

**Universidade de Brasília - UnB  
Faculdade UnB Gama - FGA  
Curso de Engenharia Automotiva**

**IDENTIFICAÇÃO EXPERIMENTAL DE  
AMORTECIMENTO DE VIGAS DE ALUMÍNIO COM  
CAMADAS DE MATERIAL VISCOELÁSTICO**

**Autor: Fernanda Almeida Leite  
Orientador: Maura Angélica Milfont Shzu  
Co-orientador: Marcus Vinicius Girão de Moraes**

**Brasília, DF  
2013**



**Fernanda Almeida Leite**

**IDENTIFICAÇÃO EXPERIMENTAL DE AMORTECIMENTO DE VIGAS DE  
ALUMÍNIO COM CAMADAS DE MATERIAL VISCOELÁSTICOS**

Monografia submetida ao curso de graduação em Engenharia Automotiva da Universidade de Brasília, como requisito parcial para obtenção do Título de Bacharel em Engenharia Automotiva.

Orientador: Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Maura Angélica Milfont Shzu

Co-Orientador: Prof. Dr. Marcus Vinicius Girão de Moraes

**Brasília, DF  
2013**

**CIP – Catalogação Internacional da Publicação\***





## **IDENTIFICAÇÃO EXPERIMENTAL DE AMORTECIMENTO DE VIGAS DE ALUMÍNIO COM CAMADAS DE MATERIAL VISCOELÁSTICOS**

**Fernanda Leite**

Monografia submetida como requisito parcial para obtenção do Título de Bacharel em Engenharia Automotiva da Faculdade UnB Gama - FGA, da Universidade de Brasília, em 15 de julho de 2013 apresentada e aprovada pela banca examinadora abaixo assinada:

---

**Profa. Dr.<sup>a</sup>: Maura Angélica Milfont Shzu, UnB/ FGA**  
Orientadora

---

**Prof. Dr.: Marcus Vinicius Girão de Moraes, UnB/ ENM**  
Co-orientador

---

**Profa. Dr.<sup>a</sup>: Suzana Moreira Ávila, UnB/ FGA**  
Membro Convidado

---

**Prof. Dr.: Edson Paulo da Silva, UnB/ ENM**  
Membro Convidado

Brasília, DF  
2013

Aos meus pais, Carlos e Márcia, ao meu noivo, Bruno, e ao meu irmão Felipe, com muito amor.

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço a Deus, por direcionar meus caminhos e me dar forças todos os dias para alcançar meus objetivos.

Aos meus pais, Carlos Sérgio Marques Leite Júnior e Márcia Cristina Almeida Leite, minha inspiração e modelo, pelos sacrifícios, apoio e amor.

Ao meu noivo, Bruno Fernandes de Oliveira, pelo companheirismo, paciência e carinho.

Aos meus avós maternos, Manoel Joaquim de Almeida e Odete Dias Pinto, pelo apoio e orações em meu favor.

A minha avó paterna, Maria de Lourdes Rebelo Leite, e a minha tia, Joléa Maria Rebelo Leite, pelo apoio e incentivo.

Aos meus orientadores, Maura Angélica Milfont Shzu e Marcus Vinicius Girão de Moraes, pelo apoio, orientação e pelos ensinamentos compartilhados de forma que a conclusão deste trabalho fosse possível.

Aos meus amigos, Daniel, João Victor e Roberto, companheiros de curso, pela amizade, apoio e paciência.

Ao meu amigo, Diego, pela ajuda e apoio.

Aos professores que fizeram parte da minha formação, pelos conhecimentos compartilhados.

Ao professor Edson Paulo da Silva e ao Laboratório de Caracterização Termomecânica e Microestrutural de Materiais Inteligentes da Universidade de Brasília, pela infraestrutura.

Ao Laboratório de Vibrações do Grupo de Dinâmica de Sistemas da Universidade de Brasília, pela infraestrutura e ao técnico José Filipe por me acompanhar e me auxiliar durante os experimentos.

Aos técnicos do Laboratório de Processos de Fabricação da Universidade de Brasília - Faculdade do Gama, Danilo, Henrique e Jackson pelo auxílio com a confecção dos corpos de prova.

A persistência é o menor caminho do êxito.  
Charles Chaplin.

## RESUMO

Diversos sistemas de um veículo são fontes de vibrações, e estas são transmitidas da estrutura aos ocupantes. Materiais viscoelásticos (MVEs) possuem excelente capacidade de amortecimento e baixa densidade, podendo ser utilizados para combinar baixo peso e alto amortecimento à estruturas e componentes. O presente trabalho consiste na identificação de propriedades de amortecimento de vigas compostas por material elástico (alumínio) cobertas por camadas de materiais viscoelásticos. Utilizou-se a técnica de excitação por impulso através da linha de soluções Sonelastic<sup>®</sup>, que caracteriza de forma não destrutiva os módulos de elasticidade e o amortecimento de materiais, em vigas na configuração livre-livre, e a técnica de largura de banda de meia potência aplicada a função de transmissibilidade de deslocamento obtida com a excitação harmônica das vigas, utilizando um excitador eletrodinâmico, na configuração engastada-livre. Realizou-se os experimentos à temperatura ambiente, desconsiderando o efeito da temperatura. Os resultados mostraram que a inclusão de MVEs proporcionou aumento do amortecimento, conforme o esperado, porém, a viga que possuía maior quantidade de MVE, não apresentou a maior taxa de amortecimento, e sim vigas com quantidades intermediárias.

**Palavras-chave:** Materiais viscoelásticos, Adição de amortecimento, Controle passivo de vibrações.

## ABSTRACT

Several systems of a vehicle are sources of vibrations, these are transmitted to the occupants of the structure. Viscoelastic materials (VEMs) have excellent damping capacity and low density so it can be used to combine low weight and high damping of structures and components. The present study is the identification of damping properties beams composed by elastic material (aluminum) covered by layers of viscoelastic materials. It was used the technique of impulse excitation through line Sonelastic<sup>®</sup> solution, which characterizes a non destructive modulus of elasticity and the damping materials beams in free-free configuration, the technique of bandwidth of half power applied to a function of displacement transmissibility obtain by harmonic excitation beams, using electrodynamic driver, clamped-free configuration. We carried out experiments at room temperature, disregarding the effect of temperature. The results showed that the inclusion of VEMs provided to increase the damping, as expected, however, the beam that had greater amount of VEM did not show a greater rate of damping, but beams with intermediate amounts.

**Keywords:** Viscoelastic Materials, Adding damping, Passive vibrations control.

## LISTA DE FIGURAS

- 1.1 - Modelo simplificado de um habitáculo veicular e cavidade motora.
- 1.2 - Exemplo de amortecedor viscoelástico.
- 1.3 - Configurações das vigas modeladas por Kumar.
  
- 2.1 - Relação entre a tensão e a deformação de um material elástico.
- 2.2 - Relação entre a tensão e a deformação de um material viscoelástico.
- 2.3 - Modelo de Maxwell para MVEs.
- 2.4 - Modelo de Voigt para MVEs.
- 2.5 - Modelo linear padrão para MVEs.
- 2.6 - Resultados para os testes de fluência (a) e relaxação (b) para modelos básicos
- 2.7 - Curvas do módulo de armazenamento e do fator de perda com a variação de temperatura para materiais viscoelásticos.
- 2.8 - Curvas do módulo de armazenamento e do fator de perda com a variação da frequência para materiais viscoelásticos.
- 2.9 - Modelo de Kelvin-Voigt para um MVE.
- 2.10 - Viga compósita bi-apoiada.
- 2.11 - Representação da estrutura viscoelástica.
  
- 3.1 - Resposta ao impulso para um sistema de um grau de liberdade.
- 3.2 - Método da largura de banda para um sistema com um grau de liberdade.
- 3.3 - Princípio de funcionamento do Sonelastic<sup>®</sup>.
  
- 4.1 - Vigas ensaiadas.
- 4.2 - Componentes do suporte Modelo SA-BC.
- 4.3 - Pulsador eletromagnético automático.
- 4.4 - Captador acústico direcional acoplado a um pedestal ajustável.
- 4.5 - Posicionamento do captador e do excitador.
- 4.6 - Modos de vibração de uma viga livre-livre.
- 4.7 - Primeiras frequências naturais de flexão das vigas ensaiadas.
- 4.8 - Resultado do amortecimento global para as vigas ensaiadas.
- 4.9 - Resultado do amortecimento na primeira frequência natural das vigas ensaiadas.
- 4.10 - Montagem do experimento.
- 4.11 - Diagrama de blocos do LabVIEW.
- 4.12 - Gráfico de Transmissibilidade de Deslocamento em função da razão de frequências para as vigas ensaiadas.
- 4.13 - Gráfico de Amortecimento para as vigas ensaiadas.
  
- A(1) - Valores das medições do amortecimento na frequência natural - Viga 1.
- A(2) - Valores das medições do amortecimento- Viga 1.
- A(3) - Valores das medições da frequência - Viga 1
- A(4) - Valores das medições do amortecimento na frequência natural - Viga 2
- A(5) - Valores das medições do amortecimento- Viga 2.
- A(6) - Valores das medições da frequência- Viga 2.
- A(7) - Valores das medições do amortecimento na frequência natural - Viga 3.
- A(8) - Valores das medições do amortecimento- Viga 3.
- A(9) - Valores das medições da frequência- Viga 3.
- A(10) - Valores das medições do amortecimento na frequência natural - Viga 4.
- A(11) - Valores das medições do amortecimento- Viga 4.
- A(12) - Valores das medições da frequência- Viga 4.
- A(13) - Valores das medições do amortecimento na frequência natural - Viga 5.
- A(14) - Valores das medições do amortecimento- Viga 5.
- A(15) - Valores das medições da frequência- Viga 5.

## LISTA DE TABELAS

- 1.1 - Valores do fator de perda para alguns materiais.
- 4.1 - Parâmetros das vigas em milímetros e gramas.
- 4.2 - Parâmetros de cada camada de material viscoelástico.
- 4.3 - Especificações do suporte Modelo SA-BC.
- 4.4 - Frequências naturais e valores de amortecimento obtidos.
- 4.5 - Pontos de meia potência e amortecimento das vigas ensaiadas.

## LISTA DE SÍMBOLOS

|             |   |
|-------------|---|
| $b$         | Vetor de força por unidade de volume  |
| $c$         | Coefficiente de amortecimento viscoso   |
| $E$         | Módulo de elasticidade longitudinal   |
| $E'$        | Módulo de armazenamento   |
| $E''$       | Módulo de perda   |
| $E^*$       | Módulo de elasticidade longitudinal complexo                                  |
| $F$         | Força de tração   |
| $F_0$       | Amplitude da força  |
| $G$         | Módulo de elasticidade transversal  |
| $G(\omega)$ | Módulo de cisalhamento complexo   |
| $G^*$       | Módulo de elasticidade transversal complexo                                   |
| $I$         | Momento de inércia da área  |
| $IT$        | Intervalo de tempo aberto   |
| $J_1$       | Tensor de resposta elástica   |
| $J_2$       | Tensor de resposta volumétrica  |
| $K^*$       | Módulo volumétrico complexo   |
| $k$         | Rigidez   |
| $k^*$       | Rigidez complexa  |
| $k'$        | Módulo volumétrico do elemento de Kelvin                                      |
| $l$         | Comprimento da viga   |
| $m$         | Massa   |
| $m_d$       | Parâmetro generalizado do modelo de Kelvin para resposta desviatória          |
| $m_v$       | Parâmetro generalizado do modelo de Kelvin para resposta volumétrica          |
| $n$         | Vetor normal  |
| $n_d$       | Parâmetro generalizado do modelo de Kelvin para resposta desviatória          |
| $n_v$       | Parâmetro generalizado do modelo de Kelvin para resposta volumétrica          |
| $(p_k)_d$   | Constante função das propriedades do material referentes ao fator desviatório |
| $(p_k)_v$   | Constante função das propriedades do material referentes ao fator volumétrico |
| $Q_n$       | Carregamento normal amortecido  |
| $(q_k)_d$   | Constante função das propriedades do material referentes ao fator desviatório |
| $(q_k)_v$   | Constante função das propriedades do material referentes ao fator volumétrico |
| $S_s$       | Tensor desviatório da tensão  |
| $t$         | Tempo   |
| $t_0$       | Tempo inicial   |
| $U_0$       | Amplitude do deslocamento   |
| $u$         | Deslocamento longitudinal   |
| $u_0$       | Deslocamento longitudinal inicial   |
| $\dot{u}_0$ | Velocidade inicial  |
| $v'$        | Coefficiente de dilatação viscosa   |
| $W_n$       | Modo normal amortecido  |
| $w$         | Deslocamento transversal  |

### Símbolos Gregos

|                 |  |
|-----------------|--|
| $\Upsilon$      | Deformação transversal                               |
| $\nabla$        | Divergente   |
| $\delta(t)$     | Função delta de Dirac                                |
| $\varepsilon$   | Deformação   |
| $\varepsilon_0$ | Amplitude da deformação                              |
| $\varepsilon_v$ | Componente volumétrica ou de dilatação da deformação |

|                  |  |
|------------------|--|
| $\dot{\epsilon}$ | Taxa de deformação                               |
| $\epsilon$       | Tensor desviatório da deformação                 |
| $\xi$            | Amortecimento                                    |
| $\eta$           | Fator de perda                                   |
| $\eta'$          | Coefficiente desviatório                         |
| $\mu'$           | Módulo de cisalhamento do elemento de Kelvin     |
| $\rho_s$         | Densidade da massa estrutural                    |
| $\sigma$         | Tensor tensão                                    |
| $\sigma_0$       | Amplitude da tensão                              |
| $\sigma_v$       | Componente volumétrica ou de dilatação da tensão |
| $\tau$           | Tensão de cisalhamento                           |
| $\Omega_s$       | Domínio  |
| $\omega$         | Frequência                                       |

### Grupos Adimensionais

|                 |                                  |
|-----------------|----------------------------------|
| $1$             | Tensor unitário de segunda ordem |
| $e$             | Número de Euler                  |
| $i = \sqrt{-1}$ | Unidade imaginária               |
| $\text{Im}$     | Parte imaginária                 |
| $\text{Re}$     | Parte real                       |
| $\emptyset$     | Conjunto vazio                   |
| $\Pi$           | Tensor unitário de quarta ordem  |

### Subscritos

|       |                        |
|-------|------------------------|
| $c$   | Amortecedor            |
| $ME$  | Material elástico      |
| $MVE$ | Material viscoelástico |
| $m$   | Massa                  |
| $v$   | Volumétrico            |
| $d$   | Desviatório            |

## SUMÁRIO

|   |           |
|---|-----------|
| <b>1 INTRODUÇÃO .....</b>   | <b>15</b> |
| 1.1 FUNDAMENTAÇÃO .....   | 15        |
| 1.2 CONTROLE PASSIVO DE VIBRAÇÕES .....   | 16        |
| 1.3 BREVE HISTÓRICO DE APLICAÇÃO DE MVES EM CONTROLE DE VIBRAÇÕES E TÉCNICAS DE CARACTERIZAÇÃO DE AMORTECIMENTO ..... | 18        |
| 1.4 OBJETIVOS .....   | 20        |
| 1.5 METODOLOGIA .....   | 20        |
| 1.6 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO .....   | 21        |
| <b>2 MATERIAIS VISCOELÁSTICOS: FORMULAÇÃO, MODELAGEM E USO .....</b>  | <b>22</b> |
| 2.1 REOLOGIA DE MODELOS 1D DE MATERIAIS VISCOELÁSTICOS .....  | 23        |
| 2.1.1 Modelo de Maxwell .....   | 23        |
| 2.1.2 Modelo de Voigt .....   | 25        |
| 2.1.3 Modelo Linear Padrão .....  | 26        |
| 2.2 INFLUÊNCIA DA TEMPERATURA E FREQUÊNCIA NAS PROPRIEDADES DOS MVES .....  | 28        |
| 2.2.1 Influência da Temperatura .....   | 28        |
| 2.2.2 Influência da Frequência .....  | 29        |
| 2.3 PONDERAÇÃO COM RELAÇÃO AO AMORTECIMENTO VISCOELÁSTICO: MODELO MOLA-AMORTECEDOR .....                              | 30        |
| 2.4 FORMULAÇÃO VISCOELÁSTICA ESTRUTURAL .....   | 32        |
| 2.4.1 Equações de Movimento .....   | 32        |
| 2.4.2 Equações Constitutivas .....  | 34        |
| 2.4.3 Modelo para Análise Transiente .....  | 36        |
| 2.4.4 Modelo para Análise Harmônica .....   | 37        |
| <b>3 MÉTODOS DE DETERMINAÇÃO DE AMORTECIMENTO .....</b>   | <b>38</b> |
| 3.1 MÉTODO DO DECREMENTO LOGARÍTMICO .....  | 38        |
| 3.2 FUNÇÃO RESPOSTA EM FREQUÊNCIA E MÉTODO DA LARGURA DE BANDA A MEIA POTÊNCIA ..                                     | 39        |
| 3.3 RESPOSTA DE UM SISTEMA AMORTECIDO A MOVIMENTO HARMÔNICO DE BASE .....   | 41        |
| 3.4 SONELASTIC®- <i>IMPULSE EXCITATION TECHNIQUE</i> .....  | 42        |
| <b>4 PROCEDIMENTO EXPERIMENTAL E RESULTADOS .....</b>   | <b>44</b> |
| 4.1 SONELASTIC® .....   | 44        |
| 4.1.1 Corpos de prova .....   | 44        |
| 4.1.2 Equipamentos utilizados .....   | 45        |
| 4.1.3 Procedimento experimental .....   | 47        |
| 4.1.4 Resultados .....  | 49        |
| 4.1.5 Análise dos Resultados .....  | 51        |
| 4.2 EXCITAÇÃO HARMÔNICA DE VIGA ENGASTADA .....   | 51        |
| 4.2.1 Corpos de prova .....   | 51        |
| 4.2.2 Equipamentos utilizados .....   | 51        |
| 4.2.3 Procedimento experimental .....   | 52        |
| 4.2.4 Resultados .....  | 53        |
| 4.2.5 Análise dos Resultados .....  | 55        |
| <b>5 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS .....</b>  | <b>56</b> |
| <b>REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS .....</b>   | <b>57</b> |
| <b>ANEXO I .....</b>  | <b>59</b> |
| <b>ANEXO II .....</b>   | <b>67</b> |

## 1 INTRODUÇÃO

*Este capítulo apresenta conceitos e definições gerais no âmbito de vibrações mecânicas e controle de vibrações, introduz o problema das vigas compósitas a serem estudadas, apresenta os objetivos, metodologia e organização do presente trabalho.*

### 1.1 FUNDAMENTAÇÃO

O interesse pela vibração, que consiste em qualquer movimento que se repita após um intervalo de tempo, iniciou-se com a descoberta dos primeiros instrumentos musicais, que deveriam ser provavelmente apitos ou tambores (Rao, 2008). Na engenharia, o estudo de vibrações é mais recente e concentra-se principalmente em projetos de máquinas, fundações, estruturas, motores, turbinas e sistemas de controle, pois a vibração causa degradação mais rápida de componentes, podendo gerar ruído excessivo, afrouxar ou soltar elementos de fixação, entre outros problemas.

Com os avanços de tecnologias e o crescimento da indústria automobilística, um veículo para se tornar competitivo no mercado deve oferecer um conjunto de características que somadas tornem-se mais atraentes que os seus concorrentes. Algumas dessas características são o consumo de combustível, potência, dirigibilidade, preço e conforto, que trata não somente das características dinâmicas do veículo durante seu percurso, mas também da quantidade de vibração que é transmitida das fontes para a estrutura e da estrutura para os ocupantes (Kaderli & Gomes., 2011).

Grande parte dos sistemas mecânicos dos automóveis são fontes de vibrações, como, por exemplo, o sistema de *powertrain*, composto pelo motor e o sistema de transmissão. A maioria dos motores de acionamento possuem problemas de vibração devido ao desbalanceamento inerente a eles. As vibrações transmitidas aos ocupantes podem ocasionar desconforto e gerar problemas de saúde a longo prazo. A construção de automóveis mais leves e mais eficientes energeticamente agravam ainda mais o problema da transmissibilidade das vibrações com a redução de massa da estrutura e dos sistemas.

A Figura (1.1) apresenta o esquema de um habitáculo veicular, que é responsável por alojar os passageiros de forma confortável e segura, acoplado diretamente à cavidade motora que comporta o sistema de *powertrain*.

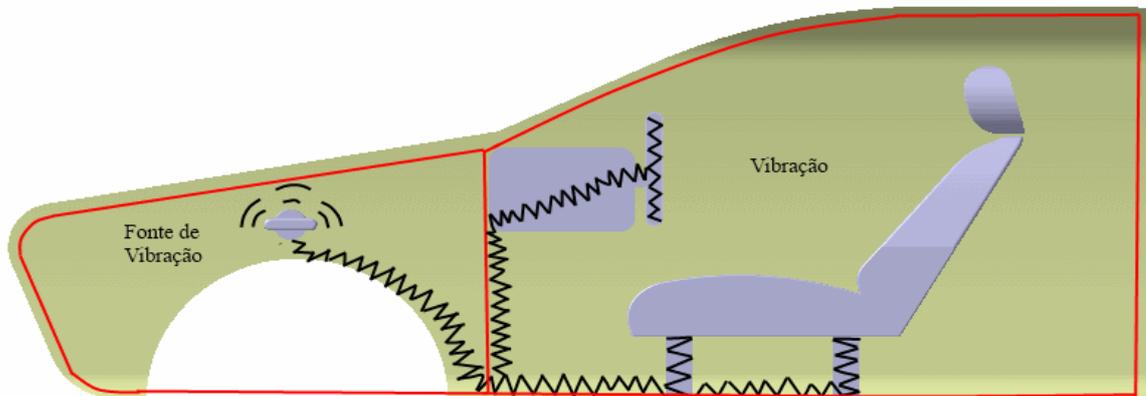


Figura 1.1 - Modelo simplificado de um habitáculo veicular e cavidade motora.

