



Universidade de Brasília
IE - Departamento de Estatística
Estágio Supervisionado 2

Inferência para a distribuição Weibull com censura progressiva híbrida

Alexandre Borges Machado

Orientadora: Profa. Cira Etheowalda Guevara Otiniano

Brasília

Março de 2013

Universidade de Brasília
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Estatística

**Inferência para a distribuição Weibull com
censura progressiva híbrida.**

por

Autor: Alexandre Borges Machado - 08/23376

Orientadora: Profa. Cira Etheowalda Guevara Otiniano

Monografia apresentada para conclusão do curso de
Graduação em Estatística do Departamento de Estatística da
Universidade de Brasília.

Brasília

2013

ALEXANDRE BORGES MACHADO

*Inferência para a distribuição Weibull com censura
progressiva híbrida.*

Monografia apresentada para conclusão do curso
de Graduação em Estatística do Departamento
de Estatística da Universidade de Brasília.

Aprovado em 1º de março de 2013

BANCA EXAMINADORA

Professora Orientadora: Dra. Cira Etheowalda Guevara Otiniano

Professora: Dra. Daniele da Silva Baratela Martins Neto

Professor: Dr. Eduardo Yoshio Nakano

Dedico este trabalho aos meus filhos
Alexandre Júnior, Isadora e Eduardo
e à minha esposa Maria Luiza.

Resumo

Esquemas de censura progressiva híbrida têm se tornado populares em testes de vida e estudos de confiabilidade. Nesse trabalho calculamos estimadores pelo método de máxima verossimilhança e estimadores Bayesianos para uma distribuição Weibull de dois parâmetros baseado em dados censurados de acordo com o esquema de censura progressiva híbrida adaptável do Tipo 1 (ECPHA Tipo 1).

Palavras-chave: Censura progressiva híbrida, Métodos MCMC, algoritmo Metropolis-Hastings

Sumário

1	Introdução	1
2	Distribuição Weibull, Distribuição Gumbel e a relação entre elas	5
2.1	Distribuição Weibull	5
2.2	Distribuição Gumbel	7
2.3	Relação entre as Distribuições Weibull e Gumbel	8
3	Descrição dos modelos	11
3.1	Modelo sem censura	11
3.2	Modelo com censura à direita	12
3.3	Modelo com censura progressiva à direita do tipo 2	12
3.4	Modelo com censura ECPHA Tipo 1	13
4	Estimação do modelo com presença de censura ECPHA Tipo 1	15
4.1	Estimação por máxima verossimilhança	15
4.1.1	Matriz de variância-covariância assintótica	20
4.2	Estimação Bayesiana	39
5	Resultados	43

6 Conclusões	71
Referências Bibliográficas	72
A Código R utilizado nos testes	74

Capítulo 1

Introdução

Testes de vida e estudos de confiabilidade são vastamente empregados atualmente. Basicamente, tenta-se estudar em um processo como e quando um produto falhará a fim de se aumentar a confiabilidade do produto. Entretanto, em virtude de restrições de orçamento/tempo/etc, costuma-se prefinir o tempo de estudo (T) ou conduzi-lo até que determinado número de falhas (m) ocorra, ao invés de aguardar que todas as unidades falhem. Quando o estudo é encerrado e o evento de interesse não é observado, dizemos que a informação foi censurada. Quando preestabelecemos o tempo (T), temos a censura do Tipo 1. Quando prefixamos o número de falhas, temos a censura do Tipo 2. Em ambos os casos, os tempos de censura são os mesmos para todas unidades censuradas. No caso de censura do Tipo 1, o tempo de censura é igual a T e no caso de censura do Tipo 2, é igual ao tempo em que ocorreu a m -ésima falha (T_m).

Recentemente, novos esquemas de censura têm-se tornado popular (Balakrishnan, 2007). Um esquema de censura progressiva do Tipo 1 ocorre quando prefixamos o tempo de estudo (T) e em prefixados k tempos T_1, T_2, \dots, T_k , ($0 < T_j \leq T, j =$

$1, \dots, k$), retiramos aleatoriamente unidades do experimento de modo que permaneçam R_1, R_2, \dots, R_k unidades nos instantes T_1, T_2, \dots, T_k , respectivamente. Já um esquema de censura progressiva do Tipo 2 ocorre quando preestabelecemos o número de falhas (m) e quando da ocorrência de cada falha, retiramos aleatoriamente R_1, R_2, \dots, R_m unidades do experimento, respectivamente. Em um esquema de censura progressiva híbrida do Tipo 1 (ECPH Tipo 1), o estudo termina em $\min\{X_m, T\}$ (X_m sendo o tempo da m -ésima falha). Já em um esquema de censura progressiva híbrida do Tipo 2 (ECPH Tipo 2), o estudo termina em $\max\{X_m, T\}$.

Um novo esquema de censura chamado esquema de censura progressiva híbrida adaptável do Tipo 1 (ECPHA Tipo 1), introduzido por Lin e Huang (2011), garante o término do experimento de teste de vida no tempo prefixado T , resultando em maior eficiência nas estimações quando comparado com ECPH Tipo 1. Neste novo esquema, o experimento termina no tempo T quando $X_m > T$; ou funcionará exatamente como ECPH Tipo 2 quando $X_m < T$.

A figura 1.1, de Lin e Huang (2011), ilustra o esquema de censura ECPHA Tipo 1.

Figura 1.1: Representação do esquema de censura ECPHA Tipo 1

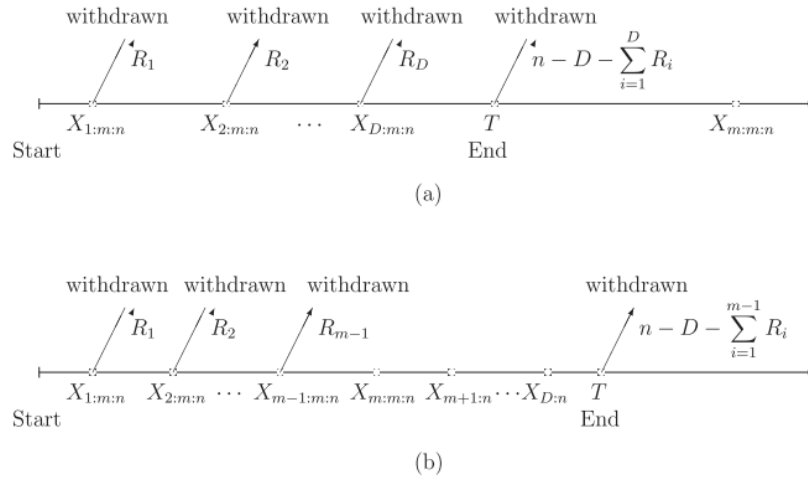


Figure 1. Schematic representation of adaptive Type-I progressive hybrid censoring scheme.

Teoria e aplicações de censura progressiva podem ser encontradas em Balakrishnan e Aggarwala (2000) e em Balakrishnan (2007).

A estimação dos parâmetros de um esquema de censura progressiva do Tipo 2 foi apresentada por Ng et al. (2002), no caso de o tempo de vida seguir uma distribuição lognormal e no caso de seguir uma distribuição Weibull. Inferência estatística do esquema de censura ECPH Tipo 2 para o tempo de vida com distribuição Weibull foi dada por Lin et al. (2009). Inferência estatística do esquema de censura ECPH Tipo 1 foi dado por Lin e Huang (2011) para o tempo de vida Exponencial. Lin et al. (2012) apresentou inferência estatística para a distribuição Weibull na presença de censura ECPHA Tipo 1.

Com base no trabalho de Lin et al. (2012), apresentamos neste relatório a inferência de um esquema de censura ECPHA Tipo 1 quando o tempo de falha é Weibull. Para isto, dividimos o trabalho em quatro capítulos.

No Capítulo 2, apresentamos a teoria básica da distribuição Weibull e a distribui-

ção Gumbel, bem como a relação entre elas. No Capítulo 3, descrevemos diversos esquemas de modelos de censura. Os detalhes dos cálculos dos estimadores dos parâmetros do modelo em estudo, por máxima verossimilhança e por métodos Bayesianos, são apresentados no Capítulo 4. Ilustrações numéricas do comportamento dos estimadores e a comparação entre tais estimadores são mostradas em figuras e tabelas no Capítulo 5. Adicionalmente incluímos em um apêndice o código do programa estatístico **R** que foi utilizado na estimação dos parâmetros do modelo.

Capítulo 2

Distribuição Weibull, Distribuição Gumbel e a relação entre elas

2.1 Distribuição Weibull

Uma variável aleatória X tem distribuição Weibull se sua função de densidade pode ser escrita na forma

$$f_X(x; \delta, \lambda) = \lambda \delta x^{\delta-1} e^{-\lambda x^\delta}, \quad x > 0, \quad (2.1)$$

sendo $\delta > 0$ o parâmetro de forma e $\lambda > 0$ o parâmetro de escala.

Notação: $X \sim \text{Weibull}(\lambda, \delta)$.

Quando $\delta = 1$ temos o caso especial da distribuição exponencial, cuja taxa de falha é constante.

Para valores de $\delta \in (0, 1)$ temos uma taxa de falha decrescente e uma taxa de falha crescente para valores de $\delta > 1$.

A distribuição acumulada $F(x)$ de uma variável aleatória $X \sim \text{Weibull}(\lambda, \delta)$ é

$$\begin{aligned} F(x) &= P(X \leq x) \\ &= \int_0^x f_X(u; \lambda, \delta) du \\ &= \int_0^x \lambda \delta u^{\delta-1} e^{-\lambda u^\delta} du. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Se fizermos

$$u^\delta = y, \tag{2.3}$$

teremos

$$\delta u^{\delta-1} du = dy. \tag{2.4}$$

Substituindo 2.3 e 2.4 em 2.2, temos:

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^{x^\delta} \lambda e^{-\lambda y} dy \\ &= -e^{-\lambda y} \Big|_0^{x^\delta} \\ &= 1 - e^{-\lambda x^\delta}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Portanto, a distribuição acumulada de uma variável aleatória $X \sim \text{Weibull}(\lambda, \delta)$

é dada por

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x^\delta}, & \text{se } x \geq 0 \\ 0, & \text{c.c..} \end{cases} \tag{2.6}$$

2.2 Distribuição Gumbel

Uma variável aleatória Y tem distribuição Gumbel se sua função de densidade pode ser escrita na forma

$$f_Y(y; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma} \exp \left[\left(\frac{y - \mu}{\sigma} \right) - \exp \left(\frac{y - \mu}{\sigma} \right) \right], \quad -\infty < y < \infty, \quad (2.7)$$

sendo $\mu \in \mathbb{R}$ o parâmetro de locação e $\sigma > 0$ o parâmetro de escala.

Notação: $Y \sim \text{Gumbel}(\mu, \sigma)$.

A distribuição acumulada $F(y)$ de uma variável aleatória $Y \sim \text{Gumbel}(\mu, \sigma)$ é

$$\begin{aligned} F(y) &= P(Y \leq y) \\ &= \int_{-\infty}^y f_Y(u; \mu, \sigma) du \\ &= \int_{-\infty}^y \frac{1}{\sigma} \exp \left[\left(\frac{u - \mu}{\sigma} \right) - \exp \left(\frac{u - \mu}{\sigma} \right) \right] du \\ &= \int_{-\infty}^y \frac{1}{\sigma} \exp \left(\frac{u - \mu}{\sigma} \right) \exp \left[- \exp \left(\frac{u - \mu}{\sigma} \right) \right] du. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Se fizermos

$$\exp \left(\frac{u - \mu}{\sigma} \right) = z, \quad (2.9)$$

teremos

$$\frac{1}{\sigma} \exp \left(\frac{u - \mu}{\sigma} \right) du = dz. \quad (2.10)$$

Substituindo 2.9 e 2.10 em 2.8, temos:

$$\begin{aligned}
F(y) &= \int_0^{\exp\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)} \frac{1}{\sigma} z \exp[-z] \frac{\sigma}{z} dz \\
&= \int_0^{\exp\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)} \exp[-z] dz \\
&= -\exp[-z] \Big|_0^{\exp\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)} \\
&= 1 - \exp\left[-\exp\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)\right].
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Portanto, a distribuição acumulada de uma variável aleatória $Y \sim \text{Gumbel}(\mu, \sigma)$ é dada por

$$F(y) = 1 - \exp\left[-\exp\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)\right], \quad y \in \mathbb{R}. \tag{2.12}$$

2.3 Relação entre as Distribuições Weibull e Gumbel

Seja uma variável $X \sim \text{Weibull}(\lambda, \delta)$, ou seja, sua função de densidade pode ser escrita na forma 2.1.

Sejam então

$$\begin{aligned}
Y &= \ln X, \\
\mu &= -\ln \lambda / \delta,
\end{aligned} \tag{2.13}$$

$$\text{e } \sigma = 1/\delta.$$

A função de distribuição da variável Y então é dada por

$$\begin{aligned}
f_Y(y; \mu, \sigma) &= f_X(x; \lambda, \delta) \left| \frac{dx}{dy} \right| \\
&= \lambda \delta x^{\delta-1} e^{-\lambda x^\delta} \left| \frac{dx}{dy} \right|.
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Como

$$\begin{aligned}
 y &= \ln x, \\
 \mu &= -\ln \lambda / \delta, \\
 \sigma &= 1 / \delta,
 \end{aligned} \tag{2.15}$$

temos

$$\begin{aligned}
 x &= \exp y, \\
 \lambda &= e^{-\mu \delta}, \\
 \delta &= 1 / \sigma, \\
 \frac{dx}{dy} &= \exp y.
 \end{aligned} \tag{2.16}$$

Substituindo 2.16 em 2.14, temos:

$$\begin{aligned}
 f_Y(y; \mu, \sigma) &= \lambda \delta e^{y(\delta-1)} e^{-\lambda e^{y\delta}} \left| \frac{dx}{dy} \right| \\
 &= e^{-\mu \delta} \delta e^{y(\delta-1)} e^{-e^{-\mu \delta} e^{y\delta}} \left| \frac{dx}{dy} \right| \\
 &= \delta e^{(y-\mu)\delta} e^{-y} e^{-e^{(y-\mu)\delta}} \left| \frac{dx}{dy} \right| \\
 &= \frac{1}{\sigma} \exp \left(\frac{y-\mu}{\sigma} \right) e^{-y} \exp \left(-\exp \left(\frac{y-\mu}{\sigma} \right) \right) \left| \frac{dx}{dy} \right| \\
 &= \frac{1}{\sigma} \exp \left(\frac{y-\mu}{\sigma} - \exp \left(\frac{y-\mu}{\sigma} \right) \right) e^{-y} \left| \frac{dx}{dy} \right| \\
 &= \frac{1}{\sigma} \exp \left(\frac{y-\mu}{\sigma} - \exp \left(\frac{y-\mu}{\sigma} \right) \right) e^{-y} |e^y| \\
 &= \frac{1}{\sigma} \exp \left(\frac{y-\mu}{\sigma} - \exp \left(\frac{y-\mu}{\sigma} \right) \right) e^{-y} e^y \\
 &= \frac{1}{\sigma} \exp \left(\frac{y-\mu}{\sigma} - \exp \left(\frac{y-\mu}{\sigma} \right) \right).
 \end{aligned} \tag{2.17}$$

Esta última equação tem a forma da equação 2.7, ou seja, $Y \sim \text{Gumbel}(\mu, \sigma)$.

Portanto, sendo $X \sim \text{Weibull}(\lambda, \delta)$ com λ e δ sendo os parâmetros de escala e forma

respectivamente, temos que $Y = \ln X \sim \text{Gumbel}(\mu, \sigma)$ com parâmetros de locação $\mu = -\ln \lambda/\delta$ e de escala $\sigma = 1/\delta$, respectivamente.

Capítulo 3

Descrição dos modelos

Suponha que n unidades sejam colocadas em um teste de vida e que X_1, X_2, \dots, X_n sejam os seus respectivos tempos de falha. Assumimos que os tempos de falha X_i ($i = 1, 2, \dots, n$) são independentes e identicamente distribuídos com distribuição Weibull(λ, δ), sendo λ o parâmetro de escala e δ o parâmetro de forma.

Seja T o tempo de duração do teste.

3.1 Modelo sem censura

Quando não há censura, ou seja, quando o tempo de falha de todas as unidades amostrais foi observado, a verossimilhança é dada por

$$\begin{aligned} L(\lambda, \delta) &= \prod_{i=1}^n f(x_i; \lambda, \delta). \\ &= \prod_{i=1}^n \lambda \delta x_i^{\delta-1} e^{-\lambda x_i^\delta}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Cada unidade amostral é representada na função de verossimilhança por sua função de distribuição, sendo x_i o tempo da i -ésima falha.

3.2 Modelo com censura à direita

Quando há censura à direita de uma ou mais unidades, ou seja, quando o estudo é finalizado sem que a falha tenha ocorrido em uma ou mais unidades amostrais, a função de verossimilhança é dada por

$$L(\lambda, \delta) = \prod_{i=1}^n [f(x_i; \lambda, \delta)]^{c_i} [1 - F(T)]^{1-c_i} \quad (3.2)$$

com c_i indicando se houve censura ($c_i = 0$) ou se o tempo de falha foi observado ($c_i = 1$). $F(x_i)$ é dada pela equação 2.6.

Neste modelo, a i -ésima unidade amostral é representada por sua função de distribuição se seu tempo de falha foi observado. No caso do tempo de falha da i -ésima unidade ter sido censurado, é representado pela probabilidade de o tempo de falha ser superior ao tempo de censura (T).

3.3 Modelo com censura progressiva à direita do tipo 2

Neste esquema de censura, o teste é finalizado quando da ocorrência da m -ésima falha, sendo $m \leq n$ o número prefixado de falhas a observar. Quando da ocorrência da i -ésima falha, retiramos aleatoriamente do experimento R_i unidades que ainda não falharam. Os valores R_1, R_2, \dots, R_m são preestabelecidos.

Sejam $X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(m)}$ os tempos de falha ordenados das m unidades que falharam.

A função de densidade conjunta destas estatísticas de ordem censuradas progres-

sivamente, dada por Balakrishnan e Aggarwala (2000), é

$$f_{X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(m)}}(x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(m)}) = C \prod_{i=1}^m f(x_{(i)}) \{1 - F(x_{(i)})\}^{R_i}, \quad (3.3)$$

$$x_{(1)} < x_{(2)} < \dots < x_{(m)},$$

sendo $C = n(n - R_1 - 1)(n - R_1 - R_2 - 2) \dots (n - R_1 - \dots - R_{m-1} - m + 1)$.

Como relatado em Balakrishnan (2007), a constante C além de ser uma constante normalizadora, também representa o número de formas em que as m estatísticas de ordem censuradas do Tipo 2 podem ocorrer. Antes da ocorrência da primeira falha, há n unidades que não falharam. Após a primeira falha e a censura de R_1 unidades, há $n - R_1 - 1$ unidades que podem ser a segunda a falhar. Após a segunda falha, há $n - R_1 - R_2 - 2$ que podem ser a terceira a falhar e assim sucessivamente.

3.4 Modelo com censura ECPHA Tipo 1

Neste esquema de censura, temos o tempo de encerramento do estudo predeterminado (T) e também preestabelecido o número de falhas em que pode ocorrer censura (m). Seja D o número de falhas que ocorreram. Quando D for maior que m , não mais censuraremos unidades aleatoriamente após a ocorrência da $(m+1)$ -ésima falha, isto é, teremos $R_{m+1} = R_{m+2} = \dots = R_D = 0$. No caso de D ser menor que m , as unidades que não tiverem falhado nem tiverem sido censuradas serão censuradas somente no tempo T .

A função de verossimilhança para este modelo, dada por Lin et al. (2012), é

$$L(\lambda, \delta) = c_D \prod_{i=1}^D f(x_i; \lambda, \delta) [1 - F_X(x_i)]^{R_i} [1 - F_X(T)]^{R_D^*}, \quad (3.4)$$

sendo $c_D = \prod_{i=1}^D \gamma_i$ com $\gamma_i = m - i + 1 + \sum_{j=1}^m R_j$ e $R_D^* = n - D - \sum_{i=1}^D R_i$,
 $1 \leq D \leq n$.

Quando a m -ésima falha ocorre no tempo T , temos o equivalente do modelo com censura progressiva à direita do tipo 2 (3.3).

Capítulo 4

Estimação do modelo com presença de censura ECPHA Tipo 1

4.1 Estimação por máxima verossimilhança

A função de verossimilhança do modelo com a presença de censura ECPHA Tipo 1 é dada pela equação 3.4.

Entretanto é mais conveniente trabalhar com o logaritmo natural da função de verossimilhança (log-verossimilhança).

Também será usado o logaritmo natural do tempo de falha Weibull, ou seja, tempo de falha com distribuição Gumbel. Para isso, sejam $Y_i = \ln X_i$, $i = 1, \dots, n$. Temos que Y_1, \dots, Y_n são iid com distribuição comum Gumbel(μ, σ) com $\mu = -\frac{\ln \lambda}{\delta}$ e $\sigma = \frac{1}{\delta}$. Seja $T_L = \ln T$.

Desta forma a função de log-verossimilhança é dada por:

$$\ln L(\mu, \sigma) = \ln \left[c_D \prod_{i=1}^D f(y_i; \mu, \sigma) [1 - F_Y(y_i)]^{R_i} [1 - F_Y(T_L)]^{R_D^*} \right] =$$

$$\begin{aligned}
&= \ln(c_D) + \sum_{i=1}^D \ln f(y_i; \mu, \sigma) + \sum_{i=1}^D R_i \ln [1 - F_Y(y_i)] + R_D^* \ln [1 - F_Y(T_L)] \\
&= \ln(c_D) + \sum_{i=1}^D \left[-\ln \sigma + \left(\frac{y_i - \mu}{\sigma} \right) - \exp \left(\frac{y_i - \mu}{\sigma} \right) \right] \\
&+ \sum_{i=1}^D R_i \left[-\exp \left(\frac{y_i - \mu}{\sigma} \right) \right] + R_D^* \left[-\exp \left(\frac{T_L - \mu}{\sigma} \right) \right]. \tag{4.1}
\end{aligned}$$

Precisamos das derivadas parciais da equação de log-verossimilhança (equação 4.1) para obtermos os estimadores de máxima verossimilhança.

A seguir são apresentados detalhadamente os cálculos para obtenção dos estimadores de máxima verossimilhança.

