



**Universidade de Brasília - UnB  
Faculdade UnB Gama - FGA  
Curso de Engenharia Automotiva**

**SIMULAÇÃO NUMÉRICA DO PROCESSO DE  
ESTAMPAGEM MECÂNICA EM CHAPAS  
METÁLICAS ATRAVÉS DO MODELO DE DANO DE  
LEMAITRE**

**Autor: Raniere Silva Neves  
Orientador: Lucival Malcher**

**Brasília – DF, Julho de 2013**



**RANIERE SILVA NEVES**

**SIMULAÇÃO NUMÉRICA DO PROCESSO DE ESTAMPAGEM MECÂNICA EM  
CHAPAS METÁLICAS ATRAVÉS DO MODELO DE DANO DE LEMAITRE**

Monografia submetida ao curso de  
graduação em Engenharia Automotiva da  
Universidade de Brasília, como requisito  
parcial para obtenção do Título de  
Bacharel em Engenharia Automotiva

Orientador: Lucival Malcher

**Brasília – DF, Julho de 2013**

## **CIP – Catalogação Internacional da Publicação\***

Neves, Raniere.

Simulação Numérica do Processo de Estampagem  
Mecânica em Chapas Metálicas Através do Modelo de  
Dano de Lemaitre: Raniere Silvas Neves. Brasília: UnB,  
2013. 94 p.

Monografia (Graduação) – Universidade de Brasília  
Faculdade do Gama, Brasília, 2013. Orientação: Lucival  
Malcher

1. Processo de Estampagem. 2. Chapa metálica. 3. Dano  
isotrópico. 4. Modelo de Lemaitre. Malcher, Lucival. Doutor

CDU Classificação

# **SIMULAÇÃO NUMÉRICA DO PROCESSO DE ESTAMPAGEM MECÂNICA EM CHAPAS METÁLICAS ATRAVÉS DO MODELO DE DANO DE LEMAITRE**

**Raniere Silva Neves**

Relatório Final do Trabalho de Conclusão de Curso submetido como requisito para obtenção do grau de Engenheiro Automotivo.

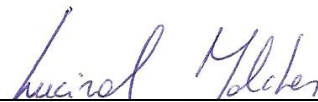
## **Coordenador do Curso de Engenharia Automotiva**

Prof. Emmanuel Pacheco Rocha Lima, UnB/FGA



## **Banca Examinadora**

Prof. Lucival Malcher, UnB/ENM/FT (Orientador)



Prof. Carla Tatiana Mota Anflor, UnB/FGA



Prof. Edison Gustavo Cueva Galárraga, UnB FGA



Brasília - DF, Julho de 2013

## **Dedicatória**

*Dedico este trabalho aos meus pais, Edmar de Souza Neves e Vania da Silva Neves, que sempre me incentivaram e motivaram, e também a minha vó Joana Marinho.*

*Raniere Silve Neves*

## **Agradecimentos**

*Assim como o poeta inglês Alfred Tennyson, eu acredito que somos uma parte de tudo aquilo que encontramos pelo nosso caminho. Acredito que cada pessoa que passa por nossas vidas tem um papel fundamental na formação do nosso caráter e opinião.*

*Por mais breve que seja sua passagem, essas pessoas sempre nos proporcionaram novas experiências, conhecimentos e lições. Essas experiências nem sempre são agradáveis, mas são experiências e sempre se pode tirar uma lição delas.*

*Contudo, há pessoas que se destacam, pessoas que passam a fazer parte da sua vida, são essas as pessoas que ti ajudam ao longo do seu caminho, que vão ti colocar para cima quando você estiver triste, que vão dividir suas alegrias e angústias e que você faria o mesmo por elas só em troca de vê-las bem. Essas pessoas são seus amigos.*

*Primeiramente, eu agradeço à minha família, meus primeiros amigos, em especial aos meus pais, que sempre me apoiaram e nunca deixaram me faltar nada, pois eles sempre lutaram pelo melhor para os seus filhos. Agradeço a eles por colocarem a educação dos seus filhos em primeiro lugar e por serem exemplos de pais.*

*Agradeço aos meus amigos pela força, pelos momentos de descontração e pelos seus conselhos, muitas vezes não levados a sério que só me ajudam a ver a vida com mais alegria e menos preocupações.*

*Agradeço a todos os professores com quem tive aula ao longo desses cinco anos, cada um com sua personalidade, algumas mais difíceis de lidar do que outras, Eles foram parte fundamental na minha formação, pois se propuseram a dividir seus conhecimentos comigo.*

*Em especial quero agradecer ao professor Lucival Malcher, que para mim foi mais que um professor, foi um amigo e acima de tudo um exemplo de profissional e de pessoa. Agradeço a ele pela honra de ter trabalhado com ele.*

*E acima de tudo agradeço a Deus, pelas oportunidades que Ele me deu e pelos amigos que Ele colocou em minha vida.*

*Obrigado Deus por tudo, pois sem Você nada disso seria possível.*

*Raniere Silva Neves*

---

## RESUMO

Este trabalho propõe a obtenção de um método de controle para o processo de estampagem de chapas metálicas através da análise de uma única variável de dano isotrópico acoplada ao modelo constitutivo de dano de Lemaitre, baseado na Mecânica do Dano Contínuo, e tendo como parâmetros de projeto: os parâmetros materiais, a espessura de chapa e os moldes utilizados no processo, entre outros. Para alcançar os objetivos do trabalho, inicialmente será realizada uma breve revisão sobre o processo de estampagem e sobre o equacionamento matemático do modelo de Lemaitre. Em uma segunda etapa o modelo numérico de Lemaitre será desenvolvido e implementado em uma ferramenta acadêmica de Elementos Finitos para realização de testes e posteriormente em um software comercial (*Abaqus Standard*) através da sub-rotina *UMAT*, para que sejam realizadas as simulações e testes definitivos do processo de estampagem de uma peça utilizando diferentes espessuras de chapa. Por fim, é avaliado o nível de degradação interna através da relação entre o nível de dano encontrado e a espessura da chapa utilizada na simulação.

**Palavras-chaves:** Processo de Estampagem, Chapa metálica, Dano isotrópico, Modelo de Lemaitre.

---

## ABSTRACT

This contribution proposes the control of the sheet metal forming process through the analysis of a unique damage isotropic variable proposed by Lemaitre, based on the Continuum Damage Mechanics, with the design parameters: the materials parameters, sheet thickness and molds used in the process, among others. To achieve these objectives, in the first part a brief review about the forming processes and the mathematical equation of Lemaitre's model is made. In the second part, Lemaitre's model is implemented in an academic finite element environment for testing and then in commercial software (*Abaqus Standard*) through the *UMAT* subroutine, intending to perform definitive simulations and tests of the forming process of a part using different sheet thicknesses. At the end, the level of internal degradation in the part is evaluated through the relation between the damage level found and the sheet thickness used in the simulation.

**Key-Words:** Forming process, Metal sheet, Isotropic damage, Lemaitre's model.

# SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO.....</b>	<b>1</b>
1.1 OBJETIVOS.....	2
<b>2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA .....</b>	<b>3</b>
2.1 PROCESSO DE ESTAMPAGEM.....	3
2.1.1 Operação de corte.....	5
2.1.2 Operação de dobramento.....	12
2.1.3 Operação de repuxo.....	21
2.2 MODELO CONSTITUTIVO DE LEMAITRE COM VARIÁVEL DE DANO .....	32
2.2.1 Formulação Matemática.....	35
2.2.1.1 Potencial de estado e relação de estado.....	35
2.2.1.2 Potencial de dissipação e equações de evolução associadas.....	38
2.2.1.3 Início do dano em materiais dúcteis.....	40
<b>3 ESTRATÉGIA NUMÉRICA .....</b>	<b>43</b>
3.1 ALGORITMO DE ATUALIZAÇÃO DAS TENSÕES E VARIÁVEIS INTERNAS.....	44
3.2 OPERADOR TANGENTE CONSISTENTE .....	50
<b>4 ANÁLISE E RESULTADOS.....</b>	<b>52</b>
4.1 ESTUDO DE CASO – ESTAPAGEM DE UM COPO CILÍNDRICO.....	52
4.2 RESULTADOS NUMÉRICOS .....	55
<b>5 CONCLUSÕES.....</b>	<b>64</b>
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....</b>	<b>65</b>
<b>ANEXOS.....</b>	<b>67</b>
ANEXO I: Rorina de atualização de tensões e variáveis internas.....	68
ANEXO II: Sub-rotina CTDAMA para calculo da matriz tangente consistente .....	75



# LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 - Principais componentes de um estampo .....	3
Figura 2.2 - Operação de corte de uma chapa plana. ....	5
Figura 2.3 - Variações da operação de corte .....	6
Figura 2.4 - Medidas envolvidas na operação de corte .....	7
Figura 2.5 - Força de corte versus o curso do punção para diferentes geometrias de punção .....	9
Figura 2.6 - Estampo de corte com sujeitador .....	9
Figura 2.7 - Gráfico Folga x Espessura de chapa para três grupos de metais.....	10
Figura 2.8 - Estudo do layout de tira .....	11
Figura 2.9 - Operação de dobramento de uma chapa plana.....	13
Figura 2.10 - Exemplo peça dobrada em etapas .....	13
Figura 2.11 - Variações da operação de dobramento .....	14
Figura 2.12 - Análise de tensões na região de dobra de uma peça .....	15
Figura 2.13 - Exemplo de retorno elástico de uma peça em v.....	16
Figura 2.14 - Exemplificação do raio de ruptura de uma peça dobrada .....	17
Figura 2.15 - Forças atuantes na operação de dobramento simples.....	18
Figura 2.16 - Análise das forças atuantes na operação de dobramento simples .....	19
Figura 2.17 - Operação de dobramento em V de uma tira plana .....	20
Figura 2.18 - Operação de dobramento em L de uma tira plana.....	20
Figura 2.19 - Operação de dobramento em U de uma tira plana .....	21
Figura 2.20 - Operação de estampagem profunda de uma chapa plana .....	22
Figura 2.21 - Calculo do <i>blank</i> de uma peça cilíndrica .....	22
Figura 2.22 - Exemplo de <i>blank</i> de uma peça retangular .....	23
Figura 2.23 - Esforço de compressão do punção pelo tempo .....	24
Figura 2.24 - Diferentes zonas de deformações presentes na operação de repuxo .....	24
Figura 2.25 - Esforços na região da aba da peça durante a estampagem .....	25
Figura 2.26 - Esforços nas regiões de dobramento da peça durante a estampagem .....	26
Figura 2.27 - Representação da variação da espessura da peça .....	26
Figura 2.28 - Esforços nas regiões laterais e no fundo da peça durante a estampagem..	27
Figura 2.29 - Variações da operação de estampagem profunda .....	27
Figura 2.30 - Representação da folga ideal para a operação de repuxo .....	31
Figura 2.31 - Critério de dano crítico .....	33
Figura 4.1 - Geometria da recriado no <i>Abaqus</i> .....	53
Figura 4.2 - Contorno da deformação plástica e nó crítico para simulação com espessura de chapa de 0,25 mm .....	55
Figura 4.3 - Contorno da deformação plástica e nó crítico para simulação com espessura de chapa de 0,50 mm .....	56
Figura 4.4 - Contorno da deformação plástica e nó crítico para simulação com espessura de chapa de 0,75 mm .....	56
Figura 4.5 - Contorno da deformação plástica e nó crítico para simulação com espessura de chapa de 0,82 mm .....	56
Figura 4.6 - Contorno da deformação plástica e nó crítico para simulação com espessura de chapa de 1,00 mm .....	57
Figura 4.7 - Contorno da deformação plástica e nó crítico para simulação com espessura de chapa de 1,25 mm .....	57
Figura 4.8 - Contorno da deformação plástica e nó crítico para simulação com espessura de chapa de 1,50 mm .....	57
Figura 4.9 - Nível de deformação plástica equivalente máxima no nó crítico para cada espessura de chapa simulada .....	58
Figura 4.10 - Nível de tensão equivalente e pressão hidrostática máximo no nó crítico para cada espessura de chapa simulada .....	58

Figura 4.11 - Nível de energia liberada pelo dano no nó crítico para cada espessura de chapa simulada .....	59
Figura 4.12 - Contorno da tensão equivalente de von Mises para simulação com espessura de chapa de 0,25 mm .....	60
Figura 4.13 - Contorno da tensão equivalente de von Mises para simulação com espessura de chapa de 0,50 mm .....	60
Figura 4.14 - Contorno da tensão equivalente de von Mises para simulação com espessura de chapa de 0,75 mm .....	60
Figura 4.15 - Contorno da tensão equivalente de von Mises para simulação com espessura de chapa de 0,82 mm .....	61
Figura 4.16 - Contorno da tensão equivalente de von Mises para simulação com espessura de chapa de 1,00 mm .....	61
Figura 4.17 - Contorno da tensão equivalente de von Mises para simulação com espessura de chapa de 1,25 mm .....	61
Figura 4.18 - Contorno da tensão equivalente de von Mises para simulação com espessura de chapa de 1,50 mm .....	62
Figura 4.19 - Nível de dano no nó crítico para cada espessura de chapa simulada .....	62
Figura 4.20 - Comparação entre o nível de dano e energia liberado devido ao dano .....	63

# LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1 - Resistência ao cisalhamento de alguns metais.....	8
Tabela 2.2 - Valores mínimos para os espaços representados nas Figura (2.8) .....	12
Tabela 2.3 - Localização da linha neutra para algumas espessuras de chapa específicas	15
Tabela 2.4 - Fatores de correção da variação da espessura durante o processo de dobramento .....	18
Tabela 2.5 - Valores para o coeficiente m de acordo com a relação dos diâmetros da peça e do desenvolvimento .....	23
Tabela 2.6 - Valores tabelados para os fatores K1 e K2 para repuxo progressivo .....	29
Tabela 2.7 - Exemplos de materiais utilizados para a confecção do punção e do prensa-chapa de acordo com o número de peças que se pretende produzir.....	30
Tabela 2.8 - Avaliação de alguns tipos de lubrificantes utilizados durante o processo de estampagem profunda.....	31
Tabela 2.9 - Valores de folgas padronizadas para alguns tipos de metais.....	32
Tabela 2.10 - Modelo de Lemaitre com endurecimento e dano isotrópicos.....	42
Tabela 3.11 - Estrutura principal do algoritmo de integração implícita para o Modelo de Lemaitre.....	49
Tabela 4.1 - Propriedade materiais do aço acalmado com alumínio.....	54
Tabela 4.2 - Resultados obtidos com as simulações.....	63

# LISTA DE SÍMBOLOS

## Símbolos Latinos

$AL\%$	Alongamento percentual da chapa na operação de dobramento
$A$	Área do material danificado
$A_0$	Área do material virgem
$A_{eff}$	Área efetiva
$A_D$	Área ocupada pelos micro vazios
$n$	Coefficiente de encruamento
$R$	Coefficiente de resistência
$L_e$	Comprimento da chapa para a operação de dobramento
$s_{n+1}^{trial}$	Componente desviadora do tensor das tensões tentativas
$p_{n+1}^{trial}$	Componente hidrostática do tensor das tensões tentativas
$l$	Comprimento livre entre os apoios da matriz na operação de dobramento
$h$	Complemento na distância percorrida pelo punção para executar o corte
$s$	Constantes de evolução de dano
$S$	Constantes de evolução de dano
$a_c$	Constante do material relacionada ao endurecimento cinemático
$b_c$	Constante do material
$D_{ef}$	Deformação verdadeira sofrida pelo corpo-de-prova
$d_1$	Diâmetro da peça final na operação de repuxo
$d_2$	Diâmetro de desenvolvimento na operação de repuxo
$d$	Diâmetro do punção
$e$	Espessura da chapa
$fat$	Fator de correção para o calculo do $L_e$
$K1$	Fator usado no cálculo do número de repuxes sucessivo
$K2$	Fator usado no cálculo do número de repuxes sucessivo
$f$	Folga na operação de corte
$F$	Força aplicada a um corpo de prova
$F_c$	Força de corte
$F_d$	Força de dobramento
$F_{pc}$	Força de prensa-chapa
$F_R$	Força de repuxo
$F_s$	Força de sujeição
$F_{lat}$	Força lateral
$R$	Força termodinâmica associada ao endurecimento isotrópico
$Y$	Força termodinâmica associada à variável de dano
$H$	Função indicativa
$b$	Largura da tira a ser dobrada
$\dot{r}$	Lei de evolução do endurecimento isotrópico
$\dot{D}$	Lei de evolução da variável de dano
$I$	Matriz identidade
$K$	Módulo de Compressão Elástica
$G$	Módulo de Elasticidade ao Cisalhamento
$E$	Módulo de Elasticidade do material danificado

$E_0$	Módulo de Elasticidade do material virgem
$H$	Módulo de endurecimento isotrópico
$\ \mathbf{S}_{n+1}\ $	Norma da parte desviadora do tensor tensão
$\mathbb{D}^e$	Operador elástico danificado
$\mathbb{D}^{ep}$	Operador tangente
$L$	Perímetro de corte
$p$	Pressão hidrostática
$R_m$	Raio da matriz
$R_l$	Raio de dobramento
$R_b$	Raio do <i>blank</i>
$R_p$	Raio do punção
$R_{min}$	Raio interno mínimo de dobramento
$R_{rup}$	Raio mínimo de ruptura
$K_s$	Resistência ao cisalhamento do material da chapa
$J_2$	Segundo invariante do tensor desviador
$\dot{W}^p$	Taxa do trabalho plástico
$\dot{D}$	Taxa do dano
$-Y$	Taxa de densidade de energia de deformação liberada devido ao dano
$T$	Tensão de referência
$q$	Tensão equivalente de von Mises
$\mathbf{X}$	Tensor <i>back-stress</i>
$\mathbf{S}$	Tensor desviador das tensões
$\bar{\mathbf{S}}_{n+1}$	Tensor desviador normalizado
$\mathbb{I}$	Tensor identidade de quarta ordem
$\mathbf{D}^e$	Tensor elástico isotrópico
$D$	Variável de dano
$D_{n+1}^{trial}$	Variável de dano tentativa
$R_n$	Variável de endurecimento isotrópico
$R_{n+1}^{trial}$	Variável interna associada ao endurecimento isotrópico tentativa
$r$	Variável interna de endurecimento isotrópico
$D_c$	Valor de dano crítico
$\mathbf{N}$	Vetor de fluxo

## Símbolos Gregos

$\alpha$	Ângulo de dobramento
$\nu$	Coefficiente de Poisson
$\boldsymbol{\varepsilon}_d^e$	Componente desviadora do tensor das deformações elásticas
$\boldsymbol{\varepsilon}_{d\ n+1}^{e\ trial}$	Componente desviadora do tensor das deformações elásticas tentativa
$\boldsymbol{\varepsilon}_{v\ n+1}^{e\ trial}$	Componente volumétrica do tensor das deformações elásticas tentativa
$\boldsymbol{\varepsilon}_v^e$	Componente volumétrica tensor das deformações elásticas
$\omega$	Conceito de integridade material
$\psi^{ed}$	Contribuição do dano elástico para a Energia Livre
$\psi^p$	Contribuição plástica para a Energia Livre
$\Phi$	Critério de escoamento do modelo de Lemaitre
$\varepsilon^p$	Deformação plástica
$\varepsilon_c^p$	Deformação plástica crítica
$\psi$	Energia Livre específica

$\delta$	Folga na operação de repuxo
$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$	Fluxo plástico
$\Psi$	Fluxo potencial
$\hat{\boldsymbol{\sigma}}$	Função algorítmica construtiva implícita para a atualização das tensões
$\bar{\rho}\psi^I(r)$	Função arbitrária do argumento $r$
$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$	Incremento de deformação prescrito
$\boldsymbol{\sigma}$	Lei elástica linear
$\varepsilon_D^p$	Limiar de dano
$\dot{\gamma}$	Multiplicador plástico
$\Psi^d$	Potencial de dano
$\Psi$	Potencial de dissipação único
$\Psi^p$	Potencial de endurecimento
$\Psi^*$	Pseudo potencial de dissipação
$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$	Taxa de deformação plástica equivalente
$\sigma_v$	Tensão verdadeira aplicada ao corpo-de-prova
$\boldsymbol{\sigma}_{eff}$	Tensor das tensões efetiva
$\boldsymbol{\varepsilon}^e$	Tensor de deformação elástica
$\sigma_e$	Tensão de escoamento do material
$\sigma_f$	Tensão de flexão do material
$\sigma$	Tensão no corpo de prova
$\sigma_v$	Tensão verdadeira aplicada ao corpo-de-prova
$q^{trial}$	Tensão equivalente de Von Mises
$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{p\ trial}$	Tensor das deformações plásticas tentativa
$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial}$	Tensor das tensões tentativa
$\boldsymbol{\beta}$	Variável interna relacionada ao endurecimento cinemático

# 1 INTRODUÇÃO

Desde a década de 90 o mercado automotivo brasileiro vem crescendo de forma considerável. Segundo dados da ANFAVEA (Associação Nacional dos Fabricantes de Veículos Automotores – Brasil), em 2012 o Brasil produziu mais de três milhões de veículos e a perspectiva de crescimento do setor automotivo para os próximos anos ainda é bastante otimista.

Para acompanhar esta demanda, a indústria automotiva vem investindo cada vez mais em estudos para o desenvolvimento e aprimoramento das ferramentas de gestão, materiais, tecnologias de processos e alguns outros fatores empregados na produção.

Impulsionados pelo crescimento industrial das últimas décadas, estudos e melhorias na área dos processos de fabricação são constantemente desenvolvidos, com o intuito de atender as novas exigências do mercado. Para atender a elevada demanda dentro de um prazo especificado, os fabricantes de veículos procuram por processos mais rápidos e baratos, capazes de produzir grandes lotes de peças com um nível de qualidade elevado.

Devido às características vantajosas dos processos de estampagem na confecção em série de peças metálicas resistentes e leves, com um rigor dimensional elevado e baixo custo, esses processos ganharam popularidade no cenário industrial, não só no automotivo, mas em muitos outros como o aeronáutico, naval, petrolífera, etc.

Na sua origem, as operações de estampagens se baseavam em tentativas práticas e no empirismo, as ferramentas eram fabricadas nas oficinas sem a utilização de qualquer conhecimento técnico. Com o passar do tempo, as possibilidades destes sistemas de produção foram melhoradas e aumentadas, muito devido ao estabelecimento de padrões e normas técnicas específicas, e ao avanço na área de estudo do comportamento mecânico de materiais, o que possibilitou a confecção de ferramentas de estampagem mais resistentes e com bom acabamento.

Contudo, ainda hoje, o controle dos processos de estampagem é uma tarefa de grande complexidade, isso devido à existência de um comportamento mecânico não linear causado pelo material aplicado e a geometria estabelecida para a peça, durante o processo de conformação. Esse fato faz com que não seja possível, a realização de estudos analíticos adequados da operação de estampagem, o que dificulta o dimensionamento correto do processo, tornando comum a ocorrência de falhas nesse tipo de operação.

Esses defeitos podem ter origem devido à falta de qualidade do material da chapa a qual é submetida ao processo ou podem resultar do dimensionamento inadequado do próprio processo de conformação, logo a análise da origem de defeitos exige que se tenha um conhecimento detalhado tanto do processo quanto do material.

Realizar o controle de qualidade do material da chapa antes da estampagem é uma tarefa de relativo conhecimento e de fácil execução. Porém, a definição de parâmetros como o carregamento necessário para realizar a operação, espessura da chapa, ângulos das ferramentas de estampagem, entre outras informações, não é uma função trivial.

Ainda hoje, é comum se observar fabricantes basearem-se no método de tentativa e erro para projetar a tais operações. Essa metodologia resulta em uma calibração do processo de estampagem, contudo até que essa calibração seja realizada com sucesso, muita sucata pode ser gerada, o que se traduz em custos adicionais de fabricação e no aumento do tempo de produção e custo final da peça.

Uma alternativa para se chegar a um controle adequado de todo o processo, mesmo em situações de estampagens complexas, é a utilização da mecânica computacional para a simulação do processo como um todo.

A utilização da mecânica computacional para a realização de simulações tem crescido rapidamente dentro do meio industrial, pois com o auxílio de um computador é possível analisar o comportamento de componentes sujeitos a carregamentos complexos, recriar cenários inviáveis economicamente de serem montados no mundo real, e testar a resistência de componentes, sem acarretar na criação de sucata e de custos adicionais, além de reduzir o tempo de realização dos testes e não colocar vidas em perigo.

## **1.1 OBJETIVOS**

Neste trabalho, propõe-se o desenvolvimento de uma metodologia para o controle e dimensionamento dos processos de estampagem mecânica em chapas metálicas, utilizando como base, o controle da evolução da degradação do material durante todo o processo. Sugere-se a utilização do modelo de dano de Lemaitre, que possui dentro de seu desenvolvimento matemático, uma variável isotrópica de dano, baseada nos preceitos da Mecânica do Dano Contínuo. Levando em consideração que ao se deformar plasticamente durante um processo de estampagem, algumas regiões específicas de uma dada chapa metálica, acabam encruando mais que as outras, fazendo com que o material, localmente, eleve seu limite de escoamento e, por conseguinte reduza sua ductilidade ou a capacidade de se deformar sem se degradar, estas regiões passam então a serem chamadas de regiões críticas, e serão então analisadas como o ponto de partida para o dimensionamento e controle de todo o processo.

Pelo fato da variável de dano acoplada ao modelo de Lemaitre ser uma medida indireta da densidade de defeitos no material, que relaciona a variação no módulo de elasticidade do material com o nível de degradação do mesmo, torna-se possível utilizá-la para avaliar o nível de degradação do material nas regiões críticas e, portanto, realizar o controle do processo de estampagem, ou seja, determinar numericamente se houve ou não o aparecimento de trincas na peça estampada, para uma dada espessura de chapa utilizada.

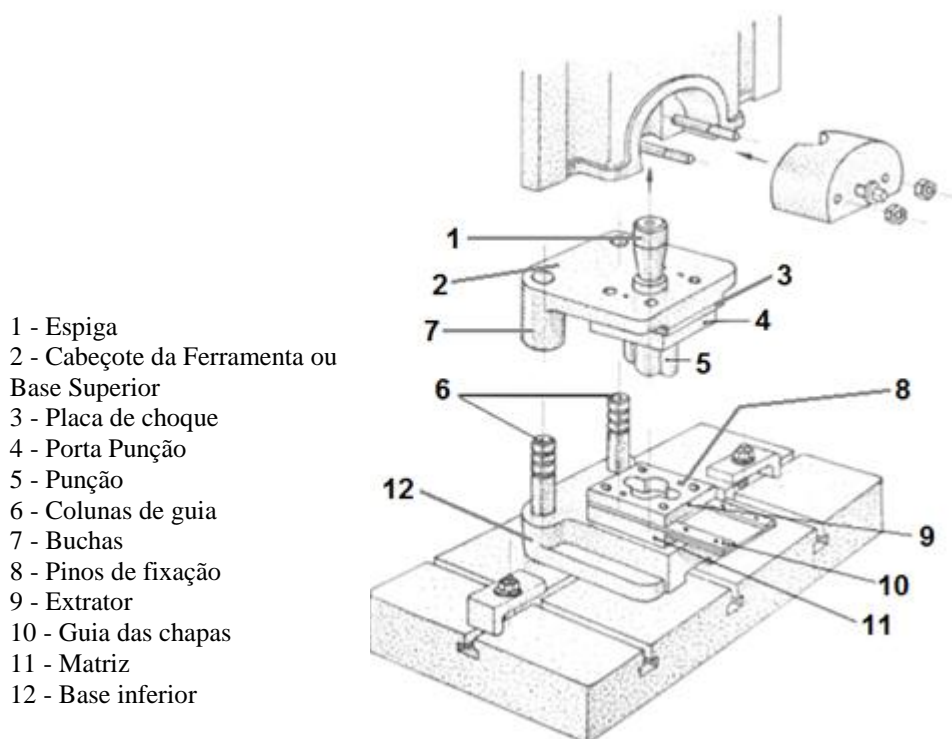


## 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

### 2.1 PROCESSO DE ESTAMPAGEM

A estampagem é um processo de conformação mecânica, realizado geralmente a frio, onde é imposta uma geométrica própria a uma chapa metálica através da realização de um conjunto de operações que podem envolver o corte e a deformação plástica do material, (ver Junior e Caversan, 2012). De maneira geral, um processo de estampagem pode ser descrito da seguinte forma: uma chapa ou apenas uma tira da mesma é apoiada sobre uma matriz, e por meio de uma ferramenta, chamada estampo, instalada em uma prensa, uma determinada força é aplicada sobre o material com a intenção de corta-lo por cisalhamento puro ou de atribuir a forma da matriz ao material através de deformações plásticas.

Os estampos são compostos de elementos comuns a quaisquer tipos de ferramentas, seja ela de corte ou conformação, como a base inferior, o cabeçote ou base superior, a espiga, as colunas de guia, a placa de choque, a placa guia, os pinos de fixação entre outros; e por elementos específicos, como por exemplo, a matriz e o punção responsáveis pelo formato da peça a ser produzida. Na Figura (2.1) é apresentado um exemplo de estampo com o nome dos seus principais componentes:



**Figura 2.1 - Principais componentes de um estampo. FONTE: JUNIOR e CAVERSAN, 2012, p. 5**

A estampagem de chapa é um processo comumente utilizado para a fabricação de peças com paredes finas, podendo a mesma ser oca ou plana, dependendo das operações empregadas. Uma característica dos produtos fabricados por estampagem é a elevada resistência mecânica das regiões de conformação plástica, com relação à chapa inicial, tornando-se muito comum na concepção de peças

grande, a utilização de perfis conformados de chapas, nervuras ou rebaixos na própria peça para aumentar a sua rigidez.

As principais vantagens desse processo de fabricação em relação aos demais são:

- Alta produtividade, pois se trata de um processo relativamente simples e rápido;
- Reduzido custo por peça;
- Bom acabamento da peça, não necessitando de tratamentos posteriores;
- Maior resistência das peças produzidas devido à conformação, que causa o encruamento do material;
- Baixo custo com controle de qualidade devido à uniformidade da produção e a facilidade para a detecção de desvio durante a produção.

Por conta de tais características, os processos de estampagem se tornaram populares no meio industrial. Contudo, o processo de estampagem também apresenta algumas desvantagens, como ter um custo ferramental alto, porém esse custo pode ser amortizado com a produção elevada de peças. Outro fator limitante para o processo é o tipo de material a ser estampado. Devido às características das tensões envolvidas nas operações de estampagem, o processo é restrito apenas a materiais metálicos homogêneos, com grão suficientemente fino e com boa tenacidade, isso é, materiais capazes de resistir relativamente bem à ruptura, e com rigidez não muito elevada, para que não sejam geradas rugas durante as operações.

