Universidade de Brasília

Faculdade de Tecnologia

Departamento de Engenharia Mecânica

Ferramenta de otimização para identificação dos coeficientes pacejka de pneus pela magic formula 5.2

Caio Alves Assumpção

PROJETO DE GRADUAÇÃO 2

ENGENHARIA MECÂNICA

Brasília

2025

Universidade de Brasília
Faculdade de Tecnologia
Departamento de Engenharia Mecânica

Ferramenta de otimização para identificação dos coeficientes pacejka de pneus pela magic formula 5.2

Caio Alves Assumpção

Projeto de Graduação submetido como requisito parcial para obtenção do grau de Engenheiro Mecânico.

Orientador: Prof. Dr. Marcus Vinicius Girao De Morais
Coorientador: Prof. Dr. Rafael Rodrigues Da Silva

Brasília
2025

FICHA CATALOGRÁFICA

Alves Assumpção, Caio.

Ferramenta de otimização para identificação dos coeficientes pacejka de pneus pela magic formula 5.2 / Caio Alves Assumpção; orientador Marcus Vinicius Girao De Morais; coorientador Rafael Rodrigues Da Silva. -- Brasília, 2025.

116 p.

Projeto de Graduação 2 (Engenharia Mecânica) -- Universidade de Brasília, 2025.

1. Modelagem de pneus. 2. Magic Formula. 3. Pacejka 5.2. 4. Simulação veicular. 5. Otimização de parâmetros. I. Girao De Morais, Marcus Vinicius , orient. II. Rodrigues Da Silva, Rafael, coorient. III. Título.

Universidade de Brasília
Faculdade de Tecnologia
Departamento de Engenharia Mecânica

Ferramenta de otimização para identificação dos coeficientes pacejka de pneus pela magic formula 5.2

Caio Alves Assumpção

Projeto de Graduação submetido como requisito parcial para obtenção do grau de Engenheiro Mecânico.

Trabalho aprovado. Brasília, 18 de fevereiro de 2025:

Prof. Dr. Marcus Vinicius Girao De Morais ,
UnB/FT/ENM
Orientador

Rafael Rodrigues Da Silva ,
UnB/FGA
Coorientador

Prof. Dr. Alberto Carlos Guimarães Castro Diniz,
UnB/FT/ENM
Examinador Interno

Diego José Dos Santos Vasconcelos,
Stellantis
Examinador Externo

“O primeiro gole do copo das ciências naturais fará de você um ateu,
Mas, no fundo do copo, Deus está a sua espera.”

Agradecimentos

Agradeço, em primeiro lugar, a Deus, pois sem Ele nada existiria, e o universo não teria tomado consciência. Obrigado, meu Deus, por tanto amor e por sempre estar comigo!

Agradeço também à minha família, especialmente aos meus pais, que sempre fizeram absolutamente de tudo pela minha educação. Ao Ascle, por ter acreditado em mim na época da escola.

Agradeço pelas incríveis oportunidades de aprendizado ao longo do meu curso. O projeto ARC e a Apuama me fizeram amadurecer tanto no âmbito profissional quanto no pessoal.

E, por último, um agradecimento especial às duas pessoas que sempre estão ao meu lado: minha futura esposa, Rebeca, e meu irmão Vinícius. Minha vida não seria a mesma sem eles.

-

Resumo

O presente trabalho investiga a identificação paramétrica das forças e momentos atuantes em pneus, utilizando o modelo da Magic Formula de Pacejka na versão 5.2. A modelagem e a identificação dos parâmetros do pneu são essenciais para a simulação veicular, permitindo prever o comportamento dinâmico de veículos em diferentes condições de rodagem.

Inicialmente, são apresentados os fundamentos teóricos relacionados à dinâmica do pneu, incluindo as forças longitudinais, laterais e os momentos resultantes. Em seguida, é descrita a metodologia empregada para a obtenção dos coeficientes B, C, D e E do modelo de Pacejka a partir de dados experimentais adquiridos em testes de laboratório, como ensaios em máquinas do tipo *flat trac*.

A metodologia utilizada baseia-se em técnicas de otimização para minimizar o erro entre os dados experimentais e a curva ajustada pelo modelo, garantindo uma representação precisa do comportamento do pneu.

Os achados deste estudo contribuem para o aprimoramento da modelagem de pneus e para a melhoria da precisão de simulações veiculares em aplicações como simulação de desempenho, desenvolvimento de veículos autônomos e ajustes de sistemas de controle dinâmico veicular.

Palavras-chave: Modelagem de pneus; Magic Formula; Pacejka 5.2; simulação veicular; otimização de parâmetros.

Abstract

This work investigates the parametric identification of the forces and moments acting on tires, using the Pacejka Magic Formula version 5.2. Tire modeling and parameter identification are essential for vehicle simulation, enabling the prediction of dynamic vehicle behavior under various driving conditions.

First, the theoretical foundations of tire dynamics are presented, including longitudinal forces, lateral forces, and resulting moments. Next, the methodology used to obtain the B, C, D, and E coefficients of the Pacejka model from experimental data acquired in laboratory tests—such as those performed on flat-trac machines—is described.

The methodology is based on optimization techniques to minimize the error between the experimental data and the model-fitted curve, ensuring an accurate representation of tire behavior.

The findings of this study contribute to improving tire modeling and enhancing the accuracy of vehicle simulations in applications such as performance simulation, autonomous vehicle development, and tuning of vehicle dynamic control systems.

Keywords: Tire modeling; Magic Formula; Pacejka 5.2; vehicle simulation; parameter optimization.

Lista de figuras

Figura 2.1 Componentes de um pneu, destacando elementos como banda de rodagem, ombro, flanco e talão. (Fonte: Salvi (2021)) 19
Figura 2.2 Informações gravadas nas laterais de um pneu, destacando dimensões, número DOT, tipo de construção, e outros dados relevantes. (Fonte:Souza (2023) 20
Figura 2.3 Esquema comparativo entre os pneus radiais (à direita) e diagonais (à esquerda), destacando as diferenças estruturais em lonas, cintas e carcaça. (Fonte: Adaptado de Salvi (Salvi, 2021)) 21
Figura 2.4 Área de contato de um pneu. (Gent; Walter, 2005). 22
Figura 2.5 Relação entre força lateral e *slip angle*, ilustrando as regiões linear, transicional e friccional. (Fonte: Adaptado de Milliken e Milliken (1995)) . . . 23
Figura 2.6 Ângulo de deslizamento. (Fonte: Seward (2014)) 24
Figura 2.7 Variação do torque de alinhamento em função do *slip angle*. (Fonte: Smith (1978)) 25
Figura 2.8 Representação esquemática do *pneumatic trail* e suas relações com as forças atuantes. (Fonte: Gent e Walter (2005)) 26
Figura 2.9 Representação do momento de rolagem gerado pelo deslocamento da força de reação da estrada. (Fonte: Milliken e Milliken (1995)) 27
Figura 2.10 Relação entre *longitudinal slip* e força longitudinal gerada. Fonte: (Gent; Walter, 2005) 28
Figura 2.11 Representação esquemática do momento de resistência ao rolamento em um pneu livre. (Fonte: Milliken e Milliken (1995)) 29
Figura 2.12 Representação da elipse de fricção. (Fonte: Milliken e Milliken (1995)) . 31
Figura 2.13 Comparação entre convenções SAE e ISO para forças e ângulos de pneus. Adaptado de Pacejka (2006). 35
Figura 2.14 Evolução da *Magic Formula*, desde o MF-Tyre 5.0 até a versão MF-Tyre/MF-Swift 6.2. Fonte: (TNO, 2014) 39
Figura 2.15 Máquina de ensaio *Flat Trac* utilizada para testes experimentais de pneus. Fonte: (Pacejka, 2006) 53
Figura 3.1 Interface do *tire testrig* com opções de análise. 63
Figura 3.2 Interface do *tire testrig* mostrando a seleção de parâmetros do pneu. . . 64
Figura 3.3 Curva de força lateral (F_y) em função do ângulo de deslizamento lateral. 64
Figura 4.1 Validação da força longitudinal (F_x) para $F_z = 2000$ N. 74
Figura 4.2 Validação da força longitudinal (F_x) para $F_z = 3000$ N. 74
Figura 4.3 Validação da força longitudinal (F_x) para $F_z = 4000$ N. 74

Figura 4.4 Validação da força lateral (F_y) para F_z = 2000 N. 75
Figura 4.5 Validação da força lateral (F_y) para F_z = 3000 N. 75
Figura 4.6 Validação da força lateral (F_y) para F_z = 4000 N. 75
Figura 4.7 Validação do torque de alinhamento (M_z) para $F_z = 2000N$. 76
Figura 4.8 Validação do torque de alinhamento (M_z) para $F_z = 3000N$. 76
Figura 4.9 Validação do torque de alinhamento (M_z) para $F_z = 4000N$. 76
Figura 4.10 Ajuste da força lateral (F_y) para F_z = 222 N. RMS Global: 32.4 N 78
Figura 4.11 Ajuste da força lateral (F_y) para F_z = 222 N. RMS Global: 32.4 N 79
Figura 4.12 Ajuste da força lateral (F_y) para F_z = 222 N. RMS Global: 32.4 N 79
Figura 4.13 Ajuste da força lateral (F_y) para F_z = 445 N. RMS Global: 32.4 N 80
Figura 4.14 Ajuste da força lateral (F_y) para F_z = 445 N. RMS Global: 32.4 N 81
Figura 4.15 Ajuste da força lateral (F_y) para F_z = 445 N. RMS Global: 32.4 N 81
Figura 4.16 Ajuste da força lateral (F_y) para F_z = 667 N. RMS Global: 32.4 N 82
Figura 4.17 Ajuste da força lateral (F_y) para F_z = 667 N. RMS Global: 32.4 N 83
Figura 4.18 Ajuste da força lateral (F_y) para F_z = 667 N. RMS Global: 32.4 N 83
Figura 4.19 Ajuste da força lateral (F_y) para F_z = 1112 N. RMS Global: 32.4 N 84
Figura 4.20 Ajuste da força lateral (F_y) para F_z = 1112 N. RMS Global: 32.4 N 84
Figura 4.21 Ajuste da força lateral (F_y) para F_z = 1112 N. RMS Global: 32.4 N 85
Figura 4.22 Ajuste da força lateral (F_y) para F_z = 1557 N. RMS Global: 32.4 N 86
Figura 4.23 Ajuste da força lateral (F_y) para F_z = 1557 N. RMS Global: 32.4 N 86
Figura 4.24 Ajuste da força lateral (F_y) para F_z = 1557 N. RMS Global: 32.4 N 87
Figura 4.25 Ajuste do torque de alinhamento M_z para F_z = 222 N e $\gamma = 0°$. RMS = 2.6 N·m; $NRMS$ = 21.9 %. 91
Figura 4.26 Ajuste de M_z para F_z = 445 N e $\gamma = 0°$. RMS = 3.0 N·m; $NRMS$ = 15.2 %. 92
Figura 4.27 Ajuste de M_z para F_z = 445 N e $\gamma = 2°$. RMS = 2.8 N·m; $NRMS$ = 9.1 %. 92
Figura 4.28 Ajuste de M_z para F_z = 445 N e $\gamma = 4°$. RMS = 4.8 N·m; $NRMS$ = 11.8 %. 93
Figura 4.29 Ajuste de M_z para F_z = 667 N e $\gamma = 0°$. RMS = 3.7 N·m; $NRMS$ = 13.7 %. 94
Figura 4.30 Ajuste de M_z para F_z = 667 N e $\gamma = 2°$. RMS = 2.8 N·m; $NRMS$ = 6.6 %. 94
Figura 4.31 Ajuste de M_z para F_z = 667 N e $\gamma = 4°$. RMS = 4.0 N·m; $NRMS$ = 7.1 %. 95
Figura 4.32 Ajuste de M_z para F_z = 1112 N e $\gamma = 0°$. RMS = 4.1 N·m; $NRMS$ = 10.9 %. 96
Figura 4.33 Ajuste de M_z para F_z = 1112 N e $\gamma = 2°$. RMS = 3.7 N·m; $NRMS$ = 7.1 %. 96
Figura 4.34 Ajuste de M_z para F_z = 1557 N e $\gamma = 0°$. RMS = 4.5 N·m; $NRMS$ = 9.0 %. 97
Figura 4.35 Ajuste de M_z para F_z = 1557 N e $\gamma = 2°$. RMS = 4.1 N·m; $NRMS$ = 6.2 %. 98
Figura 4.36 Ajuste de M_z para F_z = 1557 N e $\gamma = 4°$. RMS = 3.2 N·m; $NRMS$ = 4.0 %. 98
Figura 4.37 Ajuste da força longitudinal (F_x) para F_z = 667 N. NRMS: 19.47% 103
Figura 4.38 Ajuste da força longitudinal (F_x) para F_z = 1112 N. NRMS: 8.18% 104
Figura 4.39 Ajuste da força longitudinal (F_x) para F_z = 1557 N. NRMS: 9.31% 104

Lista de tabelas

Tabela 4.1 Limites e valores iniciais dos coeficientes da força lateral (F_y) 78
Tabela 4.2 Coeficientes ajustados do modelo Pacejka 5.2 para força lateral (F_y) . . . 88
Tabela 4.3 Limites e valores iniciais dos coeficientes do momento autoalinhante (M_z) 90
Tabela 4.4 Coeficientes Ajustados do Modelo de Momentos Autoalinhantes (M_z) . . 99
Tabela 4.5 Limites e valores iniciais dos coeficientes do modelo de Pacejka 5.2 para Força Longitudinal (F_x) 101
Tabela 4.6 Coeficientes Ajustados do Modelo de Pacejka 5.2 para Força Longitudinal (F_x) 102

Sumário

1 INTRODUÇÃO 14

1.1 Contextualização 14

1.2 Objetivos 16

1.3 Organização do Trabalho 16

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA 17

2.1 Estado da Arte 17

2.2 Caracterização de Pneus 18

2.2.1 Nomenclaturas e Aspectos Construtivos 18

2.2.2 Classificação dos Pneus 20

2.3 Propriedades Físicas no Pneu 22

2.3.1 Área de Contato 22

2.3.2 Força Lateral 23

2.3.3 Torque de alinhamento e Trilha pneumática 25

2.3.4 Momento de tombamento 26

2.3.5 Força Longitudinal 27

2.3.6 Momento de Resistência à Rolagem 29

2.3.7 Rigidez de Deriva e de Deslizamento Longitudinal 30

2.3.8 Elipse de fricção 30

2.3.9 Condições Operativas 32

2.3.10 Convenção de Sinais 34

2.4 Modelos Matemáticos 36

2.4.1 Magic Formula 36

2.4.2 Desenvolvimento Contínuo da Magic Formula 37

2.5 Conjunto de Equações da Magic Formula 5.2 40

2.5.1 Parâmetros Fundamentais 40

2.5.2 Forças e Momentos Gerados pelo Pneu 41

2.6 Testes Experimentais 52

2.6.1 Funcionamento das Máquinas Flat Trac 53

2.7 Fundamentos de Otimização para Identificação Paramétrica 54

2.7.1 Função Objetivo e Função Custo 55

2.7.2 Resíduos e Métricas de Erro 55

2.7.3 Gradiente, Jacobiano e Hessiana 56

2.7.4 Métodos Locais e Globais 57

2.7.5 Ambiente Computacional: SciPy e o Subpacote `optimize` 58

2.7.6 A Função `least_squares` e Algoritmos Associados 58

2.7.7 O Algoritmo Trust Region Reflective (TRF) . . . 58
2.7.8 Validação . . . 60
2.8 Considerações Finais . . . 60

3 METODOLOGIA . . . 62
3.1 Implementação e Validação dos Modelos de Pneu . . . 62
3.2 Desenvolvimento do Sistema de Simulação Veicular em Python . . . 65
3.2.1 Arquitetura do Sistema . . . 65
3.2.2 Integração com Dados Experimentais . . . 67
3.2.3 Geração de Relatórios e Visualização . . . 67
3.3 Identificação dos Coeficientes da Magic Formula 5.2 com Dados Experimentais . . . 68
3.3.1 Separação dos Dados para Diferentes Condições Operacionais Fixas 69
3.3.2 Otimização dos Coeficientes do Modelo Pacejka (Magic Formula 5.2) 70
3.3.3 Obtenção dos Coeficientes para Cada Força e Momento . . . 72

4 Resultados . . . 73
4.1 Considerações Iniciais . . . 73
4.2 Validação das Equações Implementadas . . . 73
4.2.1 Validação da Força Longitudinal (F_x) . . . 74
4.2.2 Validação da Força Lateral (F_y) . . . 75
4.2.3 Validação do Torque de Alinhamento (M_z) . . . 76
4.3 Resultados das otimizações . . . 77
4.3.1 Resultados para a Força Lateral . . . 77
4.3.2 Resultados para o Momento AutoAlinhante . . . 89
4.3.3 Ajuste da Força Longitudinal (F_x) . . . 101
4.3.4 Justificativa dos Resultados Obtidos . . . 102
4.4 Considerações Finais . . . 106

5 Conclusão e Trabalhos Futuros . . . 108
5.1 Principais Contribuições . . . 108
5.2 Resultados Alcançados . . . 109
5.3 Limitações e Desafios . . . 109
5.4 Trabalhos Futuros . . . 110

Referências . . . 112

Apêndices 115

Anexos 116

1 INTRODUÇÃO

Este capítulo tem como objetivo introduzir o estudo da dinâmica veicular, abordando a importância dos pneus como elementos essenciais na geração de forças que influenciam diretamente o desempenho e a estabilidade dos veículos. Será apresentada a relevância da modelagem matemática, com ênfase na aplicação do modelo Pacejka, para descrever o comportamento dinâmico dos pneus em diferentes condições operacionais. Além disso, será destacada a necessidade de métodos de otimização para a obtenção de coeficientes, visando o aprimoramento das simulações e o desenvolvimento de tecnologias na indústria automotiva.

1.1 Contextualização

O estudo da dinâmica veicular é essencial para o desenvolvimento de tecnologias que visam tornar os veículos mais seguros, eficientes e confortáveis. Desde sistemas de suspensão até tecnologias avançadas de controle, como Anti-Lock Brake System (ABS) e Electronic Stability Control (ESC), a compreensão das interações entre o veículo e o solo desempenha um papel fundamental no aprimoramento da performance automotiva. O sistema de suspensão, por sua vez, tem como principal função isolar o veículo das irregularidades da pista, proporcionando conforto e garantindo a aderência dos pneus ao solo. A manutenção dessa aderência é determinante para a estabilidade e a dirigibilidade do veículo, pois afeta diretamente a transmissão de forças entre o solo e o automóvel (Soliman; Kaldas, 2021; Rill; Castro, 2019).

Nesse contexto, os pneus, sendo o único ponto de contato entre o veículo e o solo, surgem como um dos componentes mais críticos para a dinâmica veicular. A interação entre o pneu e o pavimento determina a geração de forças longitudinais, laterais e momentos, afetando o comportamento dinâmico do veículo.

O estudo das forças e momentos gerados pelos pneus, como as forças laterais (F_y), longitudinais (F_x) e os momentos autoalinhantes (M_z), é essencial para simulações de dinâmica veicular. Essas forças não apenas determinam a estabilidade e o controle do veículo, mas também influenciam sua resposta a diferentes condições operacionais, como mudanças de carga vertical, velocidades e superfícies de contato. Modelos matemáticos, semi-empíricos, como a Magic Formula introduzida por Pacejka (2006), têm sido amplamente desenvolvidos ao longo dos anos para representar o comportamento dos pneus sob diferentes condições operacionais, consolidando-se como uma das abordagens mais utilizadas.

A Magic Formula fornece uma descrição matemática das forças geradas pelo pneu como função de variáveis operacionais, incluindo carga vertical (F_z), ângulo de deslizamento (α) e ângulo de camber (γ). No modelo de Pacejka, os coeficientes da equação representam parâmetros ajustáveis que caracterizam a resposta do pneu em diferentes condições operacionais (Pacejka, 2006).

Entretanto, a obtenção precisa desses coeficientes continua sendo um desafio devido à alta não linearidade do modelo e à forte interdependência dos parâmetros. Métodos tradicionais, como minimização por mínimos quadrados, nem sempre garantem convergência para soluções globalmente ótimas. Conforme demonstrado por Alagappan, Rao e Kumar (2014), diferentes algoritmos de otimização, como *Nelder–Mead simplex*, *pattern search* e *differential evolution*, apresentam desempenhos distintos dependendo das condições dos dados experimentais. A escolha do algoritmo adequado, aliada à definição de boas condições iniciais, representa um desafio devido à alta sensibilidade dos parâmetros do modelo, que pode impactar significativamente a convergência e a precisão dos coeficientes extraídos.

A identificação precisa dos coeficientes do modelo Pacejka tem impacto direto em diversas aplicações da engenharia automotiva. Em uma análise de estabilidade veicular, os coeficientes extraídos do modelo de pneus podem ser inseridos no simulador para prever o comportamento do veículo em uma manobra.

Além disso, a identificação dos coeficientes também impacta diretamente o desenvolvimento de veículos autônomos, que utilizam modelos preditivos baseados na dinâmica do pneu para planejar e corrigir trajetórias em tempo real. Qualquer erro nos coeficientes pode resultar em previsões equivocadas sobre a capacidade de frenagem e manobrabilidade do veículo, comprometendo sua segurança.

Diante desse contexto, este trabalho propõe uma abordagem para a obtenção e ajuste dos coeficientes do modelo Pacejka, utilizando a versão 5.2 da Magic Formula. A escolha dessa versão se deve ao equilíbrio entre disponibilidade e capacidade de representação do comportamento dinâmico dos pneus. Versões mais recentes, como a MF 6.0, incorporam aprimoramentos como efeitos térmicos e não linearidades, mas seu acesso é restrito por licenciamento e acordos proprietários. Por outro lado, a versão 5.2, amplamente documentada na literatura acadêmica, já inclui modelagem de deslizamento combinado, que é a interação simultânea entre forças longitudinais e laterais no contato pneu-solo, permite uma boa representação das forças geradas pelo pneu, tornando-se uma escolha viável para este estudo.

1.2 Objetivos

O objetivo geral deste trabalho é desenvolver uma ferramenta em python para a identificação paramétrica dos coeficientes de ajuste das forças e momentos do pneu modelados pela Magic Formula (Pacejka 5.2), utilizando dados experimentais obtidos em máquinas *flat trac*. Viabilizando sua aplicação em simulações dinâmicas e estudos veiculares.

Para isso, as seguintes etapas metodológicas são apresentadas:

- Implementar algoritmos para organizar e processar dados experimentais de forças laterais (F_y), longitudinais (F_x) e momentos autoalinhantes (M_z) obtidos de máquinas *flat trac*, considerando diferentes condições operativas, que são os parâmetros que influenciam o comportamento do pneu no modelo Pacejka.
- Desenvolver a modelagem matemática do modelo Pacejka 5.2, associando os coeficientes ajustáveis (B, C, D, E) às dependências fundamentais.
- Criar algoritmos de otimização baseados em métodos numéricos, como o método de Newton de Região de Confiança com Reflexão e algoritmos genéticos, para ajustar os coeficientes do modelo com precisão.
- Validar os coeficientes ajustados comparando os dados simulados e experimentais, utilizando critérios de erro como o RMS para assegurar a consistência e confiabilidade do modelo.

1.3 Organização do Trabalho

O presente trabalho está estruturado em capítulos que abrangem desde os fundamentos teóricos até a aplicação prática e análise de resultados. A seguir, é apresentada uma breve descrição de cada capítulo:

- **Capítulo 1 - Introdução:** Apresenta a contextualização do trabalho, os objetivos gerais e específicos, bem como a organização do documento.
- **Capítulo 2 - Fundamentação Teórica:** Aborda os conceitos essenciais relacionados à dinâmica veicular, modelagem de pneus, Magic Formula (Pacejka), e técnicas experimentais para coleta de dados.
- **Capítulo 3 - Metodologia:** Detalha os métodos utilizados para obtenção e processamento dos dados, implementação do modelo matemático e desenvolvimento do sistema de simulação.
- **Capítulo 4 - Resultados:** Apresenta os resultados obtidos, incluindo validação do modelo de pneu e veículo, bem como análises comparativas.
- **Capítulo 5 - Conclusão:** Resume as principais contribuições do trabalho, aponta as limitações identificadas e sugere direções para estudos futuros.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Este capítulo tem como objetivo apresentar os principais estudos, teorias e aplicações consolidadas sobre ferramentas e métodos relacionados à otimização dos coeficientes do modelo Pacejka. Para isso, serão revisados trabalhos que abordam o desenvolvimento e aplicação de técnicas numéricas para a obtenção dos coeficientes paramétricos para a modelagem de pneus. Por fim, explora as lacunas identificadas na literatura que motivam o desenvolvimento deste trabalho.

2.1 Estado da Arte

A modelagem de pneus desempenha um papel importante no desenvolvimento de sistemas de dinâmica veicular, pois a precisão das simulações depende fortemente da capacidade de representar com fidelidade as forças e os momentos gerados na interface pneu–solo, contribuindo para a melhoria do desempenho dos veículos em diferentes condições operacionais. O modelo Magic Formula, desenvolvido por Pacejka, consolidou-se como uma das abordagens mais utilizadas para representar as forças e momentos gerados pelo pneu, sendo o modelo de referência na indústria automotiva e acadêmica.

Os esforços de pesquisa, especialmente na última década, têm convergido para estratégias de identificação paramétrica capazes de encontrar, de forma robusta, os coeficientes B, C, D e E da MF, minimizando o erro entre curvas simuladas e dados experimentais. Trabalhos clássicos, como Alagappan, Rao e Kumar (2014), demonstram que algoritmos baseados em busca evolucionária ou simplex apresentam desempenhos distintos conforme a qualidade dos dados disponíveis. Já Ortiz, Cabrera e Fernandez (2006) propuseram um procedimento simplificado para extrair coeficientes fundamentais, reduzindo o esforço experimental.

Nos anos mais recentes, técnicas híbridas que combinam inteligência artificial e métodos numéricos tornaram-se proeminentes. Por exemplo, Ren *et al.* (2023) aplicaram um esquema híbrido (GA + gradiente local) para pneus de mineração de grande carga, evidenciando aumento de velocidade de convergência e redução de 12 % no erro médio em relação a GA puro. Ainda nesse eixo, Feng *et al.* (2021) introduziram o Fibonacci Tree Optimization, que mostrou maior robustez a condições iniciais mal definidas. Complementarmente, a recente entrega técnica do projeto europeu ROADVIEW Consortium (2024) apresenta uma metodologia padronizada de ajuste MF 5.2 orientada a aplicações ADAS (Advanced Driver Assistance Systems), destacando a importância da identificação em regime rápido para *digital twins* veiculares.

Vale destacar a ascensão de abordagens baseadas em aprendizado de máquina: Olaza-

goitia, Perez e Badea (2020) utilizaram redes neurais artificiais para inferir diretamente os parâmetros da MF a partir de grandes bases de dados sintéticas e experimentais, alcançando erros RMSE inferiores a 4 % e tempos de ajuste em escala de milissegundos, o que abre caminho para calibração *on–board* em ECUs veiculares. Essas tendências apontam para um cenário em que ferramentas de código aberto, multiplataforma e rápidas são cada vez mais desejáveis, a fim de facilitar re–calibrações frequentes em prototipagem virtual.

Apesar dos avanços, permanecem lacunas relevantes:

1. Muitos algoritmos requerem *software* comercial (MATLAB/Simulink, ADAMS) ou dependem de licenças restritivas (MF–Tyre/MF–Swift);
2. Há escassez de implementações 100 % Python que integrem pré–processamento dos ensaios, separação automática de regimes (*steady–state*/*combined slip*) e exportação direta em `.tir`;
3. A replicação dos estudos é limitada pela falta de código reprodutível e *datasets* públicos suficientemente abrangentes.

Diante desse panorama, o presente trabalho propõe e disponibiliza uma **ferramenta de otimização em Python** que minimiza a função–custo (erro quadrático) para estimar, de forma automática, os coeficientes das forças F_x, F_y e dos momentos M_z da Magic Formula 5.2. O código inclui rotinas de importação de ensaios em máquinas *Flat Trac*, filtragem por condição operacional, múltiplos métodos de busca (secante, Levenberg–Marquardt e TRF) e geração do arquivo `.tir`, oferecendo uma alternativa aberta, leve e facilmente integrável a simuladores de dinâmica veicular.

2.2 Caracterização de Pneus

Os pneus representam o ponto de contato entre o veículo e a superfície da pista, sendo responsáveis pela geração das forças necessárias para o movimento e a estabilidade do veículo. Além disso, desempenham um papel importante ao suportar as cargas verticais do veículo e ao amortecer irregularidades do terreno, contribuindo para o conforto e a segurança na condução. Esta seção tem como propósito explorar as características gerais desse componente complexo, abordando sua classificação, terminologia e aspectos construtivos.

2.2.1 Nomenclaturas e Aspectos Construtivos

Um pneu é composto por múltiplos elementos, como banda de rodagem, carcaça, talões e cinturas. Cada componente tem uma função específica, influenciando na rigidez, na capacidade de absorção de impactos e na distribuição de pressão na área de contato (Eger, 2007)

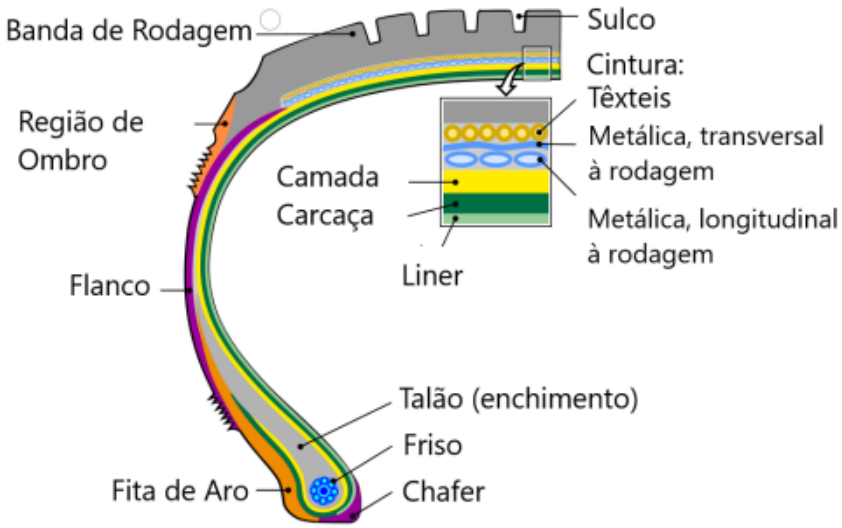


Figura 2.1 – Componentes de um pneu, destacando elementos como banda de rodagem, ombro, flanco e talão. (Fonte: Salvi (2021))

Os elementos de um pneu são essenciais para seu desempenho, contribuindo para a distribuição de cargas, o amortecimento de impactos e a estabilidade em diversas condições. A Figura 2.2 ilustra os principais elementos identificáveis em um pneu. Abaixo, são detalhados os principais componentes:

1. **Banda de Rodagem:** Responsável pelo contato direto com o solo, gera tração e oferece resistência ao desgaste.
2. **Cintas Estabilizadoras:** Aumentam a rigidez da banda de rodagem, proporcionando maior estabilidade em altas velocidades.
3. **Carcaça:** Composta por camadas de fibras têxteis ou metálicas, oferece suporte estrutural ao pneu.
4. **Talões:** Garantem a fixação segura do pneu à roda, promovendo estabilidade.
5. **Parede Lateral:** Protege contra impactos laterais e flexões excessivas.
6. **Flanco:** Conecta a parede lateral à banda de rodagem, absorvendo impactos e contribuindo para a flexibilidade do pneu.
7. **Liner Interno:** Camada estanque que evita a perda de pressão em pneus sem câmara de ar.
8. **Marca e número de aprovação de região/país:** Indicam a certificação do pneu para operação em determinadas regiões.
9. **Número de DOT:** Identificação única que possibilita a rastreabilidade do pneu.
10. **País de Fabricação:** Informa a origem do produto, essencial para controle de qualidade e regulações.
11. **Fabricante, nome da marca e nome comercial:** Dados que identificam o fabricante

e o modelo do pneu, auxiliando na substituição e manutenção.

