez não-linear, que surgem nos sistemas reais devido às mudanças dos dentes das engrenagens em contato e a separação dos dentes devidos ao *backlash*. Essa equação pode ser resolvida numericamente, sendo possível analisar o comportamento que o sistema apresenta na presença de não-linearidades.

Um modelo simplificado proposto por Kahraman e Singh (1990) é ilustrado na Fig. 2.2 (a), onde a rigidez da mola e amortecimento são fornecidos pelos dentes das engrenagens. O sistema possui um grau de liberdade e é ilustrado na Fig. 2.2 (b), onde x_1 corresponde ao deslocamento tangencial do dente da engrenagem 1 e x_2 é o deslocamento tangencial do dente da engrenagem 2.

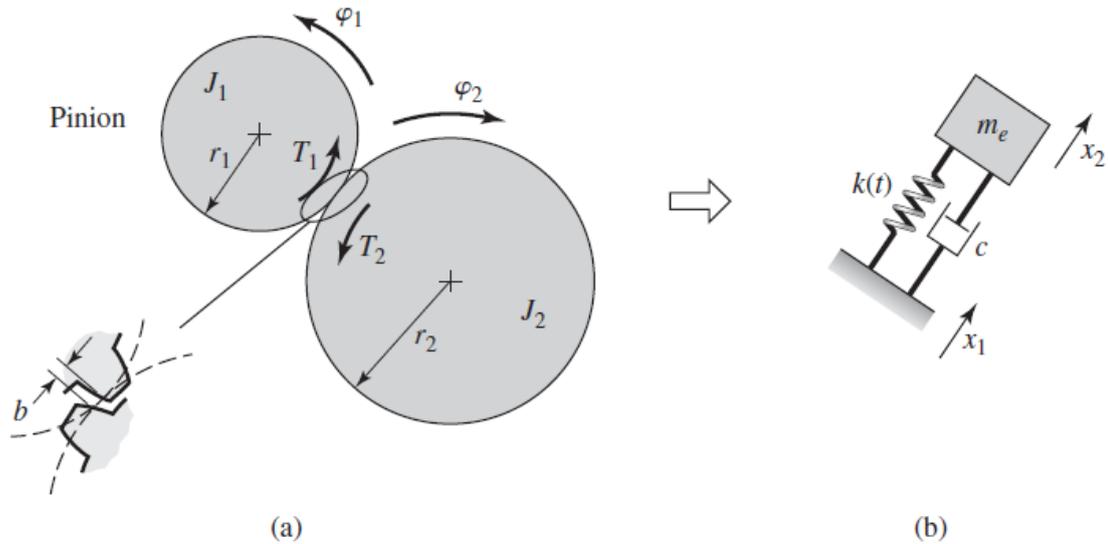


Figura 2.2 - (a) Malha da engrenagem e (b) Sistema com um grau de liberdade equivalente [Balachandran e Magrab (2009)].

Os valores dos deslocamentos estão relacionados com as rotações do par de engrenagens, onde:

$$x_1 = r_1 \varphi_1 \quad e \quad x_2 = r_2 \varphi_2 \quad (2)$$

onde r_1 e r_2 são respectivamente os raios primitivos do pinhão e da coroa, φ_1 e φ_2 correspondem as rotações angulares. A rotação φ é assumida para um estado estacionário de velocidade da malha ω acrescido de θ . Então $\varphi = \omega t + \theta(t)$, o que resulta em:

$$x_1 = r_1(\omega_1 t + \theta_1(t)) \quad e \quad x_2 = r_2(\omega_2 t + \theta_2(t)) \quad (3)$$

Os dentes do engrenamento são modelados por um sistema com um grau de liberdade com uma base em movimento. Como mostrado na Figura 2.3, onde m_e é o momento efetivo de inércia que pode ser obtido por:

$$m_e = 1 / \left(\frac{r_1^2}{J_1} + \frac{r_2^2}{J_2} \right) \quad (4)$$

onde $T_1 = J_1 \ddot{\theta} = r_1 F$ e $T_2 = -J_2 \ddot{\theta} = r_2 F$ são os torques das engrenagens 1 e 2 respectivamente, e $F = m_e (r_1 \ddot{\theta}_1 + r_2 \ddot{\theta}_2)$.

Assumindo que a rigidez do dente da engrenagem é uma função do tempo:

$$k(t) = k_0(1 - \epsilon \cos \omega_M t) \quad (5)$$

onde k_0 é a rigidez da mola, ϵ é a relação de rigidez, $\omega_M = n_1 \omega_1 = n_2 \omega_2$, onde n_1 e n_2 correspondem ao número de dentes das engrenagens 1 e 2. A rigidez do dente de engrenagens é acoplado apenas quando os dentes entram em contato, isto é, o acoplamento entre os dentes atravessam uma pequena distância de separação b . Como mostra a Fig 2.3

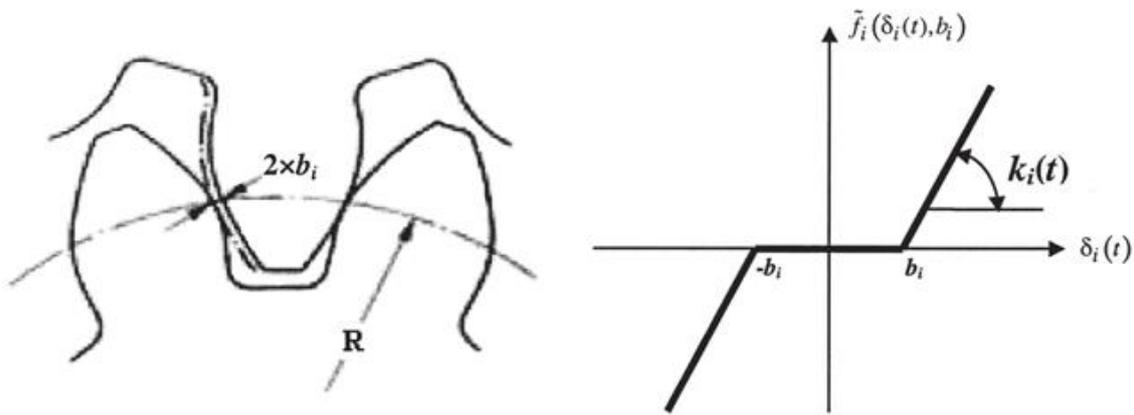


Figura 2.3 - Esquemática do contato entre os dentes (Kahraman e Singh (1990))

A mola exerce uma força de restauração que é definida por $F_s = k(t)h(z)$, sendo

$$\begin{aligned} h(z) &= 0 & |z| \leq b \\ h(z) &= z - b * \text{sgn}(z) & |z| > b \end{aligned} \quad (6)$$

onde $z = x_1 - x_2$ e $\text{sgn}(z)$ é uma função sinal de z .

A equação governante do sistema é dada por:

$$m_e \ddot{z} + c \dot{z} + k(t)h(z) = f(t) \quad (7)$$

A força aplicada nos dentes do pinhão (engrenagem 1) é dada por:

$$f(t) = \frac{T_0}{r_1} (1 + \cos \omega_M t) \quad (8)$$

onde T_0 é o torque aplicado no pinhão.

Um modelo mais completo será apresentado na seção 4.2 e os resultados obtidos serão mostrados graficamente e analisados com as ferramentas adequadas.

3 SISTEMAS DINÂMICOS NÃO-LINEARES

Sistemas dinâmicos determinísticos são governados por equações diferenciais que são responsáveis por descrever a forma como esses sistemas evoluem no tempo. As equações podem ser lineares ou não-lineares. As equações lineares mais comumente utilizadas, nas ciências e nas engenharias, são utilizadas para modelar os mais diversos sistemas. Elas possuem uma série de vantagens resultantes do princípio da superposição de suas soluções, ou seja, se verificam as condições (1) e (2) abaixo, onde \mathbf{x} , \mathbf{y} e \mathbf{z} são vetores quaisquer e α um escalar.

$$\left\{ \begin{array}{l} (1) f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y}) \\ (2) f(\alpha \cdot \mathbf{z}) = \alpha \cdot f(\mathbf{z}) \end{array} \right.$$

Sistemas dinâmicos não-lineares não possuem as facilidades de solução e entendimento dos sistemas lineares, pois não se verifica o princípio da superposição, ou seja, as condições (1) e (2) não podem ser utilizadas. Por outro lado apresentam comportamento mais rico e diverso, além disso, a natureza é tipicamente não-linear e esse modelo é imprescindível para a descrição apropriada de muitos sistemas. Não-linearidades são decorrentes de uma grande variedade de características, sendo uma delas as características não-suaves.

As não-linearidades não-suaves estão geralmente relacionadas a fenômenos de atrito ou a características descontínuas como contatos intermitentes de componentes de sistema. Como exemplo, têm-se sistemas com atrito físico, impacto ou folgas operam em diferentes modos, e a transição de um modo para o outro pode ser idealizada como instantânea ou discreta.

Nos sistemas onde a não-linearidade ocorre devido a presença de contatos intermitentes, os efeitos de sensibilidade às condições iniciais e outras particularidades do sistema são bastante notáveis. A transição repentina entre as duas situações, sem contato e com contato, transforma o problema em um caso singular em termos de simulação numérica, por isso devem ser selecionados o modelo, o método de integração e a ferramenta adequada para que o comportamento do sistema apresente conclusões relevantes.

Serão apresentados neste capítulo algumas das ferramentas adequadas para a análise de sistemas não-lineares. O espaço de fase, a seção de Poincaré e o diagrama de bifurcação são utilizados na análise dos casos simulados, elas são qualitativas e tem como objetivo apresentar uma noção do comportamento do sistema.

3.1 ESPAÇO DE FASE

O espaço de fase de um sistema dinâmico é definido como o espaço formado pelas variáveis do sistema. Para partículas em movimento unidimensional, esse espaço é bidimensional, formado pela posição e velocidade do sistema. Cada ponto no estado de fase caracteriza o estado do sistema em determinado instante, a trajetória formada pelos pontos do sistema representa a evolução do sistema no tempo.

Se o sistema for periódico a trajetória formada se caracterizará por um caminho fechado, passando sempre pelos mesmos pontos. Respostas caóticas e quase-periódicas devem ser identificadas de modo mais preciso, e utiliza-se outra ferramenta para identificar essas respostas, o seção de Poincaré.

As Fig. 3.1 mostra duas órbitas no espaço de fase. Em ambos os casos o eixo x representa a posição da partícula, enquanto o eixo y representa a velocidade de um dos graus de liberdade do sistema.

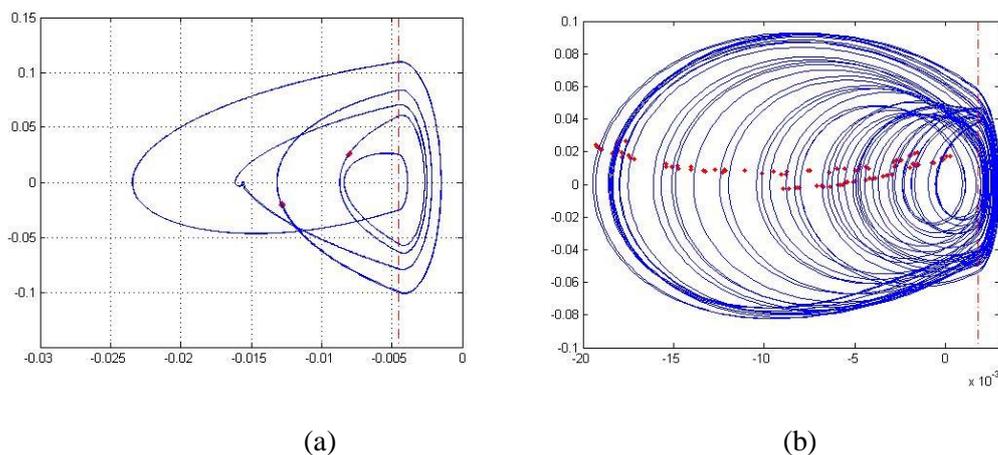


Figura 3. 1 - Espaço de fase - Órbita periódica (a) e órbita caótica (b).

Quando uma órbita é periódica, o período desta pode não coincidir com o período da força de excitação. Diz-se que uma órbita é de período n quando esta completa um ciclo completo a cada n períodos de forçamento. Isso será melhor notado com a utilização do seção de Poincaré.

3.2 SEÇÃO DE POINCARÉ

A seção de Poincaré é um procedimento através do qual é possível reduzir um sistema dinâmico contínuo no tempo (fluxo) em um discreto (mapa). Ele é a interseção de uma órbita periódica no espaço de estado de um sistema dinâmico contínuo com um certo subespaço de dimensão inferior transversal ao fluxo do sistema. Este procedimento elimina pelo menos uma variável do problema, sendo uma transformação que viabiliza uma melhor compreensão dinâmica global de um sistema.

A Fig. 3.2 mostra uma seção de Poincaré para um movimento com forçamento periódico. É importante notar que ao invés de observar toda a órbita, considera-se somente os pontos discretos tomados na superfície. Este procedimento transforma o sistema contínuo no tempo em um mapeamento.

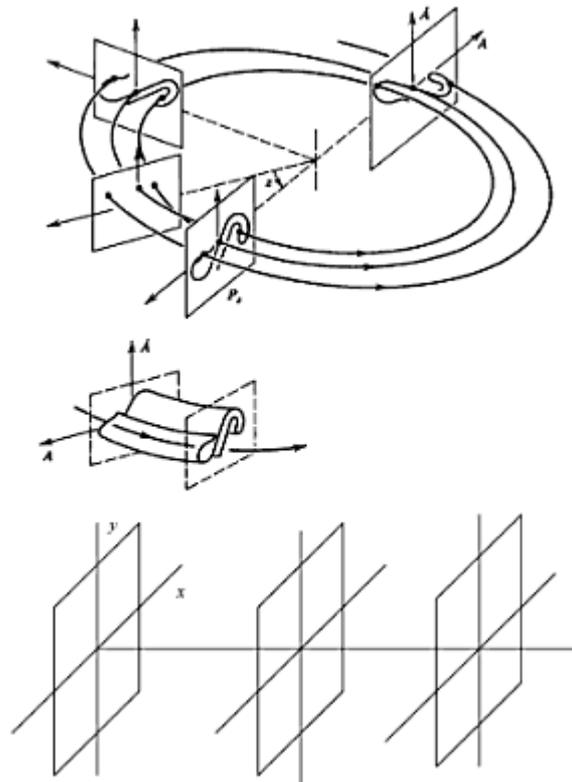


Figura 3. 2 - Seção de Poincaré [Savi (2006)]

Desta forma, a construção da seção de Poincaré é definida pelas interseções da órbita com os planos.