O projeto do habitáculo veicular contempla a cobertura do mesmo com diversos materiais isolantes sonoros (espumas ou feltros), plásticos, vidro e mantas asfálticas no assoalho para reduzir o efeito das vibrações (Ferreira, 2012). Outra forma de melhorar estas condições e reduzir a amplitude da resposta do sistema a excitação é através de técnicas de controle de vibração.

Existem várias metodologias de controle de vibrações, entre elas a adição de amortecimento, que pode ser feita através da inclusão de materiais viscoelásticos. Portanto, o presente trabalho visa avaliar o desempenho de vigas compósitas (material elástico + material viscoelástico) na redução da transmissão de vibrações através de métodos de identificação de amortecimento.

## 1.2. CONTROLE PASSIVO DE VIBRAÇÕES

O controle de vibrações consiste em métodos que eliminam ou reduzem a vibração com a utilização de isoladores e absorvedores de massa auxiliares (Rao, 2008), e estes podem ser classificados em passivos, ativos, semi-ativos e híbridos.

O controle ativo consiste na aplicação de forças à estrutura através de atuadores alimentados por fontes de energia externa (Ávila, 2002). A sua implementação é mais dispendiosa, pois faz uso de sensores, dispositivos para

processamento de dados, algoritmos de controle e atuadores alimentados por fontes de energia externa. Porém, estes possuem maior eficiência no controle da resposta e não são limitados quanto a faixa de frequência da resposta da estrutura à excitação externa (Spencer Jr. & Soong, 1999).

Um sistema de controle passivo resume-se à instalação de um ou mais dispositivos incorporados à estrutura que absorvem ou consomem parte da energia transmitida pelo carregamento dinâmico, reduzindo, assim, a dissipação dessa energia nos membros da estrutura principal (Ávila, 2002). Este sistema compreende mecanismos e materiais que modificam propriedades como a massa, o amortecimento e a rigidez da estrutura.

Rilley *et al.* (1998), cita que os mecanismos típicos de controle passivo incluem amortecedores de massa, amortecedores estruturais e sistemas de isolamento de base. Com a utilização dos amortecedores há transferência de energia entre a estrutura e a massa auxiliar implementada à ela, os amortecedores estruturais dissipam energia enquanto sofrem deformação, e o sistema de isolamento de base desacopla o movimento da estrutura das vibrações sísmicas do solo.

Algumas vantagens dos sistemas de controle passivo comparados aos sistemas ativos são que os sistemas passivos não necessitam de alta tecnologia, pois recaem em soluções estruturais convencionais, possuem eficiência e confiabilidade comprovadas e não necessitam de manutenção permanente. Porém, estes sistemas possuem limitações, visto que sua eficiência é atrelada à faixa de frequência da excitação a qual a estrutura é submetida (Ávila, 2002).

O amortecimento sempre limita a amplitude da resposta, e sua introdução pode ser feita através da adição de materiais estruturais que possuem um alto amortecimento interno. Exemplos deste materiais são o ferro fundido e materiais viscoelásticos (MVEs).

O coeficiente de perda é um termo utilizado para comparar a capacidade de amortecimento de materiais, e os MVEs possuem um fator de perda maior comparado à maioria dos outros materiais. A Tab. (1.1) apresenta valores deste coeficiente para alguns materiais usuais:

Tabela 1.1 - Valores do fator de perda para alguns materiais (Rao, 2008).

| Material                    | Fator de Perda ( $\eta$ ) |
|-----------------------------|---------------------------|
| Poliestireno                | 2,0                       |
| Borracha dura               | 1,0                       |
| Tapetes de fibra com matriz | 0,1                       |
| Cortiça                     | 0,13 a 0,17               |
| Alumínio                    | $1 \times 10^{-4}$        |
| Ferro e aço                 | 2 a $6 \times 10^{-4}$    |

### 1.3 BREVE HISTÓRICO DE APLICAÇÃO DE MVES EM CONTROLE DE VIBRAÇÕES E TÉCNICAS DE CARACTERIZAÇÃO DE AMORTECIMENTO

A aplicação de materiais viscoelásticos em controle de vibrações datam da década de 50 através das técnicas de Oberst *et al.*, (1952). O método proposto por Oberst é utilizado para caracterizar propriedades de amortecimento em materiais, e é baseado em uma viga multicamadas em balanço. Estas técnicas fundamentaram o modelo da *American Society for Testing and Material* (ASTM) (Barbosa, 2000).

Uma configuração de amortecedor viscoelástico é apresentado na Fig. (1.2) e é composto por camadas de MVEs coladas entre chapas de aço. O seu princípio de funcionamento consiste na dissipação de energia de vibração convertendo-a em calor, devido ao alto nível de amortecimento dos MVEs quando submetidos a sollicitação cisalhante.

Um dos primeiros casos que se tem notícias na literatura da utilização de amortecedores viscoelásticos é nas torres do *World Trade Center*, inauguradas em 1973 em Nova York (Santos, 2003). O objetivo da implementação destes amortecedores era atenuar as vibrações devido às cargas de vento, e eles foram instalados em 1969 e tinham a expectativa de vida útil até o ano de 2015.

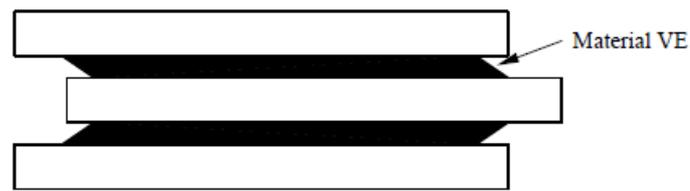


Figura 1.2 - Exemplo de amortecedor viscoelástico (Santos, 2003).

No âmbito teórico-numérico-experimental, a tese de doutorado de Barbosa (2000), e a de Vasconcelos (2003) merecem destaque devido às grandes contribuições dadas nesta linha de pesquisa. Barbosa (2000) discute a formulação e desenvolve um programa para estruturas do tipo sanduíche, em linguagem FORTRAN, via método dos elementos finitos e método de Golla-Hughes, que serviu de base para o desenvolvimento do programa em elementos finitos com atenuadores de mecanismos viscoelásticos desenvolvido por Vasconcelos (2003).

Oliveira (2006), através de procedimentos experimentais e modelos de elementos finitos, determinou uma metodologia para redução de ruído por meio da aplicação de MVEs na carcaça de um compressor hermético.

Koruk e Sanliturk (2010) estudaram os efeitos de vários parâmetros sobre a determinação das propriedades de materiais através da técnica de Oberst (1952) com o intuito de melhorar a precisão dos resultados.

Utilizando a plataforma ANSYS®, pacote computacional de elementos finitos, Kumar (2010) modelou uma viga do tipo sanduíche em balanço com duas configurações diferentes: na primeira a camada de MVE cobre completamente a base e na outra a cobertura é parcial, conforme descrito na Fig. (1.3), afim de obter as frequências naturais destes modelos.

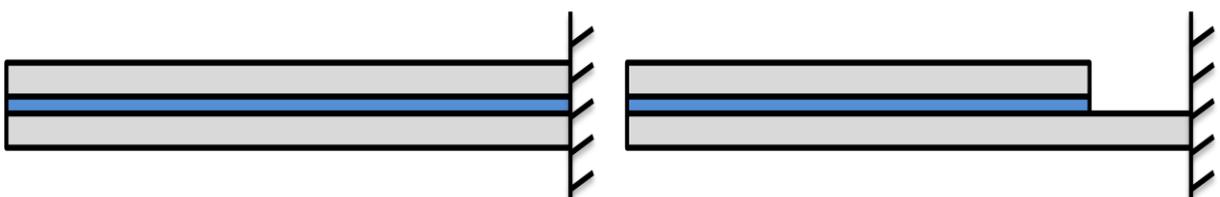


Figura 1.3 - Configurações das vigas modeladas por Kumar (Kumar, 2010).

Medonça *et al.*, (2011) caracterizam materiais viscoelásticos pelo método da viga vibrante, normalizado pela ASTM E756-04, que consiste em medir as frequências naturais de vigas engastadas, com configurações pré-determinadas pela norma, e utilizando a técnica de banda de meia potência, determina-se o fator de amortecimento do material.

O amortecimento de painéis aeronáuticos compostos por MVEs foram estudados por Bratti (2011), utilizando uma técnica que combina o Método de Elementos Finitos e a Teoria de Estruturas Periódicas. Os resultados obtidos por esta técnica são validados experimentalmente pelo método da potência de entrada e o método do decaimento da resposta impulsiva.

#### 1.4 OBJETIVOS

O presente trabalho tem como objetivo geral estudar os efeitos da inclusão de materiais viscoelásticos em componentes, determinando, experimentalmente, as propriedades de amortecimento de vigas compósitas.

Este trabalho também tem como objetivo servir como um estudo preliminar dos procedimentos experimentais utilizados e do comportamento de MVEs, podendo ser utilizado como base para a caracterização de estruturas mais complexas.

#### 1.5 METODOLOGIA

O sistema composto pelo habitáculo veicular e a cavidade motora é complexo em sua composição original. Atribuir camadas viscoelásticas a esta estrutura tornaria o problema ainda mais complexo e de difícil modelagem. Portanto, reduziu-se o problema a vigas compósitas com um grau de liberdade, ou seja, obtendo a solução para a primeira frequência natural de flexão e a temperatura constante.

Utilizaram-se dois métodos para determinação da primeira frequência natural e das propriedades de amortecimento das vigas. No primeiro método, utilizou-se o *software* SONELASTIC<sup>®</sup>, que é uma linha de soluções em instrumentação para a caracterização não destrutiva dos módulos de elasticidade e do amortecimento de materiais, a partir das frequências naturais de vibração obtidas pela técnica de excitação por impulso. Um microfone capta a pressão sonora causada por um

impacto mecânico no corpo de prova, apoiado por dois fios de forma a simular um situação livre de restrições, e pelo método do decremento logarítmico, o amortecimento é calculado.

A segunda técnica consiste na determinação da Função de Transmissibilidade de Deslocamento, obtida pela razão entre o deslocamento, calculado a partir da aceleração obtida com a utilização de um acelerômetro, e o deslocamento da base do excitador eletrodinâmico. As vigas são excitadas harmonicamente, por um *shaker*, de 45 Hz à 60 Hz em passos de 1Hz. Os efeitos de temperatura não foram considerados, realizando-se os experimentos à temperatura ambiente.

## 1.6 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

O relatório de trabalho de conclusão de curso é dividido em seis capítulos.

### **Capítulo 2** - Materiais Viscoelásticos: Formulação, Modelagem e Uso

Introduz-se o capítulo dois com os modelos unidimensionais de materiais viscoelásticos desenvolvidos por Maxwell, Voigt e o modelo linear padrão, trata-se da influência da temperatura e da frequência nas propriedades destes materiais, apresenta-se o modelo mola-amortecedor do amortecimento viscoelástico e a formulação estrutural destes materiais.

### **Capítulo 3** - Métodos de Determinação de Amortecimento

O capítulo três apresenta métodos de determinação de amortecimento: decaimento logarítmico e banda de meia potência e destina-se a uma breve discussão dos procedimentos experimentais realizados.

### **Capítulo 4** - Procedimento Experimental e Resultados

Apresenta-se os procedimentos experimentais utilizados para determinação do amortecimento das vigas, seus respectivos resultados e a análise dos mesmos.

### **Capítulo 5** - Conclusões e Perspectivas

Este capítulo destina-se as considerações finais sobre o trabalho e apresenta as perspectivas para trabalhos futuros.

## 2 MATERIAIS VISCOELÁSTICOS: FORMULAÇÃO, MODELAGEM E USO

*Este capítulo destina-se a apresentação de modelos de amortecimento viscoelástico, influência da temperatura e frequência nos MVEs, e a formulação viscoelástica estrutural destes materiais.*

O comportamento dos MVEs pode ser caracterizado por uma parcela viscosa e uma parcela elástica. O comportamento viscoso é responsável por absorver e dissipar a energia enquanto a parcela elástica é responsável por armazenar energia. Portanto, a resposta de MVEs depende do histórico do carregamento, e suas propriedades se modificam com a variação de temperatura, frequência e deformação. Sua caracterização pode ser feita por meio de integrais de convolução ou de leis constitutivas de modelos matemáticos que relacionam tensão e deformação.

Quando um material que possui comportamento elástico é submetido a um carregamento cíclico, a deformação permanece em fase com a tensão, conforme ilustra a Fig. (2.1).

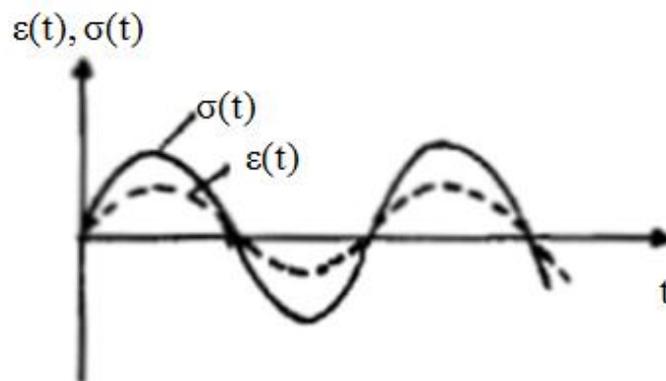


Figura 2.1 - Relação entre a tensão e a deformação de um material elástico (Jones, 2001).

Ao tratar-se de um material viscoelástico, para o mesmo carregamento, nota-se uma diferença entre a fase da deformação e da tensão correspondente como ilustrado na Fig. (2.2).

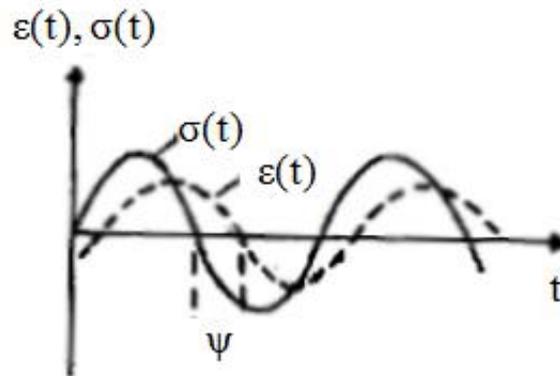


Figura 2.2 - Relação entre a tensão e a deformação de um material viscoelástico (Jones, 2001).

## 2.1 REOLOGIA DE MODELOS 1D DE MATERIAIS VISCOELÁSTICOS

Modelos como o de Maxwell e de Voigt utilizam associações entre molas lineares e amortecedores viscosos para caracterizar o comportamento dinâmico de MVEs.

### 2.1.1 Modelo de Maxwell

O modelo de Maxwell é composto por uma mola e um amortecedor associados em série, com rigidez  $k$  e constante de amortecimento  $c$ , respectivamente (Fig. 2.3).



Figura 2.3 - Modelo de Maxwell para MVEs.

$$u = u_m + u_c. \quad (2.1)$$

Derivando a Eq. (2.1) em relação ao tempo e relacionando-a com a lei de Hooke em que  $F = ku$ , obtêm-se:

$$\frac{du}{dt} = \frac{du_m}{dt} + \frac{du_c}{dt} = \frac{1}{k} \frac{dF}{dt} + \frac{F}{c}. \quad (2.2)$$

Aplicando-se uma força instantaneamente e mantendo-a constante, ou seja,  $F = F_0 H(t)$ , em que  $H(t)$  é a função degrau e  $\delta(t)$  é a função delta de Dirac, o alongamento total é obtido a partir da solução da Eq. (2.3):

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{k} F_0 \delta(t) + \frac{1}{c} F_0 H(t). \quad (2.3)$$

Integrando-se a Eq. (2.3) e considerando que o alongamento no instante  $t = 0$  é nulo, têm-se:

$$u(t) = F_0 \left( \frac{1}{k} + \frac{t}{c} \right) H(t). \quad (2.4)$$

A resposta deste modelo, considerando uma força constante, é denominado teste de fluência.

Se for considerado um deslocamento aplicado instantaneamente e mantido constante,  $u = U_0 H(t)$ , pode-se obter a força necessária para manter o deslocamento imposto. A equação diferencial obtida é:

$$U_0 \delta(t) = \frac{1}{k} \frac{dF}{dt} + \frac{F}{c}. \quad (2.5)$$

Utilizando o método do fator de integração para solução da equação diferencial de primeira ordem, multiplicando-se a Eq. (2.5) por  $e^{kt/c}$ , obtêm-se:

$$F(t) = U_0 k e^{-\frac{kt}{c}} H(t). \quad (2.6)$$

A resposta deste modelo, considerando um deslocamento constante é denominando teste de relaxação.

### 2.1.2 Modelo de Voigt

O modelo de Voigt também é composto por uma associação de uma mola e um amortecedor, porém a configuração desses elementos é em paralelo (Fig. 2.4).

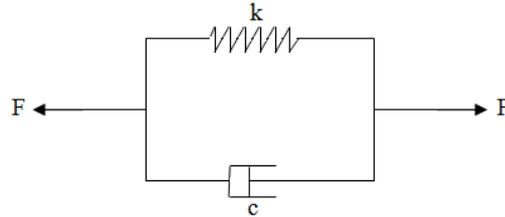


Figura 2.4 - Modelo de Voigt para MVEs.

Ao aplicar uma força  $F$  tracionando o sistema, tem-se que a força total é composta por uma parcela referente à mola e outra parcela referente ao amortecedor:

$$F = F_m + F_c. \quad (2.7)$$

Neste modelo, o alongamento da mola e do amortecedor são iguais, e a força elástica descrita pela lei de Hooke e a força no amortecedor são dadas pelas Eq. (2.8) e (2.9):

$$F_m = ku, \quad (2.8)$$

e

$$F_c = c \frac{du}{dt}. \quad (2.9)$$

Desta forma, a força total é dada pela Eq. (2.10):

$$F = ku + c \frac{du}{dt}. \quad (2.10)$$

Para o teste de fluência, onde  $F = F_0 H(t)$ , tem-se:

$$F_0 H(t) = ku + c \frac{du}{dt}. \quad (2.11)$$

A solução é obtida através do método do fator integrante, e consiste na Eq. (2.12):

$$u(t) = \frac{F_0}{k} \left( 1 - e^{-\frac{kt}{c}} \right) H(t). \quad (2.12)$$

Para o teste de relaxação,  $u = U_0 H(t)$ , a solução para a força em um sistema com deformação no instante  $t = 0$  nula é:

$$F(t) = [c\delta(t) + k]U_0. \quad (2.13)$$

### 2.1.3 Modelo Linear Padrão

O modelo linear padrão é decorrente da combinação de um modelo de Maxwell com uma mola associados em paralelo (Fig. 2.5 ).

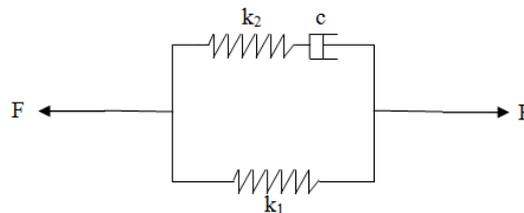


Figura 2.5 - Modelo Linear padrão para MVEs.

Sobre a mesma condição de força dos outros modelos, a força total é composta por uma força na mola  $F_1$  e por uma força no modelo de Maxwell  $F_2$ :

$$F = F_1 + F_2. \quad (2.14)$$

Por estarem associados paralelamente, os alongamentos na mola e no modelo de Maxwell são os mesmos. A partir da lei de Hooke para a mola:

$$u = \frac{F_1}{k_1}. \quad (2.15)$$

Relacionando as Eqs. (2.14) e (2.15) com a equação diferencial do modelo de Maxwell, Eq. (2.2), tem-se:

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{k_2} \frac{dF_2}{dt} + \frac{F_2}{c_2} = \frac{1}{k_2} \left( \frac{dF}{dt} - k_1 \frac{du}{dt} \right) + \frac{1}{c_2} (F - k_1 u). \quad (2.16)$$

Reorganizando a Eq. (2.16):

$$\frac{dF}{dt} + \frac{k_2}{c_2} F = (k_1 + k_2) \frac{du}{dt} + \frac{k_1 k_2}{c_2} u. \quad (2.17)$$

Tem-se que a solução para o teste de fluência e para o teste de relaxação, respectivamente são:

$$u(t) = \frac{F_0}{k_1} \left( 1 - \frac{k_2}{k_1 + k_2} e^{-\frac{k_1 k_2}{(k_1 + k_2) c_2} t} \right) H(t), \quad (2.18)$$

e

$$F(t) = U_0 \left( k_1 + k_2 e^{-\frac{k_2 t}{c_2}} \right) H(t). \quad (2.19)$$

Os resultados dos testes de fluência e relaxação, para os modelos apresentados, estão ilustrados na Fig. (2.6):

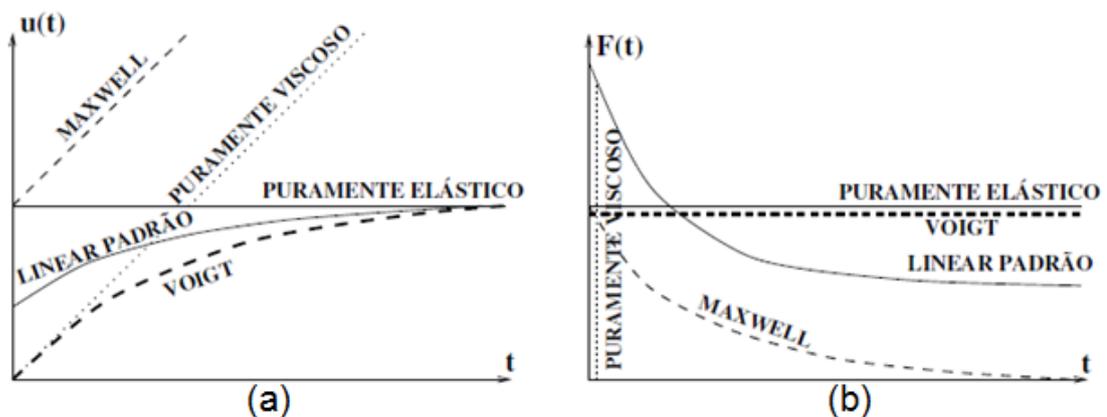


Figura 2.6 - Resultados para os testes de fluência (a) e relaxação (b) para modelos básicos (Barbosa, 2000).