Para se realizar qualquer operação de estampagem, também é indispensável que a matéria prima esteja na forma de chapas ou fitas. Essas chapas ou fitas são obtidas por meio de processos de laminação a quente ou a frio, a partir de lupas (*blooms*) ou placas. A lupa é um semi-produto de seção quadrada, já a placa é um semi-produto de seção retangular de largura de 200 a 30 mm, espessura de 45 a 70 mm e comprimento de aproximado de um metro. Uma característica marcante das chapas é o fato da sua espessura ser muito menor que sua largura e comprimento. Posteriormente a chapa pode ser recortada em forma de tiras, conforme a necessidade da produção.

Por sua vez, fitas são laminados metálicos de 500 mm de largura máxima e espessura máxima de 6 mm. As fitas se apresentam em forma de bobina e seu comprimento varia conforme as características da produção.

Na estampagem, as chapas são caracterizadas por propriedades mecânicas, como:

- Resistência à ruptura (em  $\text{kgf/mm}^2$ );
- Limite de elasticidade (em  $\text{kgf/mm}^2$ );
- Alongamento (em %);
- Dureza superficial (Brinel-Rockwell, etc.);
- Profundidade de embutido (Ericksen-Guilery, em mm).

Os materiais mais empregados em chapas para estampagem são os aços de baixo carbono que, para as operações de estampagem profunda, devem apresentar uma boa resistência à ruptura. Outros materiais comumente utilizados nesse processo são o cobre, o alumínio, o aço inoxidável e zinco, e o latão 70-30 (liga de cobre com 30% de zinco), material que apresenta um dos maiores índices de

estampabilidade, e por isso é empregado em peças cujos requisitos justificam a seleção de material de custo elevado. Outros metais não-ferrosos e suas ligas, na forma de chapas ou tiras, podem ser também submetidos, com relativa facilidade, aos processos de conformação mecânica.

As operações de estampagem podem ser descritas por dois tipos principais de operações: as de separação de material e as de modificação da forma do material. As operações de separação de material abrangem as operações de corte e as operações de modificação da forma abrangem as operações de conformação plástica.

Na operação de corte é desejado que as tensões internas em determinadas regiões da chapa ultrapassem o limite de ruptura do material, causando com isso a separação de parte do material. Já na operação de conformação é desejável apenas que o material deforme permanentemente, caso as tensões internas em qualquer região da peça ultrapassem o limite de ruptura do material, trincas surgirão e a peça se tornará inútil.

Analisando mais detalhadamente as operações de conformação mecânica, é possível classificá-las em operação de dobramento ou estampagem profunda, de acordo com a natureza das deformações impostas ao material metálico.

### 2.1.1 Operação de corte

Nas técnicas de produção de peças por conformação plástica de chapas, a operação de corte sempre está presente, seja para produzir as peças propriamente ditas, para cortar tiras de metal que futuramente serão dobradas ou embutidas ou ainda para realizar o acabamento de peças já conformadas. A operação de corte consiste na separação de uma porção de metal de uma chapa mediante a ação de uma ferramenta de corte conhecida como estampo ou punção de corte, (Palmeira, 2005), que por meio de uma prensa aplica pressão sobre uma chapa apoiada sobre uma matriz, como ilustrado na Figura (2.2).

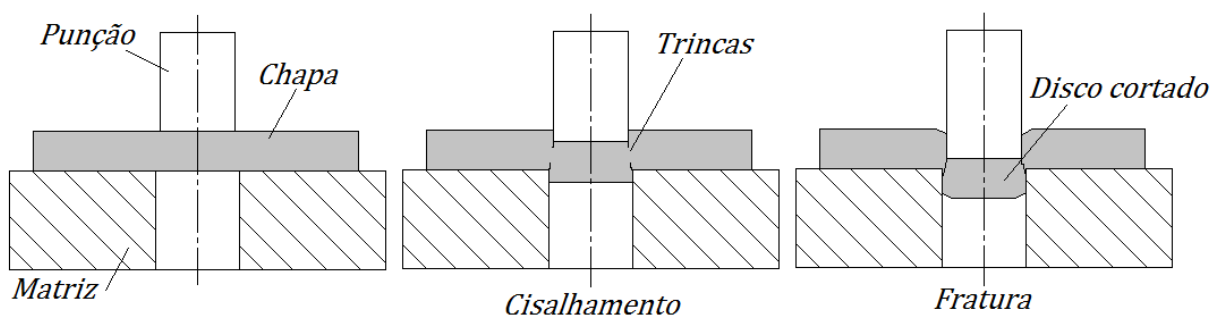
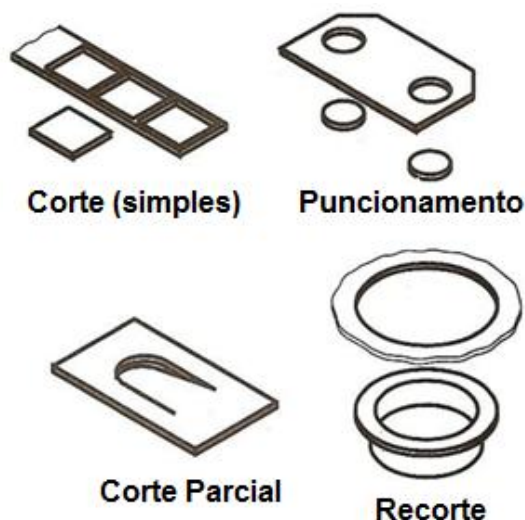


Figura 2.2 - Operação de corte de uma chapa plana.

A forma da porção de metal que será separada é determinada pela forma da seção transversal do punção e da matriz, esse contorno recebe o nome de fio de corte ou perímetro de corte. Ele é constituído pelos perímetros externos do punção e pelo perímetro interno do orifício da matriz. Para o caso de estampagem de um disco, o perímetro de corte é igual à circunferência externa do punção.

De acordo com a característica do corte realizado é possível classificar as operações de corte em quatro grupos, estes grupos são ilustrados na Figura (2.3). Assim, quando uma porção de metal com um formato qualquer é retirado da chapa principal a operação recebe o nome de corte simples, quando a operação de corte produz furos de pequenas dimensões, a operação recebe o nome de puncionamento, quando a porção de metal não é separada completamente da chapa principal a operação recebe o nome de corte parcial e quando o corte é realizado com o intuito de cortar o excedente de material de uma peça que já passou por um processo de conformação, ele recebe o nome de recorte.



**Figura 2.3 - Variações da operação de corte**

A operação de corte é obtida através de forças de cisalhamento aplicadas à chapa pelos cantos de corte das ferramentas e sua realização é dividida em três etapas:

- Deformação plástica;
- Redução de área;
- Fratura.

A chapa se deforma elasticamente ao ser pressionada pelo punção até atingir seu limite de escoamento. A partir daí, parte da chapa se deforma plasticamente para dentro da matriz reduzindo a área da região de corte, esse efeito é conhecido como estrição. Neste momento os esforços de compressão impostos pela prensa à chapa são convertidos em esforços de cisalhamento que passam a gerar tensões internas que ultrapassam o limite de resistência ao cisalhamento do material, causando o surgimento de trincas na parte superior da chapa, junto aos cantos de corte do punção, e na parte inferior da chapa, junto aos cantos de corte da matriz.

Com a manutenção do carregamento aplicado pela prensa, essas trincas se propagam enquanto parte da chapa penetra a matriz, até as trincas se encontrarem, resultando na separação da porção de material em contato com punção, ocorrendo assim o corte por cisalhamento puro. A região rompida terá um acabamento liso e brilhante, contudo, há casos onde o corte por cisalhamento puro não ocorre,

sendo necessário “rasgar” a chapa por meio de esforços de tração, logo, nessa região o acabamento será áspero e sem brilho.

Para a realização da operação de corte é preciso considerar alguns parâmetros relacionados à espessura da chapa a ser cortada, a força utilizada para a realização do corte e a forma do punção e da matriz. Os principais parâmetros são:

- Forças envolvidas na operação de corte;
- Folgas entre punção (macho) e matriz;
- Dimensionamento da matriz;
- Aproveitamento máximo da chapa (layout de tira).

Em chapas de aço temperado, a razão da espessura da chapa dividida pelo diâmetro do punção poder chegar a no máximo a 1:2, isso significa que para a realização de um corte adequado e sem danificar o ferramental, a espessura da chapa deve ser menor ou pouco menor que o diâmetro do punção. A força em [kgf] necessária para a realização da operação com sucesso, é obtida multiplicando a área da seção a ser cortada pela resistência ao cisalhamento do material da chapa, conforme a Equação (2.1):

$$F_c = e.L.K_s , \quad (2.1)$$

onde  $e$  é a espessura da chapa em mm,  $L$  é o perímetro de corte em mm do punção cilíndrico de diâmetro  $d$ , apresentado na Figura (2.4), e  $K_s$  é a resistência ao cisalhamento do material da chapa em  $\text{kgf}/\text{mm}^2$ , também conhecido como Pressão Específica de Corte.

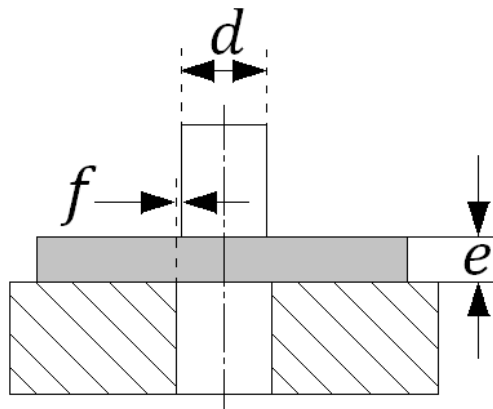


Figura 2.4 – Medidas envolvidas na operação de corte

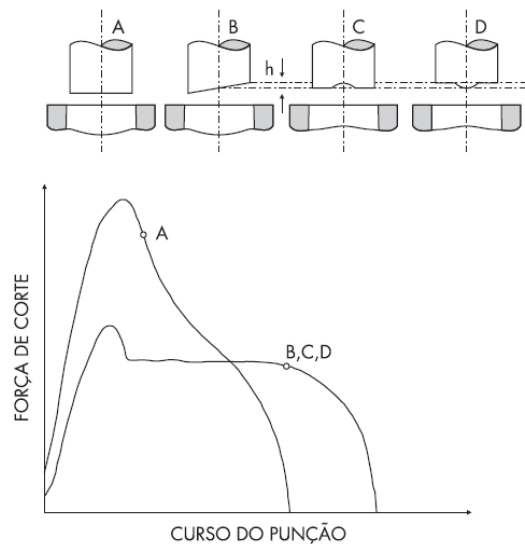
Na Tabela (2.1) são apresentados os valores de  $K_s$  para alguns metais de engenharia. Na falta do valor exato de  $K_s$ , pode ser definido um valor aproximado de resistência ao cisalhamento com sendo 80% da tensão de ruptura a tração do material considerado.

**Tabela 2.1 - Resistência ao cisalhamento de alguns metais. FONTE: PENTEADO, 2010, p. 55**

<b>Metal</b>	<b>Ks (Kgf/mm<sup>2</sup>) recozido</b>	<b>Ks (Kgf/mm<sup>2</sup>) encruado</b>
Aço, 0,1% C	24	32
Aço, 0,2%	30	40
Aço, 0,3%	36	48
Aço, 0,4%	45	56
Aço, 0,6%	55	72
Aço, 0,8%	70	90
Aço, inoxidável	50	56
Alumínio 99 e 99,5	7 a 9	13 a 16
Prata e Monel (liga de níquel)	28 a 36	45 a 56
Bronze	33 a 40	40 a 60
Cobre	18 a 22	25 a 30
Estanho	03	04
Zinco	12	20
Chumbo	02	03
Latão	33	46

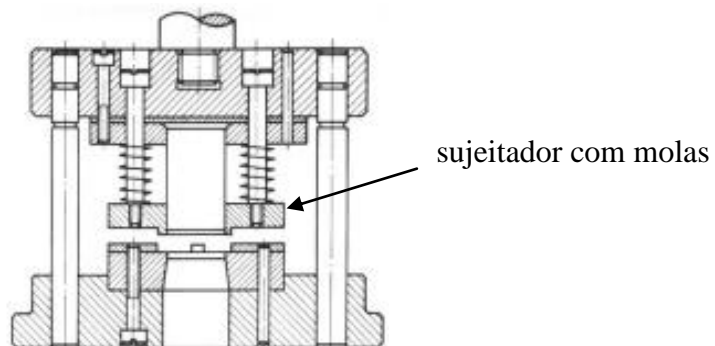
Em alguns casos, é conveniente se reduzir o esforço de corte, possibilitando a utilização de prensas menores e também a diminuição do desgaste das ferramentas de corte. A diminuição do esforço de corte, sem causar a perda de qualidade no resultado final da operação, pode ser feita através da mudança da geometria do punção, atribuindo um ângulo ou uma irregularidade à face do mesmo, fazendo com que, ao final, a área de resistência ao corte diminua.

Assumindo que o trabalho para cortar uma chapa metálica é definido como sendo a força necessária para a realização do corte multiplicada pela distância em que a mesma atua, no caso de uma punção de face reta, a distância percorrida pelo punção para a execução do corte será igual à espessura da chapa, já no caso do punção com uma face diferente, a distância percorrida pelo punção para executar o corte será igual à espessura da chapa mais um completo  $h$ , conforme a Figura (2.5). Como o trabalho em todas as situações é o mesmo, já que se trata do corte da mesma chapa, para manter a igualdade a força necessária para o caso do punção de face variada é menor já que a distância percorrida nesse caso é maior.



**Figura 2.5 – Força de corte versus o curso do punção para diferentes geometrias de punção. FONTE: MESQUITA; RUGANI, 1997, p. 18**

No momento da execução de uma operação de corte, em algumas prensas, a chapa fica presa através do uso de um sujeitador, também conhecido como prensa-chapa, conforme ilustrado na Figura (2.6). Ele evita a formação de rugas na superfície do material, enquanto a chapa desliza para dentro da matriz, empurrada pelo punção. O sujeitador é ligado ao mecanismo do punção e acionado pela pressão dada por molas.



**Figura 2.6 - Estampo de corte com sujeitador. FONTE: PENTEADO, 2010, p. 55**

Normalmente, utiliza-se um esforço de sujeição variando de 5% a 12% do esforço de corte, e na prática, quando não se conhece o valor exato adota-se 10% (Penteado, 2010). Portanto, experimentalmente a força de sujeição em [kgf] pode ser determinada pela Equação (2.2) como sendo:

$$F_s = 1,1F_c , \tag{2.2}$$

onde  $F_s$  representa a força de sujeição e  $F_c$  é a chamada força de corte.

Um parâmetro importante na operação de corte é o espaço existente entre o punção e a matriz na parte paralela de corte, conhecido como folga entre o punção e a matriz, essa folga é representada

pelo símbolo  $f$ , ver Figura (2.4). Esse parâmetro depende tanto da espessura da chapa a ser cortada quanto da sua rigidez. A definição dessa folga está relacionada ao acabamento final da peça, à força necessária para a operação e ao desgaste das ferramentas. Com uma folga bem ajustada, as trincas que causam a separação do material irão se encontrar no mesmo ponto, produzindo uma peça com melhor acabamento, utilizando uma força de corte menor. Já com uma folga inadequada, durante a operação de corte, um excesso de material pode acabar acompanhado o movimento do punção e escoar para dentro da matriz. Segundo Gerhard Oehler (1993), a folga ideal para chapas de até 3 mm de espessura pode ser obtida através das Equações (2.3):

$$f = (0,01e - 0,015)\sqrt{K_s} , \quad (2.3)$$

onde  $f$  representa a folga entre o punção e a matriz,  $e$  é a espessura da chapa e  $K_s$  é a resistência ao cisalhamento. Já para chapas com mais de 3 mm de espessura, a folga pode ser obtida pela Equação (2.4):

$$f = (0,005e)\sqrt{K_s} \quad (2.4)$$

Para chapas com mais de 3 mm de espessura, e quando não se conhece a resistência ao cisalhamento do material, recomenda-se que as folgas totais não sejam maiores que 10% da espessura da chapa. A Figura (2.7) apresenta um gráfico relacionando a espessura da chapa a ser cortada com a folga ideal para o caso de três grupos de materiais (Palmeira, 2005).

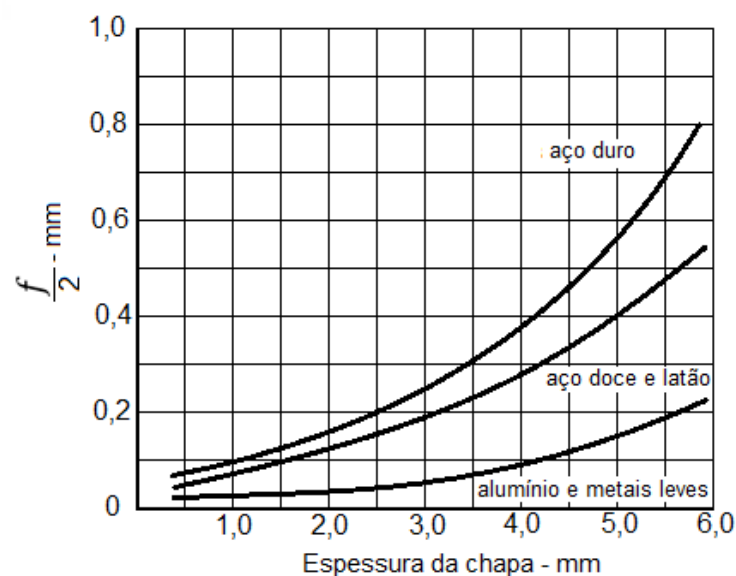


Figura 2.7 – Gráfico Folga x Espessura de chapa para três grupos de metais. FONTE: PALMEIRA, 2005, p. 4

Outro fator importante na operação de corte é o estudo de layout da tira. Este fator é de grande importância econômica e visa a análise da área da tira com o objetivo de se encontrar a melhor



distribuição das peças na chapa a serem cortadas, para que haja um melhor aproveitamento de material e mais peças sejam produzidas em uma única operação da prensa, reduzindo assim também os gastos com energia. As distâncias mínimas necessárias para um corte eficiente e correto são apresentadas na Figura (2.8) e na Tabela (2.2).

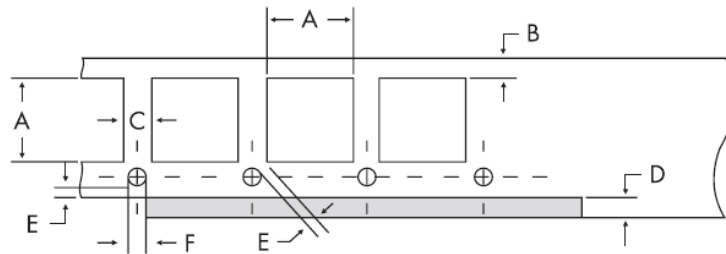


Figura 2.8 - Estudo do layout de tira. FONTE: MESQUITA; RUGANI, 1997, p. 12

Onde **A** é a dimensão máxima da peça a ser cortada, **B** é a distância mínima entre a borda da chapa e a extremidade da figura a ser cortada, **C** é a distância mínima entre as figuras, **D** é o espaço da chapa que deve ficar sob o prensa-chapa, **E** é a distância mínima entre uma figura e um furo e **F** é o diâmetro mínimo para estampar figuras circulares.

Outro fator econômico relacionado à operação de corte é o desgaste das ferramentas. Por exemplo, no caso de um punção cilíndrico de pequenas dimensões é possível produzir de vinte a trinta mil peças sem necessidade de retificação das ferramentas, porém devido aos esforços de corte necessários para vencer a resistência da chapa associados ao esforço de atrito, o estampo acaba perdendo o fio de corte gerando peças com contorno pouco definidos e com rebarbas.

Sendo assim necessário realizar uma retificação, têmpera e afiação do punção e da matriz, para que ambos readquiram o fio de corte, normalmente é possível realizar até quarenta retificações em um estampo, logo, o número médio de peças produzidas por essa ferramenta é de um milhão (Palmeira, 2005).

**Tabela 2.2 - Valores mínimos para os espaços representados nas Figura (2.8). FONTE: MESQUITA; RUGANI, 1997, p.12**

Material	Espessura (mm)	A (mm)	B (mm)	C (mm)	D (mm)	E (mm)	F (mm)
Aço, ferro latão, bronze fosforoso, alumínio e aço inoxidável	$e \leq 0,5$	Até 10	0,5 a 1,2	0,5	1	0,5	3
		10 a 30	1,2 a 2	0,5 a 1	1 a 1,5	0,5	3
		30 a 100	2 a 3	1,5 a 2	1,5 a 2	0,5 a 1	3,5
		100 a 300	3 a 5	2 a 2,5	2 a 2,5	1 a 2	4
	$0,5 \leq e \leq 1$	Até 10	1 a 1,5	1	1,5	1	3
		10 a 30	1,5 a 2	1 a 1,5	1,5 a 2	1	3,5
		30 a 100	2 a 3,5	1,5 a 2	2 a 2,5	1 a 2	4
		100 a 300	3,5 a 5,5	2 a 3,5	2,5 a 3	2 a 3	4
	$1 \leq e \leq 1,5$	Até 10	1,5 a 2	1,5	2	1,5	3
		10 a 30	2 a 2,5	1,5 a 2	2 a 2,5	1,5	3,5
		30 a 100	2,5 a 3,5	2 a 2,5	2,5 a 3	1,5 a 2,5	4
		100 a 300	3,5 a 6	2,5 a 3,5	3 a 3,5	2,5 a 3,5	5
	$1,5 \leq e \leq 2$	Até 10	2 a 2,5	2	2,5	2	3,5
		10 a 30	2,5 a 3,5	2 a 2,5	2,5	2	4
		30 a 100	3,5	2,5 a 3,5	2,5 a 3	2 a 3	4
		100 a 300	5 a 8	3,5 a 5	3 a 3,5	3 a 4	5
	$2 \leq e \leq 3$	Até 10	3 a 3,5	3	3,5	3	4
		10 a 30	3,5 a 4	3 a 3,5	3,5 a 4	3	4
		30 a 100	4 a 5	3,5 a 4,5	4 a 4,5	3 a 4,5	5
		100 a 300	5 a 8	4,5 a 6	4,5 a 5	4,5 a 6	6
	$3 \leq e \leq 5$	Até 10	5 a 5,5	5	5	5	5
		10 a 30	5,5 a 6	5 a 5,5	5 a 6	6	5
		30 a 100	6 a 8	5,5 a 6	6 a 7	6 a 8	6
		100 a 300	8 a 10	6 a 8	7 a 8	8 a 10	6

### 2.1.2 Operação de dobramento

O processo de dobramento consiste na alteração da forma de uma chapa ou tira plana, com o objetivo de se obter uma ou mais curvaturas no material, (ver Pentead, 2010). A deformação é obtida por meio da aplicação de esforços gerados por um punção, também conhecido como estampo de dobra. O carregamento do punção é aplicado de maneira a gerar esforços de flexão ao longo da seção da peça caracterizando o processo de dobramento por um estado duplo de tensões. A operação de dobra é realizada em prensa com o auxílio de um punção, que é guiado pelo cabeçote ou placa-guia, e uma matriz. Normalmente o material a ser dobrado é apoiado sobre a matriz e fixado pelas guias da

peça, nesse caso, a parte inferior do punção tem a forma da superfície interna da peça e a parte superior da matriz tem a forma da superfície externa. A Figura (2.9) ilustra uma operação de dobra genérica.

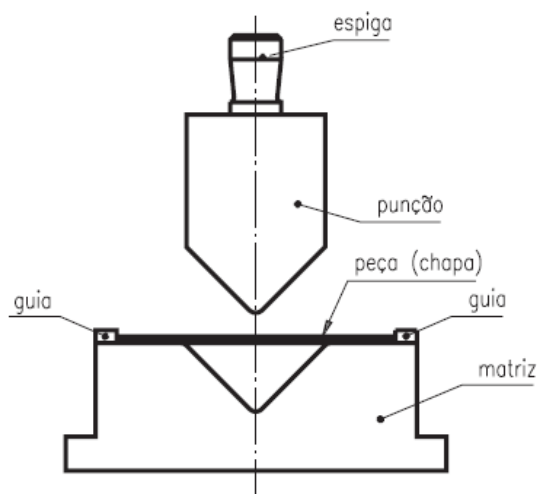


Figura 2.9 - Operação de dobramento de uma chapa plana. FONTE: SECCO; FILHO; DE OLIVEIRA, 2001, p. 7

Em algumas operações, para a obtenção do formato final da peça, a chapa precisa ser dobrada em etapas e em certos casos, é necessária a utilização de mais de um tipo de estampo, como exemplificado na Figura (2.10).

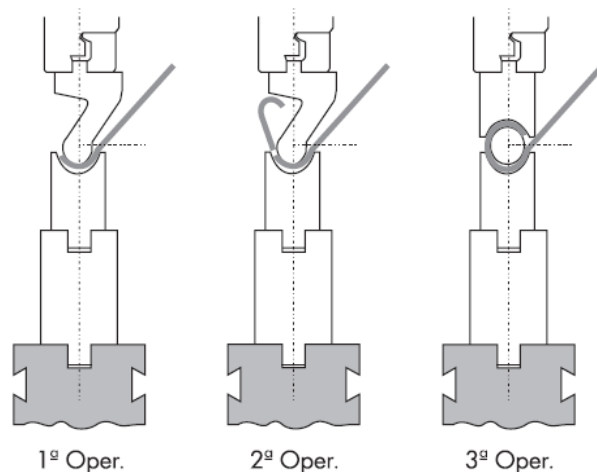


Figura 2.10 - Exemplo peça dobrada em etapas. FONTE: MESQUITA; RUGANI, 1997, p. 27

Os processos de dobramento recebem nomes particulares de acordo com a característica do dobramento realizado (Palmeira, 2005). Por exemplo, quando o dobramento é feito numa pequena parte da extremidade da chapa, o processo recebe o nome de flangeamento. Algumas dessas variações no processo de dobramento são apresentadas na Figura (2.11).

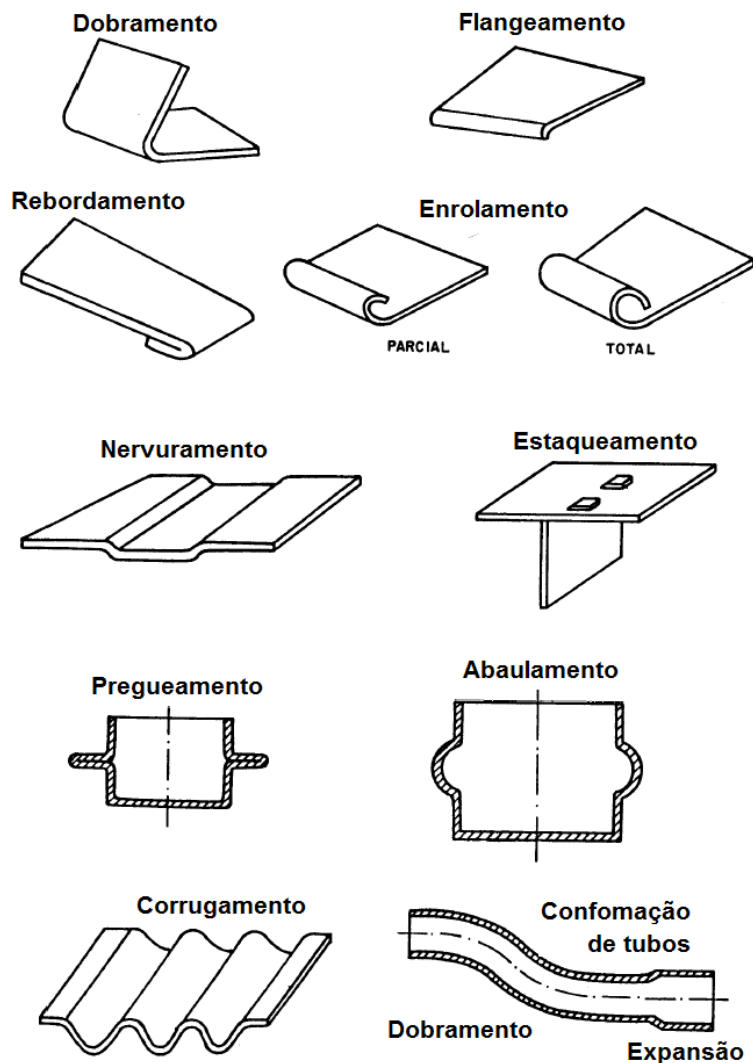


Figura 2.11 - Variações da operação de dobramento. FONTE: PALMEIRA, 2005, p. 5

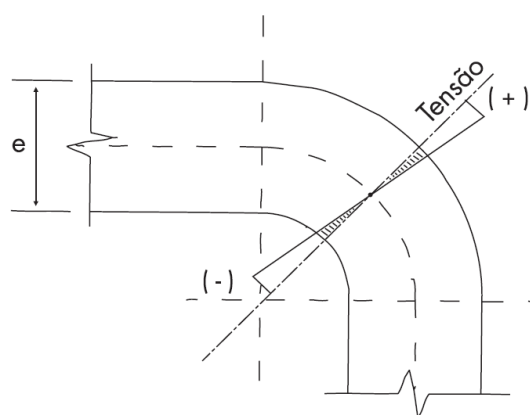
Quando há um dobramento completo da borda da chapa, o processo é denominado de rebordamento ou agrafamento. Essa borda dobrada pode ser redobrada e unida à outra peça, nessa operação, para formar uma junta agrafada, como na junção de fundos e laterais de recipientes cilíndricos ou latas pequenas. Para conferir um acabamento final e também reforçar a peça, existem o enrolamento da ponta, parcial ou total e o nervuramento, já para formar peças a partir de duas ou mais peças existe o estaqueamento e para produzir peças que permitam a montagem da peça em um conjunto tem o enrugamento e o corrugamento, aplicado principalmente para a fabricação de telhas metálicas onduladas ou serrilhadas.