A Fig. 3.3 apresentada o espaço de fase nos eixos x e y , posição e velocidade respectivamente e o forçamento no eixo z , que varia de -1 a 1 . Para forçamento igual a $0,4$ foi marcado o plano de “Seção 1” que possui derivada positiva, ou seja, define um ponto específico no ciclo de forçamento. Para um forçamento negativo igual a $-0,4$ o plano de “Seção 2” é traçado e possui derivada negativa.

A órbita traçada em azul na Fig. 3.3 é periódica e se repete infinitamente. De forma arbitrária as seções de Poincaré são definidas e a intersecção delas com a órbita são assinaladas em vermelho. Pode-se notar que enquanto o forçamento completa dois ciclos, a órbita completa somente um, o que configura uma órbita de periodicidade 2, ela pode ser facilmente identificada pela presença de dois pontos diferentes em cada seção de Poincaré construída.

A seção de Poincaré pode assumir três diferentes formas principais:

- Número finito n de pontos: indica que a órbita possui periodicidade n ,
- Diversos pontos sem repetição: acusa um comportamento caótico,

– Diversos pontos sem recorrência que forma uma curva fechada: indica uma órbita quase-periódica.

Na Fig. 3.1 (a) a órbita apresenta periodicidade 2, devido aos dois pontos vermelhos marcados na órbita. A Fig. 3.1 (b) apresenta um comportamento caótico.

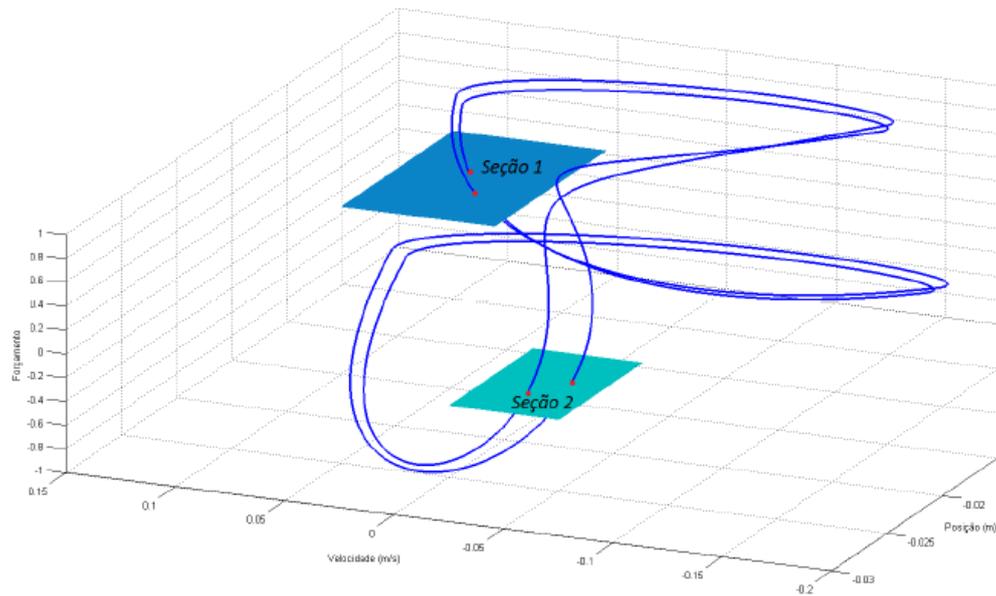


Figura 3. 3 - Ilustração demonstrativa da seção de Poincaré [Brandão (2011)]

3.3 DIAGRAMA DE BIFURCAÇÃO

O termo bifurcação está associado a uma mudança qualitativa na estrutura de uma solução, como consequência de uma variação dos parâmetros do sistema.

O fenômeno da bifurcação está relacionado com a existência do caos, um sistema que não apresenta nenhum tipo de bifurcação não apresenta uma resposta caótica. Mas é importante ressaltar que um sistema que apresente bifurcações não necessariamente apresenta uma resposta caótica.

Para a construção de um diagrama de bifurcação deve-se variar um das variáveis do sistema de maneira *quase* estática enquanto se monitora um dos seus parâmetros de interesse. O valor das variáveis do sistema para um determinado valor da fase do forçamento é obtido de forma estroboscópica através das seções de Poincaré. Desta forma, extrai-se o valor das variáveis do sistema a cada vez que o forçamento periódico passar por um determinado valor. Este valor pode se repetir sempre, Período-1, alternar entre um número finito x de valores, Período- x , ou ainda assumir infinitos valores, Caos.

Uma importante função do diagrama de bifurcação é identificar o comportamento global do sistema, incluindo pontos de interesse para a chamada rota do caos, que pode apresentar bifurcações locais, que trata as bifurcações em uma região limitada do espaço de fase, por exemplo, a transição de periodicidade

1 para a periodicidade 2, e bifurcações globais que representam uma mudança qualitativa na estrutura das órbitas em uma região do espaço de fase, como a transição de um comportamento periódico para um comportamento caótico, ou vice-versa. Pode ocorrer em alguns casos, que para um mesmo conjunto de parâmetros, existam mais de uma órbita estável possível, ou seja, ocorre a coexistência de órbitas, o que gera comportamentos singulares que podem ser identificados no diagrama de bifurcação.

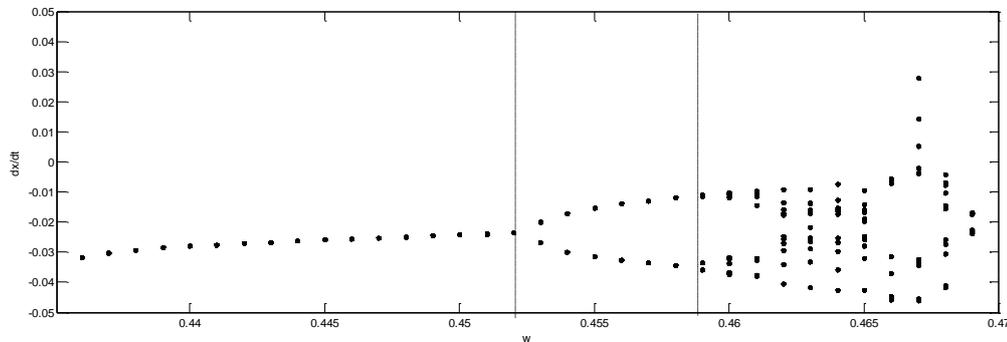


Figura 3. 4 - Exemplo de diagrama de bifurcação

A Fig. 3.4 apresenta um exemplo de diagrama de bifurcação que monitora a velocidade dx/dt de um sistema de um dos graus de liberdade na seção de Poincaré quando a frequência de forçamento ω é variada. Podemos identificar as seguintes regiões:

- Quando os valores da frequência de forçamento ω são inferiores a $\omega = 0,452$, só um ponto é assinalado no gráfico, que corresponde a um ponto fixo estável que encontramos no primeiro estágio para o caos. Esta região possui periodicidade 1.
- Quando $\omega = 0,455$, ocorre uma bifurcação e a linha divide-se em duas que identificamos como os dois pontos do atrator de período-2.
- Quando o valor da frequência de forçamento do sistema é aumentado ($\omega > 0,46$), ocorrem diversas bifurcações, em intervalos cada vez menores. A partir deste valor o atrator de órbitas é complexo e exhibe formas não triviais.

4 MODELO DE VALIDAÇÃO

Neste capítulo o procedimento adotado nas simulações numéricas utilizadas para a validação dos resultados obtidos são apresentados. Desta forma, será descrito neste trabalho o método de Range-Kutta-Fehlberg.

O sistema dinâmico utilizado para a comparação dos resultados obtidos é proposto por Sandór (2006), que consiste em um sistema com um grau de liberdade com uma restrição de deslocamento. Esta restrição é dada por uma barreira na qual o corpo pode se chocar. O modelo apresentado pelo autor é simulado numericamente e é validado por meio de resultados experimentais.

4.1 MÉTODOS DE INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

Um sistema dinâmico pode ser expresso por meio de um conjunto de equações diferenciais de segunda ordem na forma da Eq. (1), apresentada na seção 2.2, que traz toda informação necessária para obter a evolução temporal do sistema a partir de um conjunto de valores iniciais. Deve-se definir uma ferramenta matemática para se realizar a integração numérica. Neste processo realiza-se uma discretização temporal, ou seja, a evolução real contínua do sistema deve ser aproximada por uma evolução discreta, na qual calcula-se ponto a ponto no tempo do estado do sistema.

Cálculos deste tipo não são exatos, uma vez que, quando calcula-se a evolução de m ponto a outro no tempo por menor que seja, faz-se um truncamento na série de Taylor que descreveria o caminho exato do sistema entre os pontos. A utilização de passos de tempos menores torna o resultado mais próximo de ao caminho da evolução e melhor será sua aproximação, pois os termos da série de Taylor terão ordem mais alta e menor impacto no valor da função.

Nesta seção será apresentado o método de integração numérica utilizada neste trabalho e o tratamento rígido dado as equações

4.1.1 MÉTODO DE RUNGE-KUTTA-FEHLBERG

Uma maneira de avaliar a precisão de uma solução de um problema de valor inicial é resolver o problema duas vezes usando o incremento h e depois $h/2$ e comparar os valores nos tempos em comum. Observe que isto significa fazer três vezes mais cálculos que no caso de obter a solução para um determinado incremento h . Uma alternativa mais eficiente é usar o método de Runge-KuttaFehlberg no qual se pode fazer a avaliação da solução num único incremento. No entanto, isto tem um custo. Enquanto no Runge-Kutta de quarta ordem avaliamos quatro vezes $f(x, y)$, neste método avaliamos seis vezes esta função. Mesmo assim, isto é a metade do que avaliaríamos $f(x, y)$ se executássemos o algoritmo com passo h e depois com passo $h/2$ do Runge-Kutta de quarta ordem. No método de Runge-Kutta-Fehlberg se calcula a solução por um esquema de quarta ordem e um de quinta ordem e pela

comparação dos valores podemos obter não só o erro local como também uma estimativa para o h ideal estabelecendo um esquema adaptativo, ou seja, um esquema em que o valor de h varia automaticamente a partir de um valor de tolerância imposto pelo usuário. O esquema do método é o que se segue:

$$\begin{aligned}
 k_1 &= hf(t_j, y_j) \\
 k_2 &= hf(t_j + \frac{1}{4}h, y_j + \frac{1}{4}k_1) \\
 k_3 &= hf(t_j + \frac{3}{8}h, y_j + \frac{3}{32}k_1 + \frac{9}{32}k_2) \\
 k_4 &= hf(t_j + \frac{12}{13}h, y_j + \frac{1932}{2197}k_1 - \frac{7200}{2197}k_2 + \frac{7296}{2197}k_3) \\
 k_5 &= hf(t_j + h, y_j + \frac{439}{216}k_1 - 8k_2 + \frac{3680}{513}k_3 - \frac{845}{4104}k_4) \\
 k_6 &= hf(t_j + \frac{h}{2}, y_j - \frac{8}{27}k_1 + 2k_2 - \frac{3544}{2565}k_3 + \frac{1859}{4104}k_4 - \frac{11}{40}k_5)
 \end{aligned} \tag{9}$$

A aproximação de quarta ordem é calculada por:

$$y_{i+1} = y_j + \frac{25}{216}k_1 + \frac{1408}{2565}k_3 + \frac{2197}{4104}k_4 - \frac{1}{5}k_5 \tag{10}$$

e a de quinta ordem:

$$\dot{y}_{i+1} = y_j + \frac{16}{135}k_1 + \frac{6656}{12825}k_2 + \frac{28561}{56430}k_4 - \frac{9}{50}k_5 + \frac{2}{55}k_6 \tag{11}$$

O valor ótimo para h é obtido multiplicando o valor atual de h pelo valor dado pela seguinte formula:

$$q = \left(\frac{\varepsilon h}{2|y_{i+1} - y_{j+1}|} \right)^{1/4} = 0,84 \left(\frac{\varepsilon h}{|y_{i+1} - y_{j+1}|} \right)^{1/4} \tag{12}$$

onde εh é a tolerância. Para que os cálculos apresentam valores consistentes com os resultados apresentados por Sándor (2006), foram utilizadas tolerâncias de 10^{-6} .

4.1.2 EQUAÇÃO DIFERENCIAL RÍGIDA

Os métodos de aproximação de solução de problemas de valor inicial possuem termos de erro que envolvem uma derivada de ordem superior da solução da equação. Se a derivada pode ser limitada, então o método tem um limite previsível para o erro. Mesmo quando a derivada cresce com o aumento do número de passos, o erro pode ser relativamente controlado, sempre que a magnitude da solução também aumenta. Porém, existem casos em que a magnitude da derivada cresce mas a solução não, nestes casos o erro pode crescer tanto que domine os cálculos. Os problemas de valor inicial onde isso ocorre são chamados de equações diferenciais rígidas e são relativamente comuns, em especial no estudo de vibrações. Ele recebe esse nome por causa do movimento em sistemas de massa-mola que possuem grande rigidez.

As equações diferenciais rígidas são caracterizadas como por possuírem solução exata de um termo na forma e^{-ct} , onde c é uma constante positiva grande. Esse termo, em geral, é uma parte da solução, denominada de transitória. A parte mais importante da solução é a solução de estado estacionário. A parte transitória da equação cairá rapidamente para zero com o aumento do tempo, porém como a n -ésima derivada desse termo tem magnitude $c^n e^{-ct}$, e não cairá com o tempo tão rapidamente. Como a derivada no termo do erro é avaliada em um valor entre zero e t , os termos de derivadas podem crescer quando t aumenta. As equações rígidas podem ser previstas a partir do problema físico do qual a equação é derivada e, com pericia, o erro pode ser mantido sob controle.