## 2.2 INFLUÊNCIA DA TEMPERATURA E FREQUÊNCIA NAS PROPRIEDADES DOS MVEs

Os materiais viscoelásticos possuem propriedades elásticas e viscosas, no regime elástico há recuperação de seu estado original, porém devido as propriedades viscosas, isto acontece lentamente, de modo que pode não haver total recuperação antes de se iniciar o próximo ciclo de vibração.

As propriedades dos MVEs são função da temperatura e da frequência, e estes fatores devem ser considerados ao se projetar um sistema de amortecimento.

### 2.2.1 Influência da Temperatura

As propriedades dos MVEs alteram significativamente com o aumento ou diminuição da temperatura. Ao aumentá-la, conseqüentemente, a energia interna da estrutura aumenta, e as ligações intermoleculares ficam mais vulneráveis, havendo redução do módulo de elasticidade do material.

Os parâmetros que caracterizam as propriedades dos MVEs são o módulo de armazenamento  $E'$ , que representa a energia armazenada e restituída por ciclo para deformações lineares e cisalhantes, o módulo de perda  $E''$ , que representa a energia dissipada ou perdida por ciclo de deformações lineares e cisalhantes, e o fator de perda  $\eta$ . O módulo complexo de um MVE, sendo  $E$  o módulo de Young, é dado por:

$$E^* = E' + E'' = E(1 + i\eta). \quad (2.20)$$

O comportamento típico desses parâmetros com a variação da temperatura é ilustrado na Fig. (2.7).

Na primeira região, o parâmetro predominante é o módulo de armazenamento, que varia de forma mais lenta com o aumento da temperatura, caracterizando um baixo amortecimento. O fator de perda altera de forma mais rápida, porém seu máximo só é atingido posteriormente.

A segunda região contempla o valor máximo do fator de perda, proporcionando excelentes características para um alto amortecimento.

Na terceira região, o módulo de armazenamento e o fator de perda diminuem gradativamente com o aumento da temperatura. E na região de escoamento, o

material comporta-se predominantemente viscoso, com o aumento do fator de perda e diminuição rápida do módulo de armazenamento.

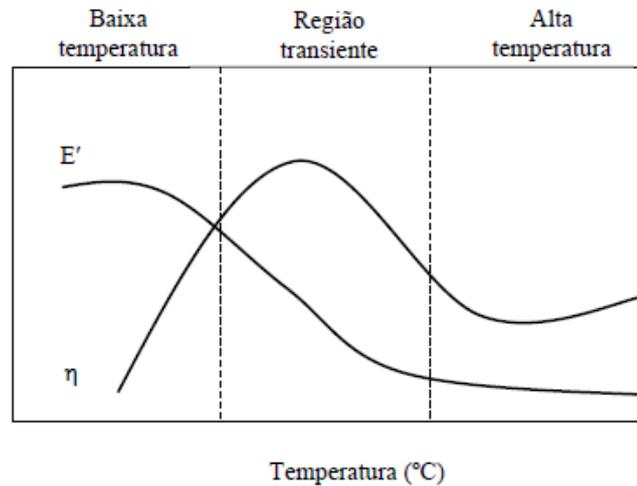


Figura 2.7 - Curvas do módulo de armazenamento e do fator de perda com a variação de temperatura para materiais viscoelásticos (Santos, 2003).

### 2.2.2 Influência da Frequência

A taxa de carregamento, ou a frequência, possuem grande influência sobre o módulo de armazenamento e o fator de perda. O módulo de armazenamento tende a aumentar com o aumento da frequência, e o fator de perda atinge seu valor máximo novamente em uma faixa intermediária conforme pode-se observar na Fig. (2.8).

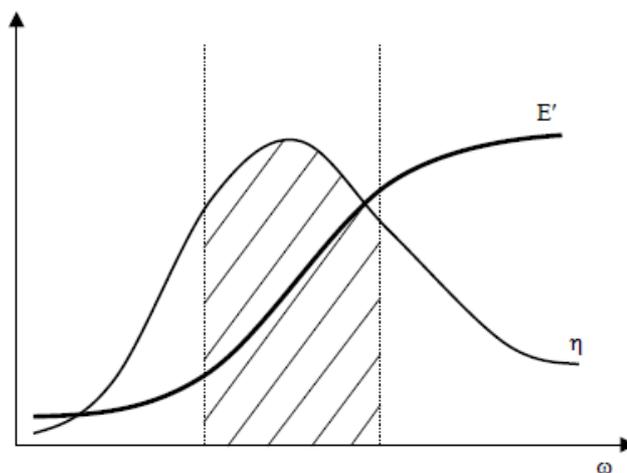


Figura 2.8 - Curvas do módulo de armazenamento e do fator de perda com a variação da frequência para materiais viscoelásticos (Santos, 2003).

Portanto, o melhor desempenho do material pode ser obtido em frequências contidas na região hachurada da Fig. (2.8) devido ao MVE apresentar valores mais elevados para o fator de perda.

### 2.3 PONDERAÇÃO COM RELAÇÃO AO AMORTECIMENTO VISCOELÁSTICO - MODELO MOLA-AMORTECEDOR

A descrição do modelo de tratamento de amortecimento viscoelástico fará uso da notação de rigidez complexa. Considera-se a resposta harmônica de um sistema amortecido na forma:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 e^{i\omega t}, \quad (2.21)$$

sendo  $i = \sqrt{-1}$ .

Assumindo uma solução  $x(t) = X e^{i\omega t}$ , sendo  $X$  uma constante, substituindo-a na Eq. (2.21) e dividindo ambos lados por  $e^{i\omega t}$ , tem-se:

$$[-m\omega^2 + (k + i\omega c)]X = F_0, \quad (2.22)$$

que pode ser escrita na forma:

$$\left[ -m\omega^2 + k \left( 1 + \frac{\omega c}{k} i \right) \right] X = F_0. \quad (2.23)$$

Faz-se  $k^* = k(1 + \eta i)$ , sendo  $\eta = \omega c/k$  o fator de perda e  $k^*$  o módulo de rigidez complexo. Portanto, obtêm-se:

$$[-m\omega^2 + k^*]X = F_0. \quad (2.24)$$

A parte imaginária da rigidez corresponde à dissipação de energia do sistema. Pode-se observar que o fator de perda depende da frequência, ou seja, da força de excitação externa do sistema.

O conceito de rigidez complexa desenvolvido pode ser representado por um modelo de Kelvin-Voigt, que corresponde a uma configuração mola-amortecedor descrita na Fig. (2.9):

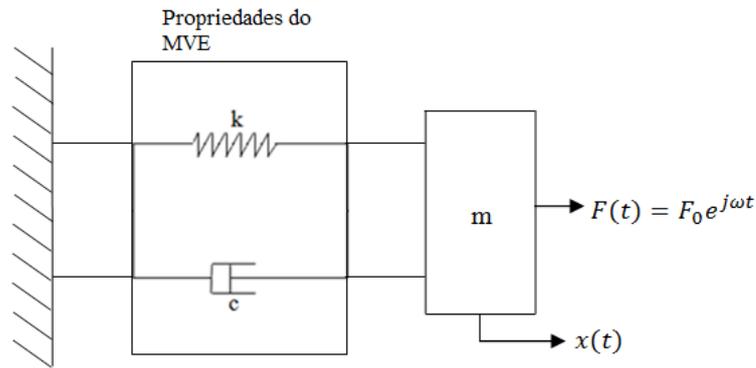


Figura 2.9 - Modelo de Kelvin-Voigt para um MVE.

Porém este modelo é válido somente em movimentos harmônicos estacionários.

No caso de uma viga em balanço, a rigidez associada com a deflexão da extremidade livre no sentido transversal está relacionada com o módulo de elasticidade por:

$$k = \frac{3EI}{l^3}, \quad (2.25)$$

sendo  $l$  o comprimento da viga e  $I$  o momento de inércia da área. Para um material viscoelástico tem-se:

$$k^* = \frac{3E^*I}{l^3} = \frac{3I}{l^3} E(1 + \eta i) = k(1 + \eta i). \quad (2.26)$$

Para uma viga bi-apoiada, composta por uma camada elástica e uma camada viscoelástica, com as propriedades descritas na Fig. (2.10):

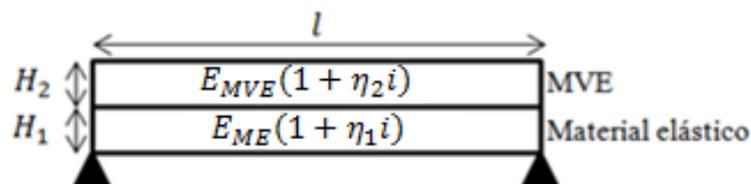


Figura 2.10 - Viga compósita bi-apoiada.

A relação entre a rigidez  $EI$  pela rigidez  $E_{ME}I_{ME}$  é dada por:

$$\frac{EI}{E_{ME}I_{ME}} = 1 + e_2 h_2^3 + 3(1 + h_2)^2 \frac{e_2 h_2}{1 + e_2 h_2}, \quad (2.27)$$

sendo  $e_2 = E_{MVE}/E_{ME}$  e  $h_2 = H_2/H_1$ .

A adição do MVE à estrutura aumenta a rigidez em uma pequena parcela, visto que usualmente  $h_2 < 1$ . O fator de perda da estrutura composta, assumindo que  $(e_2 h_2)^2 \ll e_2 h_2$ , é dado por:

$$\eta = \frac{e_2 h_2 (3 + 6h_2 + 4h_2^3 + 2e_2 h_2^3 + e_2^2 h_2^4)}{(1 + e_2 h_2)(1 + 4e_2 h_2 + 6e_2 h_2^2 + 4e_2 h_2^3 + e_2^2 h_2^4)} \eta_2. \quad (2.28)$$

## 2.4 FORMULAÇÃO VISCOELÁSTICA ESTRUTURAL

### 2.4.1 Equações de Movimento

Considerando um domínio  $\Omega_S$  e uma estrutura viscoelástica contida nela conforme a Fig. (2.11), a forma diferencial ou forte do problema de fronteira de equilíbrio de momento linear é expresso por:

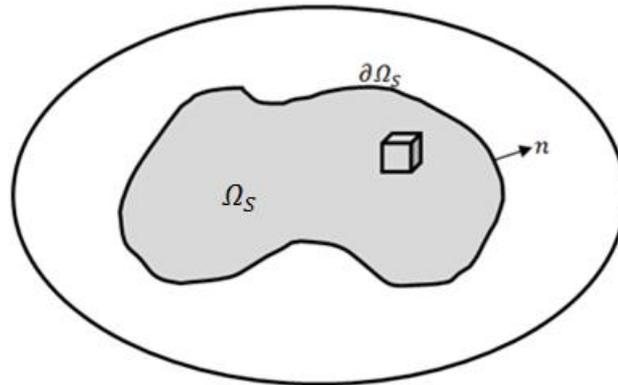


Figura 2.11 - Representação da estrutura viscoelástica

Encontrar  $u(x, t): \overline{\Omega_S} \times \overline{IT} \rightarrow \mathbb{R}^3$ , de tal forma que:

$$\nabla \cdot \sigma + b = \rho_S \ddot{u}; \quad \Omega_S \times IT, \quad (2.29)$$

sujeito a uma condição de fronteira essencial ou deslocamento:

$$u = \bar{u}(x, t); \quad \Gamma_u \times IT, \quad (2.30)$$

e a uma condição de fronteira natural ou de tração:

$$\sigma \cdot n = \bar{t}(x, t); \quad \Gamma_\sigma \times IT, \quad (2.31)$$

e a condições iniciais:

$$u(x, t_0) = u_0(x); \quad x \in \Omega_S, \quad (2.32)$$

e

$$\dot{u}(x, t_0) = \dot{u}_0(x); \quad x \in \Omega_S, \quad (2.33)$$

onde:

$$\Gamma_u \cap \Gamma_\sigma = \emptyset, \quad (2.34)$$

$$\Gamma_u \cup \Gamma_\sigma = \partial\Omega_S, \quad (2.35)$$

$$\Omega_S \cup \partial\Omega_S = \overline{\Omega_S}, \quad (2.36)$$

$$[t_0, t_1] = \overline{IT}, \quad (2.37)$$

$$]t_0, t_1[ = IT, \quad (2.38)$$

sendo  $\sigma$  o tensor tensão,  $b$  o vetor de força na estrutura por unidade de volume,  $\rho_S$  a densidade da massa estrutural,  $I$  o intervalo de tempo de interesse, e  $n$  o vetor normal relativo à fronteira da estrutura.

Não é feita a diferenciação entre o material e as coordenadas espaciais de acordo com a teoria de pequenas deformações, portanto,  $x$  representa apenas um vetor de posição de um estrutura Langrangiana ou Euleriana.

### 2.4.2 Equações Constitutivas

O comportamento da deformação de materiais viscoelásticos dependem do histórico de deformação e da tensão total, e não apenas do estado atual de tensão e deformação (Abboud, 1990). Portanto, a tensão atual é representada por uma integral de convolução do histórico da deformação. Teoricamente, seria necessário conhecer um arsenal completo da teoria não linear de termoviscoelasticidade para descrever de forma exata o comportamento de MVEs. Na prática, utiliza-se da teoria linear de viscoelasticidade e o princípio da superposição. Na viscoelasticidade linear, tensão e deformação estão sempre relacionadas através de um tensor de operador integral ou diferencial.

O principal impedimento para o tratamento numérico das formas de convolução é a necessidade de armazenamento do histórico de deformação que pode ocasionar em uma sobrecarga de memória do computador. Modelos constitutivos baseados no conceito de "memória de decaimento" têm sido propostos no intuito de resolver este problema. De forma equivalente, as formas de taxas podem ser baseadas em expansões truncadas do operador diferencial viscoelástico, tornando-os suscetíveis ao tratamento computacional.

A metodologia adotada considera que a estrutura possui equações constitutivas viscoelásticas gerais que invertem a elasticidade linear para escolhas de coeficientes de viscosidade adequados. Desta maneira, é possível modelar estruturas de duas fases do tipo elástica-viscoelástica de forma unificada.

As equações constitutivas tridimensionais para viscoelasticidade podem ser construídas através da combinação de elementos tridimensionais generalizados dos modelos de Maxwell e Kelvin-Voigt. Os elementos de Maxwell exibem um comportamento de fluência infinita ao ser aplicado um campo de tensões e, portanto, apropriados para modelos de fluido, enquanto os elementos do modelo de Kelvin-Voigt apresenta fluência finita, tais como os encontrados em sólidos viscoelásticos. Modelos estruturais sensíveis podem constituídos portanto da combinação de elementos de Kelvin-Voigt e molas elásticas generalizadas isoladas. No caso isotrópico, o fator desviatório e de dilatação são governados por equações diferenciais na forma geral:

$$P_d^{m_d}(S_s) = Q_d^{n_d}(\epsilon), \quad (2.39)$$

$$P_v^{m_v}(\sigma_v) = Q_v^{n_v}(\epsilon_v), \quad (2.40)$$

com os operadores diferenciais acima definidos por:

$$P_d^{m_d}(\cdot) = \sum_{k=0}^{m_d} (p_k)_d \frac{d^k(\cdot)}{dt^k}; \quad (p_0)_d = 1, \quad (2.41)$$

$$Q_d^{n_d}(\cdot) = \sum_{k=0}^{n_d} (q_k)_d \frac{d^k(\cdot)}{dt^k}, \quad (2.42)$$

$$P_v^{m_v}(\cdot) = \sum_{k=0}^{m_v} (p_k)_v \frac{d^k(\cdot)}{dt^k}; \quad (p_0)_v = 1, \quad (2.43)$$

e

$$Q_v^{n_v}(\cdot) = \sum_{k=0}^{n_v} (q_k)_v \frac{d^k(\cdot)}{dt^k}, \quad (2.44)$$

sendo

$$S_s = \sigma - \left(\frac{1}{3}\right) tr(\sigma)1 = \text{tensor desviatório da tensão};$$

$$\epsilon = \varepsilon - \left(\frac{1}{3}\right) tr(\varepsilon)1 = \text{tensor desviatório da deformação};$$

$$\sigma_v = \left(\frac{1}{3}\right) tr(\sigma) = \text{componente volumétrica ou de dilatação da tensão};$$

$$\epsilon_v = tr(\varepsilon) = \text{componente volumétrica ou de dilatação da deformação},$$

e  $(p_k)_d$ ,  $(p_k)_v$ ,  $(q_k)_d$  e  $(q_k)_v$  são constantes função das propriedades do material. Os índices  $d$  e  $v$  correspondem aos parâmetros do modelo viscoelástico referentes ao fator desviatório e volumétrico respectivamente.

### 2.4.3 Modelo para Análise Transiente

Na construção da formulação para análise transiente limita-se o problema a uma equação constitutiva baseado em um único elemento de Kelvin de dois parâmetros generalizado para cada uma das respostas volumétrica e desviatória ( $m_d = m_v = 0$  ;  $n_d = n_v = 1$ ). Neste caso:

$$\sigma = J_1 : \varepsilon + J_2 : \dot{\varepsilon} , \quad (2.45)$$

$$J_1 = \frac{1}{3}(3k' - 2\mu')1 \otimes 1 + 2\mu'\Pi , \quad (2.46)$$

e

$$J_2 = \frac{1}{3}(3v' - 2\eta')1 \otimes 1 + 2\eta'\Pi , \quad (2.47)$$

sendo  $1$  o tensor unitário de segunda ordem,  $\Pi$  o tensor unitário de quarta ordem,  $\mu'$  e  $k'$  os módulos de cisalhamento e volumétrico do elemento de Kelvin respectivamente, e  $\eta'$  e  $v'$  os coeficientes desviatório e de dilatação viscosa. Os tensores de quarta ordem  $J_1$  e  $J_2$  são por definição os tensores de resposta elástica e viscosa respectivamente.

O modelo restrito necessita de algoritmos de integração associados com taxas de equações constitutivas. Embora o modelo de Kelvin-Voigt mostre qualitativamente os fenômenos de fluência, relaxamento e elasticidade retardada, não é conhecida uma representação qualitativa satisfatória de materiais viscoelásticos.

A utilização de modelos viscoelásticos contínuos de ordem superior na análise transiente da interação fluido-estrutura ainda não é conhecida. Porém, no regime de alta frequência, onde a análise transiente é mais requisitada, um modelo de baixa ordem é suficientemente adequado. A determinação experimental dos parâmetros do modelo também impõe limites na complexidade do modelo.

#### 2.4.4 Modelo para Análise Harmônica

No domínio da frequência, o modelo viscoelástico utilizado baseia-se em uma cadeia de Kelvin generalizada com um número arbitrário de elementos. As equações são reformuladas nas seguintes formas:

$$\begin{aligned}\sigma_0 e^{-i\omega t} &= [J_1(\omega) + i\omega J_2(\omega)] : \varepsilon_0 e^{-i\omega t} \\ &= \left[ \frac{1}{3} (3k'(\omega) - 2g(\omega)) \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + 2g(\omega) \Pi \right] : \varepsilon_0 e^{-i\omega t},\end{aligned}\quad (2.48)$$

sendo  $\sigma_0, \varepsilon_0 \in \mathbb{C}^2$ ;  $J_1(\omega)$  e  $J_2(\omega) \in \mathbb{R}^2$ , e o módulo de cisalhamento e volumétrico complexos são dados, respectivamente, por:

$$G(\omega) = \frac{1}{\sum_j \frac{1}{\mu'_j + 2i\omega\eta'_j} + \frac{1}{\mu'_M}}; \quad G(\omega) \in \mathbb{C}, \quad (2.49)$$

e

$$K(\omega) = \frac{1}{\sum_l \frac{1}{k'_l + 2i\omega v'_l} + \frac{1}{k'_M}}; \quad K(\omega) \in \mathbb{C}. \quad (2.50)$$

A relação constitutiva produz uma contribuição da frequência tanto para a matriz de rigidez estrutural quanto para a matriz de amortecimento.