A derivada parcial da log-verossimilhança (4.1) em relação a μ é:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \ln L(\mu, \sigma)}{\partial \mu} &= \sum_{i=1}^D \left[\frac{-1}{\sigma} + \frac{1}{\sigma} \exp \left(\frac{y_i - \mu}{\sigma} \right) \right] + \sum_{i=1}^D R_i \left[\frac{1}{\sigma} \exp \left(\frac{y_i - \mu}{\sigma} \right) \right] \\
&+ R_D^* \left[\frac{1}{\sigma} \exp \left(\frac{T_L - \mu}{\sigma} \right) \right]. \tag{4.2}
\end{aligned}$$

Já a derivada parcial da log-verossimilhança (4.1) em relação a σ é:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \ln L(\mu, \sigma)}{\partial \sigma} &= \sum_{i=1}^D \left[\frac{-1}{\sigma} - \left(\frac{y_i - \mu}{\sigma^2} \right) + \left(\frac{y_i - \mu}{\sigma^2} \right) \exp \left(\frac{y_i - \mu}{\sigma} \right) \right] \\
&+ \sum_{i=1}^D R_i \left[\left(\frac{y_i - \mu}{\sigma^2} \right) \exp \left(\frac{y_i - \mu}{\sigma} \right) \right] \\
&+ R_D^* \left[\left(\frac{T_L - \mu}{\sigma^2} \right) \exp \left(\frac{T_L - \mu}{\sigma} \right) \right]. \tag{4.3}
\end{aligned}$$

Igualando a zero a equação 4.2 para obtermos o estimador de máxima verossimilhança de μ , temos:

$$\frac{\partial \ln L(\mu, \sigma)}{\partial \mu} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^D \left[\frac{-1}{\hat{\sigma}} + \frac{1}{\hat{\sigma}} \exp \left(\frac{y_i - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}} \right) \right] + \sum_{i=1}^D R_i \left[\frac{1}{\hat{\sigma}} \exp \left(\frac{y_i - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}} \right) \right] + R_D^* \left[\frac{1}{\hat{\sigma}} \exp \left(\frac{T_L - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}} \right) \right] = 0. \quad (4.4)$$

Multiplicando 4.4 por $\hat{\sigma}$, temos:

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \sum_{i=1}^D \left[-1 + \exp \left(\frac{y_i - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}} \right) \right] + \sum_{i=1}^D R_i \left[\exp \left(\frac{y_i - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}} \right) \right] + R_D^* \left[\exp \left(\frac{T_L - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}} \right) \right] = 0 \\ &\Rightarrow -D + \sum_{i=1}^D \left[\exp \left(\frac{y_i - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}} \right) \right] + \sum_{i=1}^D R_i \left[\exp \left(\frac{y_i - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}} \right) \right] + R_D^* \left[\exp \left(\frac{T_L - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}} \right) \right] = 0 \\ &\Rightarrow -D + \sum_{i=1}^D (R_i + 1) \left[\exp \left(\frac{y_i - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}} \right) \right] + R_D^* \left[\exp \left(\frac{T_L - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}} \right) \right] = 0 \\ &\Rightarrow -D + \frac{1}{\exp \left(\frac{\hat{\mu}}{\hat{\sigma}} \right)} \cdot \left[\sum_{i=1}^D (R_i + 1) \exp \left(\frac{y_i}{\hat{\sigma}} \right) + R_D^* \exp \left(\frac{T_L}{\hat{\sigma}} \right) \right] = 0 \\ &\Rightarrow \frac{1}{\exp \left(\frac{\hat{\mu}}{\hat{\sigma}} \right)} \cdot \left[\sum_{i=1}^D (R_i + 1) \exp \left(\frac{y_i}{\hat{\sigma}} \right) + R_D^* \exp \left(\frac{T_L}{\hat{\sigma}} \right) \right] = D \\ &\Rightarrow \exp \left(\frac{\hat{\mu}}{\hat{\sigma}} \right) = \frac{\sum_{i=1}^D (R_i + 1) \exp \left(\frac{y_i}{\hat{\sigma}} \right) + R_D^* \exp \left(\frac{T_L}{\hat{\sigma}} \right)}{D}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Aplicando o logaritmo natural à equação 4.5, temos:

$$\frac{\hat{\mu}}{\hat{\sigma}} = \ln \left(\frac{\sum_{i=1}^D (R_i + 1) \exp \left(\frac{y_i}{\hat{\sigma}} \right) + R_D^* \exp \left(\frac{T_L}{\hat{\sigma}} \right)}{D} \right). \quad (4.6)$$

Assim, de 4.6, temos que o estimador de máxima verossimilhança de μ é dado por:

$$\hat{\mu} = \hat{\sigma} \cdot \ln \left(\frac{\sum_{i=1}^D (R_i + 1) \exp \left(\frac{y_i}{\hat{\sigma}} \right) + R_D^* \exp \left(\frac{T_L}{\hat{\sigma}} \right)}{D} \right). \quad (4.7)$$

Igualando a zero a equação 4.3 para obtermos o estimador de máxima verossi-

milhança de σ e usando o resultado do estimador de μ ($\hat{\mu}$) dado em 4.7, temos:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \ln L(\mu, \sigma)}{\partial \sigma} = 0 \\
& \Rightarrow \sum_{i=1}^D \left[\frac{-1}{\hat{\sigma}} - \left(\frac{y_i - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}^2} \right) + \left(\frac{y_i - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}^2} \right) \exp \left(\frac{y_i - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}} \right) \right] \\
& \quad + \sum_{i=1}^D R_i \left[\left(\frac{y_i - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}^2} \right) \exp \left(\frac{y_i - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}} \right) \right] + R_D^* \left[\left(\frac{T_L - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}^2} \right) \exp \left(\frac{T_L - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}} \right) \right] = 0 \\
& \Rightarrow \frac{-D}{\hat{\sigma}} - \sum_{i=1}^D \left(\frac{y_i - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}^2} \right) + \sum_{i=1}^D (R_i + 1) \left[\left(\frac{y_i - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}^2} \right) \exp \left(\frac{y_i - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}} \right) \right] \\
& \quad + R_D^* \left[\left(\frac{T_L - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}^2} \right) \exp \left(\frac{T_L - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}} \right) \right] = 0. \tag{4.8}
\end{aligned}$$

Multiplicando 4.8 por $\hat{\sigma}^2$, temos:

$$\begin{aligned}
& \Rightarrow -D\hat{\sigma} - \sum_{i=1}^D (y_i - \hat{\mu}) + \sum_{i=1}^D (R_i + 1) \left[(y_i - \hat{\mu}) \exp \left(\frac{y_i - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}} \right) \right] \\
& \quad + R_D^* \left[(T_L - \hat{\mu}) \exp \left(\frac{T_L - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}} \right) \right] = 0 \\
& \Rightarrow -D\hat{\sigma} - \sum_{i=1}^D y_i + D\hat{\mu} + \exp \left(\frac{-\hat{\mu}}{\hat{\sigma}} \right) \sum_{i=1}^D (R_i + 1) \left[(y_i - \hat{\mu}) \exp \left(\frac{y_i}{\hat{\sigma}} \right) \right] \\
& \quad + R_D^* \exp \left(\frac{-\hat{\mu}}{\hat{\sigma}} \right) \left[(T_L - \hat{\mu}) \exp \left(\frac{T_L}{\hat{\sigma}} \right) \right] = 0. \tag{4.9}
\end{aligned}$$

Usando o resultado de 4.5, temos:

$$\begin{aligned}
& \Rightarrow -D\hat{\sigma} - \sum_{i=1}^D y_i + D\hat{\mu} + D \frac{\sum_{i=1}^D (R_i + 1) \left[(y_i - \hat{\mu}) \exp \left(\frac{y_i}{\hat{\sigma}} \right) \right]}{\sum_{i=1}^D (R_i + 1) \exp \left(\frac{y_i}{\hat{\sigma}} \right) + R_D^* \exp \left(\frac{T_L}{\hat{\sigma}} \right)} \\
& \quad + R_D^* D \frac{(T_L - \hat{\mu}) \exp \left(\frac{T_L}{\hat{\sigma}} \right)}{\sum_{i=1}^D (R_i + 1) \exp \left(\frac{y_i}{\hat{\sigma}} \right) + R_D^* \exp \left(\frac{T_L}{\hat{\sigma}} \right)} = 0. \tag{4.10}
\end{aligned}$$

Dividindo por D a equação 4.10, temos:

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow -\hat{\sigma} - \frac{\sum_{i=1}^D y_i}{D} + \hat{\mu} + \frac{\sum_{i=1}^D (R_i + 1) \left[(y_i - \hat{\mu}) \exp\left(\frac{y_i}{\hat{\sigma}}\right) \right]}{\sum_{i=1}^D (R_i + 1) \exp\left(\frac{y_i}{\hat{\sigma}}\right) + R_D^* \exp\left(\frac{T_L}{\hat{\sigma}}\right)} \\
&\quad + R_D^* \frac{(T_L - \hat{\mu}) \exp\left(\frac{T_L}{\hat{\sigma}}\right)}{\sum_{i=1}^D (R_i + 1) \exp\left(\frac{y_i}{\hat{\sigma}}\right) + R_D^* \exp\left(\frac{T_L}{\hat{\sigma}}\right)} = 0 \\
&\Rightarrow -\hat{\sigma} - \frac{\sum_{i=1}^D y_i}{D} + \hat{\mu} + \frac{\sum_{i=1}^D (R_i + 1) \left[y_i \exp\left(\frac{y_i}{\hat{\sigma}}\right) \right]}{\sum_{i=1}^D (R_i + 1) \exp\left(\frac{y_i}{\hat{\sigma}}\right) + R_D^* \exp\left(\frac{T_L}{\hat{\sigma}}\right)} \\
&\quad + R_D^* \frac{T_L \exp\left(\frac{T_L}{\hat{\sigma}}\right)}{\sum_{i=1}^D (R_i + 1) \exp\left(\frac{y_i}{\hat{\sigma}}\right) + R_D^* \exp\left(\frac{T_L}{\hat{\sigma}}\right)} \\
&\quad - \frac{\sum_{i=1}^D (R_i + 1) \left[\hat{\mu} \exp\left(\frac{y_i}{\hat{\sigma}}\right) \right]}{\sum_{i=1}^D (R_i + 1) \exp\left(\frac{y_i}{\hat{\sigma}}\right) + R_D^* \exp\left(\frac{T_L}{\hat{\sigma}}\right)} \\
&\quad - R_D^* \frac{\hat{\mu} \exp\left(\frac{T_L}{\hat{\sigma}}\right)}{\sum_{i=1}^D (R_i + 1) \exp\left(\frac{y_i}{\hat{\sigma}}\right) + R_D^* \exp\left(\frac{T_L}{\hat{\sigma}}\right)} = 0 \\
&\Rightarrow -\hat{\sigma} - \frac{\sum_{i=1}^D y_i}{D} + \hat{\mu} + \frac{\sum_{i=1}^D (R_i + 1) \left[y_i \exp\left(\frac{y_i}{\hat{\sigma}}\right) \right] + R_D^* T_L \exp\left(\frac{T_L}{\hat{\sigma}}\right)}{\sum_{i=1}^D (R_i + 1) \exp\left(\frac{y_i}{\hat{\sigma}}\right) + R_D^* \exp\left(\frac{T_L}{\hat{\sigma}}\right)} \\
&\quad - \hat{\mu} \frac{\sum_{i=1}^D (R_i + 1) \exp\left(\frac{y_i}{\hat{\sigma}}\right) + R_D^* \exp\left(\frac{T_L}{\hat{\sigma}}\right)}{\sum_{i=1}^D (R_i + 1) \exp\left(\frac{y_i}{\hat{\sigma}}\right) + R_D^* \exp\left(\frac{T_L}{\hat{\sigma}}\right)} = 0 \\
&\Rightarrow -\hat{\sigma} - \frac{\sum_{i=1}^D y_i}{D} + \hat{\mu} + \frac{\sum_{i=1}^D (R_i + 1) \left[y_i \exp\left(\frac{y_i}{\hat{\sigma}}\right) \right] + R_D^* T_L \exp\left(\frac{T_L}{\hat{\sigma}}\right)}{\sum_{i=1}^D (R_i + 1) \exp\left(\frac{y_i}{\hat{\sigma}}\right) + R_D^* \exp\left(\frac{T_L}{\hat{\sigma}}\right)} - \hat{\mu} = 0 \\
&\Rightarrow -\hat{\sigma} - \frac{\sum_{i=1}^D y_i}{D} + \frac{\sum_{i=1}^D (R_i + 1) \left[y_i \exp\left(\frac{y_i}{\hat{\sigma}}\right) \right] + R_D^* T_L \exp\left(\frac{T_L}{\hat{\sigma}}\right)}{\sum_{i=1}^D (R_i + 1) \exp\left(\frac{y_i}{\hat{\sigma}}\right) + R_D^* \exp\left(\frac{T_L}{\hat{\sigma}}\right)} = 0. \quad (4.11)
\end{aligned}$$

Finalmente, temos, de 4.11, a seguinte equação para obtenção do estimador de máxima verossimilhança de σ :

$$\frac{\sum_{i=1}^D y_i}{D} = \frac{\sum_{i=1}^D (R_i + 1) \left[y_i \exp\left(\frac{y_i}{\hat{\sigma}}\right) \right] + R_D^* T_L \exp\left(\frac{T_L}{\hat{\sigma}}\right)}{\sum_{i=1}^D (R_i + 1) \exp\left(\frac{y_i}{\hat{\sigma}}\right) + R_D^* \exp\left(\frac{T_L}{\hat{\sigma}}\right)} - \hat{\sigma}. \quad (4.12)$$

O estimador de σ dado pela equação 4.12 não pode ser resolvido analiticamente. Usaremos métodos numéricos para calculá-lo e então o usaremos para obter o estimador de μ dado pela equação 4.7.

Os estimadores de máxima verossimilhança não existem quando $D = 0$ (nenhuma falha é observada).

A seguir, vamos calcular a matriz de variância-covariância assintótica para que possamos fazer inferências sobre os estimadores de máxima verossimilhança (EMV) obtidos.

4.1.1 Matriz de variância-covariância assintótica

De Casella e Berger (2001) e Lehmann e Casella (1998), temos que a matriz de variância-covariância assintótica dos estimadores EMV pode ser obtida usando a matriz de informação de Fisher.

Dados um vetor $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_k)$ e X uma variável aleatória cuja função de distribuição ($f(X; \theta)$) dependa de θ , a matriz de informação de Fisher em θ de uma amostra aleatória de tamanho n de X é definida como sendo a matriz $I(\theta)$ cuja i -ésima linha e j -ésima coluna é dada por

$$I_{ij}(\theta) = E \left[\frac{\partial \log f(X; \theta)}{\partial \theta_i} \frac{\partial \log f(X; \theta)}{\partial \theta_j} \right] = -E \left[\frac{\partial^2 \log f(X; \theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right] \quad (4.13)$$

com $1 < i, j < k$.

Então a matriz de variância-covariância assintótica do EMV de θ ($\hat{\theta}$) é dada por

$$Var(\hat{\theta}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{I_{11}(\theta)} & \frac{1}{I_{12}(\theta)} & \cdots & \frac{1}{I_{1j}(\theta)} \\ \frac{1}{I_{21}(\theta)} & \frac{1}{I_{22}(\theta)} & \cdots & \frac{1}{I_{2j}(\theta)} \\ \vdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ \frac{1}{I_{i1}(\theta)} & \frac{1}{I_{i2}(\theta)} & \cdots & \frac{1}{I_{ij}(\theta)} \end{pmatrix}. \quad (4.14)$$

No modelo com censura ECPHA Tipo 1, como nem todos os dados são necessariamente observados (o mais comum é haver censura), para obtermos a matriz de informação de Fisher, precisaremos utilizar o princípio da informação faltante (Louis, 1982). Segundo este princípio, temos:

$$\text{Informação observada} = \text{Informação completa} - \text{Informação faltante}. \quad (4.15)$$

Temos a informação completa quando não há censura, ou seja, quando todos os dados são observados. Conforme Ng et al. (2002) relata, há resultados clássicos para a matriz de informação completa da distribuição de valor extremo (GEV) Gumbel, como por exemplo Stephens (1977). A matriz de informação completa para a GEV Gumbel dada em Stephens (1977) é

$$I \begin{pmatrix} \mu \\ \sigma \end{pmatrix} = \frac{n}{\sigma^2} \begin{pmatrix} 1 & 1 - \gamma \\ 1 - \gamma & c^2 \end{pmatrix}, \quad (4.16)$$

sendo $\gamma = 0.577215665$ a constante de Euler e c^2 igual a $\pi^2/6 + (1 - \gamma)^2 = 1.823680661$.

Conforme Ng et al. (2002), para obtermos a matriz da informação faltante, precisaremos da distribuição condicional dos dados que foram censurados quando da

ocorrência da j -ésima falha.

Sejam $Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_D)$ e $Z = (Z_1, Z_2, \dots, Z_D)$ os dados observados e os dados censurados, respectivamente. $Z_j = (Z_{j1}, Z_{j2}, \dots, Z_{jR_j})$ é um vetor com os dados censurados quando da j -ésima falha.

Segundo teorema em Ng et al. (2002), a distribuição condicional de Z_{jk} dado $Y_1 = y_1, Y_2 = y_2, \dots, Y_j = y_j$ é

$$\begin{aligned} f_{Z|Y}(z_j|Y_1 = y_1, Y_2 = y_2, \dots, Y_j = y_j) &= f_{Z|Y}(z_j|Y_j = y_j) \\ &= \frac{f_Y(z_j)}{[1 - F_Y(y_j)]}, \quad z_j > y_j, \end{aligned} \quad (4.17)$$

com Z_{jk} e Z_{jl} , $k \neq l$, condicionalmente independentes dado $Y_j = y_j$.

Com Y sendo uma GEV Gumbel, a distribuição condicional dada pela equação 4.17 é uma GEV Gumbel truncada à esquerda em y_j e tem como função de distribuição

$$\begin{aligned} f_{Z|Y}(z_j|Z_j > y_j, \mu, \sigma) &= \frac{\frac{1}{\sigma} \exp \left[\frac{z_j - \mu}{\sigma} - \exp \left(\frac{z_j - \mu}{\sigma} \right) \right]}{\exp \left[- \exp \left(\frac{y_j - \mu}{\sigma} \right) \right]} \\ &= \frac{1}{\sigma} \exp \left[\exp \left(\frac{y_j - \mu}{\sigma} \right) \right] \exp \left[\frac{z_j - \mu}{\sigma} - \exp \left(\frac{z_j - \mu}{\sigma} \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.18)$$

O logaritmo natural da função dada em 4.18 é

$$\ln f_{Z|Y}(z_j|Z_j > y_j, \mu, \sigma) = - \ln \sigma + \exp \left(\frac{y_j - \mu}{\sigma} \right) + \frac{z_j - \mu}{\sigma} - \exp \left(\frac{z_j - \mu}{\sigma} \right). \quad (4.19)$$

Para obtermos a matriz de informação da função dada em 4.19, precisaremos das derivadas parciais de segunda ordem. Esta matriz fornecerá a informação de cada unidade censurada na j -ésima falha.

A derivada de 4.19 em relação a μ é

$$\frac{\partial \ln f_{Z|Y}(z_j|Z_j > y_j, \mu, \sigma)}{\partial \mu} = -\frac{1}{\sigma} \exp\left(\frac{y_j - \mu}{\sigma}\right) - \frac{1}{\sigma} + \frac{1}{\sigma} \exp\left(\frac{z_j - \mu}{\sigma}\right). \quad (4.20)$$

A derivada de 4.20 em relação a μ é

$$\frac{\partial^2 \ln f_{Z|Y}(z_j|Z_j > y_j, \mu, \sigma)}{\partial \mu^2} = \frac{1}{\sigma^2} \exp\left(\frac{y_j - \mu}{\sigma}\right) - \frac{1}{\sigma^2} \exp\left(\frac{z_j - \mu}{\sigma}\right). \quad (4.21)$$

A derivada de 4.20 em relação a σ é

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \ln f_{Z|Y}(z_j|Z_j > y_j, \mu, \sigma)}{\partial \mu \partial \sigma} &= \frac{1}{\sigma^2} \exp\left(\frac{y_j - \mu}{\sigma}\right) + \frac{y_j - \mu}{\sigma^3} \exp\left(\frac{y_j - \mu}{\sigma}\right) + \frac{1}{\sigma^2} \\ &\quad - \frac{1}{\sigma^2} \exp\left(\frac{z_j - \mu}{\sigma}\right) - \frac{z_j - \mu}{\sigma^3} \exp\left(\frac{z_j - \mu}{\sigma}\right). \end{aligned} \quad (4.22)$$

A derivada de 4.19 em relação a σ é

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln f_{Z|Y}(z_j|Z_j > y_j, \mu, \sigma)}{\partial \sigma} &= -\frac{1}{\sigma} - \frac{y_j - \mu}{\sigma^2} \exp\left(\frac{y_j - \mu}{\sigma}\right) - \frac{z_j - \mu}{\sigma^2} \\ &\quad + \frac{z_j - \mu}{\sigma^2} \exp\left(\frac{z_j - \mu}{\sigma}\right). \end{aligned} \quad (4.23)$$

A derivada de 4.23 em relação a σ é

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \ln f_{Z|Y}(z_j|Z_j > y_j, \mu, \sigma)}{\partial \sigma^2} &= \frac{1}{\sigma^2} + \frac{2(y_j - \mu)}{\sigma^3} \exp\left(\frac{y_j - \mu}{\sigma}\right) \\ &\quad + \frac{(y_j - \mu)^2}{\sigma^4} \exp\left(\frac{y_j - \mu}{\sigma}\right) + \frac{2(z_j - \mu)}{\sigma^3} \\ &\quad - \frac{2(z_j - \mu)}{\sigma^3} \exp\left(\frac{z_j - \mu}{\sigma}\right) - \frac{(z_j - \mu)^2}{\sigma^4} \exp\left(\frac{z_j - \mu}{\sigma}\right). \end{aligned} \quad (4.24)$$

Para calcularmos a matriz de informação de cada unidade censurada, precisamos do valor esperado das derivadas dadas pelas equações 4.21, 4.22 e 4.24.

Para efetuarmos esse cálculo, utilizaremos a função geradora de momentos de $(Z_j - \mu)/\sigma$ dado Y_j .

Seja $W = (Z_j - \mu)/\sigma$.

A função de distribuição de $W|Y$ é obtida a partir da equação 4.18 e é dada por:

$$\begin{aligned}
f_{W|Y}(w|W > y_j, \mu, \sigma) &= \frac{1}{\sigma} \exp \left[\exp \left(\frac{y_j - \mu}{\sigma} \right) \right] \exp [w - \exp(w)] \left| \frac{dz}{dw} \right| \\
&= \frac{1}{\sigma} \exp \left[\exp \left(\frac{y_j - \mu}{\sigma} \right) \right] \exp [w - \exp(w)] |\sigma| \\
&= \frac{1}{\sigma} \exp \left[\exp \left(\frac{y_j - \mu}{\sigma} \right) \right] \exp [w - \exp(w)] \sigma \\
&= \exp \left[\exp \left(\frac{y_j - \mu}{\sigma} \right) \right] \exp [w - \exp(w)].
\end{aligned} \tag{4.25}$$

Desta forma, a função geradora de $(Z_j - \mu)/\sigma$ dado Y_j é

$$\begin{aligned}
M_{W|Y}(t) &= E(\exp(tw)) \\
&= \int_{\frac{y_j - \mu}{\sigma}}^{\infty} \exp(tw) \exp \left[\exp \left(\frac{y_j - \mu}{\sigma} \right) \right] \exp [w - \exp(w)] dw \\
&= \exp \left[\exp \left(\frac{y_j - \mu}{\sigma} \right) \right] \int_{\frac{y_j - \mu}{\sigma}}^{\infty} \exp(tw) \exp [w - \exp(w)] dw \\
&= \exp \left[\exp \left(\frac{y_j - \mu}{\sigma} \right) \right] \int_{\frac{y_j - \mu}{\sigma}}^{\infty} [\exp(w)]^t \exp w \exp [-\exp(w)] dw.
\end{aligned} \tag{4.26}$$

Seja

$$u = \exp(w). \tag{4.27}$$

Logo

$$du = \exp(w) dw. \tag{4.28}$$

Substituindo 4.27 e 4.28 em 4.26, temos:

$$\begin{aligned}
M_{W|Y}(t) &= \exp \left[\exp \left(\frac{y_j - \mu}{\sigma} \right) \right] \int_{e^{\frac{y_j - \mu}{\sigma}}}^{\infty} u^t \exp [-u] du \\
&= \exp \left[\exp \left(\frac{y_j - \mu}{\sigma} \right) \right] \Gamma \left(t + 1, \exp \left(\frac{y_j - \mu}{\sigma} \right) \right),
\end{aligned} \tag{4.29}$$

onde $\Gamma(a, x) = \int_x^\infty u^{a-1} e^{-u} du$ é chamada de função Gama incompleta.

Usando a propriedade $\Gamma(a, x) = \Gamma(a) - \gamma(a, x)$ (ver Abramowitz e Stegun (1964)), onde $\gamma(a, x) = \int_0^x u^{a-1} e^{-u} du$, temos

$$M_{W|Y}(t) = \exp \left[\exp \left(\frac{y_j - \mu}{\sigma} \right) \right] \left[\Gamma(t+1) - \gamma \left(t+1, \exp \left(\frac{y_j - \mu}{\sigma} \right) \right) \right]. \quad (4.30)$$

Usando a propriedade $\gamma(a, x) = x^a \Gamma(a) \exp(-x) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(a+k+1)}$ (ver Abramowitz e Stegun (1964)), temos

$$\begin{aligned} M_{W|Y}(t) &= \exp \left[\exp \left(\frac{y_j - \mu}{\sigma} \right) \right] \Gamma(t+1) \times \\ &\times \left[1 - \left(\exp \left(\frac{y_j - \mu}{\sigma} \right) \right)^{t+1} \exp \left(- \exp \left(\frac{y_j - \mu}{\sigma} \right) \right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\exp \left(\frac{y_j - \mu}{\sigma} \right) \right)^k}{\Gamma(t+1+k+1)} \right] \\ &= \Gamma(t+1) \left[\exp \left[\exp \left(\frac{y_j - \mu}{\sigma} \right) \right] - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\exp \left((t+k+1) \frac{y_j - \mu}{\sigma} \right)}{\Gamma(t+k+2)} \right]. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Também serão necessárias as derivadas de primeira e segunda ordem da função geradora para calcularmos o valor esperado das equações dadas em 4.21, 4.22 e 4.24.