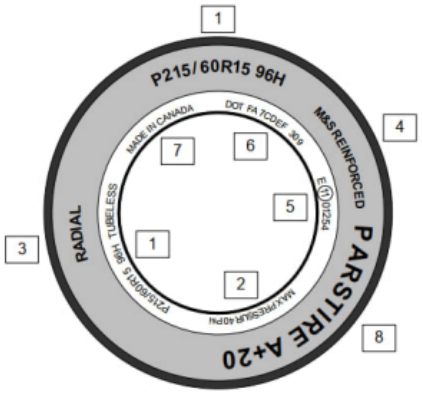


Figura 2.2 – Informações gravadas nas laterais de um pneu, destacando dimensões, número DOT, tipo de construção, e outros dados relevantes. (Fonte:Souza (2023)

2.2.2 Classificação dos Pneus

A classificação dos pneus considera as características construtivas e as aplicações específicas. Entre os principais tipos, destacam-se:

1. **Pneus Radiais:** Apresentam lonas de cordas dispostas radialmente, formando um ângulo de 90° em relação à linha central da banda de rodagem. Essa configuração, combinada com duas ou mais cintas diagonais na região da banda, garante maior rigidez e estabilidade. Esses pneus geram menos calor e oferecem melhor desempenho em altas velocidades, sendo amplamente utilizados em veículos de passeio e competição. No entanto, sua construção mais complexa resulta em custos de fabricação elevados (Salvi, 2021).
2. **Pneus Diagonais:** São formados por lonas dispostas em ângulos inferiores a 90°, se estendendo de talão a talão. Essa estrutura proporciona uma camada mais rígida e espessa, que é fácil de construir e manufaturar. Contudo, a rigidez excessiva aumenta o acúmulo de calor e o desgaste da banda de rodagem, prejudicando a eficiência em altas velocidades (Salvi, 2021).

Para ilustrar as diferenças entre pneus radiais e diagonais, a Figura 2.3 apresenta cortes esquemáticos, destacando a disposição das lonas, cintas e outros elementos internos.



Figura 2.3 – Esquema comparativo entre os pneus radiais (à direita) e diagonais (à esquerda), destacando as diferenças estruturais em lonas, cintas e carcaça. (Fonte: Adaptado de Salvi (Salvi, 2021))

2.3 Propriedades Físicas no Pneu

O comportamento dinâmico de um pneu é determinado por suas propriedades físicas, que influenciam diretamente a geração das forças de interação com o solo. Essa geração de forças ocorre devido à deformação da borracha na interface com o solo, criando resistência que possibilita a aderência e a movimentação do veículo. Esse comportamento pode ser descrito por um modelo análogo à *Lei de Hooke*, onde a força gerada (F) é proporcional à deformação (Δx) e à rigidez do material (Pacejka, 2006).

Entre essas forças, destacam-se a força lateral (F_y), resultante do ângulo de deriva, e a força longitudinal (F_x), associada à tração e à frenagem. A relação entre essas forças e os deslocamentos do pneu depende de parâmetros como a rigidez da carcaça, a composição da borracha, a pressão interna e o formato da área de contato.

2.3.1 Área de Contato

A **área de contato** entre o pneu e a superfície da estrada, também conhecida como *print* ou *footprint*, corresponde à região da banda de rodagem que está em contato com o solo a cada instante. Dentro dessa área, os elementos da borracha podem estar aderidos (*stuck*) ao pavimento ou deslizando (*sliding*) sobre ele (Milliken; Milliken, 1995).

A interação entre o pneu e a superfície da estrada influencia diretamente à aderência e a capacidade de geração de forças, essenciais para a dinâmica veicular. A geometria e o tamanho da área de contato variam conforme os parâmetros físicos e construtivos do pneu, a carga aplicada e as características do pavimento. A distribuição dessas forças na região de contato é um fator determinante para o desempenho do veículo, especialmente em situações de frenagem, aceleração e curvas (Milliken; Milliken, 1995).

A Figura 2.4 mostra a representação da área de contato entre o pneu e o solo.

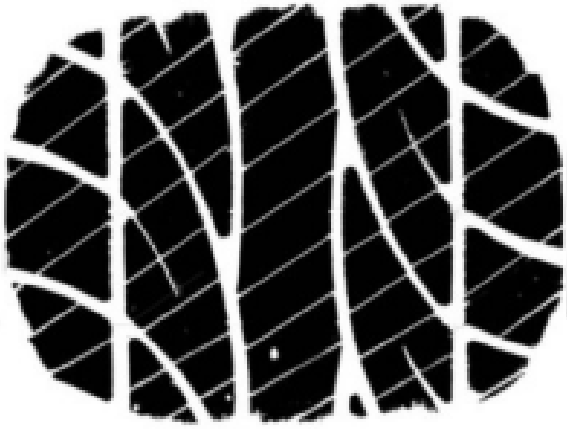


Figura 2.4 – Área de contato de um pneu. (Gent; Walter, 2005).

2.3.2 Força Lateral

A força lateral (F_y) é gerada devido ao *slip angle* e é essencial para a estabilidade e dirigibilidade do veículo. Segundo a norma SAE J670, essa força é aplicada no centro da região de contato do pneu com o solo e atua perpendicularmente à direção para a qual a roda está apontada (Milliken; Milliken, 1995).

A magnitude da força lateral é limitada pelas condições de aderência entre o pneu e a superfície, sendo influenciada por fatores como o coeficiente de atrito, a carga vertical e a composição do pneu. Em situações onde todas as rodas do veículo são mantidas na posição vertical, a força lateral disponível depende diretamente do equilíbrio dinâmico entre os eixos (Milliken; Milliken, 1995).

Estudos experimentais demonstram que a força lateral atinge um valor máximo antes de começar a decair devido à saturação do pneu, fenômeno crucial para a compreensão do comportamento em curvas de alta velocidade. Além disso, efeitos adicionais, como a resistência ao rolamento e a distribuição da força ao longo da área de contato (Milliken; Milliken, 1995).

A Figura 2.5 ilustra essa relação, destacando a variação da força lateral em função do *slip angle*, dividida em três regiões distintas: linear, transicional e friccional. Essa curva representa um modelo fundamental para a análise do desempenho dinâmico dos pneus.

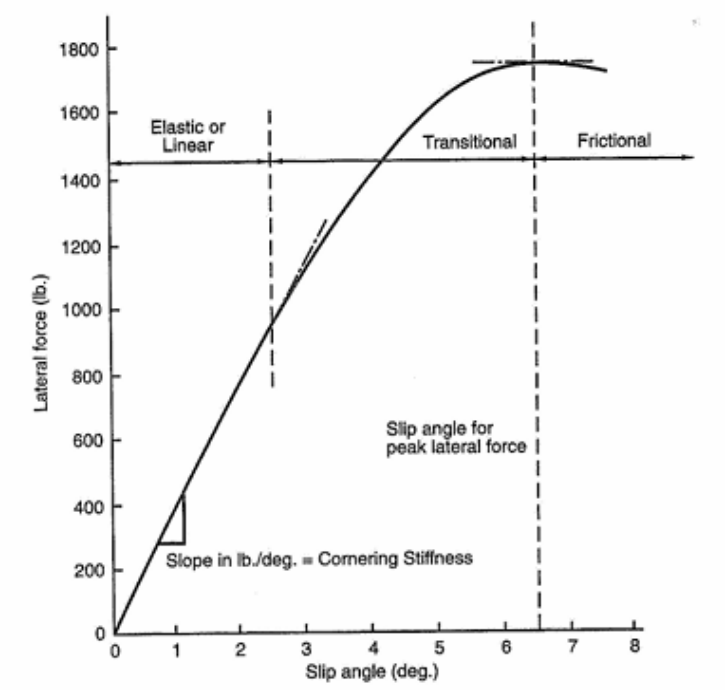


Figura 2.5 – Relação entre força lateral e *slip angle*, ilustrando as regiões linear, transicional e friccional. (Fonte: Adaptado de Milliken e Milliken (1995))

Ângulo de deriva

O ângulo de deriva (α) é o ângulo entre a direção na qual o pneu está apontado e a direção real do movimento do veículo (Pacejka, 2006). Esse ângulo é um dos principais fatores responsáveis pela geração da força lateral, pois determina a magnitude da deformação da banda de rodagem e, consequentemente, a força restauradora que age para realinhar o veículo.

Matematicamente, o *Slip Angle* pode ser expresso como:

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{v_y}{|v_x|}\right) \tag{2.1}$$

onde v_x é a velocidade longitudinal do pneu e v_y a velocidade lateral na área de contato. Essa relação demonstra que o ângulo de deriva é influenciado pelo deslizamento lateral do pneu em relação à sua direção de deslocamento.

A relação entre força lateral e *Slip Angle* apresenta três regiões principais:

1. **Região linear**: Pequenos valores de *Slip Angle* resultam em uma relação proporcional entre ângulo e força lateral, definida pelo *Cornering Stiffness* (Pacejka, 2006).
2. **Região de transição**: Aumentos no *Slip Angle* fazem com que a força lateral atinja um pico antes da saturação (Pacejka, 2006).
3. **Região de saturação**: Para valores elevados de *Slip Angle*, a força lateral deixa de crescer e pode até diminuir devido à perda de aderência(Pacejka, 2006).

A Figura 2.6 ilustra o *slip angle*.

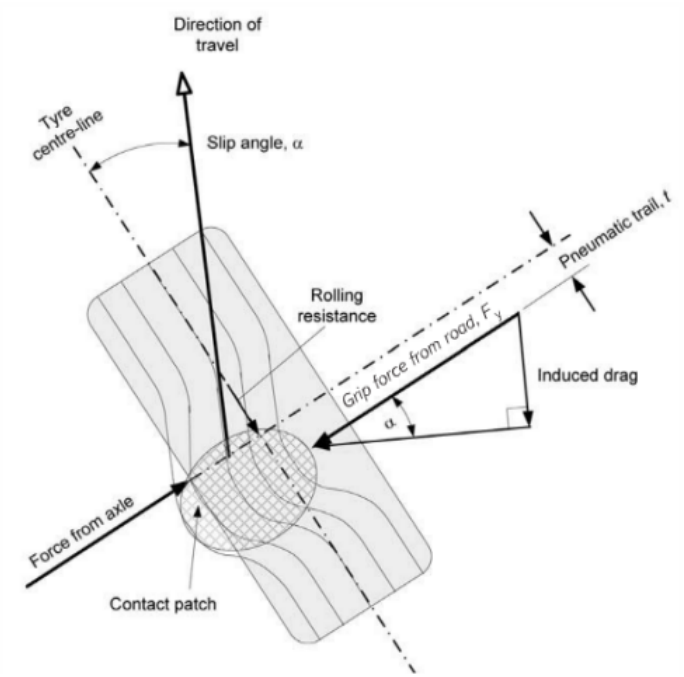


Figura 2.6 – Ângulo de deslizamento. (Fonte: Seward (2014))

2.3.3 Torque de alinhamento e Trilha pneumática

O torque de alinhamento (M_z), conforme descrito pela norma SAE J670, representa a tendência do pneu de girar em torno de um eixo vertical passando pelo centro da área de contato. Esse fenômeno ocorre devido à distribuição desigual das forças laterais ao longo da superfície do pneu, resultando em um efeito estabilizador que auxilia no direcionamento do veículo (Milliken; Milliken, 1995).

O torque de alinhamento surge da forma assimétrica da área de contato do pneu, onde a deformação elástica gera uma variação na força lateral ao longo de seu comprimento. Essa assimetria leva à formação da **Trilha pneumática** (Pneumatic trail), definido como a distância entre o centro da força lateral e o centro geométrico da área de contato. A relação entre torque de alinhamento e força lateral pode ser expressa como:

$$M_z = F_y \cdot t_p \tag{2.2}$$

onde t_p representa o pneumatic trail. Esse parâmetro é relevante para a estabilidade direcional do veículo, pois influencia diretamente a resposta da direção e o comportamento em curvas (Milliken; Milliken, 1995).

A magnitude do torque de alinhamento varia em função do *slip angle*, atingindo um pico antes de decair, o que pode ser observado na Figura 2.7. Esse comportamento resulta da interação entre a deformação elástica e os efeitos friccionais ao longo da área de contato do pneu, sendo um fator determinante para a dirigibilidade do veículo.

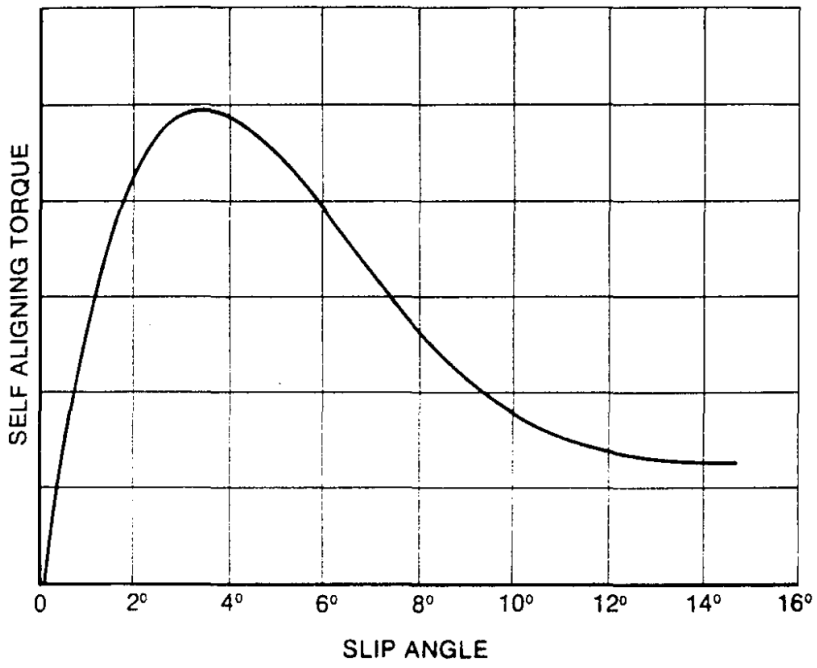


Figura 2.7 – Variação do torque de alinhamento em função do *slip angle*. (Fonte: Smith (1978))

Ademais, a figura 2.8 ilustra de maneira mais detalhada a distribuição da força lateral e a origem do *pneumatic trail*, evidenciando o deslocamento entre o centro da força lateral e o ponto de aplicação da força resultante.

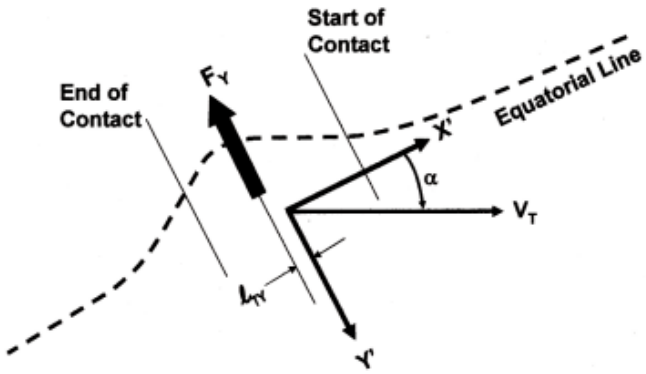


Figura 2.8 – Representação esquemática do *pneumatic trail* e suas relações com as forças atuantes. (Fonte: Gent e Walter (2005))

A correta compreensão do torque de alinhamento e da Trilha pneumática é essencial para o desenvolvimento de veículos com melhor dirigibilidade e segurança, especialmente em altas velocidades e condições de pista variáveis.

2.3.4 Momento de tombamento

O momento de tombamento (M_x) é um efeito que ocorre sempre que a força de reação da estrada (F_{zR}), que age para cima, não está alinhada com a força vertical exercida pela roda (F_z), que age para baixo. Essa diferença de alinhamento gera um torque ao redor do eixo longitudinal do pneu, conhecido como *overturning moment* (Milliken; Milliken, 1995).

Esse efeito é mais pronunciado quando forças laterais são aplicadas à roda, resultando em uma distorção da área de contato do pneu. A magnitude do momento de rolagem é dada por:

$$M_x = F_z \cdot \varepsilon \tag{2.3}$$

onde ε representa o deslocamento do centroide da pressão da estrada em relação ao eixo da roda. A Figura 2.9 ilustra esse fenômeno e sua relação com a distribuição das forças atuantes.

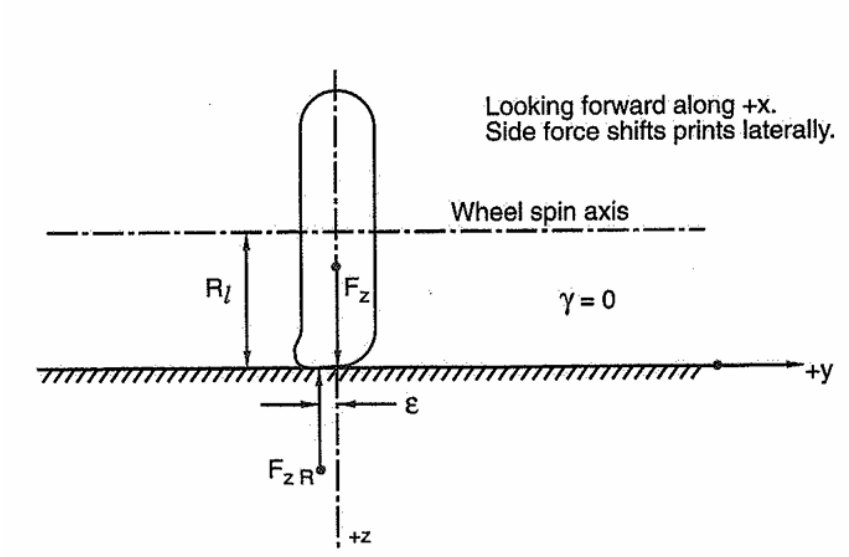


Figura 2.9 – Representação do momento de rolagem gerado pelo deslocamento da força de reação da estrada. (Fonte: Milliken e Milliken (1995))

Outro fator que influencia o momento de rolagem é o ângulo de camber (γ), definido como a inclinação da roda em relação ao plano vertical do veículo. Esse ângulo altera a distribuição da força normal na área de contato do pneu, deslocando o ponto de aplicação da força de reação da estrada e afetando diretamente a magnitude do momento de rolagem (Pacejka, 2006). Em curvas, o camber pode ser utilizado para otimizar a geração de força lateral, aumentando a estabilidade e a aderência do veículo.

Quando um veículo se move em linha reta com ângulo de deriva nulo ($\alpha = 0$), o momento de rolagem é insignificante, sendo gerado apenas por imperfeições do pneu ou da superfície da estrada. No entanto, quando o veículo está em curva, o deslocamento da força de reação da estrada (F_{zR}) devido às forças laterais provoca um aumento de ε, amplificando o momento de rolagem. Esse deslocamento pode afetar significativamente a distribuição de carga nos eixos.

2.3.5 Força Longitudinal

Para que um veículo possa acelerar ou frear, forças longitudinais precisam ser geradas na interface entre os pneus e o solo. Essas forças emergem na região de contato do pneu e são essenciais para mudanças de velocidade, em conformidade com a segunda lei de Newton (Milliken; Milliken, 1995).

O mecanismo de geração da força longitudinal no pneu está diretamente relacionado à sua deformação elástica e à interação entre atrito e deslizamento. O pneu passa por uma fase de deformação longitudinal antes de atingir uma condição de deslizamento ou escorregamento significativo. Esse comportamento é comparável ao processo de geração de forças

laterais, mas ocorre predominantemente na direção de deslocamento do veículo (Milliken; Milliken, 1995).

A força longitudinal (F_x) é influenciada pelo *longitudinal slip* (κ), que descreve a diferença entre a velocidade da roda e a velocidade do veículo. Pequenos valores de κ resultam em forças proporcionais à tração ou frenagem, enquanto valores elevados podem levar ao bloqueio da roda ou à perda de aderência (Pacejka, 2006).

A Figura 2.10 ilustra a relação entre o *longitudinal slip* e a força longitudinal gerada no pneu. Nota-se que a curva apresenta um comportamento sigmoidal, onde para pequenos valores de κ, a força longitudinal cresce de forma aproximadamente linear, mas satura em altos valores de deslizamento, indicando a limitação da aderência disponível.

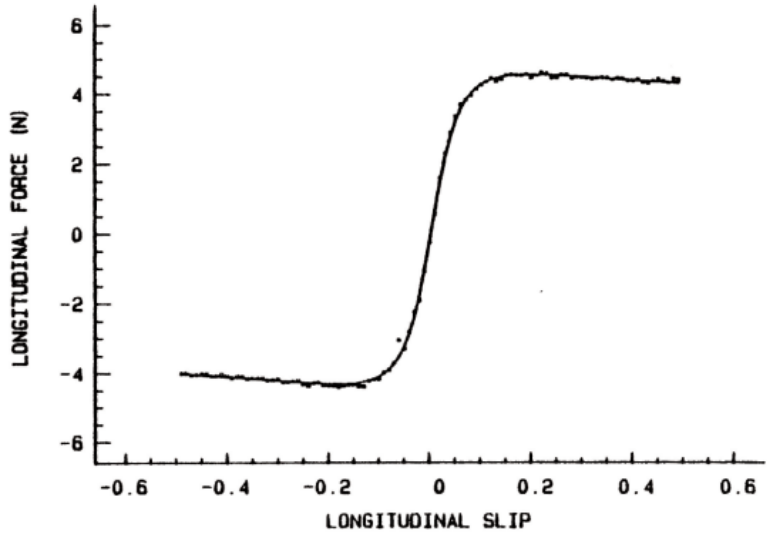


Figura 2.10 – Relação entre *longitudinal slip* e força longitudinal gerada. Fonte: (Gent; Walter, 2005)

Deslizamento longitudinal

O **Deslizamento Longitudinal** (κ) é uma medida do deslizamento longitudinal do pneu, expressa como a diferença entre a velocidade da roda e a velocidade do veículo em relação à velocidade do veículo. Ele pode ser definido como:

$$\kappa = \frac{V_{roda} - V_{veiculo}}{V_{veiculo}} \tag{2.4}$$

onde V_{roda} é a velocidade tangencial da roda e $V_{veiculo}$ é a velocidade do veículo. O Longitudinal slip é um fator para a geração de forças longitudinais nos pneus, afetando diretamente a tração e a frenagem (Pacejka, 2006).

A relação entre o *Longitudinal slip* e a força longitudinal (F_x) apresenta um comportamento não linear, com um pico de aderência seguido por uma zona de deslizamento, onde a força longitudinal diminui (Pacejka, 2006). Essa transição é fundamental para o funcionamento de sistemas como o ABS (Anti-lock Braking System) e o controle de tração.

2.3.6 Momento de Resistência à Rolagem

O **momento de resistência ao rolamento** (M_y) refere-se à resistência encontrada pelo pneu ao se movimentar para frente em contato com o solo. Esse momento surge devido à deformação da borracha na região da área de contato e está diretamente associado à dissipação de energia no processo de rolagem (Pacejka, 2006).

A força de resistência ao rolamento (F_R) é o componente principal que se opõe ao movimento do pneu e está relacionada à compressão e expansão do material da banda de rodagem à medida que o pneu avança. Essa força resulta em um deslocamento do ponto de aplicação da força normal (F_z), criando um braço de alavanca d que gera o momento de resistência ao rolamento:

$$F_z \cdot d = F_R \cdot l \tag{2.5}$$

onde d representa o deslocamento da força normal em relação ao eixo de rotação do pneu e l é a largura efetiva da área de contato (Milliken; Milliken, 1995).

A Figura 2.11 ilustra esse fenômeno, destacando a relação entre a força normal, a força de resistência ao rolamento e a posição relativa da força resultante na área de contato do pneu.

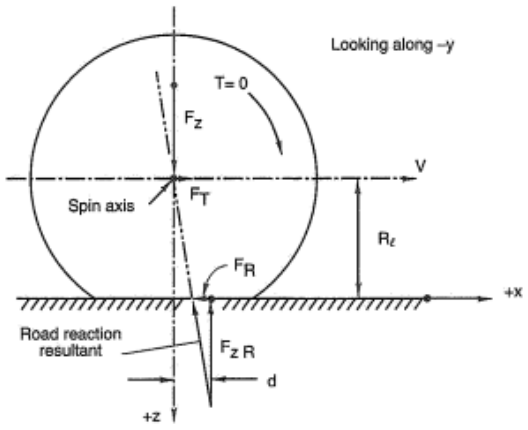


Figure 2.39 *Free-rolling tire.*

Figura 2.11 – Representação esquemática do momento de resistência ao rolamento em um pneu livre. (Fonte: Milliken e Milliken (1995))

A correta modelagem do momento de resistência ao rolamento é essencial para prever a eficiência energética do veículo e otimizar o consumo de combustível, sendo um fator no desenvolvimento de pneus para aplicações de alto desempenho e mobilidade sustentável.

2.3.7 Rigidez de Deriva e de Deslizamento Longitudinal

A rigidez de deriva (*Cornering Stiffness*) e a rigidez de deslizamento longitudinal (*Longitudinal Slip Stiffness*) são parâmetros fundamentais para a caracterização do comportamento dos pneus em resposta às forças atuantes. Esses coeficientes descrevem a relação entre a variação angular ou longitudinal do pneu e a força gerada, sendo essenciais para a modelagem da estabilidade veicular (Pacejka, 2006).

A **rigidez de deriva** está associada à resposta do pneu ao ângulo de deriva (α), representando a taxa de crescimento da força lateral (F_y) em função do pequeno aumento do ângulo de deriva em condições lineares. Pode ser expressa como:

$$C_y = \frac{\partial F_y}{\partial \alpha} \tag{2.6}$$

Já a **rigidez de deslizamento longitudinal** descreve a resposta do pneu ao *Longitudinal slip* (κ), indicando a relação entre a força longitudinal (F_x) e a variação do deslizamento:

$$C_x = \frac{\partial F_x}{\partial \kappa} \tag{2.7}$$

onde C_x depende de variáveis como a carga aplicada no pneu, a superfície da estrada e a temperatura da borracha (Pacejka, 2006).

A interação entre as rigidezes de deriva e de deslizamento longitudinal é determinante para a capacidade de resposta do veículo a manobras bruscas, acelerações e frenagens, garantindo maior segurança e eficiência no controle dinâmico.

2.3.8 Elipse de fricção

A elipse de fricção estabelece os limites máximos de aderência do pneu ao solo, determinando a combinação possível de forças laterais e longitudinais que o pneu pode gerar. Se um veículo estiver em uma condição onde ambas as forças estejam próximas ao limite da elipse, pequenas variações no coeficiente de atrito podem resultar em perda de controle.

Isso explica porque veículos podem perder aderência ao tentar frear e esterçar simultaneamente (Pacejka, 2006). Além disso, o formato e tamanho da elipse variam com fatores como carga vertical aplicada, pressão dos pneus e tipo de superfície da estrada, tornando a análise dinâmica do veículo ainda mais complexa.

A elipse de fricção pode ser compreendida a partir da relação entre as forças lateral (F_y) e longitudinal (F_x), conforme ilustrado no conceito de círculo e elipse de fricção. Esse diagrama combina ambas as forças para descrever o limite máximo da aderência do pneu sob diferentes condições operacionais (Milliken; Milliken, 1995). A elipse de fricção define a região dentro da qual os pneus conseguem gerar forças efetivas sem perda significativa de aderência.

Além disso, a representação gráfica da elipse de fricção é importante para a modelagem de dinâmicas veiculares e controle de estabilidade. O diagrama de elipse de fricção é frequentemente utilizado para calibrar sistemas de controle, como o ESC (Electronic Stability Control), garantindo um comportamento previsível do veículo (Milliken; Milliken, 1995).

A Figura 2.12 ilustra um exemplo clássico do conceito de círculo e elipse de fricção, baseado em dados experimentais de pneus de veículos de passeio. O gráfico apresenta a relação entre forças laterais e longitudinais para diferentes ângulos de deriva e razões de deslizamento, demonstrando a influência dessas variáveis na tração e na estabilidade do veículo. Esse tipo de análise é amplamente utilizado em simulações de dinâmica veicular e desenvolvimento de modelos preditivos (Milliken; Milliken, 1995).