Esse tipo de equação é muito instável, e qualquer mínima perturbação em suas condições iniciais podem causar grandes alterações na solução do problema. Nesse caso a solução numérica é extremamente difícil, pois erros de arredondamento e da discretização podem causar o mesmo efeito que a pequena mudança na condição inicial do problema e a solução tenderá a divergir. Como mostra o pequeno exemplo abaixo.

$$(1) \quad y'' - 10y' - y = 0$$

$$c.c \quad \begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = -1 \end{cases}$$

$$\text{Solução exata: } y(x) = e^{-x}$$

$$(2) \quad y'' - 10y' - y = 0$$

$$c.c \quad \begin{cases} y(0) = 1 + \varepsilon \\ y'(0) = -1 \end{cases}$$

$$\text{Solução exata: } y(x) = \left(1 + \frac{11}{12}\varepsilon\right)e^{-x} + \frac{\varepsilon}{12}e^{11x}$$

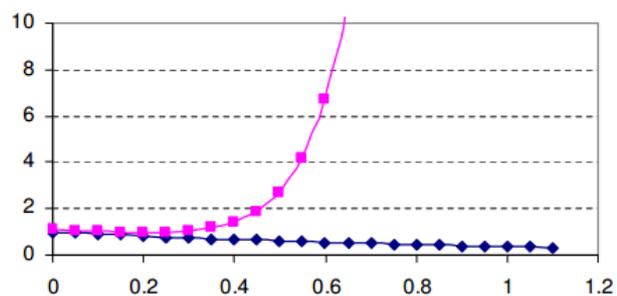


Figure 4 - Equações diferenciais rígida

4.2 SISTEMA DE 1 GRAU DE LIBERDADE

O oscilador apresentado por Sándor (2006) é um sistema massa-mola amortecido simples, composto por uma massa m , uma mola de rigidez linear k e um amortecimento com coeficiente de amortecimento c . Uma barreira de massa desprezível é colocada a uma distância g da massa m , que possui uma mola linear com rigidez k_s , e um amortecimento linear com coeficiente c_s . O deslocamento da massa relativo à posição de equilíbrio do sistema é denotado por y , enquanto o deslocamento do suporte relativo à sua posição de repouso do suporte é denotado por x . Portanto o sistema possui duas configurações possíveis, o primeiro deles corresponde a situação onde a massa não entra em contato com o suporte e o outro corresponde a situação onde existe contato com o suporte. O sistema é ilustrado na figura 4.1

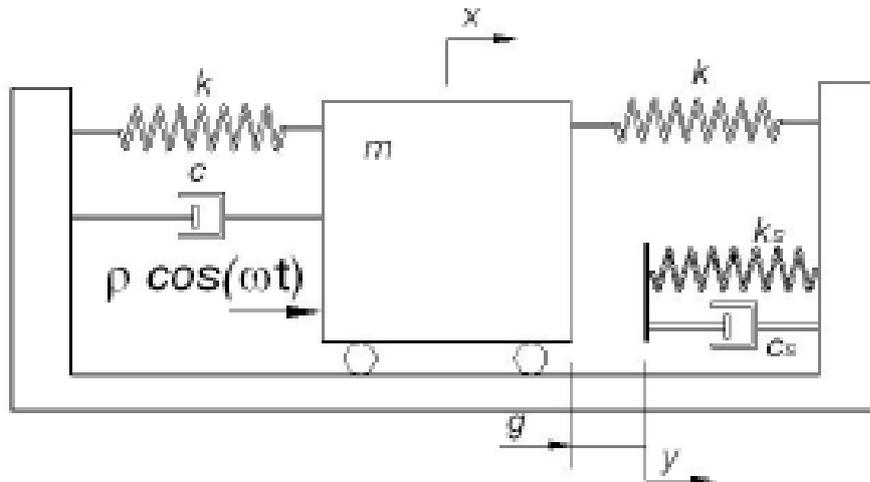


Figura 4. 1 Modelo de um grau de liberdade proposto por Sándor (2006)

Considerando que a força F_c corresponde a força de contato entre a massa e o sistema temos:

$$y < g \text{ e } f_c = 0, \text{ não ocorre contato.}$$

$$y \geq g \text{ e } f_c \neq 0, \text{ ocorre contato.}$$

A equação do movimento para esse caso é mostrado na Eq. 13

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + 2kx = \rho \cos(\omega t), \text{ sem contato.} \quad (13)$$

$$m\ddot{x} + (c + c_s)\dot{x} + 2kx + (x - g)k_s = \rho \cos(\omega t), \text{ com contato.}$$

Para que se possa obter resultados mais abrangentes, pode-se adimensionalizar as variáveis do sistema, então os novos parâmetros do sistema são dados pela Eq. 14

$$\omega_0^2 = \frac{2k}{m} ; \omega_s^2 = \frac{k_s}{m} ; \xi = \frac{c}{m} ; \xi_s = \frac{c_s}{m} ; F_0 = \frac{\rho}{mg} ; x = \frac{y}{g} \quad (14)$$

Com essas novas variáveis a condição de contorno passa a ser $x \geq 1$. Com isso a Eq. 13 pode ser reescrita, e resulta na Eq. 15

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -\xi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ \dot{x} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ \rho \cos(\omega t) \end{Bmatrix}, & x < l \text{ (sem contato)} \\ \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -\xi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ \dot{x} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ \rho \cos(\omega t) - F_c \end{Bmatrix}, & x \geq l \text{ (com contato)} \\ & & F_c = (x - l) \omega_s^2 + \dot{x} \xi_s \end{aligned} \quad (15)$$

Sándor (2006), testou esse sistema em forma empírica e numérica. Os parâmetros do aparato experimental foram identificados e são mostrados na Tabela 4.1

Tabela 4.1 - Parâmetros para o sistema de Sándor (2006).

k (N/m)	k_s (N/m)	C (N s/m)	C_s (N s/m)	m (kg)	ω_0 (rad/s)
8.47	1210	0.87	0.60	0.838	4.60

Com esses parâmetros definidos, resta somente a definição de alguns parâmetros ajustáveis, que são a frequência de forçamento ω , a sua amplitude ρ e o espaçamento inicial g . Valores negativos de g são possíveis, este caso corresponde a situação no qual o equilíbrio estático a mola de rigidez k_s está comprimida. Os resultados obtidos pelo método utilizado neste trabalho foram comparados aos resultados apresentados por Sándor (2006). Duas situações foram analisadas, no primeiro deles, os valores da frequência de forçamento ω e o espaçamento inicial g foram fixados, e o valor de forçamento ρ foi variado, como mostra a Tabela 4.2. No segundo caso, a distância inicial g foi variada e novos parâmetros são mostrados na Tabela 4.3.

Tabela 4.2 – Primeiro conjunto de teste apresentandos por Sándor (2006).

ω (rad/s)	g (m)	ρ (N)
3.69	- 0.0045	$0.29 \leq \rho \leq 0.46$

Tabela 4.3 – Segundo conjunto de teste apresentandos por Sándor (2006).

ω (rad/s)	g (m)	ρ (N)
11,15	$- 0.0012 \leq g \leq 0.0018$	0.33

O sistema foi simulado através de um algoritmo desenvolvido no software comercial MatLab. Os resultados são apresentados nas Figuras 4.2 e 4.3 juntamente com a comparação com os resultados obtidos numericamente por Sándor (2006), que validou experimentalmente os resultados da sua simulação numérica. Vemos que os resultados obtidos nesse trabalho são muito próximos aos resultados de Sándor (2006), o que valida o método utilizado neste trabalho. Vale ressaltar que as seções de

Poincaré não coincidem devido ao fato de que o plano arbitrário utilizado para a construção desta não foi o mesmo nos dois estudos.

Os resultados obtidos com os parâmetros da Tabela 4.2 são coincidentes com os resultados apresentados por Sándor (2006) como mostra a Figura 4.3. Os espaços de fase são totalmente coincidentes, o que indica que os estados do sistema são praticamente iguais. Traçando o diagrama de bifurcação, Fig. 4.2, para este caso e comparando com os resultados de Sándor (2006) é possível notar que ambos se aproximam, apresentando um pequeno deslocamento vertical, o que pode ser explicado pelo fato das seções de Poincaré utilizadas para traçar o diagrama são arbitrárias e não coincidentes com os apresentados por Sándor (2006). As respostas de período-1 ($\rho \geq 0,40 N$), período-2 ($0,28 N \leq \rho \leq 0,40 N$), período-4 ($0,26 N \leq \rho \leq 0,28 N$) e também resposta caótica ($\rho \leq 0,26 N$) apresentam boa concordância.

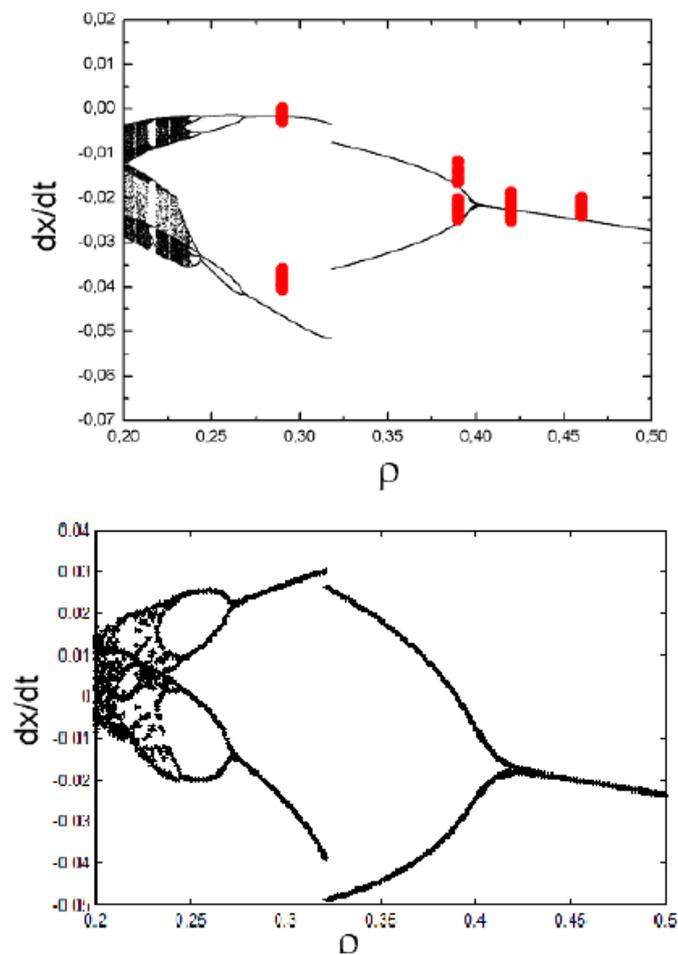


Figura 4.2 - Diagrama de bifurcação para ρ variável, comparado os resultados de Sándor (2006) (acima) e deste estudo (abaixo).

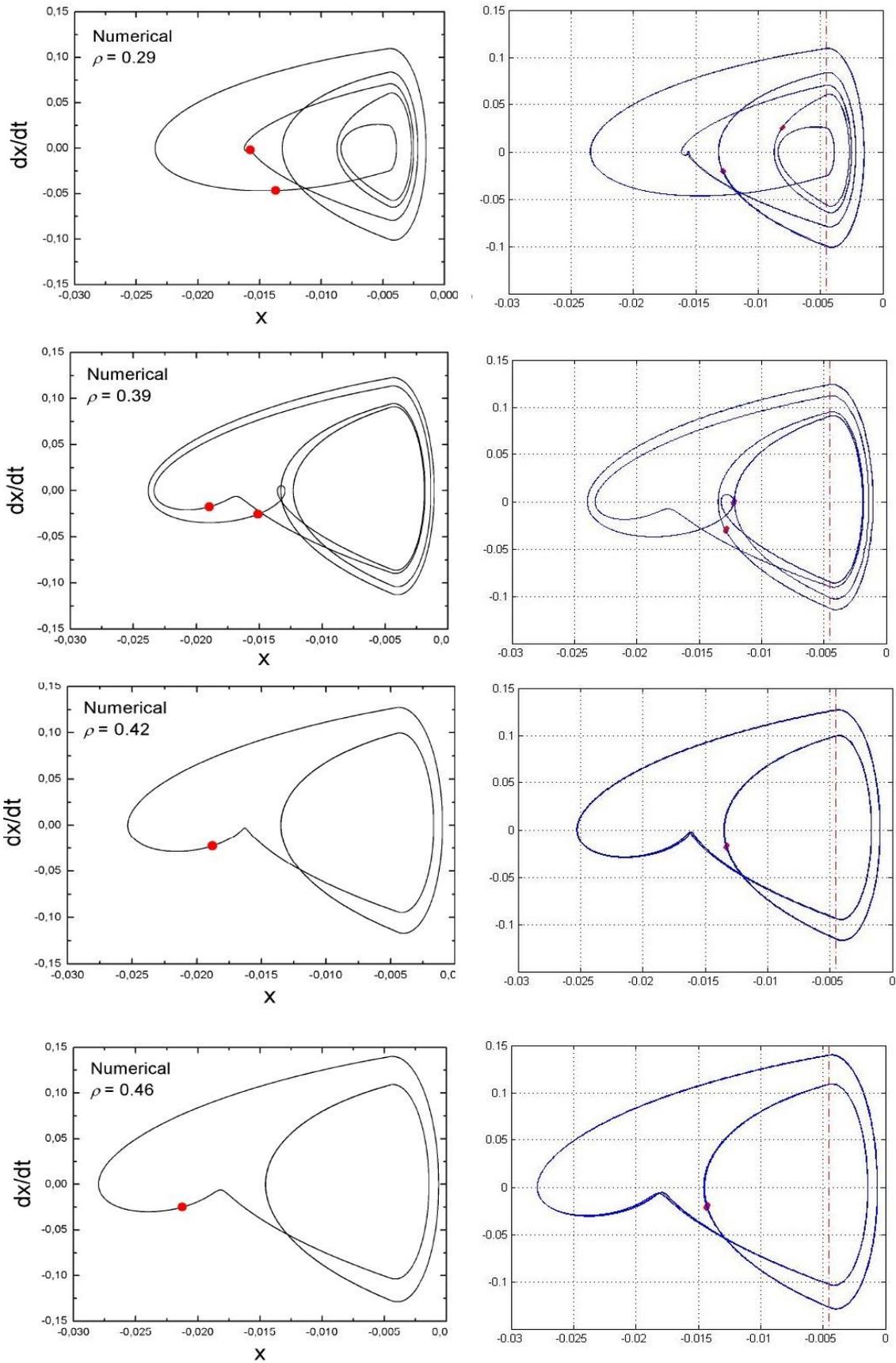


Figura 4. 3- Espaço de fase e seção de Poincaré, para ρ variável, comparado os resultados de Sándor (2006) (à esquerda) e deste estudo (à direita).

A influência do *backlash* é analisado com os parâmetros da Tabela 4.3. Para esta análise utiliza-se $\omega=11,15$ rad/s e $\rho=0,33$ N. O *backlash* varia de $-0,0015 \leq g \leq 0,002$ m, e a comparação dos diagramas de bifurcação é utilizado para apresentar os resultados deste estudo na Fig. 4.4. Novamente, deve-se enfatizar a concordância obtida entre os resultados de Sándor (2006) e deste trabalho. A Fig. 4.5 apresenta o espaço de fase para diferentes valores de *backlash* g ($-0,0012$ m, $0,005$ m, $0,0012$ m e $0,0014$ m), mostrando, respectivamente, período-1, período-2, período-3 e resposta caótica.