Seja a função digama Ψ (Abramowitz e Stegun, 1964) dada por

$$\Psi(z) = \frac{d \ln \Gamma(z)}{dz} = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}. \quad (4.32)$$

Então temos de 4.32

$$\Gamma'(z) = \Psi(z)\Gamma(z). \quad (4.33)$$

A derivada de primeira ordem da função geradora (equação 4.31) é

$$\begin{aligned}
M'_{W|Y}(t) = & \Psi(t+1)\Gamma(t+1) \left[\exp \left[\exp \left(\frac{y_j - \mu}{\sigma} \right) \right] - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\exp \left((t+k+1) \frac{y_j - \mu}{\sigma} \right)}{\Gamma(t+k+2)} \right] \\
& - \Gamma(t+1) \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\frac{y_j - \mu}{\sigma} \exp \left((t+k+1) \frac{y_j - \mu}{\sigma} \right)}{\Gamma(t+k+2)} \right] \\
& + \Gamma(t+1) \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Psi(t+k+2) \exp \left((t+k+1) \frac{y_j - \mu}{\sigma} \right)}{\Gamma(t+k+2)} \right]. \tag{4.34}
\end{aligned}$$

A equação obtida em 4.34 equivale a

$$M'_{W|Y}(t) = \frac{dE(e^{tw})}{dt} = E(we^{tw}) = E \left(\frac{Z_j - \mu}{\sigma} \exp \left(\frac{Z_j - \mu}{\sigma} t \right) \right). \tag{4.35}$$

Seja a função trigama Ψ' (Abramowitz e Stegun, 1964) dada por

$$\Psi'(z) = \frac{d\Psi(z)}{dz}. \tag{4.36}$$

A derivada de segunda ordem da função geradora (equação 4.31) é

$$\begin{aligned}
M''_{W|Y}(t) = & \Psi'(t+1)\Gamma(t+1) \left[\exp \left[\exp \left(\frac{y_j - \mu}{\sigma} \right) \right] - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\exp \left((t+k+1) \frac{y_j - \mu}{\sigma} \right)}{\Gamma(t+k+2)} \right] \\
& + \Psi^2(t+1)\Gamma(t+1) \left[\exp \left[\exp \left(\frac{y_j - \mu}{\sigma} \right) \right] - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\exp \left((t+k+1) \frac{y_j - \mu}{\sigma} \right)}{\Gamma(t+k+2)} \right] \\
& - \Psi(t+1)\Gamma(t+1) \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\frac{y_j - \mu}{\sigma} \exp \left((t+k+1) \frac{y_j - \mu}{\sigma} \right)}{\Gamma(t+k+2)} \right] +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \Psi(t+1)\Gamma(t+1) \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Psi(t+k+2) \exp\left((t+k+1)\frac{y_j-\mu}{\sigma}\right)}{\Gamma(t+k+2)} \right] \\
& - \Psi(t+1)\Gamma(t+1) \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\frac{y_j-\mu}{\sigma} \exp\left((t+k+1)\frac{y_j-\mu}{\sigma}\right)}{\Gamma(t+k+2)} \right] \\
& + \Psi(t+1)\Gamma(t+1) \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Psi(t+k+2) \exp\left((t+k+1)\frac{y_j-\mu}{\sigma}\right)}{\Gamma(t+k+2)} \right] \\
& - \Gamma(t+1) \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{y_j-\mu}{\sigma}\right)^2 \exp\left((t+k+1)\frac{y_j-\mu}{\sigma}\right)}{\Gamma(t+k+2)} \right] \\
& + \Gamma(t+1) \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Psi(t+k+2) \frac{y_j-\mu}{\sigma} \exp\left((t+k+1)\frac{y_j-\mu}{\sigma}\right)}{\Gamma(t+k+2)} \right] \\
& + \Gamma(t+1) \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Psi'(t+k+2) \exp\left((t+k+1)\frac{y_j-\mu}{\sigma}\right)}{\Gamma(t+k+2)} \right] \\
& + \Gamma(t+1) \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Psi(t+k+2) \frac{y_j-\mu}{\sigma} \exp\left((t+k+1)\frac{y_j-\mu}{\sigma}\right)}{\Gamma(t+k+2)} \right] \\
& - \Gamma(t+1) \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Psi^2(t+k+2) \exp\left((t+k+1)\frac{y_j-\mu}{\sigma}\right)}{\Gamma(t+k+2)} \right]. \tag{4.37}
\end{aligned}$$

A equação obtida em 4.37 equivale a

$$M''_{W|Y}(t) = \frac{d^2 E(e^{tw})}{dt^2} = E(w^2 e^{tw}) = E\left(\left(\frac{Z_j - \mu}{\sigma}\right)^2 \exp\left(\frac{Z_j - \mu}{\sigma} t\right)\right). \tag{4.38}$$

Usando a equação obtida para a função geradora (4.31) no ponto $t = 1$, temos:

$$\begin{aligned}
M_{W|Y}(1) &= E(\exp(tW))|_{t=1} = E(\exp(W)) = E\left(\exp\left(\frac{Z_j - \mu}{\sigma}\right)\right) \\
&= \Gamma(t+1) \left[\exp\left[\exp\left(\frac{y_j - \mu}{\sigma}\right)\right] - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\exp\left((t+k+1)\frac{y_j - \mu}{\sigma}\right)}{\Gamma(t+k+2)} \right]_{t=1} \\
&= \Gamma(2) \left[\exp\left[\exp\left(\frac{y_j - \mu}{\sigma}\right)\right] - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\exp\left((k+2)\frac{y_j - \mu}{\sigma}\right)}{\Gamma(k+3)} \right]. \tag{4.39}
\end{aligned}$$

Como $\Gamma(2) = 1$, temos de 4.39:

$$E\left(\exp\left(\frac{Z_j - \mu}{\sigma}\right)\right) = \left[\exp\left[\exp\left(\frac{y_j - \mu}{\sigma}\right)\right] - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\exp\left((k+2)\frac{y_j - \mu}{\sigma}\right)}{\Gamma(k+3)} \right]. \tag{4.40}$$

Temos que

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\exp\left((k+2)\frac{y_j - \mu}{\sigma}\right)}{\Gamma(k+3)} &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\exp\left((n)\frac{y_j - \mu}{\sigma}\right)}{\Gamma(n+1)} \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\left(\exp\left(\frac{y_j - \mu}{\sigma}\right)\right)^n}{n!} \\
&= \exp\left(\exp\left(\frac{y_j - \mu}{\sigma}\right)\right) - 1 - \exp\left(\frac{y_j - \mu}{\sigma}\right). \tag{4.41}
\end{aligned}$$

Logo de 4.40, temos:

$$\begin{aligned}
E\left(\exp\left(\frac{Z_j - \mu}{\sigma}\right)\right) &= \exp\left[\exp\left(\frac{y_j - \mu}{\sigma}\right)\right] \\
&\quad - \left[\exp\left(\exp\left(\frac{y_j - \mu}{\sigma}\right)\right) - 1 - \exp\left(\frac{y_j - \mu}{\sigma}\right) \right] \\
&= 1 + \exp\left(\frac{y_j - \mu}{\sigma}\right). \tag{4.42}
\end{aligned}$$

Usando a equação obtida para a derivada de primeira ordem (4.34) da função geradora no ponto $t = 0$, temos:

$$\begin{aligned}
M'_{W|Y}(0) &= E(W \exp(tW)) |_{t=0} = E(W) = E\left(\frac{Z_j - \mu}{\sigma}\right) \\
&= \Psi(t+1)\Gamma(t+1) \left[\exp\left[\exp\left(\frac{y_j - \mu}{\sigma}\right)\right] - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\exp\left(\left(t+k+1\right)\frac{y_j - \mu}{\sigma}\right)}{\Gamma(t+k+2)} \right]_{t=0} \\
&\quad - \Gamma(t+1) \cdot \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\frac{y_j - \mu}{\sigma} \exp\left(\left(t+k+1\right)\frac{y_j - \mu}{\sigma}\right)}{\Gamma(t+k+2)} \right]_{t=0} \\
&\quad + \Gamma(t+1) \cdot \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Psi(t+k+2) \exp\left(\left(t+k+1\right)\frac{y_j - \mu}{\sigma}\right)}{\Gamma(t+k+2)} \right]_{t=0} \\
&= \Psi(1)\Gamma(1) \left[\exp\left[\exp\left(\frac{y_j - \mu}{\sigma}\right)\right] - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\exp\left(\left(k+1\right)\frac{y_j - \mu}{\sigma}\right)}{\Gamma(k+2)} \right] \\
&\quad - \Gamma(1) \cdot \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\frac{y_j - \mu}{\sigma} \exp\left(\left(k+1\right)\frac{y_j - \mu}{\sigma}\right) - \Psi(k+2) \exp\left(\left(k+1\right)\frac{y_j - \mu}{\sigma}\right)}{\Gamma(k+2)} \right] \\
&= \Psi(1) \left[\exp\left[\exp\left(\frac{y_j - \mu}{\sigma}\right)\right] - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\exp\left(\left(k+1\right)\frac{y_j - \mu}{\sigma}\right)}{\Gamma(k+2)} \right] \\
&\quad - \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\frac{y_j - \mu}{\sigma} \exp\left(\left(k+1\right)\frac{y_j - \mu}{\sigma}\right) - \Psi(k+2) \exp\left(\left(k+1\right)\frac{y_j - \mu}{\sigma}\right)}{\Gamma(k+2)} \right] \\
&= \Psi(1) \exp\left[\exp\left(\frac{y_j - \mu}{\sigma}\right)\right] + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Psi(k+2) \exp\left(\left(k+1\right)\frac{y_j - \mu}{\sigma}\right)}{\Gamma(k+2)} \\
&\quad - \left[\Psi(1) + \frac{y_j - \mu}{\sigma} \right] \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\exp\left(\left(k+1\right)\frac{y_j - \mu}{\sigma}\right)}{\Gamma(k+2)} \right]. \tag{4.43}
\end{aligned}$$

Temos que

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\exp\left((k+1)\frac{y_j - \mu}{\sigma}\right)}{\Gamma(k+2)} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp\left((n)\frac{y_j - \mu}{\sigma}\right)}{\Gamma(n+1)} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\exp\left(\frac{y_j - \mu}{\sigma}\right)\right)^n}{n!} \\
&= \exp\left(\exp\left(\frac{y_j - \mu}{\sigma}\right)\right) - 1.
\end{aligned} \tag{4.44}$$

Substituindo 4.44 em 4.43, temos:

$$\begin{aligned}
E\left(\frac{Z_j - \mu}{\sigma}\right) &= \Psi(1) \exp\left[\exp\left(\frac{y_j - \mu}{\sigma}\right)\right] + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Psi(k+2) \exp\left((k+1)\frac{y_j - \mu}{\sigma}\right)}{\Gamma(k+2)} \\
&\quad - \left[\Psi(1) + \frac{y_j - \mu}{\sigma}\right] \left[\exp\left(\exp\left(\frac{y_j - \mu}{\sigma}\right)\right) - 1\right] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Psi(k+2) \exp\left((k+1)\frac{y_j - \mu}{\sigma}\right)}{\Gamma(k+2)} + \Psi(1) \\
&\quad - \left[\frac{y_j - \mu}{\sigma}\right] \left[\exp\left(\exp\left(\frac{y_j - \mu}{\sigma}\right)\right) - 1\right].
\end{aligned} \tag{4.45}$$

Usando a equação obtida para a derivada de primeira ordem (4.34) da função geradora no ponto $t = 1$, temos:

$$\begin{aligned}
M'_{W|Y}(1) &= E(W \exp(tW))|_{t=1} = E(W \exp W) = E\left(\frac{Z_j - \mu}{\sigma} \exp \frac{Z_j - \mu}{\sigma}\right) \\
&= \Psi(t+1)\Gamma(t+1) \left[\exp\left[\exp\left(\frac{y_j - \mu}{\sigma}\right)\right] - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\exp\left((t+k+1)\frac{y_j - \mu}{\sigma}\right)}{\Gamma(t+k+2)} \right]_{t=1} \\
&\quad - \Gamma(t+1) \cdot \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\frac{y_j - \mu}{\sigma} \exp\left((t+k+1)\frac{y_j - \mu}{\sigma}\right)}{\Gamma(t+k+2)} \right]_{t=1} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \Gamma(t+1) \cdot \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Psi(t+k+2) \exp\left((t+k+1)\frac{y_j-\mu}{\sigma}\right)}{\Gamma(t+k+2)} \right]_{t=1} \\
& = \Psi(2)\Gamma(2) \left[\exp\left[\exp\left(\frac{y_j-\mu}{\sigma}\right)\right] - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\exp\left((k+2)\frac{y_j-\mu}{\sigma}\right)}{\Gamma(k+3)} \right] \\
& - \Gamma(2) \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\frac{y_j-\mu}{\sigma} \exp\left((k+2)\frac{y_j-\mu}{\sigma}\right) - \Psi(k+3) \exp\left((k+2)\frac{y_j-\mu}{\sigma}\right)}{\Gamma(k+3)} \right] \\
& = \Psi(2) \left[\exp\left[\exp\left(\frac{y_j-\mu}{\sigma}\right)\right] - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\exp\left((k+2)\frac{y_j-\mu}{\sigma}\right)}{\Gamma(k+3)} \right] \\
& - \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\frac{y_j-\mu}{\sigma} \exp\left((k+2)\frac{y_j-\mu}{\sigma}\right) - \Psi(k+3) \exp\left((k+2)\frac{y_j-\mu}{\sigma}\right)}{\Gamma(k+3)} \right] \\
& = \Psi(2) \exp\left[\exp\left(\frac{y_j-\mu}{\sigma}\right)\right] + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Psi(k+3) \exp\left((k+2)\frac{y_j-\mu}{\sigma}\right)}{\Gamma(k+3)} \\
& - \left[\Psi(2) + \frac{y_j-\mu}{\sigma} \right] \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\exp\left((k+2)\frac{y_j-\mu}{\sigma}\right)}{\Gamma(k+3)}. \tag{4.46}
\end{aligned}$$

Substituindo 4.41 em 4.46, temos:

$$\begin{aligned}
E\left(\frac{Z_j - \mu}{\sigma} \exp \frac{Z_j - \mu}{\sigma}\right) &= \Psi(2) \exp \left[\exp \left(\frac{y_j - \mu}{\sigma} \right) \right] \\
&+ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Psi(k+3) \exp \left((k+2) \frac{y_j - \mu}{\sigma} \right)}{\Gamma(k+3)} \\
&- \left[\Psi(2) + \frac{y_j - \mu}{\sigma} \right] \left[\exp \left(\exp \left(\frac{y_j - \mu}{\sigma} \right) \right) - 1 - \exp \left(\frac{y_j - \mu}{\sigma} \right) \right] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Psi(k+3) \exp \left((k+2) \frac{y_j - \mu}{\sigma} \right)}{\Gamma(k+3)} \\
&+ \left[\Psi(2) + \frac{y_j - \mu}{\sigma} \right] \left[1 + \exp \left(\frac{y_j - \mu}{\sigma} \right) \right] \\
&- \left[\frac{y_j - \mu}{\sigma} \right] \left[\exp \left(\exp \left(\frac{y_j - \mu}{\sigma} \right) \right) \right].
\end{aligned} \tag{4.47}$$

Usando a equação obtida para a derivada de segunda ordem (4.37) da função geradora no ponto $t = 1$, temos:

$$\begin{aligned}
M''_{W|Y}(1) &= E(W^2 \exp(tW)) \Big|_{t=1} = E(W^2 \exp W) = E\left(\left(\frac{Z_j - \mu}{\sigma}\right)^2 \exp \frac{Z_j - \mu}{\sigma}\right) \\
&= \Psi'(t+1)\Gamma(t+1) \left[\exp \left[\exp \left(\frac{y_j - \mu}{\sigma} \right) \right] - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\exp \left((t+k+1) \frac{y_j - \mu}{\sigma} \right)}{\Gamma(t+k+2)} \right] \Big|_{t=1} \\
&+ \Psi^2(t+1)\Gamma(t+1) \left[\exp \left[\exp \left(\frac{y_j - \mu}{\sigma} \right) \right] - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\exp \left((t+k+1) \frac{y_j - \mu}{\sigma} \right)}{\Gamma(t+k+2)} \right] \Big|_{t=1} \\
&- \Psi(t+1)\Gamma(t+1) \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\frac{y_j - \mu}{\sigma} \exp \left((t+k+1) \frac{y_j - \mu}{\sigma} \right)}{\Gamma(t+k+2)} \right] \Big|_{t=1} \\
&+ \Psi(t+1)\Gamma(t+1) \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Psi(t+k+2) \exp \left((t+k+1) \frac{y_j - \mu}{\sigma} \right)}{\Gamma(t+k+2)} \right] \Big|_{t=1} -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\Psi(t+1)\Gamma(t+1) \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\frac{y_j - \mu}{\sigma} \exp\left((t+k+1)\frac{y_j - \mu}{\sigma}\right)}{\Gamma(t+k+2)} \right]_{t=1} \\
& +\Psi(t+1)\Gamma(t+1) \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Psi(t+k+2) \exp\left((t+k+1)\frac{y_j - \mu}{\sigma}\right)}{\Gamma(t+k+2)} \right]_{t=1} \\
& -\Gamma(t+1) \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{y_j - \mu}{\sigma}\right)^2 \exp\left((t+k+1)\frac{y_j - \mu}{\sigma}\right)}{\Gamma(t+k+2)} \right]_{t=1} \\
& +\Gamma(t+1) \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Psi(t+k+2) \frac{y_j - \mu}{\sigma} \exp\left((t+k+1)\frac{y_j - \mu}{\sigma}\right)}{\Gamma(t+k+2)} \right]_{t=1} \\
& +\Gamma(t+1) \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Psi'(t+k+2) \exp\left((t+k+1)\frac{y_j - \mu}{\sigma}\right)}{\Gamma(t+k+2)} \right]_{t=1} \\
& +\Gamma(t+1) \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Psi(t+k+2) \frac{y_j - \mu}{\sigma} \exp\left((t+k+1)\frac{y_j - \mu}{\sigma}\right)}{\Gamma(t+k+2)} \right]_{t=1} \\
& -\Gamma(t+1) \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Psi^2(t+k+2) \exp\left((t+k+1)\frac{y_j - \mu}{\sigma}\right)}{\Gamma(t+k+2)} \right]_{t=1} . \tag{4.48}
\end{aligned}$$

Portanto, temos:

$$\begin{aligned}
E \left(\left(\frac{Z_j - \mu}{\sigma} \right)^2 \exp \frac{Z_j - \mu}{\sigma} \right) = \\
\Psi'(2)\Gamma(2) \left[\exp \left[\exp \left(\frac{y_j - \mu}{\sigma} \right) \right] - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\exp \left((k+2) \frac{y_j - \mu}{\sigma} \right)}{\Gamma(k+3)} \right] \\
+ \Psi^2(2)\Gamma(2) \left[\exp \left[\exp \left(\frac{y_j - \mu}{\sigma} \right) \right] - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\exp \left((k+2) \frac{y_j - \mu}{\sigma} \right)}{\Gamma(k+3)} \right] -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \Psi(2)\Gamma(2) \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\frac{y_j - \mu}{\sigma} \exp\left((k+2)\frac{y_j - \mu}{\sigma}\right)}{\Gamma(k+3)} \right] \\
& + \Psi(2)\Gamma(2) \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Psi(k+3) \exp\left((k+2)\frac{y_j - \mu}{\sigma}\right)}{\Gamma(k+3)} \right] \\
& - \Psi(2)\Gamma(2) \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\frac{y_j - \mu}{\sigma} \exp\left((k+2)\frac{y_j - \mu}{\sigma}\right)}{\Gamma(k+3)} \right] \\
& + \Psi(2)\Gamma(2) \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Psi(k+3) \exp\left((k+2)\frac{y_j - \mu}{\sigma}\right)}{\Gamma(k+3)} \right] \\
& - \Gamma(2) \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{y_j - \mu}{\sigma}\right)^2 \exp\left((k+2)\frac{y_j - \mu}{\sigma}\right)}{\Gamma(k+3)} \right] \\
& + \Gamma(2) \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Psi(k+3) \frac{y_j - \mu}{\sigma} \exp\left((k+2)\frac{y_j - \mu}{\sigma}\right)}{\Gamma(k+3)} \right] \\
& + \Gamma(2) \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Psi'(k+3) \exp\left((k+2)\frac{y_j - \mu}{\sigma}\right)}{\Gamma(k+3)} \right] \\
& + \Gamma(2) \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Psi(k+3) \frac{y_j - \mu}{\sigma} \exp\left((k+2)\frac{y_j - \mu}{\sigma}\right)}{\Gamma(k+3)} \right] \\
& - \Gamma(2) \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Psi^2(k+3) \exp\left((k+2)\frac{y_j - \mu}{\sigma}\right)}{\Gamma(k+3)} \right].
\end{aligned} \tag{4.49}$$

Como $\Gamma(2) = 1$, temos:

$$E \left(\left(\frac{Z_j - \mu}{\sigma} \right)^2 \exp \frac{Z_j - \mu}{\sigma} \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= \Psi'(2) \left[\exp \left[\exp \left(\frac{y_j - \mu}{\sigma} \right) \right] - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\exp \left((k+2) \frac{y_j - \mu}{\sigma} \right)}{\Gamma(k+3)} \right] \\
&+ \Psi^2(2) \left[\exp \left[\exp \left(\frac{y_j - \mu}{\sigma} \right) \right] - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\exp \left((k+2) \frac{y_j - \mu}{\sigma} \right)}{\Gamma(k+3)} \right] \\
&- \Psi(2) \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\frac{y_j - \mu}{\sigma} \exp \left((k+2) \frac{y_j - \mu}{\sigma} \right)}{\Gamma(k+3)} \right] \\
&+ \Psi(2) \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Psi(k+3) \exp \left((k+2) \frac{y_j - \mu}{\sigma} \right)}{\Gamma(k+3)} \right] \\
&- \Psi(2) \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\frac{y_j - \mu}{\sigma} \exp \left((k+2) \frac{y_j - \mu}{\sigma} \right)}{\Gamma(k+3)} \right] \\
&+ \Psi(2) \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Psi(k+3) \exp \left((k+2) \frac{y_j - \mu}{\sigma} \right)}{\Gamma(k+3)} \right] \\
&- \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{y_j - \mu}{\sigma} \right)^2 \exp \left((k+2) \frac{y_j - \mu}{\sigma} \right)}{\Gamma(k+3)} \right] \\
&+ \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Psi(k+3) \frac{y_j - \mu}{\sigma} \exp \left((k+2) \frac{y_j - \mu}{\sigma} \right)}{\Gamma(k+3)} \right] \\
&+ \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Psi'(k+3) \exp \left((k+2) \frac{y_j - \mu}{\sigma} \right)}{\Gamma(k+3)} \right] \\
&+ \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Psi(k+3) \frac{y_j - \mu}{\sigma} \exp \left((k+2) \frac{y_j - \mu}{\sigma} \right)}{\Gamma(k+3)} \right] -
\end{aligned}$$

$$- \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Psi^2(k+3) \exp\left(\frac{(k+2)(y_j - \mu)}{\sigma}\right)}{\Gamma(k+3)} \right]. \quad (4.50)$$

Usando o resultado de 4.41, temos:

$$\begin{aligned} E \left(\left(\frac{Z_j - \mu}{\sigma} \right)^2 \exp \frac{Z_j - \mu}{\sigma} \right) &= [\Psi'(2) + \Psi^2(2)] \left[1 + \exp \left(\frac{y_j - \mu}{\sigma} \right) \right] \\ &- \left[2\Psi(2) \left(\frac{y_j - \mu}{\sigma} \right) + \left(\frac{y_j - \mu}{\sigma} \right)^2 \right] \left[\exp \left(\exp \left(\frac{y_j - \mu}{\sigma} \right) \right) - 1 - \exp \left(\frac{y_j - \mu}{\sigma} \right) \right] \\ &+ 2 \left[\Psi(2) + \frac{y_j - \mu}{\sigma} \right] \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Psi(k+3) \exp \left(\frac{(k+2)(y_j - \mu)}{\sigma} \right)}{\Gamma(k+3)} \right] \\ &+ \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Psi'(k+3) \exp \left(\frac{(k+2)(y_j - \mu)}{\sigma} \right)}{\Gamma(k+3)} \right] \\ &- \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Psi^2(k+3) \exp \left(\frac{(k+2)(y_j - \mu)}{\sigma} \right)}{\Gamma(k+3)} \right]. \end{aligned} \quad (4.51)$$

Com as equações obtidas para $E \left(\frac{Z_j - \mu}{\sigma} \right)$, $E \left(\exp \left(\frac{Z_j - \mu}{\sigma} \right) \right)$, $E \left(\frac{Z_j - \mu}{\sigma} \exp \left(\frac{Z_j - \mu}{\sigma} \right) \right)$ e $E \left(\left(\frac{Z_j - \mu}{\sigma} \right)^2 \exp \left(\frac{Z_j - \mu}{\sigma} \right) \right)$ (equações 4.45, 4.42, 4.47 e 4.51 respectivamente) podemos calcular o valor esperado de $\frac{\partial^2 \ln f_{Z|Y}(z_j|Z_j > y_j, \mu, \sigma)}{\partial \mu^2}$, $\frac{\partial^2 \ln f_{Z|Y}(z_j|Z_j > y_j, \mu, \sigma)}{\partial \mu \partial \sigma}$ e $\frac{\partial^2 \ln f_{Z|Y}(z_j|Z_j > y_j, \mu, \sigma)}{\partial \sigma^2}$ (equações 4.21, 4.22 e 4.24 respectivamente) e desta forma obter a matriz de informação de cada unidade censurada no tempo y_j .