Para a conformação de tubos existem operações bastante variadas, podendo ser constituída de dobramento simples, expansão de suas extremidades, abaulamento de uma parte central, retração de suas extremidades, redução do diâmetro, a partir de certo comprimento do tubo, e junção ou amassamento de suas paredes na extremidade ou parte central. Há também o processo de cunhagem, onde as superfícies das peças são limitadas pelas matrizes de modo que o perfil impresso nas matrizes seja reproduzido com perfeição nas superfícies da peça. Assim como na operação de corte, na

operação de dobramento alguns parâmetros devem ser considerados para a realização de um dobramento bem sucedido, esses parâmetros são:

- Capacidade elástica do material;
- Raio interno de curvatura mínimo;
- Comprimento desenvolvido pela peça;
- Forças atuantes na operação de dobramento.

Os esforços de flexão presentes na zona de deformação plástica da peça criam tensões de tração na superfície exterior e de compressão na superfície interna, conforme apresentado na Figura (2.12), caracterizando assim o estado duplo de tensão.



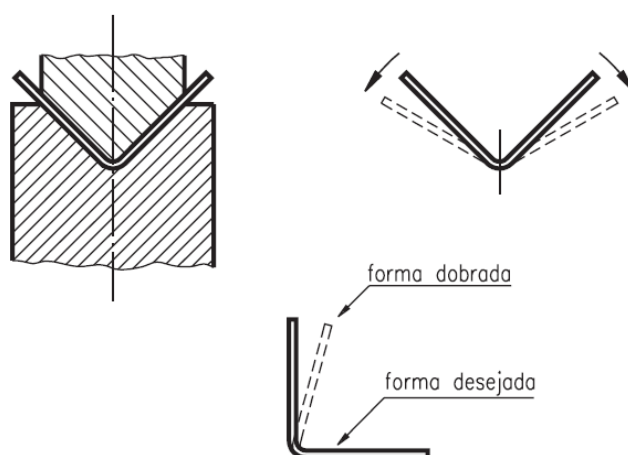
**Figura 2.12 - Análise de tensões na região de dobra de uma peça. FONTE: MESQUITA; RUGANI, 1997, p. 28**

Observando a Figura (2.12), nota-se que as tensões aumentam a partir de uma linha imaginária interna do material até atingir seus valores máximos nas camadas externas e internas da peça. Essa linha imaginária recebe o nome de linha neutra. Como as tensões nela são iguais a zero, a linha não sofre nenhuma alteração de comprimento durante o processo de dobra, por esse motivo a linha neutra é usada para elaboração do esboço da matriz e do punção e para calcular as dimensões de um esboço plano da peça que será dobrada, também chamada de desenvolvimento. Antes de iniciar a operação de dobra, a linha neutra se encontra exatamente no centro da espessura da chapa ou tira, mas quando se inicia a dobra a linha neutra tende a se deslocar em direção à superfície interna. Esse deslocamento da linha neutra se dá devido à diminuição da espessura da chapa nas zonas de deformação devido os esforços de tração. A Tabela (2.3) pode ser usada na definição da localização aproximada da linha neutra na peça em função da sua espessura.

**Tabela 2.3 - Localização da linha neutra para algumas espessuras de chapa específicas. FONTE: PENTEADO, 2010, p. 61**

Espessura da chapa ( $e$ )	Posição em relação ao lado interno da dobra
até 2 mm	$\frac{1}{2} \cdot e$
acima de 2 mm até 4 mm	$\frac{3}{7} \cdot e$
acima de 4 mm	$\frac{1}{3} \cdot e$

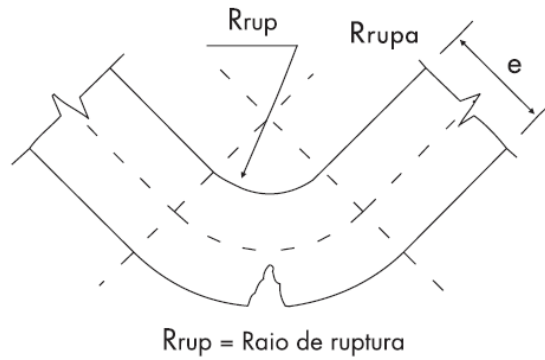
Para que a operação de dobra seja realizada é necessário que as tensões nas camadas externas ultrapassem o limite de escoamento do material, conferindo à peça uma deformação permanente, contudo, devido o princípio exemplificado com a Figura (2.12), uma parte das tensões atuantes na seção dobrada estarão abaixo do limite de escoamento do material. Isso faz com que ao retirar o carregamento proporcionado pelo punção, a parte da seção que ficou submetida a tensão inferior ao limite de escoamento tente retornar a sua posição inicial gerando um pequeno retorno elástico ou efeito mola (*spring back*), conforme ilustrado na Figura (2.13). Esse retorno deve ser compensado durante a operação de dobra.



**Figura 2.13 - Exemplo de retorno elástico de uma peça em v. FONTE: SECCO; FILHO; DE OLIVEIRA, 2001, p. 8**

Normalmente o ângulo de retorno observado varia de  $1^\circ$  a  $10^\circ$ , o seu valor é dependente de alguns fatores de projeto como: o tipo de material utilizado para a peça, a espessura da chapa a ser dobrada e o raio de curvatura que será atribuído à peça. Para o dimensionamento correto da peça, recomenda-se construir a matriz com ângulos mais acentuados na tentativa de compensar o retorno. Contudo, em alguns casos essa calibração das dimensões da matriz é realizada pelo método de tentativa e erro, gerando custos adicionais, mas a produção em série de peças torna esse procedimento viável, já que os custos com a produção das ferramentas de dobra podem ser diluídos no preço final das peças. Porém os raios de curvatura da peça devem ser dimensionados obedecendo a um limite, pois quanto menor for o raio de dobramento, maiores serão as tensões internas geradas na peça.

No processo de dobra, os esforços de tração estão relacionados a falha do material, caso eles ultrapassem o limite de ruptura do material haverá a nucleação de trincas, exemplificadas na Figura (2.14), que irá comprometer o funcionamento da peça final, já os esforços de compressão estão relacionados com o enrugamento da peça.



**Figura 2.14 - Exemplificação do raio de ruptura de uma peça dobrada. FONTE: MESQUITA; RUGANI, 1997, p. 30**

As tensões de compressão forçam o aumento da largura da chapa, porém, como a largura é muito maior que a espessura, portanto os efeitos da deformação plástica concentram-se quase que totalmente ao longo da espessura, o que acaba causando o enrugamento da superfície interna da peça. Para evitar o surgimento de tensões internas elevadas e compensar o efeito do retorno elástico, o raio mínimo de dobramento a que o material será submetido deve ser dimensionado de forma a evitar raios muitos acentuados.

Uma forma empírica para a determinação desse valor mínimo para o raio interno de dobramento  $R_{min}$  é através da Equação (2.5):

$$R_{min} = e \left( \frac{50}{AL\%} - 0,5 \right), \quad (2.5)$$

onde  $R_{min}$  representa o raio interno de dobramento,  $e$  é a espessura da chapa e  $AL\%$  é o alongamento percentual da chapa.

Outra forma comumente usada para determinar o raio mínimo de curvatura, agora levando em conta as características do material, é adotar o raio mínimo como sendo de uma a duas vezes a espessura da chapa para materiais moles e de três a quatro vezes para materiais mais rígidos (Mesquita; Rugani, 1997).

Para obter o exato comprimento da chapa que dará origem a peça é preciso levar em conta a variação da espessura da região de dobra, essa variação da espessura da chapa impede que o comprimento desenvolvido seja simplesmente a soma dos comprimentos retos e curvos da peça, passando a ser definido pela Equação (2.6):

$$L_e = 0,0175\alpha \left( R_l + fat \frac{4}{2} \right), \quad (2.6)$$

onde  $L_e$  representa o exato comprimento da chapa que dará origem a peça,  $\alpha$  é o ângulo de dobramento,  $R_l$  o raio de dobramento e  $fat$  o fator de correção. A Tabela (2.4) apresenta alguns valores para o fator de correção em função da relação do raio.

**Tabela 2.4 - Fatores de correção da variação da espessura durante o processo de dobramento. FONTE: MESQUITA; RUGANI, 1997, p.31**

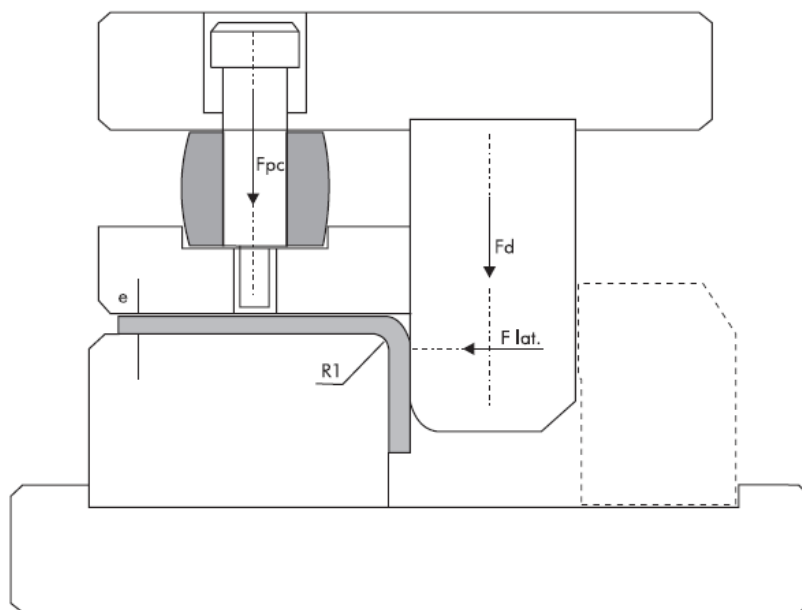
$R_l/e$	5	3	2	1,2	0,8	0,5
$fat$	1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5

Assim com no processo de corte, na ação de dobrar também há a necessidade de se calcular as forças envolvidas na operação, de modo que se defina a prensa adequada para realização do trabalho. Basicamente são observados três tipos de forças durante a dobra de uma chapa, elas são:

- Força de dobramento ( $F_d$ );
- Força de prensa-chapa ( $F_{pc}$ );
- Força lateral ( $F_{lat}$ ).

Os cálculos das forças, apresentadas na Figura (2.15), envolvidas no processo de dobramento são realizados baseados nos carregamentos padrões de vigas. Isso significa que a forma de calculo vai variar de acordo com o tipo de dobramento a ser realizado, sendo necessário associar o tipo de dobramento com um correspondente carregamento de uma viga (Mesquita; Rugani, 1997).

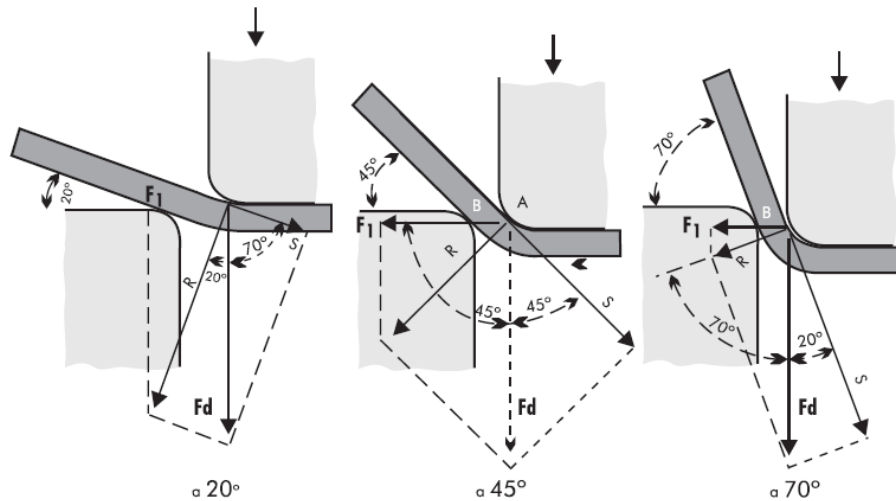
Por exemplo, numa dobra simples em matriz, parte da chapa fica presa pelo prensa-chapa e a outra parte permanece livre, todo o conjunto funcionando como uma viga em balanço.



**Figura 2.15 - Forças atuantes na operação de dobramento simples. FONTE: MESQUITA; RUGANI, 1997, p. 32**

Neste caso, o punção exerce a força de dobramento ( $F_d$ ) ao descer sobre a parte em balanço da chapa, que começa a se deformar. Parte desta força é transferida à parede lateral da matriz à medida que a chapa se deforma gerando uma força lateral ( $F_{lat}$ ), conforme apresentado na Figura (2.16). Essa força lateral será máxima quando a chapa atingir uma posição de  $45^\circ$  com a horizontal.





**Figura 2.16 - Análise das forças atuantes na operação de dobramento simples. FONTE: MESQUITA; RUGANI, 1997, p. 33**

A tensão de flexão usada no processo deve ser capaz de vencer o limite elástico e o encruamento do material para que haja deformação plástica. A seguir são apresentados os cálculos da força de dobramento em kgf para as dobras mais comuns.

Para definir as equações foram adotados os seguintes significados para as constantes abaixo:

- $b$  = Largura da tira a ser dobrada em mm;
  - $e$  = Espessura da tira em mm;
  - $l$  = Comprimento livre entre os apoios da matriz em mm;
  - $\sigma_f$  = Tensão de flexão do material em kgf/mm<sup>2</sup>.
- Dobramento em V
 

A força de dobramento necessária para realizar a operação de dobramento em V é definida pela Equação (2.7). A Figura (2.17) ilustra a operação.

$$F_d = \frac{b \cdot e^2 \cdot \sigma_f}{1,5 \cdot l} \quad (2.7)$$

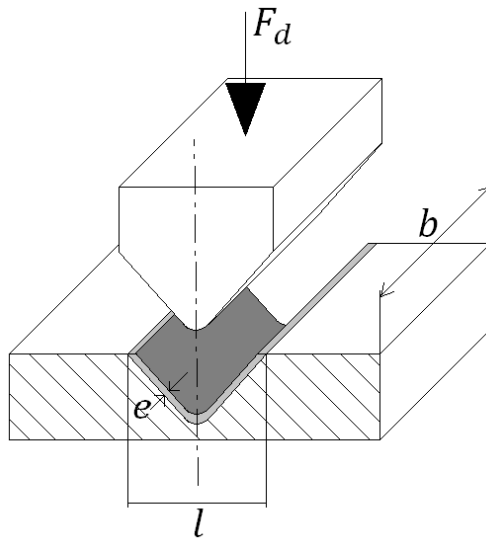


Figura 2.17 - Operação de dobramento em V de uma tira plana

- Dobramento em L

A força de dobramento necessária para realizar a operação de dobramento em L é definida pela Equação (2.8). A Figura (2.18) ilustra a operação.

$$F_d = \frac{b \cdot e^2 \cdot \sigma_f}{6 \cdot l} \quad (2.8)$$

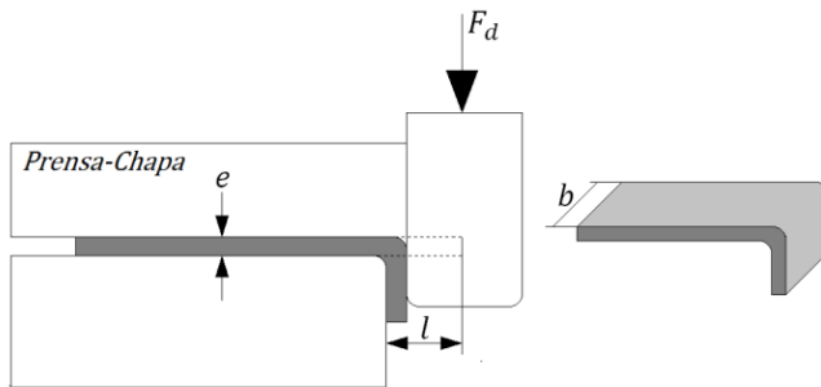
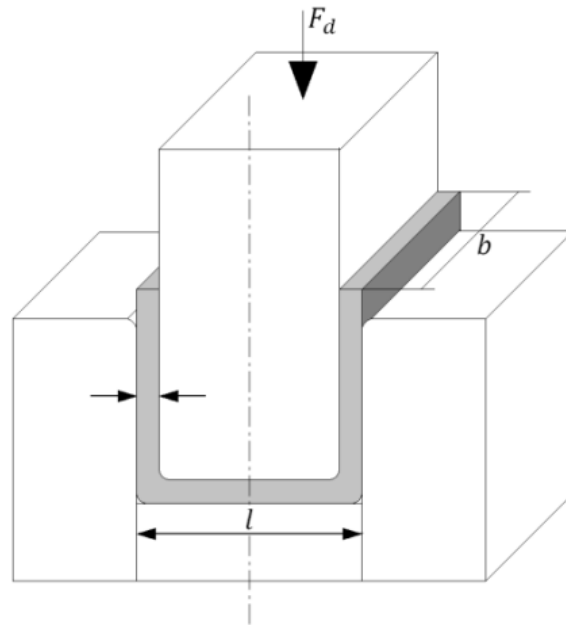


Figura 2.18 - Operação de dobramento em L de uma tira plana. FONTE: MESQUITA; RUGANI, 1997, p. 34

- Dobramento em U

A força de dobramento necessária para realizar a operação de dobramento em U é definida pela Equação (2.9). A Figura (2.19) ilustra a operação.

$$F_d = \frac{b \cdot e \cdot \sigma_f}{e} \quad (2.9)$$



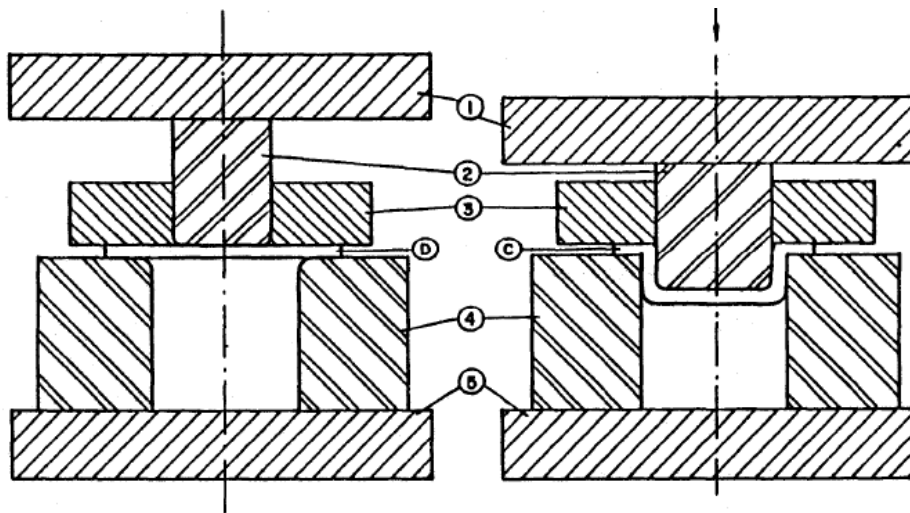
**Figura 2.19 - Operação de dobramento em U de uma tira plana. FONTE: MESQUITA; RUGANI, 1997, p. 35**

Às vezes, nas operações de dobramento é necessário manter a tira de chapa presa firmemente, para evitar que a mesma se desloque durante a operação. Para isso, é usado um prensa-chapa ou sujeitador de ação por molas. Normalmente, o valor dessa força de sujeição pode ser considerado como sendo  $0,3 F_d$  (Mesquita; Rugani, 1997).

### **2.1.3 Operação de repuxo**

A operação de repuxo, também chamada de embutimento ou estampagem profunda, consiste na obtenção, a partir de uma chapa plana, de um sólido oco, comumente chamado de copo (ver Palmeira, 2005). O pedaço de chapa que dará origem a peça recebe o nome de “*blank*” ou desenvolvimento.

A diferença entre estampagem rasa, chamada de *shallow*, e profunda é arbitrária. É definida estampagem rasa quando o processo se refere à conformação de um copo com profundidade menor do que a metade do seu diâmetro. Já para processos que resultem em profundidades maiores do que a do caso anterior, as mesmas são denominadas de estampagem profunda (Palmeira, 2005). As ferramentas usadas durante a operação são chamadas de estampas e são formados basicamente por um punção, uma matriz e um sujeitador, também chamado de prensa-chapa. A Figura (2.20) exemplifica um estampo aplicado a estampagem profunda.



COMPONENTES DA FERRAMENTA:

- 1 - SUPORTE DE PUNÇÃO
- 2 - PUNÇÃO
- 3 - PRENSA CHAPAS OU SUJEITADOR
- 4 - MATRIZ
- 5 - SUPORTE DA MATRIZ

- D - DISCO (PEÇA INICIAL NO PROCESSO)
- C - COPO (PEÇA PARCIALMENTE CONFORMADA)

Figura 2.20 - Operação de estampagem profunda de uma chapa plana. FONTE: PALMEIRA, 2005, p. 24

Na estampagem profunda, o *blank* é apoiado sobre uma matriz e fixado por um sujeitador que mantém sobre ele uma pressão constante durante o processo, evitando que ocorra enrugamento da superfície da peça. Um punção é acionado e aplica uma força denominada de força de repuxo ( $F_R$ ) sobre a chapa que faz com que ela penetre na matriz. Ao fluir para dentro da matriz as paredes laterais da peça são formadas gradativamente pelo material da chapa que se deforma. O *blank* é determinado por meio de cálculos considerando a linha neutra do material, assim como na operação de dobra, ou por meio de testes levando em conta as dimensões da peça final. Quando a peça tem uma seção circular, sabe-se que o formato do desenvolvimento é um círculo, porém para quando a peça apresenta outra geometria é necessária a realização de cálculos computacionais ou aproximações feitas muitas vezes de forma experimental. As Figuras (2.21) e (2.22), auxiliam no cálculo do desenvolvimento de peças cilíndricas e peças retangulares.

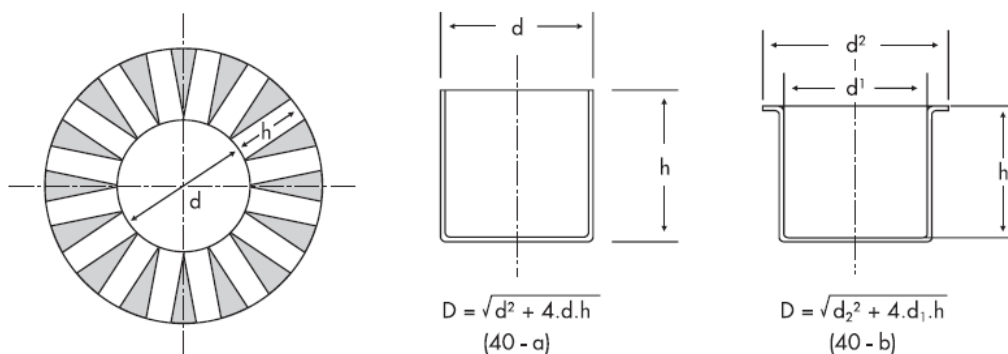


Figura 2.21 - Cálculo do *blank* de uma peça cilíndrica. FONTE: MESQUITA; RUGANI, 1997, p. 45

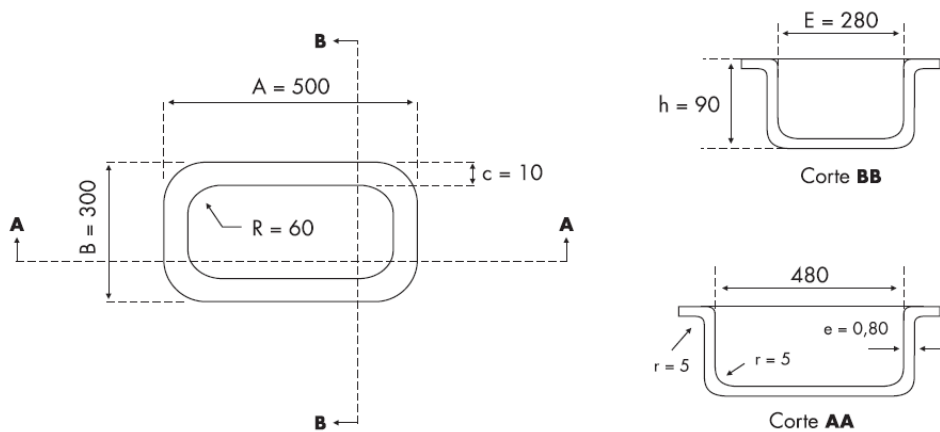


Figura 2.22 – Exemplo de *blank* de uma peça retangular. FONTE: MESQUITA; RUGANI, 1997, p. 46

Fatores como o tipo de material da chapa, a espessura da chapa, a profundidade do embutimento, os raios da matriz e do punção, o acabamento superficial dos mesmos, pressão da prensa-chapa e a lubrificação utilizada no processo interferem no cálculo da força de repuxo. Para que a estampagem ocorra com sucesso e sem o aparecimento de trincas, a força de repuxo utilizada deve ser menor que a força necessária para cortar o fundo da peça. Sendo assim,  $F_R$  pode ser obtida multiplicando a força de corte  $F_c$  por um coeficiente  $m$ , menor que 1, apresentado na Tabela (2.5) em função da relação  $d_1/d_2$ , onde  $d_1$  é o diâmetro da peça final e  $d_2$  o diâmetro de desenvolvimento.

**Tabela 2.5 - Valores para o coeficiente m de acordo com a relação dos diâmetros da peça e do desenvolvimento.** FONTE: PENTEADO, 2010, p. 70

$d_1/d_2$	$m$
0,55	1,00
0,575	0,93
0,60	0,86
0,65	0,72
0,70	0,60
0,75	0,50
0,80	0,40

A Equação (2.10) determina o valor em kgf a ser utilizado para a força de repuxo:

$$F_R = \pi \cdot d_1 \cdot e \cdot K_s \cdot m \quad (2.10)$$

A máxima força de repuxo ocorre no início da operação, quando o punção começa a penetrar na matriz a intensidade da força de repuxo diminui considerável mente. Portanto, a condição de tensão máxima ocorre no início do processo de conformação, contribuindo para o surgimento dos efeitos de enrugamento da aba ou de fissuramento da lateral em formação, que dificilmente ocorrerão nos estágios finais da operação. A Figura (2.23) ilustra a variação da força de estampagem pelo tempo de duração do processo.

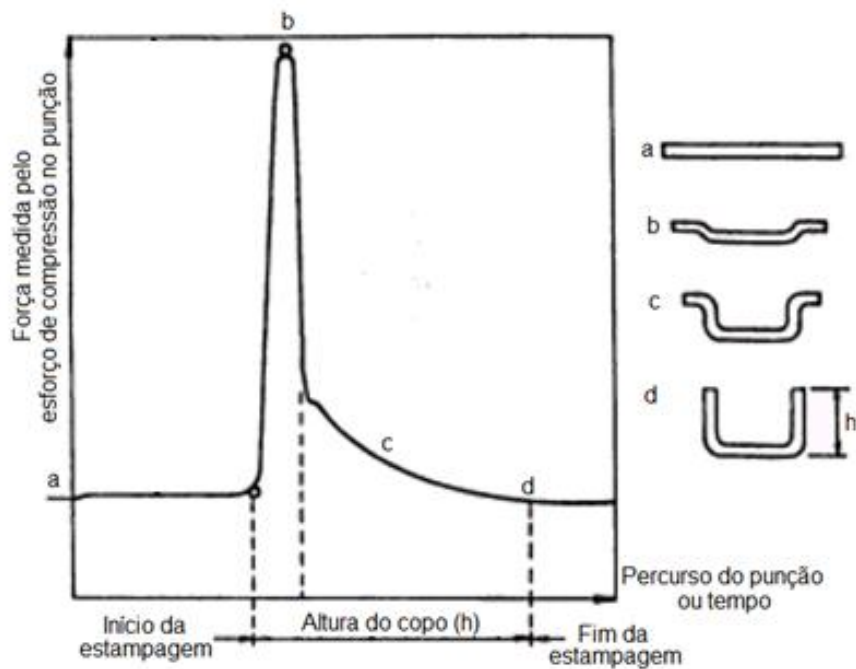


Figura 2.23 - Esforço de compressão do punção pelo tempo. FONTE: PALMEIRA, 2005, p. 18

O estudo do fluxo do metal na operação de repuxo é bastante complexo, pois aparecem estados duplos e triplos de tensão. As tensões que atuam no processo são diferentes em cada região da peça acarretando variações na espessura da peça nessas regiões. Basicamente, existem cinco regiões onde podem ser observados diferentes níveis de deformação, essas regiões são representadas na Figura (2.24) e são definidas como:

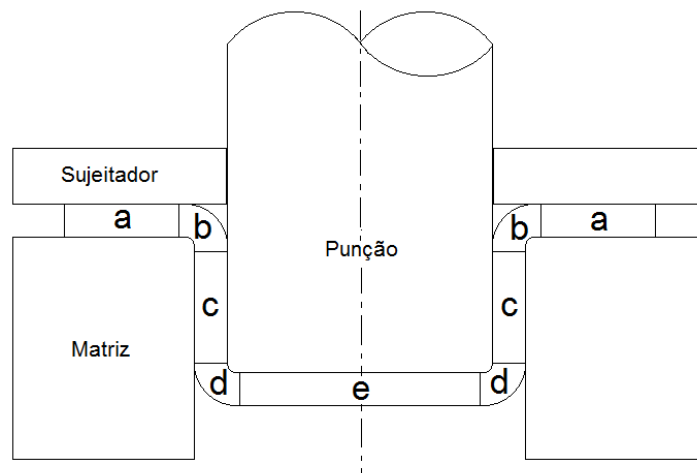


Figura 2.24 - Diferentes zonas de deformações presentes na operação de repuxo. FONTE: PALMEIRA, 2005, p. 15

- Região da aba da peça (a);
- Região do dobramento da matriz (b);
- Região lateral da peça (c);
- Região de dobramento do punção (d);
- Região no fundo da peça (e).

Na região das abas (a) ocorre uma redução gradativa da circunferência do disco à medida que sua região central penetra na matriz. Nas abas atuam esforços na direção das tangentes dos círculos concêntricos a região central, esses esforços recebem o nome de compressões circunferências (Palmeira, 2005). Eles tendem a enrugar a chapa, daí a necessidade da utilização de sujeitadores para prenderem as chapas. Essas tensões são representadas na Figura (2.25).



Figura 2.25 - Esforços na região da aba da peça durante a estampagem. FONTE: PALMEIRA, 2005, p. 16

A proporção do embutimento versus o alongamento é controlado pela força de sujeição e os coeficientes de atrito entre o *blank*, e o sujeitador e a matriz. De forma geral, recomenda-se definir a pressão de sujeição como sendo 30% da força de repuxo. Essa pressão deve ser suficientemente baixa para permitir o movimento da aba do disco em direção à região central da matriz e suficientemente alta para evitar o aparecimento das rugas. A pressão ideal depende do material e da espessura da chapa, sendo que quanto menor for à espessura maior deverá ser a pressão, em casos de chapas grossas não há necessidade de utilizar sujeitador, pois não ocorre o enrugamento da aba.