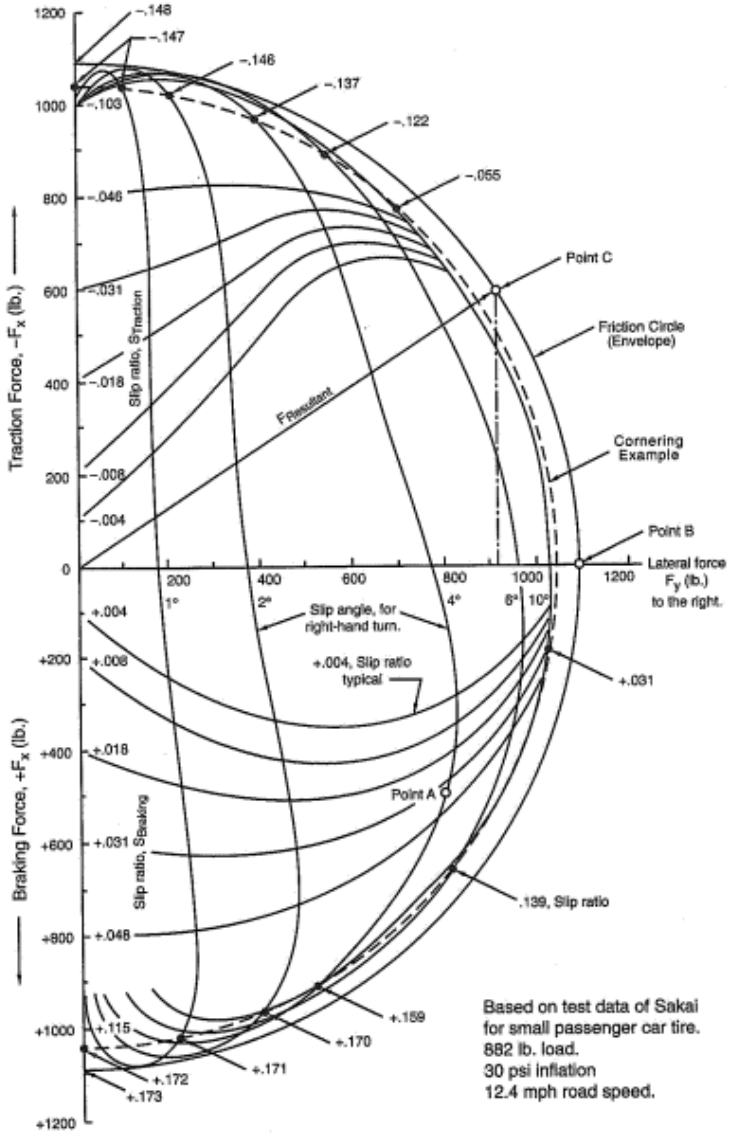


Figura 2.12 – Representação da elipse de fricção. (Fonte: Milliken e Milliken (1995))

2.3.9 Condições Operativas

O comportamento dinâmico dos pneus depende de variáveis operacionais que influenciam a geração de forças e momentos. A força normal, a pressão interna e a temperatura afetam a rigidez e a distribuição da área de contato, enquanto a velocidade, o atrito e o ângulo de câmber impactam a interação pneu-solo. O câmber redistribui a carga na área de contato, influenciando as forças laterais e longitudinais, sendo essencial para a estabilidade e aderência em curvas.

A compreensão desses fatores é necessária para modelagens como a "Magic Formula", que prevê o comportamento do pneu em diferentes condições.

Força Normal

A força normal (F_z) é um dos principais fatores que influenciam o desempenho dinâmico do pneu, pois determina a capacidade máxima de geração de forças laterais e longitudinais. Conforme descrito por (Milliken; Milliken, 1995), todas as forças e momentos gerados pelo pneu dependem diretamente da carga vertical aplicada, o que torna o *normal load* um parâmetro essencial no dimensionamento de suspensões e na modelagem da aderência dos pneus.

Em condições normais de operação, o valor de F_z é determinado pela distribuição de peso do veículo e pelas condições da pista. Em carros de competição, onde os pneus operam próximos ao limite de aderência, a carga vertical torna-se ainda mais crítica, influenciando diretamente a tração, a estabilidade em curvas e a resposta da direção.

Pressão

A pressão dos pneus influencia diretamente a rigidez da carcaça e a capacidade de geração de forças. A faixa de pressões recomendada geralmente é definida pelo fabricante, visando um equilíbrio entre desempenho e durabilidade (Milliken; Milliken, 1995).

Em ângulos de deslizamento baixos e forças laterais moderadas, o comportamento do pneu é descrito pela rigidez ao escorregamento (*cornering stiffness*), que corresponde à inclinação da curva força lateral versus ângulo de deslizamento. Um aumento na pressão do pneu torna a carcaça mais rígida, reduzindo sua deformação e aumentando a rigidez ao escorregamento. Como resultado, para pequenos ângulos de escorregamento, a força lateral gerada pelo pneu será maior (Milliken; Milliken, 1995).

Temperatura

Segundo Milliken e Milliken (1995), a temperatura do pneu afeta tanto a capacidade de produção de força quanto sua vida útil. Qualquer processo que envolva fricção gera calor, e parte da energia dissipada na deformação da banda de rodagem não é restaurada ao

pneu, mas convertida em calor. Esse calor é dissipado no fluxo de ar, enquanto outra parte é armazenada no próprio pneu, influenciando sua temperatura de equilíbrio (Smith, 1978).

A temperatura ideal de operação dos pneus varia conforme o composto da borracha e as condições de uso. Pneus de corrida para pista seca são projetados para gerar máxima aderência em faixas de temperatura entre 190 e 220 °F (aproximadamente 88 a 104 °C). Pneus de chuva, por possuírem compostos mais macios, operam de maneira diferente (Smith, 1978).

Além de impactar a aderência, a temperatura também afeta o desgaste do pneu, sendo um fator crítico para o desempenho e a durabilidade em competições e aplicações de alta exigência.

Velocidade

O desempenho do pneu varia com a velocidade. É certo que a capacidade de geração de força do pneu diminui à medida que a velocidade aumenta. Essa redução pode ocorrer de forma gradual com o aumento da velocidade ou de maneira abrupta dentro de uma faixa estreita de velocidades. Em alguns casos, a capacidade de geração de força lateral pode aumentar ligeiramente novamente conforme a velocidade ultrapassa um determinado ponto.(Milliken; Milliken, 1995)

Os testes laboratoriais para avaliar o efeito da velocidade exigem a separação entre os efeitos da velocidade e os da temperatura. Quando a velocidade do pneu aumenta sob um ângulo de deslizamento constante, a temperatura do pneu também se eleva ao longo do teste. (Milliken; Milliken, 1995).

Coeficiente de Atrito

O coeficiente de atrito é um parâmetro fundamental para a dinâmica dos pneus, pois define a relação entre a força gerada pelo pneu e a carga vertical aplicada. Diferente do atrito entre superfícies rígidas, os pneus pneumáticos podem desenvolver forças que superam a carga normal devido à complexa interação entre a borracha e o solo. Essa capacidade permite que o pneu gere forças laterais, longitudinais ou uma combinação de ambas, resultando em acelerações superiores à gravidade (Smith, 1978).

É importante destacar que o coeficiente de atrito é uma medida adimensional e depende de diversos fatores, como o composto da borracha, a temperatura do pneu e as condições da superfície da pista. Para engenheiros e projetistas, compreender sua variação sob diferentes condições operacionais é essencial para otimizar o desempenho e o comportamento dinâmico do veículo (Smith, 1978).

Ângulo de Camber

O **ângulo de camber** (φ) é definido como o ângulo entre o plano da roda inclinada e a vertical. Segundo a terminologia SAE, o camber é considerado positivo quando a parte superior da roda se inclina para fora do veículo e negativo quando se inclina para dentro. Esse parâmetro influencia diretamente a distribuição da carga na área de contato do pneu, afetando a geração de forças laterais e longitudinais (Milliken; Milliken, 1995).

Para testes isolados em bancadas de ensaio de pneus, adota-se o sistema de eixos da SAE, no qual o ângulo de inclinação da roda é referido como *inclination angle*. Esse ângulo é positivo quando a roda está inclinada para a direita ao ser vista de trás. Em aplicações de competição, o termo camber é amplamente utilizado, seguindo as convenções de sinais estabelecidas pela SAE.

O efeito do camber sobre as forças e momentos do pneu depende do ângulo entre a roda e a superfície do solo, e não apenas da referência do chassi do veículo. (Milliken; Milliken, 1995).

2.3.10 Convenção de Sinais

A modelagem de forças e momentos nos pneus requer uma convenção de sinais padronizada para garantir coerência nos cálculos e na interpretação dos resultados experimentais. Neste trabalho, foi adotada a convenção estabelecida pela SAE J670 (*Society of Automotive Engineers*), amplamente utilizada na literatura e em modelos de simulação veicular.

O sistema de coordenadas adotado segue a orientação mostrada na Figura 2.13. O eixo x representa a direção de rolagem do pneu, sendo positivo no sentido do deslocamento do veículo. O eixo y é a direção lateral, positivo para a esquerda em relação ao sentido de deslocamento. O eixo z corresponde à direção vertical, sendo positivo para cima.

As forças e momentos gerados pelo pneu seguem a seguinte convenção:

1. A **força longitudinal** F_x é positiva no sentido do movimento do pneu.
2. A **força lateral** F_y é positiva quando age para a esquerda do veículo.
3. A **força normal** F_z é positiva quando aplicada do solo para o pneu.
4. O **momento de rolagem** M_x é positivo conforme a regra da mão direita em torno do eixo x.
5. O **momento de tombamento** M_y é positivo conforme a regra da mão direita em torno do eixo y.
6. O **momento de guinada** M_z é positivo conforme a regra da mão direita em torno do eixo z.

Além disso, os ângulos adotam as seguintes convenções:

1. O ***slip angle*** α é positivo quando o pneu está virado para a esquerda em relação ao deslocamento do veículo.
2. O **ângulo de *camber*** γ é positivo quando a parte superior da roda se inclina para a esquerda.
3. A **inclinação da roda** é definida em relação ao solo, com sinal positivo para inclinação no sentido horário.

A Figura 2.13 apresenta a comparação entre diferentes convenções de sinais utilizadas na literatura, incluindo as abordagens SAE e ISO. Essas convenções são amplamente adotadas em estudos de dinâmica veicular e testes experimentais para garantir a padronização das medições.

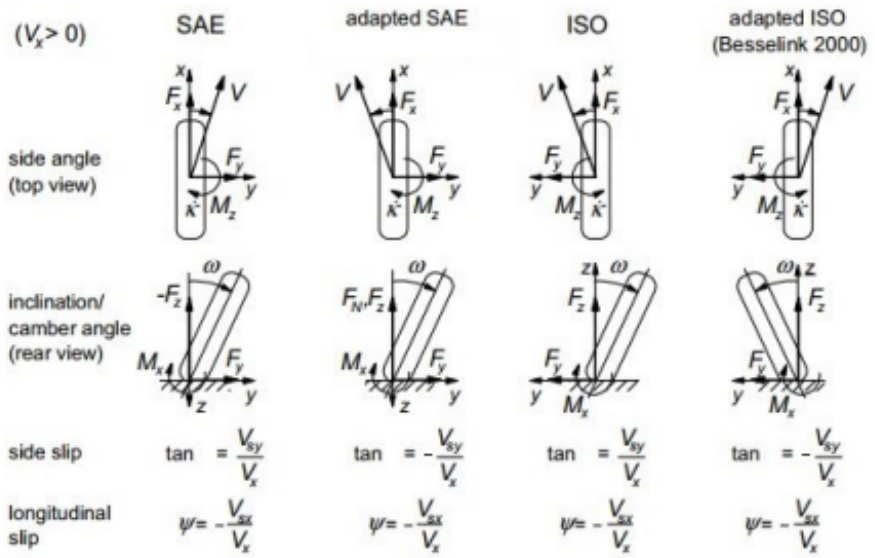


Figura 2.13 – Comparação entre convenções SAE e ISO para forças e ângulos de pneus. Adaptado de Pacejka (2006).

Essa padronização é essencial para garantir a correta interpretação dos resultados experimentais e sua aplicação em modelos computacionais, como o modelo de Pacejka, utilizado para prever o comportamento do pneu em diferentes condições operacionais.

2.4 Modelos Matemáticos

2.4.1 Magic Formula

Desde suas primeiras publicações em 1987 e 1989, a *Magic Formula* é um modelo utilizado para descrever o comportamento dos pneus sob diferentes condições operacionais, sendo capaz de representar forças e momentos resultantes de variáveis como a força normal aplicada (F_z), o ângulo de deslizamento lateral (α) e o ângulo de câmber (γ) (Pacejka, 2012). Sua formulação matemática semi-empírica permite capturar com precisão os efeitos de contato pneu-solo, tornando-se uma referência na indústria automotiva (Besselink; Schmeitz; Pacejka, 2010). Esse nível de detalhamento torna o modelo uma referência na indústria automotiva, sendo empregado no desenvolvimento de sistemas de controle como ABS e simulações computacionais.

Desde sua concepção, a *Magic Formula* foi desenvolvida para fornecer um modelo flexível e adaptável para estudos de manobrabilidade veicular. Segundo Pacejka (2006), a equação fundamental que rege a força gerada pelo pneu (Y), podendo representar F_x, F_y ou M_z, é dada por:

$$Y = D \sin\left[C \arctan\left(BX - E\left(BX - \arctan(BX)\right)\right)\right] \tag{2.8}$$

com:

$$X = X' + S_H \tag{2.9}$$

onde:

1. Y - variável de saída, podendo representar F_x, F_y ou M_z;
2. X' - variável de entrada, podendo representar $\tan\alpha$ ou κ;
3. S_H - deslocamento horizontal da curva em relação à origem;
4. S_V - deslocamento vertical da curva em relação à origem.

As equações foram projetadas para ajustar os coeficientes B, C, D e E, de modo a se adequar a diferentes tipos de pneus e condições operacionais (Pacejka, 2006). Esses coeficientes desempenham papéis específicos na modelagem do comportamento dos pneus:

1. B **(Stiffness factor)**: Representa a rigidez inicial do pneu e controla a inclinação da curva da força lateral em relação ao ângulo de deslizamento.
2. C **(Shape factor)**: Determina a curvatura geral da função, influenciando a não-linearidade do modelo.
3. D **(Peak factor)**: Define o valor máximo da força gerada pelo pneu, sendo diretamente relacionado à aderência disponível.

4. E **(Curvature factor)**: Ajusta a forma da curva próxima ao pico, controlando a transição entre a região linear e a saturação da força.

Com o avanço dos sistemas de controle veicular, como ABS e ESC, a necessidade de uma representação mais detalhada levou à evolução da Magic Formula, resultando no modelo SWIFT (Short Wavelength Intermediate Frequency Tire Model). Esses sistemas dependem de uma resposta precisa e em tempo real das forças geradas pelo pneu para otimizar a estabilidade e a frenagem do veículo. No caso do ABS, a variação rápida do deslizamento longitudinal exige um modelo que capture com precisão as transições entre aderência e escorregamento, enquanto o ESC requer uma representação fiel das forças laterais e momentos autoalinhantes para corrigir trajetórias e evitar perda de controle. Para atender a essas demandas, o modelo SWIFT incorporou fenômenos dinâmicos e transitórios, sendo capaz de representar efeitos de alta frequência (até 80 Hz) e pequenas variações de comprimento de onda (0.1–0.2 m), permitindo um comportamento mais realista em simulações e aplicações de controle veicular (Besselink; Schmeitz; Pacejka, 2010).

É importante ressaltar que as versões mais simples da *Magic Formula* representam um modelo quasi-estático, ou seja, ela não considera explicitamente os efeitos transitórios na interação pneu-solo. Em sua formulação original, assume-se que o pneu responde instantaneamente às condições impostas, sem levar em conta o tempo necessário para que as forças e momentos se estabeleçam plenamente. Dessa forma, parâmetros como o relaxation length—que representa a distância percorrida até que a força alcance seu valor de equilíbrio—não são contemplados diretamente na equação fundamental do modelo.

Atualmente, a *Magic Formula* é utilizada em simulações automotivas, sendo incorporada em softwares como *Car real time* e *Adams*, além de servir como base para o desenvolvimento de algoritmos de controle de estabilidade e tração. Ao longo dos anos, o modelo passou por aprimoramentos significativos para melhor representar fenômenos dinâmicos dos pneus, incluindo a introdução de termos que consideram variações de pressão de inflação, deslocamentos horizontais e verticais, além da evolução para modelos mais avançados, como o *SWIFT* e o *MF-Tyre*. Sua versatilidade e precisão a tornam indispensável para estudos avançados de dinâmica veicular.

2.4.2 Desenvolvimento Contínuo da Magic Formula

Desde sua formulação inicial por Hans B. Pacejka, a *Magic Formula* passou por diversas revisões e aprimoramentos para melhor capturar o comportamento dinâmico dos pneus. Sua estrutura matemática semi-empírica tornou-se a base para inúmeros estudos de dinâmica veicular e sistemas de controle, sendo continuamente refinada para lidar com novas demandas da indústria automotiva.

Inicialmente, a *Magic Formula* foi desenvolvida para modelar o comportamento estaci-

onário dos pneus sob diferentes condições de deslizamento lateral (α) e longitudinal (κ). No entanto, à medida que os veículos passaram a incorporar sistemas de controle mais sofisticados, como ABS (*Anti-lock Braking System*) e ESC (*Electronic Stability Control*), tornou-se necessário um modelo capaz de representar não apenas o regime estacionário, mas também os efeitos transitórios (Pacejka, 2012).

A resposta a essa necessidade veio com o desenvolvimento do modelo SWIFT (*Short Wavelength Intermediate Frequency Tire Model*), que manteve a estrutura da *Magic Formula* enquanto introduzia parâmetros adicionais para capturar efeitos dinâmicos, como oscilações de alta frequência e pequenas variações no comprimento de onda da superfície de contato do pneu (Besselink; Schmeitz; Pacejka, 2010). Essa evolução permitiu simulações mais precisas em condições de rodagem realistas, como variações rápidas de carga e impacto com irregularidades da pista.

Contribuição do TNO e a Evolução do MF-Tire

A organização holandesa de pesquisa aplicada *TNO* também desempenhou um papel fundamental no avanço dos modelos de pneus baseados na *Magic Formula*, transformando-os em softwares comerciais sob a marca *Delft-Tire*. O primeiro produto foi a implementação da *Magic Formula Tire Model* em diversos pacotes de simulação multicorpos, conhecido como MF-Tire. Entre essas versões, o modelo MF-Tire 5.2 consolidou-se como um padrão na indústria para a modelagem de pneus de automóveis de passeio a partir do final da década de 1990 (TNO, 2014).

O software MF-Tool foi desenvolvido para processar medições experimentais e ajustar os parâmetros do modelo de pneu. Durante certo período, modelos separados foram disponibilizados para aplicações específicas, como o MF-MCTire para motocicletas e as primeiras versões do SWIFT. No entanto, todas essas funcionalidades foram posteriormente integradas em um único modelo unificado, denominado MF-Tire/MF-Swift, permitindo maior flexibilidade e precisão nas simulações (TNO, 2014).

A transição para o modelo MF-Tyre também trouxe refinamentos significativos na rigidez lateral, resistência ao rolamento e interação pneu-solo. Versões anteriores, como MF-Tyre 5.0 e 5.1, apresentavam limitações na representação de forças combinadas e na resposta a mudanças dinâmicas rápidas. Com os ajustes introduzidos na MF-Tyre 5.2, tornou-se possível capturar com maior precisão o comportamento do pneu em condições reais de operação (Pacejka, 2012).

A Figura 2.14 ilustra a progressão histórica dos modelos de pneus baseados na *Magic Formula*, destacando as versões principais, desde o MF-Tyre 5.0 até a integração com o modelo SWIFT na versão MF-Tyre/MF-Swift 6.2. Essa evolução reflete a necessidade contínua de melhorias para atender às demandas de aplicações cada vez mais sofisticadas em simulação veicular.

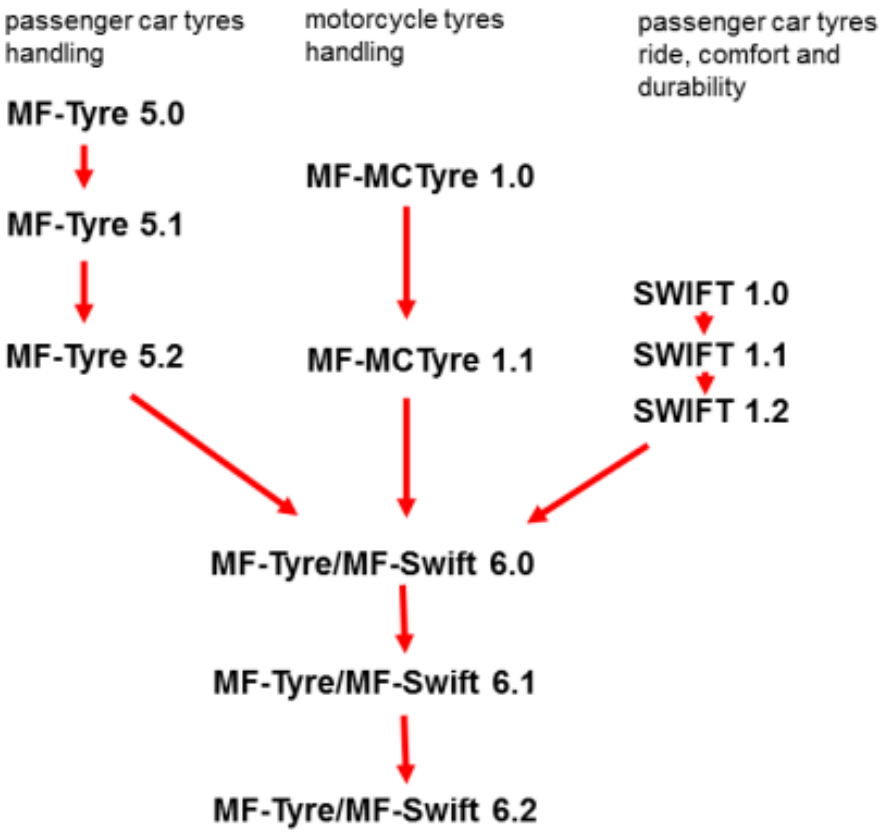


Figura 2.14 – Evolução da *Magic Formula*, desde o MF-Tyre 5.0 até a versão MF-Tyre/MF-Swift 6.2. Fonte: (TNO, 2014)

A escolha da versão MF-Tyre 5.2 neste trabalho deve-se ao seu equilíbrio entre disponibilidade, precisão e eficiência computacional. Enquanto versões mais recentes, como a MF 6.0, incluem efeitos da pressão e novas não linearidades, seu acesso é restrito por licenciamento. Já a versão 5.2, amplamente documentada, captura a interação entre forças longitudinais e laterais, garantindo uma boa representação das forças do pneu. Além disso, sua adoção consolidada na indústria e na pesquisa permite calibração versátil para diferentes condições de rodagem, tornando-a uma escolha viável para este estudo.

Dessa forma, a progressão histórica da *Magic Formula* reflete a busca contínua por modelos mais precisos e eficientes para representar a interação pneu-solo. A convergência para a versão MF-Tyre 5.2 representa um marco na evolução desse modelo, ainda segue sendo uma das mais utilizadas na simulação veicular e no desenvolvimento de tecnologias automotivas.

2.5 Conjunto de Equações da Magic Formula 5.2

A *Magic Formula* utiliza um conjunto de equações que modelam as forças e momentos atuantes no pneu em diferentes condições operacionais. Essas equações incluem parâmetros não dimensionais p, q, r, s e um conjunto de fatores de escala λ, que permitem ajustes finos na resposta do modelo (Pacejka, 2006).

2.5.1 Parâmetros Fundamentais

Os principais parâmetros e variáveis utilizados no modelo incluem:

1. g - Aceleração devido à gravidade.
2. V_c - Magnitude da velocidade do centro de contato do pneu.
3. V_{cx}, V_{cy} - Componentes da velocidade do centro de contato do pneu.
4. V_{sx}, V_{sy} - Componentes da velocidade de deslizamento no ponto de contato do pneu.
5. V_r - Velocidade de rolagem do pneu.
6. R_0 - Raio nominal do pneu sem carga.
7. R_e - Raio efetivo de rolagem.
8. Ω - Velocidade de rotação da roda.
9. ρ_z - Deformação radial do pneu.
10. F_{z0} - Carga vertical nominal.
11. F'_{z0} - Carga vertical adaptada.

Correção para Diferentes Cargas Verticais

A influência da carga vertical do pneu pode ser ajustada utilizando um fator de escala λ_{Fz0}, permitindo estimar a força normal modificada como:

$$F'_{z0} = \lambda_{Fz0} F_{z0} \tag{2.10}$$

Além disso, define-se a variação normalizada da carga vertical como:

$$df_z = \frac{F_z - F'_{z0}}{F'_{z0}} \tag{2.11}$$

Definição dos Ângulos de Deslizamento e Camber

Para melhorar a precisão da modelagem, a fórmula emprega transformações nos ângulos de deslizamento lateral e longitudinal:

$$\alpha' = \tan\alpha \cdot \operatorname{sgn}(V_{cx}) = -\frac{V_{cy}}{|V_{cx}|} \tag{2.12}$$

O efeito da inclinação da roda devido ao ângulo de câmber é expresso como:

$$\gamma' = \sin\gamma \tag{2.13}$$

Já o coeficiente de deslizamento longitudinal é definido por:

$$\kappa = -\frac{V_{sx}}{|V_{cx}|} \tag{2.14}$$

Fatores de Escala do Modelo

Os fatores de escala λ são usados para ajustar diversos aspectos da resposta do pneu, incluindo:

1. λ_{Fz0} - Influência da carga nominal.
2. $\lambda_{\mu,x}, \lambda_{\mu,y}$ - Coeficiente de atrito máximo.
3. $\lambda_{\kappa x}, \lambda_{\kappa y}$ - Rigidez ao deslizamento longitudinal e lateral.
4. $\lambda_{Cx}, \lambda_{Cy}$ - Fatores de forma.
5. $\lambda_{Ex}, \lambda_{Ey}$ - Fatores de curvatura.
6. $\lambda_{Hx}, \lambda_{Hy}$ - Deslocamentos horizontais.
7. $\lambda_{Kx}, \lambda_{Ky}$ - Rigidez ao deslizamento lateral e longitudinal.

Os fatores de escala ajustam a Magic Formula para diferentes pneus e condições operacionais, corrigindo também as diferenças entre o atrito das lixas das máquinas flat trac—onde a superfície difere da pista real—e o encontrado em condições de rodagem, permitindo uma aproximação do modelo com o real.

2.5.2 Forças e Momentos Gerados pelo Pneu

A *Magic Formula* modela a interação pneu-solo considerando tanto o deslizamento longitudinal quanto o lateral, levando em conta os efeitos de rigidez e influência da carga vertical. As equações puras descrevem a interação fundamental entre o pneu e o solo, considerando apenas um tipo de deslizamento por vez. A força longitudinal F_x depende exclusivamente do deslizamento longitudinal (κ), a força lateral F_y é determinada pelo deslizamento lateral (α), e o torque de alinhamento M_z resulta da distribuição da força na área de contato. Essas equações servem de base para modelos mais complexos que integram múltiplos efeitos simultaneamente(Pacejka, 2006).

As equações para força longitudinal F_x, força lateral F_y e torque de alinhamento M_z são expressas :

Força Longitudinal para Deslizamento Puro

A força longitudinal F_{xo} gerada pelo pneu no deslizamento puro pode ser expressa pela equação fundamental:

$$F_{xo} = D_x \sin\left[C_x \arctan\left(B_x\kappa_x - E_x(B_x\kappa_x - \arctan(B_x\kappa_x))\right)\right] + S_{Vx} \tag{2.15}$$

A seguir, detalham-se os componentes da equação:

1. **Deslizamento Longitudinal Normalizado**
   O deslizamento longitudinal ajustado pelo deslocamento horizontal S_{Hx} é definido como:
   $$\kappa_x = \kappa + S_{Hx} \tag{2.16}$$
   onde:
   S_{Hx1}: Deslocamento horizontal nominal da curva de força longitudinal;

2. **Fator de Forma** C_x
   O fator de forma da curva de força longitudinal é dado por:
   $$C_x = P_{Cx1} \cdot \lambda_{Cx}, \quad (C_x > 0) \tag{2.17}$$
   onde:
   P_{Cx1}: Coeficiente de curvatura da resposta da força longitudinal;
   λ_{Cx}: Fator de escala do fator de forma.
3. **Valor Máximo da Força Longitudinal** D_x
   O pico da força longitudinal depende da carga normal F_z e do coeficiente de atrito μ_x:
   $$D_x = \mu_x F_z \zeta_1, \quad (D_x > 0) \tag{2.18}$$
   onde:
   λ_{Mux}: Fator de escala do coeficiente de atrito longitudinal.
4. **Coeficiente de Atrito Longitudinal** μ_x
   O coeficiente de atrito efetivo μ_x varia conforme a carga normal e é definido por:
   $$\mu_x = (P_{Dx1} + P_{Dx2} df_z) \cdot \lambda_{Mux}, \quad (\mu_x > 0) \tag{2.19}$$
   onde:
   P_{Dx1}: Coeficiente de atrito longitudinal nominal;
   P_{Dx2}: Variação do coeficiente de atrito com a carga aplicada;
   λ_{Mux}: Fator de escala do coeficiente de atrito.
5. **Fator de Curvatura** E_x
   O fator de curvatura, que controla a suavidade da transição da força máxima, é expresso por:
   $$E_x = P_{Ex1} + P_{Ex2} df_z + P_{Ex3} df_z^2 \tag{2.20}$$

onde:

P_{Ex1}: Fator de curvatura nominal da força longitudinal;

P_{Ex2}: Influência da carga na curvatura da força longitudinal;

P_{Ex3}: Influência da carga ao quadrado na curvatura da força longitudinal;

λ_{Ex}: Fator de escala da curvatura longitudinal.

6. **Fator de Rigidez Longitudinal** B_x

   A rigidez ao deslizamento longitudinal é ajustada por:

$$B_x = \frac{K_{xx}}{(C_x D_x + \epsilon_x)} \tag{2.21}$$

   onde:

   K_{xx}: Rigidez ao deslizamento longitudinal;

   ϵ_x: Pequeno valor para evitar divisão por zero.

7. **Rigidez ao Deslizamento Longitudinal** K_{xx}

   A rigidez da força longitudinal é modelada como:

$$K_{xx} = F_z \cdot (P_{Kx1} + P_{Kx2} df_z) \cdot \exp(P_{Kx3} df_z) \cdot \lambda_{Kx} \tag{2.22}$$

   onde:

   P_{Kx1}: Rigidez ao deslizamento longitudinal na carga nominal;

   P_{Kx2}: Variação da rigidez ao deslizamento com a carga;

   P_{Kx3}: Influência exponencial da carga na rigidez ao deslizamento longitudinal;

   λ_{Kx}: Fator de escala da rigidez ao deslizamento longitudinal.

8. **Deslocamento Horizontal** S_{Hx}

   O deslocamento horizontal da curva é ajustado por:

$$S_{Hx} = (P_{Hx1} + P_{Hx2} df_z) \cdot \lambda_{Hx} \tag{2.23}$$

   onde:

   P_{Hx1}: Deslocamento horizontal nominal da curva de força longitudinal;

   λ_{Hx}: Fator de escala do deslocamento horizontal.