Assim, temos:

$$E \left[\frac{\partial^2 \ln f_{Z|Y}(z_j|Z_j > y_j, \mu, \sigma)}{\partial \mu^2} \right] = E \left[\frac{1}{\sigma^2} \exp \left(\frac{y_j - \mu}{\sigma} \right) - \frac{1}{\sigma^2} \exp \left(\frac{Z_j - \mu}{\sigma} \right) \right] =$$

$$= \frac{1}{\sigma^2} \exp\left(\frac{y_j - \mu}{\sigma}\right) - \frac{1}{\sigma^2} E \left[\exp\left(\frac{Z_j - \mu}{\sigma}\right) \right], \quad (4.52)$$

com $E \left[\exp\left(\frac{Z_j - \mu}{\sigma}\right) \right]$ sendo dada pela equação 4.42;

$$\begin{aligned} E \left[\frac{\partial^2 \ln f_{Z|Y}(z_j | Z_j > y_j, \mu, \sigma)}{\partial \mu \partial \sigma} \right] &= E \left[\frac{1}{\sigma^2} \exp\left(\frac{y_j - \mu}{\sigma}\right) + \frac{y_j - \mu}{\sigma^3} \exp\left(\frac{y_j - \mu}{\sigma}\right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\sigma^2} - \frac{1}{\sigma^2} \exp\left(\frac{Z_j - \mu}{\sigma}\right) - \frac{Z_j - \mu}{\sigma^3} \exp\left(\frac{Z_j - \mu}{\sigma}\right) \right] \\ &= \frac{1}{\sigma^2} \exp\left(\frac{y_j - \mu}{\sigma}\right) + \frac{y_j - \mu}{\sigma^3} \exp\left(\frac{y_j - \mu}{\sigma}\right) + \frac{1}{\sigma^2} \\ &\quad - \frac{1}{\sigma^2} E \left[\exp\left(\frac{Z_j - \mu}{\sigma}\right) \right] \\ &\quad - \frac{1}{\sigma^2} E \left[\frac{Z_j - \mu}{\sigma} \exp\left(\frac{Z_j - \mu}{\sigma}\right) \right], \end{aligned} \quad (4.53)$$

com $E \left[\exp\left(\frac{Z_j - \mu}{\sigma}\right) \right]$ e $E \left[\frac{Z_j - \mu}{\sigma} \exp\left(\frac{Z_j - \mu}{\sigma}\right) \right]$ sendo dadas pela equações 4.42 e 4.47, respectivamente,

e

$$\begin{aligned} E \left[\frac{\partial^2 \ln f_{Z|Y}(z_j | Z_j > y_j, \mu, \sigma)}{\partial \sigma^2} \right] &= E \left[\frac{1}{\sigma^2} + \frac{2(y_j - \mu)}{\sigma^3} \exp\left(\frac{y_j - \mu}{\sigma}\right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{(y_j - \mu)^2}{\sigma^4} \exp\left(\frac{y_j - \mu}{\sigma}\right) + \frac{2(Z_j - \mu)}{\sigma^3} \right. \\ &\quad \left. - \frac{2(Z_j - \mu)}{\sigma^3} \exp\left(\frac{Z_j - \mu}{\sigma}\right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{(Z_j - \mu)^2}{\sigma^4} \exp\left(\frac{Z_j - \mu}{\sigma}\right) \right] \\ &= \frac{1}{\sigma^2} + \frac{2(y_j - \mu)}{\sigma^3} \exp\left(\frac{y_j - \mu}{\sigma}\right) \\ &\quad + \frac{(y_j - \mu)^2}{\sigma^4} \exp\left(\frac{y_j - \mu}{\sigma}\right) + \frac{2}{\sigma^2} E \left[\frac{(Z_j - \mu)}{\sigma} \right] \\ &\quad - \frac{2}{\sigma^2} E \left[\frac{(Z_j - \mu)}{\sigma} \exp\left(\frac{Z_j - \mu}{\sigma}\right) \right] \\ &\quad - \frac{1}{\sigma^2} E \left[\left(\frac{Z_j - \mu}{\sigma} \right)^2 \exp\left(\frac{Z_j - \mu}{\sigma}\right) \right], \end{aligned} \quad (4.54)$$

com $E \left[\exp \left(\frac{Z_j - \mu}{\sigma} \right) \right]$, $E \left[\frac{Z_j - \mu}{\sigma} \exp \left(\frac{Z_j - \mu}{\sigma} \right) \right]$ e $E \left[\left(\frac{Z_j - \mu}{\sigma} \right)^2 \exp \left(\frac{Z_j - \mu}{\sigma} \right) \right]$ sendo dadas pela equações 4.42, 4.47 e 4.51, respectivamente.

Desta forma a matriz de informação I^j de cada unidade censurada no tempo y_j (j-ésima falha) é dada por

$$I^j = \begin{pmatrix} -E \left[\frac{\partial^2 \ln f_{Z|Y}(z_j|Z_j > y_j, \mu, \sigma)}{\partial \mu^2} \right] & -E \left[\frac{\partial^2 \ln f_{Z|Y}(z_j|Z_j > y_j, \mu, \sigma)}{\partial \mu \partial \sigma} \right] \\ -E \left[\frac{\partial^2 \ln f_{Z|Y}(z_j|Z_j > y_j, \mu, \sigma)}{\partial \mu \partial \sigma} \right] & -E \left[\frac{\partial^2 \ln f_{Z|Y}(z_j|Z_j > y_j, \mu, \sigma)}{\partial \sigma^2} \right] \end{pmatrix}. \quad (4.55)$$

De forma análoga, podemos obter a matriz de informação I^* de cada unidade censurada no tempo $T_L = \ln T$ (fim do experimento). Para isto, substituímos nas equações anteriores y_i por T_L .

Tendo obtido as matrizes I^j e I^* , podemos obter a matriz de informação de todas as unidades censuradas (matriz de informação faltante)

$$I_{faltante} = \sum_{j=1}^D R_j I^j + R_D^* I^*. \quad (4.56)$$

Na equação 4.56, R_j representa o número de unidades censuradas na j-ésima falha e R_D^* o número de unidades censuradas no fim do experimento (tempo T).

Finalmente a matriz de informação dos dados observados pode ser obtida através da diferença entre as matrizes de informação completa (4.16) e de informação faltante (4.56).

A matriz de variância-covariância assintótica é então obtida invertendo-se cada elemento da matriz de informação dos dados.

4.2 Estimação Bayesiana

Reescrevendo a função de verossimilhança do modelo com censura ECPHA Tipo 1 dada pela equação 3.4 temos

$$L(X|\lambda, \delta) = c_D \prod_{i=1}^D f(x_i|\lambda, \delta) [1 - F_X(x_i|\lambda, \delta)]^{R_i} [1 - F_X(T|\lambda, \delta)]^{R_D^*}, \quad (4.57)$$

sendo $c_D = \prod_{i=1}^D \gamma_i$ com $\gamma_i = m - i + 1 + \sum_{j=1}^m R_j$ e $R_D^* = n - D - \sum_{i=1}^D R_i$, $1 \leq D \leq n$.

Seja X (tempo de falha) dado λ, δ (parâmetros de escala e forma respectivamente) com distribuição Weibull(λ, δ).

Então

$$f_X(x|\lambda, \delta) = \lambda \delta x^{\delta-1} e^{-\lambda x^\delta}, \quad x > 0, \quad (4.58)$$

e

$$F(x|\lambda, \delta) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x^\delta}, & \text{se } x \geq 0 \\ 0, & \text{c.c..} \end{cases} \quad (4.59)$$

Substituindo 4.58 e 4.59 em 4.57, temos:

$$\begin{aligned} L(X|\lambda, \delta) &= c_D \prod_{i=1}^D \lambda \delta x_i^{\delta-1} e^{-\lambda x_i^\delta} \left[e^{-\lambda x_i^\delta} \right]^{R_i} \left[e^{-\lambda T^\delta} \right]^{R_D^*} \\ &= c_D \lambda^D \delta^D \left(\prod_{i=1}^D x_i^{\delta-1} \right) \exp \left(-\lambda \left(\sum_{i=1}^D (R_i + 1) x_i^\delta + R_D^* T^\delta \right) \right). \end{aligned} \quad (4.60)$$

Seja Gama(a,b) a distribuição a priori de λ com função de probabilidade dada por

$$\pi_1(\lambda|a, b) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} \lambda^{a-1} e^{-\lambda b}, \quad \lambda > 0, \quad a > 0 \quad e \quad b > 0. \quad (4.61)$$

Seja $\pi_2(\delta)$ a priori de δ com suporte em $(0, \infty)$ e independente da priori de λ .

Então a priori conjunta é dada por

$$\pi(\lambda, \delta) = \pi_1(\lambda|a, b)\pi_2(\delta). \quad (4.62)$$

A distribuição a posteriori é dada por

$$\pi(\lambda, \delta|X) = \frac{L(X|\lambda, \delta)\pi(\lambda, \delta)}{\int_0^\infty \int_0^\infty L(X|\lambda, \delta)\pi(\lambda, \delta)d\lambda d\delta}. \quad (4.63)$$

Como a equação 4.63 não pode ser calculada analiticamente, utilizaremos dois diferentes métodos MCMC (Markov Chain Monte Carlo) para aproximá-la (ver Besag (2001)). De uma forma geral, métodos MCMC são uma classe de algoritmos para amostragem de distribuições de probabilidade por meio da construção de cadeias de Markov que têm essas distribuições de probabilidade como a distribuição de equilíbrio.

Definiremos a priori de δ como sendo Gama(α, β), ou seja,

$$\pi_2(\delta|\alpha, \beta) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \delta^{\alpha-1} e^{-\delta\beta}, \quad \delta > 0, \quad \alpha > 0 \quad e \quad \beta > 0. \quad (4.64)$$

A distribuição posteriori condicional completa de λ é dada por

$$\begin{aligned} \pi(\lambda|\delta, X) &= \frac{\pi(\lambda, \delta, X)}{\pi(\delta, X)} \\ &\propto \pi(\lambda, \delta, X) = \pi(X|\lambda, \delta)\pi(\lambda, \delta) \\ &\propto L(X|\lambda, \delta)\pi_1(\lambda|a, b)\pi_2(\delta|\alpha, \beta) \\ &\propto \lambda^D \exp\left(-\lambda\left(\sum_{i=1}^D (R_i + 1)x_i^\delta + R_D^* T^\delta\right)\right) \lambda^{a-1} \exp(-\lambda b) \propto \end{aligned}$$

$$\propto \lambda^{a+D-1} \exp \left(-\lambda \left(\sum_{i=1}^D (R_i + 1)x_i^\delta + R_D^* T^\delta + b \right) \right). \quad (4.65)$$

Logo, de 4.65, temos que

$$\lambda | \delta, X \sim Gama \left(a + D, \sum_{i=1}^D (R_i + 1)x_i^\delta + R_D^* T^\delta + b \right). \quad (4.66)$$

A distribuição posteriori condicional completa de δ é dada por

$$\begin{aligned} \pi(\delta | \lambda, X) &= \frac{\pi(\lambda, \delta, X)}{\pi(\lambda, X)} \\ &\propto \pi(\lambda, \delta, X) = \pi(X | \lambda, \delta) \pi(\lambda, \delta) \\ &\propto L(X | \lambda, \delta) \pi_1(\lambda | a, b) \pi_2(\delta | \alpha, \beta) \\ &\propto \delta^D \left(\prod_{i=1}^D x_i^{\delta-1} \right) \exp \left(-\lambda \left(\sum_{i=1}^D (R_i + 1)x_i^\delta + R_D^* T^\delta \right) \right) \delta^{\alpha-1} \exp(-\delta\beta) \\ &\propto \delta^{\alpha+D-1} \prod_{i=1}^D x_i^{\delta-1} \exp \left\{ -\delta\beta - \lambda \left[\sum_{i=1}^D (R_i + 1)x_i^\delta + R_D^* T^\delta \right] \right\}. \quad (4.67) \end{aligned}$$

A distribuição condicional do parâmetro δ em relação aos dados (X) é dada por

$$\begin{aligned} \pi(\delta | X) &= \frac{\pi(\delta, X)}{\pi(X)} \\ &\propto \pi(\delta, X) = \int_0^\infty \pi(\delta, \lambda, X) d\lambda \\ &\propto \int_0^\infty \pi(X | \delta, \lambda) \pi(\lambda) \pi(\delta) d\lambda \\ &\propto \pi(\delta) \int_0^\infty L(X | \delta, \lambda) \pi(\lambda) d\lambda \\ &\propto \pi(\delta) \int_0^\infty \lambda^D \delta^D \prod_{i=1}^D x_i^{\delta-1} \exp \left(-\lambda \left(\sum_{i=1}^D (R_i + 1)x_i^\delta + R_D^* T^\delta \right) \right) \lambda^{a-1} e^{-\lambda b} d\lambda \\ &\propto \pi(\delta) \delta^D \prod_{i=1}^D x_i^{\delta-1} \int_0^\infty \lambda^{a+D-1} \exp \left(-\lambda \left(\sum_{i=1}^D (R_i + 1)x_i^\delta + R_D^* T^\delta + b \right) \right) d\lambda \\ &\propto \pi(\delta) \delta^D \prod_{i=1}^D x_i^{\delta-1} \Gamma(a + D) \left[\sum_{i=1}^D (R_i + 1)x_i^\delta + R_D^* T^\delta + b \right]^{-(a+D)} \propto \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\propto \delta^{\alpha-1} e^{-\delta\beta} \delta^D \prod_{i=1}^D x_i^{\delta-1} \left[\sum_{i=1}^D (R_i + 1)x_i^\delta + R_D^* T^\delta + b \right]^{-(a+D)} \\
&\propto \delta^{\alpha+D-1} e^{-\delta\beta} \prod_{i=1}^D x_i^{\delta-1} \left[\sum_{i=1}^D (R_i + 1)x_i^\delta + R_D^* T^\delta + b \right]^{-(a+D)}. \tag{4.68}
\end{aligned}$$

Do Lema 1 de Kundu (2007), temos que a equação dada em 4.68 é uma função log-côncava.

No primeiro método de estimação bayesiana dos parâmetros do modelo Weibull (MCMC1), utilizaremos a técnica de amostragem de Gibbs (Besag, 2001) de Kundu (2007), válida para funções log-côncavas, para gerar amostras da equação 4.68 usando a abordagem de Devroye (1984). Com os valores gerados para δ a partir de 4.68, obteremos λ a partir da distribuição Gama dada em 4.66.

No segundo método de estimação bayesiana (MCMC2), utilizaremos o algoritmo Metropolis-Hastings (Besag (2001) e Chib e Greenberg (1995)) com distribuição proposta Normal para gerar os valores de δ a partir de 4.68. Com isso, geraremos λ a partir da distribuição Gama dada em 4.66.

Capítulo 5

Resultados

Utilizamos nos testes os mesmos valores propostos por Lin et al. (2012). Foram geradas amostras sempre de tamanho (n) igual a 30. O número de falhas em que poderia haver censura (m) foi definido como sendo 5. Para o tempo de encerramento do estudo, dois tempos foram testados: $T_1 = \exp(-0.5)$ e $T_2 = \exp(0.5)$. Também foram testadas duas configurações diferentes dos parâmetros da distribuição Weibull : $(\delta, \lambda) = (1, 1)$ e $(\delta, \lambda) = (1.25, 0.5353)$. A figura 5.1 mostra a forma destas duas distribuições Weibull. Por fim, também foram testados três diferentes esquemas de censura, conforme tabela 5.1.

Figura 5.1: Distribuições Weibull usadas nos testes

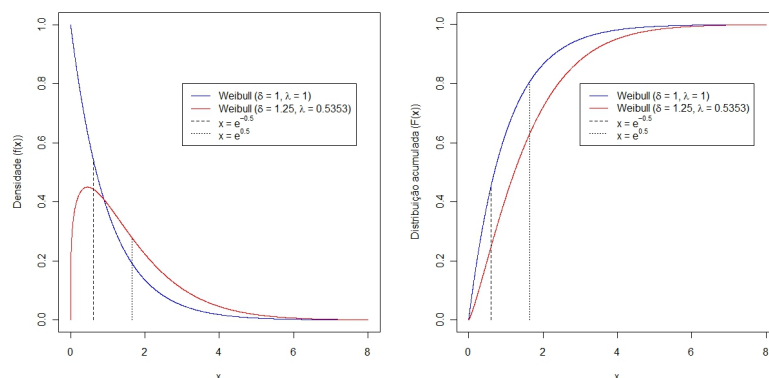


Tabela 5.1: Esquemas de censura utilizados nos testes

Nome do esquema	Configuração do esquema (R_1, R_2, \dots, R_m)
Esquema 1	$(0, 0, 0, 0, n-m=25)$
Esquema 2	$(n-m=25, 0, 0, 0, 0)$
Esquema 3	$(1, 1, 1, 1, n-2m+1=21)$

Desta forma, foram testados 12 cenários diferentes (ver tabela 5.2). Em cada cenário foram geradas 100 amostras. Para cada uma delas foi obtido o estimador de máxima verossimilhança. Além disso, também para cada amostra, foram obtidos 11 estimadores para cada método bayesiano, usando em cada cálculo uma priori diferente para os parâmetros (ver tabela 5.3). No cálculo de cada estimador bayesiano foram executadas 1100 iterações, sendo que as 100 primeiras foram descartadas.

Tabela 5.2: Configuração de cada cenário utilizado nos testes

Cenário	Tempo máximo de duração do estudo	Parâmetros da distribuição Weibull	Esquema de censura utilizado
1	$\exp(-0.5)$	$(\delta, \lambda) = (1, 1)$	Esquema 1
2	$\exp(0.5)$	$(\delta, \lambda) = (1, 1)$	Esquema 1
3	$\exp(-0.5)$	$(\delta, \lambda) = (1.25, 0.5353)$	Esquema 1
4	$\exp(0.5)$	$(\delta, \lambda) = (1.25, 0.5353)$	Esquema 1
5	$\exp(-0.5)$	$(\delta, \lambda) = (1, 1)$	Esquema 2
6	$\exp(0.5)$	$(\delta, \lambda) = (1, 1)$	Esquema 2
7	$\exp(-0.5)$	$(\delta, \lambda) = (1.25, 0.5353)$	Esquema 2
8	$\exp(0.5)$	$(\delta, \lambda) = (1.25, 0.5353)$	Esquema 2
9	$\exp(-0.5)$	$(\delta, \lambda) = (1, 1)$	Esquema 3
10	$\exp(0.5)$	$(\delta, \lambda) = (1, 1)$	Esquema 3
11	$\exp(-0.5)$	$(\delta, \lambda) = (1.25, 0.5353)$	Esquema 3
12	$\exp(0.5)$	$(\delta, \lambda) = (1.25, 0.5353)$	Esquema 3

Tabela 5.3: Prioris usadas em cada repetição

Repetição	Priori de λ	Priori de δ
1	Gama(0, 0)*	Gama(0, 0)*
2	Gama(2, 2)	Gama(2, 2)
3	Gama(4, 4)	Gama(4, 4)
4	Gama(6, 6)	Gama(6, 6)
5	Gama(8, 8)	Gama(8, 8)
6	Gama(10, 10)	Gama(10, 10)
7	Gama(12, 12)	Gama(12, 12)
8	Gama(14, 14)	Gama(14, 14)
9	Gama(16, 16)	Gama(16, 16)
10	Gama(18, 18)	Gama(18, 18)
11	Gama(20, 20)	Gama(20, 20)

* - Priori imprópria

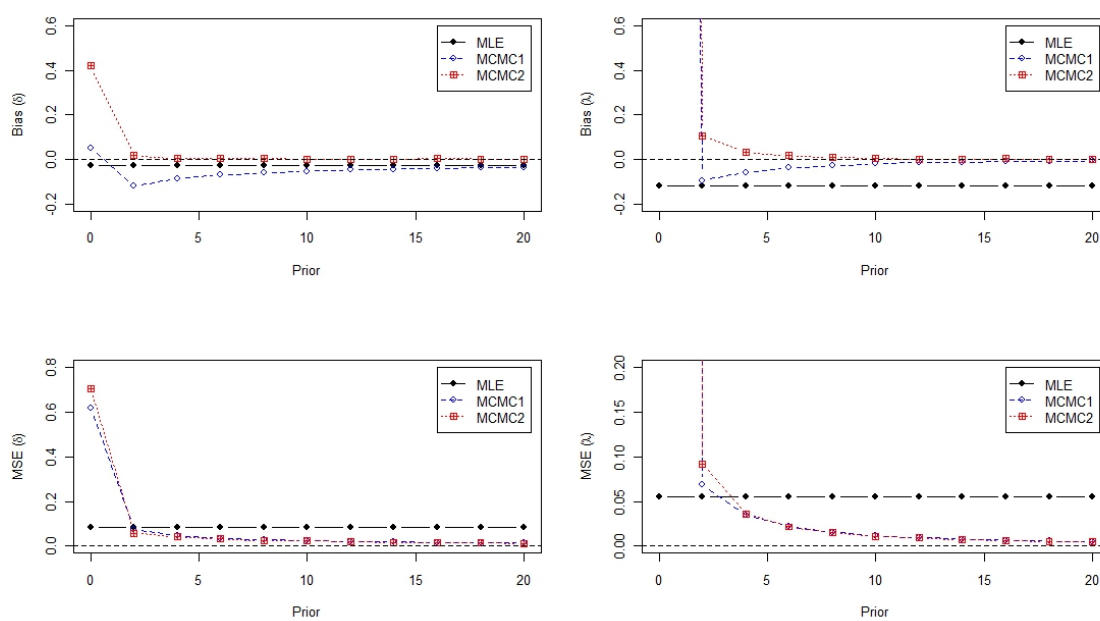
A seguir são apresentados os resultados obtidos para cada cenário no software *R*.