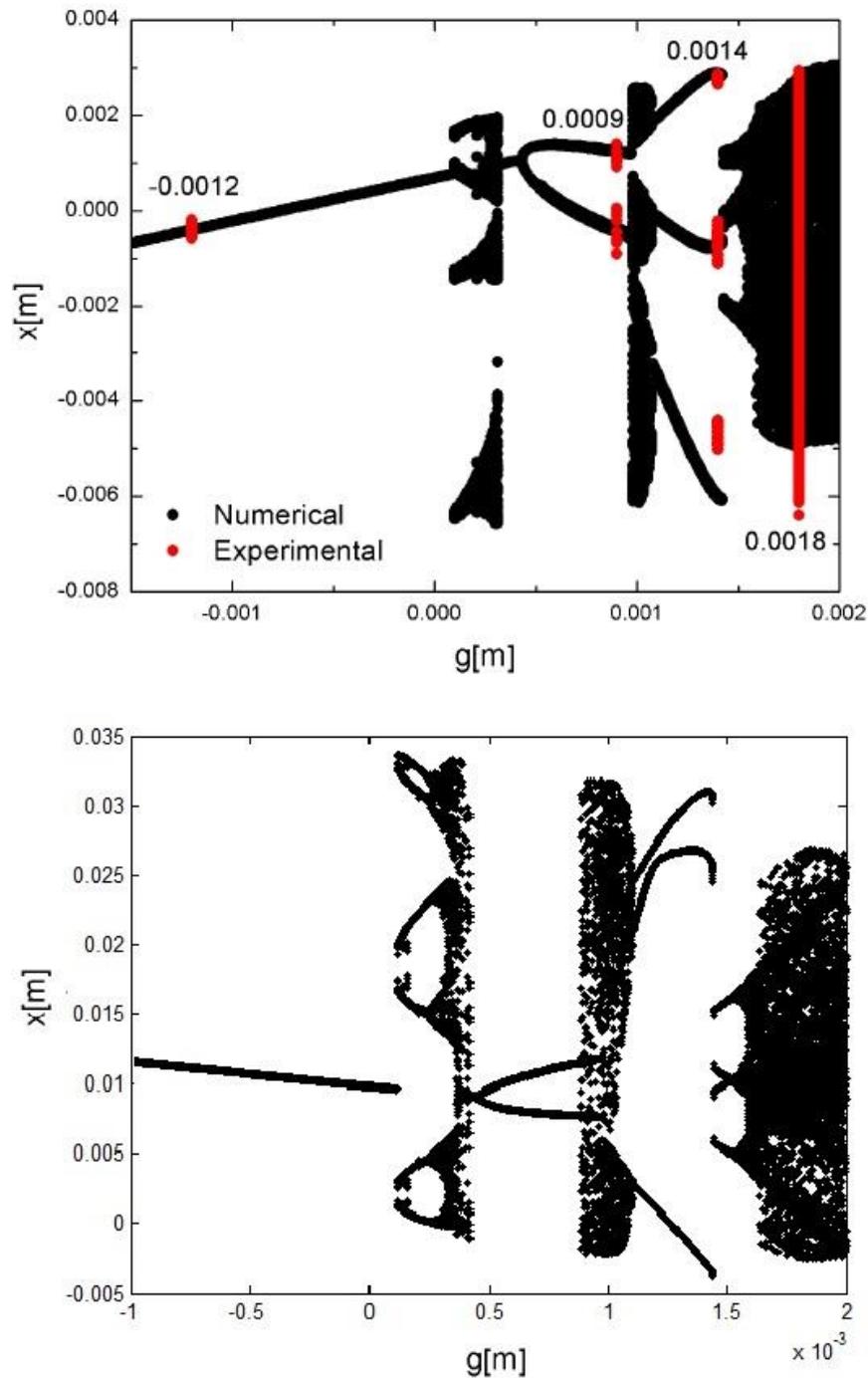


Figura 4. 4 - Diagrama de bifurcação para g variável, comparado os resultados de Sándor (2006) (acima) e deste estudo (abaixo).

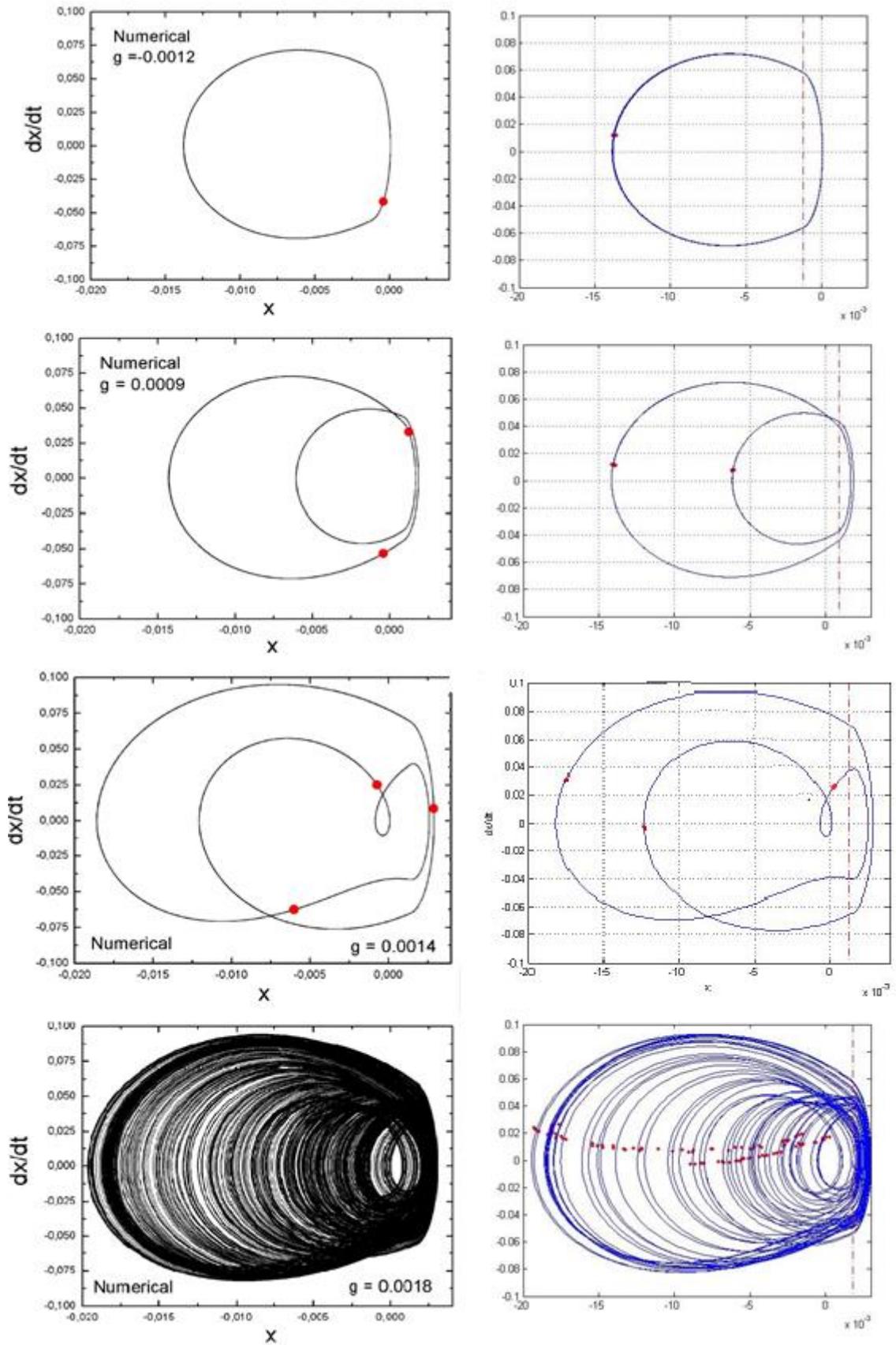


Figura 4. 5- Espaço de fase e seção de Poincaré, para g (*backlash*) variável, comparado os resultados de Sándor (2006) (à esquerda) e deste estudo (à direita).

4.3 SISTEMA DE UM GRAU DE LIBERDADE E DUPLO CONTATO

O modelo que será testado neste trabalho é para a avaliação em engrenagens de dentes retos. Nesta seção será analisado a ocorrência de duplo contato em que os dentes das engrenagens são submetidos.

O oscilador apresentando na Figura 4.6 é um sistema massa-mola simples, composto por uma massa m , duas molas de rigidez k . Duas barreiras de massa desprezível são colocadas a uma distância g da massa m , uma no sentido positivo do eixo adotado e outra no sentido negativo, em ambos os lados existe uma mola linear de rigidez k_s , e um amortecimento linear com coeficiente c_s . O deslocamento da massa relativo à posição de equilíbrio é o mesmo apresentando na seção 4.2.

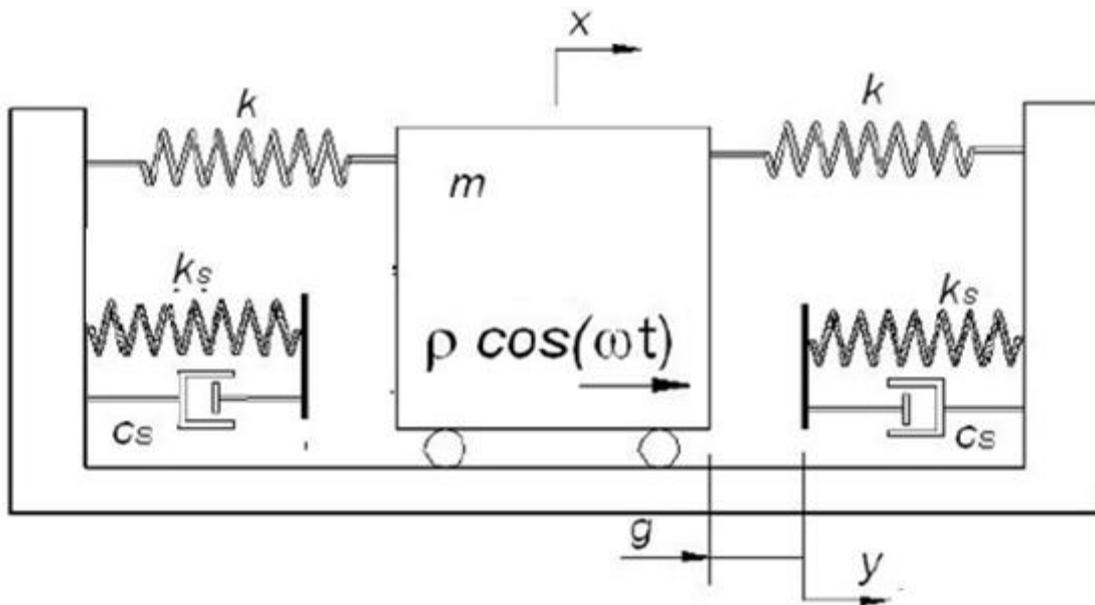


Figura 4.6 - Modelo de um grau de liberdade e contato duplo

Considerando que a força F_c , corresponde a força de contato entre a massa e o sistema temos:

$$y < g \text{ e } f_c = 0, \text{ não ocorre contato.}$$

$$y \geq g \text{ e } f_c \neq 0, \text{ ocorre contato.}$$

$$y \leq -g \text{ e } f_c \neq 0, \text{ ocorre contato.}$$

A equação do movimento para esse caso é mostrado na Eq. 16

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + 2kx = \rho \cos(\omega t), \text{ sem contato.} \quad (16)$$

$$m\ddot{x} + (c + c_s)\dot{x} + 2kx + (x - g)k_s = \rho \cos(\omega t), \text{ com contato.}$$

A equação pode ser reescrita da seguinte forma

$$\begin{cases} \begin{cases} \dot{x} \\ \dot{\ddot{x}} \end{cases} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ -\omega_0^2 & -\xi \end{bmatrix} \begin{cases} x \\ \dot{x} \end{cases} + \begin{cases} \mathbf{0} \\ \rho \cos(\omega t) \end{cases}, & -g < x < g \text{ (sem contato)} \\ \begin{cases} \dot{x} \\ \dot{\ddot{x}} \end{cases} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ -\omega_0^2 & -\xi \end{bmatrix} \begin{cases} x \\ \dot{x} \end{cases} + \begin{cases} \mathbf{0} \\ \rho \cos(\omega t) - F_c \end{cases}, & x \geq g \text{ e } x \leq -g \text{ (com contato)} \end{cases} \quad (17)$$

$$F_c = (x - 1) \omega_s^2 + \dot{x} \xi_s \quad (18)$$

Para esse novo sistema o diagrama de bifurcação, para os parâmetros da Tabela 4.1 e o conjunto de teste da Tabela 4.2, é mostrado na Fig. 4.7.

Nesse novo modelo, existe uma grande variação entre sistemas de periodicidade-1, periodicidade-2 e resultados caóticos. Para que seja melhor visualizado se faz necessário traçar o diagrama de fase para cada um dos conjuntos de teste, Fig. 4.8.

Para $0,30 \leq \rho \leq 0,43$ o sistema possui um resultado caótico, sendo impossível determinar quantas seções de Poincaré são encontradas. Para $0,43 < \rho \leq 0,45$, o sistema apresenta periodicidade-1, para $\rho = 0,46$ o sistema caminha para uma rota caótica, nesse caso, ampliando o diagrama de bifurcação e o diagrama de fase, encontramos periodicidade-6. Dois novos valores são testados $\rho = 0,255$ e $\rho = 0,27$, que apresentam periodicidade-1 e periodicidade-2 respectivamente.