Ainda na aba atuam mais dois tipos de esforços: os de tração, que trazem essa parte para a região central da matriz, esses esforços recebem o nome de tensões de estiramento radial, e os esforços de atrito que dependem do nível da tensão de sujeição, do tipo de lubrificante empregado e do estado das superfícies da chapa, da matriz e do sujeitador. A deformação plástica que ocorre nessa região não é decorrente somente da ação de estiramento, mas também da extrusão causada pela compressão do sujeitador e pela compressão circunferencial. A ação dessa tensão tende a aumentar a espessura da chapa nessa região, mas isso ocorre apenas em pequena intensidade devido à ação restritiva da pressão do sujeitador. Na região de dobramento na matriz (b) ocorre um aumento da espessura pelas diferenças entre as tensões de tração, compressão e as componentes tangenciais, já na região de dobramento no punção (d) ocorrem significativas deformações na espessura. Em ambas as regiões agem tensões de tração na superfície externa e tensões de compressão na superfície interna. Essas tensões são representadas na Figura (2.26).

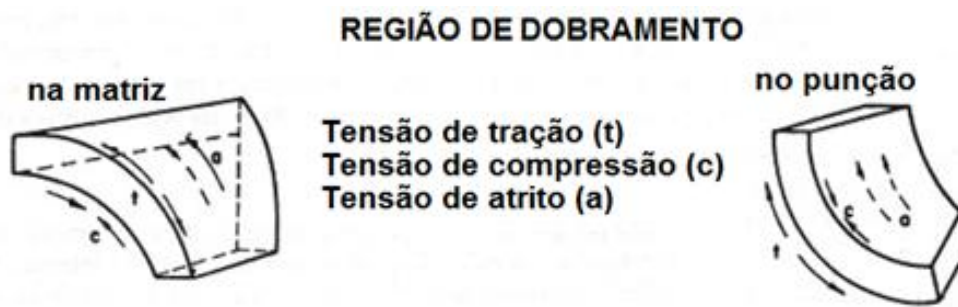


Figura 2.26 - Esforços nas regiões de dobramento da peça durante a estampagem. FONTE: PALMEIRA, 2005, p. 16

Na região lateral da peça (c) ocorre um decréscimo gradual da espessura até o seu fundo, conforme exemplificado na Figura (2.27). Nessa região atuam tensões de tração e também tensões de compressão, perpendiculares à superfície das laterais, além dos esforços de atrito entre a superfície externa da lateral da peça e a superfície da cavidade da matriz e entre a superfície interna da lateral da peça e a superfície lateral do punção.

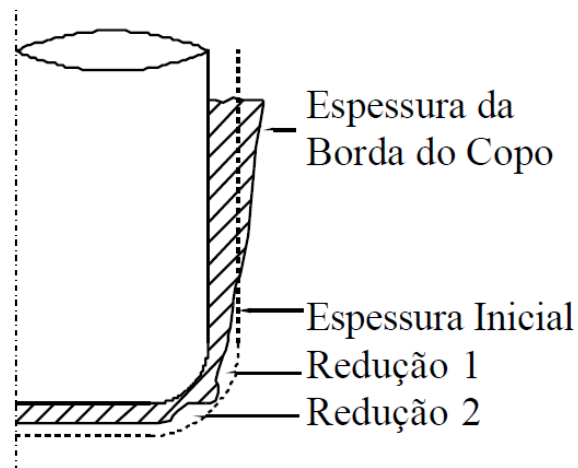


Figura 2.27 - Representação da variação da espessura da peça. FONTE: BUTTON; BORTOLUSSI, 1999, p. 4

Na região no fundo do copo (e) a espessura final da peça é praticamente a mesma da espessura inicial da chapa. Nessa região ocorre a predominância de esforços de compressão exercidos pela extremidade do punção, que são transmitidas através de tensões de tração radiais. Essas tensões são representadas na Figura (2.28). Devido à uniformidade geométrica da peça a ser estampada, as tensões existentes em qualquer plano vertical, passando pelo eixo de simetria, são iguais, logo as possibilidades de aparecimento de enrugamento na aba, durante a estampagem, ou de fissura, na região lateral adjacente ao fundo da peça, são as mesmas para toda a peça.



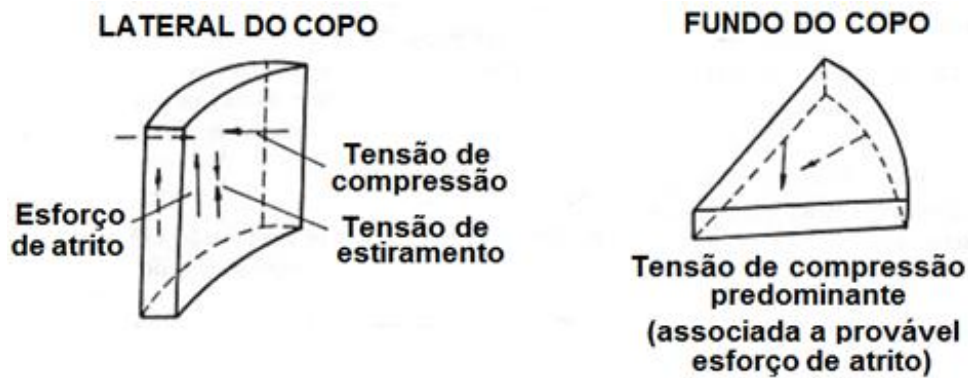


Figura 2.28 - Esforços nas regiões laterais e no fundo da peça durante a estampagem. FONTE: PALMEIRA, 2005, p.

17

No grupo de estampagem profunda é possível classificar a operação a qual a chapa será submetida em três subgrupos, eles são representados na Figura (2.29) e são definidos como:

- Estampagem;
- Reestampagem;
- Reestampagem reversa;

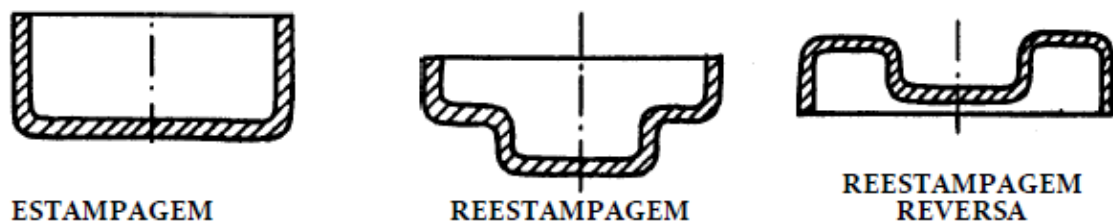


Figura 2.29 - Variações da operação de estampagem profunda. FONTE: PALMEIRA, 2005, p. 6

Na reestampagem, é realizada nova estampagem a partir do fundo e para fora de uma peça já estampada e na reestampagem reversa o mesmo procedimento é seguido, porém agora a deformação é realizada a partir do fundo e para dentro da peça.

Para a realização adequada da operação de repuxo os parâmetros que devem ser analisados são:

- As propriedades do material - capacidade de alongamento e de embutimento do material relação de repuxo;
- A redução percentual;
- O ferramental (matriz e punção);
- Os lubrificantes utilizados;
- A velocidade de conformação;
- As forças que atuam na operação de repuxo.

O material que será submetido a uma operação de repuxo deve apresentar propriedades compatíveis com a dinâmica do processo. Visto que, assim como na operação de dobra, as

possibilidades de repuxo começam no limite elástico e terminam um pouco antes do limite de ruptura do material, pois se o esforço de estampagem provocar em qualquer parte da peça uma tensão superior ao limite de ruptura do material da chapa haverá o aparecimento de trincas.

Dois parâmetros que medem essa capacidade do material a ser submetido com sucesso à um processo de estampagem profunda são a capacidade de alongamento e a de embutimento do material.

A chapa de aço para operações de repuxar deve ter um limite elástico bastante baixo (18 à 21 kgf/mm<sup>2</sup>) e um limite de ruptura mais elevado possível (35 à 42 kgf/mm<sup>2</sup>), com um coeficiente de alongamento em torno de 33 a 45%. A capacidade de alongamento é função da velocidade de endurecimento pelo trabalho mecânico a frio de cada material. Esse parâmetro é medido pelo coeficiente de encruamento  $n$ , que por sua vez é determinado por uma relação matemática empírica considerando que a parcela da curva tensão-deformação real entre o escoamento e a estricção é representada pela Equação (2.11).

$$\sigma_v = R \cdot D_{ef}^n \quad (2.11)$$

onde  $\sigma_v$  é a tensão verdadeira aplicada ao corpo-de-prova,  $R$  é o coeficiente de resistência e  $D_{ef}$  é a deformação verdadeira sofrida pelo corpo-de-prova. Em materiais com elevado coeficiente de encruamento, a deformação localizada causa um incremento rápido da resistência mecânica do material e o mesmo se torna capaz de resistir cada vez mais a novas deformações. Já em materiais de pequeno coeficiente de encruamento, a deformação localizada causa uma redução de seção e uma perda da resistência mecânica (Mesquita; Rugani, 1997).

Quando a profundidade do embutimento é maior que o diâmetro da peça não é possível realizar a estampagem em uma só operação, pois o esforço de embutimento seria tão grande que a chapa seria rompida. Neste caso a operação de repuxo para obtenção da peça deve ser dividida em várias etapas de forma que em cada uma delas a condição limite não seja atingida. Essa técnica recebe o nome de método das reduções sucessivas ou repuxos sucessivos e as reestampagens podem ser feitas com punções diferentes quando o perfil da peça deve ser alterado numa segunda ou terceira estampagem. No caso de peças cilíndricas, a relação entre o diâmetro da peça  $d_1$  e o diâmetro do desenvolvimento  $d_2$  é que irá determinar o número de etapas necessárias para a realização da operação de estampagem, assim como os valores dos vários diâmetros intermediários a serem utilizados.

A relação  $d_1/d_2$  para que a peça possa ser obtida em uma única operação varia com a capacidade de embutimento do material. Ela está relacionada com a severidade máxima de repuxo que o material suporta em uma única operação de estampagem. A capacidade de embutimento do material depende, dentre outros fatores, da resistência à tração do material e da espessura da chapa. Logo, quanto maior for a diferença entre o limite elástico e o de ruptura de um material, maior será a sua capacidade de embutimento. Para condições médias são admitidos os fatores  $K1$  e  $K2$  relacionados abaixo, onde  $K1$  é o fator que deve ser usado na primeira operação, quando o material ainda não

sofreu qualquer encruamento e  $K2$  é o fator que deve ser usado nas operações subsequentes. Ambos os fatores são apresentados na Tabela (2.6). Assim, tem-se a Equação (2.12):

$$d_2 \cdot K1 = d_1 \quad (2.12)$$

E para  $k$  maior que um a Equação (2.13):

$$d_{(k-1)} \cdot K2 = d_k \quad (2.13)$$

**Tabela 2.6 - Valores tabelados para os fatores K1 e K2 para repuxo progressivo. FONTE: PENTEADO, 2010, p. 71**

Material	K1	K2
Aço para repuxo	0,60 a 0,65	0,80
Aço para repuxo profundo	0,55 a 0,60	0,75 a 0,80
Aço inoxidável	0,50 a 0,55	0,80 a 0,85
Alumínio	0,53 a 0,60	0,80
Cobre	0,55 a 0,60	0,85
Latão	0,50 a 0,55	0,75 a 0,80
Zinco	0,65 a 0,70	0,85 a 0,90

Outro fator importante a ser considerado nas operações de estampagens é o projeto da matriz e punção, pois com a utilização de um ferramental inapropriado é muito difícil a produção de peças de boa qualidade. O ferramental deve ser projetado e construído levando em conta os esforços de conformação e de sujeição, a quantidade de peças que se pretende produzir e a matéria-prima utilizada na produção. O desgaste das ferramentas tem ligação direta com o tipo de metal a ser embutido, por exemplo, quanto maior a dureza do metal, mais desgaste ele irá proporcionar ao ferramental, assim como um metal oxidado, que devido à presença do óxido aumenta a abrasão de duas a cinco vezes, acelerando o desgaste (Mesquita; Rugani, 1997). Existem tabelas de seleção de materiais para ferramental em diferentes aplicações que podem servir de referência. Como exemplo, na Tabela (2.7), são mostrados alguns materiais recomendados para a confecção de punção e prensa-chapa para produção de pequenas, médias e grandes séries de peças.

**Tabela 2.7 - Exemplos de materiais utilizados para a confecção do punção e do prensa-chapa de acordo com o número de peças que se pretende produzir. FONTE: MESQUITA; RUGANI, 1997, p.41**

Descrição	Ferramenta	Aço utilizado		
		1000 peças	100000 peças	1000000 peças
Peças de até 76 mm (seção cilíndrica e quadrada)	Punção	W1 ou 4140 cementado	W1 ou S1 cementado	A2 ou D2
	Prensa-chapa	W1 ou O1	W1 ou O1	W1 ou O1
Peças redondas (até 305 mm)	Punção	Ferro fundido ligado	O1	A2 ou D2
	Prensa-chapa	Ferro fundido ligado	Ferro fundido ligado	O1 ou A2

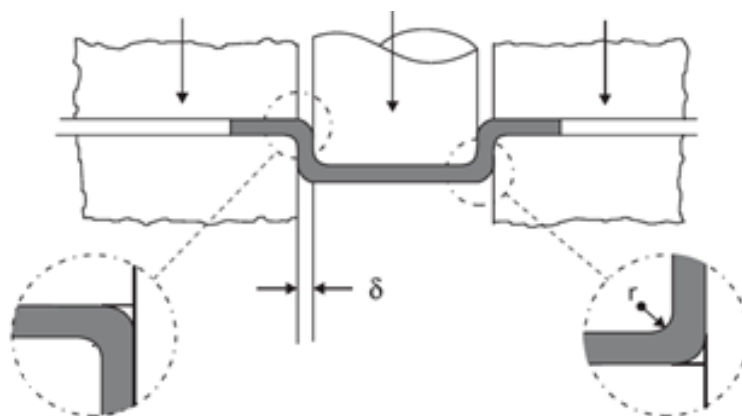
É comum que durante o processo de estampagem pedaços do material da chapa fiquem aderidos à matriz, proporcionando perda de qualidade para a peça final. Tendo isso em mente, recomenda-se o uso de materiais que minimizem esta adesão. Um exemplo de material utilizado são os aços ferramentas de alta dureza, tratados com cromo duro (Mesquita; Rugani, 1997).

Na fabricação das ferramentas de estampagem, é importante garantir uma superfície lisa para a ferramenta e também manter um bom controle das tolerâncias dimensionais do conjunto punção-peça-matriz, pois esses dois fatores, associados a uma lubrificação adequada, aplicada uniformemente em toda a superfície metálica, podem reduzir sensivelmente os esforços de conformação e o desgaste da ferramenta, melhorando o rendimento do processo. Um bom lubrificante deve evitar o contato metal-metal mesmo em pressões extremas, comum durante o processo de estampagem. Ele deve garantir também uma boa proteção contra a corrosão da chapa, ser de fácil desengraxe e não provocar a oxidação do material devido às reações de subprodutos dos gases formados no aquecimento do metal.

A seleção de um lubrificante é tão crítica que algumas indústrias modificaram seus processos de fabricação somente para permitir o uso de lubrificante de mais fácil remoção. A Tabela (2.8) apresenta alguns dos lubrificantes mais utilizados, classificados pela facilidade de remoção por meio aquoso ou por desengraxantes e/ou solventes. Eles foram classificados em notas de zero a dez, como zero sendo de difícil remoção e dez sendo de fácil remoção. O pó de grafite e graxa de sulfeto de molibdênio só se recomenda em aplicações a altas temperaturas. Outro cuidado muito importante que se deve tomar no momento do dimensionamento das ferramentas é calcular uma folga adequada entre o punção e a matriz que permita o escoamento do material para o interior da matriz, sem que surjam tensões cisalhantes ocasionadas pelo atrito e que levem à ruptura do metal em prensa (Mesquita; Rugani, 1997). A folga é ilustrada na Figura (2.30).

**Tabela 2.8 - Avaliação de alguns tipos de lubrificantes utilizados durante o processo de estampagem profunda. FONTE: MESQUITA; RUGANI, 1997, p.44**

Lubrificante		Eliminação		Efetividade de aplicação
Base	Tipo	Com veículo aquoso	Com Desengraxante/Solvente	
Aquosa	Emulsão de óleo 5 – 20%	10	8	6
Aquosa	Solução de sabão 5 – 20%	10	3	6
Aquosa	Pasta diluída de sabão e graxa	6	5	8
	Emulsão de óleo para uso pesado, com Cl e S <sup>-</sup>	10	8	7
Aquosa	Pasta pigmentada sabão/graxa	5	3	10
	Pasta cera/sabão/borax	8	3	8
Oleosa	Óleo residual de processo	8	10	6
	Óleo mineral	8	10	6
Oleosa	Óleo mineral com 10 – 30% de ácido graxo. Idem com 2 – 20% de óleo clorado ou sulfurado	8	10	8
		7	8	7
Oleosa	Ácidos graxos	6	6	8
	Óleo mineral com 5 -50% de:			
	- óleo clorado não emulsionável	5	8	6
	- óleo clorado emulsionável	8	8	6
	Óleo fosfatado concentrado	6	6	7
Oleosa	Mistura de óleo mineral com pastas pigmentadas sabão/graxa	5	5	9



**Figura 2.30 - Representação da folga ideal para a operação de repuxo. FONTE: MESQUITA; RUGANI, 1997, p. 42**

O valor adequado para essa folga  $\delta$  pode ser calculado pela Equação (2.14) a seguir, onde  $e$  é a espessura da chapa:

$$\delta = e + 0,07 \sqrt{10 \cdot e} \quad (2.14)$$

Porém, na prática adotam-se valores de folga diferentes de acordo com o tipo de material com que se está trabalhando. A Tabela (2.9) apresenta o valor da folga para alguns materiais.

**Tabela 2.9 - Valores de folgas padronizadas para alguns tipos de metais. FONTE: MESQUITA; RUGANI, 1997, p.42**

<b>Material</b>	<b>Folga <math>\delta</math></b>
Aço carbono	(1,05 à 1,15) <i>e</i>
Aço inox	(1,15 à 1,4) <i>e</i>
Cobre, latão e alumínio	(1,1 à 1,15) <i>e</i>

No processo de estampagem profunda, além da intensidade das forças atuantes é necessário definir a velocidade com que o processo de conformação é realizado. Uma velocidade excessiva pode conduzir a fraturas ou a uma redução excessiva da espessura da parede na peça repuxada, principalmente em metais de menor ductilidade. Já uma velocidade muito baixa permitirá que o material deformado se recupere (encruie) antes que o punção chegue ao final do ser curso, dificultando a realização da operação além de acarretar na diminuição da produção, já que levaria mais tempo para produzir uma peça.

A velocidade de conformação deve ser definida levando em conta as seguintes considerações:

- Uso de matéria prima de qualidade uniforme;
- Peças simétricas de baixa severidade de redução;
- Lubrificação adequada;
- Qualidade do ferramental;
- Pressão do prensa-chapa;
- Qualidade da prensa.

Para os aços inoxidáveis austeníticos a velocidade máxima de conformação é da ordem de 9 a 12 m/min. Em condições piores, pode se estabelecer os valores indicativos de 6 a 9 m/min para os aços austeníticos e de 4 a 6 m/min para os aços ferríticos.

## **2.2 MODELO CONSTITUTIVO DE LEMAITRE COM VARIÁVEL DE DANO**

Os processos de estampagem envolvem grandes níveis de deformação plástica. No processo de corte, o nível de deformação é tão elevado que faz com que a tensão interna na chapa ultrapasse o limite de ruptura do material, ocasionando o aparecimento de trincas e fissuras, que posteriormente resultará na separação de parte do material. Já nos processos de dobra e repuxo é necessário realizar um controle dos níveis de deformação, pois as tensões internas na peça não devem ultrapassar o limite de ruptura do material para que não ocorra o aparecimento de trincas na peça final, tornando-a imprópria para o uso.

Existem inúmeras formas possíveis de se definir a localização e a iniciação de uma trinca na escala mesoscópica. Contudo, uma maneira simples e de solução mais prática é usar o chamado critério de dano crítico. Esse critério estabelece que uma trinca mesoscópica seja iniciada quando o valor do dano do material atingir um valor crítico (Lemaitre, 2005), conforme a Equação (2.15).

$$D \geq D_C \quad (2.15)$$

onde  $D$  é uma variável adimensional que tem como objetivo contabilizar o nível de degradação do material e  $D_C$  é o valor de dano crítico.

O valor de dano crítico é considerado como uma constante do material. Embora seu valor seja de difícil determinação, para muitos materiais o valor de dano crítico está na faixa de 0,2 a 0,5 (Teixeira, 2010). A degradação de um material pode ser entendida, neste contexto, como um fenômeno que ocorre na estrutura de um material submetido à deformação plástica que se reflete na mudança de algumas propriedades mecânicas do mesmo.

Para tentar ajudar na compreensão desse processo de degradação do material, a Figura (2.31) traz uma curva Tensão/Deformação típica para materiais dúcteis. Essa curva é dividida em dois regimes onde o material apresenta comportamentos distintos.

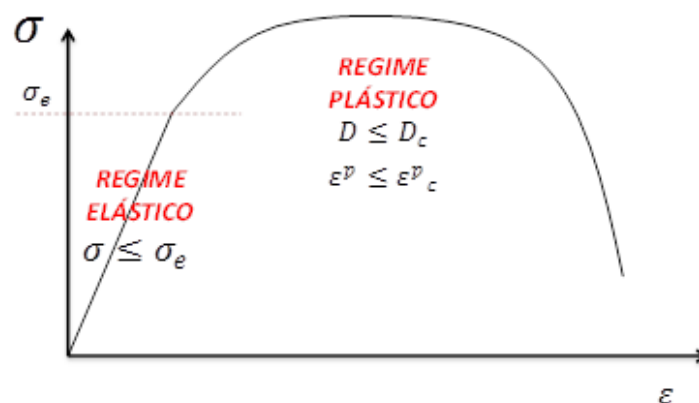


Figura 2.31 - Critério de dano crítico. FONTE: MALCHER, 2012.

O primeiro regime é o elástico, nesse regime o material apresenta um comportamento elástico linear e não sofre deformação permanente, não apresentando mudança considerável, a curto prazo, em suas propriedades mecânicas. Contudo, esse regime elástico é mantido apenas enquanto a tensão atuante no material é menor ou igual a sua tensão de escoamento.

Quando a tensão atuante no material ultrapassa a tensão de escoamento do mesmo, o material entra no regime plástico. Esse regime é marcado principalmente pelo fato de que agora o material passa a apresentar deformações permanentes, deformações que se mantêm após a retirada do carregamento. Esse tipo de deformação recebe o nome de deformação plástica.

Ao ser deformado permanentemente o Módulo de Elasticidade do material tende a aumentar, tornando o material mais rígido, conseqüentemente sua capacidade de sofrer novas deformações sem

que o mesmo venha a falhar diminui. Esse endurecimento por deformação plástica do material recebe o nome de encruamento (Callister, 2008).

O encruamento do material é resultado das interações entre as discordâncias e as imperfeições inerentes ao material que provocam uma redução na mobilidade das discordâncias. Outro fenômeno que ocorre durante o processo de deformação plástica é o aumento e mudança de forma dos micro vazios, presentes em todos os metais. Essa variação volumétrica dos vazios se reflete em uma degradação do material que pode resultar no aparecimento de trincas que posteriormente podem levar ao colapso do material, quando o mesmo atingir um valor para a variável de dano igual ou superior ao valor de dano crítico.

O estudo do comportamento e evolução dessa degradação interna ao material proporcionou o surgimento de um ramo da mecânica chamado de Mecânica do Dano Contínuo (Teixeira, 2010). Desde os trabalhos pioneiros de Kachanov (1958), já se procuravam desenvolver modelos constitutivos capazes de além de descrever o comportamento mecânico de matérias dúcteis submetidos a esforços, também descrevessem a degradação interna sofrida pelo material por meio de uma variável de dano  $D$  acoplada ao modelo. Contudo, para Kachanov o dano ainda não tinha um significado físico claro, ele só foi ganhar um significado físico mais tarde com Rabotnov (1963).

Rabotnov propôs relacionar a diminuição da seção transversal do material com a evolução da variável de dano, para ele a variável de dano poderia ser medida de acordo com a Equação (2.16):

$$D = \frac{A - A_0}{A}, \quad (2.16)$$

onde  $A$  é a do material danificado e  $A_0$  é a área do material virgem. Após esses dois estudos, a Mecânica do Dano Contínuo continuou crescendo e novas propostas e significados físicos para a variável de dano foram propostos, mas em geral a variável de dano continuou com a função de contabilizar o nível de degradação interna do material. Por exemplo, no modelo constitutivo de Gurson (1977) o nível de dano no material é medido com base no crescimento volumétrico dos micro vazios.

Já neste trabalho, será utilizado o modelo constitutivo proposto por Lemaitre et. al. (1985) com variável de dano acoplada. Esse modelo é uma adaptação da equação de von Mises (Malcher, 2011). No modelo de Lemaitre, o dano é isotrópico, pois admite-se que o material em estudo tenha o mesmo comportamento mecânico em todas as direções. Na presente teoria, os defeitos microscópicos inerentes ao material são assumidos como isotropicamente distribuídos o que fenomenologicamente se reflete na degradação do Módulo de Elasticidade do material. Logo, a variável  $D$  de dano, acoplada ao modelo de Lemaitre, pode ser definida como sendo a razão entre a variação do Módulo de Elasticidade do material e o Módulo de Elasticidade do material após sofrer o dano, conforme a Equação (2.17):



$$D = \frac{E - E_0}{E}, \quad (2.17)$$

onde  $E$  é o Módulo de Elasticidade do material danificado e  $E_0$  o Módulo de Elasticidade do material virgem.

Assim como a maioria das variáveis de dano, a variável  $D$  apresenta uma faixa de variação que vai de zero até um. Considera-se dano igual à zero, quando o material ainda não sofreu degradação, e dano igual a um, quando o material apresenta-se inteiramente degradado, caracterizando a falha completa do mesmo (De Souza Neto, 2008).

## 2.2.1 Formulação Matemática

O modelo constitutivo de Lemaitre se baseia no conceito de tensão efetiva e na hipótese de tensão de equivalência, além de incluir o endurecimento isotrópico não linear e cinemático na descrição do comportamento de metais dúcteis submetidos a esforços (De Souza Neto, 2008). Outras características marcantes desse modelo constitutivo são: o fato dele ser insensível a pressão, de não fazer diferença entre esforços compressivos e esforços de tração que atuam sobre um componente.

### 2.2.1.1 Potencial de estado e relação de estado

A formulação do modelo se baseia na hipótese da existência de um potencial de estado ou potencial termodinâmico, do qual são derivadas as leis de estado. Neste caso, a Energia Livre de Helmholtz pode ser entendida como um estado potencial do material e adotada para a solução do problema. A Energia Livre pode ser expressa como uma função do conjunto  $\{\boldsymbol{\varepsilon}^e, r, \boldsymbol{\beta}, D\}$  de variáveis de estado conforme a Equação (2.18):

$$\psi = \psi(\boldsymbol{\varepsilon}^e, r, \boldsymbol{\beta}, D), \quad (2.18)$$

onde  $\psi$  representa a Energia Livre específica,  $\boldsymbol{\varepsilon}^e$  é o tensor de deformação elástica,  $r$  é a variável interna de endurecimento isotrópico,  $D$  representa a variável de dano isotrópico e  $\boldsymbol{\beta}$  é a variável interna relacionada ao endurecimento cinemático.

Neste caso, assume-se o processo como sendo isotérmico, logo a escolha das variáveis internas depende do fenômeno físico em estudo (elasticidade, endurecimento isotrópico e cinemático e dano). Adotando a hipótese de o dano afetar somente o componente elástico, é possível realiza uma dissociação das ideias de dano elástico e de endurecimento plástico, logo a Energia Livre específica passa a ser reescrita na forma de Equação (2.19) como:

$$\psi = \psi^{ed}(\boldsymbol{\varepsilon}^e, D) + \psi^p(r, \boldsymbol{\beta}), \quad (2.19)$$

onde  $\psi^{ed}$  representa a contribuição do dano elástico e  $\psi^p$  a contribuição plástica para a Energia Livre. Na presente teoria, o dano elástico potencial pode ser definido pela Equação (2.20) como sendo:

$$\bar{\rho}\psi^{ed}(\boldsymbol{\varepsilon}^e, D) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^e : (1 - D) \mathbf{D}^e : \boldsymbol{\varepsilon}^e , \quad (2.20)$$

onde  $\mathbf{D}^e$  representa o tensor elástico isotrópico. Neste caso, a lei elástica linear é obtida pela derivada do dano elástico potencial em função do tensor de deformação elástica, conforme a Equação (2.21).

$$\boldsymbol{\sigma} = \bar{\rho} \frac{\partial \psi^{ed}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} = (1 - D) \mathbf{D}^e : \boldsymbol{\varepsilon}^e . \quad (2.21)$$

Equivalentemente, a lei elástica para o dano apresentado acima é definida pela Equação (2.22) como sendo:

$$\boldsymbol{\sigma}_{eff} = \mathbf{D}^e : \boldsymbol{\varepsilon}^e , \quad (2.22)$$

onde  $\boldsymbol{\sigma}_{eff}$  é o tensor das tensões efetivas. A introdução de uma variável de dano leva diretamente para o conceito de tensão efetiva para calcular o valor da tensão que age sobre a seção de material que realmente resiste à força (Voyiadjis, 2005).

Para entender o significado físico de  $\boldsymbol{\sigma}_{eff}$  é necessário considerar o exemplo de um caso uniaxial, onde uma força  $F$  é aplicada a um corpo de prova com área de seção transversal  $A$ , a tensão neste caso pode ser dada pela Equação (2.23).