### 3 MÉTODOS DE DETERMINAÇÃO DE AMORTECIMENTO

*O capítulo 3 destina-se a discussão das técnicas de determinação de amortecimento: decaimento logarítmico e banda de meia potência, e dos procedimentos experimentais realizados.*

#### 3.1 MÉTODO DO DECREMENTO LOGARÍTMICO

Em um sistema linear, as amplitude das vibrações livres decaem exponencialmente, e quanto maior o amortecimento, mais rápido é o decaimento (Oliveira, 2006).

Um sistema oscilatório com um grau de liberdade e com amortecimento viscoso, ao ser excitado por um impulso, a sua resposta é conforme ilustrada na Fig. (3.1):

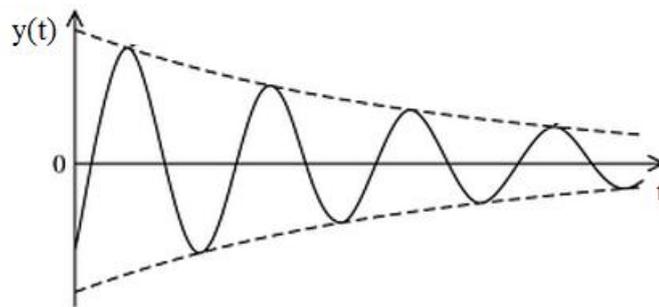


Figura 3.1 - Resposta ao impulso para um sistema de um grau de liberdade (Silva, 2007).

A frequência natural amortecida é dada pela Eq. (3.1):

$$\omega_d = \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}, \quad (3.1)$$

sendo  $\omega_0$  a frequência natural não amortecida, e  $\omega_d$  a frequência natural amortecida, ambas em *rad/s*.

A resposta do sistema é expressa pela Eq. (3.2):

$$y(t) = ye^{-\xi\omega_0 t} \sin(\omega_d t). \quad (3.2)$$

Sendo  $y$  a resposta no tempo  $t = t_n$ ,  $y_n$  a resposta no tempo  $t = t_n + 2\pi r/\omega_d$  e sendo  $r$  o número de ciclos, têm-se a partir da Eq. (3.2) que:

$$\frac{y_n}{y} = \exp\left(-\xi \frac{\omega_0}{\omega_d} 2\pi r\right). \quad (3.3)$$

Sendo  $A$  a magnitude de um ponto no decaimento da função  $y$  e  $A_n$  a magnitude  $r$  ciclos depois, têm-se:

$$\frac{A_n}{A} = \exp\left(-\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} 2\pi r\right). \quad (3.4)$$

Portanto, o decremento logarítmico  $\delta$  é obtido por:

$$\delta = \frac{1}{n} \ln\left(\frac{A}{A_n}\right) = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}. \quad (3.5)$$

Em termos do amortecimento  $\xi$ :

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{1 + (2\pi/\delta)^2}}. \quad (3.6)$$

### 3.2 FUNÇÃO RESPOSTA EM FREQUÊNCIA E MÉTODO DA LARGURA DE BANDA A MEIA POTÊNCIA

Considerando a excitação harmônica  $F(t) = F_0 e^{i\omega t}$ , sendo a Eq. (3.7) a equação de movimento:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 e^{i\omega t}, \quad (3.7)$$

e admitindo-se a solução particular:

$$x_p(t) = X e^{i\omega t}, \quad (3.8)$$

por substituição da Eq. (3.8) na Eq. (3.7), obtêm-se:

$$X = \frac{F_0}{(k - m\omega^2) + ic\omega}. \quad (3.9)$$

A Eq. (3.9) pode ser escrita na forma:

$$\frac{kX}{F_0} = \frac{1}{1 - r^2 + i2\xi r} \equiv H(i\omega), \quad (3.10)$$

sendo  $r = \omega/\omega_n$  a razão de frequências,  $\omega_n = \sqrt{k/m}$  a frequência natural não amortecida,  $\xi = c/c_c$  o amortecimento, e  $c$  e  $c_c$  as constantes de amortecimento e amortecimento crítico, respectivamente.

$H(i\omega)$  é conhecida como a resposta em frequência complexa do sistema e seu valor absoluto é dado por:

$$|H(i\omega)| = \left| \frac{kX}{F_0} \right| = \frac{1}{[(1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2]^{1/2}}. \quad (3.11)$$

A largura de banda, a meia potência, é definida como a largura da curva da resposta em frequência,  $\Delta\omega$ , quando a magnitude  $Q$  é  $1/\sqrt{2}$  vezes o valor do pico, conforme ilustra a Fig. (3.2) (Silva, 2007).

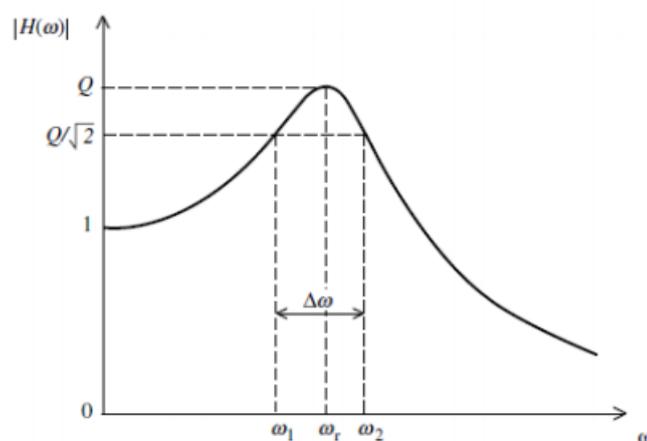


Figura 3.2 - Método da largura de banda para um sistema com um grau de liberdade (Silva, 2007).

O valor de  $\Delta\omega$  pode ser relacionado com o amortecimento a partir da Eq. (3.12):

$$\Delta\omega = 2\xi\omega_0 = 2\xi\omega_r. \quad (3.12)$$

Portanto, o amortecimento pode ser estimado a partir da relação:

$$\xi = \frac{1}{2} \frac{\Delta\omega}{\omega_r}. \quad (3.13)$$

### 3.3 RESPOSTA DE UM SISTEMA AMORTECIDO A MOVIMENTO HARMÔNICO DE BASE

Pode ocorrer da base ou suporte de um sistema massa-mola-amortecedor sofrer movimento harmônico. Seja  $y(t)$  o deslocamento da base e  $x(t)$  o deslocamento da massa em relação a sua posição de equilíbrio estático no tempo, obtêm-se a seguinte equação de movimento:

$$m\ddot{x} + c(\dot{x} - \dot{y}) + k(x - y) = 0. \quad (3.14)$$

Se  $y(t) = Y\text{sen}(\omega t)$ , a resposta em regime permanente da massa,  $x_p(t)$ , pode ser expressa pela Eq. (3.15).

$$x_p(t) = \frac{Y\sqrt{k^2 + (c\omega)^2}}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}} \text{sen}(\omega t - \phi_1 - \alpha), \quad (3.15)$$

sendo

$$\phi_1 = \text{tg}^{-1}\left(\frac{c\omega}{k - m\omega^2}\right), \quad (3.16)$$

e

$$\alpha = \text{tg}^{-1}\left(\frac{c\omega}{k}\right). \quad (3.17)$$

Utilizando identidades trigonométricas, a Eq. (3.15) pode ser reescrita como:

$$x_p(t) = X \text{sen}(\omega t - \phi). \quad (3.18)$$

Portanto,

$$\frac{X}{Y} = \left[ \frac{k^2 + (c\omega)^2}{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2} \right]^{1/2} = \left[ \frac{1 + (2\xi r)^2}{(1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2} \right]^{1/2}. \quad (3.19)$$

A razão entre a amplitude da resposta e a do movimento da base é denominada transmissibilidade de deslocamento.

### 3.4 SONELASTIC® -IMPULSE EXCITATION TECHNIQUE

Sonelastic® é uma linha de soluções em instrumentação para a caracterização não destrutiva dos módulos de elasticidade e do amortecimento de materiais a partir das frequências naturais de vibração obtidas pela técnica de excitação por impulso (© 2009-2013 ATCP Engenharia Física).

Para geometrias simples, existe uma relação unívoca entre as frequências naturais de vibração com as dimensões, massa e os módulos de elasticidade do corpo de prova (© 2009-2013 ATCP Engenharia Física).

O corpo de prova deve ser posicionado e apoiado por um suporte, e uma leve pancada mecânica é realizada por um pulsador eletromagnético. Seleciona-se o tipo de geometria no software e insere-se os dados de comprimento, largura, espessura e massa (para uma viga de seção retangular), e seus respectivos erros associados. A resposta acústica é captada por um captador acústico e processada pelo software (tecnologia PC Based) ou hardware (tecnologia Stand Alone), que calcula automaticamente os módulos elásticos e o amortecimento (que é calculado pelo método do decremento logarítmico a partir da taxa de atenuação do sinal). A Fig. (3.3) ilustra o princípio de funcionamento do Sonelastic®.

As vantagens deste equipamento são que a metodologia é não destrutiva, é dez vezes mais preciso que ensaios mecânicos, o processo de medição é rápido e prático e permite caracterizações em função da temperatura (© 2009-2013 ATCP Engenharia Física).

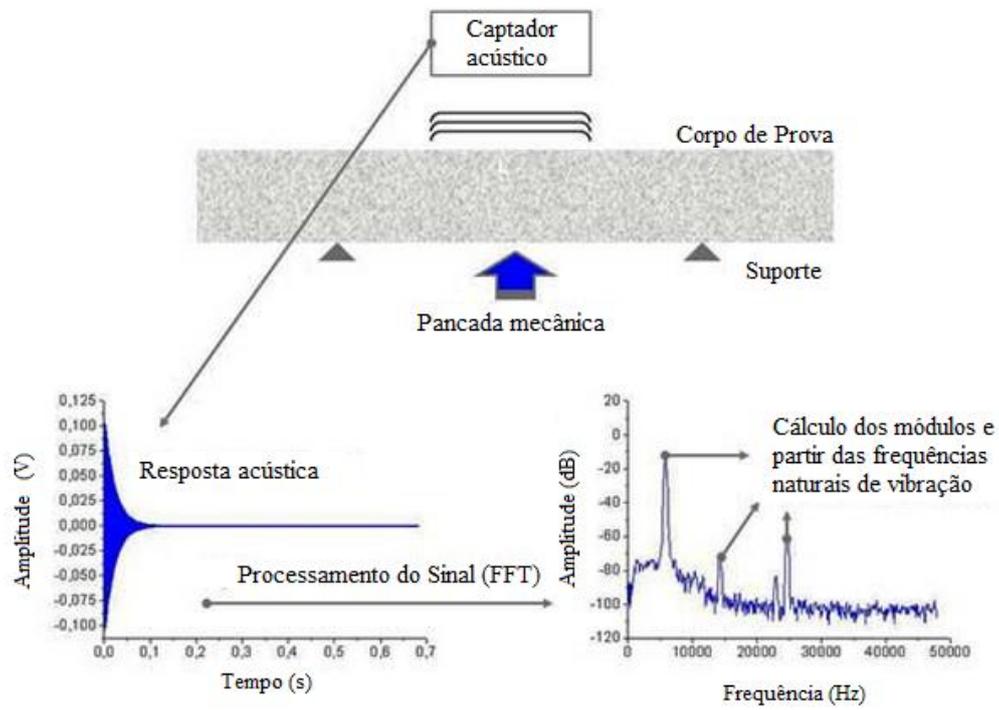


Figura 3.3 - Princípio de funcionamento do Sonelastic® (© 2009-2013 ATPC Engenharia Física).

## 4 PROCEDIMENTO EXPERIMENTAL E RESULTADOS

*No capítulo 4 são descritos os procedimentos experimentais, Sonelastic® e excitação harmônica de viga engastada, utilizados para determinação do amortecimento das vigas e seus respectivos resultados.*

### 4.1 SONELASTIC®

#### 4.1.1 Corpos de prova

O experimento consiste da determinação do amortecimento de vigas compostas por uma camada de material elástico (alumínio) coberta parcialmente por uma camada de material viscoelástico, conforme ilustrado na Fig. (4.1).

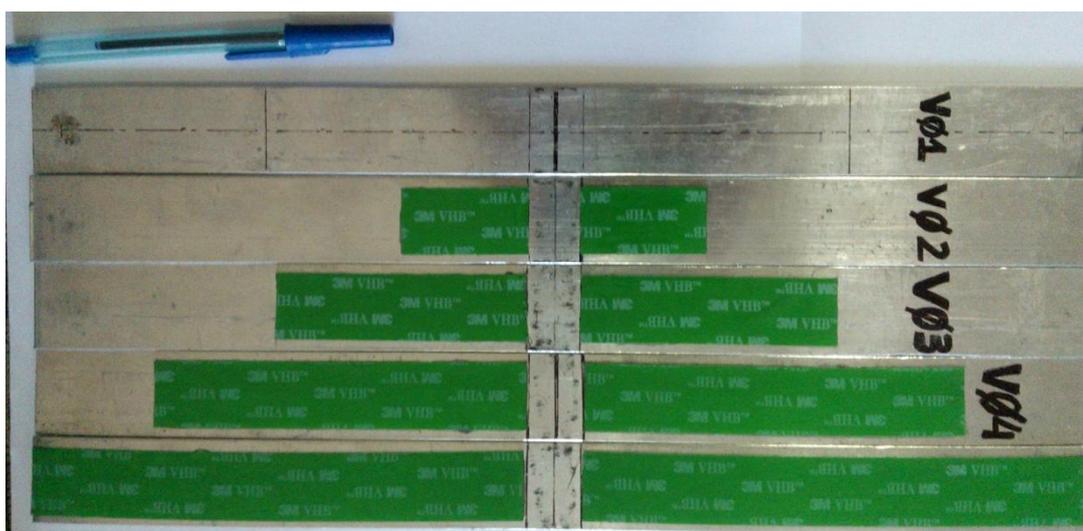


Figura 4.1 - Vigas ensaiadas.

A viga 1 é composta somente por alumínio. As dimensões e a massa das vigas estão descritas na Tab. (4.1). Para realizar as medições de largura e espessura das vigas, utilizou-se um paquímetro metálico Disma de 200mm com precisão de  $\pm 0,05\text{ mm}$ , e o comprimento foi medido com uma régua de precisão Famastil Stainless Hardend com 100 cm e precisão de 1 mm. A massa foi medida em uma balança digital Belmark 220 ( Máx 220 g e Min 100 g) com precisão de 0,001 g. Foram realizadas 5 medições de cada parâmetro e calculadas suas médias e erros associados.

Tabela 4.1 - Parâmetros das vigas em milímetros e gramas.

| Viga | Comprimento   | Largura      | Espessura   | Massa          |
|------|---------------|--------------|-------------|----------------|
| 1    | 391,20 ± 1,34 | 32,60 ± 0,12 | 3,02 ± 0,05 | 101,386 ± 0,00 |
| 2    | 391,60 ± 1,05 | 32,64 ± 0,13 | 3,03 ± 0,05 | 104,521 ± 0,00 |
| 3    | 390,40 ± 1,05 | 32,57 ± 0,18 | 3,01 ± 0,05 | 106,991 ± 0,00 |
| 4    | 389,80 ± 0,95 | 32,53 ± 0,08 | 3,02 ± 0,05 | 110,081 ± 0,00 |
| 5    | 391,00 ± 0,50 | 32,62 ± 0,08 | 3,05 ± 0,06 | 111,724 ± 0,00 |

As camadas viscoelásticas das vigas foram divididas em duas partes, conforme pode se observar na Fig. (4.1), devido a fixação no *shaker* que foi realizada no centro da viga. Cada parte da camada possui as dimensões descritas na Tab. (4.2).

Tabela 4.2 - Parâmetros de cada camada de material viscoelásticos.

| Viga | Comprimento da camada[mm] | Largura da camada[mm] | Espessura da camada[mm] |
|------|---------------------------|-----------------------|-------------------------|
| 2    | 46,0                      | 25,0                  | 1,0                     |
| 3    | 92,0                      | 25,0                  | 1,0                     |
| 4    | 138,0                     | 25,0                  | 1,0                     |
| 5    | 184,0                     | 25,0                  | 1,0                     |

Realizou-se 10 medições da viga de alumínio utilizando o Sonelastic<sup>®</sup>, para obtenção do módulo de elasticidade do material.

#### 4.1.2 Equipamentos utilizados

Utilizou-se o suporte Modelo SA-BC para barras retangulares e cilíndricas, composto basicamente pelos itens descritos na Fig. (4.2) e especificações contidas na Tab. (4.3), e um pulsador eletromagnético Sonelastic<sup>®</sup> IED, Fig. (4.3), constituído por um *driver* e por um atuador eletromagnético que possui dois modos de operação: remoto e manual. Utilizou-se o modo remoto que é controlado e configurado via USB

pele software Sonelastic<sup>®</sup>. Com o IED é possível controlar com precisão a amplitude e o tempo de duração do pulso elétrico aplicado a bobina do atuador eletromagnético, garantindo a reprodutibilidade da excitação por impulso (© 2009-2013 ATCP Engenharia Física).

|   |   |
|---|---|
| 01- Base de Sustentação;                          | 11- Captador acústico (opcional);               |
| 02- Sistema Pulsador Sonelastic IED (opcional);   | 12- Corpo de Prova Cilíndrico;                  |
| 03- Terminal Deslizante do Fio;                   | 13- Haste Lateral Deslizante;                   |
| 04- Mola de Tração do Fio;                        | 14- Haste de Apoio Deslizante;                  |
| 05- Fio ou Cabo de Apoio (conforme configuração); | 15- Sistema Pulsador Sonelastic IED (opcional); |
| 06- Fio ou Cabo de Apoio (conforme configuração); | 16- Pedestal do Pulsador (opcional);            |
| 07- Haste de Apoio Fixa;                          | 17- Base de Sustentação Móvel para Pulsador;    |
| 08- Anel de Apoio Deslizante;                     | 18- Pé Nivelador de Borracha;                   |
| 09- Cabo de Segurança;                            | 19- Suporte do Painel de Proteção e Segurança;  |
| 10- Pedestal do Captador acústico (opcional);     | 20- Painel de Proteção e Segurança              |

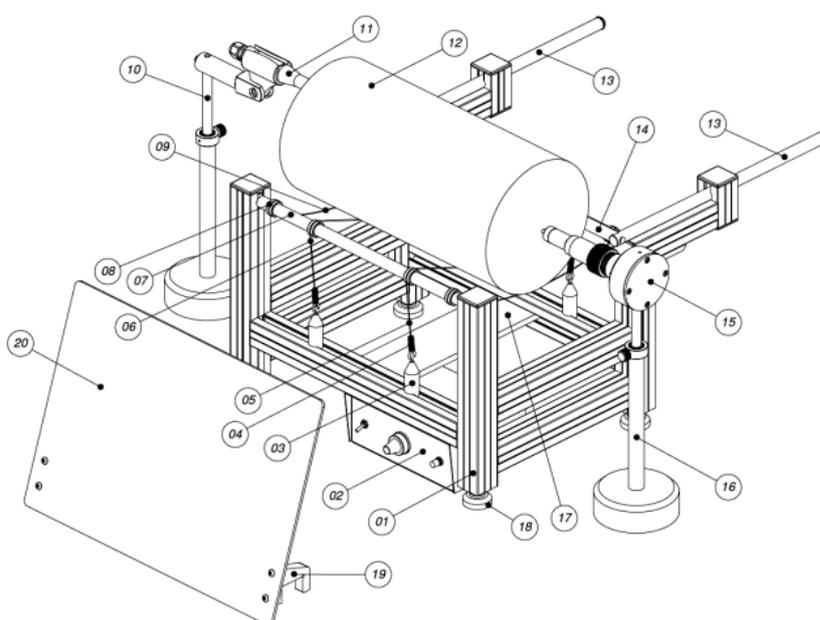


Figura 4.2 - Componentes do suporte Modelo SA-BC (© 2009-2013 ATCP Engenharia Física).

Tabela 4.3 - Especificações do suporte Modelo SA-BC (© 2009-2013 ATCP Engenharia Física).

|  |                |
|--|----------------|
| Dimensões máximas do corpo de prova tipo "cilindro" ( $L \times \phi$ )    | 400x170 mm     |
| Dimensões mínimas do corpo de prova tipo "cilindro" ( $L \times \phi$ )    | 50x6 mm        |
| Dimensões máximas do corpo de prova tipo "barra" ( $L \times P \times A$ ) | 400x170x170 mm |
| Dimensões mínimas do corpo de prova tipo "barra" ( $L \times P \times A$ ) | 50x6x6 mm      |
| Peso máximo do corpo de prova  | 30 kg          |



Figura 4.3 - Pulsador eletromagnético automático (© 2009-2013 ATCP Engenharia Física).

Utilizou-se um captador direcional capacitivo CA-CP-PD, Fig. (4.4), para pedestal para frequências na faixa audível (até 20 kHz), indicado para caracterização de corpos de prova de médio e grande porte e para aplicações onde o ruído pode interferir na captura da resposta acústica.



Figura 4.4 - Captador acústico direcional acoplado a um pedestal ajustável (© 2009-2013 ATCP Engenharia Física).

#### 4.1.3 Procedimento Experimental

O corpo de prova é posicionado no suporte sobre os fios, simulando uma viga livre-livre. O microfone é posicionado na extremidade da viga e o pulsador

automático é colocado no suporte de forma a situar-se abaixo da viga, conforme ilustrado na Fig. (4.5).