9. **Deslocamento Vertical** S_{Vx}

   O deslocamento vertical da curva da força longitudinal é expresso por:

$$S_{Vx} = F_z \cdot (P_{Vx1} + P_{Vx2} df_z) \cdot \left\{ \frac{|V_{cx}|}{\epsilon_x + |V_{cx}|} \right\} \cdot \lambda_{Vx} \lambda_{\mu x} \zeta_1 \tag{2.24}$$

   onde:

   P_{Vx1}: Deslocamento vertical nominal da curva de força longitudinal;

   P_{Vx2}: Variação do deslocamento vertical com a carga;

   λ_{Vx}: Fator de escala do deslocamento vertical.

Força Lateral para Deslizamento Puro

A força lateral F_{yo} gerada pelo pneu no deslizamento lateral puro pode ser expressa pela equação fundamental:

$$F_{yo} = D_y \sin\left[C_y \arctan\left(B_y\alpha_y - E_y(B_y\alpha_y - \arctan(B_y\alpha_y))\right)\right] + S_{Vy} \tag{2.25}$$

A seguir, detalham-se os componentes da equação:

1. **Ângulo de Deslizamento Normalizado**
   O ângulo de deslizamento lateral ajustado pelo deslocamento horizontal S_{Hy} é definido como:
   $$\alpha_y = \alpha + S_{Hy} \tag{2.26}$$
   onde:
   S_{Hy1}: Deslocamento horizontal nominal da curva de força lateral;
   P_{Hy2}: Variação do deslocamento horizontal com a carga.
2. **Fator de Forma** C_y
   O fator de forma da curva de força lateral é dado por:
   $$C_y = P_{Cy1} \cdot \lambda_{Cy}, \quad (C_y > 0) \tag{2.27}$$
   onde:
   P_{Cy1}: Coeficiente de curvatura da resposta da força lateral;
   λ_{Cy}: Fator de escala do fator de forma.
3. **Valor Máximo da Força Lateral** D_y
   O pico da força lateral depende da carga normal F_z e do coeficiente de atrito lateral μ_y:
   $$D_y = \mu_y F_z \zeta_2, \quad (D_y > 0) \tag{2.28}$$
   onde:
   P_{Dy1}: Coeficiente de atrito lateral nominal, que define o valor base do atrito lateral do pneu;
   P_{Dy2}: Variação do coeficiente de atrito lateral com a carga, ajustando o impacto do peso sobre a aderência;
   ζ_2: Fator de ajuste adicional para o pico da força lateral.
4. **Coeficiente de Atrito Lateral** μ_y
   O coeficiente de atrito lateral efetivo μ_y é definido por:
   $$\mu_y = \frac{(P_{Dy1} + P_{Dy2} df_z)}{(1 + P_{Dy3}\gamma^2)} \cdot \lambda_{Muy} \tag{2.29}$$
   onde:
   P_{Dy1}: Coeficiente de atrito lateral nominal;

P_{Dy2}: Variação do coeficiente de atrito lateral com a carga;
P_{Dy3}: Influência do ângulo de inclinação no coeficiente de atrito lateral;
γ: Ângulo de inclinação (Camber).

5. **Fator de Curvatura** E_y
   O fator de curvatura, que ajusta a suavidade da transição da força lateral máxima, é expresso por:

$$E_y = (P_{Ey1} + P_{Ey2} df_z) \left\{1 + P_{Ey5} \gamma^{*2} - (P_{Ey3} + P_{Ey4}\gamma)\text{sgn}(\alpha_y)\right\} \cdot \lambda_{Ey}, \quad (E_y \leq 1) \tag{2.30}$$

   onde:
   P_{Ey3}: Influência do camber na curvatura lateral;
   P_{Ey4}: Correção de curvatura para cargas altas.

6. **Deslocamento Vertical** S_{Vy}
   O deslocamento vertical da curva da força lateral é expresso por:

$$S_{Vy} = F_z \cdot (P_{Vy3} + P_{Vy4} df_z) \cdot \gamma \cdot \lambda_{Kyy} \cdot \lambda_{\mu y} \cdot \zeta_2 \tag{2.31}$$

   onde:
   P_{Vy3}: Variação do deslocamento vertical com a carga;
   P_{Vy4}: Influência da carga e do ângulo de inclinação no deslocamento vertical;
   ζ_2: Fator de ajuste adicional para deslocamento vertical.

Torque de Alinhamento no Deslizamento Puro

O torque de alinhamento M_{z0} gerado pelo pneu no deslizamento lateral puro pode ser expresso pela equação fundamental:

$$M_{z0} = M'_{z0} + M_{zro} \tag{2.32}$$

A seguir, detalham-se os componentes da equação:

1. **Torque de Alinhamento Primário**
   O torque de alinhamento primário é proporcional à força lateral e definido como:

$$M'_{z0} = -t_\alpha F_{yo} \tag{2.33}$$

2. **Braço de Alinhamento Efetivo** t_α
   O braço de alinhamento é calculado como:

$$t_\alpha = t(\alpha_y) = D_t \cos\left[C_t \arctan\left(B_t\alpha_t - E_t(B_t\alpha_t - \arctan(B_t\alpha_t))\right)\right] \cos\alpha \tag{2.34}$$

3. **Deslocamento Horizontal** S_{Ht}
   O deslocamento horizontal do torque de alinhamento é ajustado por:

$$S_{Ht} = q_{Hz1} + q_{Hz2} df_z + (q_{Hz3} + q_{Hz4} df_z)\gamma \tag{2.35}$$

onde:

q_{Hz1}: Trail horizontal shift S_{Ht} at $F_{z,\text{nom}}$;

q_{Hz2}: Variação de S_{Ht} com a carga;

q_{Hz3}: Variação de S_{Ht} com o ângulo de inclinação;

q_{Hz4}: Variação de S_{Ht} com carga e inclinação.

4. **Curvatura do Torque de Alinhamento**

$$E_t = (q_{Ez1} + q_{Ez2} df_z + q_{Ez3} df_z^2) \left\{ 1 + (q_{Ez4} + q_{Ez5}\gamma^2) \frac{2}{\pi} \arctan(B_t C_t \alpha_t) \right\} \tag{2.36}$$

onde:

q_{Ez1}: Curvatura nominal do trail pneumático;

q_{Ez2}: Variação da curvatura com a carga;

q_{Ez3}: Variação da curvatura com a carga ao quadrado;

q_{Ez4}: Variação da curvatura com o sinal do ângulo de deslizamento;

q_{Ez5}: Variação da curvatura com o camber e sinal do ângulo de deslizamento.

5. **Fatores de Rigidez, Forma e Pico**

$$B_t = (q_{Bz1} + q_{Bz2} df_z + q_{Bz3} df_z^2)(1 + q_{Bz5}|\gamma| + q_{Bz6}\gamma^2) \frac{K_{ya}}{\lambda_{\mu y}} \tag{2.37}$$

$$C_t = q_{Cz1}, \quad (C_t > 0) \tag{2.38}$$

$$D_t = F_z \left(\frac{R_0}{F'_{z0}} \right) (q_{Dz1} + q_{Dz2} df_z) \lambda_t \text{sgn}(V_{cx}) \tag{2.39}$$

onde:

q_{Bz1}, q_{Bz2}, q_{Bz3}: Coeficientes de rigidez do braço de alinhamento;

q_{Bz5}, q_{Bz6}: Fatores de ajuste do camber;

q_{Cz1}: Fator de forma do braço de alinhamento;

q_{Dz1}, q_{Dz2}: Coeficientes do pico do torque de alinhamento.

Momento de Tombamento

O momento de tombamento M_x surge devido à inclinação do pneu em relação ao solo e pode ser expresso como:

$$M_x = F_z R_0 \cdot \left(q_{sx1} - q_{sx2}\gamma^* + q_{sx3} \frac{F_y}{F'_{z0}} + q_{sx4} \frac{F_z}{F'_{z0}} \gamma^* \right) \cdot \lambda_{Mx} \tag{2.40}$$

Esse termo captura a interação entre a carga vertical F_z, o raio dinâmico do pneu R_0, o ângulo de inclinação do pneu (γ^*) e a força lateral F_y. A inclusão dos coeficientes

$q_{sx1}, q_{sx2}, q_{sx3}, q_{sx4}$ permite calibrar o impacto de cada uma dessas variáveis no momento resultante.

onde:

q_{sx1}: Momento de tombamento induzido pela força lateral;

q_{sx2}: Momento de tombamento induzido pelo camber;

q_{sx3}: Momento de tombamento induzido pela força lateral e carga;

q_{sx4}: Momento de tombamento induzido pela carga e camber;

λ_{Mx}: Fator de escala do momento de tombamento.

Momento de Resistência à Rolagem

O momento de resistência ao rolamento M_y influencia a eficiência energética do veículo e pode ser modelado pela equação:

$$M_y = -F_z R_0 \cdot \left\{ q_{sy1} \arctan\left(\frac{V_r'}{V_0^*}\right) + q_{sy2}\frac{F_x}{F_{z0}'} + q_{sy3}\left(\frac{V_r'}{V_0^*}\right)^4 + q_{sy4}\gamma^{*2} + q_{sy5}\frac{F_z}{F_{z0}'}\gamma^{*2} + q_{sy6}\frac{p}{p_0} \right\} \cdot \lambda_{My} \tag{2.41}$$

Esse termo modela o impacto da velocidade relativa V_r' e da força longitudinal F_x na resistência ao rolamento.

onde:

q_{sy1}: Coeficiente de resistência ao rolamento base;

q_{sy2}: Influência da força longitudinal na resistência ao rolamento;

q_{sy3}: Dependência da resistência ao rolamento com a velocidade elevada à quarta potência;

q_{sy4}: Dependência com o camber ao quadrado;

q_{sy5}: Dependência com a carga e o camber ao quadrado;

q_{sy6}: Dependência com a pressão dos pneus;

λ_{My}: Fator de escala do momento de resistência ao rolamento.

Extensão para Deslizamento Combinado

Além das equações para deslizamento puro, o modelo estende sua formulação para considerar situações em que o pneu está simultaneamente sujeito a forças longitudinais e laterais, caracterizando o deslizamento combinado (Pacejka, 2006). Esse fenômeno ocorre em manobras como frenagens ou acelerações em curva, onde há interação entre as forças de tração/frenagem e as forças laterais.

O uso do deslizamento combinado apresenta vantagens, como uma modelagem mais realista do comportamento do pneu em condições dinâmicas complexas, essencial para simulações de sistemas de controle, como ABS e ESC. No entanto, essa abordagem também possui desvantagens, como um aumento na complexidade computacional e a necessidade de mais dados experimentais para a correta calibração do modelo.

O deslizamento puro é geralmente preferido em análises simplificadas ou quando se deseja estudar isoladamente os efeitos da força longitudinal ou lateral. Já o modelo combinado deve ser utilizado quando a interação entre essas forças é relevante para o fenômeno estudado, como em simulações de manobras dinâmicas ou no desenvolvimento de sistemas de estabilidade veicular. Essa interação é representada pela elipse de fricção, que estabelece o limite máximo de aderência do pneu, indicando que um aumento na força longitudinal reduz a capacidade de geração de força lateral e vice-versa. Esse conceito é essencial para prever a aderência disponível em situações de aceleração, frenagem e curvas simultaneamente.

As equações para o deslizamento combinado são:

Força Longitudinal no Deslizamento Combinado

A força longitudinal F_x gerada pelo pneu no regime de deslizamento combinado é expressa pela equação:

$$F_x = G_{x\alpha} \cdot F_{xo} \tag{2.42}$$

A seguir, detalham-se os componentes dessa equação:

1. **Função de Redução** $G_{x\alpha}$
   A função de redução leva em conta o efeito da força lateral no desenvolvimento da força longitudinal e é definida como:

$$G_{x\alpha} = \cos\left[C_{x\alpha} \arctan\left(B_{x\alpha}\alpha_s - E_{x\alpha}(B_{x\alpha}\alpha_s - \arctan(B_{x\alpha}\alpha_s))\right)\right] / G_{x\alpha o}, \quad (G_{x\alpha} > 0) \tag{2.43}$$

2. **Fator de Ajuste** $G_{x\alpha o}$

$$G_{x\alpha o} = \cos\left[C_{x\alpha} \arctan\left(B_{x\alpha}S_{H\kappa} - E_{x\alpha}(B_{x\alpha}S_{H\kappa} - \arctan(B_{x\alpha}S_{H\kappa}))\right)\right] \tag{2.44}$$

3. **Ângulo de Deslizamento Ajustado** α_s
   O ângulo de deslizamento ajustado é definido como:

$$\alpha_s = \alpha + S_{H\kappa} \tag{2.45}$$

4. **Fator de Rigidez** $B_{x\alpha}$
   A rigidez da força longitudinal no deslizamento combinado é dada por:

$$B_{x\alpha} = (r_{Bx1} + r_{Bx3}\gamma^2)\cos[\arctan(r_{Bx2}\kappa)] \cdot \lambda_{x\alpha}, \quad (B_{x\alpha} > 0) \tag{2.46}$$

   onde:
   r_{Bx1}: Fator de inclinação para redução da força longitudinal combinada;
   r_{Bx2}: Variação da inclinação com a deslizamento longitudinal κ;

r_{Bx3}: Influência do camber na rigidez da força longitudinal combinada;
$\lambda_{x\alpha}$: Fator de escala da rigidez ao deslizamento combinado.

5. **Fator de Forma** $C_{x\alpha}$
   O fator de forma da equação de redução é dado por:

$$C_{x\alpha} = r_{Cx1} \tag{2.47}$$

   onde:
   r_{Cx1}: Fator de forma para redução da força longitudinal combinada.
6. **Fator de Curvatura** $E_{x\alpha}$
   O fator de curvatura que ajusta a suavidade da transição da força longitudinal é expresso por:

$$E_{x\alpha} = r_{Ex1} + r_{Ex2} df_z, \quad (E_{x\alpha} \leq 1) \tag{2.48}$$

   onde:
   r_{Ex1}: Fator de curvatura da força longitudinal combinada;
   r_{Ex2}: Variação da curvatura com a carga aplicada df_z.
7. **Deslocamento Horizontal** $S_{H\kappa}$
   O deslocamento horizontal do efeito combinado é definido como:

$$S_{H\kappa} = r_{Hx1} \tag{2.49}$$

   onde:
   r_{Hx1}: Fator de deslocamento para redução da força longitudinal combinada.

Força Lateral no Deslizamento Combinado

A força lateral F_y gerada pelo pneu no regime de deslizamento combinado é expressa pela equação:

$$F_y = G_{y\kappa} \cdot F_{yo} + S_{Vy\kappa} \tag{2.50}$$

A seguir, detalham-se os componentes dessa equação:

1. **Função de Redução** $G_{y\kappa}$
   A função de redução leva em conta o efeito da força longitudinal no desenvolvimento da força lateral e é definida como:

$$G_{y\kappa} = \cos\left[C_{y\kappa} \arctan\left(B_{y\kappa}\kappa_s - E_{y\kappa}(B_{y\kappa}\kappa_s - \arctan(B_{y\kappa}\kappa_s))\right)\right] / G_{y\kappa o}, \quad (G_{y\kappa} > 0) \tag{2.51}$$

2. **Fator de Ajuste** $G_{y\kappa o}$

$$G_{y\kappa o} = \cos\left[C_{y\kappa} \arctan\left(B_{y\kappa}S_{H\kappa y} - E_{y\kappa}(B_{y\kappa}S_{H\kappa y} - \arctan(B_{y\kappa}S_{H\kappa y}))\right)\right] \tag{2.52}$$

3. **Ângulo de Deslizamento Ajustado** κ_s
   O ângulo de deslizamento ajustado é definido como:

$$\kappa_s = \kappa + S_{H\kappa y} \tag{2.53}$$

4. **Fator de Rigidez** $B_{y\kappa}$
   A rigidez da força lateral no deslizamento combinado é dada por:

$$B_{y\kappa} = (r_{By1} + r_{By4}\gamma^{*2}) \cos[\arctan(r_{By2}(\alpha^* - r_{By3}))] \cdot \lambda_{y\kappa}, \quad (B_{y\kappa} > 0) \tag{2.54}$$

   onde:
   r_{By1}: Fator de inclinação para redução da força lateral combinada;
   r_{By2}: Variação da inclinação com o deslizamento lateral α;
   r_{By3}: Termo de deslocamento para o ângulo α na redução da rigidez lateral combinada;
   r_{By4}: Influência do camber na rigidez da força lateral combinada;
   $\lambda_{y\kappa}$: Fator de escala da rigidez ao deslizamento combinado.
5. **Fator de Forma** $C_{y\kappa}$
   O fator de forma da equação de redução é dado por:

$$C_{y\kappa} = r_{Cy1} \tag{2.55}$$

   onde:
   r_{Cy1}: Fator de forma para redução da força lateral combinada.
6. **Fator de Curvatura** $E_{y\kappa}$
   O fator de curvatura que ajusta a suavidade da transição da força lateral é expresso por:

$$E_{y\kappa} = r_{Ey1} + r_{Ey2} df_z, \quad (E_{y\kappa} \leq 1) \tag{2.56}$$

   onde:
   r_{Ey1}: Fator de curvatura da força lateral combinada;
   r_{Ey2}: Variação da curvatura com a carga aplicada df_z.
7. **Deslocamento Horizontal** $S_{H\kappa y}$
   O deslocamento horizontal do efeito combinado é definido como:

$$S_{H\kappa y} = r_{Hy1} + r_{Hy2} df_z \tag{2.57}$$

   onde:
   r_{Hy1}: Fator de deslocamento para redução da força lateral combinada;
   r_{Hy2}: Variação do deslocamento com a carga aplicada.
8. **Deslocamento Vertical** $S_{Vy\kappa}$
   O deslocamento vertical associado ao efeito combinado é expresso por:

$$S_{Vy\kappa} = D_{Vy\kappa} \sin\left[r_{Vy5} \arctan(r_{Vy6}\kappa)\right] \cdot \lambda_{y\kappa} \tag{2.58}$$

9. **Componente $D_{Vy\kappa}$ da Força Lateral**

$$D_{Vy\kappa} = \mu_y F_z \cdot (r_{Vy1} + r_{Vy2} df_z + r_{Vy3}\gamma^*) \cdot \cos[\arctan(r_{Vy4}\alpha^*)] \cdot \zeta_2 \tag{2.59}$$

onde:
r_{Vy1}: Termo de influência da carga na força lateral combinada;
r_{Vy2}: Variação com a carga aplicada df_z;
r_{Vy3}: Influência do camber na força lateral combinada;
r_{Vy4}: Influência do ângulo de escorregamento lateral α;
r_{Vy5}: Influência do deslizamento longitudinal κ;
r_{Vy6}: Efeito do $\arctan(\kappa)$ na força lateral combinada.

Torque de Alinhamento no Deslizamento Combinado

O torque de alinhamento M_z gerado pelo pneu no regime de deslizamento combinado é expresso por:

$$M_z = M_z' + M_{zr} + s \cdot F_x \tag{2.60}$$

Os componentes dessa equação são detalhados a seguir:

1. **Componente M_z'**
Representa a parte principal do torque de alinhamento:

$$M_z' = -t_o \cdot F_y' \tag{2.61}$$

2. **Braço de Momento t_o**
O braço de momento é dado por:

$$t_o = t(\alpha_{t,eq}) = D_t \cos\left[C_t \arctan\left(B_t\alpha_{t,eq} - E_t(B_t\alpha_{t,eq} - \arctan(B_t\alpha_{t,eq}))\right)\right]\cos\alpha \tag{2.62}$$

3. **Força Lateral Ajustada F_y'**
A força lateral ajustada ao torque é definida como:

$$F_y' = F_y - S_{Vy\kappa} \tag{2.63}$$

4. **Componente M_{zr}**
O componente adicional de torque é dado por:

$$M_{zr} = M_{zr}(\alpha_{r,eq}) = D_r \cos\left[C_r \arctan(B_r\alpha_{r,eq})\right] \tag{2.64}$$

5. **Fator de Ajuste s**

$$s = R_0 \cdot \left\{ s_{Sz1} + s_{Sz2}\left(\frac{F_z}{F_{z0}'}\right) + (s_{Sz3} + s_{Sz4} df_z)^* \right\} \cdot \lambda_s \tag{2.65}$$

onde:

s_{Sz1}: Valor nominal de s/R_0, efeito da força longitudinal F_x sobre o torque de alinhamento;

s_{Sz2}: Variação da distância relativa s/R_0 com a relação $F_y/F_{z,\text{nom}}$;

s_{Sz3}: Variação da distância relativa s/R_0 com o ângulo de inclinação (camber);

s_{Sz4}: Variação da distância relativa s/R_0 com a carga e o camber;

λ_s: Fator de escala do efeito de F_x sobre M_z.

6. **Ângulo de Entrada Equivalente** $\alpha_{t,eq}$

$$\alpha_{t,eq} = \sqrt{\alpha_t^2 + \left(\frac{K_{\kappa x}}{K'_{y\alpha}}\right)^2 k^2} \cdot \text{sgn}(\alpha_t) \tag{2.66}$$

onde:

$K_{\kappa x}$: Rigidez à torção longitudinal do pneu;

$K'_{y\alpha}$: Rigidez efetiva à torção lateral.

7. **Ângulo de Referência** $\alpha_{r,eq}$

$$\alpha_{r,eq} = \sqrt{\alpha_r^2 + \left(\frac{K_{\kappa x}}{K'_{y\alpha}}\right)^2 k^2} \cdot \text{sgn}(\alpha_r) \tag{2.67}$$

onde:

α_r: Ângulo de deslizamento ajustado para torque residual.

2.6 Testes Experimentais

A validação do modelo *Magic Formula* depende diretamente da qualidade dos dados experimentais obtidos em ensaios laboratoriais. No contexto da dinâmica veicular, um dos principais desafios é garantir que os dados coletados sejam representativos das condições reais de operação do pneu. No entanto, devido ao grande número de variáveis independentes envolvidas nos testes, a obtenção de um banco de dados completo e confiável é uma tarefa complexa (Pacejka, 2006).

Muitas vezes, os dados brutos fornecidos por fabricantes de pneus são volumosos e requerem processamento adequado para extrair informações úteis. Em situações onde todas as variáveis são medidas, os relatórios podem ser extensos e de difícil interpretação. Para facilitar a análise, os resultados dos testes são frequentemente apresentados em formato gráfico, correlacionando forças, momentos e parâmetros operacionais em diferentes condições de carga e velocidade (Milliken; Milliken, 1995).

2.6.1 Funcionamento das Máquinas Flat Trac

Os ensaios experimentais de pneus são conduzidos em equipamentos especializados, sendo as máquinas *Flat Trac* uma das principais ferramentas para a caracterização do comportamento dinâmico dos pneus. Essas máquinas permitem a medição das forças longitudinais (F_x) e laterais (F_y), bem como do momento de alinhamento (M_z), em resposta a diferentes condições operacionais.

Durante os testes, variáveis como ângulo de deslizamento (α), carga vertical (F_z) e pressão de inflação são controladas para avaliar como cada uma delas influencia as forças geradas no contato pneu-solo. A Figura 2.15 ilustra uma máquina de ensaio *Flat Trac* utilizada nesses experimentos, onde o pneu é submetido a diferentes condições para obtenção de dados precisos.

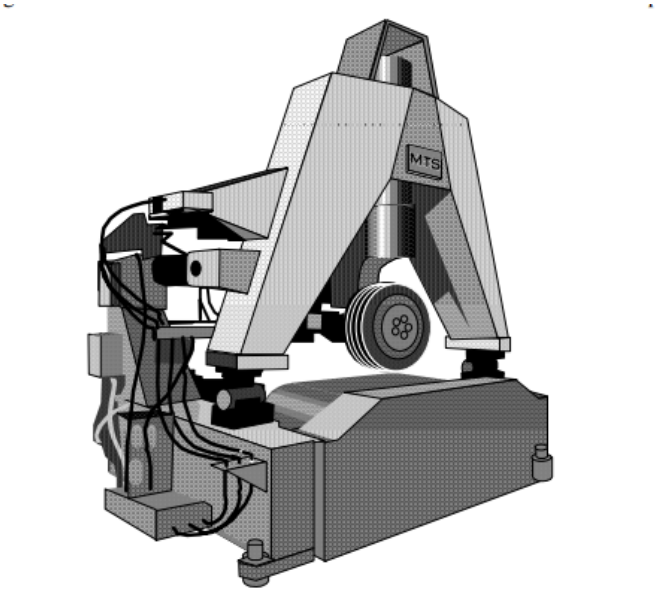


Figura 2.15 – Máquina de ensaio *Flat Trac* utilizada para testes experimentais de pneus. Fonte: (Pacejka, 2006)

O funcionamento das máquinas *Flat Trac* consiste em prender o pneu a um atuador rotacional enquanto este é pressionado contra um tambor ou uma esteira móvel. Essa esteira simula a superfície de rodagem e pode ser controlada para variar velocidade, inclinação e coeficiente de atrito. Durante o teste, sensores de força e deslocamento capturam a resposta do pneu a diferentes condições operacionais (Milliken; Milliken, 1995).

Esses ensaios são fundamentais para validar os coeficientes do modelo *Magic Formula*, pois fornecem dados experimentais que representam com alta precisão a relação entre os parâmetros de entrada e saída do modelo matemático. Entre os principais testes realizados nessas máquinas, destacam-se:

1. **Varredura de Ângulo de Deslizamento (α)**: Mede as forças em função do ângulo

de deslizamento para diferentes cargas verticais, permitindo a obtenção das curvas de deriva do pneu.

2. **Teste de Rigidez Longitudinal**: Mede a resposta do pneu a variações de escorregamento longitudinal (κ).
3. **Influência da Carga Vertical (F_z)**: Avalia como a distribuição da carga afeta a aderência e a capacidade de geração de forças do pneu.
4. **Impacto da Pressão de Inflação**: Determina a influência da pressão do pneu na rigidez estrutural e na eficiência da transmissão de forças.
5. **Efeito da Velocidade**: Analisa como a variação da velocidade impacta a geração de forças e momentos.
6. **Influência do Inclination Angle (γ)**: Avalia como a inclinação do pneu em relação à superfície afeta a distribuição das forças, levando em consideração a deformação da carcaça e os efeitos de camber.

Além desses parâmetros, a temperatura da banda de rodagem é um fator crítico para a performance do pneu, pois influencia a aderência e a degradação do composto. Pneus de competição, por exemplo, possuem faixas ideais de temperatura que maximizam a força gerada, e os ensaios laboratoriais buscam replicar essas condições para garantir que os dados coletados sejam representativos (Milliken; Milliken, 1995).

As versões mais simples da Magic Formula não consideram explicitamente a temperatura na modelagem das forças geradas pelo pneu. Nos dados experimentais que serão utilizados nesse trabalho, os ensaios realizados pela Calspan, a temperatura do pneu é monitorada e os dados são organizados separadamente para pneus quentes e pneus frios.

Os dados coletados nesses experimentos são posteriormente utilizados na calibração do modelo matemático, garantindo que a representação computacional do pneu esteja alinhada com o seu comportamento físico (Pacejka, 2006).

2.7 Fundamentos de Otimização para Identificação Paramétrica

A identificação dos coeficientes do modelo de Pacejka requer técnicas de minimização de erro, pois o ajuste envolve não linearidades complexas.

Nesta seção apresentam-se os conceitos essenciais de otimização numérica aplicados ao ajuste de modelos paramétricos. Inicia-se com definições formais, seguem-se as principais métricas de erro e ferramentas computacionais, e por fim, descreve-se a aplicação prática via o subpacote `scipy.optimize`, com ênfase no algoritmo *Trust Region Reflective* (TRF).

Otimização é o campo da matemática aplicada que busca encontrar os melhores parâmetros dentro de um espaço de busca, minimizando ou maximizando uma função objetivo

(Nocedal; Wright, 2006). É amplamente utilizada em engenharia, finanças, ciência de dados e simulação de sistemas físicos. A formulação geral de um problema de otimização é:

$$\min_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{x}) \quad \text{sujeito a restrições} \tag{2.68}$$

Em contextos de ajuste de modelos, o objetivo é minimizar a discrepância entre os dados experimentais e os resultados produzidos por um modelo matemático.

2.7.1 Função Objetivo e Função Custo

A **função objetivo** representa o critério de desempenho que se deseja otimizar. Quando o foco está na minimização do erro entre as predições de um modelo e os dados reais, tal função é chamada de **função custo** ou **função perda**. Um exemplo clássico é a soma dos quadrados dos resíduos (SSE):

$$J(\theta) = \sum_{i=1}^{n} [y_i - \hat{y}_i(\theta)]^2 \tag{2.69}$$

Essa função mede a qualidade do ajuste paramétrico.

2.7.2 Resíduos e Métricas de Erro

No contexto da identificação paramétrica por meio de otimização, a qualidade do ajuste de um modelo matemático aos dados experimentais é avaliada por meio de medidas quantitativas de erro. Esses erros são expressos a partir dos **resíduos**, definidos como a diferença entre o valor observado experimentalmente (y_i) e o valor previsto pelo modelo ($\hat{y}_i$):

$$r_i = y_i - \hat{y}_i \tag{2.70}$$

O conjunto de resíduos $\{r_1, r_2, \ldots, r_n\}$ forma a base para diversas métricas estatísticas de erro, utilizadas para quantificar a discrepância entre o modelo e os dados. Entre as métricas mais utilizadas destacam-se:

- **Soma dos Quadrados dos Erros (SSE)**: consiste na soma dos quadrados dos resíduos, refletindo a magnitude total dos erros cometidos. É amplamente utilizada como função custo em problemas de mínimos quadrados:

$$\text{SSE} = \sum_{i=1}^{n} r_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2 \tag{2.71}$$

  Quanto menor o valor de SSE, melhor o ajuste do modelo aos dados observados.
- **Erro Quadrático Médio (RMSE)**: obtido como a raiz quadrada da média da SSE, representa a média dos desvios quadráticos entre os valores observados e estimados:

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} r_i^2} \tag{2.72}$$

Diferente da SSE, o RMSE é expresso nas mesmas unidades das variáveis medidas, sendo mais intuitivo para interpretar o erro médio de predição.

Essas métricas não apenas avaliam a performance global do modelo, como também permitem comparações entre diferentes métodos de ajuste. No entanto, vale destacar que ambas são sensíveis a outliers, grandes erros individuais podem influenciar fortemente os resultados. Por esse motivo, é comum complementar essas métricas com análises gráficas dos resíduos e outros indicadores estatísticos, como o erro absoluto médio (MAE) ou o coeficiente de determinação (R^2), dependendo do contexto da aplicação.