Cenário 1

Tabela 5.4: Resultados obtidos no cenário 1

Método	Prioris	Viés (δ)	MSE (δ)	Viés (λ)	MSE (λ)
MLE	NA	-0.0260	0.0844	-0.1180	0.0555
MCMC1	Gama(0, 0)	0.0526	0.6178	12.2347	3794.21
	Gama(1, 1)	-0.1202	0.0731	-0.0947	0.0684
	Gama(2, 2)	-0.0872	0.0457	-0.0578	0.0348
	Gama(3, 3)	-0.0705	0.0343	-0.0384	0.0217
	Gama(4, 4)	-0.0602	0.0278	-0.0286	0.0155
	Gama(5, 5)	-0.0528	0.0234	-0.0193	0.0115
	Gama(6, 6)	-0.0476	0.0202	-0.0151	0.0095
	Gama(7, 7)	-0.0438	0.0178	-0.0119	0.0077
	Gama(8, 8)	-0.0406	0.0158	-0.0106	0.0064
	Gama(9, 9)	-0.0380	0.0142	-0.0088	0.0054
	Gama(10, 10)	-0.0358	0.0128	-0.0065	0.0047
MCMC2	Gama(0, 0)	0.4187	0.7063	26.6497	6605.133
	Gama(1, 1)	0.0174	0.0567	0.1041	0.0923
	Gama(2, 2)	0.0042	0.0406	0.0313	0.0354
	Gama(3, 3)	0.0032	0.0313	0.0166	0.0214
	Gama(4, 4)	0.0031	0.0249	0.0081	0.0151
	Gama(5, 5)	-0.0001	0.0230	0.0029	0.0109
	Gama(6, 6)	-0.0003	0.0186	0.0021	0.0091
	Gama(7, 7)	-0.0008	0.0166	0.0007	0.0074
	Gama(8, 8)	0.0037	0.0147	0.0024	0.0061
	Gama(9, 9)	0.0022	0.0140	0.0007	0.0052
	Gama(10, 10)	0.0013	0.0119	-0.0004	0.0046

Figura 5.2: Cenário 1

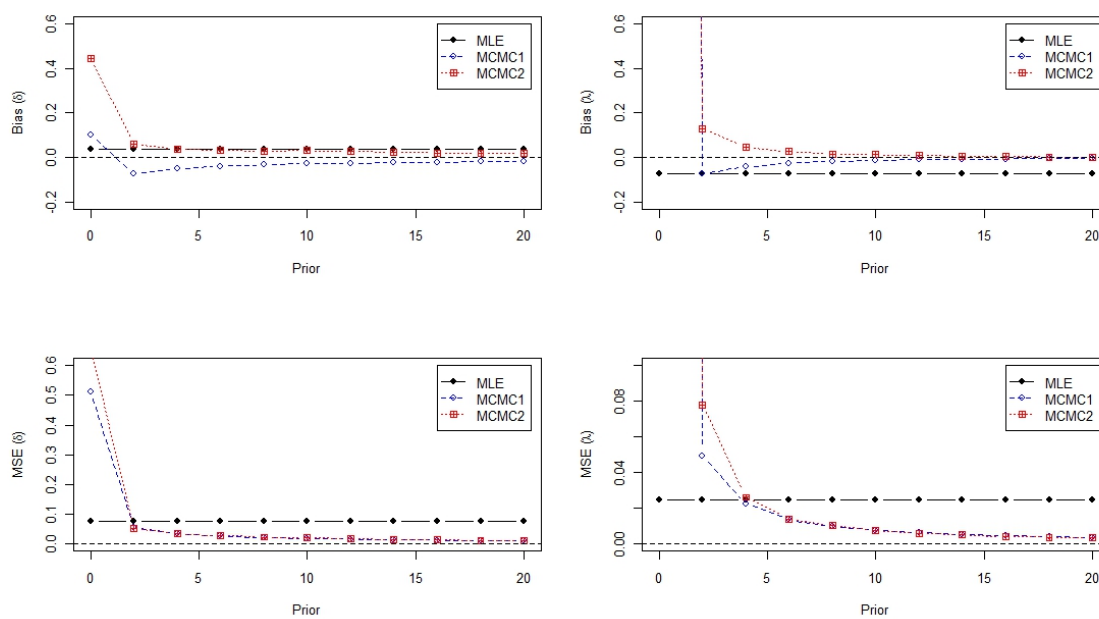


Cenário 2

Tabela 5.5: Resultados obtidos no cenário 2

Método	Prioris	Viés (δ)	MSE (δ)	Viés (λ)	MSE (λ)
MLE	NA	0.0352	0.0751	-0.0711	0.0250
MCMC1	Gama(0, 0)	0.1013	0.5129	29.85634	51600.84
	Gama(1, 1)	-0.0750	0.0542	-0.0730	0.0492
	Gama(2, 2)	-0.0518	0.0347	-0.0423	0.0227
	Gama(3, 3)	-0.0398	0.0266	-0.0262	0.0137
	Gama(4, 4)	-0.0332	0.0219	-0.0185	0.0099
	Gama(5, 5)	-0.0288	0.0187	-0.0131	0.0075
	Gama(6, 6)	-0.0256	0.0162	-0.0098	0.0064
	Gama(7, 7)	-0.0233	0.0143	-0.0081	0.0053
	Gama(8, 8)	-0.0214	0.0128	-0.0070	0.0045
	Gama(9, 9)	-0.0201	0.0115	-0.0050	0.0041
	Gama(10, 10)	-0.0188	0.0104	-0.0062	0.0035
MCMC2	Gama(0, 0)	0.4431	0.6516	14.04788	1434.876
	Gama(1, 1)	0.0584	0.0524	0.1281	0.0777
	Gama(2, 2)	0.0378	0.0344	0.0471	0.0262
	Gama(3, 3)	0.0326	0.0279	0.0256	0.0141
	Gama(4, 4)	0.0284	0.0231	0.0152	0.0102
	Gama(5, 5)	0.0306	0.0202	0.0117	0.0076
	Gama(6, 6)	0.0260	0.0179	0.0092	0.0059
	Gama(7, 7)	0.0244	0.0156	0.0062	0.0051
	Gama(8, 8)	0.0198	0.0140	0.0043	0.0043
	Gama(9, 9)	0.0178	0.0119	0.0019	0.0038
	Gama(10, 10)	0.0175	0.0113	0.0022	0.0034

Figura 5.3: Cenário 2

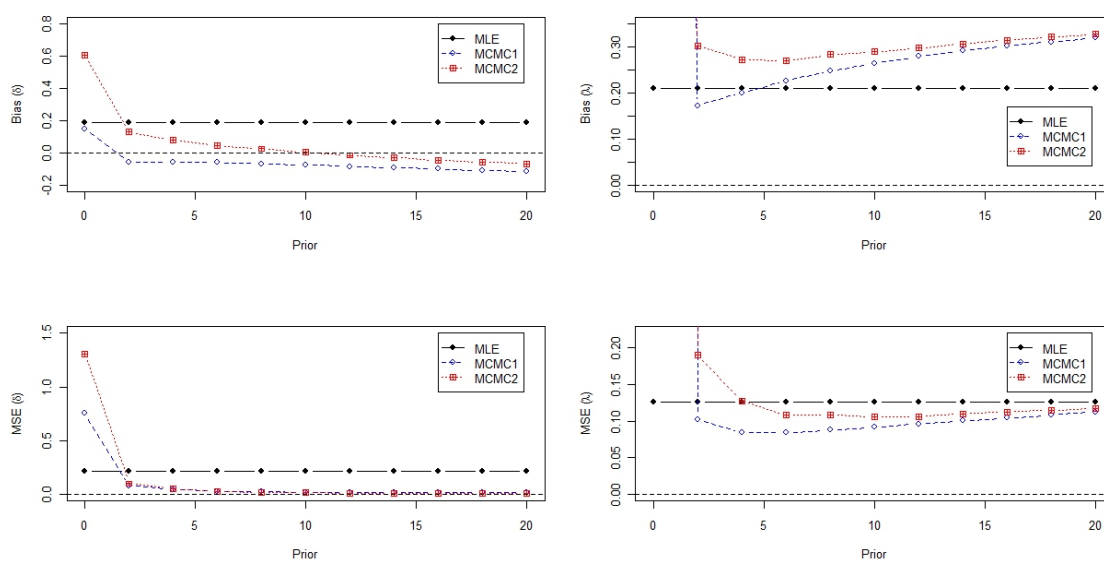


Cenário 3

Tabela 5.6: Resultados obtidos no cenário 3

Método	Prioris	Viés (δ)	MSE (δ)	Viés (λ)	MSE (λ)
MLE	NA	0.1869	0.2159	0.2100	0.1264
MCMC1	Gama(0, 0)	0.1492	0.7585	9.8759	4104.998
	Gama(1, 1)	-0.0592	0.0835	0.1722	0.1021
	Gama(2, 2)	-0.0563	0.0455	0.2000	0.0850
	Gama(3, 3)	-0.0604	0.0310	0.2262	0.0845
	Gama(4, 4)	-0.0681	0.0241	0.2477	0.0878
	Gama(5, 5)	-0.0766	0.0206	0.2643	0.0920
	Gama(6, 6)	-0.0852	0.0189	0.2787	0.0959
	Gama(7, 7)	-0.0936	0.0182	0.2917	0.1009
	Gama(8, 8)	-0.1013	0.0182	0.3012	0.1041
	Gama(9, 9)	-0.1084	0.0184	0.3104	0.1085
	Gama(10, 10)	-0.1151	0.0190	0.3188	0.1124
MCMC2	Gama(0, 0)	0.6028	1.3066	9.4388	1089.419
	Gama(1, 1)	0.1289	0.1007	0.3023	0.1905
	Gama(2, 2)	0.0762	0.0498	0.2719	0.1277
	Gama(3, 3)	0.0438	0.0305	0.2691	0.1082
	Gama(4, 4)	0.0243	0.0220	0.2827	0.1083
	Gama(5, 5)	0.0016	0.0166	0.2889	0.1060
	Gama(6, 6)	-0.0157	0.0138	0.2967	0.1066
	Gama(7, 7)	-0.0298	0.0116	0.3064	0.1099
	Gama(8, 8)	-0.0483	0.0115	0.3143	0.1128
	Gama(9, 9)	-0.0582	0.0112	0.3207	0.1147
	Gama(10, 10)	-0.0681	0.0113	0.3272	0.1177

Figura 5.4: Cenário 3

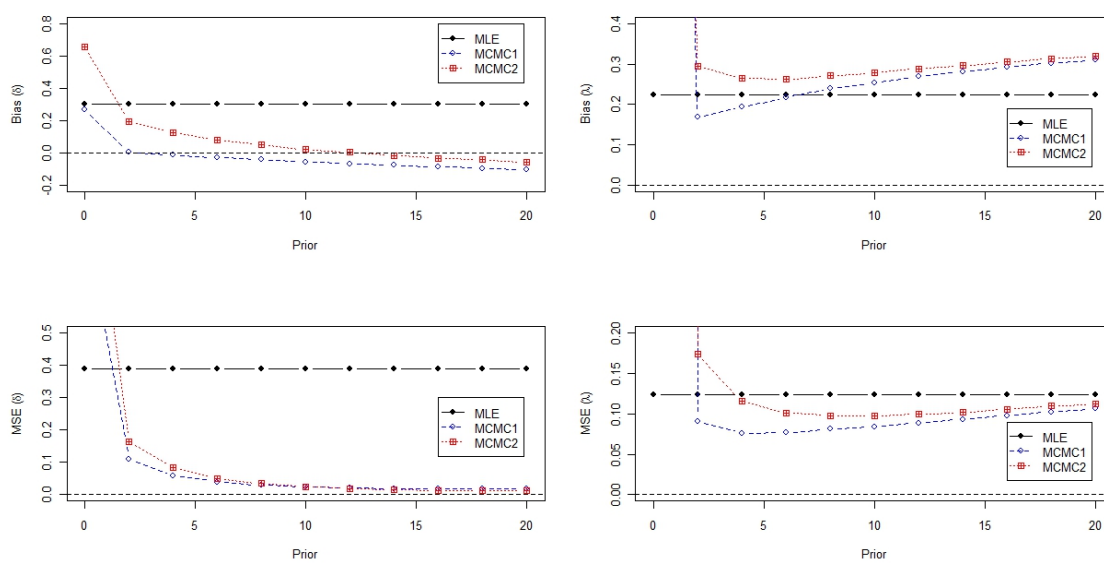


Cenário 4

Tabela 5.7: Resultados obtidos no cenário 4

Método	Prioris	Viés (δ)	MSE (δ)	Viés (λ)	MSE (λ)
MLE	NA	0.3042	0.3908	0.2226	0.1240
MCMC1	Gama(0, 0)	0.2670	0.8561	4.4726	772.453
	Gama(1, 1)	0.0025	0.1086	0.1677	0.0912
	Gama(2, 2)	-0.0152	0.0592	0.1927	0.0763
	Gama(3, 3)	-0.0300	0.0392	0.2170	0.0764
	Gama(4, 4)	-0.0436	0.0290	0.2396	0.0811
	Gama(5, 5)	-0.0565	0.0235	0.2542	0.0838
	Gama(6, 6)	-0.0680	0.0205	0.2690	0.0888
	Gama(7, 7)	-0.0785	0.0190	0.2818	0.0932
	Gama(8, 8)	-0.0879	0.0183	0.2920	0.0977
	Gama(9, 9)	-0.0964	0.0182	0.3022	0.1023
	Gama(10, 10)	-0.1041	0.0184	0.3104	0.1062
MCMC2	Gama(0, 0)	0.6577	1.2002	5.5026	314.7587
	Gama(1, 1)	0.1918	0.1646	0.2934	0.1740
	Gama(2, 2)	0.1269	0.0829	0.2640	0.1154
	Gama(3, 3)	0.0787	0.0492	0.2616	0.1010
	Gama(4, 4)	0.0491	0.0337	0.2707	0.0979
	Gama(5, 5)	0.0189	0.0233	0.2783	0.0974
	Gama(6, 6)	0.0044	0.0185	0.2882	0.0999
	Gama(7, 7)	-0.0163	0.0151	0.2956	0.1015
	Gama(8, 8)	-0.0338	0.0121	0.3052	0.1059
	Gama(9, 9)	-0.0435	0.0118	0.3133	0.1095
	Gama(10, 10)	-0.0591	0.0118	0.3194	0.1119

Figura 5.5: Cenário 4

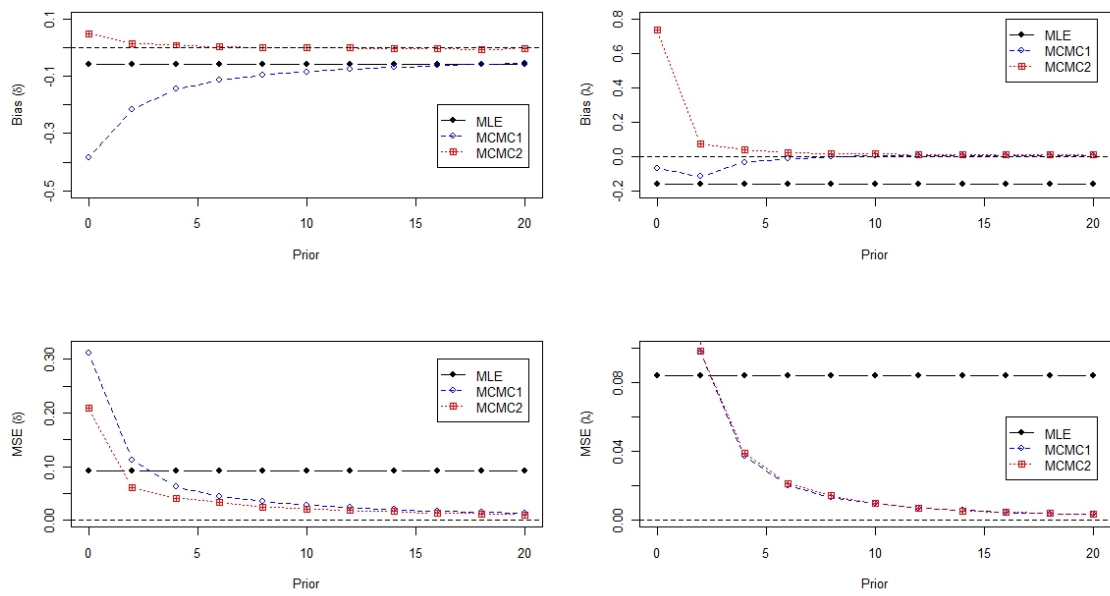


Cenário 5

Tabela 5.8: Resultados obtidos no cenário 5

Método	Prioris	Viés (δ)	MSE (δ)	Viés (λ)	MSE (λ)
MLE	NA	-0.0596	0.0910	-0.1616	0.0844
MCMC1	Gama(0, 0)	-0.3851	0.3110	-0.0684	4.5716
	Gama(1, 1)	-0.2175	0.1126	-0.1168	0.0982
	Gama(2, 2)	-0.1452	0.0628	-0.0346	0.0375
	Gama(3, 3)	-0.1142	0.0445	-0.0119	0.0203
	Gama(4, 4)	-0.0962	0.0346	-0.0036	0.0133
	Gama(5, 5)	-0.0843	0.0281	0.0028	0.0098
	Gama(6, 6)	-0.0753	0.0235	0.0034	0.0072
	Gama(7, 7)	-0.0684	0.0200	0.0048	0.0059
	Gama(8, 8)	-0.0625	0.0172	0.0053	0.0046
	Gama(9, 9)	-0.0579	0.0151	0.0055	0.0038
	Gama(10, 10)	-0.0539	0.0133	0.0061	0.0033
MCMC2	Gama(0, 0)	0.0495	0.2083	0.7380	6.1368
	Gama(1, 1)	0.0130	0.0606	0.0718	0.0982
	Gama(2, 2)	0.0085	0.0414	0.0363	0.0393
	Gama(3, 3)	0.0032	0.0333	0.0233	0.0216
	Gama(4, 4)	0.0012	0.0248	0.0165	0.0142
	Gama(5, 5)	0.0003	0.0212	0.0154	0.0099
	Gama(6, 6)	-0.0012	0.0180	0.0117	0.0071
	Gama(7, 7)	-0.0043	0.0162	0.0099	0.0056
	Gama(8, 8)	-0.0025	0.0134	0.0087	0.0047
	Gama(9, 9)	-0.0064	0.0121	0.0088	0.0039
	Gama(10, 10)	-0.0038	0.0103	0.0081	0.0034

Figura 5.6: Cenário 5

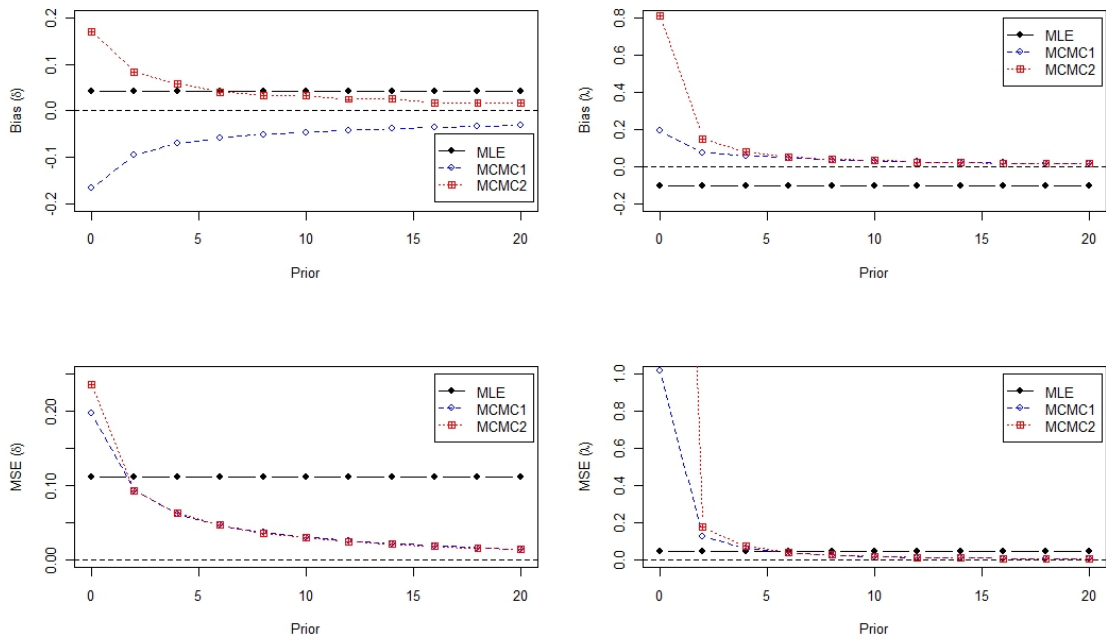


Cenário 6

Tabela 5.9: Resultados obtidos no cenário 6

Método	Prioris	Viés (δ)	MSE (δ)	Viés (λ)	MSE (λ)
MLE	NA	0.0427	0.1120	-0.1048	0.0455
MCMC1	Gama(0, 0)	-0.1673	0.1981	0.1917	1.0206
	Gama(1, 1)	-0.0960	0.0937	0.0746	0.1266
	Gama(2, 2)	-0.0705	0.0623	0.0564	0.0618
	Gama(3, 3)	-0.0589	0.0471	0.0453	0.0378
	Gama(4, 4)	-0.0516	0.0375	0.0343	0.0256
	Gama(5, 5)	-0.0463	0.0308	0.0293	0.0185
	Gama(6, 6)	-0.0422	0.0258	0.0245	0.0141
	Gama(7, 7)	-0.0388	0.0221	0.0217	0.0115
	Gama(8, 8)	-0.0360	0.0191	0.0190	0.0095
	Gama(9, 9)	-0.0335	0.0167	0.0158	0.0077
	Gama(10, 10)	-0.0314	0.0148	0.0140	0.0065
MCMC2	Gama(0, 0)	0.1708	0.2360	0.8098	6.5059
	Gama(1, 1)	0.0833	0.0936	0.1483	0.1770
	Gama(2, 2)	0.0588	0.0629	0.0780	0.0743
	Gama(3, 3)	0.0403	0.0470	0.0505	0.0411
	Gama(4, 4)	0.0334	0.0356	0.0377	0.0274
	Gama(5, 5)	0.0325	0.0302	0.0320	0.0200
	Gama(6, 6)	0.0246	0.0246	0.0229	0.0153
	Gama(7, 7)	0.0256	0.0214	0.0223	0.0123
	Gama(8, 8)	0.0173	0.0184	0.0170	0.0096
	Gama(9, 9)	0.0170	0.0157	0.0157	0.0081
	Gama(10, 10)	0.0170	0.0148	0.0136	0.0066

Figura 5.7: Cenário 6



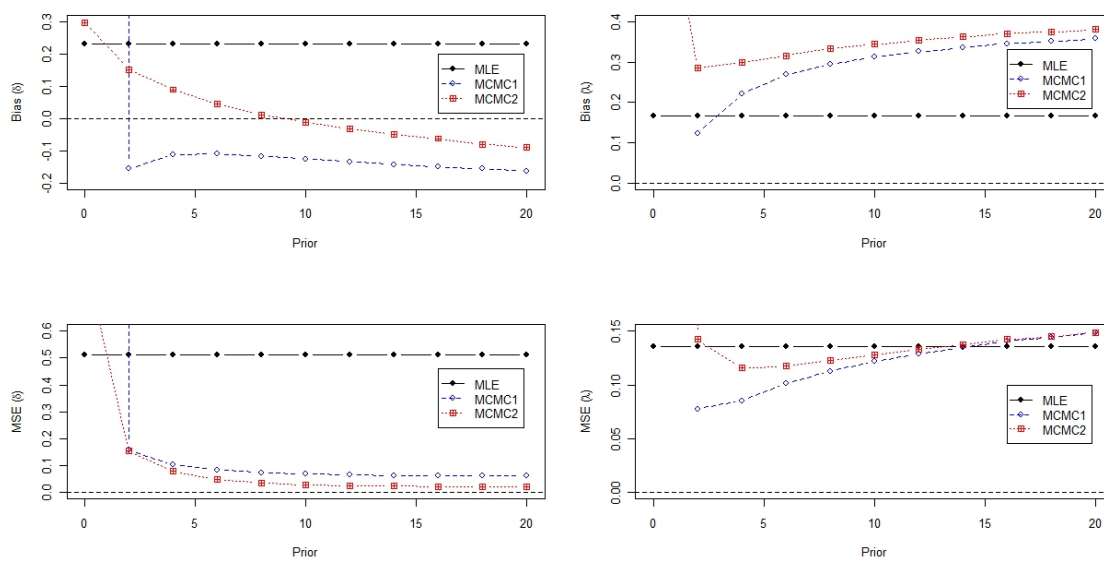
Cenário 7

Tabela 5.10: Resultados obtidos no cenário 7

Método	Prioris	Viés (δ)	MSE (δ)	Viés (λ)	MSE (λ)
MLE	NA	0.2306	0.5121	0.1669	0.1361
MCMC1	Gama(0, 0)	*	*	*	*
	Gama(1, 1)	-0.1558	0.1583	0.1239	0.0776
	Gama(2, 2)	-0.1114	0.1032	0.2204	0.0852
	Gama(3, 3)	-0.1096	0.0839	0.2683	0.1015
	Gama(4, 4)	-0.1166	0.0742	0.2939	0.1123
	Gama(5, 5)	-0.1251	0.0687	0.3130	0.1221
	Gama(6, 6)	-0.1340	0.0656	0.3254	0.1290
	Gama(7, 7)	-0.1422	0.0639	0.3360	0.1351
	Gama(8, 8)	-0.1496	0.0629	0.3454	0.1409
	Gama(9, 9)	-0.1564	0.0625	0.3512	0.1443
	Gama(10, 10)	-0.1626	0.0625	0.3577	0.1488
MCMC2	Gama(0, 0)	0.2957	0.8720	0.9428	6.5443
	Gama(1, 1)	0.1511	0.1539	0.2857	0.1423
	Gama(2, 2)	0.0894	0.0794	0.2993	0.1158
	Gama(3, 3)	0.0444	0.0487	0.3157	0.1174
	Gama(4, 4)	0.0117	0.0363	0.3335	0.1232
	Gama(5, 5)	-0.0116	0.0286	0.3440	0.1276
	Gama(6, 6)	-0.0330	0.0240	0.3542	0.1333
	Gama(7, 7)	-0.0492	0.0250	0.3626	0.1376
	Gama(8, 8)	-0.0622	0.0221	0.3707	0.1425
	Gama(9, 9)	-0.0802	0.0204	0.3745	0.1448
	Gama(10, 10)	-0.0906	0.0225	0.3807	0.1490

* Estimador não pode ser obtido quando da priori imprópria.