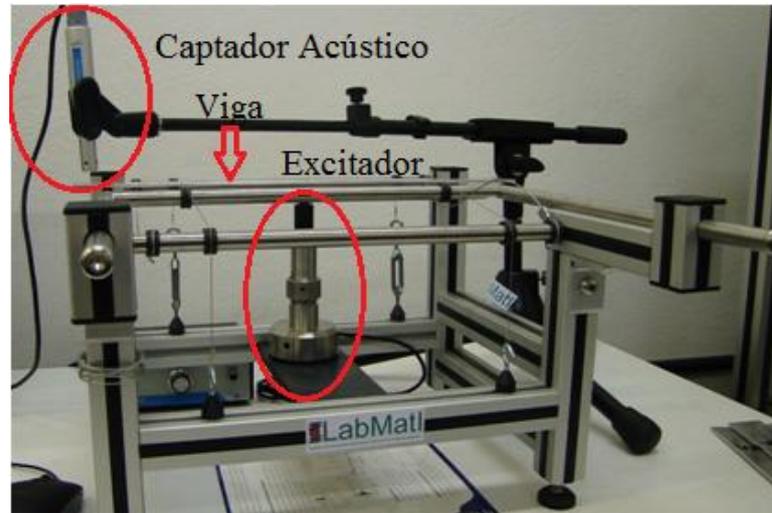


Figura 4.5 - Posicionamento do captador e do excitador.

Durante os ensaios percebeu-se a influência dos fios de apoio do suporte ao tensioná-los, havendo variação das propriedades de amortecimento, pois estes funcionam como uma mola, adicionando rigidez à estrutura. Portanto, posicionou-se o corpo de prova no suporte de forma que os fios de apoio localizem-se nos nós do primeiro modo de vibração, pois neles não ocorrem deslocamentos, diminuindo assim a sua influência. Pode-se observar na Fig. (4.6) que os nós no primeiro modo de vibração ocorrem em cerca de  $0,224L$  e  $0,776L$  da viga.

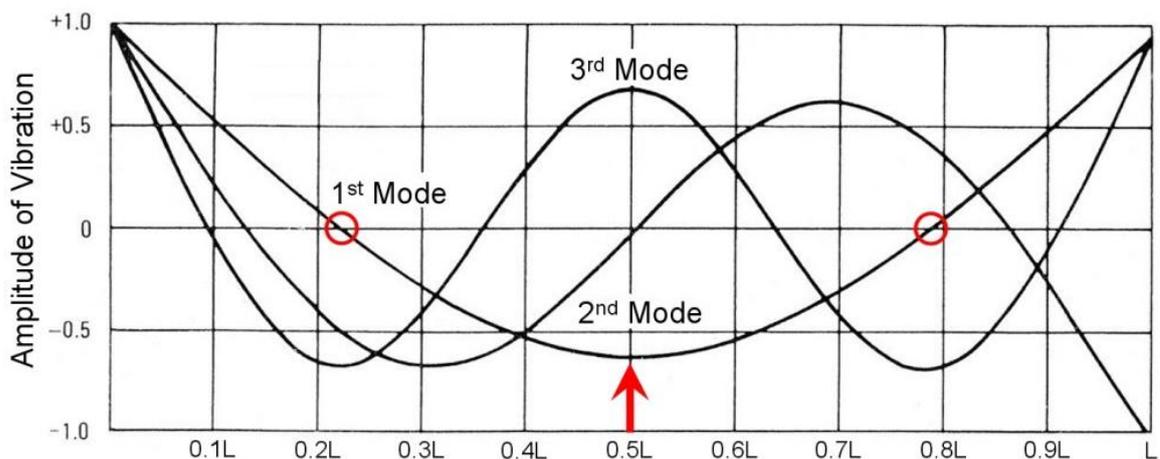


Figura 4.6 - Modos de vibração de uma viga livre-livre (Blevins, 1995).

Após posicionar o corpo de prova, carrega-se o *software*, escolhe-se o tipo de geometria do corpo de prova e insere-se as dimensões e massas e suas respectivas incertezas. Em seguida é necessário ajustar a duração do sinal e o tipo de análise a ser realizada. Utilizou-se a duração do sinal igual *2,73 segundos* e uma análise do tipo "*Single Flexural*" que possibilita o cálculo somente do Módulo de Young, visto que o interesse está na propriedades de amortecimento da viga na primeira frequência natural de flexão.

Posteriormente, seleciona-se o modo automático do atuador, de forma que sejam realizadas dez medições de cada viga e os resultados exportados para uma tabela, que posteriormente é lida e trabalhada no programa Microsoft Office Excel, e os gráficos são desenvolvidos em Matlab<sup>®</sup>.

Os ensaios foram realizados em temperatura ambiente, cerca de  $25^{\circ}C$  e umidade relativa do ar por volta de 40 %.

#### 4.1.4 Resultados

Os valores da primeira frequência natural, do amortecimento e do amortecimento na primeira frequência natural das vigas estão ilustrados nas Fig. (4.7) a (4.9) e expressos na Tab. (4.4).

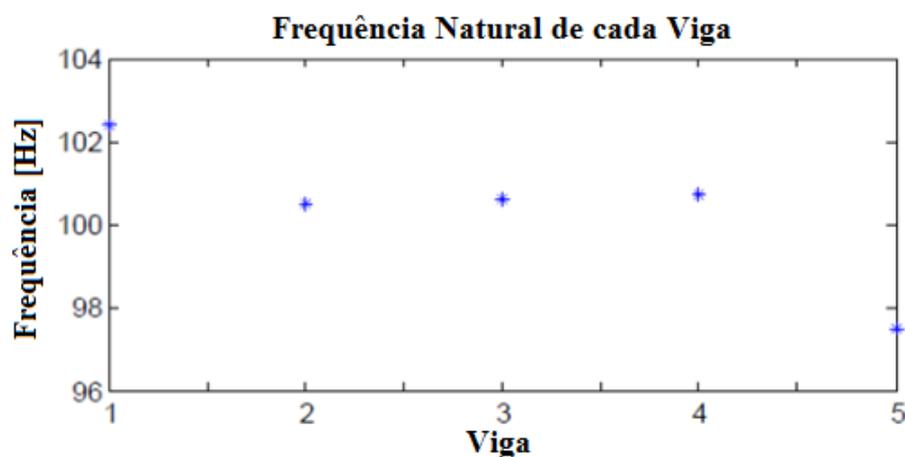


Figura 4.7 - Primeiras frequências naturais de flexão das vigas ensaiadas.

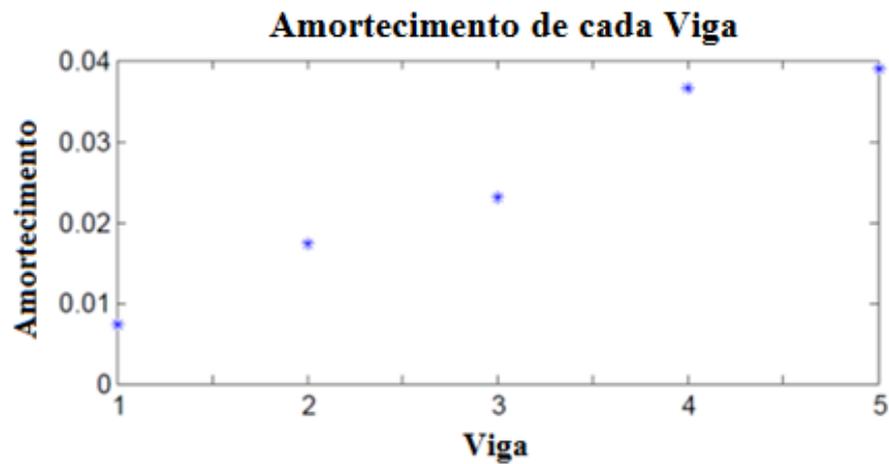


Figura 4.8 - Resultado do amortecimento global para vigas ensaiadas.

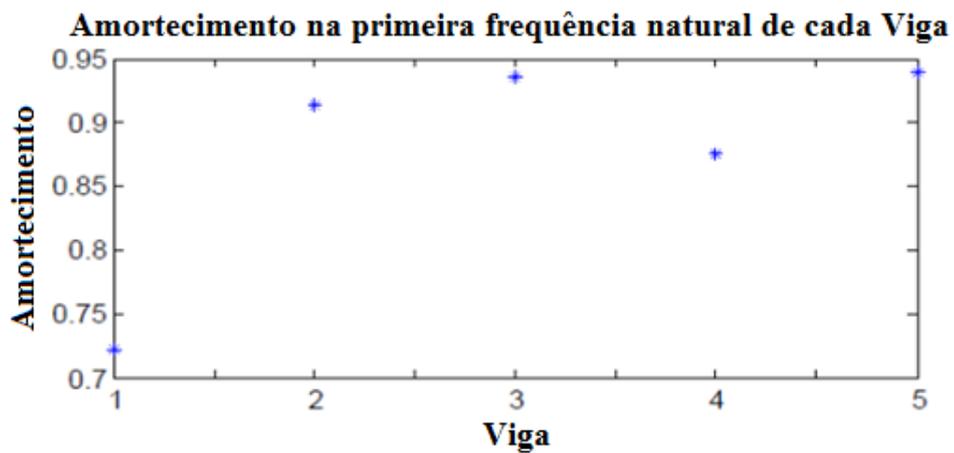


Figura 4.9 - Resultados do amortecimento na primeira frequência natural das vigas ensaiadas.

Tabela 4.4 - Frequências Naturais e valores de amortecimento obtidos.

| Viga | Frequência [Hz]       | Amortecimento Global $\xi$ | Amortecimento na frequência natural |
|------|-----------------------|----------------------------|-------------------------------------|
| 1    | $102,3805 \pm 0,0077$ | $0,0073 \pm 0,000093426$   | $0,0007221 \pm 0,0000032253$        |
| 2    | $100,5112 \pm 0,0106$ | $0,0173 \pm 0,00030324$    | $0,0009135 \pm 0,0000056139$        |
| 3    | $100,5997 \pm 0,0212$ | $0,0230 \pm 0,00029696$    | $0,0009360 \pm 0,0000065473$        |
| 4    | $100,7130 \pm 0,0128$ | $0,0366 \pm 0,0021$        | $0,0008755 \pm 0,0000031447$        |
| 5    | $97,5121 \pm 0,0257$  | $0,0389 \pm 0,0012$        | $0,0009388 \pm 0,0000001321$        |

Os gráficos dos valores dos amortecimentos e das frequências naturais de cada viga ensaiada dez vezes encontra-se no Anexo I deste trabalho.

#### **4.1.5 Análise dos Resultados**

Os valores da primeira frequência natural das vigas obtidas pelo Sonelastic<sup>®</sup> apresentam o comportamento esperado, devido ao aumento de massa, esperava-se que a frequência diminuísse. Porém, pode-se observar que os valores para as vigas 2, 3 e 4 são próximos, e os valores das frequências da segunda e da terceira viga são inferiores aos da quarta viga. Portanto, como aumento de massa devido à adição de MVE é baixo, há pouca variação dos valores das frequências naturais das vigas.

O amortecimento global aumentou com o acréscimo de material viscoelástico, porém, o amortecimento na frequência natural apresentou variação no comportamento. A redução de amortecimento nas vigas 4 e 5 pode ter ocorrido devido ao apoio do MVE nos fios do suporte, visto que o contato das vigas 1, 2 e 3 é entre o alumínio e os fios. Porém, é necessário um estudo mais aprofundado para confirmar esta suspeita. Outro fator que pode ser considerado é que, a partir de determinado ponto, a adição de MVE não possui efeitos significativos no amortecimento da estrutura, ou seja, a viga 3 possui mais amortecimento que a viga 5 e é mais leve e tem menos MVE.

## **4.2 EXCITAÇÃO HARMÔNICA DE VIGA ENGASTADA**

### **4.2.1 Corpos de prova**

Os corpos de prova utilizados no experimentos são os mesmos utilizados no procedimento do Sonelastic<sup>®</sup>. Porém, a fixação dos mesmos no *Shaker* (excitador eletrodinâmico) é feita no centro da viga, simulando duas vigas engastadas. Portanto, o comprimento útil das vigas reduziram-se para 186 mm.

### **4.2.2 Equipamentos utilizados**

Utilizou-se um excitador eletrodinâmico (*Shaker*), modelo ET-127 e um amplificador de potência PA-141, ambos da *Labworks Inc.*

O acelerômetro utilizado é piezelétrico, modelo 352C33 da PCB PIEZOTRONICS Inc., com sensibilidade igual a  $10,25 \text{ mV/m/s}^2$ . Os dados do acelerômetro foram processados pela placa NI 9233, AI  $\pm 5 \text{ V}$  da *National Instruments*.

#### 4.2.3 Procedimento Experimental

As vigas foram montadas em um suporte e fixadas ao *Shaker* conforme ilustrado na Fig. (4.10). Posicionou-se um acelerômetro a  $15 \text{ mm}$  de cada extremidade da viga, porém, um foi utilizado somente como contra-peso.

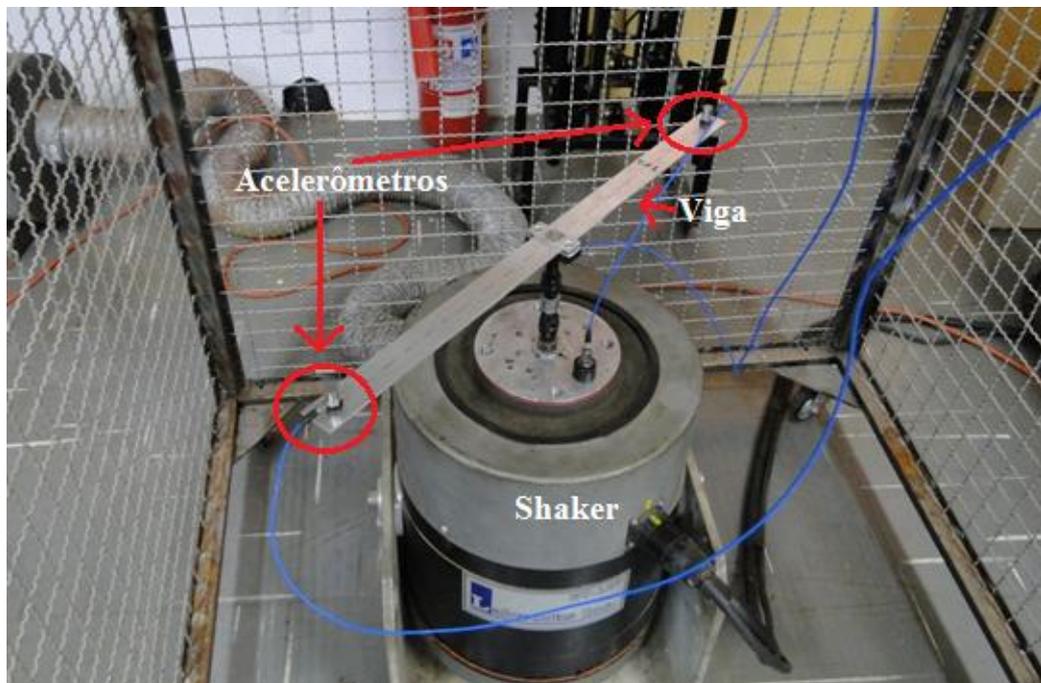


Figura 4.10 - Montagem do experimento.

Coletou-se dados de aceleração e força, adquiridos pelo acelerômetro e pela célula de carga, e processados e gravados no LabVIEW - *Laboratory Virtual Instrument Engineering Workbench*, conforme o diagrama de blocos ilustrado na Fig. (4.11).

Excitou-se as vigas harmonicamente através do *shaker* de 45 a 60 Hz em passos de 1 Hz, com uma amplitude de  $0,254 \text{ mm}$ .

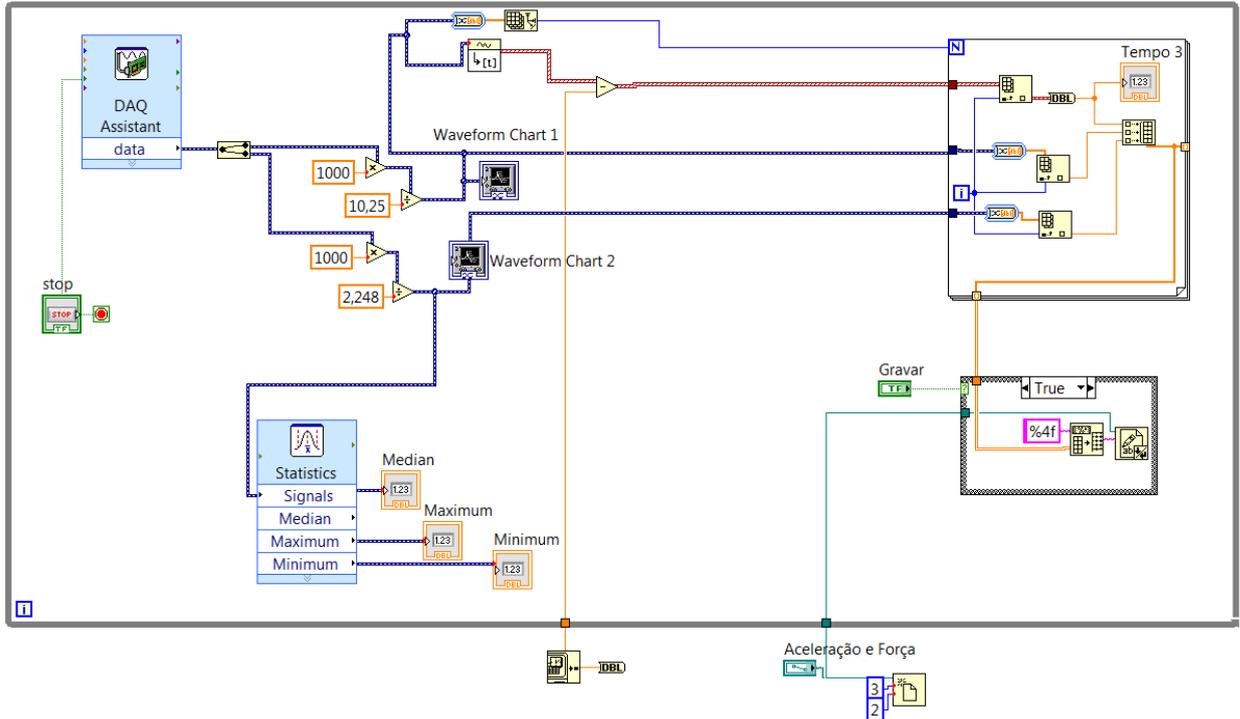


Figura 4.11 - Diagrama de blocos do LabVIEW.

#### 4.2.4 Resultados

A análise a partir da Função de Resposta em Frequência não foi possível, pois os dados de força coletados possuem influência da excitação do *shaker* e da resposta da viga. Para uma análise correta da FRF, deveria medir-se a aceleração da base de excitação. Portanto, utilizou-se a função de transmissibilidade de deslocamentos para o cálculo do amortecimento.

O deslocamento da viga,  $x$ , na posição do acelerômetro é calculado a partir da relação:

$$x = \frac{\ddot{x}}{\omega^2}. \quad (3.20)$$

A partir dos dados de aceleração obtidos e conhecido o deslocamento da base, calcula-se o valor da função de transmissibilidade de deslocamento. As curvas de transmissibilidade de deslocamento pela razão de frequência obtidas para as vigas estão ilustradas na Fig.(4.12).

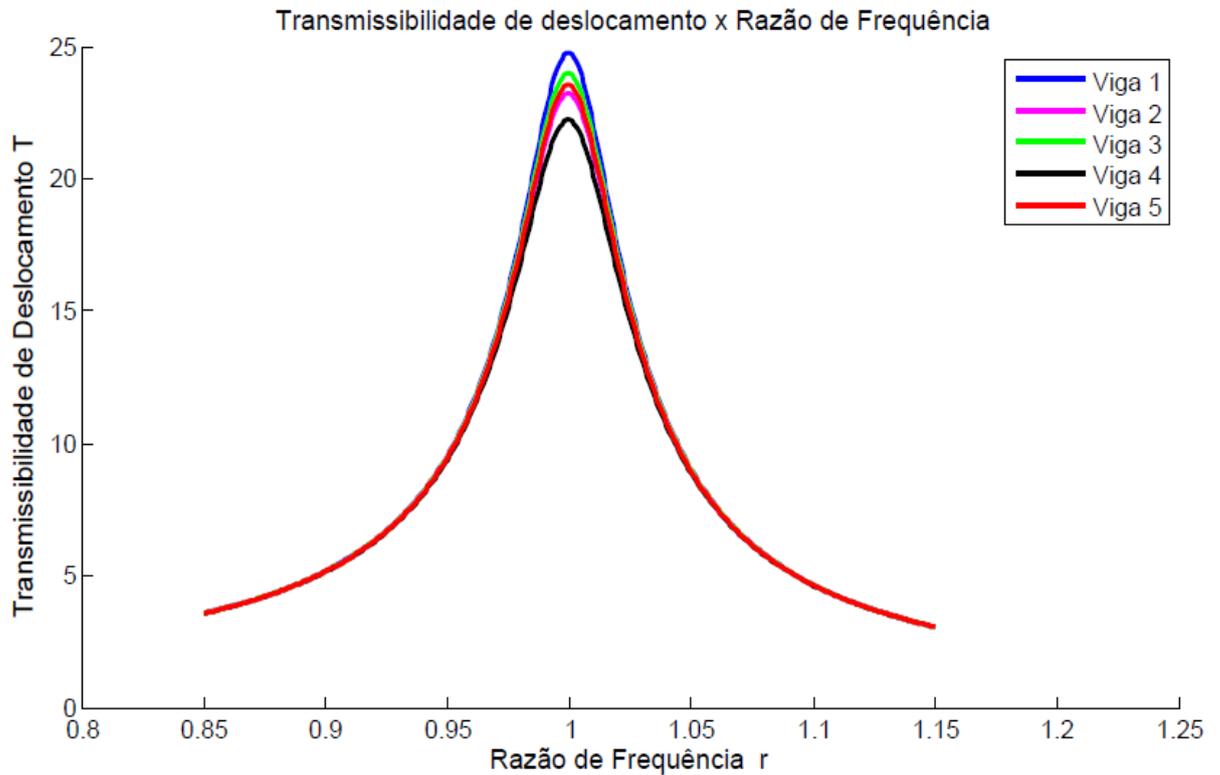


Figura 4.12 - Gráfico de Transmissibilidade de Deslocamento em função da razão de frequências para as vigas ensaiadas.