A correta interpretação das métricas de erro é essencial para validar se o modelo ajustado representa adequadamente o comportamento físico dos dados experimentais (Nocedal; Wright, 2006).

2.7.3 Gradiente, Jacobiano e Hessiana

As derivadas desempenham um papel fundamental em problemas de otimização contínua. Elas fornecem informações locais sobre a geometria da função objetivo, permitindo que algoritmos naveguem de forma eficiente no espaço de busca em direção ao mínimo.

O gradiente de uma função escalar $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é um vetor que aponta na direção de maior crescimento da função. Sua fórmula é dada por:

$$\nabla f(\boldsymbol{x}) = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right]^T \tag{2.73}$$

O gradiente é central nos algoritmos de primeira ordem, como o método do gradiente descendente, onde a atualização do vetor de parâmetros é feita na direção oposta ao gradiente. Em otimização sem restrições, esse método é útil para funções suaves, com convergência garantida sob certas condições, como convexidade local (Nocedal; Wright, 2006).

O Jacobiano generaliza o conceito de derivada para funções vetoriais. Dada uma função $\boldsymbol{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, o Jacobiano é a matriz:

$$J(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} \tag{2.74}$$

Essa matriz é fundamental em problemas de mínimos quadrados não lineares, pois permite linearizar localmente a função de erro. No algoritmo de Levenberg-Marquardt, por exemplo, o passo de atualização é calculado a partir da solução de um sistema envolvendo $J^T J$, onde J é o Jacobiano da função de resíduos (Nocedal; Wright, 2006).

A Hessiana, por sua vez, representa a matriz de segundas derivadas parciais de uma função escalar $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$:

$$H(\boldsymbol{x}) = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right]_{n \times n} \tag{2.75}$$

Ela fornece informações sobre a curvatura da função em cada direção. Métodos de segunda ordem, como Newton e Quasi-Newton (por exemplo, BFGS e L-BFGS), utilizam a Hessiana (ou sua aproximação) para ajustar o passo de forma mais precisa, especialmente em regiões próximas do mínimo.

O método de Newton puro assume que a função é aproximadamente quadrática e utiliza:

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{x}_k - H^{-1}(\boldsymbol{x}_k)\nabla f(\boldsymbol{x}_k) \tag{2.76}$$

Contudo, o custo computacional de calcular a Hessiana exata (em $\mathcal{O}(n^2)$ para cada avaliação) pode ser proibitivo. Em muitos casos, algoritmos de otimização utilizam **aproximações da Hessiana**, como:

- *Métodos de diferenças finitas*, que estimam a Hessiana numericamente;
- *Quasi-Newton*, que constroem aproximações iterativas (como BFGS) baseadas apenas no gradiente;
- *Produto do Jacobiano transposto por ele mesmo* $J^T J$, em problemas de mínimos quadrados, que atua como uma aproximação válida da Hessiana se os resíduos forem aproximadamente lineares.

Por exemplo, no algoritmo Trust Region Reflective (TRF), a aproximação $J^T J$ é utilizada como substituto da Hessiana exata, tornando o método eficiente mesmo em problemas de alta dimensão, especialmente quando o Jacobiano pode ser calculado analiticamente ou por autodiferenciação (Branch; Coleman; Li, 1999; Community, 2025b).

O uso correto dessas estruturas derivativas é um dos principais determinantes da velocidade de convergência, robustez e escalabilidade dos métodos de otimização modernos.

2.7.4 Métodos Locais e Globais

Métodos locais utilizam aproximações a partir de um ponto inicial para explorar regiões próximas. São eficientes, porém suscetíveis a mínimos locais. Exemplos incluem Gradiente Descendente, Newton e Levenberg-Marquardt (LM). Estes métodos assumem regularidade local da função objetivo e são apropriados quando se dispõe de bons pontos iniciais. Sua eficiência depende da escolha do ponto inicial e da forma da função objetivo.

Métodos globais, por outro lado, visam explorar todo o espaço de busca para evitar armadilhas de mínimos locais. São indicados para funções com múltiplos vales e picos. Exemplos: Algoritmos Genéticos, *Simulated Annealing*, Enxame de Partículas (PSO) e Otimização Bayesiana. Embora mais custosos computacionalmente, fornecem maior robustez em cenários de ajuste de alta complexidade (Russell; Norvig, 2016).

2.7.5 Ambiente Computacional: SciPy e o Subpacote `optimize`

O pacote SciPy é uma das principais bibliotecas de computação científica em Python. Seu subpacote `scipy.optimize` disponibiliza algoritmos eficientes para:

- Problemas sem restrições (`minimize`);
- Ajustes não-lineares por mínimos quadrados (`least_squares`);
- Otimização global (`basinhopping`, `differential_evolution`);
- Programação linear e não linear (`linprog`, `minimize`);
- Ajuste direto de modelos (`curve_fit`).

A função `least_squares`, por exemplo, é amplamente usada para ajustes de modelos com muitos parâmetros, oferecendo flexibilidade para lidar com restrições e diferentes estratégias de otimização (Virtanen *et al.*, 2020; Community, 2025a).

2.7.6 A Função `least_squares` e Algoritmos Associados

A função `least_squares` da SciPy resolve problemas de mínimos quadrados da forma:

$$\min_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n} \frac{1}{2}|F(\boldsymbol{x})|^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} f_i(\boldsymbol{x})^2 \tag{2.77}$$

O usuário pode escolher entre três algoritmos:

- `lm`: Levenberg-Marquardt, recomendado apenas para problemas pequenos e densos;
- `dogbox`: método híbrido entre caixa de confiança e region-based;
- `trf`: Trust Region Reflective, robusto para problemas com restrições e grande número de parâmetros (Community, 2025b).

2.7.7 O Algoritmo Trust Region Reflective (TRF)

O algoritmo Trust Region Reflective (TRF) é uma técnica robusta de otimização não linear baseada no conceito de *regiões de confiança* (*trust regions*). Ao contrário de métodos de linha, que buscam minimizar a função objetivo ao longo de uma direção definida, o TRF constrói, a cada iteração, uma aproximação local da função objetivo (geralmente quadrática), válida dentro de uma vizinhança limitada do ponto atual.

Essa vizinhança, chamada de *região de confiança*, é adaptativamente ajustada de acordo com o sucesso da iteração. Se o passo calculado produz uma redução suficiente na função objetivo, a região é expandida. Caso contrário, ela é contraída. Esse controle local evita que o algoritmo avance em direções inadequadas ou com magnitudes excessivas, fornecendo estabilidade numérica e robustez mesmo em funções mal condicionadas ou com regiões planas (Branch; Coleman; Li, 1999).

No contexto da biblioteca SciPy, o TRF resolve iterativamente o seguinte subproblema em cada passo:

$$\min_{\Delta x} \frac{1}{2}\Delta x^T H \Delta x + J^T \Delta x \quad \text{sujeito a} \quad \|D\Delta x\| \leq \Delta, \tag{2.78}$$

onde:

- Δx é a variação proposta para os parâmetros;
- H é a matriz Hessiana da função objetivo ou sua aproximação (como $J^T J$ nos problemas de mínimos quadrados);
- J é o Jacobiano da função de erro residual;
- D é uma matriz de escalonamento (normalmente diagonal) usada para tornar as unidades dos parâmetros comparáveis;
- Δ é o raio da região de confiança no passo atual.

Após resolver o subproblema e obter um vetor Δx, a atualização do vetor de parâmetros é realizada como:

$$x_{k+1} = x_k + \Delta x_k \tag{2.79}$$

O novo ponto x_{k+1} é avaliado. Se houver redução suficiente na função objetivo, o algoritmo considera a aproximação quadrática válida para um raio maior e expande a região de confiança. Caso contrário, a região é contraída e o passo é recalculado. O processo se repete até que critérios de convergência sejam satisfeitos (como a norma do gradiente ser suficientemente pequena ou o tamanho do passo tender a zero).

Entre suas principais vantagens, destacam-se:

- Suporte a restrições de caixa (*bound constraints*), permitindo limitar superior e inferiormente os parâmetros;
- Compatibilidade com Jacobianos analíticos ou numéricos;
- Boa performance mesmo em problemas mal condicionados ou de alta dimensão;
- Eficiência computacional superior em ajustes com muitos parâmetros e comportamento não linear.

O TRF combina a estabilidade dos métodos de região de confiança com a viabilidade imposta pelas restrições, sendo amplamente recomendado para problemas de mínimos quadrados com limites e múltiplas escalas de variáveis (Community, 2025b; Branch; Coleman; Li, 1999). **Por essas razões, este é o método adotado neste trabalho para ajuste dos coeficientes.**

2.7.8 Validação

A validação do modelo ajustado é uma etapa utilizada para garantir que os coeficientes identificados representem corretamente o comportamento dos pneus. Esse processo envolve a comparação das curvas simuladas com os dados experimentais obtidos em testes de laboratório ou pista, verificando se a variação das forças F_x, F_y e do momento M_z segue as tendências observadas empiricamente.

Critérios como erro quadrático médio (RMSE) e coeficiente de correlação (R^2) são frequentemente utilizados para quantificar a qualidade do ajuste. Além disso, comparações entre diferentes técnicas de otimização podem ser realizadas para avaliar a sensibilidade dos coeficientes em relação ao método utilizado (Gilat; Subramaniam, 2008).

2.8 Considerações Finais

Este capítulo apresentou uma revisão abrangente dos fundamentos teóricos relacionados à otimização dos coeficientes do modelo Pacejka, destacando as características essenciais da interação pneu-solo, bem como os métodos numéricos aplicados para a identificação paramétrica desse modelo.

A revisão da literatura evidenciou que, embora existam avanços significativos em técnicas de otimização, especialmente na última década, ainda persistem desafios importantes relacionados à complexidade da modelagem dos pneus sob condições dinâmicas não lineares. Diferentes abordagens, desde métodos puramente numéricos até técnicas híbridas que combinam inteligência artificial e algoritmos de otimização global, têm sido exploradas para obter resultados mais robustos e precisos na identificação dos coeficientes paramétricos. No entanto, questões relacionadas à eficiência computacional, disponibilidade de implementações abertas e acessíveis, e replicabilidade dos estudos continuam representando lacunas relevantes na literatura atual.

Os métodos experimentais discutidos, com ênfase nas máquinas Flat Trac, destacaram a importância crítica da obtenção de dados experimentais de alta qualidade, que garantam uma representação fidedigna do comportamento dinâmico dos pneus. A precisão dos modelos matemáticos depende diretamente desses dados experimentais, reforçando a necessidade de ensaios detalhados e rigorosos.

O modelo Magic Formula 5.2, adotado neste estudo, foi analisado detalhadamente quanto às suas equações fundamentais, parâmetros envolvidos e limitações na representação de fenômenos transitórios. A escolha desse modelo específico é justificada por seu equilíbrio entre precisão, flexibilidade e disponibilidade para aplicações práticas, apesar das limitações intrínsecas associadas à ausência de efeitos transitórios explícitos.

Por fim, discutiu-se detalhadamente a metodologia numérica utilizada para a identifi-

cação paramétrica, destacando a função `least_squares` do subpacote `scipy.optimize` e, especialmente, o algoritmo Trust Region Reflective (TRF). A escolha do TRF deve-se à sua robustez, capacidade de lidar com restrições e eficiência em problemas de alta dimensão, tornando-o particularmente adequado ao contexto estudado.

3 METODOLOGIA

Esta seção descreve a metodologia adotada para o desenvolvimento do trabalho, que envolveu a implementação e validação de modelos teóricos, bem como o ajuste de parâmetros com base em dados experimentais.

Inicialmente, as equações de deslizamento puro da Magic Formula 5.2 foram implementadas em Python e validadas por meio de simulações no software "Car Real Time". Após essa validação, foram utilizadas curvas experimentais de força lateral, força longitudinal e momento autoalinhante que foram previamente organizadas conforme as condições operacionais de carga vertical e ângulo de camber. Em seguida, aplicou-se um processo de otimização dos parâmetros do modelo utilizando o método "Trust Region Reflective", com o objetivo de minimizar o erro entre os dados experimentais e os valores simulados.

3.1 Implementação e Validação dos Modelos de Pneu

Foi realizada a escrita das equações para um mesmo arquivo de pneu em Python, juntamente com suas validações, por meio do software comercial *Car Real Time*, utilizando o módulo *Tire Testrig*, com o intuito de consolidar e solidificar a base teórica, garantindo que, ao realizar as otimizações, não haja dúvidas no script das equações.

A Figura 3.1 e a Figura 3.2 apresentam a interface do *tire testrig*, onde é possível carregar um arquivo de pneu contendo as informações relevantes e selecionar, por meio de condições operativas fixas, qual força ou momento será visualizado graficamente. Esse procedimento possibilitou a validação do modelo ajustado.

A Figura 3.3 exibe um exemplo da curva de força lateral (F_y) em função do ângulo de deslizamento lateral, servindo como referência para a comparação entre os dados experimentais e os resultados do modelo ajustado.

A validação do modelo ajustado é realizada por meio da comparação das curvas simuladas com os dados CRT. São utilizadas métricas como o erro quadrático médio (RMSE) e o coeficiente de correlação (R^2) para quantificar a precisão do ajuste.

Os resultados são analisados graficamente para verificar a aderência do modelo aos dados experimentais. Para diferentes condições operacionais, como variações na carga vertical e ângulo de camber, são geradas curvas de força lateral (F_y), força longitudinal (F_x) e momento de alinhamento (M_z), permitindo uma avaliação detalhada da fidelidade do modelo.

Essa abordagem garante que o modelo seja confiável para aplicações em simulações veiculares, contribuindo para o desenvolvimento de estratégias de controle e estudos de

dinâmica automotiva.

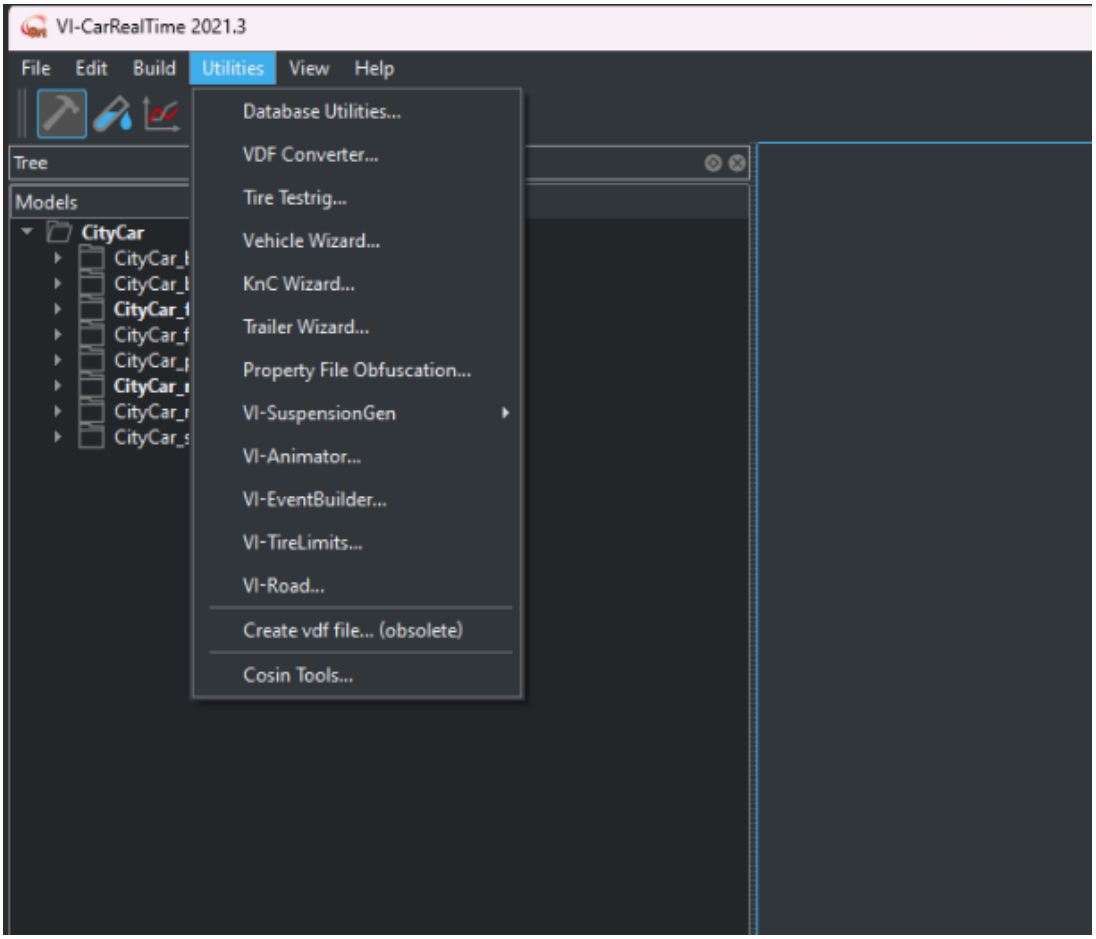


Figura 3.1 – Interface do *tire testrig* com opções de análise.

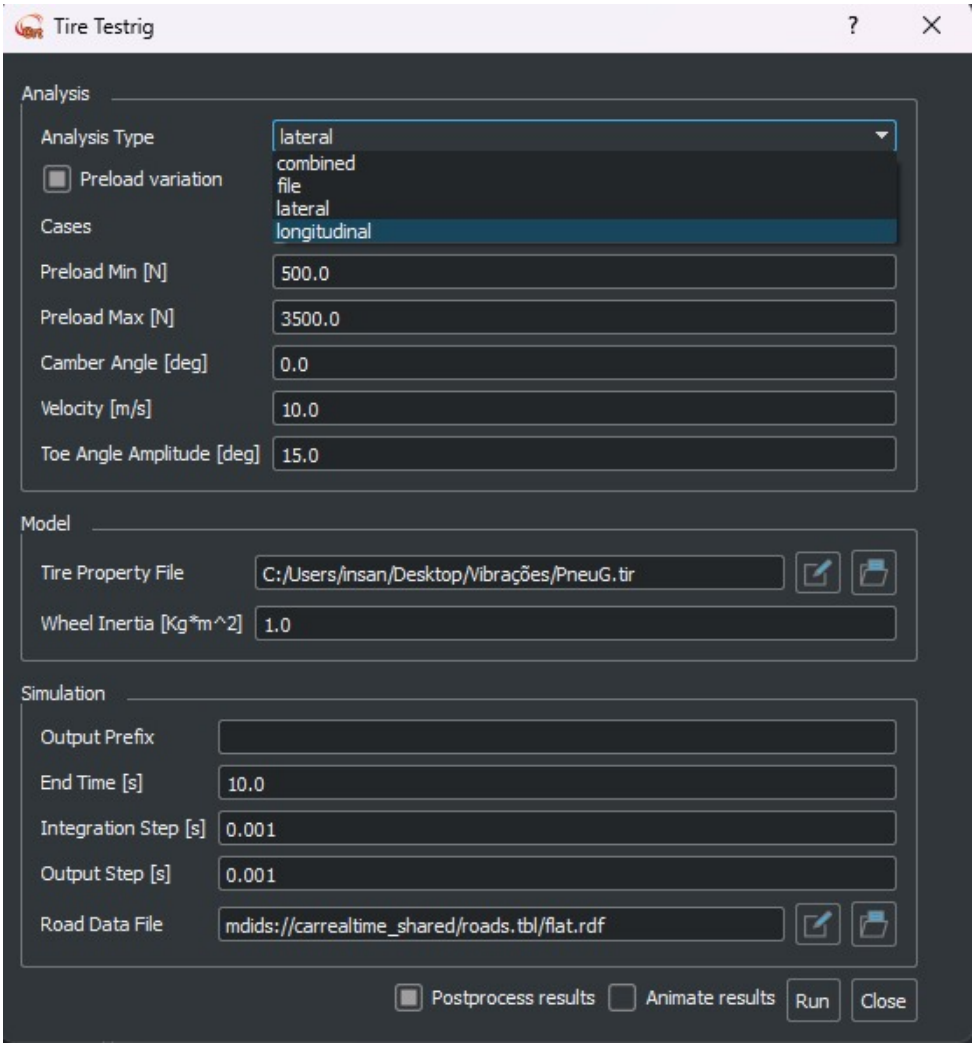


Figura 3.2 – Interface do *tire testrig* mostrando a seleção de parâmetros do pneu.

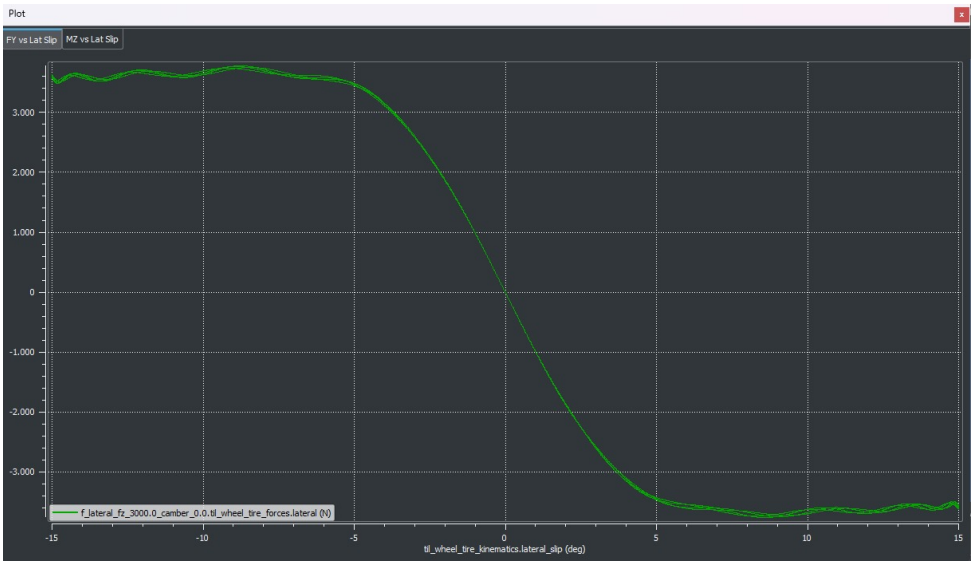


Figura 3.3 – Curva de força lateral (F_y) em função do ângulo de deslizamento lateral.

3.2 Desenvolvimento do Sistema de Simulação Veicular em Python

3.2.1 Arquitetura do Sistema

O sistema de simulação foi estruturado modularmente em Python, garantindo flexibilidade, escalabilidade e facilidade de manutenção. A organização do código baseia-se nos seguintes módulos principais:

1. `lateral_force_mf.py`: Implementa a equação da força lateral (F_y) conforme o modelo Pacejka 5.2, incorporando todos os parâmetros estruturais, geométricos e operacionais. A função principal, `pacejka_fy()`, recebe como entrada os ângulos de deslizamento (α), ângulo de camber (γ), carga vertical (F_z) e a velocidade longitudinal, além dos parâmetros do modelo e seus fatores de escala.
2. `fy_optimization.py`: Responsável pela otimização dos parâmetros do modelo lateral (F_y). Utiliza a função `least_squares()` do subpacote `scipy.optimize`, com o método Trust Region Reflective e função de perda robusta `soft-l1`. Define pesos proporcionais ao inverso da força medida, impõe limites de caixa nos parâmetros e gera estatísticas de erro RMS por curva e global, além de armazenar os parâmetros ajustados em um arquivo `params_global_round9.json`.
3. `separatecurves.py`: Realiza o pré-processamento dos dados experimentais da Calspan. A função `separate_data()` varre os dados brutos, selecionando os pontos que se enquadram nas condições fixas de velocidade, pressão, carga vertical (F_z), ângulo de inclinação (IA) e ângulo de deriva (SA), agrupando-os em curvas indexadas por pares (F_z, IA). Também separa os dados para F_x e M_z, exportando-os como arquivos `.pkl` para uso posterior.
4. `longitudinal_force_mf.py`: Implementa o modelo de força longitudinal (F_x) conforme a Magic Formula 5.2. A função `pacejka_fx()` calcula a força em função do deslizamento longitudinal (κ), carga vertical (F_z) e ângulo de camber (γ).
5. `fx_optimization.py`: Executa a otimização dos parâmetros do modelo longitudinal (F_x), utilizando o mesmo arcabouço da função `least_squares()` com perdas robustas, limites de parâmetros, e armazenamento dos resultados em JSON.
6. `aligning_moment_mf.py`: Responsável pelo cálculo do momento de alinhamento (M_z), considerando a combinação da força lateral com os parâmetros geométricos e estruturais do pneu, além da carga vertical (F_z), ângulo de deslizamento (α) e camber (γ).
7. `mz_optimization.py`: Realiza a otimização dos coeficientes do modelo de momento de alinhamento (M_z), seguindo os mesmos princípios utilizados nas otimizações anteriores e salvando os resultados ajustados para uso posterior.

Módulo de Pré-processamento: O script `separatecurves.py` realiza a filtragem e

organização dos dados experimentais, separando-os em subconjuntos baseados nas condições operacionais fixas de carga (F_z) e ângulo de camber (γ). Cada subconjunto é armazenado de forma indexada, facilitando sua utilização na etapa de otimização.

Módulo de Otimização: O script `fy_optimization.py` realiza o ajuste dos parâmetros do modelo de força lateral (F_y) utilizando o método "Trust Region Reflective"(TRF), com função de perda robusta `soft-l1` implementada via `scipy.optimize.least_squares`. Os resíduos são ponderados pelo inverso do módulo da força medida, com piso de 100 N, e os limites dos parâmetros são definidos com base em intervalos físicos plausíveis ajustados com uma margem de segurança de 10%.

Módulo de Simulação: Realiza a varredura sobre diferentes condições operacionais e aplica os modelos ajustados para gerar os dados de saída simulados. Essa etapa pode ser reutilizada posteriormente para gerar entradas em um sistema de simulação veicular em tempo real.

Módulo de Visualização: Emprega a biblioteca `Matplotlib` para geração dos gráficos comparativos entre os dados experimentais (raw), os pontos filtrados (filtrados) e as curvas ajustadas (fitting). As funções de visualização estão definidas no final do script `fy_optimization.py`, incluindo geração de subplots por carga vertical e ângulo de camber, com título informando o erro RMS global e local.

Cada módulo foi estruturado de forma independente para permitir reuso e integração com futuras otimizações.

3.2.2 Integração com Dados Experimentais

A validação contínua do modelo é realizada por meio da integração com dados experimentais extraídos da FSAE TTC. Esses dados são utilizados para comparar os resultados da simulação com medições reais, garantindo que os coeficientes da Magic Formula estejam adequadamente ajustados.

Os dados experimentais incluem medições de força longitudinal (F_x), força lateral (F_y) e momento de alinhamento (M_z) em diversas condições operacionais. O processo de integração ocorre da seguinte forma:

1. Os dados experimentais são coletados e armazenados em arquivos CSV.
2. O sistema de simulação lê esses arquivos e extrai as curvas de resposta medidas.
3. Os resultados simulados são sobrepostos às medições experimentais para análise comparativa.
4. Métricas como erro quadrático médio (RMSE) e coeficiente de correlação (R^2) são calculadas para avaliar a precisão do modelo.

Essa abordagem permite uma calibração contínua dos coeficientes do modelo, garantindo que os resultados estejam sempre alinhados com a realidade. Além disso, ao utilizar fontes confiáveis de dados experimentais, como a FSAE TTC, assegura-se que o modelo seja robusto para uma ampla gama de condições operacionais.

3.2.3 Geração de Relatórios e Visualização

A análise dos resultados e a geração de relatórios são automatizadas utilizando as bibliotecas `matplotlib` e `pandas`. Esse processo permite a documentação eficiente dos experimentos e facilita futuras análises comparativas.

O sistema executa as seguintes etapas para a visualização e exportação de resultados:

1. Os dados simulados e experimentais são armazenados em arquivos CSV, permitindo fácil acesso e manipulação.
2. O módulo de visualização carrega esses dados e gera gráficos das curvas de força e momento, permitindo uma inspeção visual da precisão do modelo.
3. Os gráficos são salvos automaticamente em formato PNG e podem ser incluídos diretamente em relatórios técnicos.
4. Relatórios detalhados são gerados contendo estatísticas de erro, coeficientes ajustados e comparações gráficas, permitindo uma análise aprofundada da performance do modelo.

Essa automação permite que novas simulações sejam rapidamente comparadas com resultados anteriores, acelerando o processo de refinamento e ajuste dos parâmetros da Magic Formula.

3.3 Identificação dos Coeficientes da Magic Formula 5.2 com Dados Experimentais

Nesta seção é apresentada a metodologia adotada para obtenção dos coeficientes do modelo de pneu Magic Formula 5.2, com base em dados experimentais da Calspan Corporation. O pneu escolhido para este estudo foi o Hoosier 43070 16x6.0-10 R20, por apresentar todos os dados necessários para os fins de pesquisa desse trabalho.

O banco de dados utilizado apresenta uma rica variedade de condições operacionais: variações de carga vertical (F_z), ângulo de deriva (α), deslizamento longitudinal (κ), inclinação lateral (IA), pressão interna (P) e velocidade de ensaio. Essas condições foram exploradas de forma sistemática pela Calspan utilizando equipamentos de alta precisão, conforme descrito nos documentos técnicos (FSAE..., 2020b) e (FSAE..., 2020a).

A abordagem metodológica adotada neste trabalho combina estratégias numéricas com seleção dos dados. Embora alternativas modernas, como o uso de redes neurais artificiais para ajuste direto de modelos de pneus representem uma tendência promissora, optou-se neste estudo por um método determinístico. A Magic Formula 5.2 foi escolhida por sua interpretação física direta dos parâmetros e ampla aceitação na indústria.

Inspirado na metodologia proposta em (Fancher; November; Lattime, 2013), inicialmente buscou-se adotar uma abordagem sequencial dividida em duas etapas para o ajuste dos parâmetros da Magic Formula 5.2. Na primeira etapa, foram otimizadas as curvas com variação da carga vertical (F_z), mantendo-se constantes os coeficientes relacionados ao ângulo de camber (IA). Em seguida, na segunda etapa, realizou-se o ajuste das curvas em que o camber variava, permitindo maior liberdade aos coeficientes relacionados ao IA e pouca ou nenhuma liberdade aos parâmetros previamente ajustados com a carga vertical. Esta metodologia, amplamente empregada em estudos acadêmicos anteriores, não proporcionou resultados suficientemente satisfatórios, com valores elevados para o erro quadrático médio (RMS).