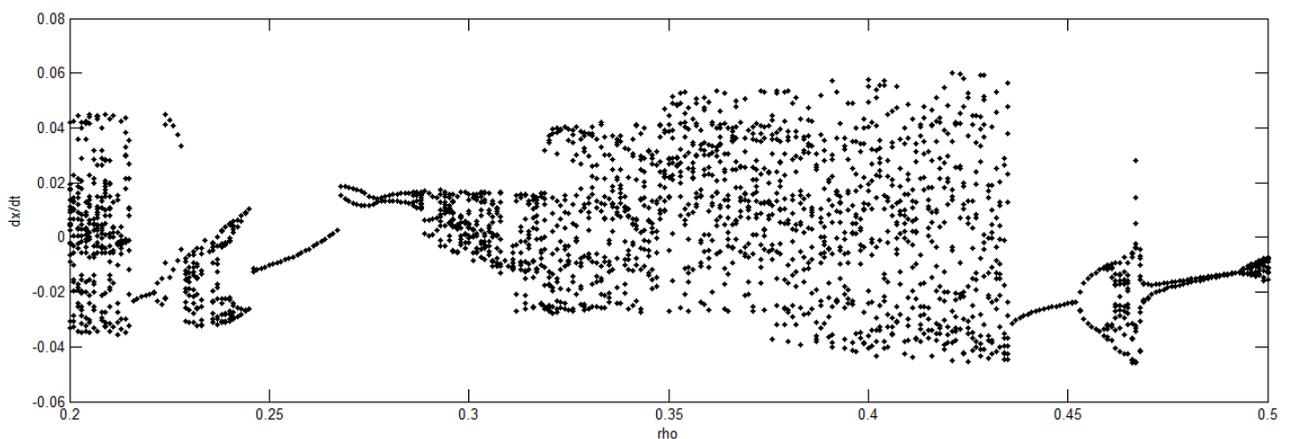


Figura 4.7 – Diagrama de bifurcação para ρ variável e contato duplo

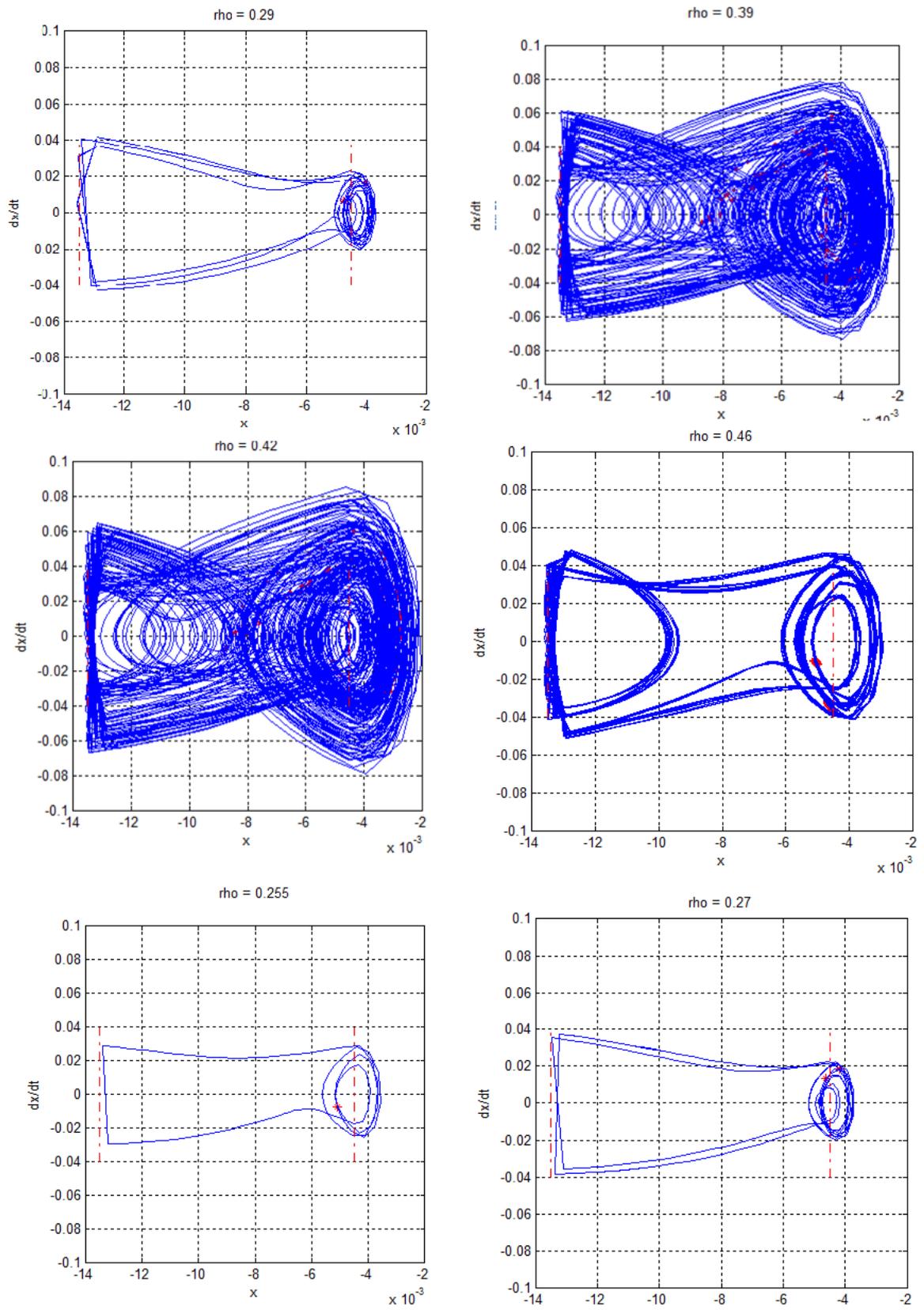


Figura 4.8 - Espaço de fase e seção de Poincaré, para ρ variável com contato duplo.

Também são testados, com a finalidade de validação, os diagramas de bifurcação e os espaços da fase para os parâmetros da Tabela 1 e as configurações da Tabela 3. O diagrama de bifurcação é apresentado na Fig. 4.9. Para uma melhor visualização, alguns espaços de fase são mostrados na Fig. 4.10.

No diagrama de bifurcação em que o *backlash* é variado, mantendo-se fixo a excitação em $\rho = 0,33$, podemos notar que o sistema apresenta em sua grande maioria respostas caóticas para o sistema de contato duplo, em alguns poucos intervalos é possível notar atratores de periodicidade-1 e de periodicidade-2, para $\delta = 0,0005$ e $\delta = 0,00195$ como mostrado na Fig. 4.10. Para os demais casos, nota-se que a resposta do sistema é quase sempre caótica.

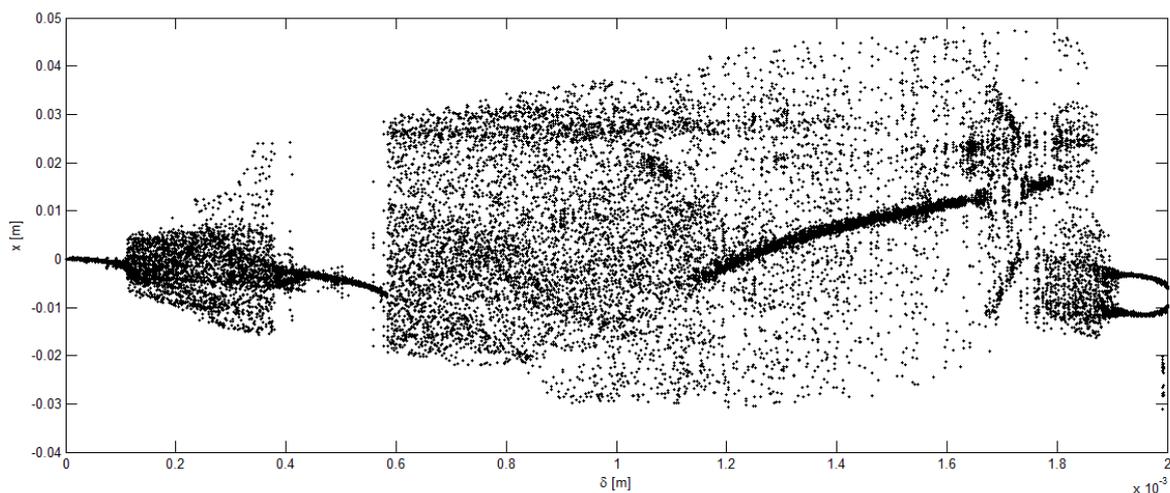


Figura 4.9 – Diagrama de bifurcação para folga variável e contato duplo

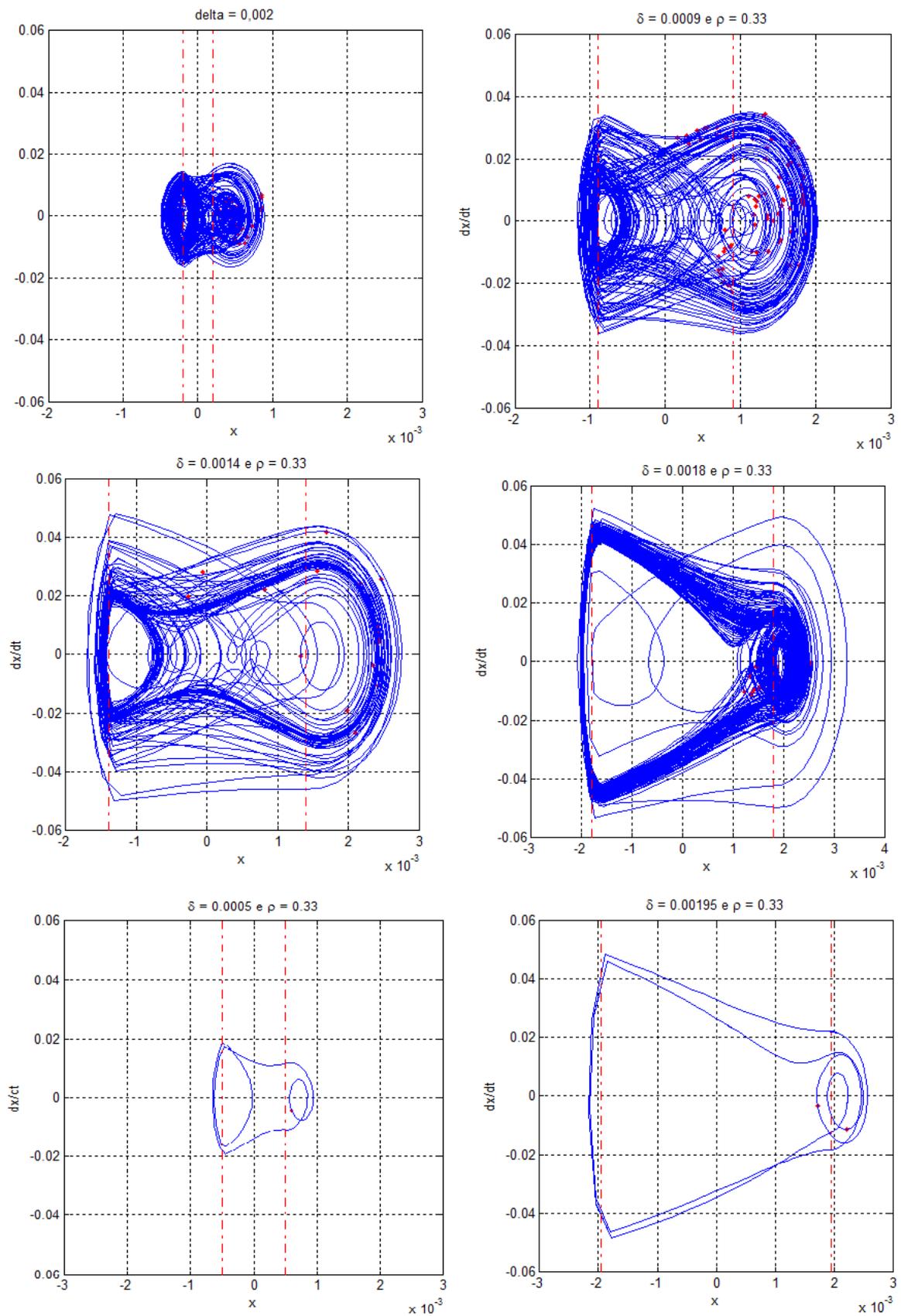


Figura 4.10 - Espaço de fase e seção de Poincaré, para δ variável com contato duplo.

5 MODELO DE ENGRENAGEM DE DENTES RETOS

Kahraman et al. (1991) apresentam um modelo completo para engrenagens simples considerando a rigidez equivalente do sistema como uma variante no tempo e folgas não-lineares no sistema. Kahraman et al. (1996) consideram interações paramétricas e excitações forçando o sistema que apresenta *backlash*.

Balanchandran et al. (2009), apresentam uma solução para a mecânica do contato entre os dentes de engrenagens de dentes retos, nele a força de impacto é tratado de forma senoidal. O método de integração adotado consiste no Runge-Kutta-Fehlberg, através da função ode45 do software MatLab®.

O método de integração deste trabalho é o mesmo adotado por Balanchandran et al. (2009), e os resultados apresentado por este, serão reproduzidos neste trabalho.

5.1 MODELO DE MECÂNICA DO CONTATO

O modelo de contato apresentado por Balanchandran et al. (2009) é descrito na seção 2.3, para se obter resultados mais abrangentes e, assim, mais uteis, pode-se definir variáveis adimensionais para substituir as variáveis dimensionais do problema, a mesma transformação é feita por Balanchandran et al. (2009).

$$\omega_n^2 = \frac{k_0}{m_e} \quad 2\zeta = \frac{c}{m_e \omega_n} \quad \Omega_M = \frac{\omega_M}{\omega_n} \quad (19)$$

$$\tau = \omega_n t \quad f_0 = \frac{T_0}{r_1 b k_0} \quad p = \frac{z}{b}$$

Então, da Eq. 7, temos

$$\ddot{p} + 2\zeta\dot{p} + (1 - \epsilon \cos\Omega_M)h(p) = f_0(1 + \alpha \cos\Omega_M \tau) \quad (20)$$

onde,

$$\begin{aligned} h(p) &= 0 & |p| &\leq 1 \\ h(p) &= p - \text{sgn}(p) & |p| &> 1 \end{aligned} \quad (21)$$

Os parâmetros de teste utilizados para este modelo é mostrado na Tabela 5.1.

Tabela 5.1 – Parâmetros para o sistema de Balanchandran (2011)

Ω_M	ζ	α	f_0	ϵ
0,5	0,005	0,05	0,1	$0 \leq \epsilon \leq 0,4$

A Fig. 5.1 apresenta os estados transientes para diferentes valores de ϵ em $0 \leq \tau \leq 100$. Mas, estamos interessados no estado estacionário do sistema, que fica evidente com valores de $\tau \leq 170$, e os gráficos são comparados com os encontrados por Balanchandran et al. (2009) na Fig 5.2. Onde as razões de rigidez $\epsilon_1 = 0$, $\epsilon_2 = 0,1$, $\epsilon_3 = 0,2$, $\epsilon_4 = 0,4$.