Os pontos de meia potência normalizados, que correspondem aos pontos onde os valores da transmissibilidade são  $1/\sqrt{2}$  vezes o valor da amplitude máxima,  $R_1$  e  $R_2$ , e os resultados do amortecimento para as vigas estão expressos na Tab. (4.5).

Tabela 4.5 - Pontos de meia potência e amortecimento das vigas ensaiadas.

| Vigas | $R_1$ | $R_2$ | $\xi$  |
|-------|-------|-------|--------|
| 1     | 0,979 | 1,02  | 0,0205 |
| 2     | 0,978 | 1,021 | 0,0215 |
| 3     | 0,979 | 1,021 | 0,0210 |
| 4     | 0,977 | 1,022 | 0,0225 |
| 5     | 0,978 | 1,021 | 0,0215 |

Os valores de amortecimento obtidos para cada viga estão ilustrados na Fig. (4.13).

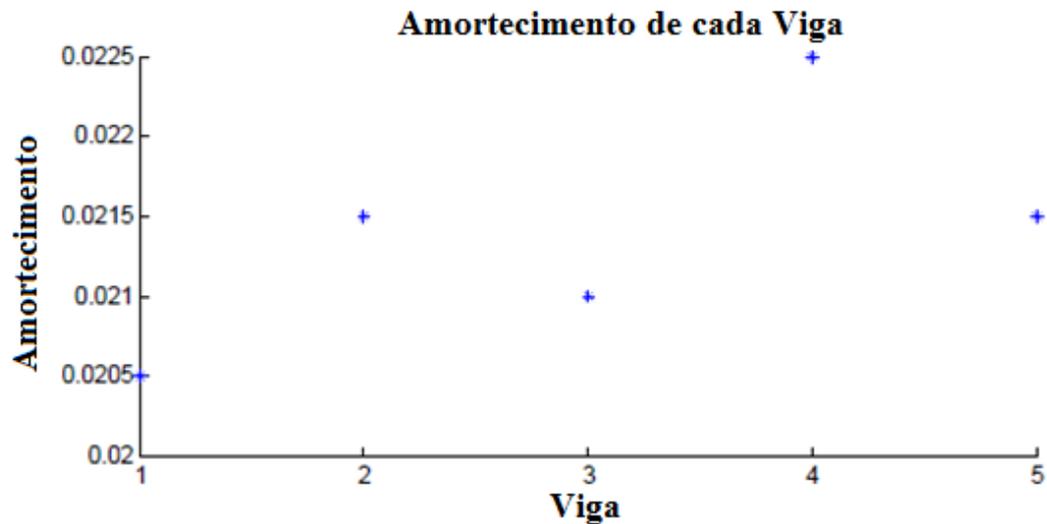


Figura 4.13 - Gráfico de Amortecimento para as vigas ensaiadas.

#### 4.2.5 Análise dos Resultados

Os valores de amortecimento na frequência natural não apresentaram um comportamento crescente com a adição de MVE. Porém, na configuração engastada, a viga que apresentou maior amortecimento foi a 4, e a viga 5 apresentou mesmo amortecimento que a viga 2. Novamente, pode-se observar que o maior amortecimento não é o da viga que possui mais MVE.

Como o passo de frequência utilizado é alto, ou seja, analisou-se apenas 15 valores de frequência, a interpolação da curva de Transmissibilidade de Deslocamento possui uma baixa precisão, afetando diretamente nos resultados de amortecimento.

## 5 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

*Este último capítulo apresenta as conclusões deste trabalho e as perspectivas para trabalhos futuros.*

Este trabalho objetivou a determinação do amortecimento de vigas de alumínio cobertas parcialmente por camadas de material viscoelástico. O modelo foi reduzido a um grau de liberdade, analisando-se apenas as propriedades na primeira frequência natural das vigas, desconsiderando-se os efeitos de temperatura.

Nos resultados obtidos a partir do Sonelastic<sup>®</sup>, através da técnica de excitação por impulso, e a partir da excitação harmônica das vigas engastadas pode-se observar o aumento do amortecimento com a adição de MVE. Porém, em ambos casos, a viga que possui a maior camada de MVE não foi a que apresentou maior amortecimento.

No experimento realizado com o Sonelastic<sup>®</sup>, suspeita-se que os fios de apoio podem ter influenciado nos resultados, visto que a parte das vigas 4 e 5 que estavam em contato com os fios era a camada VE. Porém, é necessário um estudo mais aprofundado para confirmar esta influência.

Na excitação harmônica das vigas, analisou-se uma pequena faixa de frequência, de 45 Hz a 60 Hz, em passos de 1 Hz, portanto, a interpolação dos dados, afim de obter-se a função de transmissibilidade de deslocamento, e os valores das frequências naturais, afetam os resultados de amortecimento.

Portanto, para melhores conclusões sobre a influência da quantidade de material viscoelástico aplicado na viga, é necessário realizar novos experimentos, obtendo a FRF da viga engastada melhor discretizada, e realizar alguns testes para verificar a possível influência dos cabos do suporte do Sonelastic<sup>®</sup>.

Em trabalhos futuros, pretende-se avaliar a relação entre quantidade de MVE e amortecimento, buscando otimizar a aplicação destes materiais, de forma a obter o amortecimento desejado com a menor quantidade possível de MVE. Em seguida, estudar a inclusão de materiais viscoelásticos em placas e considerar o efeito da temperatura sobre o amortecimento, e ampliar o modelo para uma cavidade acústica, simulando o habitáculo veicular e a cavidade motora, analisando a transmissibilidade de vibrações para o ocupante do veículo e níveis de ruídos.

## Bibliografia

ABBOUD, N. N., A mixed finite element formulation for the transient and harmonic exterior fluid-structure interaction problem, Thesis of PhD, Stanford University, 1990.

ATCP Engenharia Física, Manual de Instalação e Operação: Suporte Ajustável para Barras Retangulares e Cilíndricas Modelo SA-BC, São Carlos, 2011.

ATCP Engenharia Física, Guia de operação Sonelastic<sup>®</sup>, São Carlos, 2011.

AVILA, S. M. Controle híbrido para atenuação de vibrações em edifícios, Tese de Doutorado, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2002.

BARBOSA, F. S. Modelagem computacional de estruturas com camadas viscoelásticas amortecedoras, Tese de Doutorado, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2000.

BLEVINS, R. D., Formulas for Natural Frequency and Mode Shape, Melbourn, 1995.

BRATTI, G. Determinação do amortecimento de painel aeronáutico com material viscoelástico, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2011.

COSSOLINO, L. C. , PEREIRA, A. H. A., ATCP Engenharia Física, Amortecimento: Classificação e métodos de determinação, São Carlos, 2010.

COSTI, F. Metodologia numérica aplicada a viscoelasticidade em polímeros, Dissertação de Mestrado, Universidade Católica do Paraná, Curitiba, 2006.

FERREIRA, A. C., Comparação analítica numérica de cavidades acústicas e vibro-acústicas, Projeto de Graduação, Universidade de Brasília - Faculdade de Tecnologia, 2012.

INMAN, D. J. Engineering Vibration, second edition, Virginia Polytechnic and State University, 2001.

JONES, D., Handbook of Viscoelastic Vibration Dampng, Chichester: Wiley, 2001.

KADERLI, F., GOMES, H. M. Análise do conforto quanto à vibração em automóveis de passeio, Revista Liberato, Novo Hamburgo, v.12, n. 18, p. 107-206, 2011.

KORUK, H., SANLITURK, K. Y. On measuring dynamic properties of damping materials using Oberst bem method, 10th Biennial Conference on Engineering Systems Design and Analysis, Istanbul, Turkey, 2010.

KUMAR, B. Ansys and analytical modeling of elastic-viscoelastic-elastic sandwich beams, Tennessee Technological University, Tennessee, 2010.

MEAD, D. J., MARKUS, S. The Forced Vibration of Three-Layer, Damped Sandwich Beam with Arbitrary Boundary Conditions, Journal of Sound and Vibrations, vol. 10, 1969.

MEDONÇA, A. C., SOUZA, W. S., SOEIRO, N. S., MELO, G. V. Caracterização de materiais viscoelásticos pelo método da viga vibrante, I workshop de vibração e acústica da região norte, Tucuruí, 2011.

MORAIS, M. V. G. Modelagens numéricas pelo método dos elementos finitos em problemas de interação fluido-estrutura, Dissertação de Mestrado em Estruturas, Universidade de Brasília - Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Distrito Federal, 2000.

OBERST, H., FRANKENFELD, K., Uber die Dämpfung der Biegeschwingungen Blech durch festhaftende Belage, *Acustica*, vol. 2, 1952.

OLIVEIRA, A. Adição de amortecimento estrutural usando materiais viscoelásticos, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2006.

RAO, S. *Vibrações Mecânicas*, quarta edição, São Paulo, 2009.

RILEY, M. A., REINHORN, A. M., NAGARAJIAH, S. Implementation issues and testing of a hybrid isolation system, *Engineering Structures*, 1998.

RUZICKA, J. E., DERBY, T. F., SCHUBERT, D. W., PEPI, J. S. Damping of Structural Composites with Viscoelastic shear-damping Mechanisms, National Aeronautics and Space Administration (NASA), Washington, 1967.

SANTOS, E. F., Atenuadores Visco-Elásticos para Redução de Oscilações Aeroelásticas de Edifícios Altos, Dissertação de Mestrado em Ciências em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2003.

SILVA, C. W. *Vibration Damping, Control, and Design*, Boca Raton, 2007.

SOUZA, J. C. S., LIMA JR., J. J. Determinação dos módulos de armazenagem e de perda de materiais viscoelásticos -Padrão ASTM, Nono simpósio de Mecânica Computacional, Universidade Federal de São João Del-Rei, 2010.

SPENCER JR., B. F., SOONG, T. T. New applications and development of active, semi-active and hybrid control techniques for seismic and non-seismic vibration in the USA, International post-smirt conference seminar nos seismic isolation, passive energy dissipation and active control of vibration of structures, Cheju, Korea, 1999.

VASCONCELOS, R. P. Controle Dinâmico estrutural via mecanismos viscoelásticos, Tese de Doutorado, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2003.

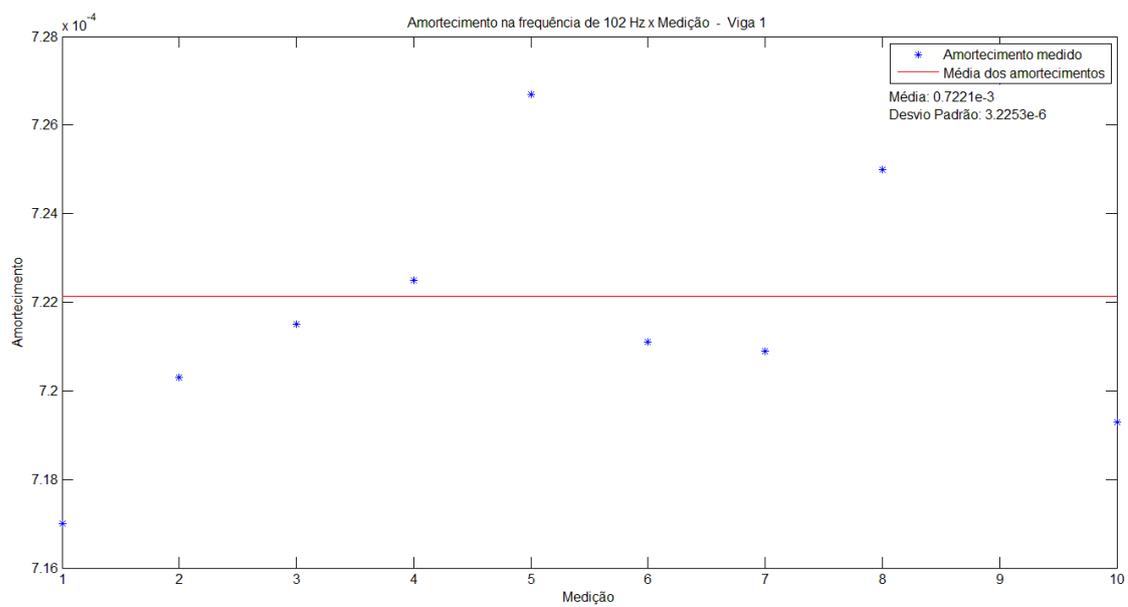
**ANEXOS****ANEXO I: Gráficos de amortecimento e frequência obtidos no Sonelastic®**

Figura A(1) - Valores das medições do amortecimento na frequência natural - Viga 1.

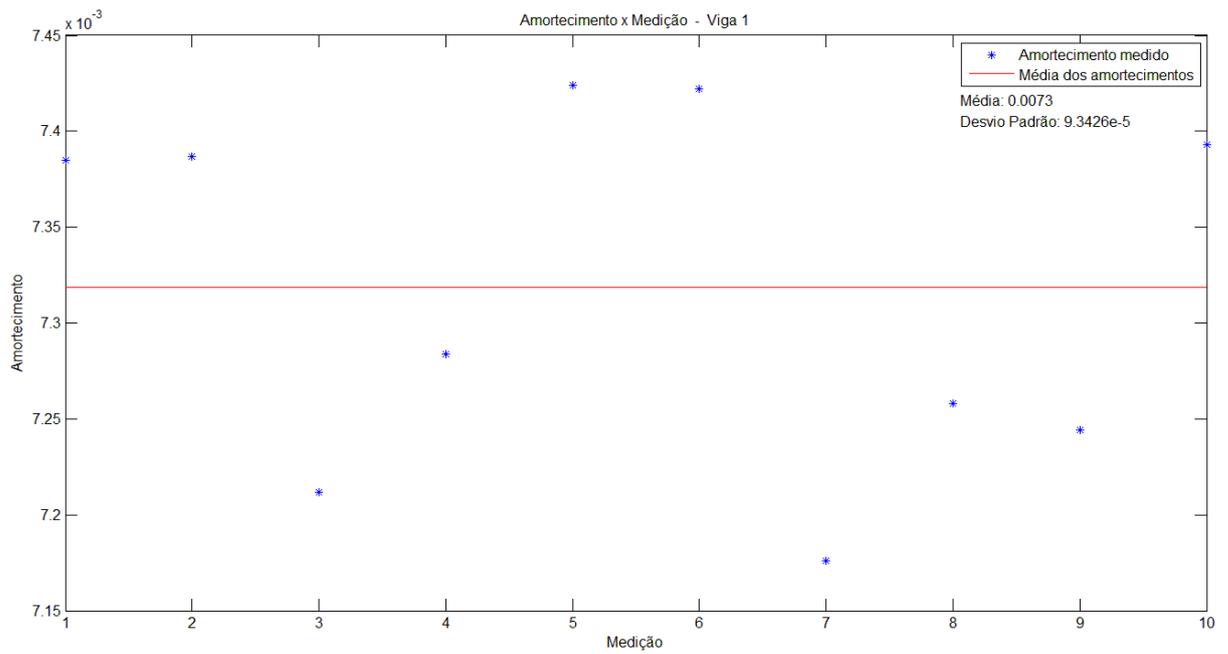


Figura A(2) - Valores das medições do amortecimento- Viga 1.

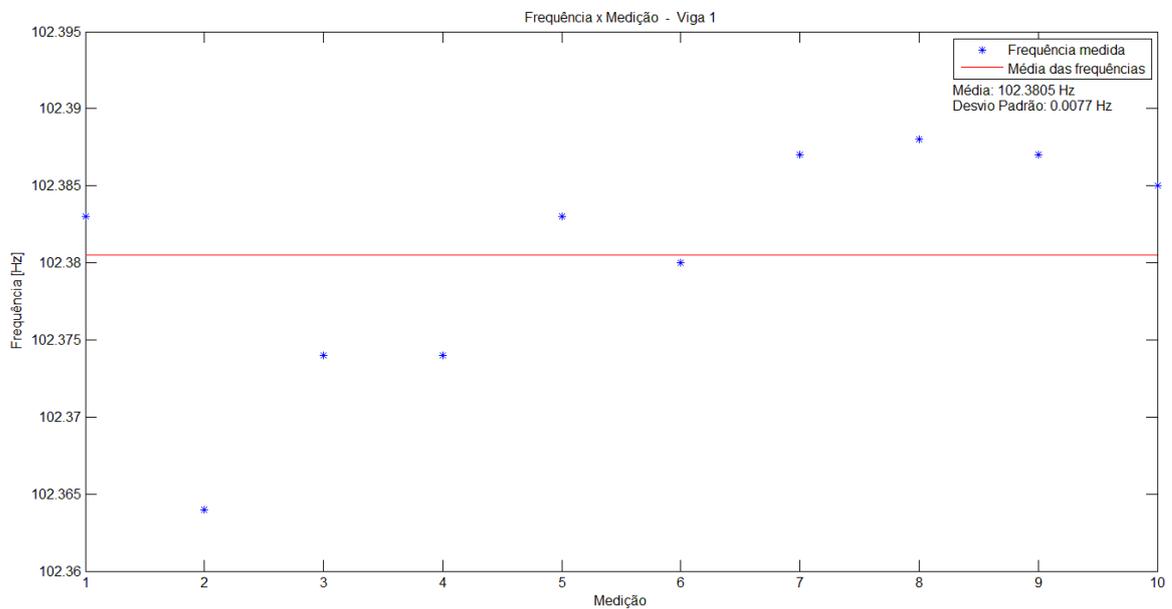


Figura A(3) - Valores das medições da frequência - Viga 1.

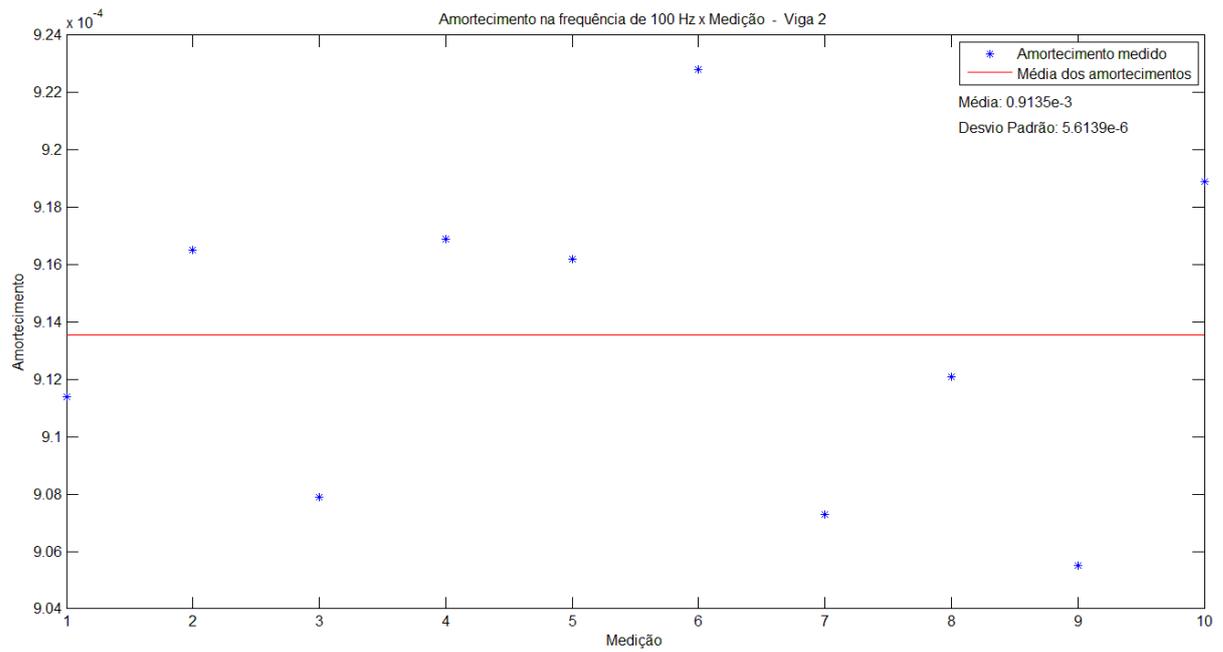


Figura A(4) - Valores das medições do amortecimento na frequência natural - Viga 2.