Diante dessa limitação inicial, optou-se por uma estratégia alternativa, na qual todos os coeficientes referentes à força lateral (Fy) foram otimizados simultaneamente para as 15 curvas experimentais disponíveis. Procedimento análogo foi aplicado posteriormente para os momentos autoalinhantes (Mz) e forças longitudinais (Fx). Essa mudança de estratégia resultou em melhorias substanciais, com redução significativa no RMS obtido, indicando uma melhor aderência dos modelos ajustados aos dados experimentais. Ressalta-se que os parâmetros apresentaram alta sensibilidade a pequenas variações, demandando múltiplas iterações e ajustes criteriosos, sempre fundamentados tecnicamente e com base em estimativas prévias coerentes com a literatura.

Com base nessa abordagem consolidada, o processo de identificação dos coeficientes do modelo foi organizado em três etapas principais, descritas a seguir:

1. Filtragem e separação dos dados para diferentes condições operacionais fixas;
2. Otimização dos coeficientes do modelo Pacejka (Magic Formula 5.2);
3. Obtenção dos coeficientes para cada força e momento.

3.3.1 Separação dos Dados para Diferentes Condições Operacionais Fixas

A separação dos dados brutos provenientes do consórcio FSAE (Rodada 9, Run 11) foi realizada com base em critérios operacionais e estruturada com auxílio do script `separatecurves.py`. O código foi desenvolvido em Python e tem como principal função a separação dos dados experimentais por fenômeno físico, a fim de permitir o ajuste de parâmetros da Magic Formula 5.2 de forma individualizada.

A principal função empregada é `separate_data()`, que opera sobre os dados originais carregados do arquivo `Round9_Run11_43070_run.pkl`. A seguir, detalham-se os critérios aplicados e os dados extraídos para cada fenômeno de interesse:

(a) Força Lateral F_y

Para extração das curvas $F_y \times SA$, considerou-se o deslizamento longitudinal aproximadamente nulo ($\kappa \approx 0$). A filtragem foi realizada com base nos seguintes parâmetros:

- Velocidade longitudinal (V): entre 39 km/h e 41 km/h;
- Pressão interna (P): 12 psi $\pm$ 0,5 psi;
- Ângulo de deriva (SA): dentro do intervalo $[-12{,}5°, +12{,}5°]$;
- Deslizamento longitudinal (SL): menor que 0,5;
- Carga vertical (FZ): agrupada em cinco faixas nominais — 222 N, 445 N, 667 N, 1112 N e 1557 N;
- Ângulo de inclinação lateral (IA): -4°, -2°, 0°, 2° e 4°.

A função `valid()` foi usada para checar os limites de tolerância, enquanto os dados válidos foram agrupados em 25 curvas, com índices idx $= j \cdot 5 + q$, onde j é o índice da carga e q o do ângulo IA.

(b) Força Longitudinal F_x

Para extração das curvas $F_x \times SL$, foram utilizados os seguintes critérios:

- Ângulo de deriva (SA): entre -0,5° e +0,5° (próximo de zero);
- Carga vertical (FZ): agrupada em quatro faixas nominais — 222 N, 667 N, 1112 N e 1557 N;
- Deslizamento longitudinal (SL): entre -1.5 e %;.
- Velocidade: entre 39 km/h e 41 km/h;

- Pressão: 12 psi $\pm$ 0,5 psi;
- Cargas verticais e IA nas mesmas faixas da análise de F_y.

Os dados foram organizados com estrutura idêntica ao caso lateral, porém isolando curvas puras de tração e frenagem. A função de agrupamento segue os mesmos índices da força lateral, porém extraindo SL e F_x.

(c) Momento de Alinhamento M_z

A extração das curvas $M_z \times SA$ seguiu os mesmos critérios de F_y, uma vez que o momento de alinhamento está diretamente associado ao deslizamento lateral. As variáveis consideradas foram:

- SA: entre -12,5° e +12,5°;
- SL: menor que 0,5;
- Demais filtros idênticos aos usados para F_y.

A curva é formada pelos pares (SA, M_z), e o armazenamento das curvas também ocorre dentro da estrutura retornada por `separate_data()`, com chave associada ao momento de alinhamento.

Após a separação, todos os conjuntos de curvas são salvos em um único arquivo `curvas_round9_run11.pkl`, utilizando a biblioteca `pickle`, para posterior uso na etapa de otimização dos coeficientes. A estrutura final contém, para cada fenômeno físico, uma lista de curvas indexadas conforme as faixas discretizadas de F_z e IA.

3.3.2 Otimização dos Coeficientes do Modelo Pacejka (Magic Formula 5.2)

Com os dados organizados, foi realizada a otimização dos coeficientes da Magic Formula 5.2. Este modelo é composto por coeficientes que definem a forma da curva (PCx, PDx, PKx, etc.) e é amplamente utilizado por sua capacidade de representar com precisão o comportamento não linear dos pneus.

A função custo foi definida como a soma dos erros quadráticos ponderados entre os dados experimentais e os valores simulados pelo modelo, conforme implementado pelas funções `fx_vec`, `fy_vec` e `mz_vec`. A otimização foi realizada em três etapas principais:

1. Os parâmetros iniciais e os intervalos (bounds) foram definidos com base nas faixas típicas de valores identificadas por Edy (Edy, 2016), e corroborados por arquivos `.tir` fornecidos pela Pirelli no contexto do projeto ESC-Sim.
2. Otimização utilizando o método Trust Region Reflective (TRF) com critérios de parada mais permissivos, para exploração inicial do espaço dos parâmetros. Além disso, houve o refinamento final também utilizando o método Trust Region Reflective (TRF) com a

função `least_squares` da biblioteca SciPy, configurado com critérios para convergência mais precisa e estável.

Este processo foi repetido individualmente para cada fenômeno físico estudado (forças longitudinais, forças laterais e momentos autoalinhantes), resultando em arquivos individuais JSON com os coeficientes otimizados e métricas globais RMS e NRMS associadas.

Considerações sobre os Fatores de Escala (λ)

Na versão 5.2 da *Magic Formula*, introduzem-se diversos fatores de escala — por exemplo, λ_{μ_y}, λ_{K_y}, $\lambda_{F_{z0}}$, entre outros — com dois propósitos principais (Pacejka, 2006):

1. **Normalizar a forma das curvas**: possibilitar que o mesmo conjunto de coeficientes descreva pneus diferentes, preservando o padrão característico das curvas e variando apenas o nível (força ou rigidez);
2. **Adaptar o modelo a variações de condição operacional**: temperatura, pressão de inflação, estado de desgaste etc., sem a necessidade de recalibrar todos os coeficientes estruturais.

Nesta calibração, contudo, o conjunto experimental refere-se a *um* único pneu ensaiado sob condição fixa (carga nominal, temperatura controlada e desgaste constante). Permitir a variação dos fatores λ não agregaria informação e apenas aumentaria os graus de liberdade da otimização. Por essa razão, todos os fatores de escala foram fixados em $\lambda = 1$, como explicitamente definido nas funções `pacejka_fx`, `pacejka_fy` e `pacejka_mz`.

Em aplicações futuras, esses fatores podem (e devem) ser liberados ou prescritos quando:

1. Transferir o modelo para outros pneus com a mesma geometria, mas compostos distintos;
2. Interpolar o comportamento em função de temperatura, pressão ou desgaste;
3. Desenvolver modelos combinados (FX + FY + MZ), garantindo coerência física entre os picos observados experimentalmente.

Em síntese, os fatores de escala foram mantidos unitários no presente ajuste por não acrescentarem informação relevante para um único conjunto de dados experimentais. Quando se extrapolar o modelo para pneus ou condições distintas, a liberação (ou prescrição) dos fatores λ torna-se essencial para preservar a forma calibrada e reescalar adequadamente os níveis de força ou rigidez.

3.3.3 Obtenção dos Coeficientes para Cada Força e Momento

Após a otimização numérica detalhada nas funções implementadas (`fx_optimization.py`, `fy_optimization.py` e `mz_optimization.py`), foram extraídos os seguintes conjuntos de coeficientes específicos para cada fenômeno físico estudado:

- **Força Lateral (F_y)**: parâmetros PCy, PDy, PEy, PKy, PHy, PVy determinados a partir de variações no ângulo de deriva (α), com a função `pacejka_fy`;
- **Força Longitudinal (F_x)**: parâmetros PCx, PDx, PEx, PKx, PHx, PVx determinados através das variações no escorregamento longitudinal (κ), utilizando a função `pacejka_fx`;
- **Momento de Alinhamento (M_z)**: parâmetros QBz, QCz, QDz, QEz e QHz determinados via variações do momento autoalinhante em função do ângulo de deriva, empregando a função `pacejka_mz`, que reutiliza internamente a função `pacejka_fy` já calibrada.

Todos os coeficientes obtidos foram organizados e exportados em arquivos JSON individuais, sendo também compatíveis para geração direta de arquivos `.tir`, utilizados em simulações multibody (e.g., *CarSim*, *Adams Car*), permitindo assim rápida validação e implementação prática em ferramentas de dinâmica veicular.

4 Resultados

4.1 Considerações Iniciais

Esta seção apresenta os resultados finais obtidos a partir do desenvolvimento e validação das equações da Magic Formula 5.2 implementadas em Python, seguidos pela otimização dos coeficientes para diferentes forças e momentos gerados por pneus. O modelo foi testado com base em dados experimentais do pneu 43070 16x6.0-10 R20, amplamente utilizado em competições como a Fórmula SAE.

Os dados de entrada utilizados para o processo de ajuste foram previamente tratados e separados com base em condições operacionais fixas (carga vertical e ângulo de camber), utilizando rotinas desenvolvidas no script `separatecurves.py`. A otimização dos coeficientes foi realizada via `least_squares`, do pacote `scipy.optimize`, por meio do script `fy_optimization.py`, utilizando o modelo de força lateral implementado no módulo `lateral_force_mf.py`. Cada curva de força foi ajustada separadamente, respeitando as particularidades das condições operativas experimentais.

4.2 Validação das Equações Implementadas

Foi realizada a validação das equações implementadas em Python. Esse processo garante que, ao avançarmos para a etapa de otimização dos coeficientes, não houvesse dúvidas quanto à robustez e correção dos modelos matemáticos. Dessa forma, caso erros surgissem durante a otimização, poderíamos identificar com precisão a origem do problema, sem incertezas sobre a base das equações utilizadas.

A validação foi realizada para diferentes condições operativas, abrangendo o comportamento das forças lateral (F_y), longitudinal (F_x) e torque de alinhamento (M_z) em deslizamento puro. Para garantir a precisão, fixamos algumas condições operacionais específicas:

1. Camber: 0°
2. Ângulo de deslizamento (α): $-10°$ a $10°$
3. Carga normal (F_z): 2000 N, 3000 N, 4000 N
4. Slip longitudinal (κ): -1 a 1

A seguir, são apresentados os gráficos resultantes dessa validação, onde são mostrados os valores de erro médio quadrático normalizado (MSE^2) e coeficiente de determinação (R^2), utilizados para avaliar a qualidade da modelagem.

4.2.1 Validação da Força Longitudinal (F_x)

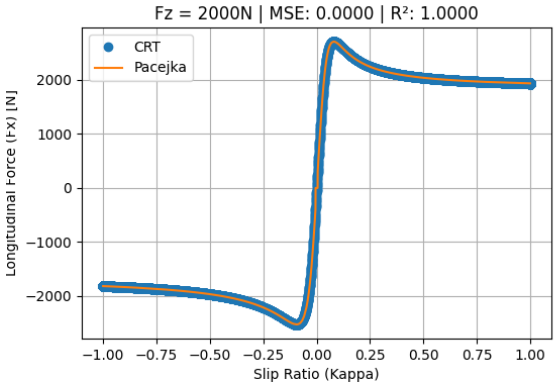


Figura 4.1 – Validação da força longitudinal (F_x) para $F_z = 2000$ N.

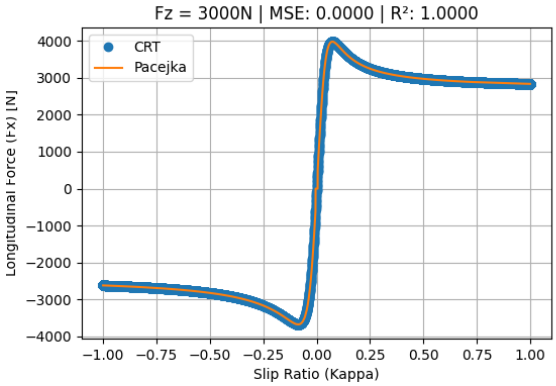


Figura 4.2 – Validação da força longitudinal (F_x) para $F_z = 3000$ N.

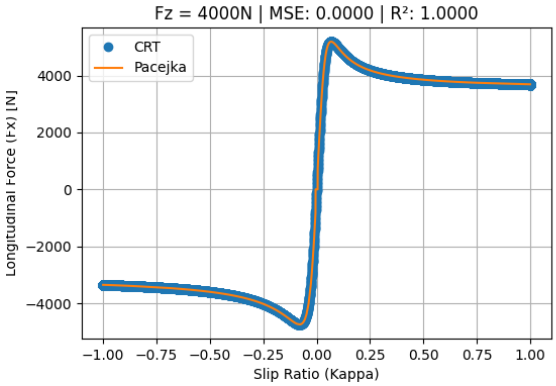


Figura 4.3 – Validação da força longitudinal (F_x) para $F_z = 4000$ N.

4.2.2 Validação da Força Lateral (F_y)

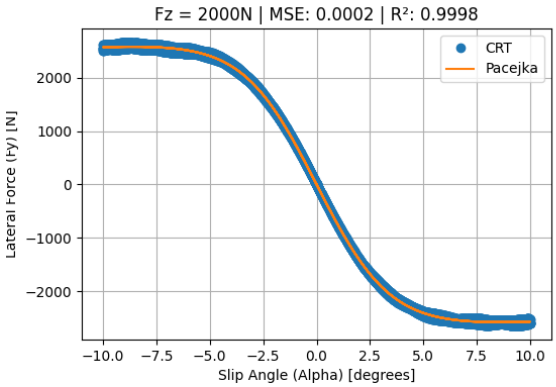


Figura 4.4 – Validação da força lateral (F_y) para $F_z = 2000$ N.

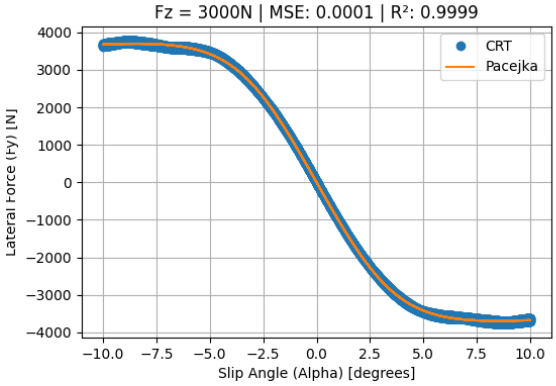


Figura 4.5 – Validação da força lateral (F_y) para $F_z = 3000$ N.

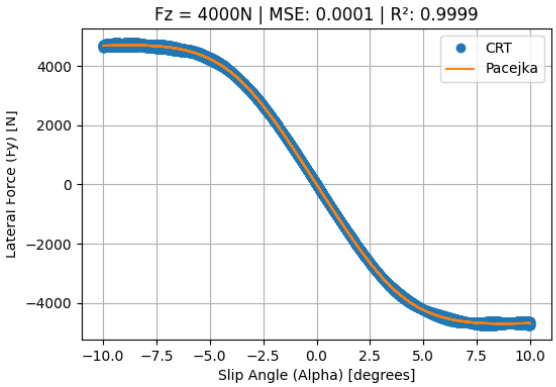


Figura 4.6 – Validação da força lateral (F_y) para $F_z = 4000$ N.

4.2.3 Validação do Torque de Alinhamento (M_z)

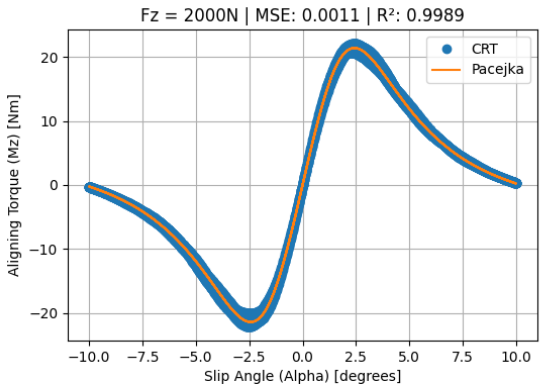


Figura 4.7 – Validação do torque de alinhamento (M_z) para $F_z = 2000N$.

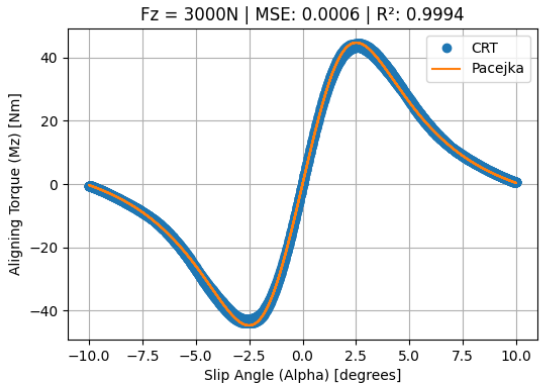


Figura 4.8 – Validação do torque de alinhamento (M_z) para $F_z = 3000N$.

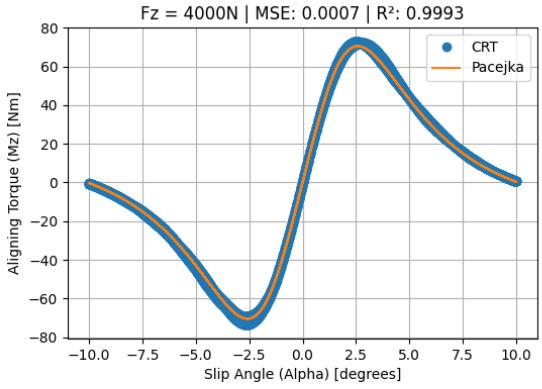


Figura 4.9 – Validação do torque de alinhamento (M_z) para $F_z = 4000N$.

Os resultados mostram que as curvas simuladas estão bem próximas das curvas de referência, indicando um ajuste preciso das equações implementadas. O erro médio quadrático normalizado (MSE^2) tendeu a zero e o coeficiente de determinação (R^2) se aproximou de 1, confirmando a consistência da modelagem adotada. Assim, podemos avançar para a otimização dos coeficientes com a segurança de que a base das equações está validada.

4.3 Resultados das otimizações

Nesta seção são apresentados os resultados da otimização dos coeficientes da Magic Formula 5.2, com foco inicial na força lateral (F_y), considerando diferentes níveis de carga vertical (F_z) e ângulos de camber (IA).

A qualidade do ajuste é quantificada por meio do erro médio quadrático (RMS), tanto individual por curva quanto global. Todos os ajustes foram realizados considerando a faixa de ângulo de deslizamento (α) de $-13°$ a $+13°$.

4.3.1 Resultados para a Força Lateral

Limites e valores iniciais dos coeficientes de F_y

Como dito anteriormente, os limites adotados para os coeficientes do modelo de força lateral (F_y) foram selecionados com base em valores típicos encontrados na literatura técnica e posteriormente ajustados manualmente, com o objetivo de garantir a viabilidade física do modelo e atingir menores erros de ajuste. Os limites inferiores e superiores foram suavemente expandidos em 10% para evitar bloqueio prematuro do otimizador nos extremos do domínio. Os valores iniciais foram definidos como a média aritmética entre os limites inferior e superior de cada parâmetro.

A Tabela 4.1 apresenta os limites inferior e superior adotados e os valores iniciais assumidos para cada coeficiente da Magic Formula 5.2 aplicada à força lateral.

Tabela 4.1 – Limites e valores iniciais dos coeficientes da força lateral (F_y)

Coeficiente	Limite Inferior	Limite Superior	Valor Inicial
$PCY1$	0.5000	1.2000	1.0000
$PDY1$	0.2850	4.1850	2.2350
$PDY2$	-3.1350	3.3150	0.0900
$PDY3$	-52.5000	52.5000	0.0000
$PEY1$	-5.2500	3.1500	-1.0500
$PEY2$	-5.2500	3.1500	-1.0500
$PEY3$	-8.4000	8.4000	0.0000
$PEY4$	-3.1500	7.3500	2.1000
$PKY1$	4.7625	42.0000	23.3813
$PKY2$	0.2850	2.1000	1.1925
$PKY3$	-2.1000	3.1500	0.5250
$PHY1$	-0.0525	0.0525	0.0000
$PHY2$	-0.0525	0.0525	0.0000
$PVY1$	-0.0075	0.1575	0.0750
$PVY2$	-0.1575	0.1575	0.0000
$PVY3$	-0.3150	0.3150	0.0000
$PVY4$	-0.1050	0.1050	0.0000

Os gráficos a seguir ilustram o desempenho do ajuste para cinco diferentes valores de carga vertical ($F_z = \{222, 445, 667, 1112, 1557\}$ N), cada um sob três ângulos de camber fixos (IA = 0°, 2° e 4°).

$F_z = 222$ N

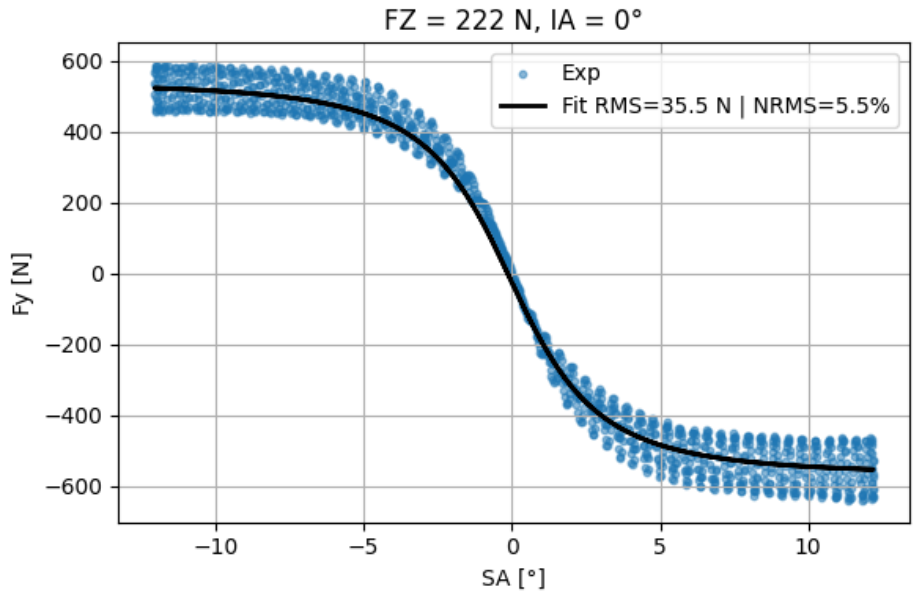


Figura 4.10 – Ajuste da força lateral (F_y) para $F_z = 222$ N. RMS Global: 32.4 N

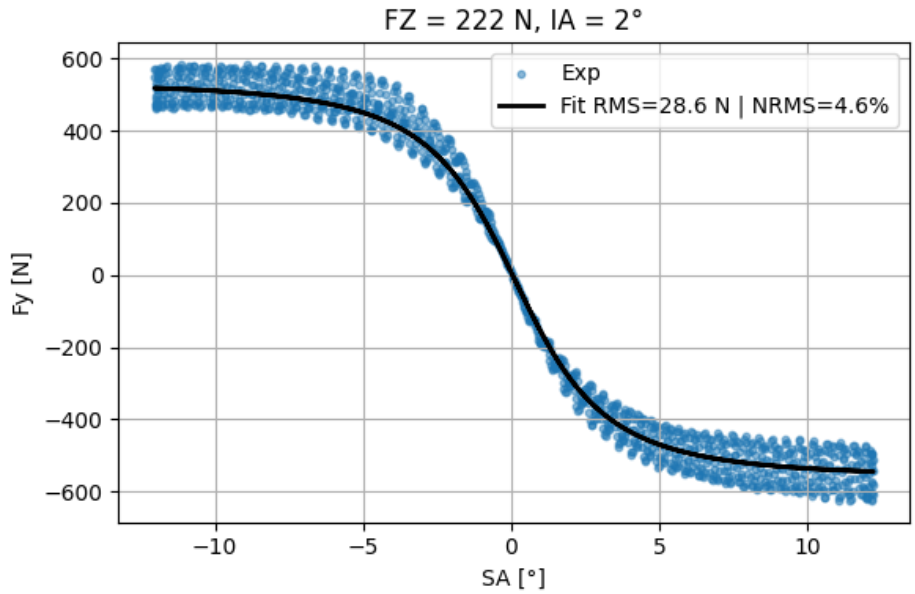


Figura 4.11 – Ajuste da força lateral (F_y) para F_z = 222 N. RMS Global: 32.4 N

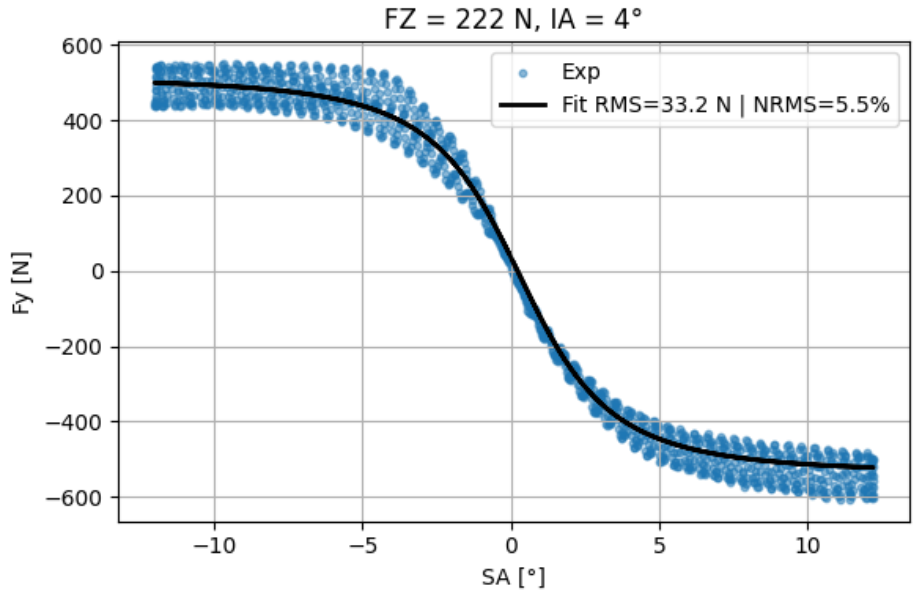


Figura 4.12 – Ajuste da força lateral (F_y) para F_z = 222 N. RMS Global: 32.4 N

Conclusões para $F_z = 222$ N — IA = 0° / 2° / 4°

As curvas experimentais para baixa carga apresentam grande dispersão, especialmente em altas derivações ($|\alpha| > 8°$), o que prejudica a estabilidade do ajuste. O método TRF tende a se manter próximo do centro do domínio viável, evitando regiões com gradientes instáveis. Os coeficientes $PKY1$ (rigidez de canto) e $PDY3$ (efeito do camber no pico) parecem subestimados para IA = 0°, prejudicando a inclinação inicial da curva. A limitação superior em $PKY1 = 40$ e inferior em $PDY3 = -50$ pode ter contido a capacidade do modelo de seguir a forma empinada no início da curva, especialmente em IA mais baixos. A maior RMS ocorreu em IA = 0°, indicando que, para essa carga, o ajuste teve mais dificuldade na condição de camber nulo. O desempenho melhora em IA = 2°, possivelmente devido à melhor definição da curva experimental.