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{F}{A} . \quad (2.23)$$

Com a presença do dano, a área efetiva,  $A_{eff}$ , em que a força realmente atuará é menor que a área  $A$  devido ao crescimento dos micro-vazios. A área efetiva pode ser definida pela Equação (2.24).

$$A_{eff} = A - A_D = A(1 - D) , \quad (2.24)$$

onde  $A_D$  é a área ocupada pelos micro vazios. Essa redução de área incrementa a tensão efetiva induzida pelas forças externas. Por fim, a tensão efetiva pode ser escrita como a Equação (2.25):

$$\boldsymbol{\sigma}_{eff} = \frac{F}{A_{eff}} = \frac{F}{A(1 - D)} = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{(1 - D)} . \quad (2.25)$$

As forças termodinâmicas  $Y$  associadas às variáveis internas de dano e endurecimento isotrópico são obtidas pela derivada do dano elástico potencial em função da variável de dano, conforme a Equação (2.26).

$$Y \equiv \bar{\rho} \frac{\partial \psi^{ed}}{\partial D} = -\frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^e : \mathbf{D}^e : \boldsymbol{\varepsilon}^e . \quad (2.26)$$

Usando o inverso da lei elástica tensão/deformação tem-se e Equação (2.27):

$$Y = -\frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D}^{e-1} : \boldsymbol{\sigma} . \quad (2.27)$$

Fazendo algumas manipulações matemáticas, as forças termodinâmicas podem ser definidas em função da pressão hidrostática,  $p$ , e da tensão equivalente de von Mises,  $q$ , como na Equação (2.28) (Malcher, 2011).

$$Y = \frac{-q^2}{6G(1-D)^2} - \frac{p^2}{2K(1-D)^2} , \quad (2.28)$$

onde  $G$  é Módulo de Elasticidade ao Cisalhamento,  $K$  é o Módulo de Compressão Elástica e  $q$  é a tensão equivalente de Von Mises, que por sua vez é definido pela Equação (2.29) como sendo:

$$q = \sqrt{\frac{3}{2} \mathbf{S} : \mathbf{S}} = \sqrt{3J_2} , \quad (2.29)$$

onde  $\mathbf{S}$  é o tensor desviador das tensões e  $J_2$  é o segundo invariante do tensor desviador. Comumente conhecida como taxa de densidade de energia de deformação liberada devido ao dano,  $-Y$  corresponde à variação da densidade de energia interna devido ao crescimento do dano em tensão constante. Ao multiplicar  $-Y$  pela lei de evolução do dano obtém-se uma representação da energia dissipada pelo processo de deterioração interna a qual o material está sendo submetido.

Já a contribuição plástica para a Energia Livre pode ser expressa pela Equação (2.30) como a soma de diferentes contribuições relacionadas ao endurecimento isotrópico e cinemático.

$$\bar{\rho} \psi^p(r, \boldsymbol{\beta}) = \bar{\rho} \psi^I(r) + \frac{a}{2} \boldsymbol{\beta} : \boldsymbol{\beta} , \quad (2.30)$$

onde  $\bar{\rho} \psi^I(r)$  é uma função arbitrária do argumento  $r$  e  $a$  é uma constante do material relacionada ao endurecimento cinemático. A força termodinâmica associada ao endurecimento isotrópico do material é definida pela Equação (2.31) e a associada ao endurecimento cinemático pela Equação (2.32).

$$R \equiv \bar{\rho} \frac{\partial \psi^p(r, \boldsymbol{\beta})}{\partial r} = \bar{\rho} \frac{\partial \psi^I(r)}{\partial r} = R(r), \quad (2.31)$$

$$\mathbf{X} \equiv \bar{\rho} \frac{\partial \psi^p(r, \boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}} = a \boldsymbol{\beta}, \quad (2.32)$$

onde  $\mathbf{X}$  é então chamado de tensor *back-stress*.

### 2.2.1.2 Potencial de dissipação e equações de evolução associadas

Após definir todo o estado e as correspondentes variáveis associadas para o modelo de Lemaitre, a evolução das variáveis internas pode ser obtida assumindo a existência de um potencial de dissipação único,  $\Psi$ . Usando a regra da normalidade, as equações de evolução para todas as variáveis internas são derivadas.

Contudo, antes de se apresentar a expressão explícita para o potencial de dissipação, podem-se estabelecer algumas restrições para sua formulação. Selecionando três fenômenos físicos como endurecimento isotrópico, endurecimento cinemático e dano, a dissipação intrínseca deve satisfazer o segundo princípio da termodinâmica, escrito na forma da Equação (2.33).

$$\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \mathbf{X} : \dot{\boldsymbol{\beta}} - R\dot{r} - Y\dot{D} \geq 0. \quad (2.33)$$

Levando em consideração a definição das forças termodinâmicas associadas a cada variável interna. Pode-se reescrever a desigualdade acima assumindo que a mesma pode ser decomposta em dois termos chamados dissipação plástica e dissipação do dano, conforme as Equações (2.34) e (2.35), respectivamente.

$$\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p - \mathbf{X} : \dot{\boldsymbol{\beta}} - R\dot{r} \geq 0, \quad (2.34)$$

$$-Y\dot{D} \geq 0. \quad (2.35)$$

Como mostrado na equação acima, a desigualdade deveria ser identicamente verificada para cada mecanismo de dissipação selecionado. Como  $-Y$  é uma função quadrática positiva, a taxa do dano  $\dot{D}$  também deve ser uma função não negativa. Isso significa que a variável de dano somente leva em consideração a degradação progressiva de material, não sendo possível nenhum tipo de recuperação de energia. Satisfazendo essa restrição e a desigualdade de dissipação, é assumido a existência de um pseudo potencial de dissipação  $\Psi^*$ , que é função das taxas de mudanças das variáveis internas, conforme a Equação (2.36).

$$\Psi^* = \Psi^*(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, \dot{\boldsymbol{\beta}}, \dot{D}, \boldsymbol{\varepsilon}^e, \mathbf{r}, \boldsymbol{\beta}, D), \quad (2.36)$$

onde variáveis internas são consideradas como variáveis do processo neste pseudo potencial. Usando agora a transformação de Legendre-Frenschel, um equivalente pseudo-potencial de dissipação complementar  $\Psi$  pode ser proposto como na Equação (2.37) (Malcher, 2011).

$$\Psi = \Psi(\boldsymbol{\sigma}, R, \mathbf{X}, Y, \boldsymbol{\varepsilon}^e, \mathbf{r}, \boldsymbol{\beta}, D). \quad (2.37)$$

Segundo a abordagem de um potencial de dissipação único, esse potencial de dissipação complementar é dado pela decomposição aditiva dos potenciais de endurecimento  $\Psi^p$  e dano  $\Psi^d$ , na forma da Equação (2.38).

$$\Psi = \Psi^p + \Psi^d = \Phi + \frac{b_c}{2a_c} \mathbf{X} : \mathbf{X} + \frac{S}{(1-D)(s+1)} \cdot \left(\frac{-Y}{S}\right)^{s+1}, \quad (2.38)$$

onde  $a_c$ ,  $b_c$ ,  $S$  e  $s$  são constantes materiais e  $\Phi$  representa o critério de escoamento do modelo de Lemaitre, definido pela Equação (2.39) como:

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{X}, R, D) = \frac{\sqrt{3J_2(\mathbf{S} - \mathbf{X})}}{(1-D)} - \sigma_e - R(r), \quad (2.39)$$

onde  $\sigma_e$  é a tensão de escoamento inicial do material analisado.

Segundo a hipótese da normalidade generalizada, o fluxo plástico presente no desenvolvimento do modelo é dado pela Equação (2.40) como sendo:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\gamma} \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \dot{\gamma} \mathbf{N}, \quad (2.40)$$

onde  $\dot{\gamma}$  é o multiplicador plástico e  $\mathbf{N}$  representa o vetor de fluxo, definido pela Equação (2.41) como sendo:

$$\mathbf{N} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{(\mathbf{S} - \mathbf{X})}{(1-D)\|\mathbf{S} - \mathbf{X}\|}. \quad (2.41)$$

As leis de evolução das variáveis internas de dano, de endurecimento isotrópico e de endurecimento cinemático são estabelecidas pelas equações abaixo, de forma das Equações (2.42), (2.43) e (2.44), respectivamente.

$$\dot{D} \equiv \dot{\gamma} \frac{\partial \Psi}{\partial Y} = \dot{\gamma} \frac{1}{(1-D)} \cdot \left( \frac{-Y}{S} \right)^s, \quad (2.42)$$

$$\dot{r} \equiv -\dot{\gamma} \frac{\partial \Psi}{\partial R} = \dot{\gamma}, \quad (2.43)$$

$$\dot{\mathbf{b}} = \dot{\gamma} \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{X}} = \dot{\gamma} (a_c \mathbf{N} - b_c \mathbf{X}), \quad (2.44)$$

Para garantir a que o modelo funcione corretamente as leis complementares representadas pelas Equações (2.45), (2.46) e (2.47) também precisam ser cumpridos:

$$\dot{\gamma} \geq 0, \quad (2.45)$$

$$\Phi \leq 0, \quad (2.46)$$

$$\dot{\gamma} \Phi = 0. \quad (2.47)$$

Para complementar a descrição do fenômeno da elasto-plasticidade inerente ao modelo de Lemaitre, é importante que seja definida a taxa de deformação plástica equivalente  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$ , no qual tem que está de acordo com o critério de escoamento adotado. Para o critério de von Mises, assumindo a equivalência da taxa do trabalho plástico,  $\dot{W}^p$ , tem-se a Equação (2.48):

$$\dot{W}^p = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = q \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p. \quad (2.48)$$

A taxa de deformação plástica equivalente é calculada a partir da equação anterior como expresso na Equação (2.49).

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \frac{\dot{\gamma}}{(1-D)}. \quad (2.49)$$

Assim a lei de evolução do dano pode ser reescrita como a Equação (2.50).

$$\dot{D} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \left( \frac{-Y}{S} \right)^s. \quad (2.50)$$

### 2.2.1.3 Início do dano em materiais dúcteis

Para materiais dúcteis a degradação interna ou o dano somente tem seu crescimento iniciado quando certo nível de deformação plástica acumulada é atingido (Lemaitre, 1996). Logo, os efeitos do dano nas propriedades físicas do material, quando se tem valores baixos de deformação plástica,

podem ser desconsiderados. Desde que a equação de evolução do dano seja governada pela taxa da deformação plástica equivalente, é então lógico se determinar esse limiar, baseado na própria deformação plástica equivalente. Esse valor crítico é chamado de limiar de dano,  $\varepsilon_D^p$ , e corresponde à deformação plástica equivalente abaixo da qual não ocorre dano por micro-trincas.

Embora esse limiar dependa do tipo de carregamento aplicado e do tipo de dano, é geralmente considerado um parâmetro material, identificado a partir de um ensaio uniaxial monotônico. Desta forma, esse limiar de dano é introduzido na lei de evolução do dano através do uso de uma função indicativa  $H$ , como expresso na Equação (2.51).

$$\dot{D} = \dot{\gamma} \frac{\partial \Psi}{\partial Y} = \dot{\bar{\varepsilon}}^p \left( \frac{-Y}{S} \right)^s H(\bar{\varepsilon}^p - \varepsilon_D^p), \quad (2.51)$$

onde  $H$  é a função indicativa e é definida pela Equação (2.52).

$$H(\bar{\varepsilon}^p - \varepsilon_D^p) = H(a_c) = \begin{cases} 0, & \text{se } a_c < 0 \\ 1, & \text{se } a_c \geq 0 \end{cases} \quad (2.52)$$

onde  $a_c = \bar{\varepsilon}^p - \varepsilon_D^p$

O equacionamento matemático para o modelo constitutivo de Lemaitre é apresentado de forma resumida na Tabela (2.10).

**Tabela 2.10 - Modelo de Lemaitre com endurecimento e dano isotrópicos**

i. Decomposição aditiva da deformação

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p$$

ii. Lei elástica com dano acoplado

$$\boldsymbol{\sigma} = (1 - D)\mathbf{D}^e : \boldsymbol{\varepsilon}^e$$

iii. Critério de escoamento

$$\Phi = \frac{q}{(1 - D)} - \sigma_{yo} - R(r)$$

iv. Lei de fluxo plástico  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$  e equações de evolução das variáveis internas  $r$ ,  $\boldsymbol{\beta}$  e  $D$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\gamma} \mathbf{N} = \dot{\gamma} \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{(\mathbf{S} - \mathbf{X})}{(1 - D) \|\mathbf{S} - \mathbf{X}\|}$$

$$\dot{r} = \dot{\gamma}$$

$$\dot{\boldsymbol{\beta}} = \dot{\gamma}(a\mathbf{N} - b\mathbf{X})$$

$$\dot{D} = \dot{\gamma} \frac{1}{(1 - D)} \cdot \left(\frac{-Y}{S}\right)^s$$

Com  $Y$  dado por:

$$-Y = \frac{q^2}{6G(1-D)^2} + \frac{p^2}{2K(1-D)^2}$$

v. Equações de complementaridade

$$\dot{\gamma} \geq 0$$

$$\Phi \leq 0$$

$$\dot{\gamma} \Phi = 0$$



### 3 ESTRATÉGIA NUMÉRICA

Para a realização de simulações é necessário transformar o modelo matemático de Lemaitre apresentado na seção anterior em um modelo computacional na forma de um algoritmo de integração que será inicialmente implementado em uma ferramenta acadêmica de elementos finitos e posteriormente em uma ferramenta comercial *Abaqus Standard*, através de sua sub-rotina *UMAT*.

A integração numérica do modelo de Lemaitre apresentada se baseia na estratégia de mapeamento de retorno que foi originalmente proposta por Benallal *et al.* (1988) e, Doghri e Billardon (1995) considerando a hipótese de pequenas deformações e mais tarde, expandido por vários pesquisadores, considerando grandes deformações (De Souza Neto, 1994:1998; Saanouni, 2000). O algoritmo de integração numérica originalmente proposto levava, no caso de um problema com três dimensões, a um sistema não linear de quinze equações escalares que era solucionado iterativamente de acordo com o método de Newton-Raphson.

Desta forma, analisando o procedimento padrão de mapeamento de retorno (Simo, 1998), o algoritmo de integração original foi reduzido para a solução de um sistema não linear de duas equações, em um caso completamente isotrópico (Saanouni, 2007).

Uma simplificação maior para o mesmo foi sugerida por De Souza Neto (2002), considerando a resolução de somente uma equação escalar não linear com o multiplicador plástico,  $\gamma$ , como única variável a ser determinada. Este último algoritmo de retorno desconsidera o efeito do endurecimento cinemático, o que será também seguindo durante este trabalho.

O uso de modelos constitutivos dependentes da trajetória, como é o caso do modelo original de Lemaitre, invariavelmente leva à necessidade de formulação de algoritmos para integração numérica das equações de evolução. O problema então consiste em formular procedimentos de integração numérica que sejam capazes de atualizar as variáveis internas conhecidas, geralmente denominadas por  $\alpha_n$ , no tempo  $t_n$ , para obter as variáveis internas  $\alpha_{n+1}$  no tempo  $t_{n+1}$ , onde o incremento de deformação  $\Delta\epsilon$  se assume conhecido. Além disso, a discretização das equações constitutivas dentro do chamado pseudo-tempo  $[t_n, t_{n+1}]$  é aplicada ao modelo, baseado no esquema de Euler implícito (Simo e Hughes, 1998). Desde que o modelo seja implementado em programa acadêmico de elementos finitos para um carregamento quase-elástico, é necessário também se derivar a matriz tangente consistente com o algoritmo de integração.

O procedimento de atualização das tensões, no qual é baseado na chamada metodologia da decomposição do operador também conhecida como metodologia do “operador *split*” (Simo e Hughes, 1998; DeSouza Neto *et al.*, 2008), é especialmente adequado para a integração numérica do problema de evolução e têm sido amplamente utilizados na plasticidade computacional.

O método utilizado nesse trabalho consiste em dividir o problema em duas partes: um preditor elástico, onde se monta um chamado “estado tentativa” assumindo-se o problema como completamente elástico, e um corretor plástico, onde a partir da violação da equação de lei elástica, faz-se uma correção do estado tentativa construído anteriormente, tendo como base a resolução, por

meio do método de Newton-Raphson, de um sistema não linear de equações formado pela lei elástica, a função de escoamento e as equações de evolução. O método de Newton-Raphson é escolhido para solucionar o problema devido ao fato de se atingir uma taxa quadrática de convergência para a solução.

### 3.1 ALGORITMO DE ATUALIZAÇÃO DAS TENSÕES E VARIÁVEIS INTERNAS

Na plasticidade computacional, o algoritmo de atualização é também comumente chamado de mapeamento de retorno e a sua construção requer os seguintes passos: Conhecidos os valores da deformação elástica,  $\boldsymbol{\varepsilon}_n^e$  e do conjunto das variáveis internas  $\alpha_n$ , no início do intervalo do pseudo-tempo  $[t_n, t_{n+1}]$ , e dado também o incremento de deformação prescrito,  $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$ , para este intervalo, o chamado estado tentativa elástico pode ser então construído, pelas Equações (3.1), (3.2), (3.3), (3.4) e (3.5) como:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\ trial} = \boldsymbol{\varepsilon}_n + \Delta\boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.1)$$

$$R_{n+1}^{trial} = R_n \quad (3.2)$$

$$D_{n+1}^{trial} = D_n \quad (3.3)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{p\ trial} = \boldsymbol{\varepsilon}_n^p \quad (3.4)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial} = (1 - D_n)\mathbf{D}^e : \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\ trial} \quad (3.5)$$

Onde  $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{trial}$  é o tensor das tensões tentativa,  $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{p\ trial}$  é o tensor das deformações plásticas tentativa,  $R_{n+1}^{trial}$  é a variável interna associada ao endurecimento isotrópico tentativa e  $D_{n+1}^{trial}$  é a variável de dano tentativa.

Com isso, o tensor das tensões tentativas pode ser decomposto em desviadora,  $\mathbf{S}$ , e outra hidrostática,  $p$ , como nas Equações (3.6) e (3.7), respectivamente:

$$\mathbf{S}_{n+1}^{trial} = (1 - D_n)2G\boldsymbol{\varepsilon}_{d\ n+1}^{e\ trial} \quad (3.6)$$

$$p_{n+1}^{trial} = (1 - D_n)K\varepsilon_{v\ n+1}^{e\ trial} \quad (3.7)$$

Onde  $\mathbf{S}_{n+1}^{trial}$  representa a componente desviadora e  $p_{n+1}^{trial}$  a componente hidrostática do tensor das tensões tentativas. As constantes  $G$  e  $K$  representam as constantes de Lamé e são denominadas de módulo de cisalhamento e módulo volumétrico, respectivamente.

Os termos  $\varepsilon_d^{e\ trial}$  e  $\varepsilon_v^{e\ trial}$  são as componentes desviadoras e volumétricas do tensor das deformações elásticas tentativa.

Em um segundo passo, ocorre a verificação se o estado tentativa construído acima está dentro ou fora do limite elástico do material. Para isso, a função de escoamento é determinada com base nos termos definidos acima. Para o modelo de Lemaitre, a função de escoamento é definida pela Equação (3.8).

$$\Phi^{trial} = \frac{q^{trial}}{1 - D_n} - \sigma_e(R_n) \quad (3.8)$$

Onde  $q^{trial}$  é a tensão equivalente de Von Mises que é definida em função da contribuição desviadora do tensor das tensões tentativas, logo  $q^{trial}$  é definido como expresso na Equação (3.9).

$$q^{trial} = \sqrt{\frac{3}{2} \mathbf{S}_{n+1}^{trial} : \mathbf{S}_{n+1}^{trial}} \quad (3.9)$$

A lei de encruamento do material é aqui representada pelo termo  $\sigma_e(R_n)$  que passa a ser uma função da variável de endurecimento isotrópico,  $R_n$ . A expressão que defini a evolução do limite de escoamento do material em função de  $R_n$  é escrita na forma da Equação (3.10).

$$\sigma_e(R_n) = \sigma_e + \mathbf{H}R_n \quad (3.10)$$

Onde  $\mathbf{H}$  é o módulo de endurecimento isotrópico, que é uma propriedade material.

Caso  $\Phi^{trial}$  seja igual ou menor a zero, significa que o incremento de deformação prescrito inicialmente é realmente totalmente elástico e o estado tentativa construído pode ser assumido como o estado real do material,  $(*)_{n+1} = (*)_{n+1}^{trial}$ .

Porém, caso  $\Phi^{trial}$  seja maior que zero, então é correto constatar que o material se encontra dentro do regime plástico e que o incremento de deformação prescrito, que inicialmente foi considerado elástico, possui uma parcela plástica. Desta forma, há a necessidade de se corrigir o estado tentativa construído anteriormente.

A correção do estado tentativa é feita a partir da remoção do incremento de deformação plástica de dentro da deformação elástica tentativa, este processo por ser expresso pela Equação (3.11).

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e \text{ trial}} + \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p \quad (3.11)$$

Para o modelo original de Lemaitre, o incremento de deformação plástica é então definido através da Equação (2.37). Assim, substituindo esta expressão na Equação (3.11), tem-se a Equação (3.12).

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e \text{ trial}} + \Delta \gamma \sqrt{\frac{3}{2} \frac{\mathbf{S}_{n+1}}{(1 - D_{n+1}) \|\mathbf{S}_{n+1}\|}} \quad (3.12)$$

Onde  $\Delta \gamma$  é o multiplicador plástico e  $\|\mathbf{S}_{n+1}\|$  é a norma da parte desviadora do tensor tensão.

A atualização das variáveis isotrópicas de dano e encruamento podem ser obtidas através das Equações (3.13) e (3.14), respectivamente.

$$D_{n+1} = D_n + \frac{\Delta \gamma}{(1 - D_{n+1})} \left( \frac{-Y}{S} \right)^s \quad (3.13)$$

$$R_{n+1} = R_n - \Delta \gamma \quad (3.14)$$

Onde  $S$  e  $s$  é o denominador e expoente de dano, respectivamente.

Por fim, a função de escoamento atualizada é então determinada através do estado real no pseudo-tempo  $t_{n+1}$ , de acordo com a Equação (3.15).

$$\Phi_{n+1} = \frac{\sqrt{\frac{3}{2} \mathbf{S}_{n+1}^{trial} \cdot \mathbf{S}_{n+1}^{trial}}}{1 - D_{n+1}} - \sigma_e - \mathbf{H}R_n - \mathbf{H}\Delta \gamma = 0 \quad (3.15)$$

Verifica-se então, analisando as Equações (3.12), (3.13) e (3.15) que para se determinar o estado real do material, há a necessidade de se resolver um sistema não-linear de equações, onde se tem como variáveis  $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e$ ,  $D_{n+1}$  e  $\Delta \gamma$ .

O sistema não-linear formado pelas Equações (3.12), (3.13) e (3.15) pode ser considerado, para um estado geral de tensão (problema tridimensional), como um sistema com oito variáveis e oito equações. Porém, através de uma análise criteriosa e manipulações matemáticas, pode-se reduzir este sistema de oito incógnitas para um sistema não-linear com apenas duas incógnitas de característica escalar. Para se chegar a esta simplificação, primeiramente, tem-se que substituir a Equação (3.12) na chamada Lei de Hooke com dano acoplado, que pode ser expresso na Equação (3.16).

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = (1 - D_{n+1})\mathbf{D}^e: \left[ \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\,trial} - \Delta\gamma \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\mathbf{S}_{n+1}}{(1 - D_{n+1})\|\mathbf{S}_{n+1}\|} \right] \quad (3.16)$$

Considerando que o tensor das deformações elásticas também pode ser decomposto em uma parte desviadora e outra volumétrica, como na Equação (3.17).

$$\boldsymbol{\varepsilon}^e = \boldsymbol{\varepsilon}_d^e + \boldsymbol{\varepsilon}_v^e \mathbf{I} \quad (3.17)$$

E manipulando matematicamente a Equação (3.16), obtém-se as Equações (3.18) e (3.19).

$$\mathbf{S}_{n+1} = (1 - D_{n+1})2G \boldsymbol{\varepsilon}_d^{e\,trial} - 2G\Delta\gamma \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\mathbf{S}_{n+1}}{\|\mathbf{S}_{n+1}\|} \quad (3.18)$$

$$p_{n+1} = (1 - D_{n+1})K \boldsymbol{\varepsilon}_v^{e\,trial} \quad (3.19)$$

Definindo  $\tilde{\mathbf{S}}_{n+1}^{trial} \equiv 2G\boldsymbol{\varepsilon}_d^{e\,trial}$  e  $\tilde{\mathbf{S}}_{n+1}^{trial}$  é proporcional a  $\mathbf{S}_{n+1}$ , a Equação (3.18) pode ser reescrita na forma de Equação (3.20).

$$\mathbf{S}_{n+1} = (1 - D_{n+1})\tilde{\mathbf{S}}_{n+1}^{trial} - 2G\Delta\gamma \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\tilde{\mathbf{S}}_{n+1}^{trial}}{\|\tilde{\mathbf{S}}_{n+1}^{trial}\|} \quad (3.20)$$

Sabendo que  $\tilde{q}^{trial} = \sqrt{\frac{3}{2}}\|\tilde{\mathbf{S}}_{n+1}^{trial}\|$  e reagrupando os termos da Equação (3.20), pode-se então encontrar uma equação de atualização para o termo desviador do tensor tensão, em função do estado tentativa, na forma da Equação (3.21).

$$\mathbf{S}_{n+1} = \left(1 - D_{n+1} - \frac{3G\Delta\gamma}{\tilde{q}^{trial}}\right) \tilde{\mathbf{S}}_{n+1}^{trial} \quad (3.21)$$

Através da Equação (3.21), pode-se também determinar uma expressão para a atualização da equação equivalente de von Mises, conforme a Equação (3.22).

$$q_{n+1} = \sqrt{\frac{3}{2} \mathbf{S}_{n+1}^{trial} : \mathbf{S}_{n+1}^{trial}} = (1 - D_{n+1})\tilde{q}^{trial} - 3G\Delta\gamma \quad (3.22)$$

Substituindo a Equação (3.22) na Equação (3.15), pode-se então definir a equação de consistência plástica em função do  $D_{n+1}$  e  $\Delta\gamma$ , como a Equação (3.23):

$$\Phi_{n+1}(D_{n+1}, \Delta\gamma) = \tilde{q}^{trial} - \frac{3G\Delta\gamma}{(1 - D_{n+1})} - \sigma_e(R_n + \Delta\gamma) = 0 \quad (3.23)$$

Da mesma forma, a Equação (3.13) pode ser reescrita, considerando a energia liberada devido ao dano,  $-Y$ , como uma função do  $D_{n+1}$  e  $\Delta\gamma$ , conforme a Equação (3.24).

$$-Y(D_{n+1}, \Delta\gamma) = \frac{[(1 - D_{n+1})\tilde{q}^{trial} - 3G\Delta\gamma]^2}{6G(1 - D_{n+1})^2} + \frac{\tilde{p}_{n+1}^2}{2K} \quad (3.24)$$

Onde  $\tilde{p}_{n+1} \equiv K\varepsilon_{n+1}^{e\ trial}$ . Desta, forma, chega-se a um sistema de duas equações não-lineares, formando pelas Equações (3.23) e (3.13), com características escalares.

Definindo agora, o conceito de integridade material como expresso na Equação (3.25).

$$\omega \equiv 1 - D \quad (3.25)$$

Assim, de posse da Equação (3.23) e do conceito de integridade material definido acima, pode-se escrever a Equação (3.26).

$$\omega_{n+1} \equiv 1 - D_{n+1} = \frac{3G\Delta\gamma}{\tilde{q}^{trial} - \sigma_e(R_n + \Delta\gamma)} \quad (3.26)$$

Novamente, combinando as Equações (3.23) e (3.24), a energia liberada devido ao dano pode ser reescrita como uma função somente do multiplicador plásticos,  $\Delta\gamma$ , como a Equação (3.27).

$$-Y(\Delta\gamma) \equiv \frac{[\sigma_e(R_n + \Delta\gamma)]^2}{6G} + \frac{\tilde{p}_{n+1}^2}{2K} \quad (3.27)$$

Finalmente, combinando e manipulando matematicamente as Equações (3.26), (3.27) e (3.13), chega-se a uma equação não-linear, cuja variável é somente o chamado multiplicador plástico, conforme a Equação (3.28).

$$F(\Delta\gamma) \equiv \omega_{n+1}(\Delta\gamma) - \omega_n + \frac{\Delta\gamma}{\omega_{n+1}(\Delta\gamma)} \left( \frac{-Y(\Delta\gamma)}{S} \right)^s = 0 \quad (3.28)$$

Assim, o sistema não-linear de oito equações e oito incógnitas que inicialmente deveria ser solucionado dentro do chamado algoritmo de mapeamento de retorno, é então simplificado para uma única equação escalar. Após a resolução da mesa, e determinado o valor de  $\Delta\gamma$ , as outras variáveis do processo necessitam ser atualizadas, como: variável de dano, variável de endurecimento isotrópico, as contribuições hidrostáticas e desviadoras do tensor tensão, entre outras. O algoritmo de atualização das tensões, para o modelo original de Lemaitre é convenientemente resumido na Tabela (3.1).