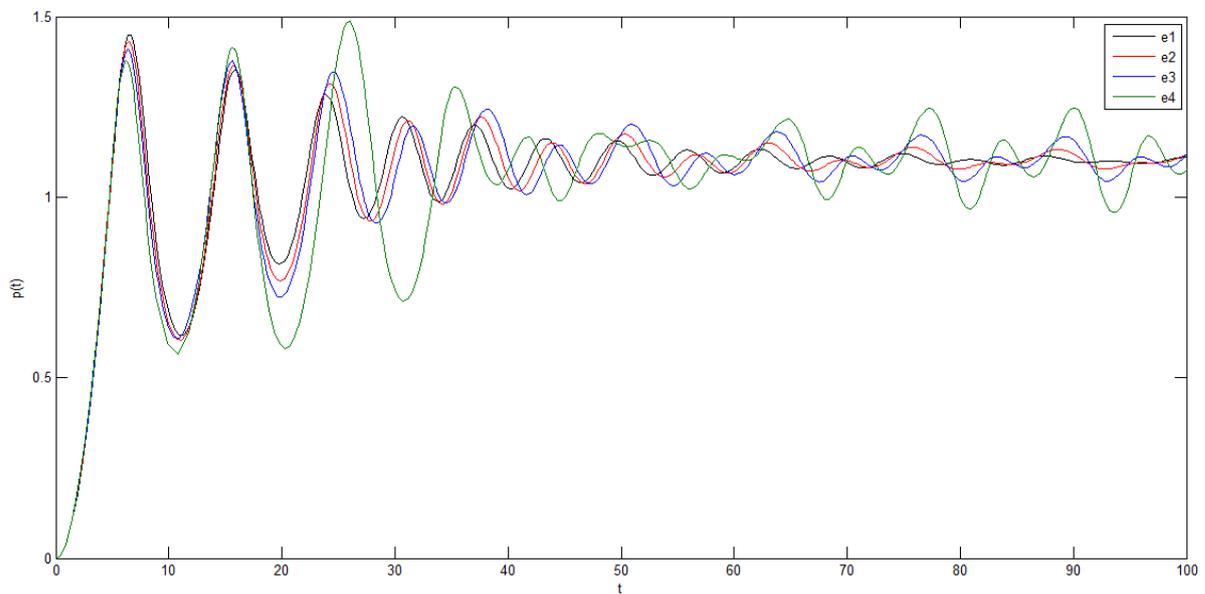


Figura 5.1 – Estado transiente para o sistema de Balanchandran et al. (2009).

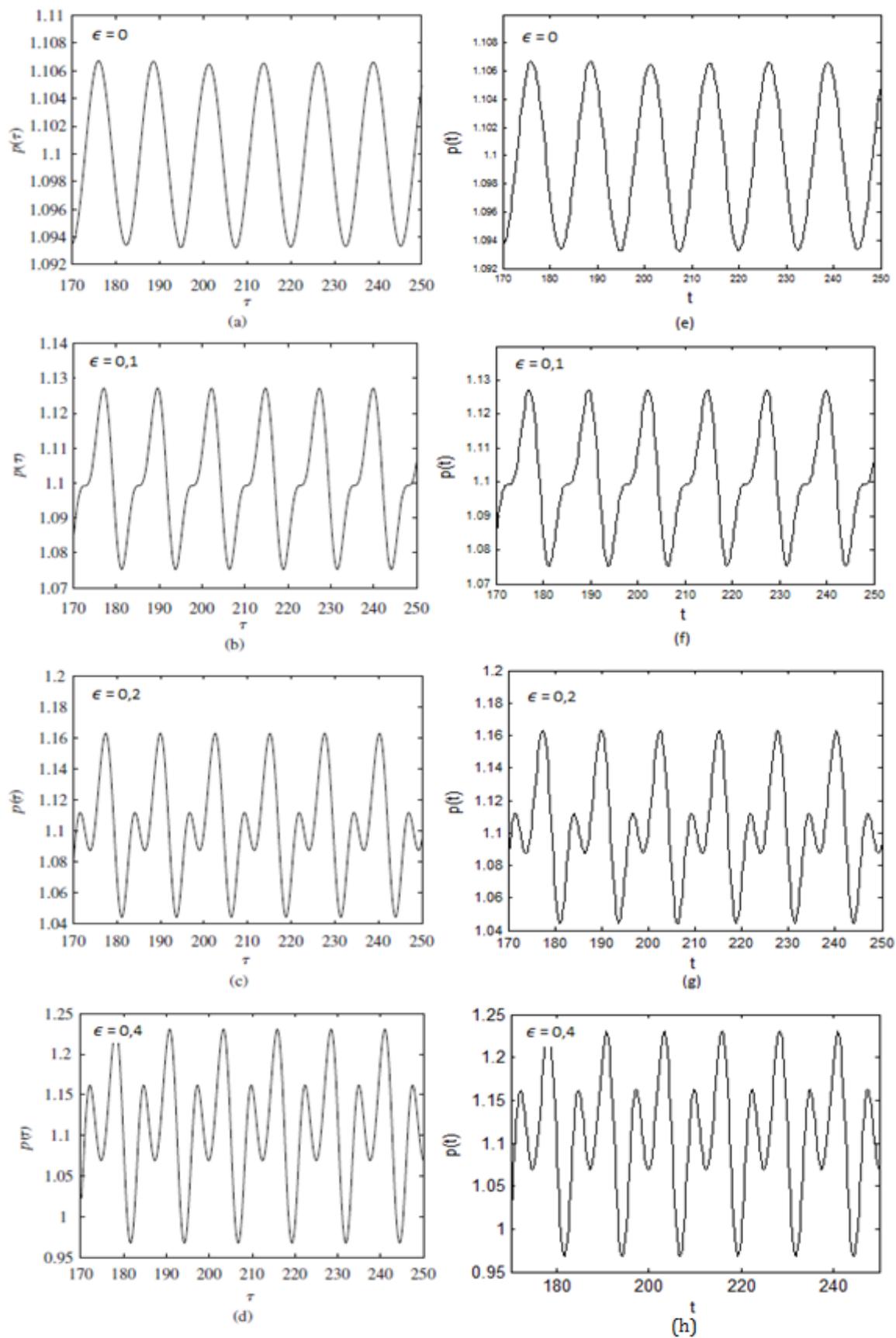


Figura 5.2 – Estados estacionários para diferentes valores de ϵ , comparando os resultados de Balanchandran et al. (2009) (à esquerda [(a), (b), (c), (d)]) e deste estudo (à direita [(e), (f), (g), (h)])

Uma forma de se determinar a periodicidade de cada um destes casos é traçando o espaço de fase e suas respectivas seções Poincaré, como mostra a Fig. 5.3.

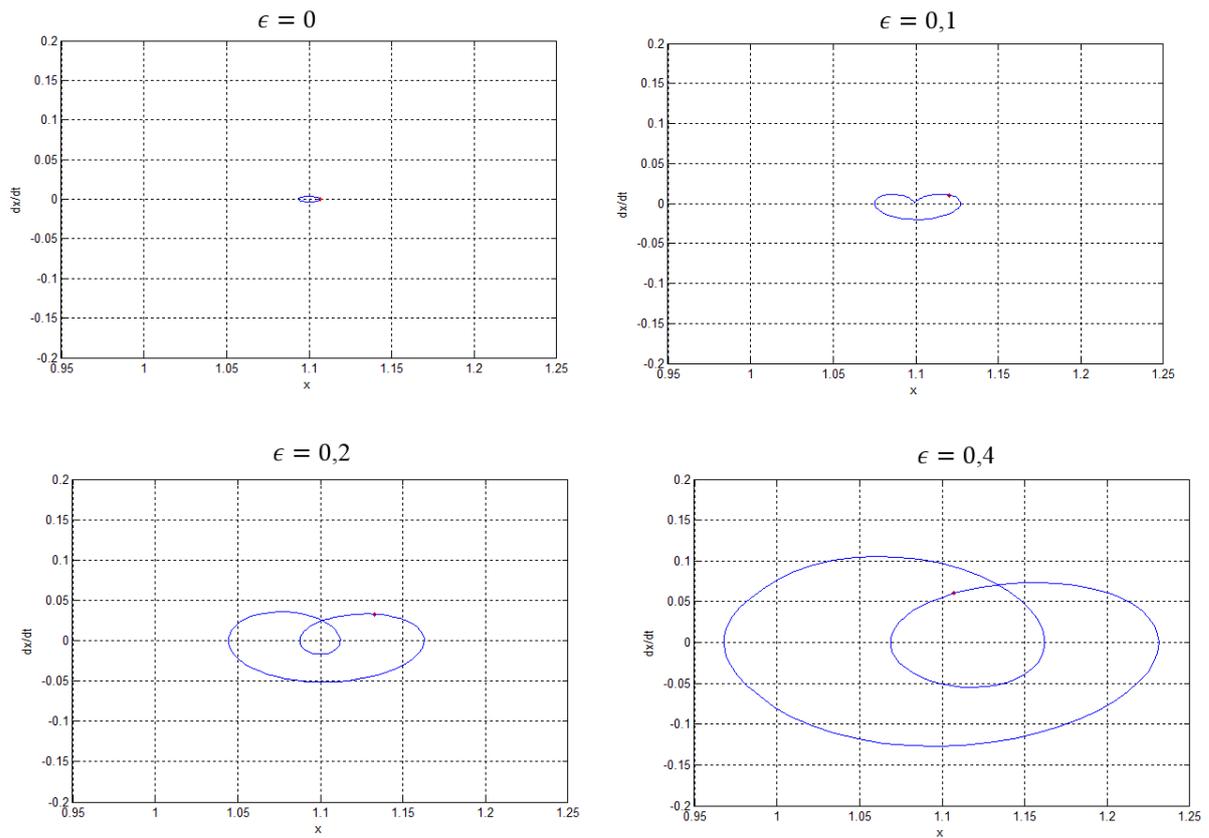


Figura 5.3 – Espaço de fase e seção de Poincaré para para diferentes valores de ϵ .

Para $\Omega_M = 0,5$, conforme analisado por Balanchandran et al. (2009), todas as respostas apresentadas possuem periodicidade-1. Para avaliar o comportamento do sistema para outras frequências Ω_M , diagramas de bifurcação foram traçados, como mostram as Fig. 5.4, 5.5, 5.6 e 5.7.

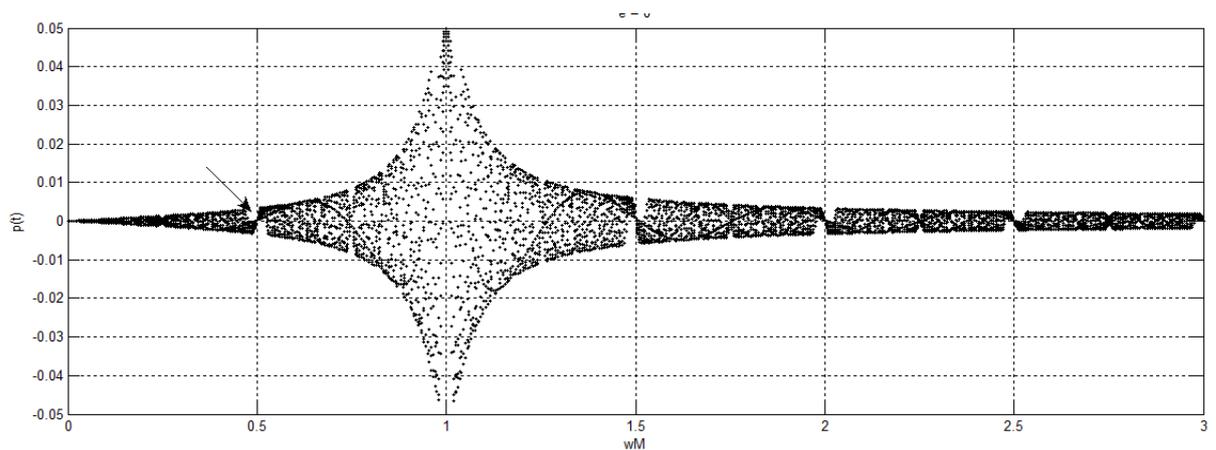


Figura 5.4 – Diagrama de bifurcação para $\epsilon = 0$.