$F_z = 445$ N

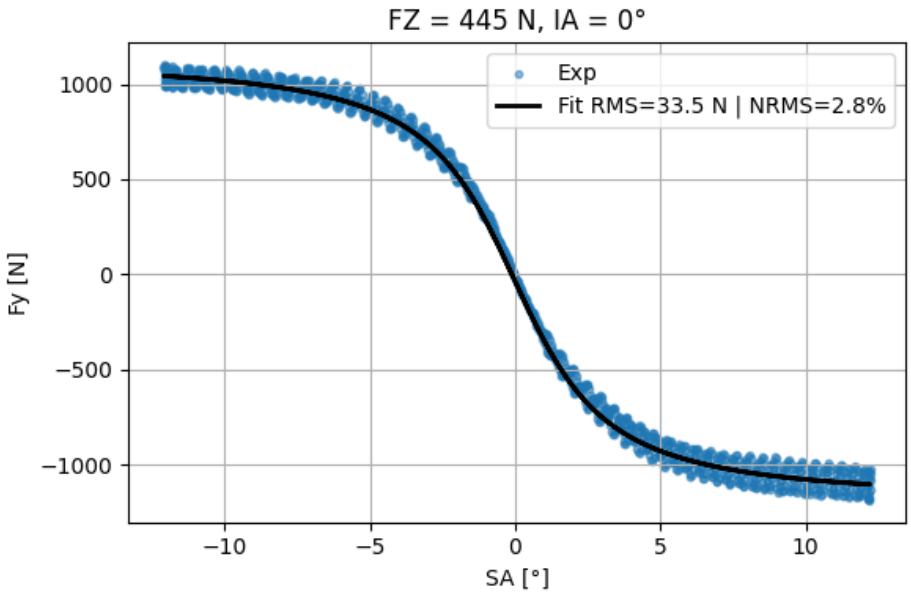


Figura 4.13 – Ajuste da força lateral (F_y) para $F_z = 445$ N. RMS Global: 32.4 N

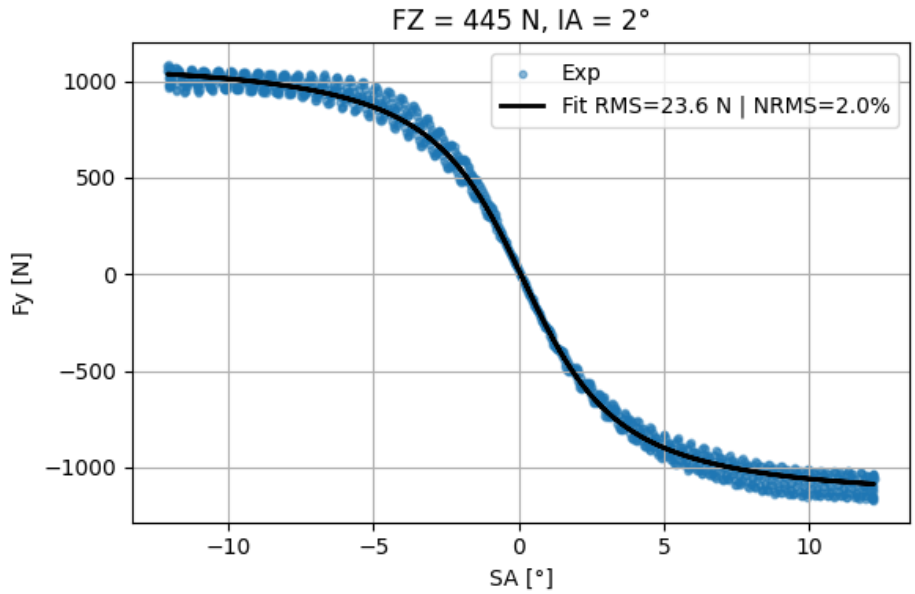


Figura 4.14 – Ajuste da força lateral (F_y) para F_z = 445 N. RMS Global: 32.4 N

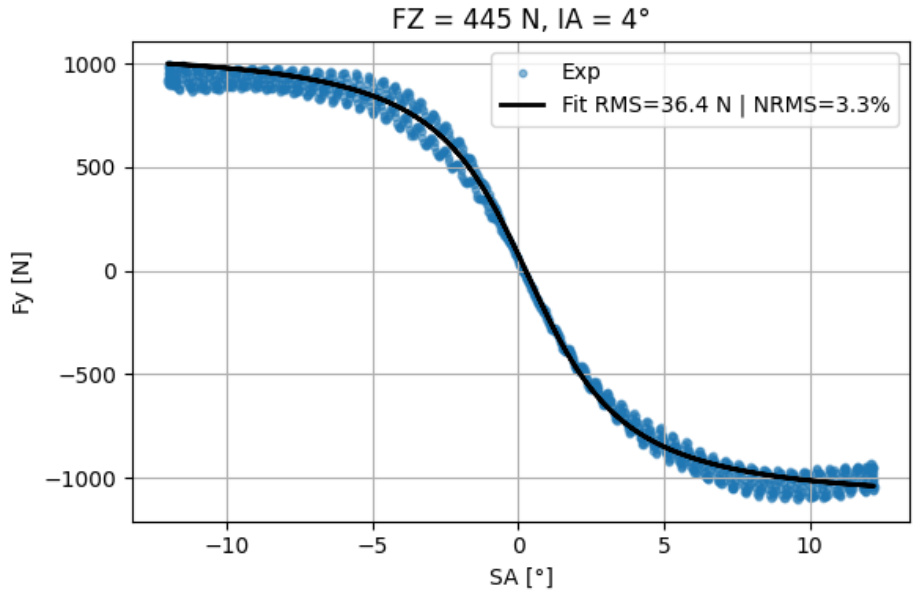


Figura 4.15 – Ajuste da força lateral (F_y) para F_z = 445 N. RMS Global: 32.4 N

Conclusões para F_z = 445 N — IA = 0° / 2° / 4°

O desempenho melhora visivelmente, com erro reduzido especialmente em IA = 2°. O método TRF, ao explorar regiões centrais do domínio, encontra coeficientes mais próximos do valor ótimo. A combinação $PKY2$ (variação da rigidez com a carga) e $PEY2$ (variação da curvatura com a carga) mostra-se crítica: valores altos de $PEY2$ suavizam o ”ombro” da curva em altos α, o que pode justificar a leve subestimação do pico em IA = 4°. Uma flexibilização do bound superior de $PEY2$ poderia ainda buscado para melhorar esse aspecto. O valor mais baixo de RMS foi obtido para IA = 2°, reforçando a tendência observada anteriormente. Já o camber de 4° trouxe maior não linearidade à modelagem devido à inclinação acentuada.

F_z = 667 N

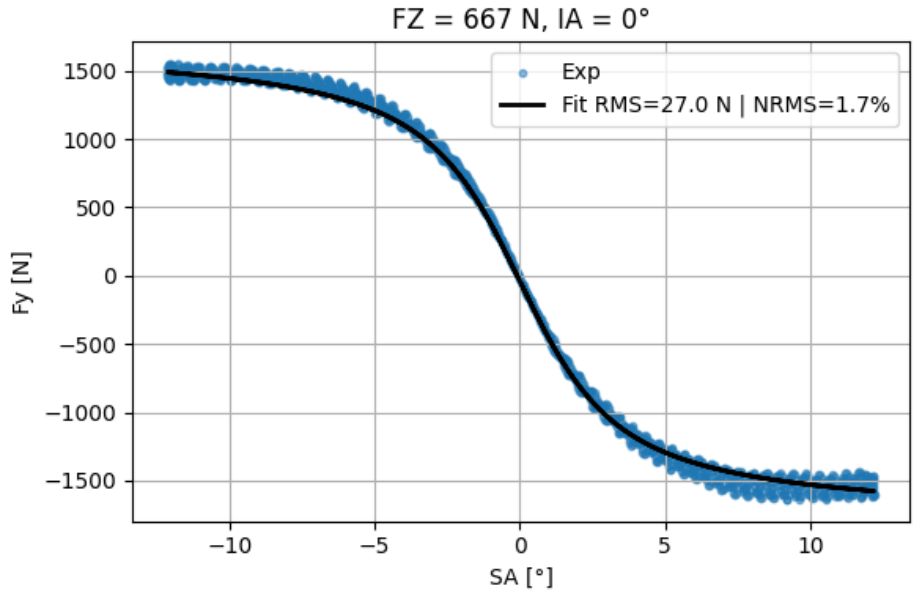


Figura 4.16 – Ajuste da força lateral (F_y) para F_z = 667 N. RMS Global: 32.4 N

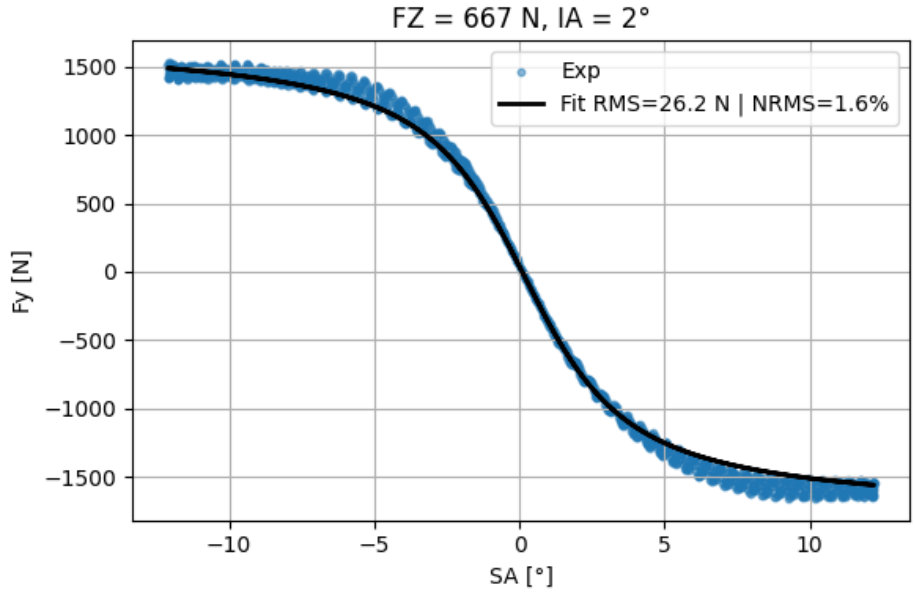


Figura 4.17 – Ajuste da força lateral (F_y) para F_z = 667 N. RMS Global: 32.4 N

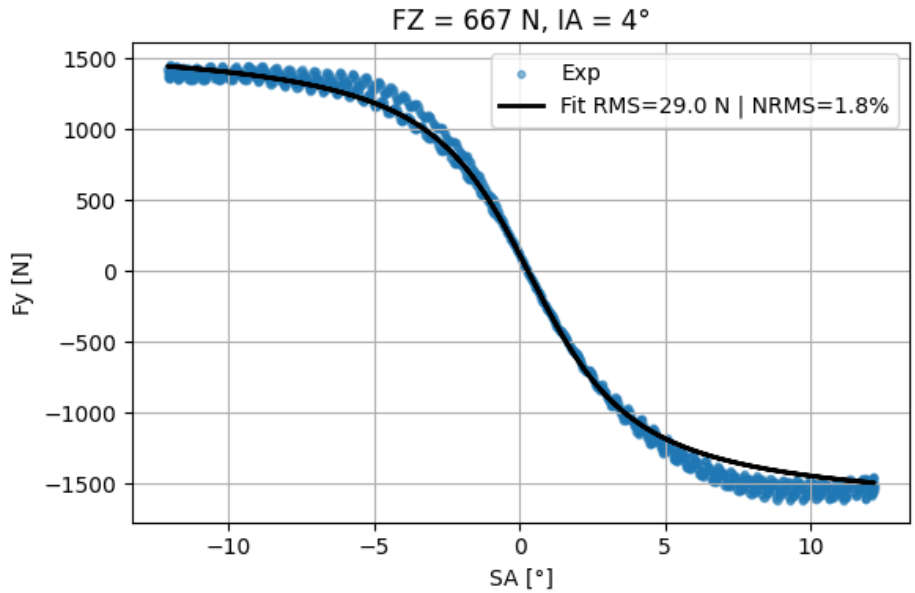


Figura 4.18 – Ajuste da força lateral (F_y) para F_z = 667 N. RMS Global: 32.4 N

F_z = 667 N — IA = 0° / 2° / 4°

Nesta carga intermediária, observa-se leve assimetria nas curvas, que pode não ter sido totalmente captada por $PEY3$ (assimetria da curvatura) e $PVY3$ (deslocamento vertical com camber). Os valores desses coeficientes não se aproximaram das extremidades do intervalo permitido, o que indica que o método pode estar preso em um mínimo local. Aumentar a penalidade sobre erro em regiões de pico poderia guiar o otimizador para áreas mais críticas do domínio.

$F_z = 1112$ N

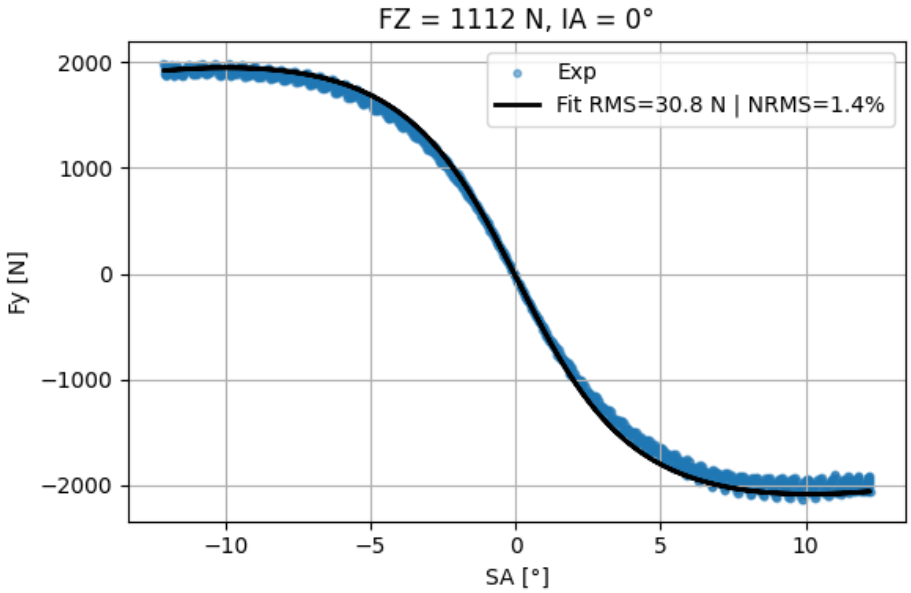


Figura 4.19 – Ajuste da força lateral (F_y) para $F_z = 1112$ N. RMS Global: 32.4 N

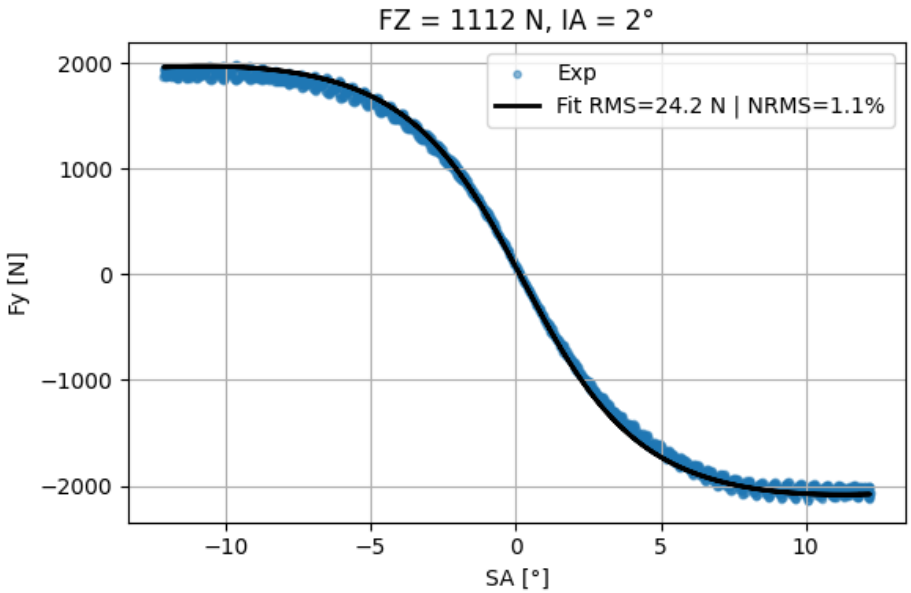


Figura 4.20 – Ajuste da força lateral (F_y) para $F_z = 1112$ N. RMS Global: 32.4 N

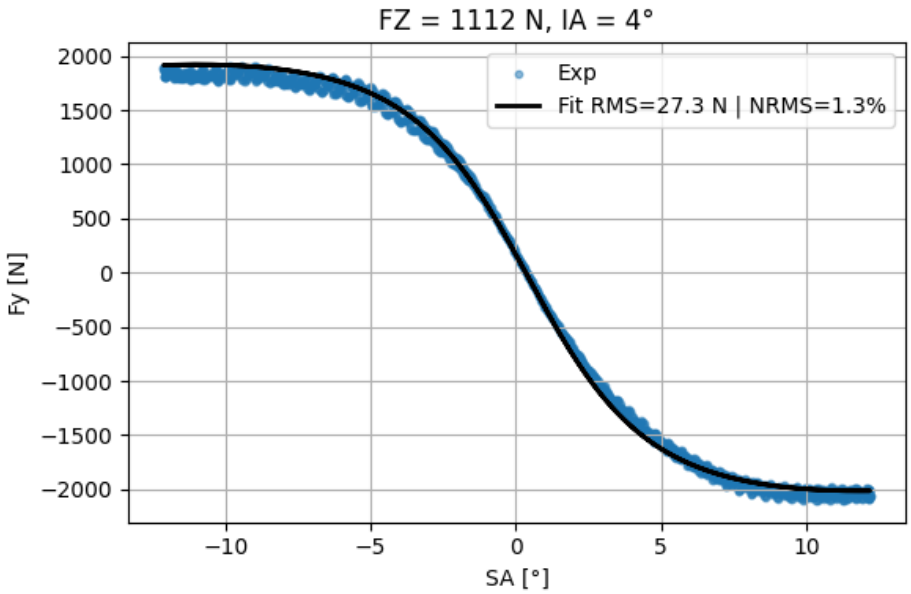


Figura 4.21 – Ajuste da força lateral (F_y) para F_z = 1112 N. RMS Global: 32.4 N

F_z = 1112 N — IA = 0° / 2° / 4°

A boa coerência do ajuste para essa carga possivelmente ocorre devido a um menor ruído experimental e rigidez bem distribuída ao longo de α. Os coeficientes $PDY1$ (pico base) e $PKY3$ (influência do camber) parecem assumir valores adequados, com baixa necessidade de reavaliação dos bounds. A curva em IA = 4° ainda apresenta leve deslocamento horizontal, sugerindo subajuste em $PHY2$ (efeito do camber no deslocamento horizontal). Os resultados mostram estabilidade nos erros RMS mesmo com aumento da carga. O desempenho em IA = 0° continua consistente, com leve aumento de erro para camber mais elevado.

$F_z = 1557$ N

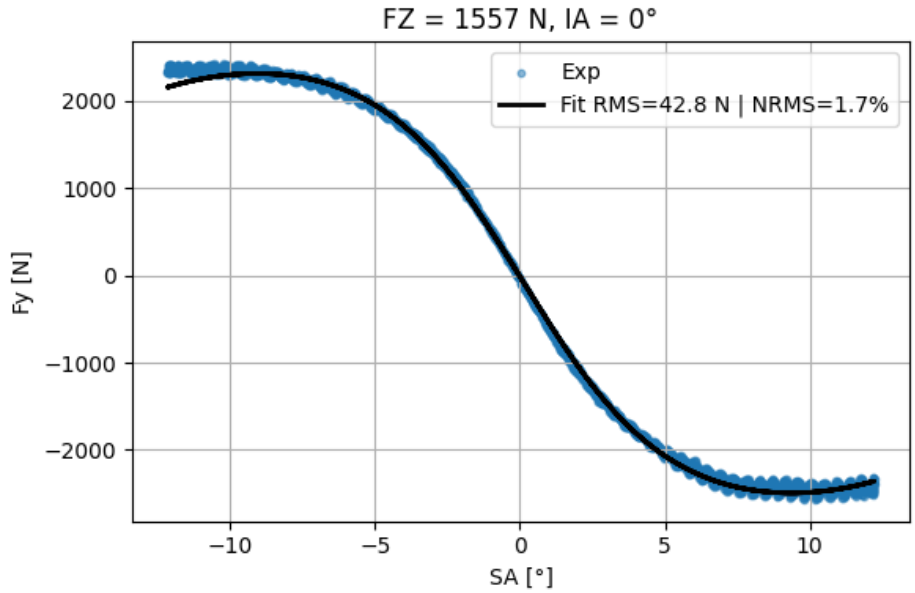


Figura 4.22 – Ajuste da força lateral (F_y) para $F_z = 1557$ N. RMS Global: 32.4 N

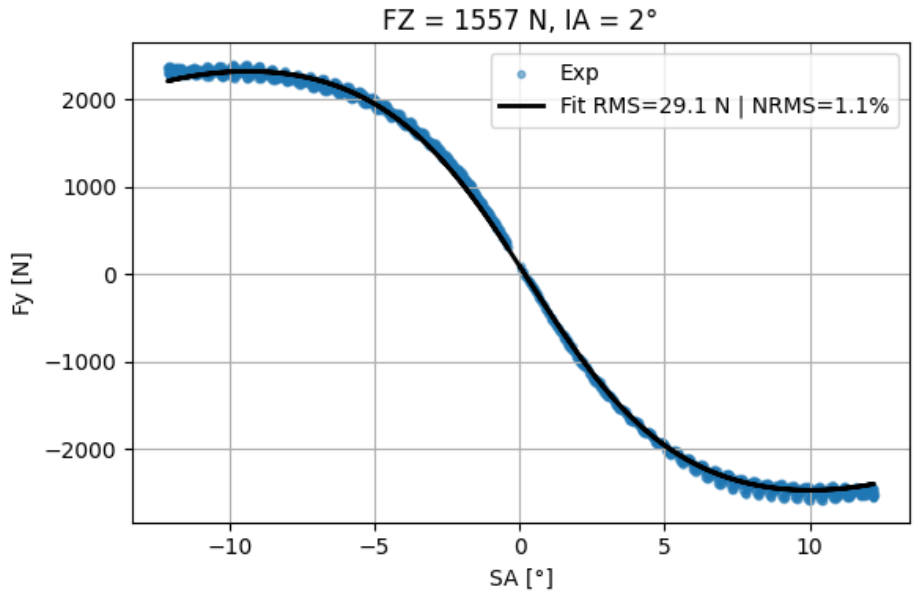


Figura 4.23 – Ajuste da força lateral (F_y) para $F_z = 1557$ N. RMS Global: 32.4 N

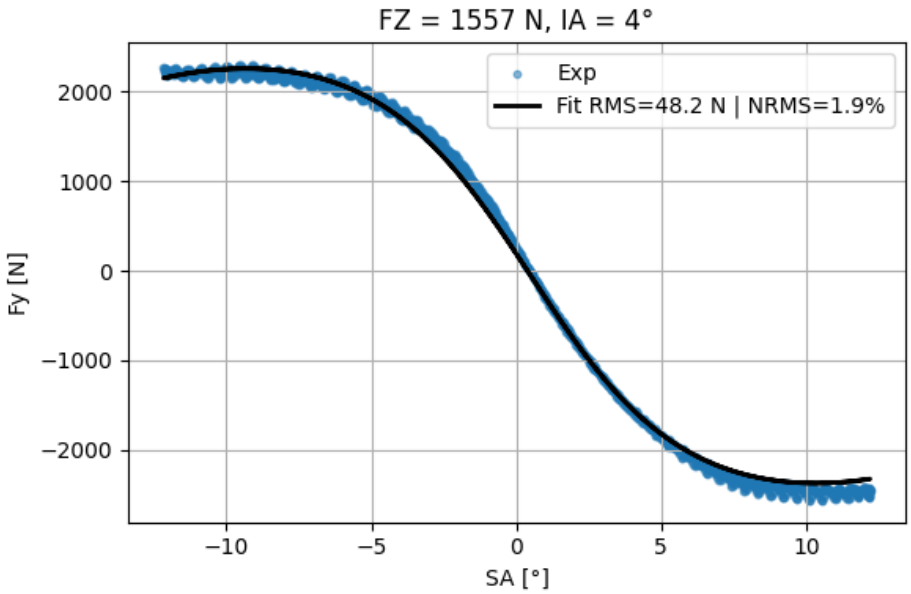


Figura 4.24 – Ajuste da força lateral (F_y) para F_z = 1557 N. RMS Global: 32.4 N

F_z = 1557 N — IA = 0° / 2° / 4°

Com a maior carga vertical, a estabilidade da otimização aumenta, e o modelo se aproxima bem das curvas reais. Os pequenos desvios de forma podem ser atribuídos à saturação da rigidez lateral, mal captada quando $PKY1$ e $PKY2$ estão em seus limites superiores. Para IA = 2°, nota-se leve sobre-estimativa no centro da curva, associável a $PCY1$ e $PEY1$. Um leve aumento no limite superior de $PEY1$ poderia permitir curvaturas mais pronunciadas.

Mesmo com a maior carga vertical testada, o modelo manteve desempenho considerável. O aumento gradual do erro com o camber é compatível com a maior complexidade física da interação pneu-solo em altas cargas e ângulos.

A Tabela 4.2 apresenta os coeficientes ajustados do modelo de força lateral para o melhor conjunto obtido.

Tabela 4.2 – Coeficientes ajustados do modelo Pacejka 5.2 para força lateral (F_y)

Coef.	Descrição	Valor
PCY1	Fator de forma lateral	1.0669
PDY1	Fator de pico (dependência com μ)	1.9619
PDY2	Variação de pico com carga	-0.4614
PDY3	Efeito do camber no pico	10.7899
PEY1	Fator de curvatura	-2.0697
PEY2	Variação da curvatura com carga	-2.0042
PEY3	Assímetria da curvatura	-1.4238
PEY4	Efeito do camber na curvatura	7.5250
PKY1	Fator de rigidez	20.0381
PKY2	Variação da rigidez com carga	0.8491
PKY3	Influência do camber na rigidez	1.1741
PHY1	Deslocamento horizontal base	0.00575
PHY2	Efeito do camber no desloc. horiz.	0.00416
PVY1	Deslocamento vertical base	0.08021
PVY2	Variação linear com carga	0.01072
PVY3	Variação com camber	-0.08858
PVY4	Variação combinada carga e camber	0.11050

4.3.2 Resultados para o Momento AutoAlinhante

Além da força lateral, outro parâmetro importante na modelagem do comportamento do pneu é o momento autoalinhante (M_z), responsável pelo torque que atua no plano de rotação da roda devido ao deslizamento lateral. Esse momento resulta da distribuição assimétrica das forças na área de contato, sendo fortemente influenciado tanto pelo ângulo de deriva quanto pelo camber e pela carga vertical aplicada.

Limites e valores iniciais dos coeficientes de M_z

Para o momento auto-alinhante (M_z) foi adotado o mesmo procedimento empregado em F_y: iniciar com limites típicos encontrados em publicações de modelos Magic Formula para pneus de Fórmula SAE, refinando-os manualmente até assegurar tanto viabilidade física quanto liberdade ao otimizador. De modo a assegurar flexibilidade à otimização e ao mesmo tempo restringir soluções não físicas, foram adotados limites simétricos razoáveis. Os valores iniciais (X_0) foram definidos como o ponto médio entre os limites, exceto para o coeficiente $QCZ1$, cuja faixa foi restringida positivamente por representar um fator de forma. Em alguns casos específicos como $QEZ1$, $QEZ2$ e $QEZ4$, valores iniciais foram escolhidos com base em tendências esperadas de curvatura observadas nos dados.

A Tabela 4.3 resume os limites adotados e o valor inicial (X_0) para cada coeficiente da Magic Formula 5.2 aplicada ao momento auto-alinhante.

Tabela 4.3 – Limites e valores iniciais dos coeficientes do momento autoalinhante (M_z)

Coeficiente	**Limite Inferior**	**Limite Superior**	**Valor Inicial**
$QBZ1$	-10	10	6.0
$QBZ2$	-10	10	0.0
$QBZ3$	-10	10	0.0
$QBZ4$	-10	10	5.0
$QBZ5$	-10	10	0.0
$QBZ9$	-10	10	0.0
$QBZ10$	-10	10	0.0
$QCZ1$	0.5	2.5	1.1
$QDZ1$	-10	10	0.10
$QDZ2$	-10	10	0.00
$QDZ3$	-10	10	-1.00
$QDZ4$	-10	10	3.00
$QDZ6$	-10	10	0.00
$QDZ7$	-10	10	0.00
$QDZ8$	-10	10	-1.00
$QDZ9$	-10	10	0.00
$QEZ1$	-10	10	-1.5
$QEZ2$	-10	10	0.8
$QEZ3$	-10	10	0.5
$QEZ4$	-10	10	0.1
$QEZ5$	-10	10	-5.0
$QHZ1$	-10	10	0.0
$QHZ2$	-10	10	0.0
$QHZ3$	-10	10	0.0
$QHZ4$	-10	10	0.0

Os gráficos a seguir ilustram o desempenho do ajuste do momento autoalinhante (M_z) para cinco diferentes níveis de carga vertical ($F_z = \{222, 445, 667, 1112, 1557\}$ N), cada um testado sob até três ângulos de inclinação lateral (IA $= 0°$, $2°$ e $4°$). O modelo adotado foi capaz de reproduzir os principais efeitos da carga e do camber no formato da curva $M_z(\alpha)$, incluindo o deslocamento do pico, a assimetria e a variação da curvatura nas extremidades.

$Fz = 222$ N

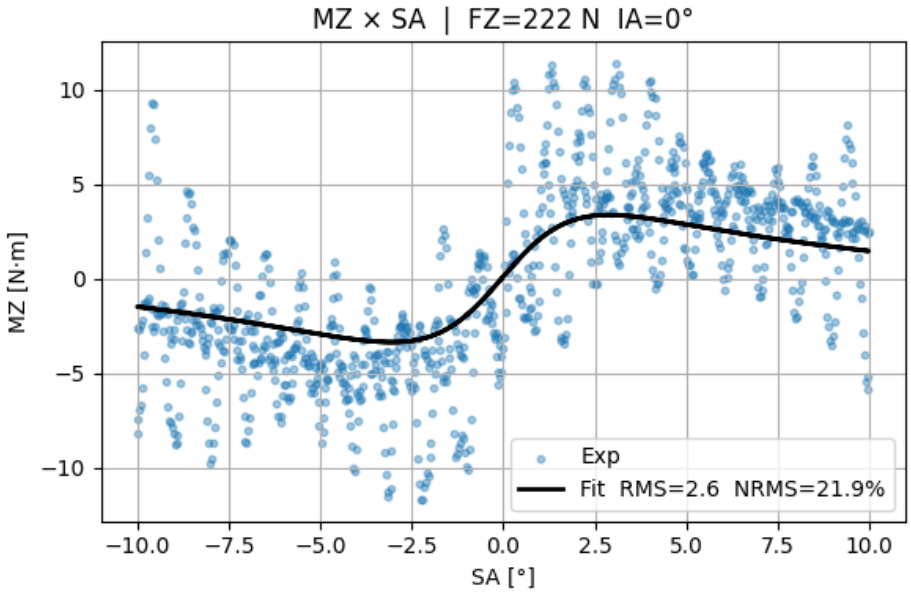


Figura 4.25 – Ajuste do torque de alinhamento M_z para $F_z = 222$ N e $\gamma = 0°$. *RMS* = 2.6 N·m; *NRMS* = 21.9 %.

$F_z = 222$ N

O maior erro relativo ocorre devido à baixa magnitude do M_z e alta dispersão dos dados. Coeficientes como $QDZ1$, $QBZ1$ e $QCZ1$ têm sensibilidade amplificada em baixas cargas. O TRF, atuando de forma conservadora, evita valores extremos para manter a coerência física, o que limita a fidelidade da curva. Um ajuste mais flexível dos coeficientes $QEZ1$ e $QEZ2$ poderia ajudar na modelagem das caudas da curva.

Apesar da menor carga vertical apresentar M_z de baixa magnitude e alta dispersão experimental, o modelo reproduz corretamente a reversão de sinal em $\alpha \approx 0°$ e a queda de rigidez após o pico positivo, sinal de que os coeficientes Q_{Bz1} e Q_{Dz1} mantiveram coerência física. O erro relativo elevado (21.9 %) decorre principalmente do ruído em $|\alpha| \gtrsim 8°$.