**Tabela 3.11 - Estrutura principal do algoritmo de integração implícita para o Modelo de Lemaitre.**

<p><i>i.</i> <b>Determinar o Estado Tentativa (Preditor elástico):</b> Dado o incremento de deformação elástica <math>\Delta\boldsymbol{\varepsilon}</math> e as variáveis de estado no pseudo-tempo <math>t_n</math>:</p> $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\ trial} = \boldsymbol{\varepsilon}_n + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}; R_{n+1}^{trial} = R_n; D_{n+1}^{trial} = D_n$ $\tilde{\boldsymbol{S}}_{n+1}^{trial} = 2G\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{e\ trial}; \tilde{p}_{n+1} = K\varepsilon_{v\ n+1}^{e\ trial}; \tilde{q}_{n+1}^{trial} = \sqrt{\frac{3}{2}}\ \tilde{\boldsymbol{S}}_{n+1}^{trial}\ /(1 - D_n)$ <p><i>ii.</i> Verificar a admissibilidade plástica:</p> <p>Se <math>\Phi^{trial} = \tilde{q}_{n+1}^{trial} - \sigma_e^{trial}(R_{n+1}^{trial}) \leq 0</math> então  <math>(*)_{n+1} = (*)_{n+1}^{trial}</math> (<b>Estado elástico</b>) e <b>FIM</b></p> <p>Senão (<b>Estado plástico</b>)</p> <p><i>iii.</i> <b>Algoritmo de retorno (Corretor plástico):</b> Resolver o sistema de equações abaixo para <math>\Delta\gamma</math>, usando o método de Newton-Raphson.</p> $F(\Delta\gamma) \equiv \omega(\Delta\gamma) - \omega_n + \frac{\Delta\gamma}{\omega(\Delta\gamma)} \left( \frac{-Y(\Delta\gamma)}{S} \right)^s = 0$ <p>Onde,</p> $\omega(\Delta\gamma) = 1 - D_{n+1} = \frac{3G\Delta\gamma}{\tilde{q}_{n+1}^{trial} - \sigma_e(R_n + \Delta\gamma)}$ $-Y(\Delta\gamma) \equiv \frac{[\sigma_e(R_n + \Delta\gamma)]^2}{6G} + \frac{\tilde{p}_{n+1}^2}{2K}$ <p><i>iv.</i> Atualizar as outras variáveis de estado:</p> $R_{n+1} = R_n + \Delta\gamma; p_{n+1} = \omega(\Delta\gamma) + \tilde{p}_{n+1}; \boldsymbol{S}_{n+1} = \frac{q_{n+1}}{\tilde{q}_{n+1}^{trial}} \tilde{\boldsymbol{S}}_{n+1}^{trial}$ $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e = \frac{1}{2G} \boldsymbol{S}_{n+1} + \frac{1}{3} \boldsymbol{\varepsilon}_{v\ n+1}^{e\ trial} \boldsymbol{I}; q_{n+1} = \omega(\Delta\gamma) + \sigma_e(R_{n+1}); \boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \boldsymbol{S}_{n+1} + p_{n+1} \boldsymbol{I}$ <p><b>FIM</b></p>
--

### 3.2 OPERADOR TANGENTE CONSISTENTE

Para a construção da matriz de rigidez, o operador tangente consistente com o algoritmo de integração é requerido, isso tomando como base a implementação implícita do modelo descrito anteriormente em um desenvolvimento de elementos finitos.

Considerando quando o fluxo plástico é igual a zero dentro de um passo específico, configurando um caso elástico, o operador tangente no tempo  $t_{n+1}$  passa a ser simplesmente o operador elástico danificado, descrito pela Equação (3.29).

$$\widehat{\mathbb{D}}^e = \frac{1}{1-D} \mathbb{D} \quad (3.29)$$

Por outro lado, quando se assume a existência do fluxo plástico, configurando um caso elasto-plástico, o operador tangente, escrito por  $\widehat{\mathbb{D}}^{ep}$  é definido pela Equação (3.30).

$$\widehat{\mathbb{D}}^{ep} = \frac{d\hat{\sigma}}{d\varepsilon_{n+1}}, \quad (3.30)$$

onde  $\hat{\sigma}$  é a função algorítmica construtiva implícita para a atualização das tensões, definida pelo algoritmo de retorno. O procedimento para computação do módulo tangente consistente elasto-plástico para o modelo de Lemaitre, foi originalmente discutido por Benallal *et al.* Posteriormente, De Souza Neto *et al.* (2002) propôs uma expressão fechada para este operador  $\widehat{\mathbb{D}}^{ep}$ , que pode ser observado na Equação (3.31) a seguir.

$$\mathbb{D}^{ep} = a \left[ \mathbb{I} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \right] + b \bar{\mathbf{S}}_{n+1} \otimes \bar{\mathbf{S}}_{n+1} + c \bar{\mathbf{S}}_{n+1} \otimes \mathbf{I} + d \mathbf{I} \otimes \bar{\mathbf{S}}_{n+1} + e \mathbf{I} \otimes \mathbf{I}, \quad (3.31)$$

onde  $\mathbb{I}$  é o tensor identidade de quarta ordem e  $\bar{\mathbf{S}}_{n+1}$  é o tensor desviador normalizado  $\bar{\mathbf{S}}_{n+1}/\|\bar{\mathbf{S}}_{n+1}\|$ . O parâmetro  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$ ,  $\mathbf{d}$  e  $\mathbf{e}$  são definidos pelas Equações (3.32), (3.33), (3.34), (3.35) e (3.36).

$$\mathbf{a} = \frac{2G\omega_{n+1}\sigma_e(R_{n+1})}{\tilde{q}_{n+1}^{trial}} \quad (3.32)$$

$$\mathbf{b} = 2G \left[ a_1 \mathbf{H}\omega_{n+1} + a_4 \sigma_e(R_{n+1}) - \frac{\omega_{n+1}\sigma_e(R_{n+1})}{\tilde{q}_{n+1}^{trial}} \right] \quad (3.33)$$

$$\mathbf{c} = K \sqrt{2/3} [a_2 \mathbf{H}\omega_{n+1} + a_3 \sigma_e(R_{n+1})] \quad (3.34)$$



$$\mathbf{d} = 2G\sqrt{2/3}\tilde{p}_{n+1}a_4 \quad (3.35)$$

$$\mathbf{e} = K(\omega_{n+1} + a_3\tilde{p}_{n+1}) \quad (3.36)$$

Com os termos  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$  e  $a_4$  dados pelas Equações (3.37), (3.38), (3.39) e (3.40).

$$a_1 = \frac{1}{F'} \left[ \frac{\omega_{n+1}}{\tilde{q}_{n+1}^{trial} - \sigma_e(R_{n+1})} - \frac{1}{3G} \left( \frac{-Y(\Delta\gamma)}{S} \right)^s \right] \quad (3.37)$$

$$a_2 = -\frac{s\tilde{p}_{n+1}[\tilde{q}_{n+1}^{trial} - \sigma_e(R_{n+1})]}{3GSKF'} \left( \frac{-Y(\Delta\gamma)}{S} \right)^s \quad (3.38)$$

$$a_3 = a_2\omega' \quad (3.39)$$

$$a_4 = a_1\omega' - \frac{\omega_{n+1}}{\tilde{q}_{n+1}^{trial} - \sigma_e(R_{n+1})} \quad (3.40)$$

E ainda  $F'$  e  $\omega'$  definidos pelas Equações (3.41) e (3.42).

$$F' = \omega' - \frac{\mathbf{H}}{3G} \left( \frac{-Y(\Delta\gamma)}{S} \right)^s + \frac{s\mathbf{H}\sigma_e(R_{n+1})[\tilde{q}_{n+1}^{trial} - \sigma_e(R_{n+1})]}{9G^2S} \left( \frac{-Y(\Delta\gamma)}{S} \right)^{s-1} \quad (3.41)$$

$$\omega' = \frac{3G + \omega_{n+1}\mathbf{H}}{\tilde{q}_{n+1}^{trial} - \sigma_e(R_{n+1})} \quad (3.42)$$

## 4 ANÁLISE E RESULTADOS

Ambas as rotinas, algoritmo de retorno e matriz tangente consistente, propostas para o modelo constitutivo de Lemaitre foram implementadas em um código acadêmico de elementos finitos, utilizando a linguagem *FORTRAN 90*, e posteriormente, introduzidas à ferramenta comercial *Abaqus 6.10*, tomando-se mão da sub-rotina *UMAT*, que utiliza um esquema de implementação implícita.

A sub-rotina *UMAT* é um instrumento fornecida pelo *Abaqus* que torna possível a implementação de novas formas de tratamento de variáveis e problemas de maneira implícita, como é o caso das rotinas propostas anteriormente (ver Anexos I e II).

### 4.1 ESTUDO DE CASO – ESTAPAGEM DE UM COPO CILÍNDRICO

Com objetivo principal de se demonstrar a funcionalidade do uso da variável interna isotrópica de dano, acoplada ao modelo constitutivo, para a previsão da falha dúctil, foi selecionado na documentação disponível do *Abaqus*, um exemplo de operação de estampagem profunda para ser recriado e simulando, agora através da abordagem do modelo em estudo. O exemplo refere-se à confecção de um copo cilíndrico confeccionado aço acalmado com alumínio utilizando elementos axissimétricos bidimensionais.

Esse exemplo foi escolhido por se tratar de um exemplo simples e comumente utilizado para o estudo das operações de estampagem. Para formas simples, o número de parâmetros a serem considerados para a realização de simulações, são poucos e facilmente controlados, permitindo com que o processo seja recriado de maneira rápida. Para formas mais complexas, como formas tridimensionais, as condições de interface necessitam ser controladas dentro de um intervalo estreito, para se obter um bom produto.

A funcionalidade das simulações foi avaliada com base na capacidade do mesmo de analisar a evolução da variável de dano acoplada ao modelo constitutivo de Lemaitre, para diferentes espessuras de chapas. Foram realizadas simulações numéricas utilizando sete diferentes espessuras para o *blank*, para que ao fim das simulações fosse possível definir a espessura do *blank* mais apropriada para a realização bem sucedida da estampagem usando pouco material.

Os valores usados para a espessura do *blank* foram 0,25 mm, 0,50 mm, 0,75 mm, 0,82 mm, 1,00 mm, 1,25 mm e 1,50 mm. A geometria básica do problema é apresentada na Figura (4.1). Foi usado como *blank* um pedaço de chapa circular com um raio inicial,  $R_b$ , de 100 mm e o punção utilizado nas simulações apresenta uma configuração cilíndrica com um raio,  $R_p$ , de 50 mm e seus cantos foram arredondados com raio de 13 mm (ver Figura 4.1). Assim como a espessura,  $e$ , para o *blank* variou de simulação para simulação, foi necessário redesenhar a matriz para algumas simulações, para que a folga,  $\delta$ , entre punção e matriz pudesse ser dimensionada de maneira correta conforme a Equação (2.14). Para as cinco primeiras espessuras de chapa a folga,  $\delta$ , utilizada foi de

1,25 mm, já para as chapas mais espessas foram usados 1,5 mm e 1,75 mm como folga para as simulações com espessura de *blank* de 1,25 mm e 1,5 mm, respectivamente. Contudo, em todas as simulações, os cantos superiores internos da matriz foram arredondados com raio de 5 mm.

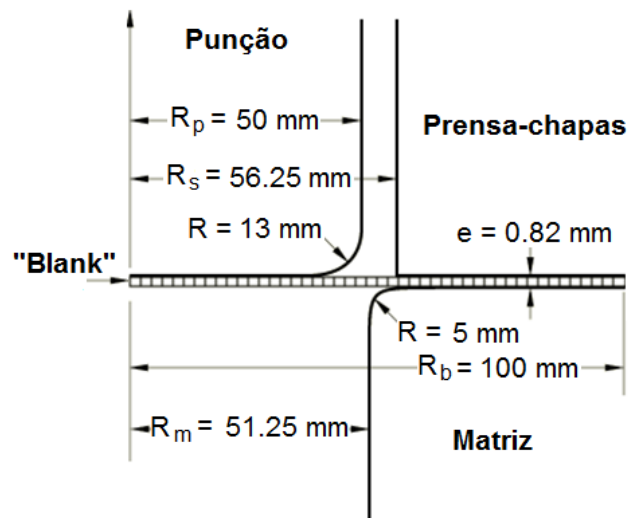


Figura 4.1. Geometria da recriação no Abaqus

Para o início das simulações, o *blank* foi posicionado sobre a matriz e o prensa-chapa foi posicionado a uma distância fixa acima do *blank* em que a pressão de contato é definida como zero, o punção foi posicionado a 0,18 mm acima da superfície do *blank*.

Numericamente o *blank* foi modelado usando 40 elementos do tipo CAX4R, que representa um elemento quadrilátero axissimétrico de 4 nós com integração-reduzida disponível na biblioteca do Abaqus. O uso desse tipo de elemento permitiu que a simetria do conjunto fosse usada para que apenas metade do problema fosse recriado em 2D. Por sua vez, tanto o punção como a matriz e o prensa-chapa foram modelados como superfícies analíticas rígidas por meio da opção *\*RIGID BODY* em conjunto com a opção *\*SURFACE*.

Para o elemento CAX4R, os efeitos de membrana e alterações de espessura são modelados adequadamente, no entanto, a rigidez à flexão desse elemento é baixa e ele não apresenta "bloqueio", devido à incompressibilidade.

Como o principal interesse, neste trabalho é estudada a evolução das variáveis de estado durante a operação, as malhas utilizadas para a discretização do *blank* foram um tanto grosseiras, visando a economia de custo computacional, já que mesmo com malhas não tão refinadas as análises ainda dariam indicações corretas das tensões, deformações, danos e regiões críticas que ocorram na chapa durante o processo de embutimento.

Na reconstrução do problema, os contatos entre o *blank* e o punção, a matriz e o prensa-chapa foram modelados por meio da opção *\*CONTACT PAIR* disponível no Abaqus, e as interações mecânicas entre as superfícies de contato foram assumidas com sendo atrito de contato. A formulação de contato escolhida para a realização das simulações foi a superfície-a-superfície, pois essa formulação leva em conta automaticamente a espessura do *blank*, eliminando a necessidade de

especificação de relações complementares. A opção *\*FRICTION* foi usada em conjunto com as varias opções de *\*SURFACE INTERACTION* para especificar os coeficientes de atrito entre elas. O coeficiente de atrito entra a interface e o punção foi definido como 0,25, e coeficiente de atrito entre a matriz e o prensa-chapa como 0,1, simulando certo grau de lubrificação entre o *blank* e a matriz e prensa-chapas.

Para as simulações o método de rigidez de atrito aderente foi usado, tornando necessária a escolha de uma medida aceitável de deslizamento elástico relativo entre as superfícies quando a aderência efetivamente ocorre. A base para a escolha dessa medida de deslizamento foi a seguinte: Pequenos valores de deslizamento elástico simulam melhor o atual comportamento, mas também resulta num menor convergência da solução. Por sua vez, ao permitir grandes deslocamentos elásticos relativos entre as superfícies de contato podem-se causar tensões mais elevadas no centro da placa.

Nesta etapa, o próprio *Abaqus* tem a responsabilidade de escolher o deslizamento elástico admissível. Essa escolha é feita através da determinação de uma interface característica de comprimento do elemento sobre toda a malha e multiplicando por uma pequena fração para obter uma medida de deslizamento elástica admissível. Este método dá, tipicamente, uma quantidade relativamente pequena de deslizamento elástico.

Para a construção das chapas foi utilizado como material o aço acalmado com alumínio, satisfazendo a relação de Ramberg-Osgood (1943) entre a tensão verdadeira e a deformação logarítmica expressa na Equação (4.1):

$$\varepsilon^p = \left(\frac{\sigma_e}{T}\right)^{1/n}, \quad (4.1)$$

onde  $\varepsilon^p$  representa a deformação plástica,  $\sigma_e$  é a tensão de escoamento e os termos  $T, n$  representam parâmetros do material. Os valores das propriedades do material utilizados nesse trabalho são apresentados na Tabela (4.1), a seguir:

**Tabela 4.1 – Propriedade do material do aço acalmado com alumínio. FONTE: LEMAITRE, J., 1996.**

Descrição	Símbolo	Valor
Módulo de Elasticidade	$E$	211 GPa
Coefficiente de Poisson	$\nu$	0,3
Tensão de escoamento inicial	$\sigma_e$	91,3 MPa
Tensão de referência	$T$	513 MPa
Coefficiente de encruamento	$n$	0,223
Expoente de dano	$s$	1
Denominador de dano	$S$	6 MPa
Dano crítico	$D_c$	0,1
Deformação plástica crítica	$\varepsilon_c^p$	0,55

Todas as simulações foram realizadas em três passos. A análise do efeito *springback* foi desconsiderada nas simulações, já que o elemento CAX4R não produz resultados realistas, uma vez que os elementos de integração reduzida têm um comportamento puramente de flexão elástica.

- Primeiro passo: O prensa-chapa é empurrado contra o *blank* com um deslocamento prescrito com objetivo de estabelecer contato entre as superfícies;
- Segundo passo: As condições de contorno são removidas e substituídas pelo carregamento de 100 kN aplicado sobre o prensa-chapa. Essa força é mantida constante durante os passos 2 e 3. Essa técnica de simulação do processo de aperto é usada para evitar problemas potenciais com modos de corpo rígido do prensa-chapa. Ela cria contato antes de permitir que o prensa-chapa mover-se livremente, uma vez que não há contato firme entre o prensa-chapa, o *blank* e a matriz no início da operação;
- Terceiro passo: O punção é movido através do *blank* com um deslocamento total de 60 mm. Nesse passo do processo é onde ocorre o embutimento.

## 4.2 RESULTADOS NUMÉRICOS

Os resultados obtidos para as simulações descritas no item anterior são apresentados a seguir, por meio de gráficos e figuras dos contornos das tensões equivalentes e das deformações plásticas encontradas ao fim do processo de estampagem.

Para fins de análise, em cada simulação, analisou-se o comportamento do chamado nó crítico, ele foi definido com sendo o nó que apresentava o valor máximo de deformação plástica encontrada na peça ao fim do processo. Observa-se a variação da localização do nó crítico para cada espessura de chapa simulada. Para as primeiras simulações, o nó crítico se encontrou mais distante da extremidade do *blank*, como pode ser visto nas Figuras (4.2) e (4.3), mas a medida em que a espessura da chapa foi aumentando e o processo de estampagem passo a ser realizado com sucesso, o nó crítico passou a se localizar na região de dobramento da matriz, como nas Figuras (4.4), (4.5), (4.6), (4.7) e (4.8) que apresentam o contorno da deformação plásticas para cada uma das sete simulações.

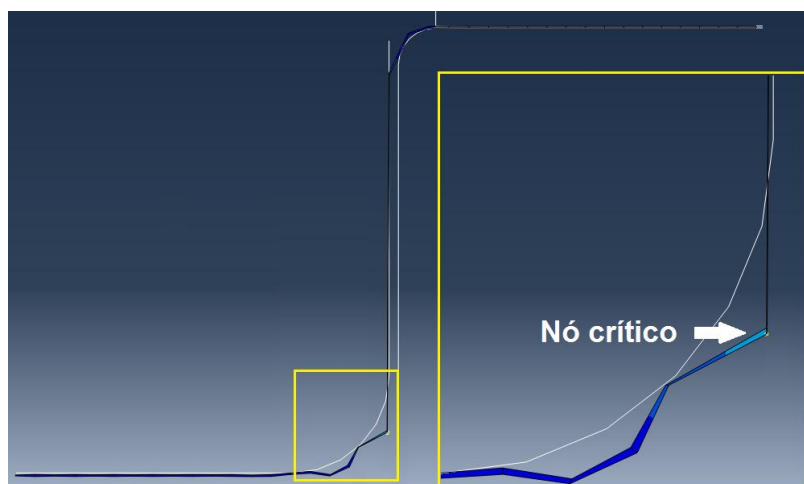


Figura 4.2 – Contorno da deformação plástica e nó crítico para simulação com espessura de chapa de 0,25 mm

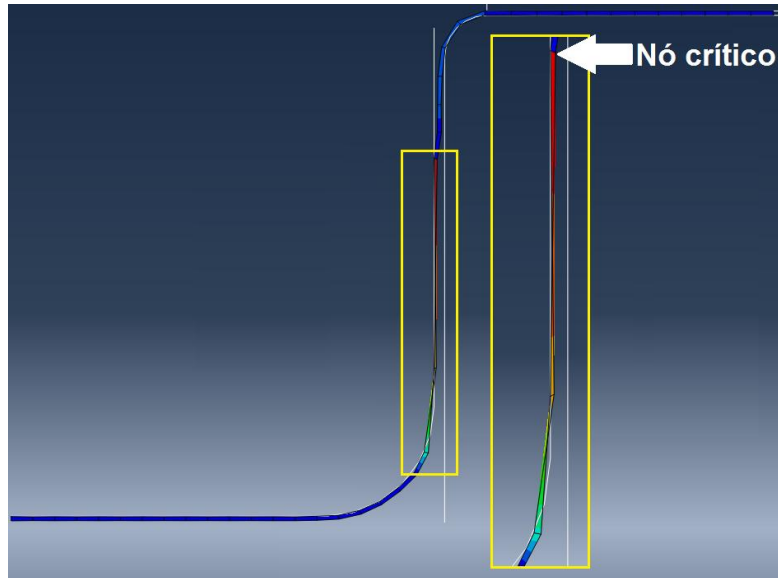


Figura 4.3 – Contorno da deformação plástica e nó crítico para simulação com espessura de chapa de 0,50 mm

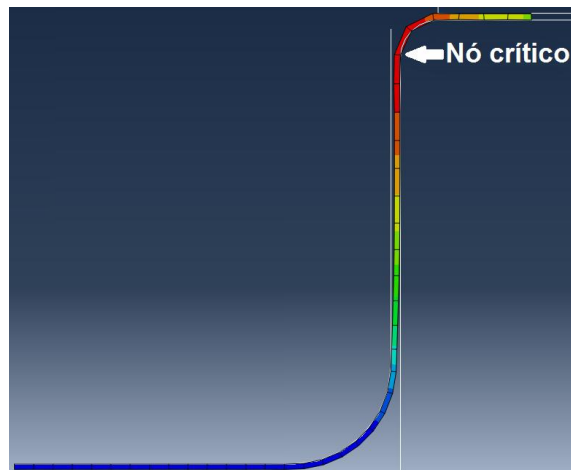


Figura 4.4 – Contorno da deformação plástica e nó crítico para simulação com espessura de chapa de 0,75 mm

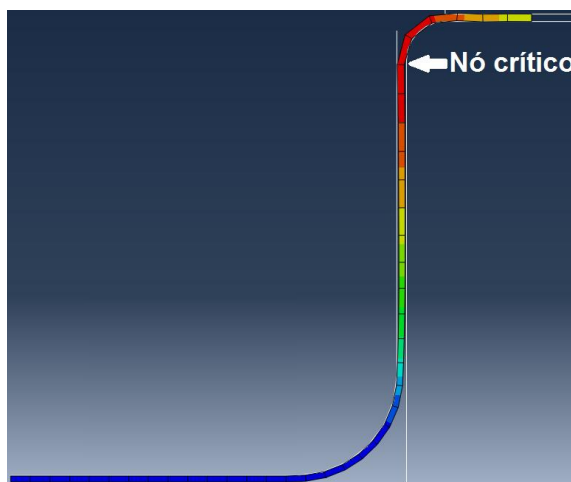


Figura 4.5 – Contorno da deformação plástica e nó crítico para simulação com espessura de chapa de 0,82 mm

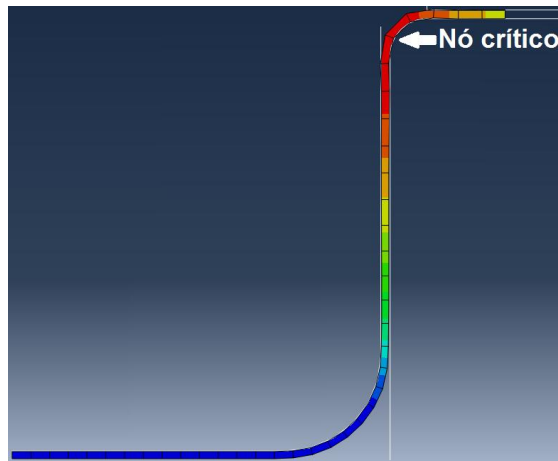


Figura 4.6 – Contorno da deformação plástica e nó crítico para simulação com espessura de chapa de 1,00 mm

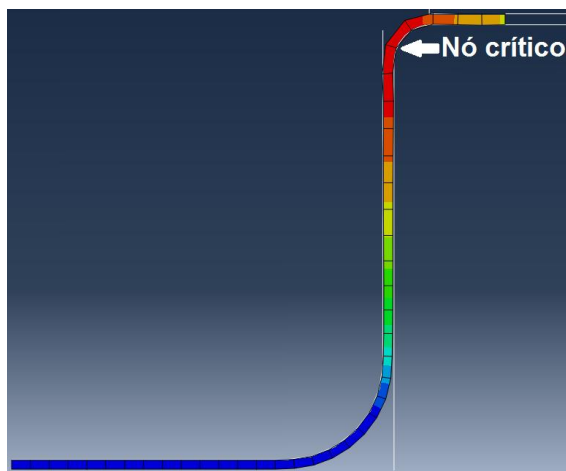


Figura 4.7 – Contorno da deformação plástica e nó crítico para simulação com espessura de chapa de 1,25 mm

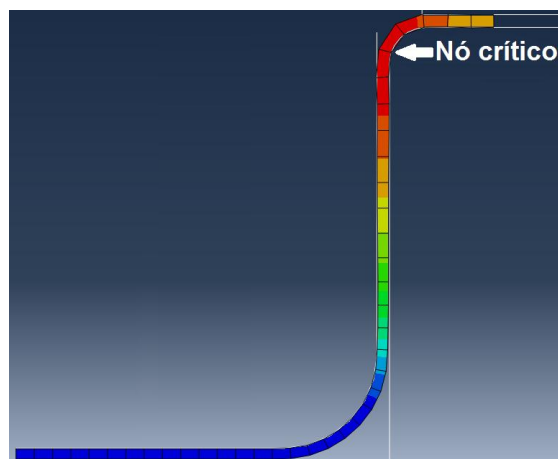


Figura 4.8 – Contorno da deformação plástica e nó crítico para simulação com espessura de chapa de 1,50 mm

Selecionando apenas o valor da deformação máxima, presente nos nós críticos, foi possível a geração do gráfico para auxiliar na análise dos resultados encontrado. O gráfico da deformação plástica no nó crítico versus a espessura da chapa é apresentado na Figura (4.9).

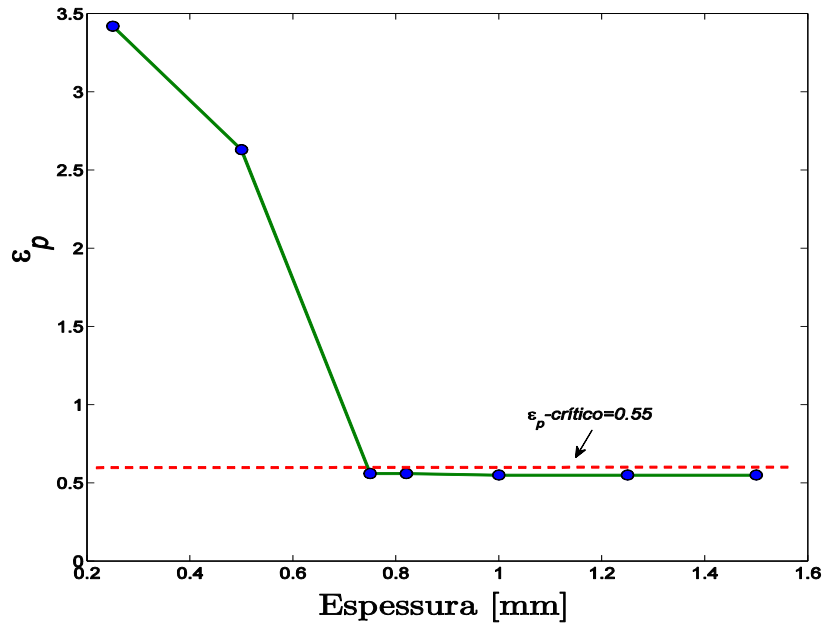


Figura 4.9 - Nível de deformação plástica equivalente máxima no nó crítico para cada espessura de chapa simulada.

É possível observar que a deformação plástica máxima tende a diminuir com o aumento da espessura. Inicialmente o nível de deformação plástica máxima diminui bruscamente com o aumento da espessura. Contudo, a partir da terceira simulação o nível de deformação plástica continua a diminuir, mas agora de maneira muito mais suave e se mantendo abaixo do valor de deformação plástica crítica de 0,55.

O gráfico da Figura (4.10) foi gerado com base nos valores da tensão equivalente de von Mises e da Pressão hidrostática encontrados nos nós críticos.

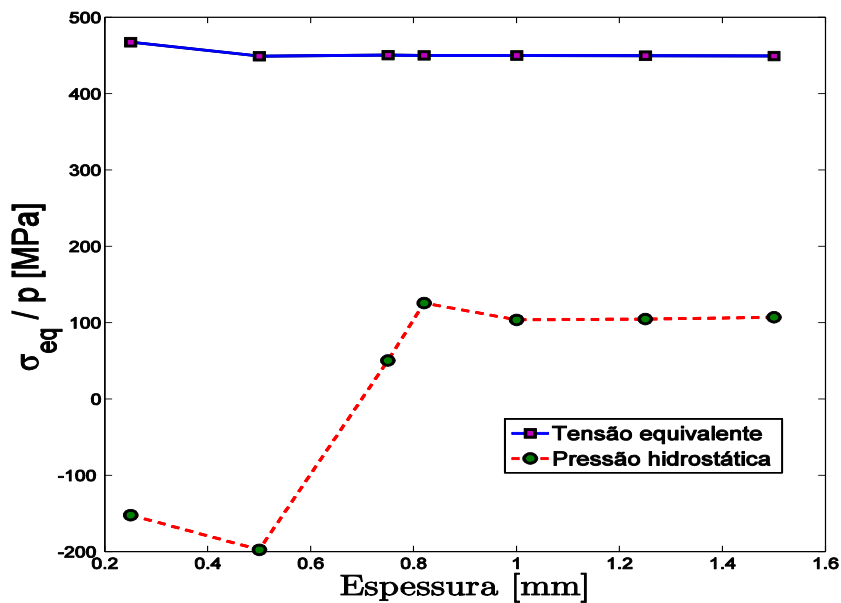


Figura 4.10 - Nível de tensão equivalente e pressão hidrostática máxima no nó crítico para cada espessura de chapa simulada.



A reta em azul descreve o comportamento da tensão equivalente de von Mises e a reta vermelha tracejada o da pressão hidrostática medidas em cada nó crítico. Analisando o gráfico da Figura (4.10), nota-se que assim como a deformação plástica, a tensão equivalente tende a diminuir com o aumento da espessura enquanto que a pressão hidrostática segue um padrão diferente, inicialmente a pressão medida é negativa e cai ainda mais para a segunda simulação, a partir daí ela caminha para um valor nulo e posteriormente se estabiliza em um valor positivo.

Com base nos valores colhidos de tensão, deformação plástica e pressão hidrostática, foi possível calcular a Energia Liberada no nó crítico por meio da Equação (2.28). Os valores encontrados foram usados para a confecção do gráfico da Figura (4.11).