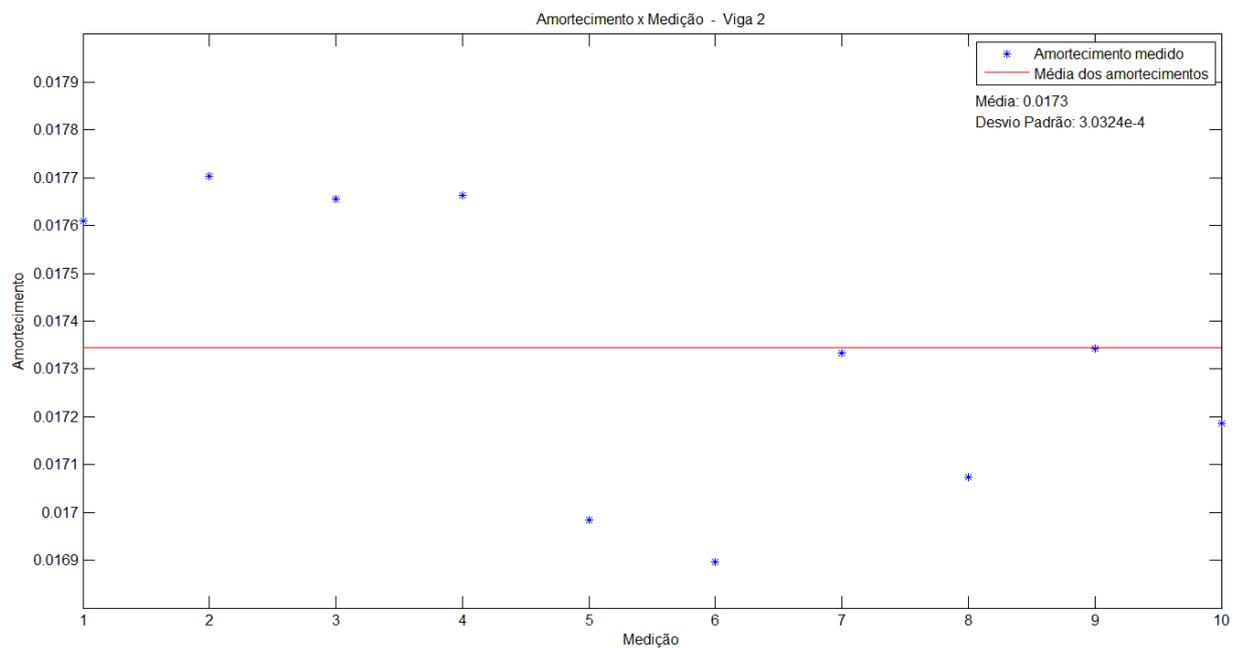


Figura A(5) - Valores das medições do amortecimento- Viga 2.

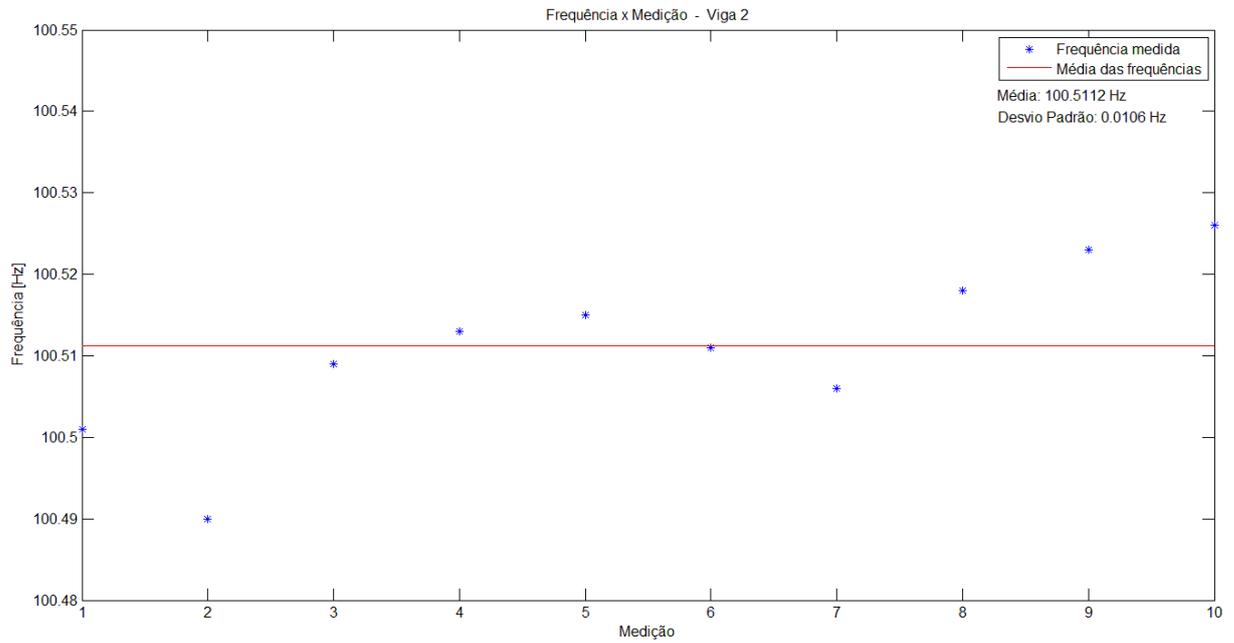


Figura A(6) - Valores das medições da frequência- Viga 2.

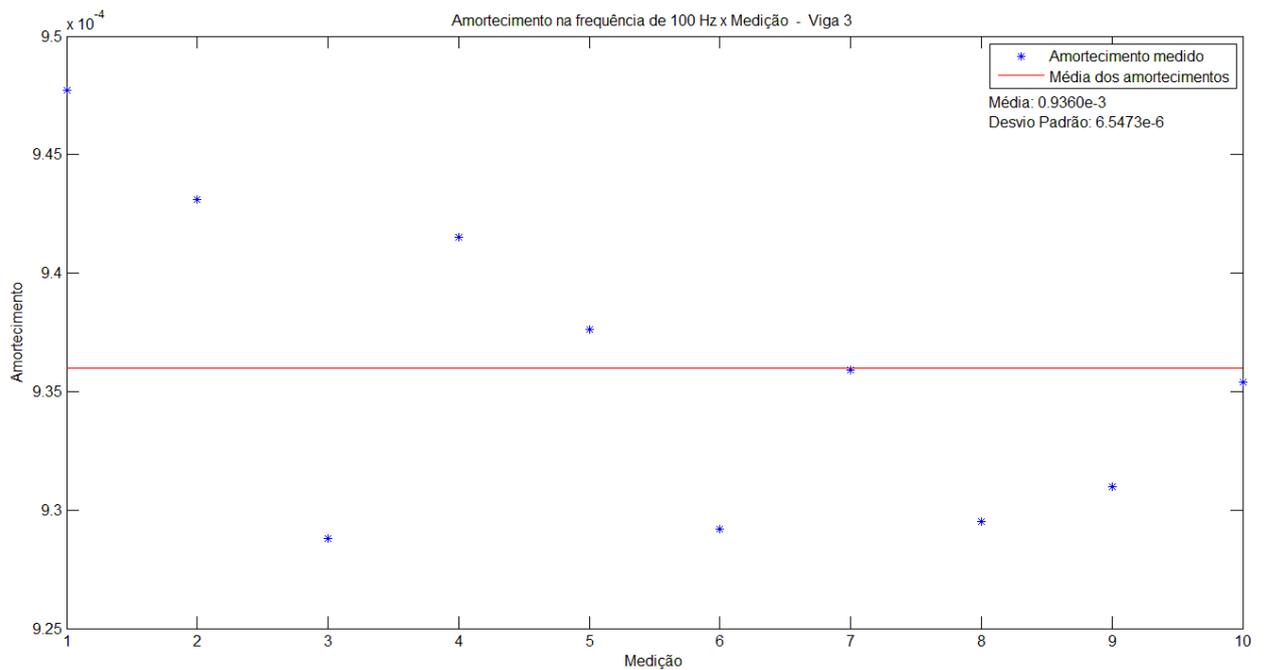


Figura A(7) - Valores das medições do amortecimento na frequência natural - Viga 3.

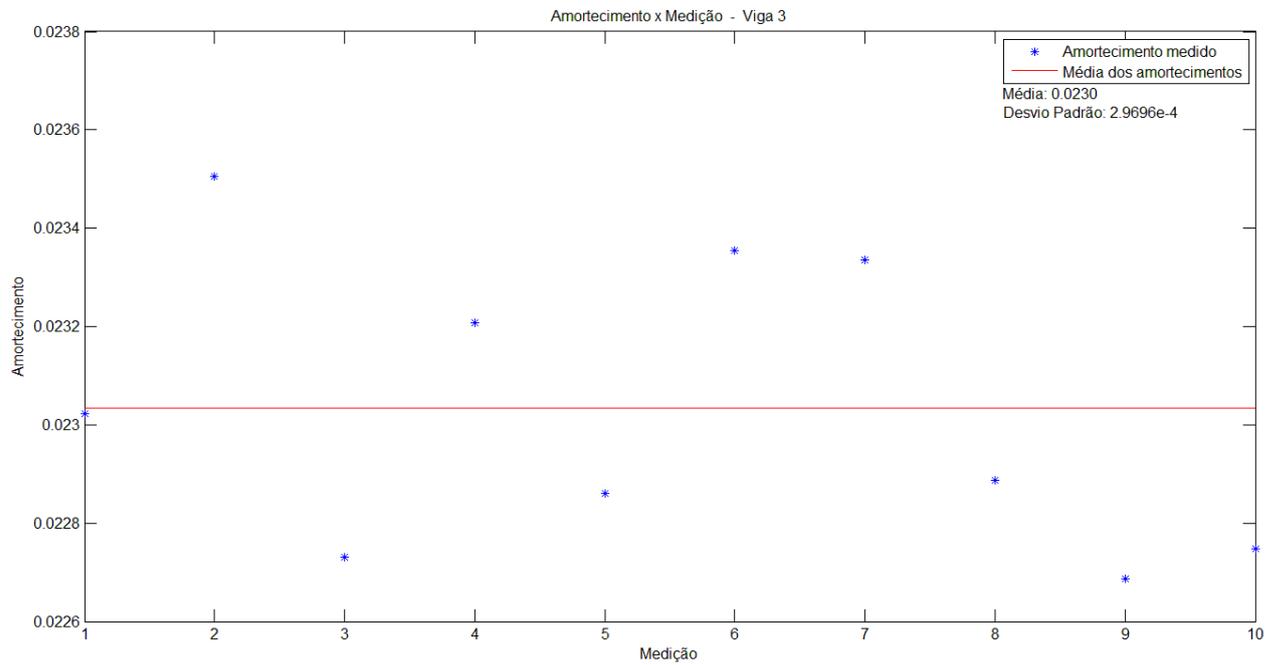


Figura A(8) - Valores das medições do amortecimento- Viga 3.

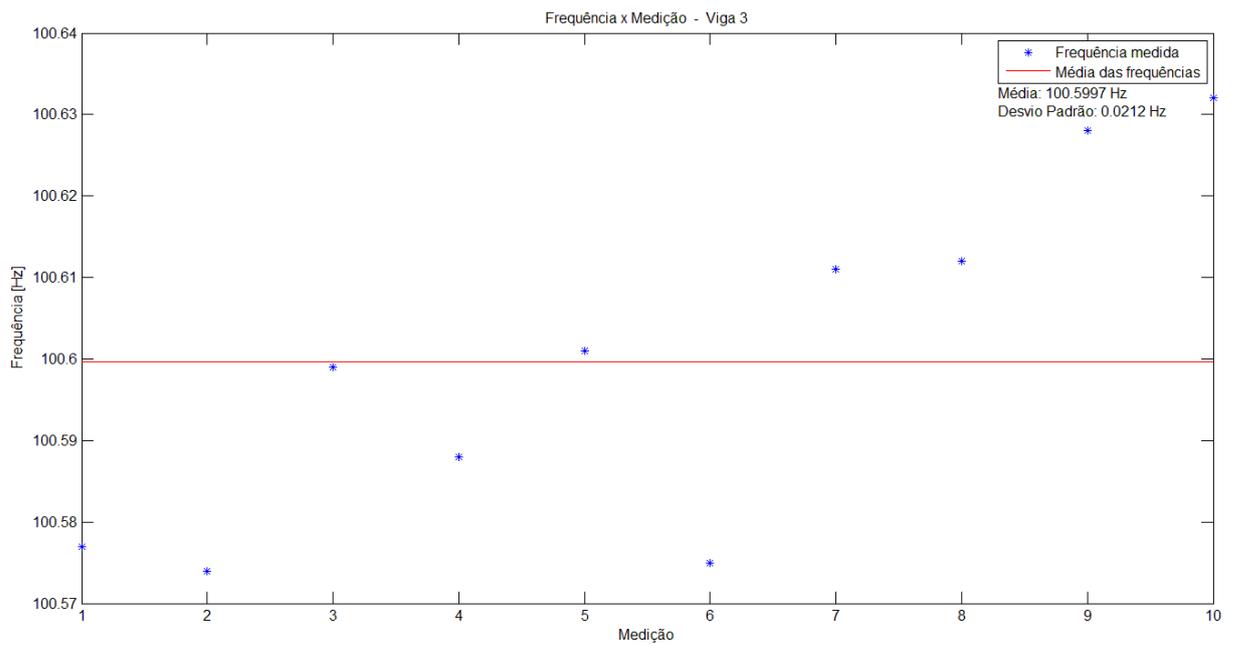


Figura A(9) - Valores das medições da frequência- Viga 3.

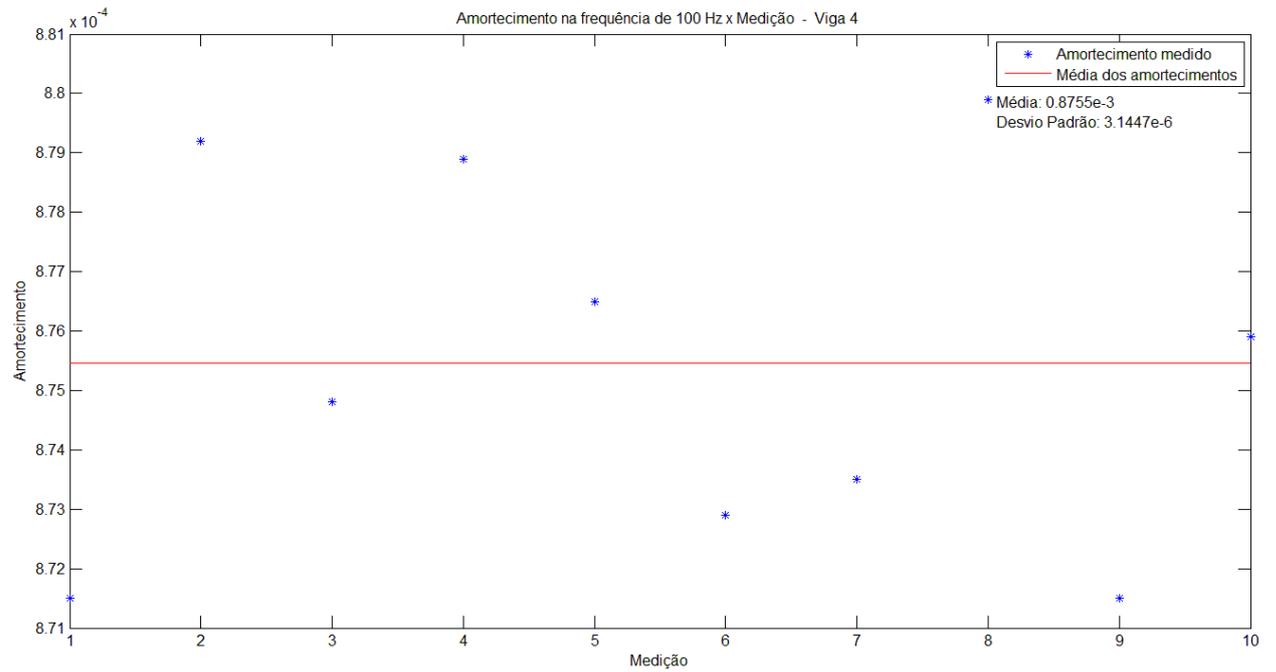


Figura A(10) - Valores das medições do amortecimento na frequência natural - Viga 4.

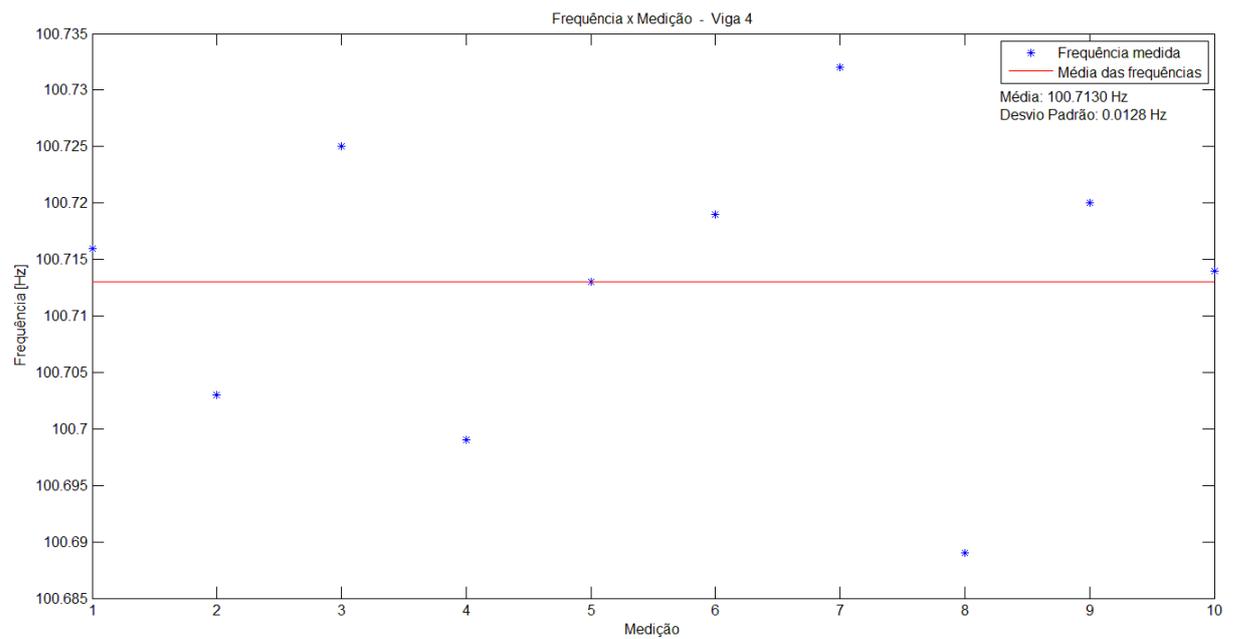


Figura A(11) - Valores das medições do amortecimento- Viga 4.

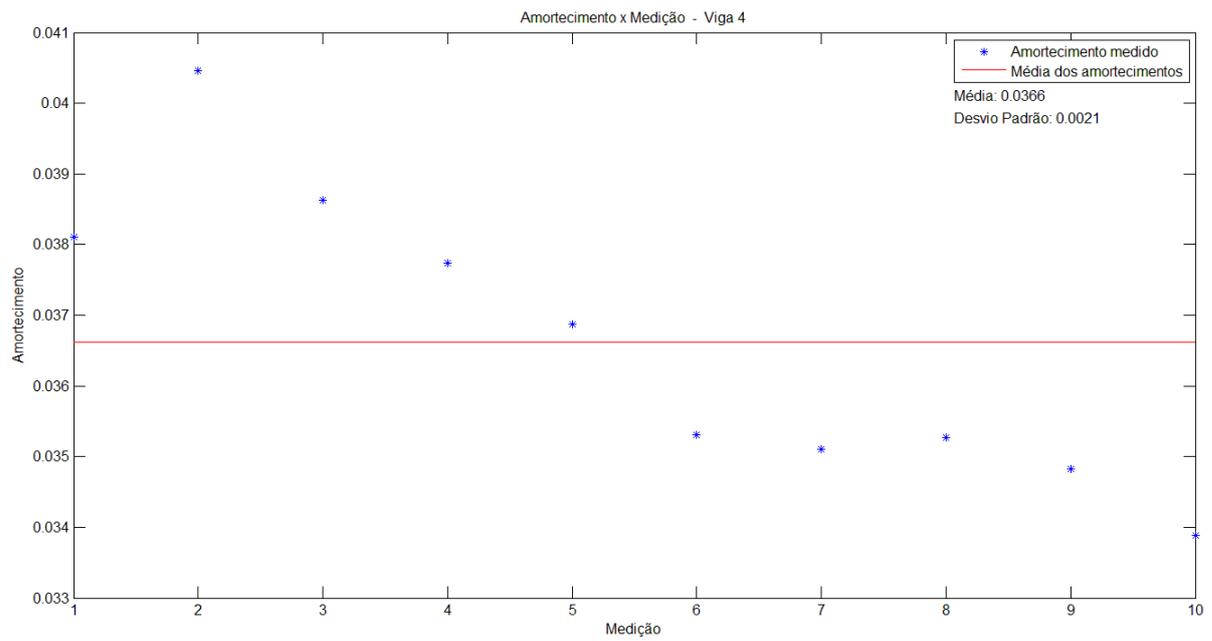


Figura A(12) - Valores das medições da frequência- Viga 4.