Figura 5.8: Cenário 7

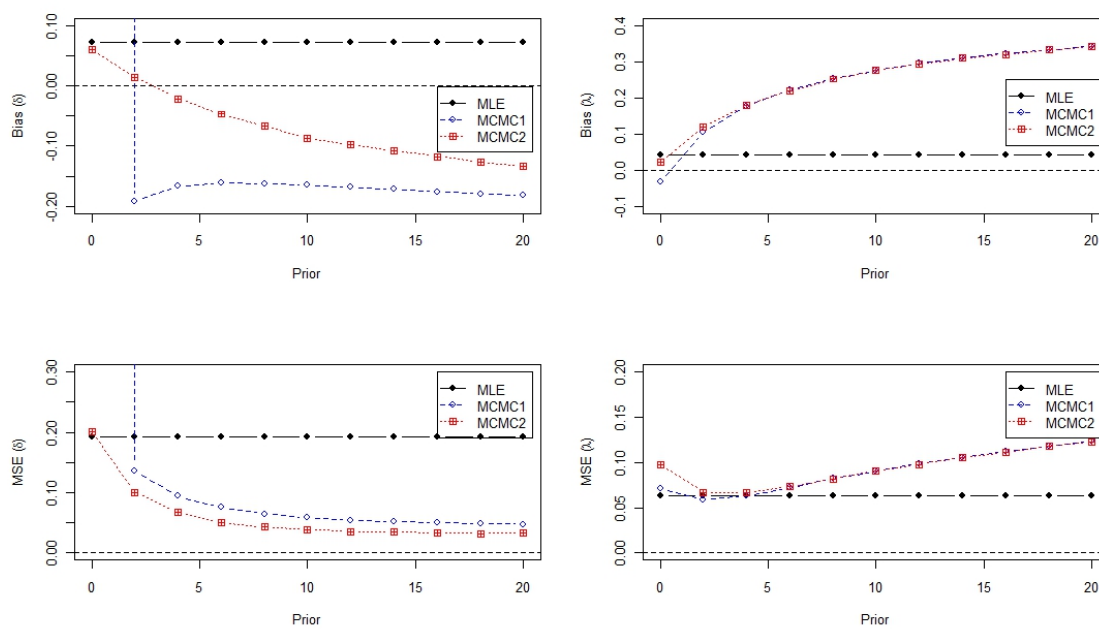


Cenário 8

Tabela 5.11: Resultados obtidos no cenário 8

Método	Prioris	Viés (δ)	MSE (δ)	Viés (λ)	MSE (λ)
MLE	NA	0.0722	0.1920	0.0427	0.0629
MCMC1	Gama(0, 0)	80.7564	663071.1	-0.0316	0.0713
	Gama(1, 1)	-0.1917	0.1352	0.1049	0.0588
	Gama(2, 2)	-0.1667	0.0939	0.1765	0.0631
	Gama(3, 3)	-0.1613	0.0750	0.2214	0.0721
	Gama(4, 4)	-0.1621	0.0646	0.2534	0.0822
	Gama(5, 5)	-0.1648	0.0582	0.2762	0.0902
	Gama(6, 6)	-0.1685	0.0541	0.2958	0.0988
	Gama(7, 7)	-0.1720	0.0514	0.3101	0.1057
	Gama(8, 8)	-0.1757	0.0495	0.3235	0.1129
	Gama(9, 9)	-0.1792	0.0483	0.3326	0.1175
	Gama(10, 10)	-0.1824	0.0474	0.3431	0.1238
MCMC2	Gama(0, 0)	0.0604	0.2013	0.0231	0.0974
	Gama(1, 1)	0.0141	0.0998	0.1205	0.0669
	Gama(2, 2)	-0.0215	0.0666	0.1797	0.0664
	Gama(3, 3)	-0.0469	0.0508	0.2201	0.0730
	Gama(4, 4)	-0.0667	0.0426	0.2523	0.0820
	Gama(5, 5)	-0.0873	0.0388	0.2761	0.0907
	Gama(6, 6)	-0.0982	0.0350	0.2936	0.0979
	Gama(7, 7)	-0.1076	0.0345	0.3095	0.1057
	Gama(8, 8)	-0.1173	0.0331	0.3207	0.1110
	Gama(9, 9)	-0.1260	0.0320	0.3325	0.1177
	Gama(10, 10)	-0.1343	0.0331	0.3417	0.1229

Figura 5.9: Cenário 8



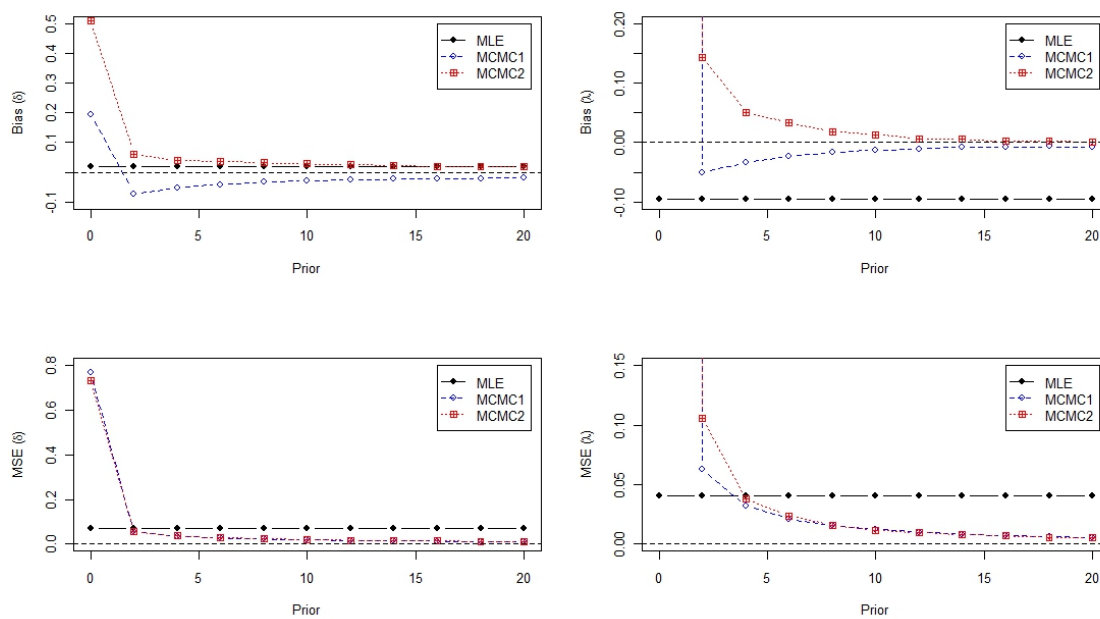
Cenário 9

Tabela 5.12: Resultados obtidos no cenário 9

Método	Prioris	Viés (δ)	MSE (δ)	Viés (λ)	MSE (λ)
MLE	NA	0.0194	0.0677	-0.0946	0.0406
MCMC1	Gama(0, 0)	0.1953	0.7679	*	*
	Gama(1, 1)	-0.0732	0.0550	-0.0505	0.0625
	Gama(2, 2)	-0.0527	0.0353	-0.0342	0.0319
	Gama(3, 3)	-0.0411	0.0268	-0.0228	0.0210
	Gama(4, 4)	-0.0340	0.0218	-0.0170	0.0154
	Gama(5, 5)	-0.0295	0.0184	-0.0128	0.0122
	Gama(6, 6)	-0.0261	0.0159	-0.0104	0.0098
	Gama(7, 7)	-0.0237	0.0140	-0.0081	0.0083
	Gama(8, 8)	-0.0218	0.0124	-0.0081	0.0068
	Gama(9, 9)	-0.0203	0.0111	-0.0070	0.0059
	Gama(10, 10)	-0.0190	0.0100	-0.0071	0.0052
MCMC2	Gama(0, 0)	0.5083	0.7331	66.2941	233284.8
	Gama(1, 1)	0.0619	0.0539	0.1439	0.1055
	Gama(2, 2)	0.0393	0.0362	0.0510	0.0380
	Gama(3, 3)	0.0363	0.0279	0.0335	0.0237
	Gama(4, 4)	0.0312	0.0232	0.0183	0.0160
	Gama(5, 5)	0.0283	0.0197	0.0134	0.0117
	Gama(6, 6)	0.0251	0.0166	0.0064	0.0095
	Gama(7, 7)	0.0231	0.0153	0.0055	0.0079
	Gama(8, 8)	0.0193	0.0134	0.0027	0.0068
	Gama(9, 9)	0.0191	0.0118	0.0030	0.0057
	Gama(10, 10)	0.0186	0.0105	0.0006	0.0050

* Estimador não pode ser obtido quando da priori imprópria.

Figura 5.10: Cenário 9

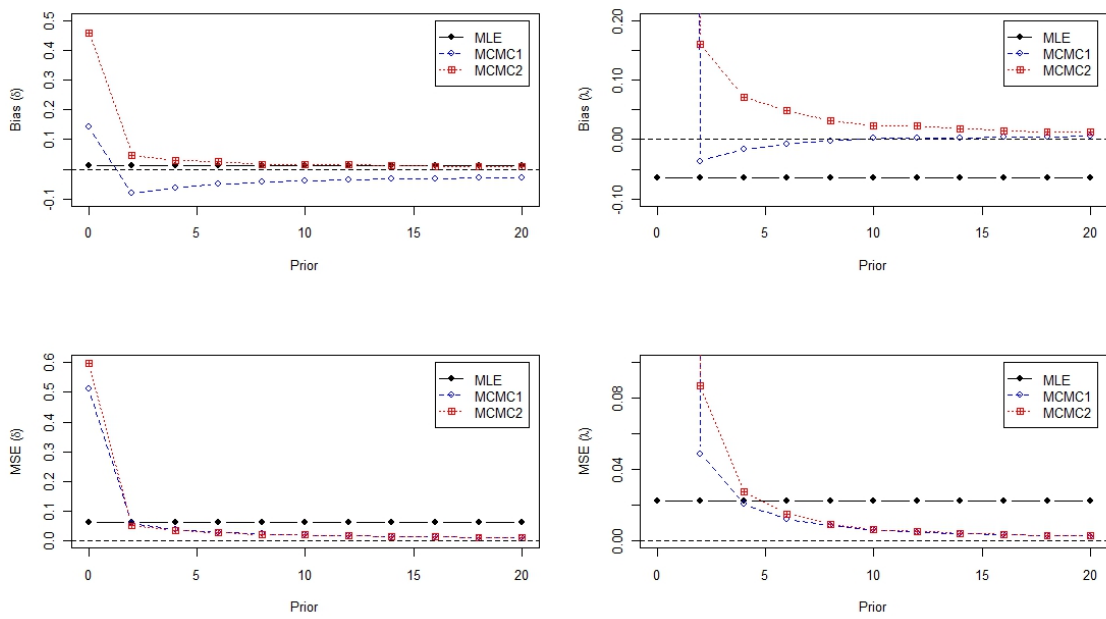


Cenário 10

Tabela 5.13: Resultados obtidos no cenário 10

Método	Prioris	Viés (δ)	MSE (δ)	Viés (λ)	MSE (λ)
MLE	NA	0.0129	0.0643	-0.0647	0.0227
MCMC1	Gama(0, 0)	0.1427	0.5133	14.3488	12194.56
	Gama(1, 1)	-0.0817	0.0582	-0.0363	0.0489
	Gama(2, 2)	-0.0621	0.0374	-0.0163	0.0208
	Gama(3, 3)	-0.0511	0.0284	-0.0075	0.0123
	Gama(4, 4)	-0.0442	0.0232	-0.0020	0.0085
	Gama(5, 5)	-0.0396	0.0197	0.0018	0.0063
	Gama(6, 6)	-0.0361	0.0170	0.0024	0.0049
	Gama(7, 7)	-0.0334	0.0149	0.0030	0.0040
	Gama(8, 8)	-0.0311	0.0133	0.0045	0.0036
	Gama(9, 9)	-0.0293	0.0119	0.0042	0.0030
	Gama(10, 10)	-0.0278	0.0108	0.0060	0.0027
MCMC2	Gama(0, 0)	0.4598	0.5980	15.8509	1543.525
	Gama(1, 1)	0.0476	0.0506	0.1598	0.0868
	Gama(2, 2)	0.0286	0.0350	0.0713	0.0275
	Gama(3, 3)	0.0257	0.0282	0.0484	0.0153
	Gama(4, 4)	0.0173	0.0218	0.0316	0.0095
	Gama(5, 5)	0.0156	0.0197	0.0226	0.0062
	Gama(6, 6)	0.0160	0.0167	0.0226	0.0054
	Gama(7, 7)	0.0132	0.0154	0.0187	0.0044
	Gama(8, 8)	0.0104	0.0134	0.0148	0.0038
	Gama(9, 9)	0.0085	0.0115	0.0130	0.0031
	Gama(10, 10)	0.0074	0.0103	0.0123	0.0028

Figura 5.11: Cenário 10

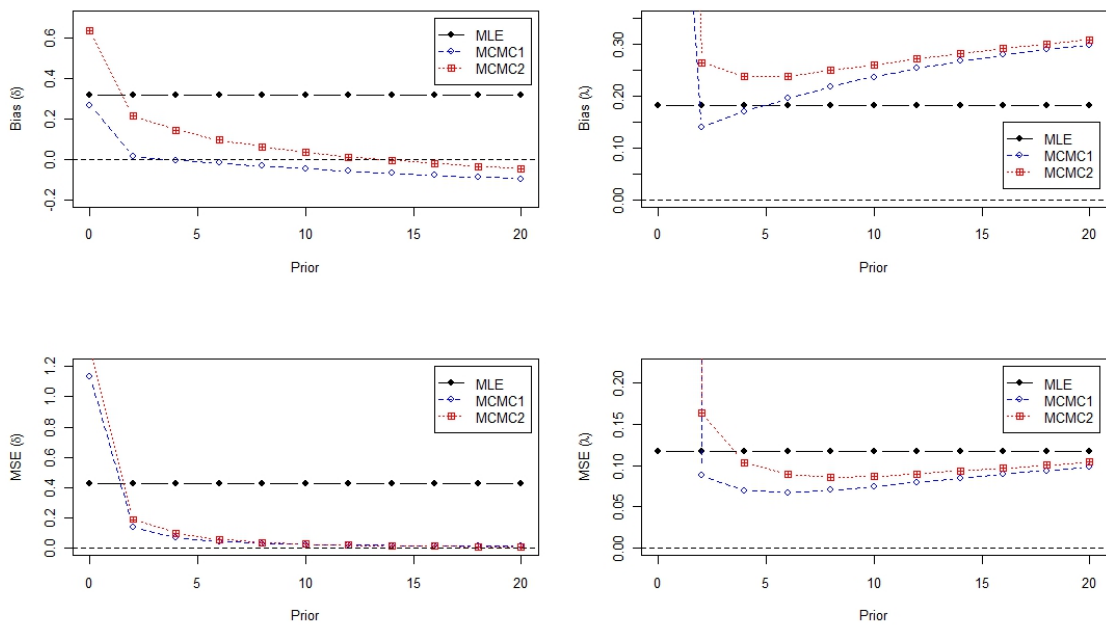


Cenário 11

Tabela 5.14: Resultados obtidos no cenário 11

Método	Prioris	Viés (δ)	MSE (δ)	Viés (λ)	MSE (λ)
MLE	NA	0.3160	0.4288	0.1814	0.1178
MCMC1	Gama(0, 0)	0.2651	1.1328	1.3326	20.0395
	Gama(1, 1)	0.0124	0.1368	0.1400	0.0881
	Gama(2, 2)	-0.0039	0.0697	0.1701	0.0693
	Gama(3, 3)	-0.0184	0.0437	0.1952	0.0674
	Gama(4, 4)	-0.0326	0.0311	0.2174	0.0704
	Gama(5, 5)	-0.0461	0.0243	0.2363	0.0743
	Gama(6, 6)	-0.0583	0.0206	0.2535	0.0800
	Gama(7, 7)	-0.0694	0.0185	0.2667	0.0849
	Gama(8, 8)	-0.0794	0.0175	0.2789	0.0897
	Gama(9, 9)	-0.0885	0.0172	0.2889	0.0939
	Gama(10, 10)	-0.0967	0.0173	0.2983	0.0983
MCMC2	Gama(0, 0)	0.6353	1.3334	2.9219	63.4810
	Gama(1, 1)	0.2143	0.1902	0.2637	0.1643
	Gama(2, 2)	0.1458	0.0993	0.2371	0.1034
	Gama(3, 3)	0.0953	0.0581	0.2382	0.0894
	Gama(4, 4)	0.0630	0.0372	0.2489	0.0858
	Gama(5, 5)	0.0355	0.0265	0.2604	0.0872
	Gama(6, 6)	0.0116	0.0193	0.2716	0.0899
	Gama(7, 7)	-0.0044	0.0144	0.2822	0.0937
	Gama(8, 8)	-0.0207	0.0126	0.2913	0.0968
	Gama(9, 9)	-0.0346	0.0115	0.3002	0.1005
	Gama(10, 10)	-0.0467	0.0113	0.3082	0.1046

Figura 5.12: Cenário 11



Cenário 12

Tabela 5.15: Resultados obtidos no cenário 12

Método	Prioris	Viés (δ)	MSE (δ)	Viés (λ)	MSE (λ)
MLE	NA	0.3377	0.5008	0.1913	0.1084
MCMC1	Gama(0, 0)	0.2607	0.9010	1.6606	67.8981
	Gama(1, 1)	0.0127	0.1179	0.1450	0.0822
	Gama(2, 2)	-0.0090	0.0610	0.1754	0.0700
	Gama(3, 3)	-0.0260	0.0390	0.2013	0.0699
	Gama(4, 4)	-0.0411	0.0284	0.2233	0.0738
	Gama(5, 5)	-0.0545	0.0228	0.2414	0.0780
	Gama(6, 6)	-0.0666	0.0198	0.2557	0.0817
	Gama(7, 7)	-0.0775	0.0184	0.2690	0.0868
	Gama(8, 8)	-0.0871	0.0177	0.2810	0.0920
	Gama(9, 9)	-0.0958	0.0177	0.2916	0.0965
	Gama(10, 10)	-0.1037	0.0180	0.3017	0.1013
MCMC2	Gama(0, 0)	0.6281	1.2174	2.9253	62.7409
	Gama(1, 1)	0.2129	0.1875	0.2685	0.1620
	Gama(2, 2)	0.1392	0.0939	0.2406	0.1039
	Gama(3, 3)	0.0895	0.0532	0.2450	0.0934
	Gama(4, 4)	0.0510	0.0314	0.2537	0.0899
	Gama(5, 5)	0.0231	0.0220	0.2638	0.0903
	Gama(6, 6)	0.0065	0.0179	0.2771	0.0947
	Gama(7, 7)	-0.0183	0.0142	0.2828	0.0948
	Gama(8, 8)	-0.0320	0.0115	0.2930	0.0991
	Gama(9, 9)	-0.0411	0.0120	0.3028	0.1034
	Gama(10, 10)	-0.0599	0.0113	0.3082	0.1055

Figura 5.13: Cenário 12

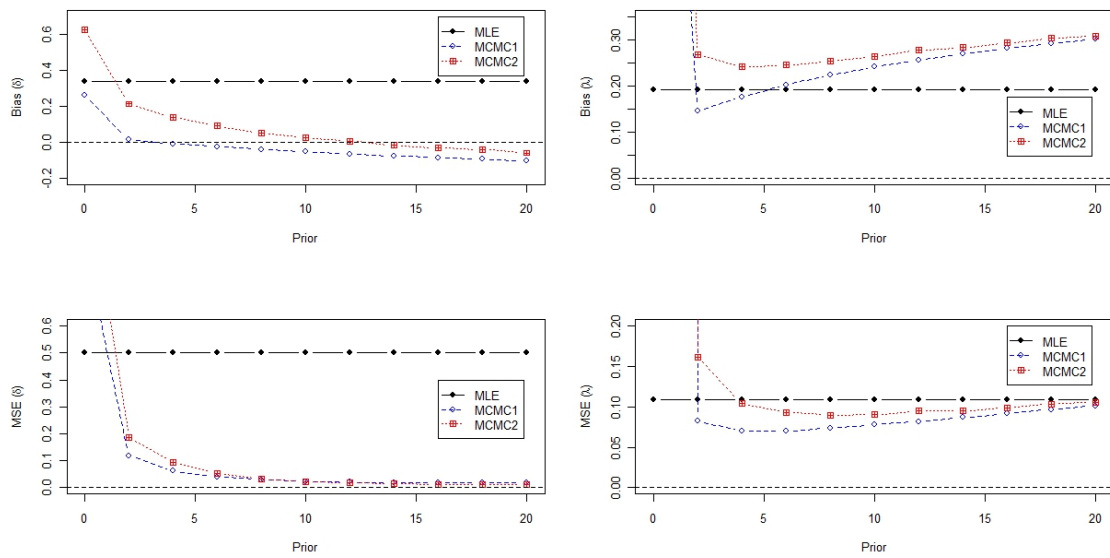


Tabela 5.16: Número médio de falhas observadas em cada cenário

Cenário	Número médio de falhas
1	5
2	5
3	4.85
4	5
5	2.82
6	4.32
7	1.97
8	3.39
9	5
10	5
11	4.77
12	5

Capítulo 6

Conclusões

De uma forma geral, os resultados obtidos pelos métodos bayesianos, especialmente o método MCMC2, foram melhores que os resultados obtidos por máxima verossimilhança, o que confirma os resultados de Lin et al. (2012). O método MCMC1 mostrou-se bem mais lento que os outros dois métodos, especialmente no caso da priori imprópria, de certa forma inviabilizando que fossem geradas um maior número de amostras em cada cenário. Podemos verificar o quão importantes são as escolhas do esquema de censura e do tempo de encerramento do estudo, pois estes influenciam no número de falhas que serão observadas e assim impactam na estimação dos parâmetros.

Referências Bibliográficas

- Abramowitz, M. e Stegun, I. A. (1964). *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. Dover, New York.
- Balakrishnan, N. (2007). Progressive censoring methodology: an appraisal. *Sociedad de Estadística e Investigación Operativa*, Test 16:p. 211–259.
- Balakrishnan, N. e Aggarwala, R. (2000). *Progressive Censoring: Theory, Methods and Applications*. Birkhauser, Boston.
- Besag, J. (2001). Markov chain monte carlo for statistical inference. *Center for Statistics and the Social Sciences*, Working Paper 9, Univ. de Washington.
- Casella, G. e Berger, R. L. (2001). *Statistical Inference*. Duxbury Press.
- Chib, S. e Greenberg, E. (1995). Understanding the metropolis hastings algorithm. *American Statistical Journal*, 49:p. 327–335.
- Devroye, L. (1984). A simple algorithm for generating random variates with a log-concave density. *Computing*, 33:p. 247–257.
- Kundu, D. (2007). On hybrid censored weibull distribution. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 137:p. 2127–2142.

- Lehmann, E. L. e Casella, G. (1998). *Theory of Point Estimation*. Springer.
- Lin, C.-T.; Chou, C.-C. e Huang, Y.-L. (2012). Inference for the weibull distribution with progressive hybrid censoring. *Computational Statistics and Data Analysis*, v. 56:p. 451–467.
- Lin, C.-T. e Huang, Y.-L. (2011). On progressive hybrid censored exponential distribution. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, iFirst:p. 1–21.
- Lin, C.-T.; Ng, H. K. T. e Chan, P. S. (2009). Statistical inference of type-ii progressively hybrid censored data with weibull lifetimes. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 38:p. 1710–1729.
- Louis, T. A. (1982). Finding the observed information matrix when using the em algorithm. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, 44:p. 226–233.
- Ng, H. K. T.; Chan, P. S. e Balakrishnan, N. (2002). Estimation of parameters from progressively censored data using em algorithm. *Computational Statistics and Data Analysis*, 39:p. 371–386.
- Stephens, M. A. (1977). Goodness-of-fit for the extreme value distribution. *Biometrika*, 64:p. 583–588.