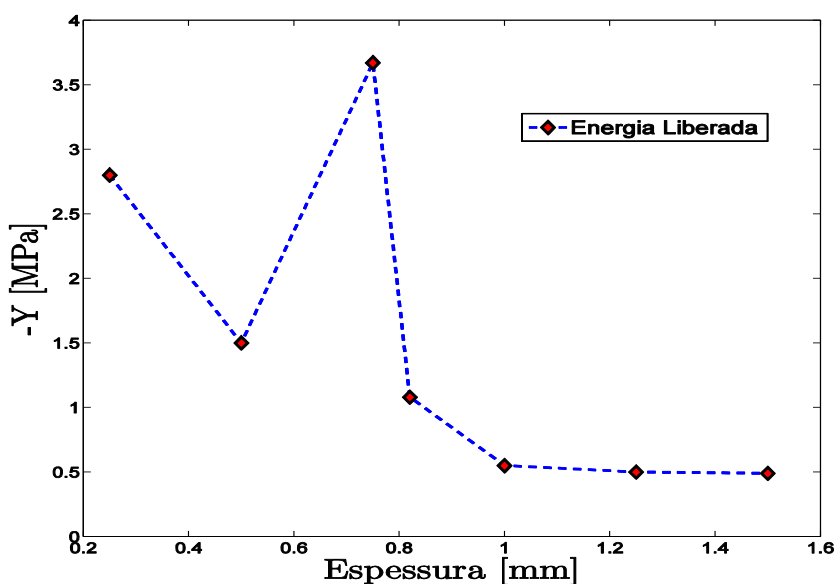


Figura 4.11 - Nível de energia liberada pelo dano no nó crítico para cada espessura de chapa simulada.

Nota-se que a Energia Liberada durante a operação de estampagem tende a diminuir com o aumento da espessura, porém na terceira simulação ela apresenta o seu valor máximo. Esse pico de Energia Liberada ocorre devido ao fato de que com o aumento da espessura da chapa, a pressão hidrostática passa de um valor negativo para um positivo, se regularizando. Essa mudança resulta em uma alteração do estado de tensões presentes na chapa.

A variação dos contornos de tensões equivalentes de von Mises encontradas para cada simulação pode ser observada analisando as Figuras (4.12), (4.13), (4.14), (4.15), (4.16), (4.17) e (4.18). Note que é justamente no contorno de tensões referente à terceira simulação que os contornos passam a seguir um padrão de estado de tensões que é mantido até a última simulação.

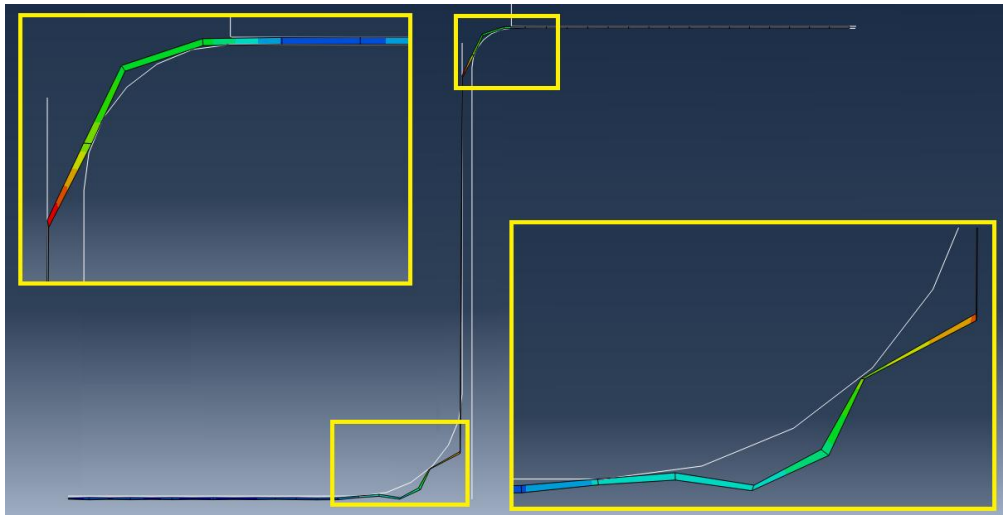


Figura 4.12 - Contorno da tensão equivalente de von Mises para simulação com espessura de chapa de 0,25 mm

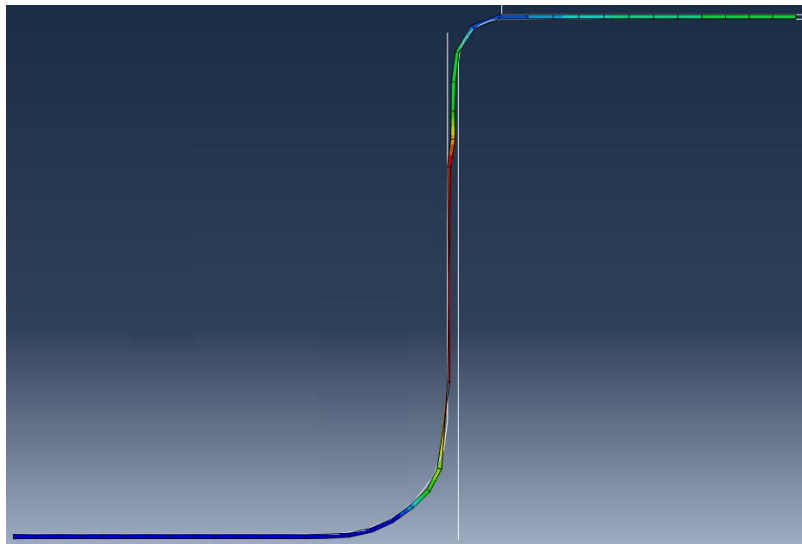


Figura 4.13 - Contorno da tensão equivalente de von Mises para simulação com espessura de chapa de 0,50 mm

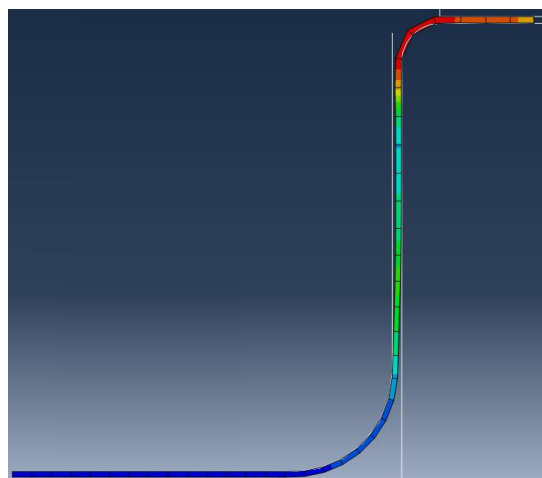


Figura 4.14 - Contorno da tensão equivalente de von Mises para simulação com espessura de chapa de 0,75 mm

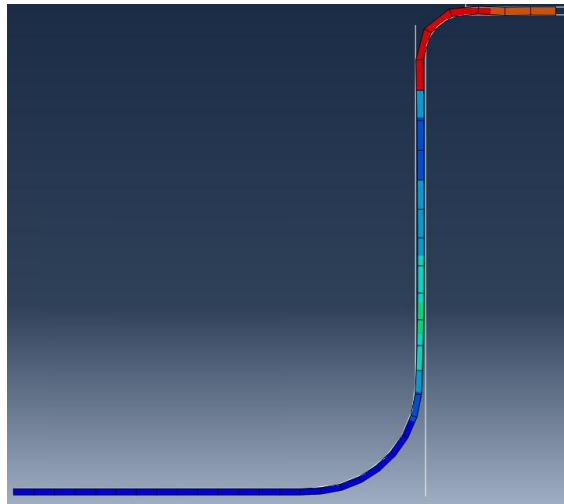


Figura 4.15 - Contorno da tensão equivalente de von Mises para simulação com espessura de chapa de 0,82 mm

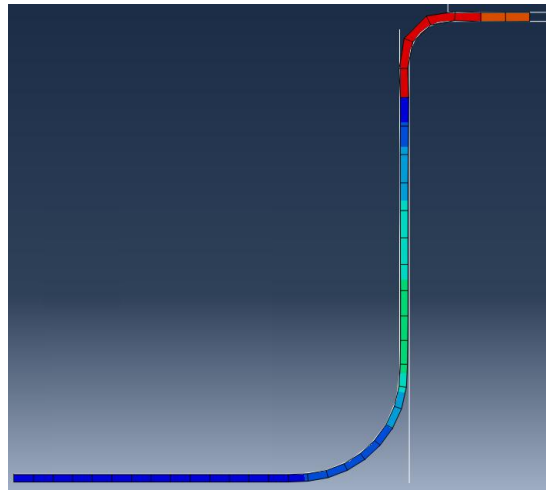


Figura 4.16 - Contorno da tensão equivalente de von Mises para simulação com espessura de chapa de 1,00 mm

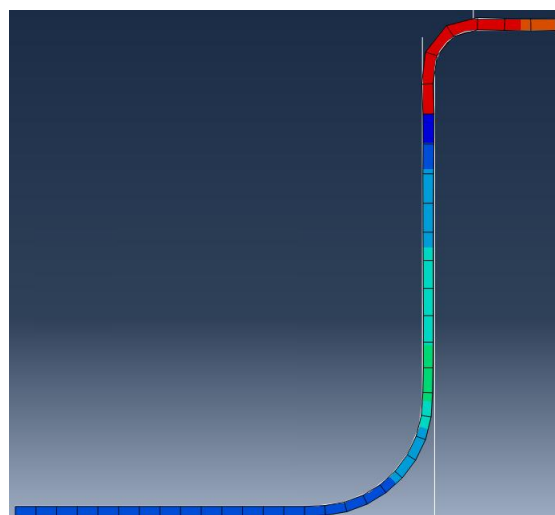


Figura 4.17 - Contorno da tensão equivalente de von Mises para simulação com espessura de chapa de 1,25 mm

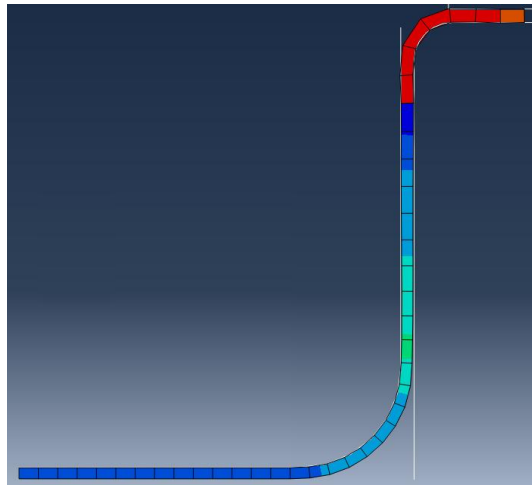


Figura 4.18 - Contorno da tensão equivalente de von Mises para simulação com espessura de chapa de 1,50 mm

Com os valores de Energia Liberada foi possível calcular o valor da variável de dano nos pontos críticos de cada simulação por meio da Equação (2.50). Com os valores encontrados foi possível montar o gráfico apresentado na Figura (4.19).

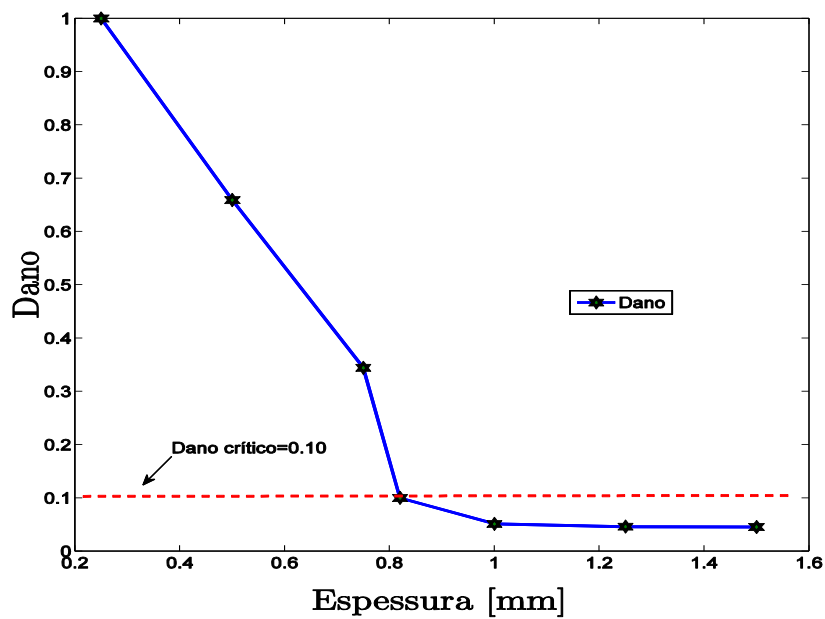


Figura 4.19 - Nível de dano máximo no nó crítico para cada espessura de chapa simulada.

Como esperado, a valor do dano no ponto crítico do material tende a diminuir com o aumento da espessura. Adotando um valor de dano crítico de 0,1, valor indicado para o tipo de aplicação tratada aqui, nota-se que apenas a partir da quarta simulação o valor da variável de dano medida ao fim do processo se encontra abaixo da linha de dano crítico, o que significa que a partir do uso de uma espessura de chapa de aproximadamente 0,82 mm que essa operação de estampagem pode ser realizada com sucesso.

A Figura (4.20) apresenta um gráfico comparativo entre a variável de dano e a Energia Liberada.

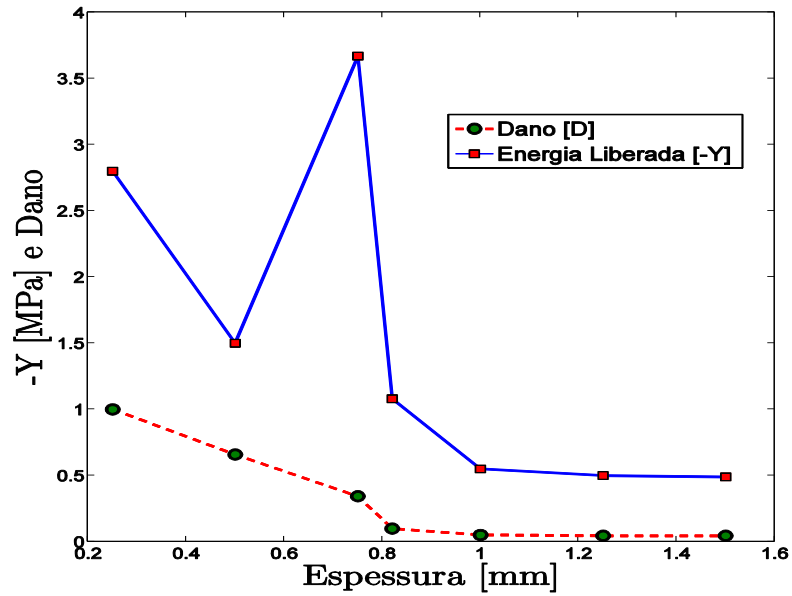


Figura 4.20 - Comparação entre o nível de dano e energia liberado devido ao dano.

É possível observar que com o aumento da espessura da chapa, tanto a Energia Liberada tende a diminuir quanto o valor do dano.

A Tabela (4.2), a seguir, traz de forma resumida os valores encontrados em todas as sete simulações.

**Tabela 4.2 12- Resultados obtidos com as simulações**

Simulação	1	2	3	4	5	6	7
Espessura da chapa [mm]	0,25	0,50	0,75	0,82	1,00	1,25	1,50
Nó crítico	20	23	35	37	36	36	36
Tensão máxima [MPa]	467,394	449,062	450,641	450,315	450,048	449,734	449,412
Deformação plástica máxima	3,417	2,627	0,563	0,555	0,554	0,552	0,550
Pressão hidrostática no nó crítico [MPa]	-152,063	-197,512	5,042	125,648	103,756	104,681	107,102

## 5 CONCLUSÕES

Neste trabalho foi proposta uma metodologia de dimensionamento e controle do processo de estampagem mecânica em chapa, por meio do monitoramento do nível de degradação do material durante o processo. Tal nível de degradação é aqui mensurado, com base na variável de dano isotrópico proposto por Lemaitre e de acordo com os preceitos da Mecânica do Dano Contínuo. Desta forma, durante os estudos, procurou-se descrever de maneira sucinta o modelo de Lemaitre para o comportamento mecânico de materiais dúcteis e assim, propor a implementação numérica do mesmo, com base na metodologia de decomposição do operador e no método de integração implícita de Euler, em uma ferramenta acadêmica e outra comercial de elementos finitos. Para a ferramenta comercial, utilizou-se o programa *Abaqus*, acoplada com a sub-rotina *UMAT*.

Para demonstrar a validade do controle de processos de estampagem, utilizando o modelo de Lemaitre, foi selecionando um exemplo de simulação do processo estampagem profunda de um copo cilíndrico utilizando elementos axissimétricos disponível na documentação do *Abaqus*. O exemplo foi recriado e simulado para diferentes espessuras de chapa e o nível de dano interno do material ao fim do processo foi observado. Como controle da qualidade do produto final, estudaram-se as regiões críticas de máxima deformação plástica equivalente, máximo dano e máxima tensão equivalente. Como critério, adotou-se a chamada abordagem do dano crítico, que estabelece que, se o produto final apresentar regiões com níveis de degradação acima, do chamado valor crítico, o material apresentará então regiões com iniciação de trincas.

Com base nos resultados colhidos em cada simulação, estabeleceu-se que a espessura ideal para a realização da operação de estampagem descrita no tópico 4.1 é de aproximadamente 0,82 mm. Para espessuras de chapa menores não é possível realizar a operação sem que ocorra o aparecimentos de trincas indesejadas na peça, já para espessuras maiores, a operação pode ser realizada com sucesso, porém a operação estará sendo superdimensionada, uma vez que será usado mais material que o necessário.

Desta forma, observou-se que através desta metodologia adotada, é possível se determinar de maneira científica as dimensões ótimas para um processo de estampagem mecânica, processo este muito utilizado na indústria automotiva, na fabricação de componentes estruturas para a carroceria veicular. Este dimensionamento otimizado, permite a determinação final do processo de maneira mais rápida e econômica, o que nos dias atuais, são parâmetros fundamentais para a sobrevivência de setores competitivos da indústria, dentro do mercado de produção.

# REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Alves, J.L.C.M. **Simulação Numérica do Processo de Estampagem de Chapas Metálicas: Modelagem Mecânica e Métodos Numéricos**. 2003. 368 p. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) – Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade do Minho, Guimarães. 2003.
- Bao, Y., Wierzbicki, T. **A Comparative Study, on Various Ductile Crack Formation Criteria**. Em: *Journal of Engineering Materials and Technology*, v. 126, 2004, p. 314-324.
- Button, S.T., Bortolussi, R. **Estudo do Processo de Embutimento Profundo de Copo Pelo Método dos Elementos Finitos**. *Engenharia Mecânica*: UNICAMP, Campinas, v. 21, n. 2, p. 355-363, 1999.
- Callister, William D. Jr. **Ciência e engenharia de materiais: Uma introdução**. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2008.
- De Souza Neto, E.A., Perić, Owen, D.R.J. **Computational methods for plasticity: theory and applications**. John Wiley & Sons Ltd, 2008.
- Filho, E.B., Silva, I.B., Batalha, G.F., Button, S.T. **Conformação plástica dos metais**. 6. ed. São Paulo: EPUSP, 2011. 254 p.
- Franco, E., Lino, J.C., Kamel, K. et al. **Estampagem dos Aços**. São Paulo: Associação Brasileira de Metais
- Junior, I.B., Caversan, E.G. **Tecnologia de Estampagem 1: Corte**. São Paulo: Faculdade de Tecnologia de Sorocaba, 2012. 82 p.
- Kachanov, L.M. **Time to the Rupture Process under the Creep Conditions**, *Otdel. Techn. Nauk.*, v. 8, p. 21-31, 1958.
- Lemaitre, J. **A continuous damage mechanics model for ductile fracture**. In: *Journal of Engineering Materials and Technology - Trans. of the ASME*, 107, 1985. p. 83–89.
- Lemaitre, J. **A course in Damage Mechanics**, Springer, 1996.
- Malcher, L., Andrade Pires, F.M., César de Sá, J.M.A. **An Assessment of Isotropic Damage Constitutive Models under High and Low Stress Triaxialities**. In: *International Journal of Plasticity*, 2011.
- Malcher, L. **Da Mecânica do Dano Contínuo: Uma evolução do modelo de Lemaitre para redução da dependência do ponto de calibração**. 2011. 122 p. Tese (Doutorado em Ciências Mecânicas) – Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de Brasília, Brasília. 2011.
- Mesquita, E.L.A., Rugani, L.L. **Estampagem dos aços inoxidáveis**, Acesita S.A., 1997.
- Oehler, G. e H. Kaiser. **Schmitt Stanz-und Ziehwerkzeuge**. 7. ed., Springer Verlag, 1993.
- Palmeira, A.A. **Capítulo 8: Processos de Estampagem**. 2005. 50 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Produção ênfase em produção mecânica) – Departamento de mecânica e energia, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Resende. 2005.
- Penteado, F. **Processos de Estampagem**, 2010.
- Predabon, E.P. **Conformando Melhor o Tempo “Time Being Better Conforming”**. In: CONFERÊNCIA NACIONAL DE CONFORMAÇÃO DE CHAPAS, 7., 2004, Porto Alegre. *Anais...* Porto Alegre, 2004. p. 169 – 180.
- Provenza, F. **Conformação Mecânica**. São Paulo: Escola Protec, 1985.
- Rabotnov, YU. N. **Creep Problems in Structural Elements**. North Holland, 1969.
- Ramberg, W., & Osgood, W. R. **Description of stress-strain curves by three parameters**. Technical Note No. 902, National Advisory Committee For Aeronautics, Washington DC, 1943.
- Rosa, R.H.L., Ávila, A.F., Campos, H.B., Pertence, A.E.M., Cetlin, P.R. **Influência da Restrição no Fluxo Metálico na Localização da Região de Falha na Estampagem de Chapas**. In: SENAFOR, 23., 2004, Porto Alegre. *Anais...* Porto Alegre, 2004. p. 103 - 114.
- Saanouni, K., K. Nesnas and Y. Hammi. **Damage modeling in metal forming processes**. In: *International Journal of Damage Mechanics* 9(3), 2000. p. 196-240.
- Schaeffer, L. **Fundamentos do projeto de ferramentas para o processo de estampagem**. Porto Alegre: Universidade Federal do Rio Grande do Sul, p. 39-44, 2006.
- SENAI. **Tecnologia Mecânica**. São Paulo: Supervisor de 1ª linha, 1999.
- Simo, J. C. **On the computational significance of the intermediate configuration and hyperelastic stress relations in finite deformation elastoplasticity**, *Mechanics of Materials*, v. 4, p. 439-451, 1985.

- Teixeira, P.M.C. **Ductile Damage Prediction in Sheet Metal Forming and Experimental Validation**. 2010. 231 p. Tese (Pós-doutorado em Engenharia Mecânica) – Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Porto. 2010.
- Voyiadjis, G.Z, e Kattan, P.I. **Damage Mechanics with Fabric Tensors**. **Mechanics of Advanced Materials and Structures**, v. 13, p. 285-301, 2006.



# ANEXOS

		Pág.
Anexo I	Rorina de atualização de tensões e variáveis internas	68
Anexo II	Sub-rotina CTDAMA para calculo da matriz tangente consistente	75

## ANEXO I: Rorina de atualização de tensões e variáveis internas

---

```
! Rorina de atualização de tensões e variáveis internas
!
! Algoritmo de retorno baseado na metodologia de decomposição do
! operador. Modelo de Lemaitre com endurecimento isotrópico não linear.
! Rotina para problemas de estado plano de deformação e axissimétrico
!
! Raniere S. Neves and L. Malcher, January 2013: Initial coding
!
SUBROUTINE SUDAMA(DGAMA , IPROPS , LALGVA , NTYPE , RPROPS , RSTAVA , &
                STRAN , STRES , NRPROP , NIPROP, NLALGV , NRSTAV , &
                NSTRA , NSTRE , IINCS , IITER)
!
IMPLICIT NONE

!PARAMETER DECLARATION
INTEGER, PARAMETER:: IPHARD=6, KSTRE=4

!DATA DECLARATION
REAL(8) R0 /0.0D0/
REAL(8) RP5 /0.5D0/
REAL(8) R1 /1.0D0/
REAL(8) R2 /2.0D0/
REAL(8) R3 /3.0D0/
REAL(8) R4 /4.0D0/
REAL(8) R5 /5.0D0/
REAL(8) R6 /6.0D0/
REAL(8) TOL /1.D-08/
INTEGER MXITER /25/

!SCALAR VARIABLES FROM ARGUMENTS
INTEGER NTYPE, NRPROP, NIPROP, NLALGV, NRSTAV, NSTRA, NSTRE, IINCS, IITER
REAL(8) DGAMA

!ARRAYS FROM ARGUMENTS
INTEGER, DIMENSION(NIPROP):: IPROPS
LOGICAL, DIMENSION(NLALGV):: LALGVA
REAL(8), DIMENSION(NRPROP):: RPROPS
REAL(8), DIMENSION(NRSTAV):: RSTAVA
REAL(8), DIMENSION(NSTRA):: STRAN
REAL(8), DIMENSION(NSTRE):: STRES

!LOCAL SCALAR VARIABLES
LOGICAL IFPLAS, SUFAIL, ERROR

INTEGER NHARD, NRITER, NORD, I, J, K

REAL(8) HVARN , DAMAGN , OMEGAN , YOUNG , POISS , DAMEXP , DAMDEN , &
        GMODU , BULK , R2BULK , R2G , R3G , R6G , EEV , &
        PTRIAL, EEVD3 , VARJ2T , QTRIAL, SIGMAY, PHI , HVAR , &
        PTRIA2, OMEGA , SIGMA2 , Y , RES , DAMAGE , P , &
        Q , FACTOR , HSLOPE , OMEGA2, DOMEGA, DY , AUX , &
        DRES , DDGAMA , EPBARN , EPBAR , R1D3 , VARJ2 , RESNOR , &
        P_P , VARJ2_P , Y_P , Q_P , SIGMAY_P, PERT , &
        R3D2 , DMYD3 , SECHX , KAPPA1, KAPPA2

!LOCAL ARRAYS
REAL(8), ALLOCATABLE, DIMENSION(:):: EET
REAL(8), ALLOCATABLE, DIMENSION(:,):: FOID
REAL(8), ALLOCATABLE, DIMENSION(:,):: FOID2
REAL(8), ALLOCATABLE, DIMENSION(:):: SOID
```

```

REAL (8), ALLOCATABLE, DIMENSION (:, :):: DEVPRJ
REAL (8), ALLOCATABLE, DIMENSION (:):: EE
REAL (8), ALLOCATABLE, DIMENSION (:):: SDEV
REAL (8), ALLOCATABLE, DIMENSION (:):: STRSUP
REAL (8), ALLOCATABLE, DIMENSION (:):: B_SOL
REAL (8), ALLOCATABLE, DIMENSION (:):: X_INCR
REAL (8), ALLOCATABLE, DIMENSION (:, :):: COFA
REAL (8), ALLOCATABLE, DIMENSION (:):: DMYD1
REAL (8), ALLOCATABLE, DIMENSION (:):: STRST
REAL (8), ALLOCATABLE, DIMENSION (:):: FLOWV
REAL (8), ALLOCATABLE, DIMENSION (:):: DP
REAL (8), ALLOCATABLE, DIMENSION (:, :):: DSDEV
REAL (8), ALLOCATABLE, DIMENSION (:):: DQ
REAL (8), ALLOCATABLE, DIMENSION (:, :):: DFLOWVD1

```

```

REAL (8), ALLOCATABLE, DIMENSION (:):: STRSUP_P
REAL (8), ALLOCATABLE, DIMENSION (:):: D_PP
REAL (8), ALLOCATABLE, DIMENSION (:):: SDEV_P
REAL (8), ALLOCATABLE, DIMENSION (:):: FLOWV_P
REAL (8), ALLOCATABLE, DIMENSION (:):: B_SOL_P
REAL (8), ALLOCATABLE, DIMENSION (:, :):: COFA_P

```

```

!FUNCTINO DECLARATION
REAL (8) DPLFUN, PLFUN

```

```

!ALLOCATE AND INTITIALIZE LOCAL ARRAYS

```

```

ALLOCATE (EET (NSTRE)); EET=R0
ALLOCATE (FOID (NSTRE, NSTRE)); FOID=R0
ALLOCATE (FOID2 (NSTRE, NSTRE)); FOID2=R0
ALLOCATE (SOID (NSTRE)); SOID=R0
ALLOCATE (DEVPRJ (NSTRE, NSTRE)); DEVPRJ=R0
ALLOCATE (EE (NSTRE)); EE=R0
ALLOCATE (SDEV (NSTRE)); SDEV=R0
ALLOCATE (STRSUP (NSTRE)); STRSUP=R0
ALLOCATE (B_SOL (NSTRE+2)); B_SOL=R0
ALLOCATE (X_INCR (NSTRE+2)); X_INCR=R0
ALLOCATE (COFA (NSTRE+2, NSTRE+2)); COFA=R0
ALLOCATE (DMYD1 (NSTRE)); DMYD1=R0
ALLOCATE (STRST (NSTRE)); STRST=R0
ALLOCATE (FLOWV (NSTRE)); FLOWV=R0
ALLOCATE (DP (NSTRE)); DP=R0
ALLOCATE (DSDEV (NSTRE, NSTRE)); DSDEV=R0
ALLOCATE (DQ (NSTRE)); DQ=R0
ALLOCATE (DFLOWVD1 (NSTRE, NSTRE)); DFLOWVD1=R0

ALLOCATE (STRSUP_P (NSTRE)); STRSUP_P=R0
ALLOCATE (D_PP (NSTRE)); D_PP=R0
ALLOCATE (SDEV_P (NSTRE)); SDEV_P=R0
ALLOCATE (FLOWV_P (NSTRE)); FLOWV_P=R0
ALLOCATE (B_SOL_P (NSTRE+2)); B_SOL_P=R0
ALLOCATE (COFA_P (NSTRE+2, NSTRE+2)); COFA_P=R0

```

```

!INITIALIZE LOCAL SCALAR VARIABLES

```

```

NHARD=0 ; NRITER=0 ; NORD=0 ; I=0 ; J=0 ; K=0

HVARN=R0 ; DAMAGN=R0 ; OMEGAN=R0 ; YOUNG=R0 ; POISS=R0 ; DAMEXP=R0 ;
DAMDEN=R0
GMODU=R0 ; BULK=R0 ; R2BULK=R0 ; R2G=R0 ; R3G=R0 ; R6G=R0 ;
EEV=R0
PTRIAL=R0; EEVD3=R0 ; VARJ2T=R0 ; QTRIAL=R0; SIGMAY=R0; PHI=R0 ;
HVAR=R0
PTRIA2=R0; OMEGA=R0 ; SIGMA2=R0 ; Y=R0 ; RES=R0 ; DAMAGE=R0 ; P=R0