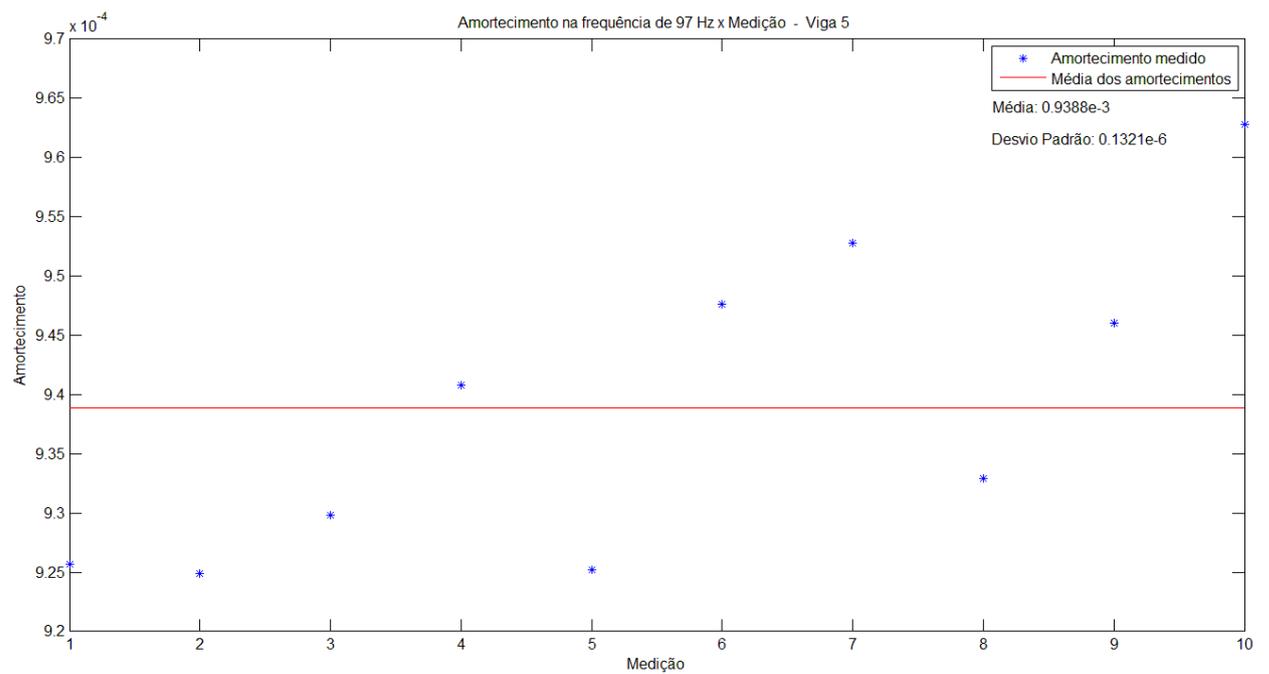


Figura A(13) - Valores das medições do amortecimento na frequência natural - Viga 5.

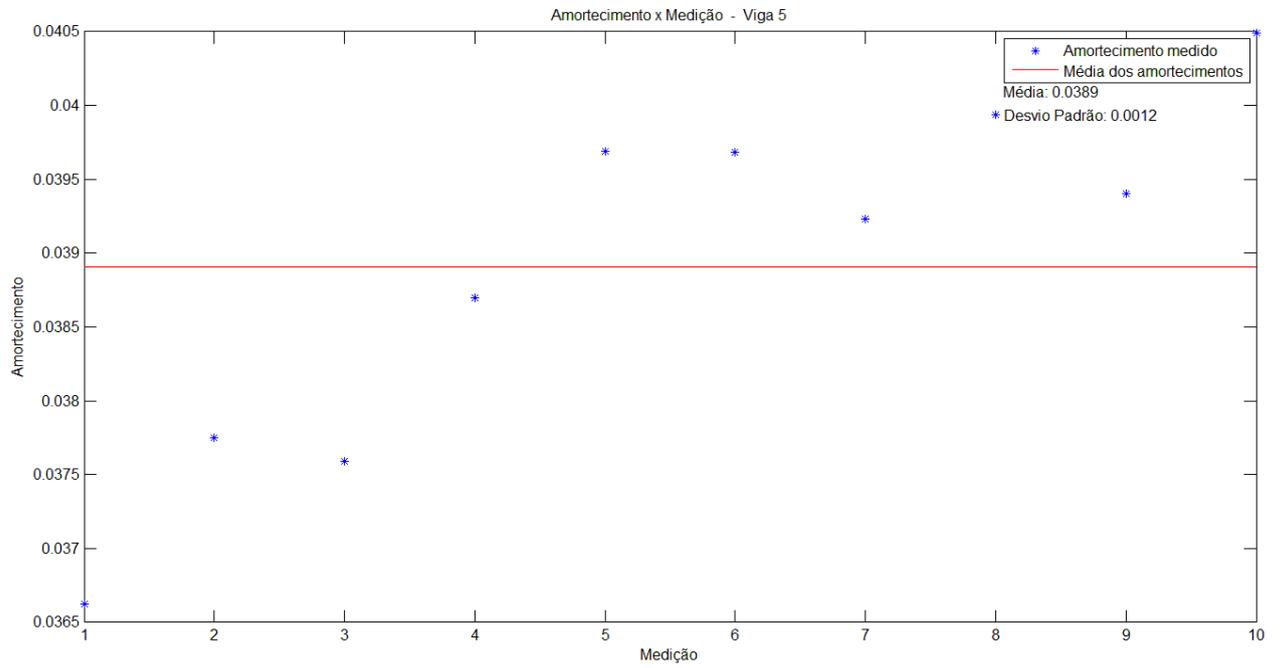


Figura A(14) - Valores das medições do amortecimento- Viga 5.

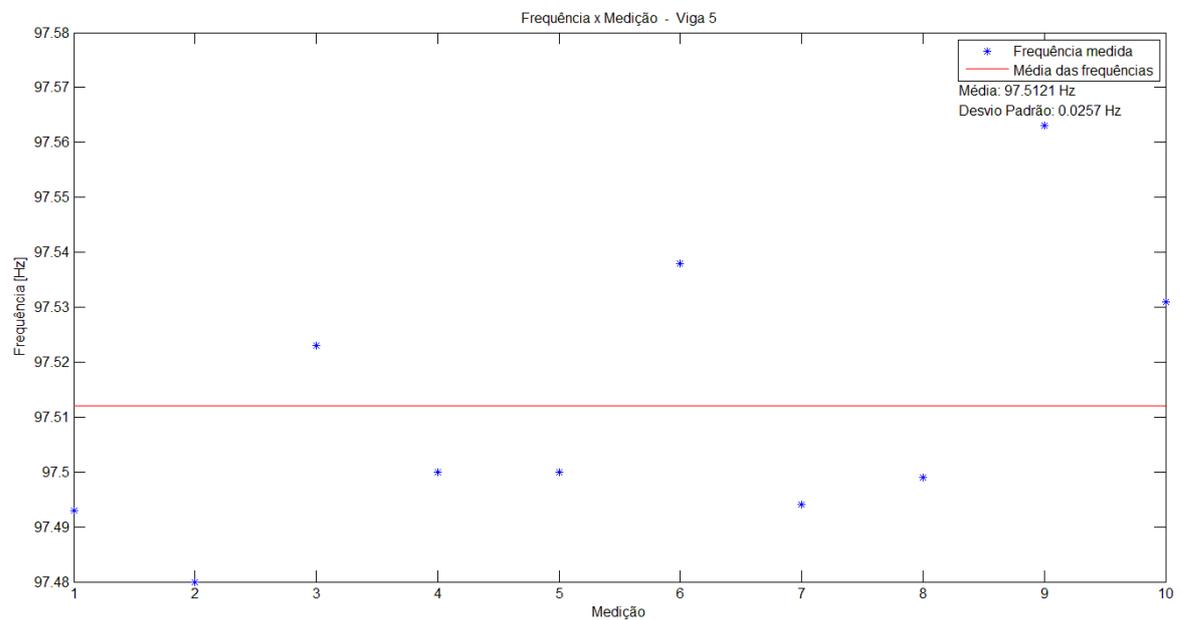


Figura A(15) - Valores das medições da frequência- Viga 5.

---

## ANEXO II: Códigos do Matlab<sup>®</sup> utilizados para plotar os gráficos do Anexo I

---

%Sonelastic - Viga 1

```
clear all  
clc
```

```
% Gráficos do amortecimento pra primeira frequência  
% natural de flexão calculadas no sonelastic
```

```
medicao = [1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10];  
f= [102.383 ; 102.364; 102.374; 102.374; 102.383; 102.38; 102.387; 102.388; 102.387; 102.385];  
amortecimentofreq= (10^-6)*[717; 720.3; 721.5; 722.5; 726.7; 721.1; 720.9; 725; 727; 719.3];  
amortecimentotempo= [0.007385; 0.007387; 0.007212; 0.007284; 0.007424; 0.007422; 0.007176;  
0.007258; 0.007244; 0.007393];
```

```
mediafreq = [mean(f); mean(f) ;mean(f);mean(f);mean(f);mean(f);mean(f);mean(f);mean(f);mean(f)]  
desviofreq = std(f)  
plot(medicao, f, 'b*', medicao, mediafreq, 'r-')  
title('Frequência x Medição - Viga 1');  
xlabel('Medição')  
ylabel('Frequência [Hz]')  
legend('Frequência medida','Média das frequências')  
gtext('Média: 102.3805 Hz')  
gtext('Desvio Padrão: 0.0077 Hz')
```

```

mediaamortfreq = [mean(amortecimentofreq); mean(amortecimentofreq)
;mean(amortecimentofreq);mean(amortecimentofreq);mean(amortecimentof
req);mean(amortecimentofreq);mean(amortecimentofreq);mean(amortecim
entofreq)]
desvioamortfreq = std(amortecimentofreq)
plot(medicao, amortecimentofreq, 'b*', medicao, mediaamortfreq, 'r-')
title('Amortecimento na frequência de 102 Hz x Medição - Viga 1 ');
xlabel('Medição')
ylabel('Amortecimento')
legend('Amortecimento medido','Média dos amortecimentos')
gtext('Média: 0.7221e-3')
gtext('Desvio Padrão: 3.2253e-6')

```

```

mediaamorttempo = [mean(amortecimentotempo); mean(amortecimentotempo)
;mean(amortecimentotempo);mean(amortecimentotempo);mean(amortec
imentotempo);mean(amortecimentotempo);mean(amortecimentotempo);mean(amortecimentotempo);
mean(amortecimentotempo)]
desvioamorttempo = std(amortecimentotempo)
plot(medicao, amortecimentotempo, 'b*', medicao, mediaamorttempo, 'r-')
title('Amortecimento x Medição - Viga 1');
xlabel('Medição')
ylabel('Amortecimento')
legend('Amortecimento medido','Média dos amortecimentos')
gtext('Média: 0.0073')
gtext('Desvio Padrão: 9.3426e-5')

```

## %Sonelastic - Viga 2

```

clear all
clc

```

```

% Gráficos do amortecimento pra primeira frequência
% natural de flexão calculadas no sonelastic

```

```

medicao = [1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10];
f= [100.501; 100.49; 100.509; 100.513; 100.515; 100.511; 100.506; 100.518; 100.523; 100.526];
amortecimentofreq= (10^-6)*[911.4; 916.5;907.9;916.9;916.2;922.8;907.3;912.1;905.5;918.9];
amortecimentotempo=
[0.01761;0.017704;0.017656;0.017663;0.016985;0.016896;0.017333;0.017073;0.017343;0.017186];

```

```

mediafreq = [mean(f); mean(f) ;mean(f);mean(f);mean(f);mean(f);mean(f);mean(f);mean(f);mean(f)]
desviofreq = std(f)
plot(medicao, f, 'b*', medicao, mediafreq, 'r-')
title('Frequência x Medição - Viga 2');
xlabel('Medição')
ylabel('Frequência [Hz]')
legend('Frequência medida','Média das frequências')
gtext('Média: 100.5112 Hz')
gtext('Desvio Padrão: 0.0106 Hz')

```

```

mediaamortfreq = [mean(amortecimentofreq); mean(amortecimentofreq)
;mean(amortecimentofreq);mean(amortecimentofreq);mean(amortecimentof

```

```

req);mean(amortecimentofreq);mean(amortecimentofreq);mean(amortecimentofreq);mean(amortecim
entofreq)]
desvioamortfreq = std(amortecimentofreq)
plot(medicao, amortecimentofreq, 'b*', medicao, mediaamortfreq, 'r-')
title('Amortecimento na frequência de 100 Hz x Medição - Viga 2 ');
xlabel('Medição')
ylabel('Amortecimento')
legend('Amortecimento medido','Média dos amortecimentos')
gtext('Média: 0.9135e-3')
gtext('Desvio Padrão: 5.6139e-6')

```

```

mediaamorttempo = [mean(amortecimentotempo); mean(amortecimentotempo)
;mean(amortecimentotempo);mean(amortecimentotempo);mean(amortecimentotempo);mean(amortec
imentotempo);mean(amortecimentotempo);mean(amortecimentotempo);mean(amortecimentotempo);
mean(amortecimentotempo)]
desvioamorttempo = std(amortecimentotempo)
plot(medicao, amortecimentotempo, 'b*', medicao, mediaamorttempo, 'r-')
title('Amortecimento x Medição - Viga 2 ');
xlabel('Medição')
ylabel('Amortecimento')
legend('Amortecimento medido','Média dos amortecimentos')
gtext('Média: 0.0173')
gtext('Desvio Padrão: 3.0324e-4')

```

### %Sonelastic - Viga 3

```

clear all
clc

```

```

% Gráficos do amortecimento pra primeira frequência
% natural de flexão calculadas no sonelastic

```

```

medicao = [1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10];
f= [100.577;100.574;100.599;100.588;100.601;100.575;100.611;100.612;100.628;100.632];
amortecimentofreq= (10^-6)*[947.7;943.1;928.8;941.5;937.6;929.2;935.9;929.5;931;935.4];
amortecimentotempo=
[0.023022;0.023505;0.022731;0.023208;0.02286;0.023355;0.023336;0.022887;0.022686;0.022747];

```

```

mediafreq = [mean(f); mean(f) ;mean(f);mean(f);mean(f);mean(f);mean(f);mean(f);mean(f);mean(f)]
desviofreq = std(f)
plot(medicao, f, 'b*', medicao, mediafreq, 'r-')
title('Frequência x Medição - Viga 3');
xlabel('Medição')
ylabel('Frequência [Hz]')
legend('Frequência medida','Média das frequências')
gtext('Média: 100.5997 Hz')
gtext('Desvio Padrão: 0.0212 Hz')

```

```

mediaamortfreq = [mean(amortecimentofreq); mean(amortecimentofreq)
;mean(amortecimentofreq);mean(amortecimentofreq);mean(amortecimentofreq);mean(amortecimentof

```

```

req);mean(amortecimentofreq);mean(amortecimentofreq);mean(amortecimentofreq);mean(amortecim
entofreq)]
desvioamortfreq = std(amortecimentofreq)
plot(medicao, amortecimentofreq, 'b*', medicao, mediaamortfreq, 'r-')
title('Amortecimento na frequência de 100 Hz x Medição - Viga 3 ');
xlabel('Medição')
ylabel('Amortecimento')
legend('Amortecimento medido','Média dos amortecimentos')
gtext('Média: 0.9360e-3')
gtext('Desvio Padrão: 6.5473e-6')

```

```

mediaamorttempo = [mean(amortecimentotempo); mean(amortecimentotempo)
;mean(amortecimentotempo);mean(amortecimentotempo);mean(amortecimentotempo);mean(amortec
imentotempo);mean(amortecimentotempo);mean(amortecimentotempo);mean(amortecimentotempo);
mean(amortecimentotempo)]
desvioamorttempo = std(amortecimentotempo)
plot(medicao, amortecimentotempo, 'b*', medicao, mediaamorttempo, 'r-')
title('Amortecimento x Medição - Viga 3');
xlabel('Medição')
ylabel('Amortecimento')
legend('Amortecimento medido','Média dos amortecimentos')
gtext('Média: 0.0230')
gtext('Desvio Padrão: 2.9696e-4')

```

## %Sonelastic - Viga 4

```

clear all
clc

```

```

% Gráficos do amortecimento pra primeira frequência
% natural de flexão calculadas no sonelastic

```

```

medicao = [1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10];
f= [100.716;100.703;100.725;100.699;100.713;100.719;100.732;100.689;100.72;100.714];
amortecimentofreq= (10^-6)*[871.5;879.2;874.8;878.9;876.5;872.9;873.5;879.9;871.5;875.9];
amortecimentotempo=
[0.038107;0.040458;0.038632;0.037732;0.036868;0.035306;0.035111;0.035272;0.034824;0.03389];

```

```

mediafreq = [mean(f); mean(f) ;mean(f);mean(f);mean(f);mean(f);mean(f);mean(f);mean(f);mean(f)]
desviofreq = std(f)
plot(medicao, f, 'b*', medicao, mediafreq, 'r-')
title('Frequência x Medição - Viga 4');
xlabel('Medição')
ylabel('Frequência [Hz]')
legend('Frequência medida','Média das frequências')
gtext('Média: 100.7130 Hz')
gtext('Desvio Padrão: 0.0128 Hz')

```

```

mediaamortfreq = [mean(amortecimentofreq); mean(amortecimentofreq)
;mean(amortecimentofreq);mean(amortecimentofreq);mean(amortecimentofreq);mean(amortecim
entofreq);mean(amortecimentofreq);mean(amortecimentofreq);mean(amortecim
entofreq)]
desvioamortfreq = std(amortecimentofreq)
plot(medicao, amortecimentofreq, 'b*', medicao, mediaamortfreq, 'r-')
title('Amortecimento na frequência de 100 Hz x Medição - Viga 4 ');
xlabel('Medição')
ylabel('Amortecimento')
legend('Amortecimento medido','Média dos amortecimentos')
gtext('Média: 0.8755e-3')
gtext('Desvio Padrão: 3.1447e-6')

```

```

mediaamorttempo = [mean(amortecimentotempo); mean(amortecimentotempo)
;mean(amortecimentotempo);mean(amortecimentotempo);mean(amortec
imentotempo);mean(amortecimentotempo);mean(amortecimentotempo);mean(amortecimentotempo);
mean(amortecimentotempo)]
desvioamorttempo = std(amortecimentotempo)
plot(medicao, amortecimentotempo, 'b*', medicao, mediaamorttempo, 'r-')
title('Amortecimento x Medição - Viga 4');
xlabel('Medição')
ylabel('Amortecimento')
legend('Amortecimento medido','Média dos amortecimentos')
gtext('Média: 0.0366')
gtext('Desvio Padrão: 0.0021')

```

## %Sonelastic - Viga 5

```

clear all
clc

```

```

% Gráficos do amortecimento pra primeira frequência
% natural de flexão calculadas no sonelastic

```

```

medicao = [1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10];
f= [97.493;97.48;97.523;97.5;97.5;97.538;97.494;97.499;97.563;97.531];
amortecimentofreq= (10^-6)*[925.7;924.9;929.8;940.8;925.2;947.6;952.8;932.9;946;962.8];
amortecimentotempo=
[0.036624;0.03775;0.037588;0.038698;0.039687;0.039681;0.039233;0.039938;0.039401;0.040488];

```

```

mediafreq = [mean(f); mean(f) ;mean(f);mean(f);mean(f);mean(f);mean(f);mean(f);mean(f);mean(f)]
desviofreq = std(f)
plot(medicao, f, 'b*', medicao, mediafreq, 'r-')
title('Frequência x Medição - Viga 5');
xlabel('Medição')
ylabel('Frequência [Hz]')
legend('Frequência medida','Média das frequências')
gtext('Média: 97.5121 Hz')
gtext('Desvio Padrão: 0.0257 Hz')

```

```

mediaamortfreq = [mean(amortecimentofreq); mean(amortecimentofreq)
;mean(amortecimentofreq);mean(amortecimentofreq);mean(amortecimentof
req);mean(amortecimentofreq);mean(amortecimentofreq);mean(amortecim
entofreq)]
desvioamortfreq = std(amortecimentofreq)
plot(medicao, amortecimentofreq, 'b*', medicao, mediaamortfreq, 'r-')
title('Amortecimento na frequência de 97 Hz x Medição - Viga 5 ');
xlabel('Medição')
ylabel('Amortecimento')
legend('Amortecimento medido','Média dos amortecimentos')
gtext('Média: 0.9388e-3')
gtext('Desvio Padrão: 0.1321e-6')

```

```

mediaamorttempo = [mean(amortecimentotempo); mean(amortecimentotempo)
;mean(amortecimentotempo);mean(amortecimentotempo);mean(amortec
imentotempo);mean(amortecimentotempo);mean(amortecimentotempo);mean(amortecimentotempo);
mean(amortecimentotempo)]
desvioamorttempo = std(amortecimentotempo)
plot(medicao, amortecimentotempo, 'b*', medicao, mediaamorttempo, 'r-')
title('Amortecimento x Medição - Viga 5');
xlabel('Medição')
ylabel('Amortecimento')
legend('Amortecimento medido','Média dos amortecimentos')
gtext('Média: 0.0389')
gtext('Desvio Padrão: 0.0012')

```

```

viga=[1;2;3;4;5];
vigaf= [102.3805;100.5112;100.5997; 100.7130;97.5121];
vigaaf= [0.0073;0.0173;0.023;0.0366;0.0389];
vigaaf=[0.7221;0.9135;0.9360;0.8755;0.9388];

```

```

plot(viga,vigaf,'*')
title('Frequência x Viga ');
xlabel('Viga')
ylabel('Frequência')

```

```

plot(viga,vigaaf,'*')
title('Amortecimento na primeira frequência natural x Viga ');
xlabel('Viga')
ylabel('Amortecimento')

```

```

plot(viga,vigaaf,'*')
title('Amortecimento x Viga ');
xlabel('Viga')
ylabel('Amortecimento')

```