Apêndice A

Código R utilizado nos testes

```
ptm = proc.time()

require(stats4)

require(bbmle)
require(gmp)
require(Rmpfr)

# Tamanho da amostra
n <- 30

# Número de falhas em que pode haver censura
m <- 5

# CENARIO 01 : T.L = -0.5; (lambda,sigma) = (1,1) ; Esquema 1
# CENARIO 02 : T.L = 0.5; (lambda,sigma) = (1,1) ; Esquema 1
# CENARIO 03 : T.L = -0.5; (lambda,sigma) = (0.5353,1.25) ; Esquema 1
# CENARIO 04 : T.L = 0.5; (lambda,sigma) = (0.5353,1.25) ; Esquema 1
# CENARIO 05 : T.L = -0.5; (lambda,sigma) = (1,1) ; Esquema 2
# CENARIO 06 : T.L = 0.5; (lambda,sigma) = (1,1) ; Esquema 2
# CENARIO 07 : T.L = -0.5; (lambda,sigma) = (0.5353,1.25) ; Esquema 2
# CENARIO 08 : T.L = 0.5; (lambda,sigma) = (0.5353,1.25) ; Esquema 2
# CENARIO 09 : T.L = -0.5; (lambda,sigma) = (1,1) ; Esquema 3
# CENARIO 10 : T.L = 0.5; (lambda,sigma) = (1,1) ; Esquema 3
# CENARIO 11 : T.L = -0.5; (lambda,sigma) = (0.5353,1.25) ; Esquema 3
# CENARIO 12 : T.L = 0.5; (lambda,sigma) = (0.5353,1.25) ; Esquema 3

NUMERO_CENARIOS <- 12
cenario <- 1
MAX_ITERACOES=100 # Numero de amostras por cenario
MAX_ITERACOES_BAYESIANAS=1000
ITERACOES_DESCARTADAS <- 100
NUMERO_REPETICOES <- 11
NUMERO_METODOS <- 3
NUMERO_METODOS_BAYESIANO <- 2

MLE <- 1
MCMC1 <- 2
MCMC2 <- 3

RESULTADO=array(0,dim=c(NUMERO_METODOS,NUMERO_CENARIOS,MAX_ITERACOES,
NUMERO_REPETICOES,3))
DADOS=array(0,dim=c(NUMERO_CENARIOS,MAX_ITERACOES,n))
CENSURADOS=array(0,dim=c(NUMERO_CENARIOS,MAX_ITERACOES,n))
MATRIZ_VARIANCIA=array(0,dim=c(NUMERO_CENARIOS,MAX_ITERACOES,9))
BIAS=array(0,dim=c(NUMERO_METODOS,NUMERO_CENARIOS,NUMERO_REPETICOES,2))
MSE=array(0,dim=c(NUMERO_METODOS,NUMERO_CENARIOS,NUMERO_REPETICOES,2))

PARCIAL_BAYESIANO=array(0,dim=c(MAX_ITERACOES_BAYESIANAS,3))
```

```

while (cenario <= NUMERO_CENARIOS) {

  if ((cenario %% 2) == 1) {
    # Tempo máximo do experimento
    T <- exp(-.5)
  } else {
    T <- exp(.5)
  }
  # Logaritmo natural do tempo máximo
  T.L <- log(T)

  # Parâmetros da distribuição Weibull
  if (((cenario %% 4) == 1) || ((cenario %% 4) == 2)) {
    shape <- 1
    scale <- 1
  } else {
    shape <- 1.25
    scale <- 0.5353
  }

  if (cenario <= 4) {
    # Esquema de censura a ser usado
    # 1º esquema : m=5
    # R.j = (0,0,0,0,n-m=25)
    R.j <- rep(0,n)
    R.j[m] <- n-m
  } else if (cenario <= 8) {
    # 2º esquema : m=5
    # R.j = (n-m=25,0,0,0,0)
    R.j <- rep(0,n)
    R.j[1] <- n-m
  } else {
    # 3º esquema : m=5
    # R.j = (1,1,1,1,n-2m+1)
    R.j <- rep(0,n)
    R.j[1:(m-1)] <- 1
    R.j[m] <- n-2*m+1
  }

  iteracao=1

  while (iteracao <= MAX_ITERACOES) {

    X <- rweibull(n,shape,scale)

    lnX <- log(X)

    # No vetor *censurado* teremos:
    # 0: indica que a falha foi observada
    # -1: chegou ao final do experimento e não houve falha e
    # nem censura até o momento
    # >0 : indica em qual falha a unidade foi censurada
    #
    # falhas: indica o número de falhas observadas
    # itemfalha: qual observacao falhou

    censurado <- rep(-1,n)
    falhas <- 0
    while ((length(lnX[censurado== -1]) != 0) && (min(lnX[censurado== -1]) <= T.L)) {
      itemfalha <- which(lnX==min(lnX[censurado== -1]));itemfalha
      falhas <- falhas + 1;falhas
      censurado[itemfalha] <- 0;censurado
      if ( (R.j[falhas] > 0) && (falhas <= m) ){
        unidascensuradas <- sample(lnX[censurado== -1],R.j[falhas]);
        for (i in 1:length(unidascensuradas) ) {
          unidascensurada <- which(lnX==unidascensuradas[i])
          censurado[unidascensurada] <- falhas
        }
      }
    }
  }
}

```

```

}

censurado

y.i=sort(lnX[censurado==0])
x.i=sort(X[censurado==0])
r.i=R.j[1:length(y.i)]
r.D=length(lnX[censurado==1])
D=falhas

ll <- function(mu,sigma){
  -(- D*log(sigma) + (sum(y.i)-D*mu)/sigma - sum((r.i+1)*exp((y.i-mu)/sigma))
  - r.D*exp((T.L-mu)/sigma))
}

if (falhas != 0) {

fit=mle(ll,start=list(mu=1,sigma=1),lower=list(sigma=0.001),method="L-BFGS-B")
fit.mu = fit@coef[1]
fit.sigma = fit@coef[2]
fit.lambda = exp(-fit.mu/fit.sigma)
fit.delta = 1/fit.sigma

epsilon.i = (c(y.i,T.L)-fit@coef[1])/fit@coef[2]
E.eZ= 1 + exp(epsilon.i); E.eZ

termo=500
soma_digamma_k2 = 0
k = 0
while (max(termo) > 0.00000001) {
termo = (digamma(k+2)*exp((k+1)*epsilon.i)) / gamma(k+2)
soma_digamma_k2 = soma_digamma_k2 + termo
k = k + 1
}
E.Z= soma_digamma_k2 + digamma(1) - epsilon.i*(exp(exp(epsilon.i))-1)

termo=500
soma_digamma_k3 = 0
k = 0
while (max(termo) > 0.00000001) {
termo = (digamma(k+3)*exp((k+2)*epsilon.i)) / gamma(k+3)
soma_digamma_k3 = soma_digamma_k3 + termo
k = k + 1
}
E.ZeZ = soma_digamma_k3 + (digamma(2)+epsilon.i)*(1+exp(epsilon.i)) -
epsilon.i*exp(exp(epsilon.i))

termo=500
soma_trigamma_k3 = 0
k = 0
while (max(termo) > 0.00000001) {
termo = (trigamma(k+3)*exp((k+2)*epsilon.i)) / gamma(k+3)
soma_trigamma_k3 = soma_trigamma_k3 + termo
k = k + 1
}

termo=500
soma_digamma_quadrado_k3 = 0
k = 0
while (max(termo) > 0.00000001) {
termo = (((digamma(k+3))^2)*exp((k+2)*epsilon.i)) / gamma(k+3)
soma_digamma_quadrado_k3 = soma_digamma_quadrado_k3 + termo
k = k + 1
}

E.Z2eZ = (trigamma(2) + digamma(2)^2)*(1+exp(epsilon.i)) -
(2*gamma(2)*epsilon.i + epsilon.i^2)*(exp(exp(epsilon.i))-1-exp(epsilon.i))+
2*(gamma(2)+epsilon.i) * soma_digamma_k3 + soma_trigamma_k3 -
soma_digamma_quadrado_k3

```

```

# esperança em relação a mu^2
E.Zmu2=-((1/(fit.sigma^2))*exp(epsilon.i) -(1/(fit.sigma^2))*E.eZ)

# esperança em relação a mu sigma
E.Zmusigma=-((1/fit.sigma^2)*(exp(epsilon.i)+epsilon.i*exp(epsilon.i)+1-
E.eZ-E.ZeZ))

# esperança em relação a sigma^2
E.Zsigma2=-((1/fit.sigma^2)*(1+(2*epsilon.i+epsilon.i^2)*exp(epsilon.i)+
2*E.Z-2*E.ZeZ-E.Z2eZ))

I.completa.mu2=n/fit.sigma^2
I.completa.musigma=(n/fit.sigma^2)*(1-0.577215665)
I.completa.sigma2=(n/fit.sigma^2)*1.823680661

I.faltante.mu2=sum(c(r.i,r.D)*E.Zmu2)
I.faltante.musigma=sum(c(r.i,r.D)*E.Zmusigma)
I.faltante.sigma2=sum(c(r.i,r.D)*E.Zsigma2)

I.completa.mu2-I.faltante.mu2
I.completa.musigma-I.faltante.musigma
I.completa.sigma2-I.faltante.sigma2

RESULTADO[MLE,cenario,iteracao,1,1]=fit.lambda
RESULTADO[MLE,cenario,iteracao,1,2]=fit.delta
RESULTADO[MLE,cenario,iteracao,1,3]=D
DADOS[cenario,iteracao,]=X
CENSURADOS[cenario,iteracao,]=censurado

MATRIZ_VARIANCIA[cenario,iteracao,1]=1/I.completa.mu2
MATRIZ_VARIANCIA[cenario,iteracao,2]=1/I.completa.musigma
MATRIZ_VARIANCIA[cenario,iteracao,3]=1/I.completa.sigma2
MATRIZ_VARIANCIA[cenario,iteracao,4]=1/I.faltante.mu2
MATRIZ_VARIANCIA[cenario,iteracao,5]=1/I.faltante.musigma
MATRIZ_VARIANCIA[cenario,iteracao,6]=1/I.faltante.sigma2
MATRIZ_VARIANCIA[cenario,iteracao,7]=1/(I.completa.mu2-I.faltante.mu2)
MATRIZ_VARIANCIA[cenario,iteracao,8]=1/(I.completa.musigma-I.faltante.musigma)
MATRIZ_VARIANCIA[cenario,iteracao,9]=1/(I.completa.sigma2-I.faltante.sigma2)

repeticao = 1
while (repeticao <= NUMERO_REPETICOES) {

#### MCMC1
alpha=2*(repeticao-1)
beta=2*(repeticao-1)
a=2*(repeticao-1)
b=2*(repeticao-1)
delta.grid <- seq(from=0.001,to=5,by=0.001)

temp <- 0
for (i in 1:D) {
temp <- temp + (r.i[i]+1)*x.i[i]^delta.grid
}

calculo_da_moda = (alpha+D-1) * log(delta.grid) - delta.grid*beta +
(delta.grid-1)*sum(log(x.i[1:D])) -
(a+D)*log(temp+r.D*(T^delta.grid)+b)

moda.valor = max(calculo_da_moda)
moda.i = which(calculo_da_moda == moda.valor)
moda.delta = delta.grid[moda.i]
c = moda.valor
moda = moda.delta

t <- 1
while (t <= MAX_ITERACOES_BAYESIANAS+ITERACOES_DESCARTADAS) {
u=runif(1,0,2)
v=runif(1,0,1)
if (u <= 1) {
w <- u

```

```

d <- v
} else {
w <- 1 - log(u-1)
d <- v*(u-1)
}
w = as.double(w)
w <- mpfr(modu + w/c,60)
temp <- mpfr(0,60)
for (i in 1:D) {
temp <- temp + (r.i[i]+1)*(x.i[i])^w
}
f.w <- (alpha+D-1) * log(w) - w*beta +
(w-1)*sum(log(x.i[1:D])) -
(a+D)*log(temp+r.D*T^w+b); f.w
if ((d <= f.w/c) && (w > 0)) {
if (t > ITERACOES_DESCARTADAS) {
temp <- as.double(sum((r.i[1:D]+1)*(x.i[1:D])^w)+r.D*T^w+b)
PARCIAL_BAYESIANO[t-ITERACOES_DESCARTADAS,1] <- rgamma(1,a+D,temp)
PARCIAL_BAYESIANO[t-ITERACOES_DESCARTADAS,2] <- as.double(w)
PARCIAL_BAYESIANO[t-ITERACOES_DESCARTADAS,3] <- D
}
t <- t+1
}
}
RESULTADO[MCMC1,cenario,iteracao,repeticao,1] = mean(PARCIAL_BAYESIANO[,1])
RESULTADO[MCMC1,cenario,iteracao,repeticao,2] = mean(PARCIAL_BAYESIANO[,2])
RESULTADO[MCMC1,cenario,iteracao,repeticao,3] = mean(PARCIAL_BAYESIANO[,3])

#### MCMC2
delta.chapeu <- RESULTADO[MLE,cenario,iteracao,1,2]
lambda.chapeu <- RESULTADO[MLE,cenario,iteracao,1,1]
var.delta <- 1
t <- 1
v <- delta.chapeu
while (t <= MAX_ITERACOES_BAYESIANAS+ITERACOES_DESCARTADAS) {
continua = TRUE
while (continua) {
w <- rnorm(1,delta.chapeu,sqrt(var.delta));w
if (w > 0) {
continua = FALSE
}
}
pi.w <- (w^(alpha+D-1)) * exp(-w*beta) *
(prod(x.i[1:D]))^(w-1) *
exp(-lambda.chapeu*(sum((r.i[1:D]+1)*(x.i[1:D])^w) +r.D*T^w));pi.w
pi.v <- (v^(alpha+D-1)) * exp(-v*beta) *
(prod(x.i[1:D]))^(v-1) *
exp(-lambda.chapeu*(sum((r.i[1:D]+1)*(x.i[1:D])^w) +r.D*T^w));pi.v
temp1<-exp(((w-delta.chapeu)^2-(v-delta.chapeu)^2)/2);temp1
pvw <- min(1,(pi.w/pi.v)*temp1); pvw
z <- runif(1,0,1)
if (z <= pvw) {
v <- w
lambda.chapeu <- as.double(rgamma(1,a+D,sum((r.i[1:D]+1)*(x.i[1:D])^w)+r.D*T^w+b))
if (t > ITERACOES_DESCARTADAS) {
PARCIAL_BAYESIANO[t-ITERACOES_DESCARTADAS,2] <- as.double(w)
PARCIAL_BAYESIANO[t-ITERACOES_DESCARTADAS,1] <- lambda.chapeu
}
} else {
lambda.chapeu <- rgamma(1,a+D,sum((r.i[1:D]+1)*(x.i[1:D])^v)+r.D*T^v+b)
if (t > ITERACOES_DESCARTADAS) {
PARCIAL_BAYESIANO[t-ITERACOES_DESCARTADAS,2] <- v
PARCIAL_BAYESIANO[t-ITERACOES_DESCARTADAS,1] <- lambda.chapeu
}
}
t <- t+1
}
RESULTADO[MCMC2,cenario,iteracao,repeticao,1] = mean(PARCIAL_BAYESIANO[,1])
RESULTADO[MCMC2,cenario,iteracao,repeticao,2] = mean(PARCIAL_BAYESIANO[,2])
RESULTADO[MCMC2,cenario,iteracao,repeticao,3] = mean(PARCIAL_BAYESIANO[,3])

```

```

repeticao=repeticao+1
}
iteracao=iteracao+1
}

}
for (i in 1:NUMERO_REPETICOES) {
BIAS [MLE, cenario, i, 1]=mean (RESULTADO [MLE, cenario, , 1, 1])-scale
BIAS [MLE, cenario, i, 2]=mean (RESULTADO [MLE, cenario, , 1, 2])-shape
MSE [MLE, cenario, i, 1]=var (RESULTADO [MLE, cenario, , 1, 1])+(BIAS [MLE, cenario, i, 1])^2
MSE [MLE, cenario, i, 2]=var (RESULTADO [MLE, cenario, , 1, 2])+(BIAS [MLE, cenario, i, 2])^2
BIAS [MCMC1, cenario, i, 1]=mean (RESULTADO [MCMC1, cenario, , i, 1])-scale
BIAS [MCMC1, cenario, i, 2]=mean (RESULTADO [MCMC1, cenario, , i, 2])-shape
MSE [MCMC1, cenario, i, 1]=var (RESULTADO [MCMC1, cenario, , i, 1])+(BIAS [MCMC1, cenario, i, 1])^2
MSE [MCMC1, cenario, i, 2]=var (RESULTADO [MCMC1, cenario, , i, 2])+(BIAS [MCMC1, cenario, i, 2])^2
BIAS [MCMC2, cenario, i, 1]=mean (RESULTADO [MCMC2, cenario, , i, 1])-scale
BIAS [MCMC2, cenario, i, 2]=mean (RESULTADO [MCMC2, cenario, , i, 2])-shape
MSE [MCMC2, cenario, i, 1]=var (RESULTADO [MCMC2, cenario, , i, 1])+(BIAS [MCMC2, cenario, i, 1])^2
MSE [MCMC2, cenario, i, 2]=var (RESULTADO [MCMC2, cenario, , i, 2])+(BIAS [MCMC2, cenario, i, 2])^2
}
cenario=cenario+1

}

ptm2 <- proc.time()

#####
eixox <- seq(0,20,2)
##### CENARIO 1
titulo=expression(paste(delta, " = 1 e ", lambda, " = 1. Esquema 1: (0,0,0,0,n-m=25),T.L=-0.5"))
titulo=""
par(mfrow=c(2,2))
plot(BIAS [MLE, 1, 2]~eixox,type="b",pch=16,lty=1,ylim=c(-0.2,.6),
xlab="Prior",ylab=expression(paste("Bias (" ,delta, "))),
main=titulo,
cex.main=.8,col="black")
lines(BIAS [MCMC1, 1, 2]~eixox,type="b",lty=2,col="blue")
lines(BIAS [MCMC2, 1, 2]~eixox,type="b",pch=12,lty=3,col="red")
abline(0,0,lty=2)
legend(16,.6,c("MLE", "MCMC1", "MCMC2"),lty=c(1,2,3),pch=c(16,1,12),col=c("black", "blue", "red"))

plot(BIAS [MLE, 1, 1]~eixox,type="b",pch=16,lty=1,ylim=c(-0.2,.6),
xlab="Prior",ylab=expression(paste("Bias (" ,lambda, "))),
main=titulo,
cex.main=.8,col="black")
lines(BIAS [MCMC1, 1, 1]~eixox,type="b",lty=2,col="blue")
lines(BIAS [MCMC2, 1, 1]~eixox,type="b",pch=12,lty=3,col="red")
abline(0,0,lty=2)
legend(16,.6,c("MLE", "MCMC1", "MCMC2"),lty=c(1,2,3),pch=c(16,1,12),col=c("black", "blue", "red"))

plot(MSE [MLE, 1, 2]~eixox,type="b",pch=16,lty=1,ylim=c(0,.8),
xlab="Prior",ylab=expression(paste("MSE (" ,delta, "))),
main=titulo,
cex.main=.8,col="black")
lines(MSE [MCMC1, 1, 2]~eixox,type="b",lty=2,col="blue")
lines(MSE [MCMC2, 1, 2]~eixox,type="b",pch=12,lty=3,col="red")
abline(0,0,lty=2)
legend(16,.8,c("MLE", "MCMC1", "MCMC2"),lty=c(1,2,3),pch=c(16,1,12),col=c("black", "blue", "red"))

plot(MSE [MLE, 1, 1]~eixox,type="b",pch=16,lty=1,ylim=c(0,.2),
xlab="Prior",ylab=expression(paste("MSE (" ,lambda, "))),
main=titulo,
cex.main=.8,col="black")
lines(MSE [MCMC1, 1, 1]~eixox,type="b",lty=2,col="blue")
lines(MSE [MCMC2, 1, 1]~eixox,type="b",pch=12,lty=3,col="red")
abline(0,0,lty=2)
legend(16,.2,c("MLE", "MCMC1", "MCMC2"),lty=c(1,2,3),pch=c(16,1,12),col=c("black", "blue", "red"))

##### CENARIO 2

```

```

titulo=expression(paste(delta," = 1 e ", lambda, " = 1. Esquema 1: (0,0,0,0,n-m=25),T.L=0.5"))
titulo=""
par(mfrow=c(2,2))
plot(BIAS[MLE,2,,2]~eixox,type="b",pch=16,lty=1,ylim=c(-.2,.6),
xlab="Prior",ylab=expression(paste("Bias (" ,delta,")")),
main=titulo,
cex.main=.8,col="black")
lines(BIAS[MCMC1,2,,2]~eixox,type="b",lty=2,col="blue")
lines(BIAS[MCMC2,2,,2]~eixox,type="b",pch=12,lty=3,col="red")
abline(0,0,lty=2)
legend(16,.6,c("MLE", "MCMC1", "MCMC2"),lty=c(1,2,3),pch=c(16,1,12),col=c("black", "blue", "red"))

plot(BIAS[MLE,2,,1]~eixox,type="b",pch=16,lty=1,ylim=c(-.2,.6),
xlab="Prior",ylab=expression(paste("Bias (" ,lambda,")")),
main=titulo,
cex.main=.8,col="black")
lines(BIAS[MCMC1,2,,1]~eixox,type="b",lty=2,col="blue")
lines(BIAS[MCMC2,2,,1]~eixox,type="b",pch=12,lty=3,col="red")
abline(0,0,lty=2)
legend(16,.6,c("MLE", "MCMC1", "MCMC2"),lty=c(1,2,3),pch=c(16,1,12),col=c("black", "blue", "red"))

plot(MSE[MLE,2,,2]~eixox,type="b",pch=16,lty=1,ylim=c(0,.6),
xlab="Prior",ylab=expression(paste("MSE (" ,delta,")")),
main=titulo,
cex.main=.8,col="black")
lines(MSE[MCMC1,2,,2]~eixox,type="b",lty=2,col="blue")
lines(MSE[MCMC2,2,,2]~eixox,type="b",pch=12,lty=3,col="red")
abline(0,0,lty=2)
legend(16,.6,c("MLE", "MCMC1", "MCMC2"),lty=c(1,2,3),pch=c(16,1,12),col=c("black", "blue", "red"))

plot(MSE[MLE,2,,1]~eixox,type="b",pch=16,lty=1,ylim=c(0,.1),
xlab="Prior",ylab=expression(paste("MSE (" ,lambda,")")),
main=titulo,
cex.main=.8,col="black")
lines(MSE[MCMC1,2,,1]~eixox,type="b",lty=2,col="blue")
lines(MSE[MCMC2,2,,1]~eixox,type="b",pch=12,lty=3,col="red")
abline(0,0,lty=2)
legend(16,.1,c("MLE", "MCMC1", "MCMC2"),lty=c(1,2,3),pch=c(16,1,12),col=c("black", "blue", "red"))

##### CENARIO 3
titulo=expression(paste(delta," = 1.25 e ", lambda, " = 0.5353. Esquema 1: (0,0,0,0,n-m=25),T.L=-0.5"))
titulo=""
par(mfrow=c(2,2))
plot(BIAS[MLE,3,,2]~eixox,type="b",pch=16,lty=1,ylim=c(-.2,.8),
xlab="Prior",ylab=expression(paste("Bias (" ,delta,")")),
main=titulo,
cex.main=.8,col="black")
lines(BIAS[MCMC1,3,,2]~eixox,type="b",lty=2,col="blue")
lines(BIAS[MCMC2,3,,2]~eixox,type="b",pch=12,lty=3,col="red")
abline(0,0,lty=2)
legend(16,.8,c("MLE", "MCMC1", "MCMC2"),lty=c(1,2,3),pch=c(16,1,12),col=c("black", "blue", "red"))

plot(BIAS[MLE,3,,1]~eixox,type="b",pch=16,lty=1,ylim=c(0,.35),
xlab="Prior",ylab=expression(paste("Bias (" ,lambda,")")),
main=titulo,
cex.main=.8,col="black")
lines(BIAS[MCMC1,3,,1]~eixox,type="b",lty=2,col="blue")
lines(BIAS[MCMC2,3,,1]~eixox,type="b",pch=12,lty=3,col="red")
abline(0,0,lty=2)
legend(16,.17,c("MLE", "MCMC1", "MCMC2"),lty=c(1,2,3),pch=c(16,1,12),col=c("black", "blue", "red"))

plot(MSE[MLE,3,,2]~eixox,type="b",pch=16,lty=1,ylim=c(0,1.5),
xlab="Prior",ylab=expression(paste("MSE (" ,delta,")")),
main=titulo,
cex.main=.8,col="black")
lines(MSE[MCMC1,3,,2]~eixox,type="b",lty=2,col="blue")
lines(MSE[MCMC2,3,,2]~eixox,type="b",pch=12,lty=3,col="red")
abline(0,0,lty=2)
legend(16,1.5,c("MLE", "MCMC1", "MCMC2"),lty=c(1,2,3),pch=c(16,1,12),col=c("black", "blue", "red"))