```

```

    Q=R0      ; FACTOR=R0 ; HSLOPE=R0 ; OMEGA2=R0; DOMEGA=R0; DY=R0      ;
AUX=R0
    DRES=R0  ; DDGAMA=R0 ; EPBARN=R0 ; EPBAR=R0 ; R1D3=R0  ; VARJ2=R0  ;
RESNOR=R0
    P_P=R0   ; VARJ2_P=R0; Y_P=R0     ; Q_P=R0     ; SIGMAY_P=R0; PERT=R0
    KAPPA2=R0 ; R3D2=R0   ; DMYD3=R0   ; SECHX=R0  ; KAPPA1=R0

    FOID(1,1)=R1;   FOID(2,2)=R1;   FOID(3,3)=RP5
    FOID2(1,1)=R1; FOID2(2,2)=R1;   FOID2(3,3)=R1
    SOID(1)=R1;    SOID(2)=R1;    SOID(3)=R0

! Stop program if neither plane strain nor axisymmetric state
  IF (NTYPE.NE.2.AND.NTYPE.NE.3) CALL ERRPRT ('EI0051')
  IF (NTYPE.EQ.3) THEN
    FOID(4,4)=R1
    FOID2(4,4)=R1
    SOID(4)=R1
  ENDIF
! Initialise some algorithmic and internal variables
  DGAMA=R0
  IFPLAS=.FALSE.
  SUFAIL=.FALSE.
! Retrieve hardening and damage internal variables
  HVARN=RSTAVA(KSTRE+1)
  DAMAGN=RSTAVA(KSTRE+2)
  EPBARN=RSTAVA(KSTRE+3)
!... integrity
  OMEGAN=R1-DAMAGN
! Retrieve some material properties
  YOUNG=RPROPS(2)
  POISS=RPROPS(3)
  DAMEXP=RPROPS(4)
  DAMDEN=RPROPS(5)
  NHARD=IPROPS(3)
! Shear and bulk moduli and other necessary constants
  GMODU=YOUNG/(R2*(R1+POISS))
  BULK=YOUNG/(R3*(R1-R2*POISS))
  R2BULK=R2*BULK
  R2G=R2*GMODU
  R3G=R3*GMODU
  R6G=R6*GMODU
  R1D3=R1/R3
  R3D2=R3/R2
  KAPPA1=R1
  KAPPA2=R1
  DO 2 I=1,KSTRE
    DO 1 J=1,KSTRE
      DEVPRJ(I,J)=FOID(I,J)-SOID(I)*SOID(J)*R1D3
    1 CONTINUE
  2 CONTINUE
! Elastic predictor: Compute elastic trial state
! =====
! Volumetric strain and (undamaged)effective pressure stress
  EEV=STRAN(1)+STRAN(2)+STRAN(4)
  PTRIAL=BULK*EEV
! Elastic trial deviatoric strain
  EEVD3=EEV/R3
  EET(1)=STRAN(1)-EEVD3
  EET(2)=STRAN(2)-EEVD3
  EET(4)=STRAN(4)-EEVD3
! Convert engineering shear component into physical component
  EET(3)=STRAN(3)/R2
! Computer trial (undamadged) stress tensor
  STRST(1)=R2G*EET(1)+PTRIAL

```

```

        STRST(2)=R2G*EET(2)+PTRIAL
        STRST(3)=R2G*EET(3)
        STRST(4)=R2G*EET(4)+PTRIAL
! Compute trial (undamaged) von Mises effective stress and uniaxial yield
stress
VARJ2T=R2G*R2G*(EET(3)*EET(3)+RP5*(EET(1)*EET(1)+EET(2)*EET(2)+EET(4)*EET(4)
))
        QTRIAL=DSQRT(R3*VARJ2T)
        SIGMAY=PLFUN(HVARN,NHARD,RPROPS(IPHARD))
! Check for plastic admissibility using von Mises effective stress
! =====
        PHI=QTRIAL-SIGMAY
        IF(PHI/SIGMAY.GT.TOL) THEN
! Plastic step: Apply return mapping - use Newton-Raphson algorithm
!           to solve the return mapping equation for DGAMA
! =====
! Reset plastic flag
        IFPLAS=.TRUE.
! Initial guess for DGAMA: Use perfectly plastic solution with frozen
! yield surface at the beginning of the load increment
        DGAMA=R0
        EPBAR=EPBARN
        HVAR=HVARN
        DAMAGE=DAMAGN
        EE(1)=EET(1)
        EE(2)=EET(2)
        EE(3)=EET(3)
        EE(4)=EET(4)
! Change from the effective stress to damaged stress -
STRESS(DAMAGED)=STRESS(EFFECTIVE)*(1-DAMAGE)
        Q=QTRIAL*(R1-DAMAGN)
        P=PTRIAL*(R1-DAMAGN)
        SDEV(1)=R2G*EET(1)*(R1-DAMAGN)
        SDEV(2)=R2G*EET(2)*(R1-DAMAGN)
        SDEV(3)=R2G*EET(3)*(R1-DAMAGN)
        SDEV(4)=R2G*EET(4)*(R1-DAMAGN)
        STRSUP(1)=SDEV(1)+P
        STRSUP(2)=SDEV(2)+P
        STRSUP(3)=SDEV(3)
        STRSUP(4)=SDEV(4)+P
        NORD=KSTRE+2
        DO 100 NRITER=1,MXITER
! Compute parameters to determine residual derivative
! Zero to vector
        B_SOL=R0
        COFA=R0
        X_INCR=R0
!-----
! Computer flow vector N and thermodynamic force conjugated with damage
parameter
!-----
        DO 9 I=1, KSTRE
                FLOWV(I)=R3D2*(SDEV(I)/Q)/(R1-DAMAGE)
9        CONTINUE
        FLOWV(3)=FLOWV(3)*R2
        Y=-((Q**2)/R6G)-((P**2)/R2BULK)
        Y=Y/((R1-DAMAGE)**2)
!-----
! Computer residual and assembler vector b
!-----
        B_SOL(1)=- (STRSUP(1) - (R1-DAMAGE)*STRST(1) +R3G*DGAMA*(SDEV(1)/Q))
        B_SOL(2)=- (STRSUP(2) - (R1-DAMAGE)*STRST(2) +R3G*DGAMA*(SDEV(2)/Q))
        B_SOL(3)=- (STRSUP(3) - (R1-DAMAGE)*STRST(3) +R3G*DGAMA*(SDEV(3)/Q))

```

```

      B_SOL(4)=- (STRSUP(4) - (R1-DAMAGE) *STRST(4) +R3G*DGAMA* (SDEV(4)/Q))
      B_SOL(5)=- ((Q/(R1-DAMAGE)) -SIGMAY)
! ORIGINAL (*)
      B_SOL(6)=- (DAMAGE-DAMAGN- (DGAMA/(R1-DAMAGE)) * ((-Y/DAMDEN)**DAMEXP))
!-----
! First: computer derivative of P, Sdev, Q and N in function of stress
tensor
!-----
      DO 10 I=1, KSTRE
         DP(I)=R1D3*SOID(I)
10      CONTINUE

      DO 12 I=1, KSTRE
         DO 11 J=1, KSTRE
            DSDEV(I,J)=DEVPRJ(I,J)
11      CONTINUE
12      CONTINUE
         DSDEV(3,3)=DSDEV(3,3)*R2

         DQ(1)=((R3/R2)/Q)*SDEV(1)
         DQ(2)=((R3/R2)/Q)*SDEV(2)
         DQ(3)=((R3/R2)/Q)*SDEV(3)*R2
         DQ(4)=((R3/R2)/Q)*SDEV(4)
!-----
      DO 14 I=1, KSTRE
         DO 13 J=1, KSTRE
            DFLOWVD1(I,J)=(R3D2/(R1-DAMAGE))*((DSDEV(I,J)/Q) -
(SDEV(I)*DQ(J)/(Q**2)))
13      CONTINUE
14      CONTINUE
!-----
      DO 15 I=1, KSTRE
         DMYD1(I)=(R1/((R1-
DAMAGE)**2))*((R2*Q*DQ(I)/R6G)+(R2*P*DP(I)/R2BULK))
15      CONTINUE
         DMYD1(3)=DMYD1(3)*R2
         DMYD3=R2*(-Y)/(R1-DAMAGE)
!-----
! Computer coefficient matrix a
!-----
      DO 17 I=1, KSTRE
         DO 16 J=1, KSTRE
            COFA(I,J)=FOID2(I,J)+R2G*DGAMA*(R1-DAMAGE)*DFLOWVD1(I,J)
16      CONTINUE
17      CONTINUE
!-----
      DO 18 I=1, KSTRE
         cofa(I,5)=R3G*SDEV(I)/Q
18      CONTINUE
!-----
      DO 19 I=1, KSTRE
         cofa(I,6)=STRST(I)
19      CONTINUE
!-----
      DO 20 I=1, KSTRE
         cofa(5,I)=FLOWV(I)
20      CONTINUE
!-----
         cofa(5,5)=-DPLFUN(HVAR,NHARD,RPROPS(IPHARD))
         cofa(5,6)=Q/((R1-DAMAGE)**2)
!-----
         SECHX=R1/DCOSH(KAPPA2*((-Y/DAMDEN)**DAMEXP))
         DO 21 I=1, KSTRE
! ORIGINAL (*)

```

```

      cofa(6,I)=- (DGAMA/ (R1-DAMAGE)) * (DAMEXP/DAMDEN) * ((-
Y/DAMDEN)** (DAMEXP-R1)) *DMYD1 (I)
21  CONTINUE
!-----
! ORIGINAL (*)
      cofa(6,5)=- (R1/ (R1-DAMAGE)) * ((-Y/DAMDEN)**DAMEXP)
! ORIGINAL (*)
      cofa(6,6)=R1-DGAMA* ( R1/ ((R1-DAMAGE)**2)) * ((-Y/DAMDEN)**DAMEXP)
+ &
      (R1/ (R1-DAMAGE)) * (DAMEXP/DAMDEN) * ((-
Y/DAMDEN)** (DAMEXP-R1)) *DMYD3 )
!-----
      CALL SOLVERMA (COFA,B_SOL,X_INCR,nord)
!-----
! Damaged stress tensor
      STRSUP (1)=STRSUP (1)+X_INCR (1)
      STRSUP (2)=STRSUP (2)+X_INCR (2)
      STRSUP (3)=STRSUP (3)+X_INCR (3)
      STRSUP (4)=STRSUP (4)+X_INCR (4)
!-----
      DGAMA=DGAMA+X_INCR (5)
      DAMAGE=DAMAGE+X_INCR (6)

      HVAR=HVARN+DGAMA
      EPBAR=EPBARN+ (DGAMA/ (R1-DAMAGE))
      P=R1D3* (STRSUP (1)+STRSUP (2)+STRSUP (4))
      SDEV (1)=STRSUP (1)-P
      SDEV (2)=STRSUP (2)-P
      SDEV (3)=STRSUP (3)
      SDEV (4)=STRSUP (4)-P

      EE (1)=SDEV (1)/ (R2G* (R1-DAMAGE))
      EE (2)=SDEV (2)/ (R2G* (R1-DAMAGE))
      EE (3)=SDEV (3)/ (R2G* (R1-DAMAGE))
      EE (4)=SDEV (4)/ (R2G* (R1-DAMAGE))

      VARJ2=RP5* (SDEV (1)*SDEV (1)+SDEV (2)*SDEV (2)+SDEV (4)*SDEV (4)+R2*SDEV (3)*SDEV (
3))
      Q=DSQRT (R3*VARJ2)
      SIGMAY=PLFUN (HVAR,NHARD,RPROPS (IPHARD))
      PHI=(Q/ (R1-DAMAGE))-SIGMAY
! Check convergence
      RESNOR=DABS (PHI/SIGMAY)
      IF (RESNOR.LE.TOL) THEN
          RSTAVA (KSTRE+1)=HVAR
          RSTAVA (KSTRE+2)=DAMAGE
          RSTAVA (KSTRE+3)=EPBARN+ (DGAMA/ (R1-DAMAGE))
! update stress components
          STRES (1)=SDEV (1) + PTRIAL* (R1-DAMAGE)
          STRES (2)=SDEV (2) + PTRIAL* (R1-DAMAGE)
          STRES (3)=SDEV (3)
          STRES (4)=SDEV (4) + PTRIAL* (R1-DAMAGE)
! update engineering strain
          RSTAVA (1)=EE (1) + EEVD3
          RSTAVA (2)=EE (2) + EEVD3
          RSTAVA (3)=EE (3)*R2
          RSTAVA (4)=EE (4) + EEVD3
          GOTO 999
      ENDIF
100  CONTINUE
! N-R loop failed to converge: Reset failure flag and issue warning
! message before exiting
      SUFAIL=.TRUE.
      CALL ERRPRT ('WE0018')

```

```

ELSE
! Elastic step: Update stress using damaged elastic law
! =====
      FACTOR=R2G*OMEGAN
      P=OMEGAN*PTRIAL
      STRES (1)=FACTOR*EET (1)+P
      STRES (2)=FACTOR*EET (2)+P
      STRES (3)=FACTOR*EET (3)
      STRES (4)=FACTOR*EET (4)+P
! elastic engineering strain
      RSTAVA (1)=STRAN (1)
      RSTAVA (2)=STRAN (2)
      RSTAVA (3)=STRAN (3)
      RSTAVA (4)=STRAN (4)
ENDIF
999 CONTINUE
! Update some algorithmic variables before exit
      LALGVA (1)=IFPLAS
      LALGVA (2)=SUFAIL

DEALLOCATE (EET, FOID, SOID, DEVPRJ, EE, SDEV, STRSUP, B_SOL, X_INCR, COFA, STRST, DMYD
1, FLOWV, DP, DSDEV, DQ, DFLOWVD1)

RETURN
END
!END_SUBROUTINE SUDAMA

```



## ANEXO II: Sub-rotina CTDAMA para calculo da matriz tangente consistente

```
! BEGIN_SUBROUTINE CTDAMA
! Computation of consistent tangent matrix Lemaitre's damage model
(Jacobian Matrix).
!
!*****
! COMPUTATION OF THE CONSISTENT TANGENT MODULUS FOR LEMAITRE'S DUCTILE
! DAMAGE ELASTO-PLASTIC MODEL WITH PIECE-WISE LINEAR ISOTROPIC HARDENING.
! PLANE STRAIN AND AXISYMMETRIC IMPLEMENTATIONS.
!*****
!
! Raniere S. Neves and L. Malcher, January 2013: Initial coding
!
SUBROUTINE CTDAMA(DGAMA , DMATX , EPFLAG , IPROPS , NTYPE , RPROPS , &
                RSTAVA, STRES , NDDIM , NRPROPS , NIPROPS, NSTRE , &
                NRSTAV, RSTAV2)
!
IMPLICIT NONE
!PARAMETER DECLARATION
INTEGER, PARAMETER:: IPHARD=6, KRSTAV=5
!DATA DECLARATION
REAL (8) R0 /0.0D0/
REAL (8) RP5 /0.5D0/
REAL (8) R1 /1.0D0/
REAL (8) R2 /2.0D0/
REAL (8) R3 /3.0D0/
REAL (8) R4 /4.0D0/
REAL (8) R5 /5.0D0/
REAL (8) R6 /6.0D0/
REAL (8) SMALL /1.D-16/
REAL (8) TOLDGA /1.D-08/
!SCALAR VARIABLES FROM ARGUMENTS
LOGICAL EPFLAG
INTEGER NTYPE, NRPROPS , NIPROPS , NRSTAV , NSTRE , NDDIM, IGAUSP, IELEM,
IITER
REAL (8) DGAMA
!ARRAYS FROM ARGUMENTS
INTEGER, DIMENSION(NIPROPS) :: IPROPS
REAL (8), DIMENSION(NRPROPS) :: RPROPS
REAL (8), DIMENSION(NDDIM,NDDIM) :: DMATX
REAL (8), DIMENSION(NRSTAV) :: RSTAVA
REAL (8), DIMENSION(NRSTAV) :: RSTAV2
REAL (8), DIMENSION(NSTRE) :: STRES
!LOCAL SCALAR VARIABLES
LOGICAL ERROR
INTEGER NHARD , I , J
REAL (8) HVAR , DAMAGE , OMEGA , YOUNG , POISS , DAMEXP , DAMDEN , &
GMODU , BULK , R2G , R1D3 , R3G , R6G , R2BULK , &
ROO3D2, P , SNORM , Q , QTRIAL, PTRIAL , PTRIA2 , &
HSLOPE, SIGMAY , SIGMA2, Y , OMEGA2, PHI , DOMEGA , &
DY , AUX , DRES , F1 , F2 , P1 , P2 , &
P3 , S1 , S2 , S3 , AFACT , BFACT , CFACT , &
DFACT , EFACT , FACTG , FACTK , DAMAGN, DMYD3 , R3D2 , &
SECHX , KAPPA1 , KAPPA2
!LOCAL ARRAYS
REAL (8), ALLOCATABLE:: DEVPRJ(:, :)
REAL (8), ALLOCATABLE:: FOID(:, :)
REAL (8), ALLOCATABLE:: FOID2(:, :)
REAL (8), ALLOCATABLE:: COFA(:, :)
REAL (8), ALLOCATABLE:: COFINV(:, :)
REAL (8), ALLOCATABLE:: DMTIN(:, :)
```

```

REAL (8), ALLOCATABLE:: DAUX1 (:, :)
REAL (8), ALLOCATABLE:: DAUX2 (:, :)
REAL (8), ALLOCATABLE:: DSDEV (:, :)
REAL (8), ALLOCATABLE:: DFLOWVD1 (:, :)
REAL (8), ALLOCATABLE:: DP (:)
REAL (8), ALLOCATABLE:: DQ (:)
REAL (8), ALLOCATABLE:: FLOWV (:)
REAL (8), ALLOCATABLE:: S (:)
REAL (8), ALLOCATABLE:: SOID (:)
REAL (8), ALLOCATABLE:: Z (:)
REAL (8), ALLOCATABLE:: ZAUX (:)
REAL (8), ALLOCATABLE:: DMYD1 (:)
REAL (8), ALLOCATABLE:: STRST (:)
!FUNCTION
REAL (8) DPLFUN, PLFUN
!ALLOCATE AND INITIALIZE LOCAL ARRAYS
  ALLOCATE (DEVPRJ (NDDIM, NDDIM)); DEVPRJ=R0
  ALLOCATE (FOID (NDDIM, NDDIM)); FOID=R0
  ALLOCATE (FOID2 (NDDIM, NDDIM)); FOID2=R0
  ALLOCATE (COFA (NSTRE+2, NSTRE+2)); COFA=R0
  ALLOCATE (COFINV (NSTRE+2, NSTRE+2)); COFINV=R0
  ALLOCATE (DMTIN (NSTRE, NSTRE)); DMTIN=R0
  ALLOCATE (DAUX1 (NSTRE, NSTRE)); DAUX1=R0
  ALLOCATE (DAUX2 (NSTRE, NSTRE)); DAUX2=R0
  ALLOCATE (DSDEV (NSTRE, NSTRE)); DSDEV=R0
  ALLOCATE (DFLOWVD1 (NSTRE, NSTRE)); DFLOWVD1=R0
  ALLOCATE (DP (NSTRE)); DP=R0
  ALLOCATE (DQ (NSTRE)); DQ=R0
  ALLOCATE (FLOWV (NSTRE)); FLOWV=R0
  ALLOCATE (S (NSTRE)); S=R0
  ALLOCATE (SOID (NDDIM)); SOID=R0
  ALLOCATE (Z (NDDIM)); Z=R0
  ALLOCATE (ZAUX (NDDIM)); ZAUX=R0
  ALLOCATE (DMYD1 (NDDIM)); DMYD1=R0
  ALLOCATE (STRST (NDDIM)); STRST=R0
!
  FOID (1, 1)=R1; FOID (1, 2)=R0; FOID (1, 3)=R0; FOID (1, 4)=R0
  FOID (2, 1)=R0; FOID (2, 2)=R1; FOID (2, 3)=R0; FOID (2, 4)=R0
  FOID (3, 1)=R0; FOID (3, 2)=R0; FOID (3, 3)=RP5; FOID (3, 4)=R0
  FOID (4, 1)=R0; FOID (4, 2)=R0; FOID (4, 3)=R0; FOID (4, 4)=R1

  FOID2 (1, 1)=R1; FOID2 (1, 2)=R0; FOID2 (1, 3)=R0; FOID2 (1, 4)=R0
  FOID2 (2, 1)=R0; FOID2 (2, 2)=R1; FOID2 (2, 3)=R0; FOID2 (2, 4)=R0
  FOID2 (3, 1)=R0; FOID2 (3, 2)=R0; FOID2 (3, 3)=R1; FOID2 (3, 4)=R0
  FOID2 (4, 1)=R0; FOID2 (4, 2)=R0; FOID2 (4, 3)=R0; FOID2 (4, 4)=R1

!
  SOID (1)=R1 ; SOID (2)=R1 ; SOID (3)=R0 ; SOID (4)=R1
!INITIALIZE LOCAL SCALAR VARIABLES
  NHARD=0 ; I=0 ; J=0
  HVAR=R0 ; DAMAGE=R0 ; OMEGA=R0 ; YOUNG=R0 ; POISS=R0
  DAMEXP=R0; DAMDEN=R0 ; GMODU=R0 ; BULK=R0 ; R2G=R0
  R1D3=R0 ; R3G=R0 ; R6G=R0 ; R2BULK=R0 ; ROO3D2=R0
  P=R0 ; SNORM=R0 ; Q=R0 ; QTRIAL=R0 ; PTRIAL=R0
  PTRIA2=R0; HSLOPE=R0 ; SIGMAY=R0 ; SIGMA2=R0 ; Y=R0
  OMEGA2=R0; PHI=R0 ; DOMEGA=R0 ; DY=R0 ; AUX=R0
  DRES=R0 ; AFACT=R0 ; BFACT=R0 ; CFACT=R0 ; DFACT=R0
  EFACT=R0 ; FACTG=R0 ; FACTK=R0 ; F1=R0 ; F2=R0
  P1=R0 ; P2=R0 ; P3=R0 ; S1=R0 ; S2=R0
  S3=R0 ; Y=R0 ; KAPPA2=R0 ; DMYD3=R0 ; R3D2=R0
  SECHX=R0 ; KAPPA1=R0
! Stops program if neither plane strain nor axisymmetric state
  IF (NTYPE.NE.2.AND.NTYPE.NE.3) CALL ERRPRT ('EI0052')
! Retrieve current hardening and damage variables

```

```

HVAR=RSTAVA (KRSTAV)
DAMAGE=RSTAVA (KRSTAV+1)
! Retrieve value of QTRIAL and last converged damage variable
DAMAGN=RSTAV2 (KRSTAV+1)
! Compute current material integrity
OMEGA=R1-DAMAGE
! Retrieve material properties
YOUNG=RPROPS (2)
POISS=RPROPS (3)
DAMEXP=RPROPS (4)
DAMDEN=RPROPS (5)
NHARD=IPROPS (3)
! Shear and bulk moduli
GMODU=YOUNG/ (R2* (R1+POISS))
BULK=YOUNG/ (R3* (R1-R2*POISS))
R2G=R2*GMODU
R1D3=R1/R3
R3D2=R3/R2
KAPPA1=R1
KAPPA2=R1
! Set deviatoric projection tensor
DO 20 I=1,NDDIM
    DO 10 J=1,NDDIM
        DEVPRJ (I, J)=FOID (I, J)-SOID (I)*SOID (J)*R1D3
    10 CONTINUE
20 CONTINUE
!
IF (EPFLAG) THEN
! Compute elastoplastic consistent tangent
! =====
    R3G=R3*GMODU
    R6G=R6*GMODU
    R2BULK=R2*BULK
    ROO3D2=DSQRT (R3/R2)
!-----
! Compute elasticity matrix (upper triangle only)
! -----
    DO 40 I=1,NSTRE
        DO 30 J=I,NSTRE
            DAUX1 (I, J)=R2G*DEVPRJ (I, J)+BULK*SOID (I)*SOID (J)
            DAUX2 (I, J)=R2G*DEVPRJ (I, J)+BULK*SOID (I)*SOID (J)
        30 CONTINUE
    40 CONTINUE
! Assemble lower triangle
! -----
    DO 60 J=1,NSTRE-1
        DO 50 I=J+1,NSTRE
            DAUX1 (I, J)=DAUX1 (J, I)
            DAUX2 (I, J)=DAUX2 (J, I)
        50 CONTINUE
    60 CONTINUE
! Computer de inverse DMATE
! -----
    CALL RMINVE (DAUX1, DMTIN, NSTRE, ERROR)
!-----
! Current hydrostatic pressure
P= (STRES (1)+STRES (2)+STRES (4))*R1D3
! Current deviatoric stress components
S (1)=STRES (1)-P
S (2)=STRES (2)-P
S (3)=STRES (3)
S (4)=STRES (4)-P
! Recover last (undamaged) elastic trial von Mises effective stress
SNORM=DSQRT (S (1)*S (1)+S (2)*S (2)+R2*S (3)*S (3)+S (4)*S (4))

```

```

Q=ROO3D2*SNORM
Y=-((Q**2)/R6G)-((P**2)/R2BULK)
Y=Y/((R1-DAMAGE)**2)
  DO 65 I=1, NSTRE
    FLOWV(I)=(R3/R2)*(S(I)/Q)/(R1-DAMAGE)
65 CONTINUE
  FLOWV(3)=FLOWV(3)*R2
! Computer trial (undamaged) stress tensor
  STRST(1)=(STRES(1)+DGAMA*R2G*FLOWV(1))/(R1-DAMAGE)
  STRST(2)=(STRES(2)+DGAMA*R2G*FLOWV(2))/(R1-DAMAGE)
  STRST(3)=(STRES(3)+DGAMA*R2G*FLOWV(3))/(R1-DAMAGE)
  STRST(4)=(STRES(4)+DGAMA*R2G*FLOWV(4))/(R1-DAMAGE)
!-----
! First: computer derivative of P, Sdev, Q and N in function of stress
tensor
!-----
  DO 70 I=1, NSTRE
    DP(I)=(R1D3*SOID(I))
70 CONTINUE

  DO 90 I=1, NSTRE
    DO 80 J=1, NSTRE
      DSDEV(I,J)=DEVPRJ(I,J)
80 CONTINUE
90 CONTINUE
    DSDEV(3,3)=DSDEV(3,3)*R2

    DQ(1)=((R3/R2)/Q)*S(1)
    DQ(2)=((R3/R2)/Q)*S(2)
    DQ(3)=((R3/R2)/Q)*S(3)*R2
    DQ(4)=((R3/R2)/Q)*S(4)

  DO 110 I=1, NSTRE
    DO 100 J=1, NSTRE
      DFLOWVD1(I,J)=(R3D2/(R1-DAMAGE))*((DSDEV(I,J)/Q)-
(S(I)*DQ(J)/(Q**2)))
100 CONTINUE
110 CONTINUE
!-----
  DO 111 I=1, NSTRE
    DMYD1(I)=(R1/((R1-
DAMAGE)**2))*((R2*Q*DQ(I)/R6G)+(R2*P*DP(I)/R2BULK))
111 CONTINUE
    DMYD1(3)=DMYD1(3)*R2
    DMYD3=R2*(-Y)/(R1-DAMAGE)
!-----
! Computer coefficient matrix a
!-----
  DO 130 I=1, NSTRE
    DO 120 J=1, NSTRE
      cofa(I,J)=FOID2(I,J)+R2G*DGAMA*(R1-DAMAGE)*DFLOWVD1(I,J)
120 CONTINUE
130 CONTINUE
!-----
  DO 140 I=1, NSTRE
    cofa(I,5)=R3G*S(I)/Q
140 CONTINUE
!-----
  DO 150 I=1, NSTRE
    cofa(I,6)=STRST(I)
150 CONTINUE
!-----
  DO 160 I=1, NSTRE
    cofa(5,I)=FLOWV(I)

```

```

160 CONTINUE
!-----
      cofa(5,5)=-DPLFUN(HVAR,NHARD,RPROPS(IPHARD))
      cofa(5,6)=Q/((R1-DAMAGE)**2)
!-----
      SECHX=R1/DCOSH(KAPPA2*((-Y/DAMDEN)**DAMEXP))
      DO 170 I=1, NSTRE
! ORIGINAL (*)
      cofa(6,I)=- (DGAMA/(R1-DAMAGE)) * (DAMEXP/DAMDEN) * ((-
Y/DAMDEN)**(DAMEXP-R1)) * DMYD1(I)
170 CONTINUE
!-----
! ORIGINAL (*)
      cofa(6,5)=- (R1/(R1-DAMAGE)) * ((-Y/DAMDEN)**DAMEXP)
! ORIGINAL (*)
      cofa(6,6)=R1-DGAMA*((R1/((R1-DAMAGE)**2)) * ((-Y/DAMDEN)**DAMEXP) +
&
(R1/(R1-DAMAGE)) * (DAMEXP/DAMDEN) * ((-
Y/DAMDEN)**(DAMEXP-R1)) * DMYD3)
!-----
! Computer inverse cofa=cofa-1
!-----
      CALL RMINVE(COFA,COFINV,6,ERROR)
!-----
      DO 190 I=1, NDDIM
      DO 180 J=1, NDDIM
      DAUX1(I,J)=COFINV(I,J)
180 CONTINUE
190 CONTINUE

      CALL DOT44(DAUX1,DAUX2,DMATX,NSTRE)

      DO 191 I=1, NDDIM
      DO 181 J=1, NDDIM
      DMATX(I,J)=DMATX(I,J)*(R1-DAMAGE)
181 CONTINUE
191 CONTINUE

      ELSE
! Compute damaged elasticity matrix
!-----
!... upper triangle
      FACTG=OMEGA*R2G
      FACTK=OMEGA*BULK
      DO 210 I=1,NDDIM
      DO 200 J=I,NDDIM
      DMATX(I,J)=FACTG*DEVPRJ(I,J)+FACTK*SOID(I)*SOID(J)
200 CONTINUE
210 CONTINUE
!... lower triangle
      DO 230 J=1,NDDIM-1
      DO 220 I=J+1,NDDIM
      DMATX(I,J)=DMATX(J,I)
220 CONTINUE
230 CONTINUE
      ENDIF
!
DEALLOCATE(DEVPRJ,FOID,S,SOID,COFA,COFINV,DMTIN,DSDEV,DFLOWVD1,DP,DQ,FLOWV,
Z,ZAUX, DAUX1, DAUX2)
!
      RETURN
      END

```

! END\_SUBROUTINE CTDAMA