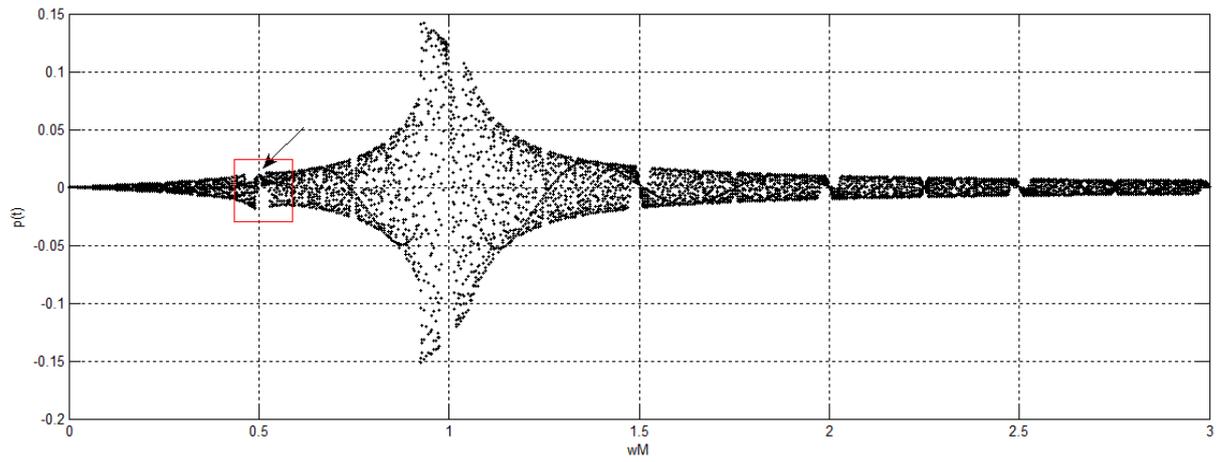


Figura 5.5 - Diagrama de bifurcação para $\epsilon = 0,1$

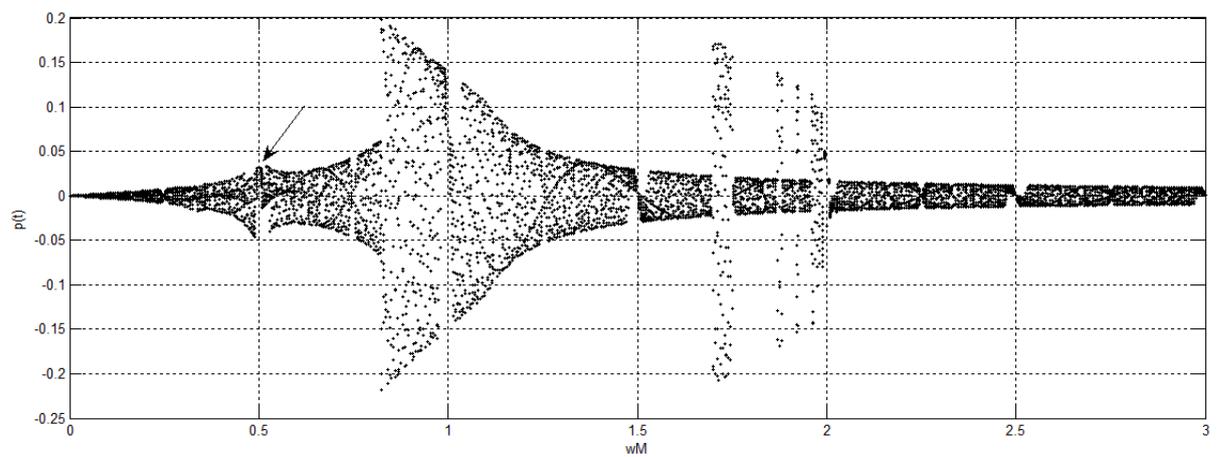


Figura 5.6 - Diagrama de bifurcação para $\epsilon = 0,2$

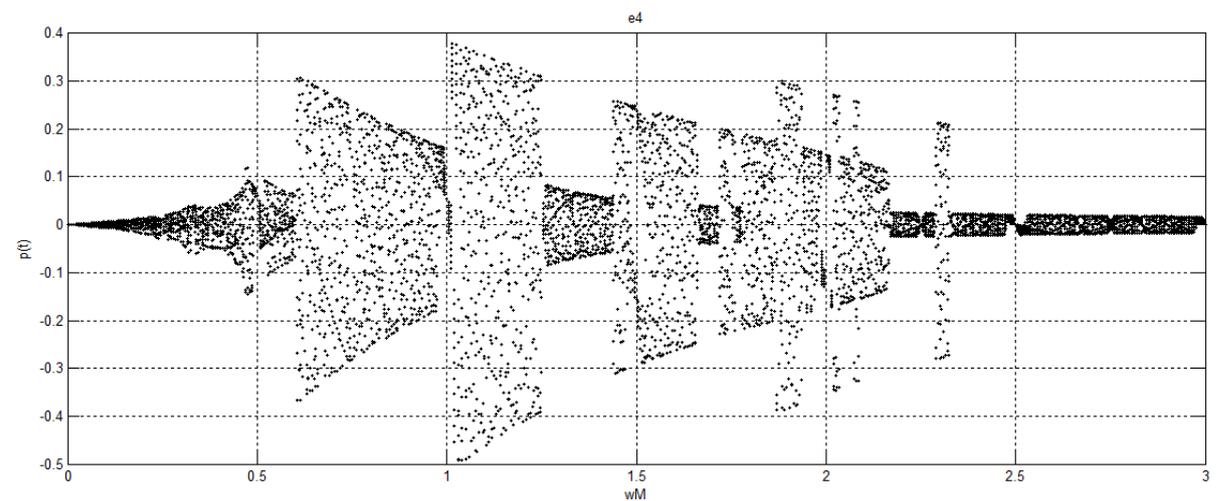


Figura 5.7 - Diagrama de bifurcação para $\epsilon = 0,4$

Para os quatro casos apresentados, nota-se que para $\Omega_M = 0,5$ as respostas apresentam periodicidade-1, isso corresponde ao caso em que a frequência natural do dente de engrenagem ω_n é a

metade da frequência em que gira a engrenagem ω_M . A periodicidade-1 também pode ser encontrada para ambos os casos em $\Omega_M = 1,5$, $\Omega_M = 2,0$, $\Omega_M = 2,5$ e $\Omega_M = 3,0$.

A Fig. 5.8, apresenta a comparação do espaço de fase e seção de Poincaré para $0,48 \leq \Omega_M \leq 0,52$, é possível comprovar que a periodicidade-1 ocorre somente quando a frequência natural do dente da engrenagem ω_n corresponde à metade da frequência em que gira a engrenagem ω_M . Qualquer pequena perturbação no sistema caótico.

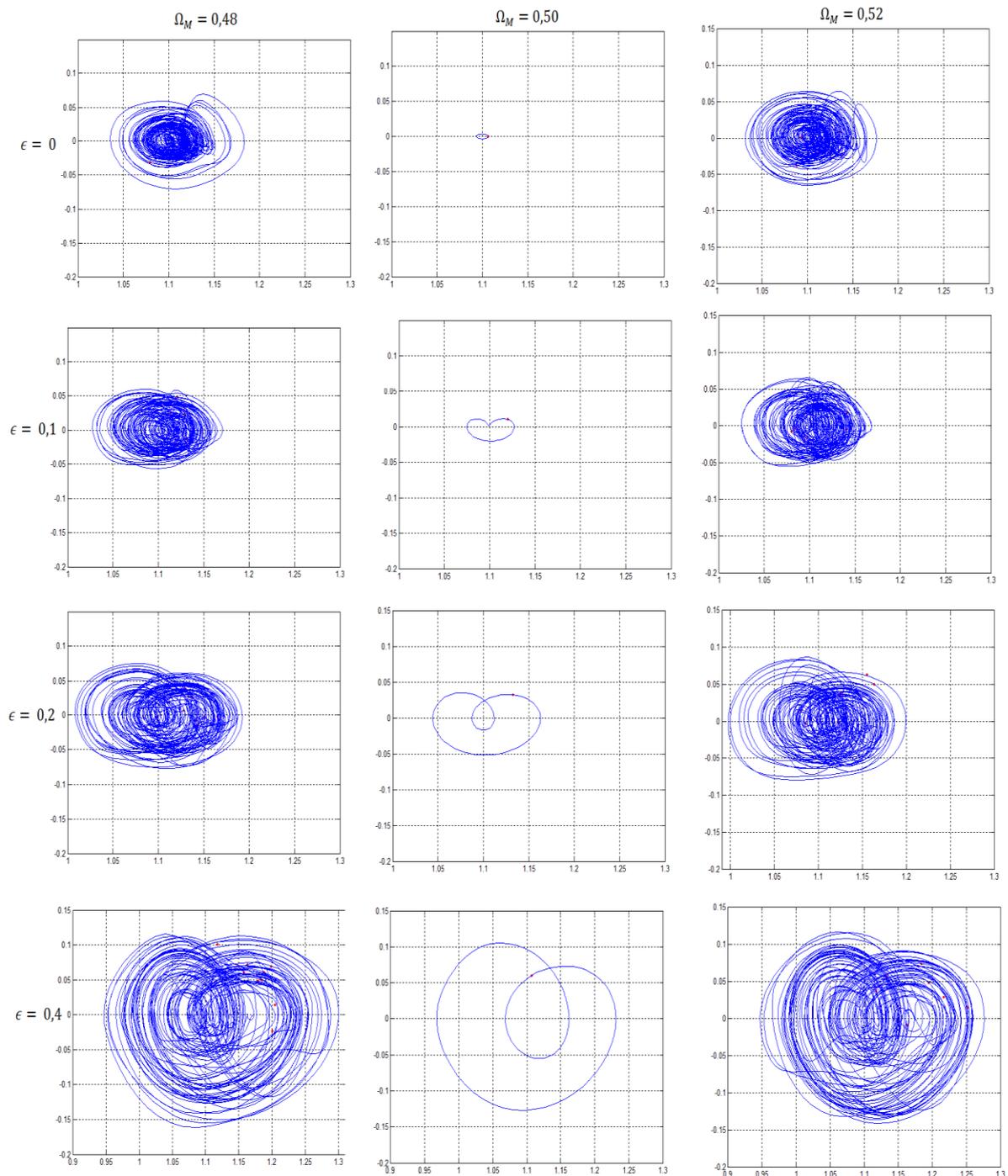


Figura 5.8 – Espaço de Fase e seção de Poincaré para $0,48 \leq \Omega_M \leq 0,52$

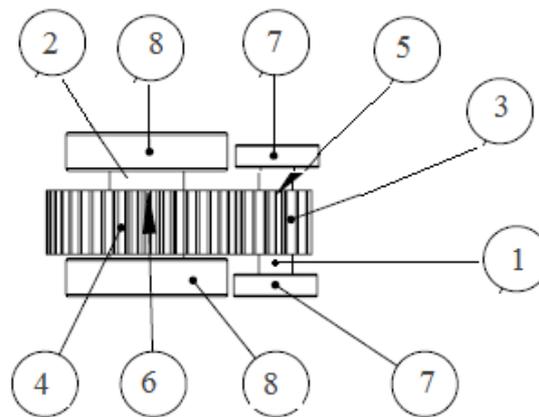
5.2 MODELO PRÁTICO

Um exemplo real é utilizado nessa seção com a finalidade de demonstrar os fatores utilizados por Balanchandran at al. (2009) e permitir uma melhor avaliação do problema.

O sistema consiste em um redutor de velocidades que está acoplado a um motor de 100 kW que gira a 3600 rpm. O eixo de saída do redutor gira a 1200 rpm, ou seja, uma redução de 3:1. O carregamento de impacto do motor e da máquina conduzida é considerado desprezível.

O redutor deve possuir uma vida de cinco anos com 20000 horas/ano de operação. As engrenagens são de aço e endurecidas por completo a 595 Brinell e possuem um padrão de qualidade seis. O fator de segurança mínimo deve ser igual a dois e com 95% de confiabilidade.

Para o seu dimensionamento foi adotado a metodologia da AGMA que estabelece dois modos de falha para engrenagem: flexão do dente e fadiga por contato. Para os eixos realizou-se o dimensionamento estático e posteriormente foram testados rigidez e fadiga. Mancais foram selecionados e chavetas projetadas. A Fig 5.9 apresenta o desenho de conjunto do redutor utilizado.



* Desenho fora de escala

8	Rolamento C e D	SKF NU 215 ECP	2
7	Rolamento A e B	SKF NU 213 ECP	2
6	Chaveta 3	Aço 1020 Laminado a Quente	1
5	Chaveta 2	Aço 1020 Laminado a Quente	1
4	Engrenagem 3	Aço 1045 Temperado e Revenido	1
3	Engrenagem 2	Aço 1045 Temperado e Revenido	1
2	Eixo b	Aço 1020 Laminado a Quente	1
1	Eixo a	Aço 1020 Laminado a Quente	1
Nº DO ITEM	Nº DA PEÇA	DESCRIÇÃO	QTD.

Figura 5.9 – Desenho de conjunto do redutor

Estamos interessados nos comportamento do par de engrenagens que possuem dentes retos, que são fabricados de aço 1045 temperado e revenido e endurecidos a 595 Brinell. O redutor deve ser o mais compacto possível, a primeira engrenagem possui 15 dentes, diâmetro primitivo de 105 mm, rotação de 3600 rpm e largura de face de 110 mm. Então módulo de 7 mm, adendo de 7 mm, dedendo de 8,8 mm, o dente possui espessura de 11 mm. A segunda engrenagem possui 45 dentes e diâmetro primitivo de 315 mm e rotação de 1200 rpm. Os eixos *a* e *b* possuem 63 mm e 74 mm respectivamente e possuem 305 mm de comprimento. E o backlash para essas engrenagens é de cerca de 0,08 mm.

A carga transmitida é dada por:

$$P_1 = \frac{60000.H}{\pi.d.n} \quad (22)$$

O dente da engrenagem será modelado como uma pequena viga engastada, com as mesmas dimensões do dente, como mostra a Fig. 5.10.

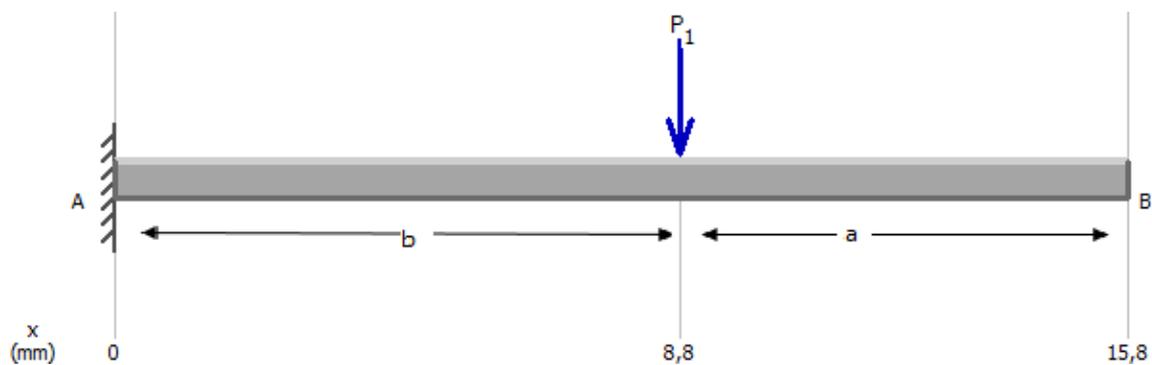


Figura 5.10 – Modelo de viga engastada para dente de engrenagem

Para o aço 1045 temperado e revenido, temos que o módulo de elasticidade é $E = 205 \text{ GPa}$, e o momento de inércia I , pode ser calculado por:

$$I = \frac{m}{12} (l^2 + c^2) \quad (23)$$

onde $m = (l \cdot c \cdot e) \cdot \rho / g$, onde l é a largura de face, c é o comprimento do dente (adendo+dedendo), e é a espessura do dente da engrenagem, $\rho = 7860 \text{ kg/m}^3$ é a densidade do aço e $g = 9,79 \text{ m/s}^2$ é a gravidade.

Para encontrarmos a rigidez equivalente do dente, primeiramente é necessário calcular sua deflexão, que para vigas em balanço e carga intermediária é dada por:

$$y_{AB} = \frac{P_1 \cdot x^2}{6EI} (x - 3b) \quad (24)$$

$$y_{BC} = \frac{P_1 \cdot b^2}{6EI} (b - 3x)$$

As deflexões encontradas são mostradas na Fig. 5.11.