```

```

plot(MSE[MLE,3,,1]~eixox,type="b",pch=16,lty=1,ylim=c(0,.22),
xlab="Prior",ylab=expression(paste("MSE (" ,lambda,")")),
main=titulo,
cex.main=.8,col="black")
lines(MSE[MCMC1,3,,1]~eixox,type="b",lty=2,col="blue")
lines(MSE[MCMC2,3,,1]~eixox,type="b",pch=12,lty=3,col="red")
abline(0,0,lty=2)
legend(16,.22,c("MLE","MCMC1","MCMC2"),lty=c(1,2,3),pch=c(16,1,12),col=c("black","blue","red"))

##### CENARIO 4
titulo=expression(paste(delta," = 1.25 e ", lambda, " = 0.5353. Esquema 1: (0,0,0,0,n-m=25),T.L=0.5"))
titulo=""
par(mfrow=c(2,2))
plot(BIAS[MLE,4,,2]~eixox,type="b",pch=16,lty=1,ylim=c(-0.2,.8),
xlab="Prior",ylab=expression(paste("Bias (" ,delta,")")),
main=titulo,
cex.main=.8,col="black")
lines(BIAS[MCMC1,4,,2]~eixox,type="b",lty=2,col="blue")
lines(BIAS[MCMC2,4,,2]~eixox,type="b",pch=12,lty=3,col="red")
abline(0,0,lty=2)
legend(16,.8,c("MLE","MCMC1","MCMC2"),lty=c(1,2,3),pch=c(16,1,12),col=c("black","blue","red"))

plot(BIAS[MLE,4,,1]~eixox,type="b",pch=16,lty=1,ylim=c(0,.4),
xlab="Prior",ylab=expression(paste("Bias (" ,lambda,")")),
main=titulo,
cex.main=.8,col="black")
lines(BIAS[MCMC1,4,,1]~eixox,type="b",lty=2,col="blue")
lines(BIAS[MCMC2,4,,1]~eixox,type="b",pch=12,lty=3,col="red")
abline(0,0,lty=2)
legend(16,.19,c("MLE","MCMC1","MCMC2"),lty=c(1,2,3),pch=c(16,1,12),col=c("black","blue","red"))

plot(MSE[MLE,4,,2]~eixox,type="b",pch=16,lty=1,ylim=c(0,.5),
xlab="Prior",ylab=expression(paste("MSE (" ,delta,")")),
main=titulo,
cex.main=.8,col="black")
lines(MSE[MCMC1,4,,2]~eixox,type="b",lty=2,col="blue")
lines(MSE[MCMC2,4,,2]~eixox,type="b",pch=12,lty=3,col="red")
abline(0,0,lty=2)
legend(16,.3,c("MLE","MCMC1","MCMC2"),lty=c(1,2,3),pch=c(16,1,12),col=c("black","blue","red"))

plot(MSE[MLE,4,,1]~eixox,type="b",pch=16,lty=1,ylim=c(0,.2),
xlab="Prior",ylab=expression(paste("MSE (" ,lambda,")")),
main=titulo,
cex.main=.8,col="black")
lines(MSE[MCMC1,4,,1]~eixox,type="b",lty=2,col="blue")
lines(MSE[MCMC2,4,,1]~eixox,type="b",pch=12,lty=3,col="red")
abline(0,0,lty=2)
legend(16,.09,c("MLE","MCMC1","MCMC2"),lty=c(1,2,3),pch=c(16,1,12),col=c("black","blue","red"))

##### CENARIO 5
titulo=expression(paste(delta," = 1 e ", lambda, " = 1. Esquema 2: (n-m=25,0,0,0,0),T.L=-0.5"))
titulo=""
par(mfrow=c(2,2))
plot(BIAS[MLE,5,,2]~eixox,type="b",pch=16,lty=1,ylim=c(-.5,0.1),
xlab="Prior",ylab=expression(paste("Bias (" ,delta,")")),
main=titulo,
cex.main=.8,col="black")
lines(BIAS[MCMC1,5,,2]~eixox,type="b",lty=2,col="blue")
lines(BIAS[MCMC2,5,,2]~eixox,type="b",pch=12,lty=3,col="red")
abline(0,0,lty=2)
legend(16,-.2,c("MLE","MCMC1","MCMC2"),lty=c(1,2,3),pch=c(16,1,12),col=c("black","blue","red"))

plot(BIAS[MLE,5,,1]~eixox,type="b",pch=16,lty=1,ylim=c(-.2,.8),
xlab="Prior",ylab=expression(paste("Bias (" ,lambda,")")),
main=titulo,
cex.main=.8,col="black")
lines(BIAS[MCMC1,5,,1]~eixox,type="b",lty=2,col="blue")
lines(BIAS[MCMC2,5,,1]~eixox,type="b",pch=12,lty=3,col="red")
abline(0,0,lty=2)
legend(16,.8,c("MLE","MCMC1","MCMC2"),lty=c(1,2,3),pch=c(16,1,12),col=c("black","blue","red"))

```



```

plot(MSE[MLE,5,,2]~eixox,type="b",pch=16,lty=1,ylim=c(0,.32),
xlab="Prior",ylab=expression(paste("MSE (" ,delta,")")),
main=titulo,
cex.main=.8,col="black")
lines(MSE[MCMC1,5,,2]~eixox,type="b",lty=2,col="blue")
lines(MSE[MCMC2,5,,2]~eixox,type="b",pch=12,lty=3,col="red")
abline(0,0,lty=2)
legend(16,.3,c("MLE","MCMC1","MCMC2"),lty=c(1,2,3),pch=c(16,1,12),col=c("black","blue","red"))

plot(MSE[MLE,5,,1]~eixox,type="b",pch=16,lty=1,ylim=c(0,.1),
xlab="Prior",ylab=expression(paste("MSE (" ,lambda,")")),
main=titulo,
cex.main=.8,col="black")
lines(MSE[MCMC1,5,,1]~eixox,type="b",lty=2,col="blue")
lines(MSE[MCMC2,5,,1]~eixox,type="b",pch=12,lty=3,col="red")
abline(0,0,lty=2)
legend(16,.06,c("MLE","MCMC1","MCMC2"),lty=c(1,2,3),pch=c(16,1,12),col=c("black","blue","red"))

##### CENARIO 6
titulo=expression(paste(delta," = 1 e ", lambda, " = 1. Esquema 2: (n-m=25,0,0,0),T.L=0.5"))
titulo=""
par(mfrow=c(2,2))
plot(BIAS[MLE,6,,2]~eixox,type="b",pch=16,lty=1,ylim=c(-.2,.2),
xlab="Prior",ylab=expression(paste("Bias (" ,delta,")")),
main=titulo,
cex.main=.8,col="black")
lines(BIAS[MCMC1,6,,2]~eixox,type="b",lty=2,col="blue")
lines(BIAS[MCMC2,6,,2]~eixox,type="b",pch=12,lty=3,col="red")
abline(0,0,lty=2)
legend(16,-.05,c("MLE","MCMC1","MCMC2"),lty=c(1,2,3),pch=c(16,1,12),col=c("black","blue","red"))

plot(BIAS[MLE,6,,1]~eixox,type="b",pch=16,lty=1,ylim=c(-.2,.8),
xlab="Prior",ylab=expression(paste("Bias (" ,lambda,")")),
main=titulo,
cex.main=.8,col="black")
lines(BIAS[MCMC1,6,,1]~eixox,type="b",lty=2,col="blue")
lines(BIAS[MCMC2,6,,1]~eixox,type="b",pch=12,lty=3,col="red")
abline(0,0,lty=2)
legend(16,.8,c("MLE","MCMC1","MCMC2"),lty=c(1,2,3),pch=c(16,1,12),col=c("black","blue","red"))

plot(MSE[MLE,6,,2]~eixox,type="b",pch=16,lty=1,ylim=c(0,.25),
xlab="Prior",ylab=expression(paste("MSE (" ,delta,")")),
main=titulo,
cex.main=.8,col="black")
lines(MSE[MCMC1,6,,2]~eixox,type="b",lty=2,col="blue")
lines(MSE[MCMC2,6,,2]~eixox,type="b",pch=12,lty=3,col="red")
abline(0,0,lty=2)
legend(16,.25,c("MLE","MCMC1","MCMC2"),lty=c(1,2,3),pch=c(16,1,12),col=c("black","blue","red"))

plot(MSE[MLE,6,,1]~eixox,type="b",pch=16,lty=1,ylim=c(0,1),
xlab="Prior",ylab=expression(paste("MSE (" ,lambda,")")),
main=titulo,
cex.main=.8,col="black")
lines(MSE[MCMC1,6,,1]~eixox,type="b",lty=2,col="blue")
lines(MSE[MCMC2,6,,1]~eixox,type="b",pch=12,lty=3,col="red")
abline(0,0,lty=2)
legend(16,1,c("MLE","MCMC1","MCMC2"),lty=c(1,2,3),pch=c(16,1,12),col=c("black","blue","red"))

##### CENARIO 7
titulo=expression(paste(delta," = 1.25 e ", lambda, " = 0.5353. Esquema 2: (n-m=25,0,0,0),T.L=-0.5"))
titulo=""
par(mfrow=c(2,2))
plot(BIAS[MLE,7,,2]~eixox,type="b",pch=16,lty=1,ylim=c(-.2,.3),
xlab="Prior",ylab=expression(paste("Bias (" ,delta,")")),
main=titulo,
cex.main=.8,col="black")
lines(BIAS[MCMC1,7,,2]~eixox,type="b",lty=2,col="blue")
lines(BIAS[MCMC2,7,,2]~eixox,type="b",pch=12,lty=3,col="red")
abline(0,0,lty=2)

```

```

legend(16, .2, c("MLE", "MCMC1", "MCMC2"), lty=c(1,2,3), pch=c(16,1,12), col=c("black", "blue", "red"))

plot(BIAS[MLE,7,,1]~eixox,type="b",pch=16,lty=1,ylim=c(0,.4),
xlab="Prior",ylab=expression(paste("Bias (",lambda,")")),
main=titulo,
cex.main=.8,col="black")
lines(BIAS[MCMC1,7,,1]~eixox,type="b",lty=2,col="blue")
lines(BIAS[MCMC2,7,,1]~eixox,type="b",pch=12,lty=3,col="red")
abline(0,0,lty=2)
legend(16, .33, c("MLE", "MCMC1", "MCMC2"), lty=c(1,2,3), pch=c(16,1,12), col=c("black", "blue", "red"))

plot(MSE[MLE,7,,2]~eixox,type="b",pch=16,lty=1,ylim=c(0,.6),
xlab="Prior",ylab=expression(paste("MSE (",delta,")")),
main=titulo,
cex.main=.8,col="black")
lines(MSE[MCMC1,7,,2]~eixox,type="b",lty=2,col="blue")
lines(MSE[MCMC2,7,,2]~eixox,type="b",pch=12,lty=3,col="red")
abline(0,0,lty=2)
legend(16, .46, c("MLE", "MCMC1", "MCMC2"), lty=c(1,2,3), pch=c(16,1,12), col=c("black", "blue", "red"))

plot(MSE[MLE,7,,1]~eixox,type="b",pch=16,lty=1,ylim=c(0,.15),
xlab="Prior",ylab=expression(paste("MSE (",lambda,")")),
main=titulo,
cex.main=.8,col="black")
lines(MSE[MCMC1,7,,1]~eixox,type="b",lty=2,col="blue")
lines(MSE[MCMC2,7,,1]~eixox,type="b",pch=12,lty=3,col="red")
abline(0,0,lty=2)
legend(16, .1, c("MLE", "MCMC1", "MCMC2"), lty=c(1,2,3), pch=c(16,1,12), col=c("black", "blue", "red"))

##### CENARIO 8
titulo=expression(paste(delta," = 1.25 e ", lambda, " = 0.5353. Esquema 2: (n-m=25,0,0,0),T.L=0.5"))
titulo=""
par(mfrow=c(2,2))
plot(BIAS[MLE,8,,2]~eixox,type="b",pch=16,lty=1,ylim=c(-.2,.1),
xlab="Prior",ylab=expression(paste("Bias (",delta,")")),
main=titulo,
cex.main=.8,col="black")
lines(BIAS[MCMC1,8,,2]~eixox,type="b",lty=2,col="blue")
lines(BIAS[MCMC2,8,,2]~eixox,type="b",pch=12,lty=3,col="red")
abline(0,0,lty=2)
legend(16, -.001, c("MLE", "MCMC1", "MCMC2"), lty=c(1,2,3), pch=c(16,1,12), col=c("black", "blue", "red"))

plot(BIAS[MLE,8,,1]~eixox,type="b",pch=16,lty=1,ylim=c(-0.1,.4),
xlab="Prior",ylab=expression(paste("Bias (",lambda,")")),
main=titulo,
cex.main=.8,col="black")
lines(BIAS[MCMC1,8,,1]~eixox,type="b",lty=2,col="blue")
lines(BIAS[MCMC2,8,,1]~eixox,type="b",pch=12,lty=3,col="red")
abline(0,0,lty=2)
legend(16, .25, c("MLE", "MCMC1", "MCMC2"), lty=c(1,2,3), pch=c(16,1,12), col=c("black", "blue", "red"))

plot(MSE[MLE,8,,2]~eixox,type="b",pch=16,lty=1,ylim=c(0,.3),
xlab="Prior",ylab=expression(paste("MSE (",delta,")")),
main=titulo,
cex.main=.8,col="black")
lines(MSE[MCMC1,8,,2]~eixox,type="b",lty=2,col="blue")
lines(MSE[MCMC2,8,,2]~eixox,type="b",pch=12,lty=3,col="red")
abline(0,0,lty=2)
legend(16, .3, c("MLE", "MCMC1", "MCMC2"), lty=c(1,2,3), pch=c(16,1,12), col=c("black", "blue", "red"))

plot(MSE[MLE,8,,1]~eixox,type="b",pch=16,lty=1,ylim=c(0,.2),
xlab="Prior",ylab=expression(paste("MSE (",lambda,")")),
main=titulo,
cex.main=.8,col="black")
lines(MSE[MCMC1,8,,1]~eixox,type="b",lty=2,col="blue")
lines(MSE[MCMC2,8,,1]~eixox,type="b",pch=12,lty=3,col="red")
abline(0,0,lty=2)
legend(16, .2, c("MLE", "MCMC1", "MCMC2"), lty=c(1,2,3), pch=c(16,1,12), col=c("black", "blue", "red"))

##### CENARIO 9

```

```

titulo=expression(paste(delta," = 1 e ", lambda, " = 1. Esquema 3: (1,1,1,1,n-2m+1),T.L=-0.5"))
titulo=""
par(mfrow=c(2,2))
plot(BIAS[MLE,9,,2]~eixox,type="b",pch=16,lty=1,ylim=c(-.1,.5),
xlab="Prior",ylab=expression(paste("Bias (" ,delta,")")),
main=titulo,
cex.main=.8,col="black")
lines(BIAS[MCMC1,9,,2]~eixox,type="b",lty=2,col="blue")
lines(BIAS[MCMC2,9,,2]~eixox,type="b",pch=12,lty=3,col="red")
abline(0,0,lty=2)
legend(16,.5,c("MLE", "MCMC1", "MCMC2"),lty=c(1,2,3),pch=c(16,1,12),col=c("black", "blue", "red"))

plot(BIAS[MLE,9,,1]~eixox,type="b",pch=16,lty=1,ylim=c(-.1,.2),
xlab="Prior",ylab=expression(paste("Bias (" ,lambda,")")),
main=titulo,
cex.main=.8,col="black")
lines(BIAS[MCMC1,9,,1]~eixox,type="b",lty=2,col="blue")
lines(BIAS[MCMC2,9,,1]~eixox,type="b",pch=12,lty=3,col="red")
abline(0,0,lty=2)
legend(16,.2,c("MLE", "MCMC1", "MCMC2"),lty=c(1,2,3),pch=c(16,1,12),col=c("black", "blue", "red"))

plot(MSE[MLE,9,,2]~eixox,type="b",pch=16,lty=1,ylim=c(0,.8),
xlab="Prior",ylab=expression(paste("MSE (" ,delta,")")),
main=titulo,
cex.main=.8,col="black")
lines(MSE[MCMC1,9,,2]~eixox,type="b",lty=2,col="blue")
lines(MSE[MCMC2,9,,2]~eixox,type="b",pch=12,lty=3,col="red")
abline(0,0,lty=2)
legend(16,.8,c("MLE", "MCMC1", "MCMC2"),lty=c(1,2,3),pch=c(16,1,12),col=c("black", "blue", "red"))

plot(MSE[MLE,9,,1]~eixox,type="b",pch=16,lty=1,ylim=c(0,.15),
xlab="Prior",ylab=expression(paste("MSE (" ,lambda,")")),
main=titulo,
cex.main=.8,col="black")
lines(MSE[MCMC1,9,,1]~eixox,type="b",lty=2,col="blue")
lines(MSE[MCMC2,9,,1]~eixox,type="b",pch=12,lty=3,col="red")
abline(0,0,lty=2)
legend(16,.15,c("MLE", "MCMC1", "MCMC2"),lty=c(1,2,3),pch=c(16,1,12),col=c("black", "blue", "red"))

##### CENARIO 10
titulo=expression(paste(delta," = 1 e ", lambda, " = 1. Esquema 3: (1,1,1,1,n-2m+1),T.L=0.5"))
titulo=""
par(mfrow=c(2,2))
plot(BIAS[MLE,10,,2]~eixox,type="b",pch=16,lty=1,ylim=c(-.1,.5),
xlab="Prior",ylab=expression(paste("Bias (" ,delta,")")),
main=titulo,
cex.main=.8,col="black")
lines(BIAS[MCMC1,10,,2]~eixox,type="b",lty=2,col="blue")
lines(BIAS[MCMC2,10,,2]~eixox,type="b",pch=12,lty=3,col="red")
abline(0,0,lty=2)
legend(16,.5,c("MLE", "MCMC1", "MCMC2"),lty=c(1,2,3),pch=c(16,1,12),col=c("black", "blue", "red"))

plot(BIAS[MLE,10,,1]~eixox,type="b",pch=16,lty=1,ylim=c(-.1,.2),
xlab="Prior",ylab=expression(paste("Bias (" ,lambda,")")),
main=titulo,
cex.main=.8,col="black")
lines(BIAS[MCMC1,10,,1]~eixox,type="b",lty=2,col="blue")
lines(BIAS[MCMC2,10,,1]~eixox,type="b",pch=12,lty=3,col="red")
abline(0,0,lty=2)
legend(16,.2,c("MLE", "MCMC1", "MCMC2"),lty=c(1,2,3),pch=c(16,1,12),col=c("black", "blue", "red"))

plot(MSE[MLE,10,,2]~eixox,type="b",pch=16,lty=1,ylim=c(0,.6),
xlab="Prior",ylab=expression(paste("MSE (" ,delta,")")),
main=titulo,
cex.main=.8,col="black")
lines(MSE[MCMC1,10,,2]~eixox,type="b",lty=2,col="blue")
lines(MSE[MCMC2,10,,2]~eixox,type="b",pch=12,lty=3,col="red")
abline(0,0,lty=2)
legend(16,.6,c("MLE", "MCMC1", "MCMC2"),lty=c(1,2,3),pch=c(16,1,12),col=c("black", "blue", "red"))

```

```

plot(MSE[MLE,10,,1]~eixox,type="b",pch=16,lty=1,ylim=c(0,.1),
xlab="Prior",ylab=expression(paste("MSE (",lambda,")")),
main=titulo,
cex.main=.8,col="black")
lines(MSE[MCMC1,10,,1]~eixox,type="b",lty=2,col="blue")
lines(MSE[MCMC2,10,,1]~eixox,type="b",pch=12,lty=3,col="red")
abline(0,0,lty=2)
legend(16,.1,c("MLE","MCMC1","MCMC2"),lty=c(1,2,3),pch=c(16,1,12),col=c("black","blue","red"))

##### CENARIO 11
titulo=expression(paste(delta," = 1.25 e ", lambda, " = 0.5353. Esquema 3: (1,1,1,1,n-2m+1),T.L=-0.5"))
titulo=""
par(mfrow=c(2,2))
plot(BIAS[MLE,11,,2]~eixox,type="b",pch=16,lty=1,ylim=c(-.2,.7),
xlab="Prior",ylab=expression(paste("Bias (",delta,")")),
main=titulo,
cex.main=.8,col="black")
lines(BIAS[MCMC1,11,,2]~eixox,type="b",lty=2,col="blue")
lines(BIAS[MCMC2,11,,2]~eixox,type="b",pch=12,lty=3,col="red")
abline(0,0,lty=2)
legend(16,.7,c("MLE","MCMC1","MCMC2"),lty=c(1,2,3),pch=c(16,1,12),col=c("black","blue","red"))

plot(BIAS[MLE,11,,1]~eixox,type="b",pch=16,lty=1,ylim=c(0,.35),
xlab="Prior",ylab=expression(paste("Bias (",lambda,")")),
main=titulo,
cex.main=.8,col="black")
lines(BIAS[MCMC1,11,,1]~eixox,type="b",lty=2,col="blue")
lines(BIAS[MCMC2,11,,1]~eixox,type="b",pch=12,lty=3,col="red")
abline(0,0,lty=2)
legend(16,.15,c("MLE","MCMC1","MCMC2"),lty=c(1,2,3),pch=c(16,1,12),col=c("black","blue","red"))

plot(MSE[MLE,11,,2]~eixox,type="b",pch=16,lty=1,ylim=c(0,1.2),
xlab="Prior",ylab=expression(paste("MSE (",delta,")")),
main=titulo,
cex.main=.8,col="black")
lines(MSE[MCMC1,11,,2]~eixox,type="b",lty=2,col="blue")
lines(MSE[MCMC2,11,,2]~eixox,type="b",pch=12,lty=3,col="red")
abline(0,0,lty=2)
legend(16,1.2,c("MLE","MCMC1","MCMC2"),lty=c(1,2,3),pch=c(16,1,12),col=c("black","blue","red"))

plot(MSE[MLE,11,,1]~eixox,type="b",pch=16,lty=1,ylim=c(0,.22),
xlab="Prior",ylab=expression(paste("MSE (",lambda,")")),
main=titulo,
cex.main=.8,col="black")
lines(MSE[MCMC1,11,,1]~eixox,type="b",lty=2,col="blue")
lines(MSE[MCMC2,11,,1]~eixox,type="b",pch=12,lty=3,col="red")
abline(0,0,lty=2)
legend(16,.22,c("MLE","MCMC1","MCMC2"),lty=c(1,2,3),pch=c(16,1,12),col=c("black","blue","red"))

##### CENARIO 12
titulo=expression(paste(delta," = 1.25 e ", lambda, " = 0.5353. Esquema 3: (1,1,1,1,n-2m+1),T.L=0.5"))
titulo=""
par(mfrow=c(2,2))
plot(BIAS[MLE,12,,2]~eixox,type="b",pch=16,lty=1,ylim=c(-.2,.7),
xlab="Prior",ylab=expression(paste("Bias (",delta,")")),
main=titulo,
cex.main=.8,col="black")
lines(BIAS[MCMC1,12,,2]~eixox,type="b",lty=2,col="blue")
lines(BIAS[MCMC2,12,,2]~eixox,type="b",pch=12,lty=3,col="red")
abline(0,0,lty=2)
legend(16,.7,c("MLE","MCMC1","MCMC2"),lty=c(1,2,3),pch=c(16,1,12),col=c("black","blue","red"))

plot(BIAS[MLE,12,,1]~eixox,type="b",pch=16,lty=1,ylim=c(0,.35),
xlab="Prior",ylab=expression(paste("Bias (",lambda,")")),
main=titulo,
cex.main=.8,col="black")
lines(BIAS[MCMC1,12,,1]~eixox,type="b",lty=2,col="blue")
lines(BIAS[MCMC2,12,,1]~eixox,type="b",pch=12,lty=3,col="red")
abline(0,0,lty=2)
legend(16,.175,c("MLE","MCMC1","MCMC2"),lty=c(1,2,3),pch=c(16,1,12),col=c("black","blue","red"))

```

```

plot(MSE[MLE,12,,2]~eixox,type="b",pch=16,lty=1,ylim=c(0,.6),
xlab="Prior",ylab=expression(paste("MSE (" ,delta,")")),
main=titulo,
cex.main=.8,col="black")
lines(MSE[MCMC1,12,,2]~eixox,type="b",lty=2,col="blue")
lines(MSE[MCMC2,12,,2]~eixox,type="b",pch=12,lty=3,col="red")
abline(0,0,lty=2)
legend(16,.4,c("MLE","MCMC1","MCMC2"),lty=c(1,2,3),pch=c(16,1,12),col=c("black","blue","red"))

plot(MSE[MLE,12,,1]~eixox,type="b",pch=16,lty=1,ylim=c(0,.2),
xlab="Prior",ylab=expression(paste("MSE (" ,lambda,")")),
main=titulo,
cex.main=.8,col="black")
lines(MSE[MCMC1,12,,1]~eixox,type="b",lty=2,col="blue")
lines(MSE[MCMC2,12,,1]~eixox,type="b",pch=12,lty=3,col="red")
abline(0,0,lty=2)
legend(16,.2,c("MLE","MCMC1","MCMC2"),lty=c(1,2,3),pch=c(16,1,12),col=c("black","blue","red"))

#####

```