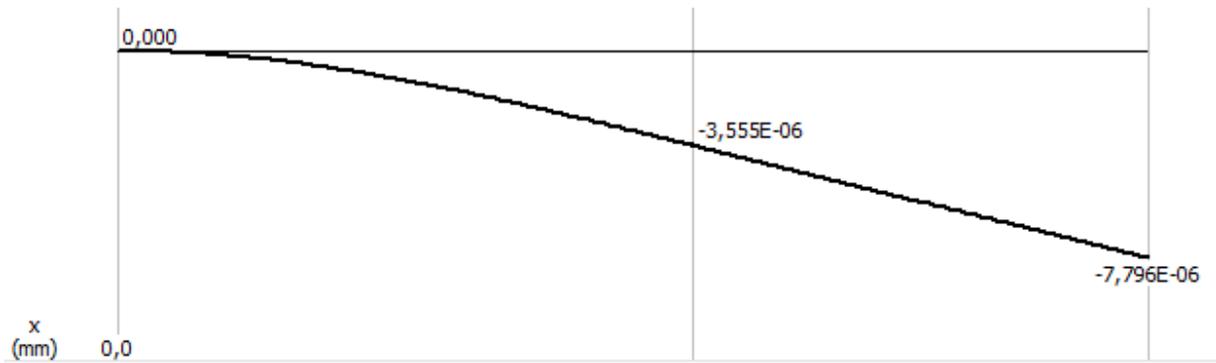


Figura 5.11 – Diagrama de Deflexão para dente da engrenagem

A constante de mola é definida como:

$$k_0 = \frac{P_1}{y_{max}} \quad (25)$$

Sabendo que $\omega_M = n_1 \cdot \omega_1 = n_2 \cdot \omega_2$, onde n_1, n_2, ω_1 e ω_2 são respectivamente o número de dentes das engrenagens 1 e 2 e a velocidade das mesmas respectivamente

Os torques são $T_1 = P_1/r_1$ e $T_2 = P_1/r_2$ e os momentos de inercia de massa polar são dados por:

$$J_1 = (M_1 * (d_1^2 - d_{eixo_a}^2))/8 \quad (26)$$

$$J_2 = (M_2 * (d_2^2 - d_{eixo_b}^2))/8$$

onde d_{eixo_a} e d_{eixo_b} são respectivamente os diâmetros dos eixos a e b , d_1 e d_2 são os diâmetros da primeira e da segunda engrenagem respectivamente, e M_1 e M_2 é a massa das engrenagem 1 e 2 respectivamente.

Utilizando a equação as Eq. (19), encontramos os seguintes resultados:

Tabela 5 - Parâmetros do novo sistema

Ω_M	ζ	α	f_0	ϵ
0,041	0,005	0,05	0,035	$\epsilon = 0,0$

A razão de rigidez que será adotada para a nova simulação é $\epsilon = 0,0$ e $\alpha = 0,05$. Com os novos parâmetros definidos, os gráficos de estado estacionário, Fig.5.12 e o gráfico de espaço de fase e seção de Poincaré, Fig.5.13, utilizando o método de Balanchandran at al. (2009) são mostrados.

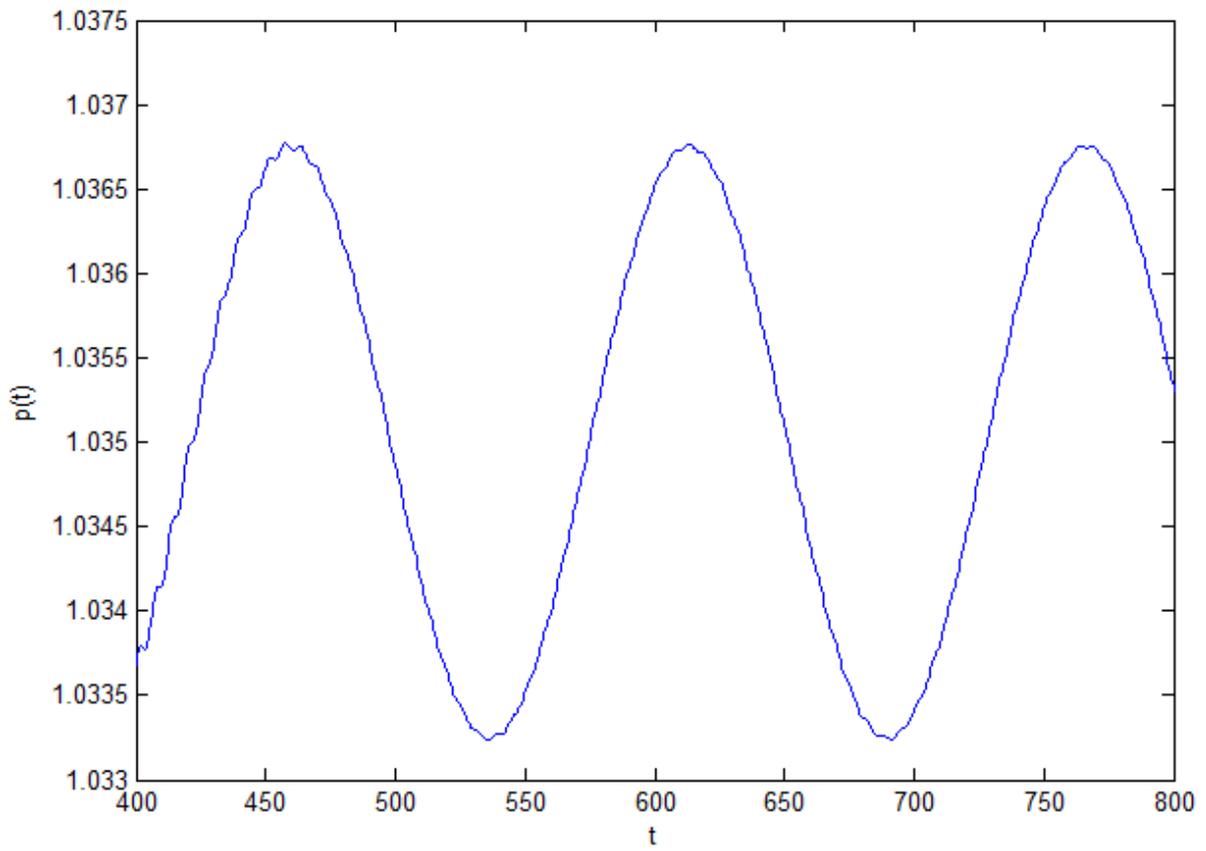


Figura 5.12 – Estado estacionário para engrenagem simples

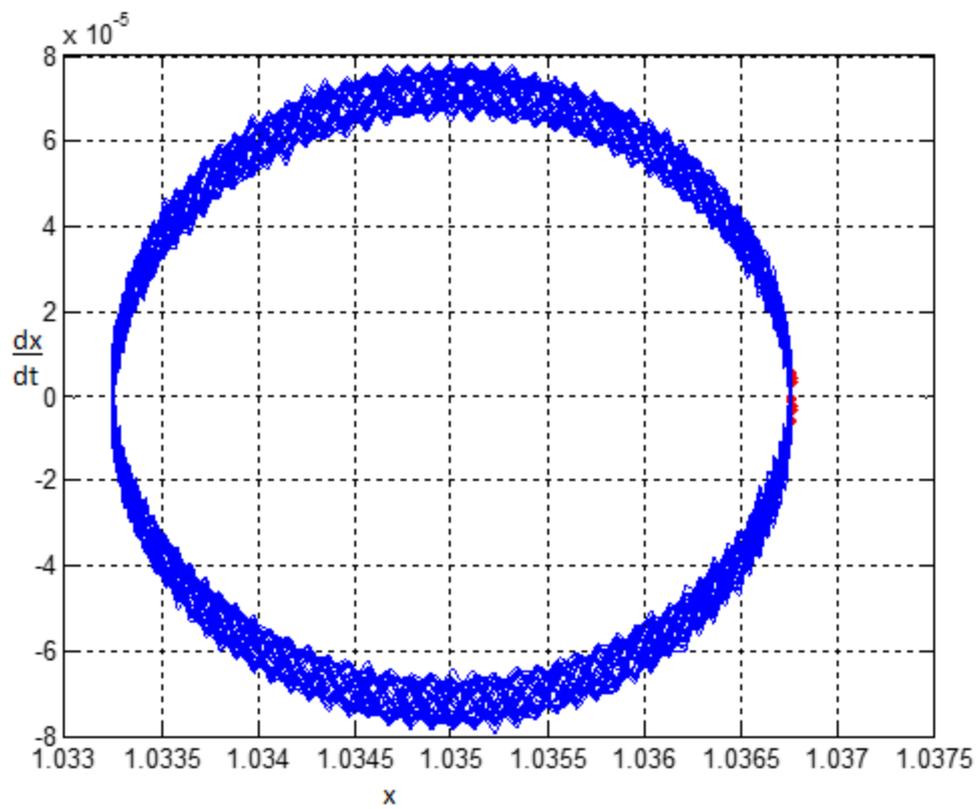


Figura 5.13 – Espaço de Fase e Seção de Poincaré para uma engrenagem simples

A Fig. 5.14 apresenta o diagrama de bifurcação do modelo descrito acima, nela você encontra uma região com menores amplitudes, contudo é difícil descrever sobre a periodicidade das órbitas. São necessários estudos mais aprofundados a fim de evidenciar a ausência de transiente no diagrama de bifurcação. Não fica claro a existência ou não de uma região caótica a partir da Fig. 5.14

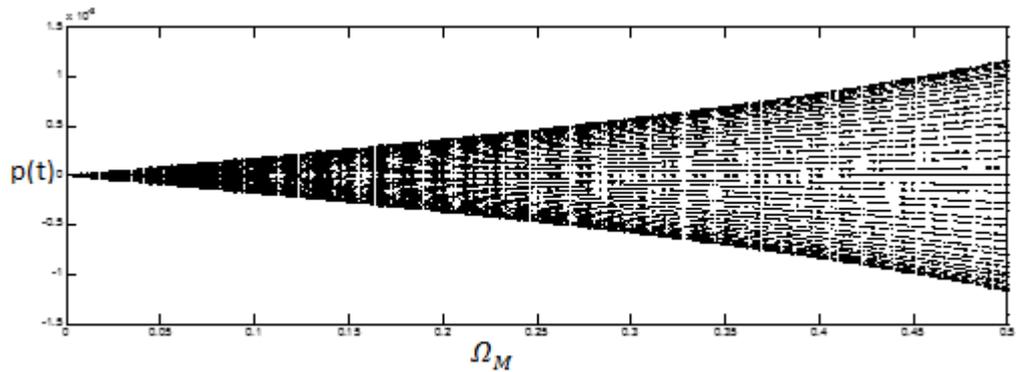


Figura 5.14 – Diagrama de Bifurcação

6 CONCLUSÃO

Um sistema dinâmico descontínuo foi analisado neste trabalho. O modelo utilizado para a validação, consiste em um sistema de um grau de liberdade com contato. A análise foi bem sucedida. Os resultados obtidos foram semelhantes aos obtidos numericamente e validados experimentalmente por Sándor (2006), e a modelagem de Balanchandran et al. (2009) foi testada para casos específicos, demonstrando as particularidades desse tipo de modelagem, e validando o método de integração de Range-Kutta-Fehlberg e do tratamento rígido dado à equação diferencial que governa o sistema. Nesse caso a interface de contato apresentava rigidez, fazendo com que o passo de integração fosse relativamente pequeno, e as forças de contato e excitação eram unidirecionais.

Como o sistema apresentado é não-linear, foi necessário a utilização de três ferramentas que fossem adequadas para a melhor análise do problema, com a utilização do espaço de fase foi possível verificar o trajetória dos estados do sistema, com a construção da seção de Poincaré e foi possível determinar a periodicidade do sistema, com o diagrama de bifurcação foi obtida uma visão global do comportamento do sistema, obtendo comportamentos periódicos e caóticos.

Para a solução numérica foi utilizado o método de Range-Kutta-Fehlberg. A simulação numérica foi realizada no software Matlab a partir de uma pré-definida disponível, a função ode45, o que facilitou a utilização de um algoritmo e houve significativa redução do tempo de solução dos problemas.

A determinação do erro utilizado é de extrema importância para o método de integração utilizado, devido principalmente as mudanças qualitativas na natureza da resposta do sistema como consequência da variação dos parâmetros deste trabalho. O erro utilizado foi de 10^{-8} , o que apresentou-se eficaz e com os resultados compatíveis com os obtidos por Sándor (2006), e por Balanchandran et al. (2009).

Um modelo para contato duplo foi apresentado e para parâmetros adotados anteriormente para outros casos apresentou resultados satisfatórios com uma grande riqueza de resultados e compatibilidade com o esperado.

Ao utilizar a modelagem proposta por Balanchandran et al. (2009) em que a rigidez da mola equivalente é uma variante no tempo foi possível determinar pequenas faixas de estabilidade no sistema com esse dado, sistema de engrenagens de dentes retos podem ser feitas previsões de velocidades em que o modelo apresentará uma menor amplitude de vibração.

Pode-se dizer que o trabalho cumpriu seus objetivos e ainda deixa em aberto futuras possibilidades de aprofundamento, como novas formas de tratar o impacto que poderia utilizar somatórios de senos e cossenos, um maior aprofundamento no modelo descrito de contato duplo, entre outros, com a finalidade de se modelar o comportamento de sistemas reais com mais precisão.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Balachandran, B., Magab E.; *Vibrations, Second Edition*. Cengage Learning, Ltda. (2009) ISBN – 0-534-5520-4.
- Brandão, A.; *Não-linearidades na dinâmica dos contatos entre rotor e estator em máquinas rotativas*. Projeto de graduação pela Universidade de Brasília (2011).
- Budynas, Richard G.; *Elementos de máquinas de Shigley: projeto de engenharia mecânica*. AMGH (2011) ISBN – 978-85-63308-20-7.
- Comparin, R.J., Singh, R.; (1989) *Nonlinear frequency response characteristics of an impact pair*. Journal of Sound and Vibration 134,259-290.
- Kahraman, A., Singh, R.; (1990) *Non-linear dynamics of a spur gear pair*. Journal of Sound and Vibration 142, 49-75.
- Kahraman A. and Singh,R. “*Interactions between time-varying mesh stiffness and clearance nonlinearities in a geared system,*” J. Sound Vibration, Vol. 146, No. 1, pp. 135–156 (1991);
- Kahraman A. and Blankenship, G. W., “*Interactions between commensurate parametric and forcing excitations in a system with clearance,*” J. Sound Vibration, Vol. 194, No. 3, pp. 317–336 (1996);
- Sándor, D.; *Investigações Experimentais e Numéricas da Dinâmica Linear e Caos em Sistemas Não-Suaves*. Projeto de fim de curso pela Universidade Federal do Rio de Janeiro. (2006).
- Savi, M.A.; *Dinâmica não-linear e Caos*. E-papers, Ltda. (2006). ISBN-85-76500-62-0.
- WANG, C.C.; (1978) *Rotational vibration with backlash: Part 1*. Journal of Mechanical Design, Transactions of the American Society of Mechanical Engineers 100, 363-373.
- WANG, C.C.; (1981) *Rotational vibration with backlash: Part 2*. Journal of Mechanical Design, Transactions of the American Society of Mechanical Engineers 103, 387-397.
- Wriggers, P.; *Computational Contact Mechanics*. John Wiley & Sons, Ltda. (2002). ISBN - 0-471-49680-4