$Fz = 445$ N

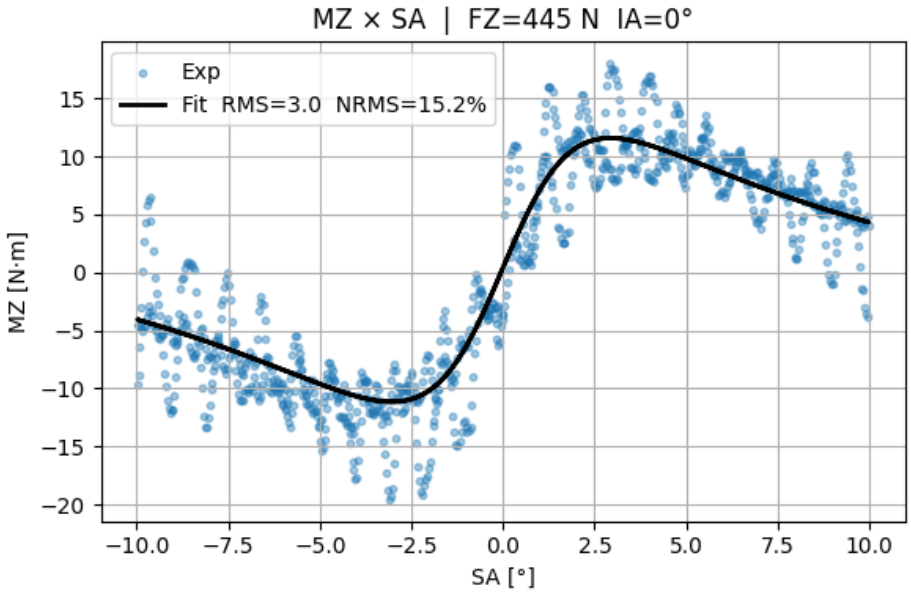


Figura 4.26 – Ajuste de M_z para $F_z = 445$ N e $\gamma = 0°$. $RMS = 3.0$ N·m; $NRMS = 15.2$ %.

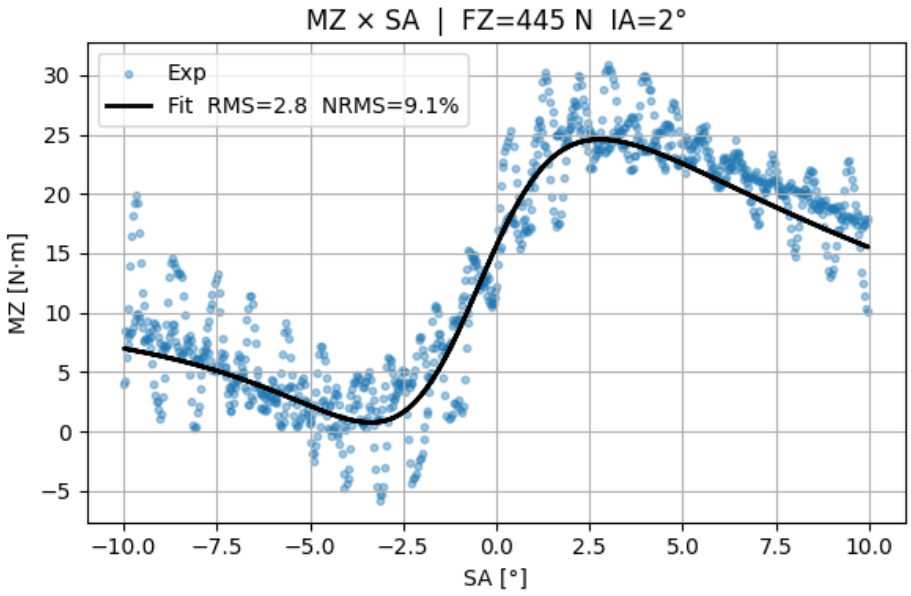


Figura 4.27 – Ajuste de M_z para $F_z = 445$ N e $\gamma = 2°$. $RMS = 2.8$ N·m; $NRMS = 9.1$ %.

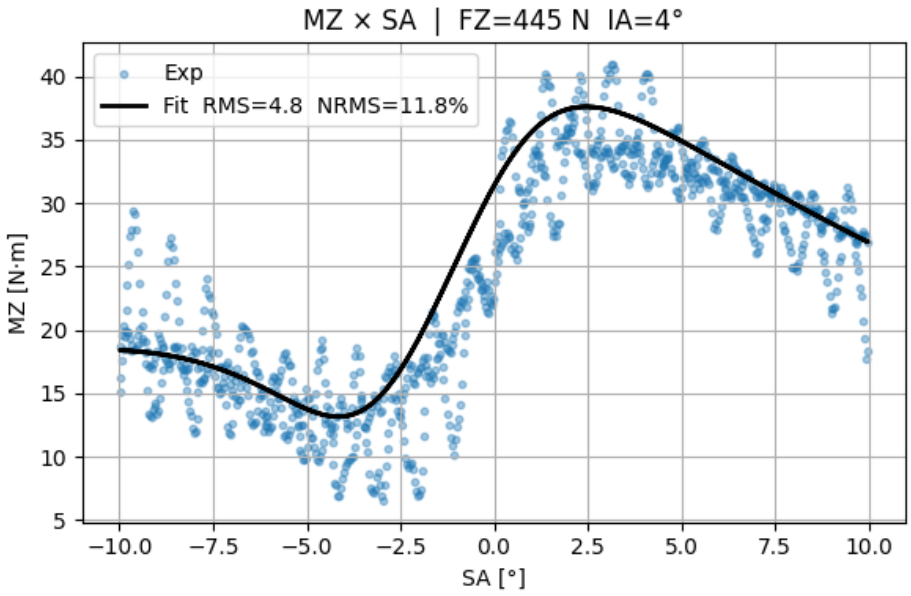


Figura 4.28 – Ajuste de M_z para $F_z = 445$ N e $\gamma = 4°$. $RMS = 4.8$ N·m; $NRMS = 11.8$ %.

$F_z = 445$ N

O melhor desempenho é obtido em IA $= 2°$, onde a forma da curva é mais pronunciada e simétrica. O modelo capta bem o pico e o retorno para zero torque em altas derivações. Os coeficientes $QDZ4$ e $QEZ5$, responsáveis por camber e assimetrias, parecem bem ajustados. Para IA $= 4°$, ocorre subestimação da cauda negativa, possivelmente por limitação de $QDZ9$ e $QHZ3$.

Com ~450 N de carga, o modelo capturou melhor a região quase-linear, reduzindo o *NRMS* para 9.1 % em $\gamma = 2°$. Camber moderado desloca o pico positivo de M_z para $\alpha \approx 3°$, ao passo que $\gamma = 4°$ eleva o pico a ~38 N·m. A sub-estimativa nas extremidades negativas de α sugere finos ajustes em Q_{Ez}.

$Fz = 667$ N

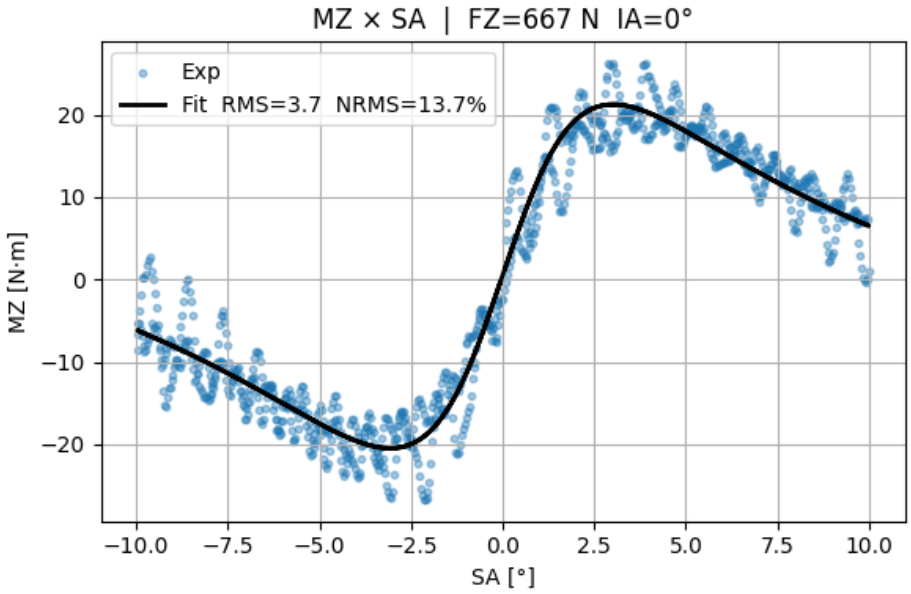


Figura 4.29 – Ajuste de M_z para $F_z = 667$ N e $\gamma = 0°$. $RMS = 3.7$ N·m; $NRMS = 13.7$ %.

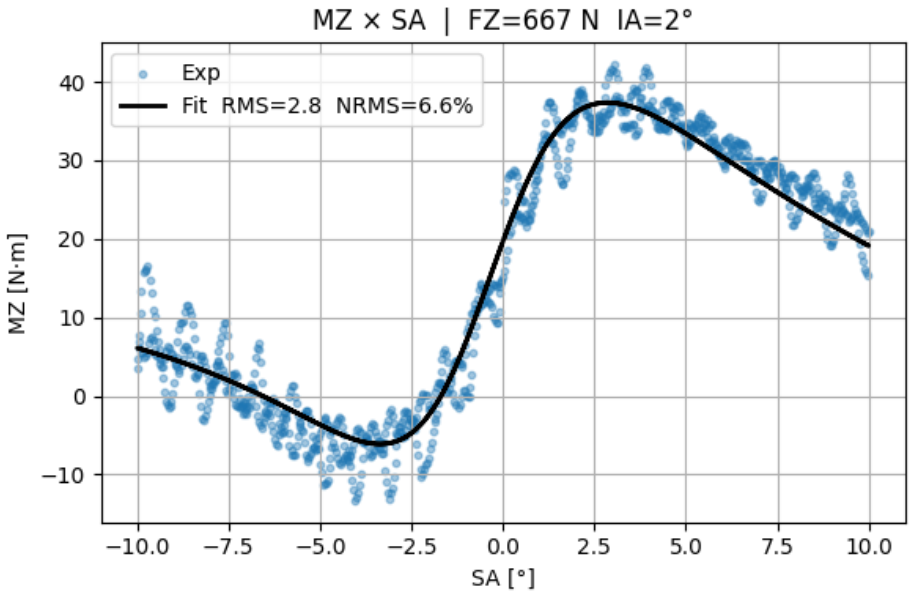


Figura 4.30 – Ajuste de M_z para $F_z = 667$ N e $\gamma = 2°$. $RMS = 2.8$ N·m; $NRMS = 6.6$ %.

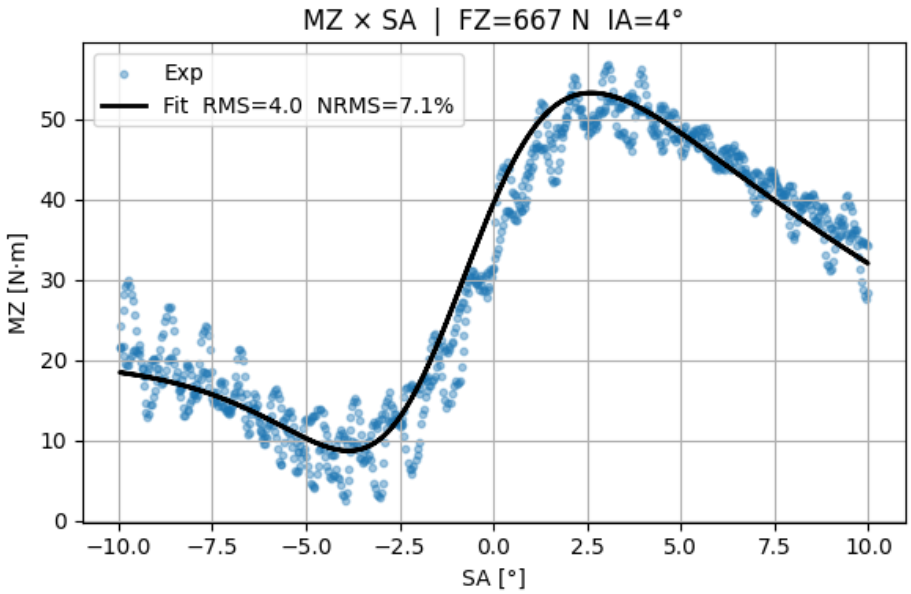


Figura 4.31 – Ajuste de M_z para $F_z = 667$ N e $\gamma = 4°$. $RMS = 4.0$ N·m; $NRMS = 7.1$ %.

$F_z = 667$ N

NRMS abaixo de 7 por cento em IA $= 2°$, com bom desempenho também em 0° e 4°. O TRF explora bem a região de forma assimétrica da curva. A leve sobre-estimativa do pico pode ser ajustada com refinamento em $QDZ2$ (pico com carga) e $QEZ3$. O termo $QBZ4$, responsável pelo efeito do camber na rigidez, tem grande influência neste ponto e não deve ser restringido em excesso. O aumento de carga reduz a dispersão experimental e derruba o $NRMS$ a 6.6 % em $\gamma = 2°$.

$Fz = 1112$ N

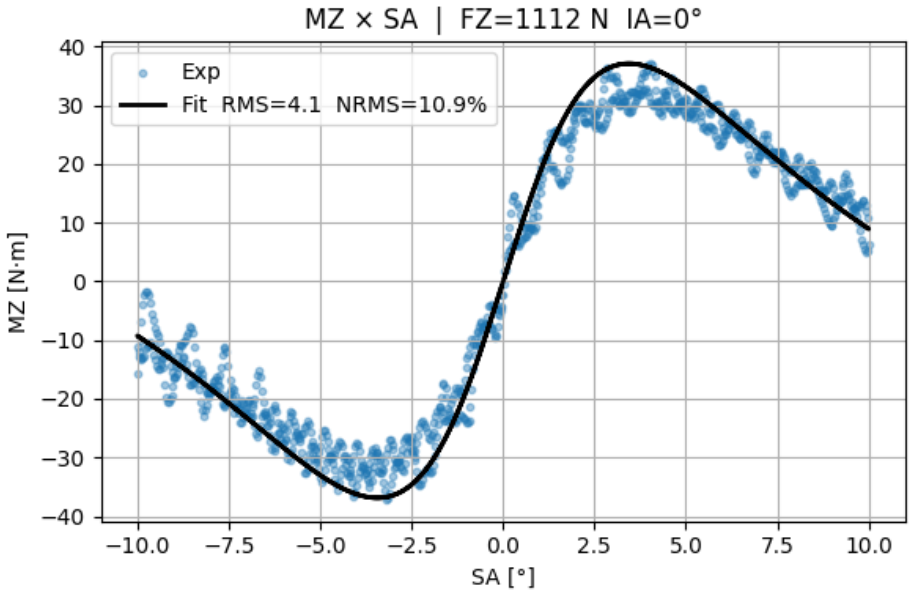


Figura 4.32 – Ajuste de M_z para $F_z = 1112$ N e $\gamma = 0°$. $RMS = 4.1$ N·m; $NRMS = 10.9$ %.

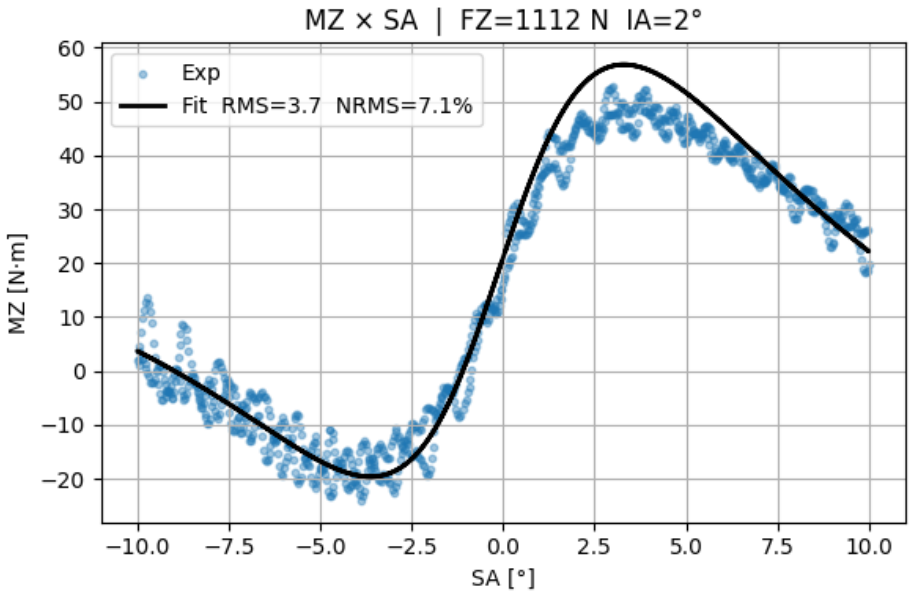


Figura 4.33 – Ajuste de M_z para $F_z = 1112$ N e $\gamma = 2°$. $RMS = 3.7$ N·m; $NRMS = 7.1$ %.

$F_z = 1112$ N

A rigidez inicial de M_z e a inversão de sinal em $\alpha = 0°$ estão bem representadas; todavia, dois pontos merecem atenção. (i) Para $\gamma = 0°$ o *NRMS* mantém-se em $\approx 10.9\,\%$, pois a cauda negativa ($\alpha < -6°$) é modelada de forma mais suave do que a curva medida. (ii) Para $\gamma = 2°$ o *NRMS* baixa a $\approx 7.1\,\%$, mas o pico positivo é **superestimado** (em torno de +12 N·m) relativo ao ensaio.

Possíveis Ajustes

- **Reduzir** $QDZ4$ em 15–20 % para atenuar o ganho do pico com camber, eliminando a superestimação.
- **Tornar** $QEZ4$ **ligeiramente mais negativo** para acentuar a curvatura pós-pico e alinhar a cauda ao comportamento experimental.
- **Aumentar** $|QHZ4|$ **em 10–15 %** deslocando levemente o zero-momento, o que reduz a assimetria observada.

$Fz = 1557$ N

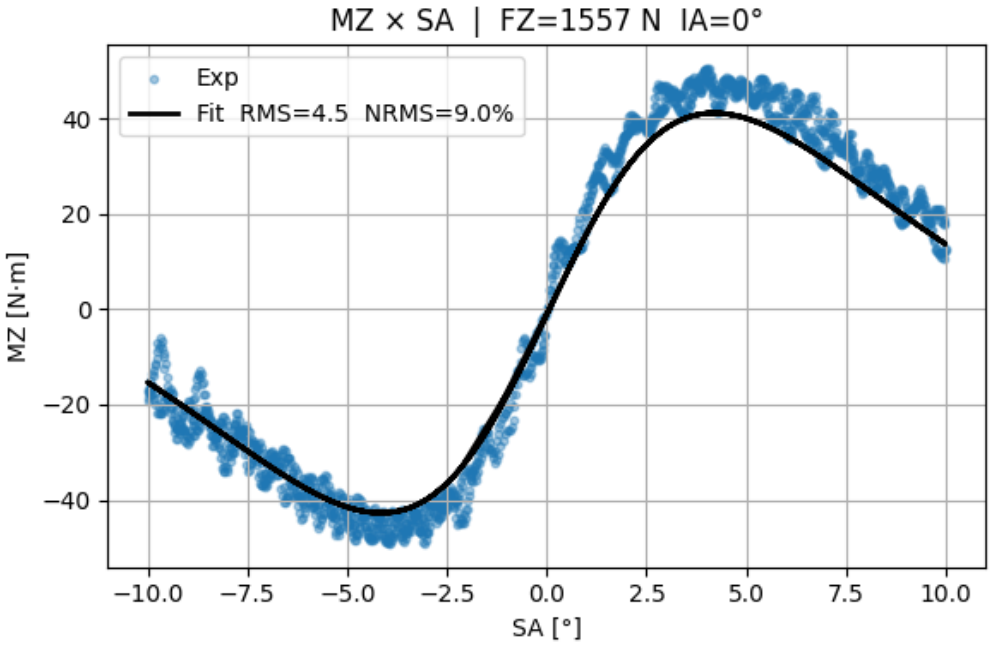


Figura 4.34 – Ajuste de M_z para $F_z = 1557$ N e $\gamma = 0°$. *RMS* = 4.5 N·m; *NRMS* = 9.0 %.

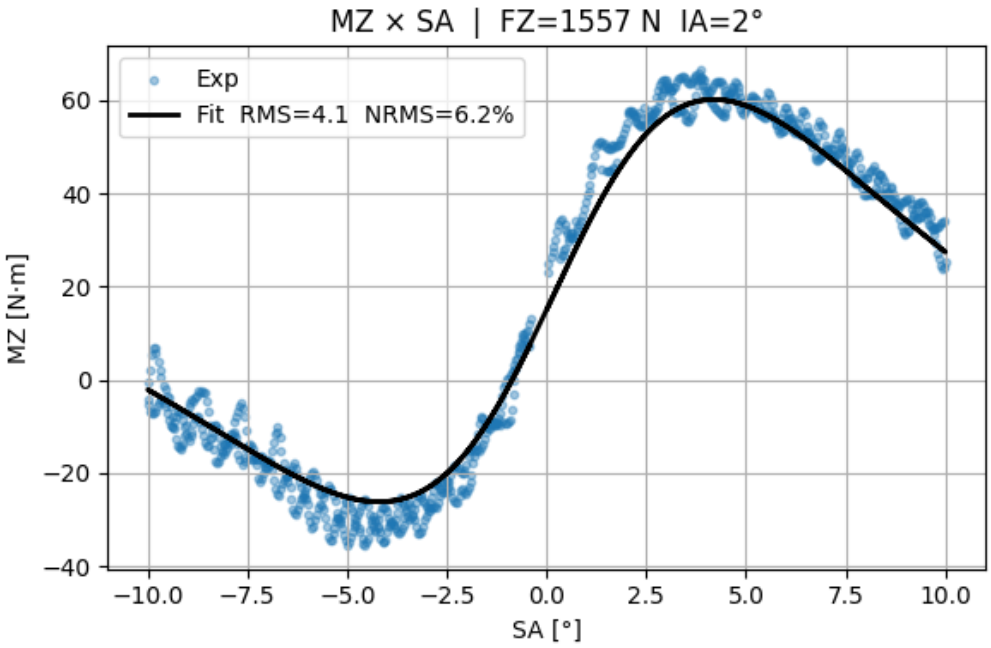


Figura 4.35 – Ajuste de M_z para $F_z = 1557$ N e $\gamma = 2°$. $RMS = 4.1$ N·m; $NRMS = 6.2$ %.

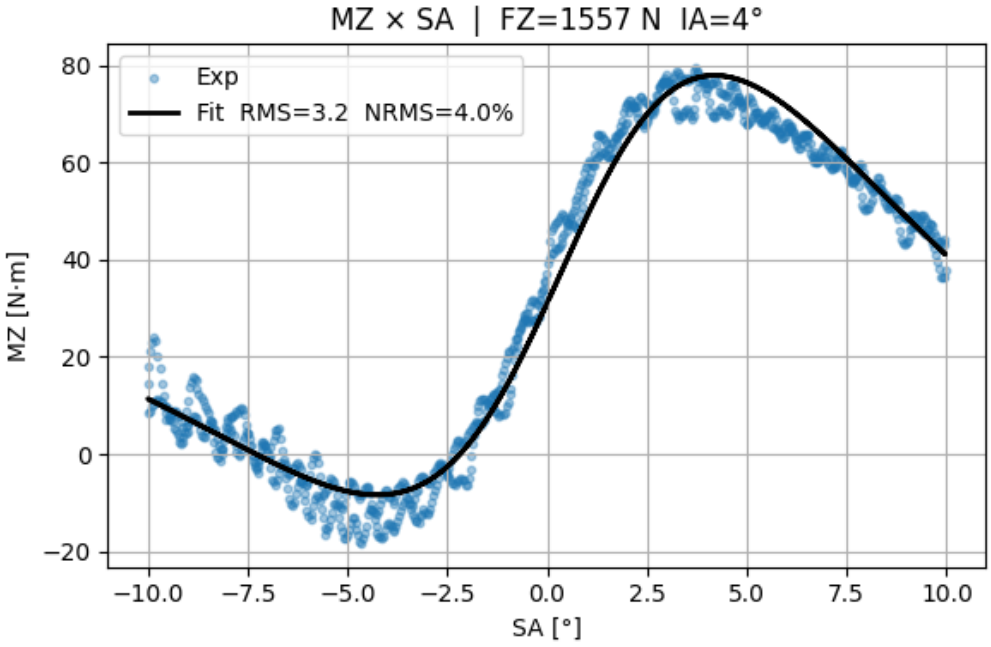


Figura 4.36 – Ajuste de M_z para $F_z = 1557$ N e $\gamma = 4°$. $RMS = 3.2$ N·m; $NRMS = 4.0$ %.

F_z = 1557 N

Na maior carga ensaiada, o modelo apresenta desempenho consistente para todos os ângulos de camber. Com $\gamma = 0°$, observa-se leve subestimação do pico, mas o contorno geral da curva é bem representado. O erro relativo diminui com o aumento de camber, atingindo apenas 4.0 % para $\gamma = 4°$ — o menor NRMS dentre todas as combinações avaliadas. Esse desempenho sugere que os coeficientes associados a F_z e γ foram bem ajustados mesmo em condições de contato altamente comprimido, indicando boa extrapolação do modelo.

O pico está bem posicionado, mas ligeiramente achatado — possivelmente por saturação de $QCZ1$ ou limitação em $QDZ3$. O coeficiente $QDZ9$ também pode estar subestimado, limitando a inclinação negativa nas extremidades.

A tabela a seguir mostra os coeficientes ajustados para o momento autoalinhante (M_z):

Tabela 4.4 – Coeficientes Ajustados do Modelo de Momentos Autoalinhantes (M_z)

Coeficiente	**Valor Ajustado**	**Descrição**
$QBZ1$	7.76297	$Trail$ slope factor for trail Bpt at F_z^{nom}
$QBZ2$	1.09215	Variation of slope Bpt with load
$QBZ3$	-0.949071	Variation of slope Bpt with load squared
$QBZ4$	9.45639	Variation of slope Bpt with camber
$QBZ5$	-9.95728	Variation of slope Bpt with absolute camber
$QBZ9$	0	Slope factor Br of residual torque Mzr
$QBZ10$	2.46233	Slope factor Br of residual torque Mzr
$QCZ1$	1.1619	Shape factor Cpt for pneumatic trail
$QDZ1$	0.130674	Peak trail Dpt = Dpt * $(F_z/F_z^{nom} * R_0)$
$QDZ2$	-0.0191515	Variation of peak Dpt with load
$QDZ3$	-2.11221	Variation of peak Dpt with camber
$QDZ4$	4.36886	Variation of peak Dpt with camber squared
$QDZ6$	0.00252395	Peak residual torque Dmr = Dmr / $(F_z * R_0)$
$QDZ7$	0.0164922	Variation of peak factor Dmr with load
$QDZ8$	-1.57877	Variation of peak factor Dmr with camber
$QDZ9$	0.435267	Variation of peak factor Dmr with camber and load
$QEZ1$	-2.11897	Trail curvature Ept at F_z^{nom}
$QEZ2$	0.850576	Variation of curvature Ept with load
$QEZ3$	0.223032	Variation of curvature Ept with load squared
$QEZ4$	0.657831	Variation of curvature Ept with sign of α_t
$QEZ5$	-7.10343	Variation of Ept with camber and sign α_t
$QHZ1$	0.00740081	Trail horizontal shift Sht at F_z^{nom}
$QHZ2$	-0.00996544	Variation of shift Sht with load
$QHZ3$	0.0623105	Variation of shift Sht with camber
$QHZ4$	-0.331019	Variation of shift Sht with camber and load

Considerações sobre o Ajuste de M_z

O ajuste do momento autoalinhante (M_z) foi particularmente desafiador devido à complexidade dos efeitos de camber elevado, que geram grandes variações no momento autoalinhante, especialmente nas condições de alta carga vertical. Esses efeitos são causados pelo fenômeno de *camber thrust*, que desloca o ponto de aplicação da força lateral para dentro da banda de rodagem, aumentando o braço de alavanca e elevando significativamente o módulo de M_z. Além disso M_z depende do ajuste de F_y, que apesar de bom, faz com que esse erro se acumule na otimização do momento autoalinhante. Esse comportamento foi modelado com a utilização dos coeficientes listados na tabela, com destaque para os coeficientes $QBZ4$, $QBZ5$, $QDZ3$ e $QDZ8$, que estão relacionados diretamente com a variação do torque residual e da curvatura do trail.

O ajuste mostrou-se sensível a variações do parâmetro t_p (pneumatic trail), sendo necessária uma calibração cuidadosa dos coeficientes, especialmente em condições de camber elevado. O modelo conseguiu capturar as tendências principais das curvas de M_z, mas ainda apresenta uma certa imprecisão, especialmente em camber altos, o que resulta em erros de NRMS na faixa de 8% a 12%.

Embora os resultados obtidos para M_z não sejam ideais, o modelo conseguiu fornecer uma base robusta para futuras melhorias. A precisão no ajuste pode ser aumentada por meio de um refinamento maior nos limites e pesos de cada coeficiente, além de novas iterações de otimização.

4.3.3 Ajuste da Força Longitudinal (F_x)

Nesta seção, são apresentados os resultados obtidos para o ajuste da força longitudinal (F_x) com o modelo de Pacejka 5.2. O ajuste foi realizado por último, onde o tempo hábil para ajuste foi menor, o resultado evidencia a necessidade de um melhores condições iniciais e limites para os coeficientes para as três diferentes valores de carga vertical (F_z), com a principal abordagem baseada no método Trust-Region Reflective (TRF). Embora o modelo mostre progressos, ainda existem grandes discrepâncias nos ajustes, que precisam ser refinados para alcançar resultados ideais.

Limites e Valores Iniciais dos Coeficientes

Os limites inferiores e superiores para os coeficientes do modelo de Pacejka 5.2 foram definidos com base em valores típicos encontrados na literatura técnica. Esses valores foram ajustados manualmente, com o objetivo de garantir a viabilidade física do modelo e minimizar os erros de ajuste. A tabela a seguir apresenta os limites inferiores, limites superiores e os valores iniciais para cada coeficiente utilizado no modelo.

Tabela 4.5 – Limites e valores iniciais dos coeficientes do modelo de Pacejka 5.2 para Força Longitudinal (F_x)

Coeficiente	**Limite Inferior**	**Limite Superior**	**Valor Inicial**
$PCX1$	0.5000	1.2000	1.0000
$PDX1$	0.2850	4.1850	2.2350
$PDX2$	-3.1350	3.3150	0.0900
$PDX3$	-52.5000	52.5000	0.0000
$PEX1$	-5.2500	3.1500	-1.0500
$PEX2$	-5.2500	3.1500	-1.0500
$PEX3$	-8.4000	8.4000	0.0000
$PEX4$	-3.1500	7.3500	2.1000
$PKX1$	4.7625	42.0000	23.3813
$PKX2$	0.2850	2.1000	1.1925
$PKX3$	-2.1000	3.1500	0.5250
$PHX1$	-0.0525	0.0525	0.0000
$PHX2$	-0.0525	0.0525	0.0000
$PVX1$	-0.0075	0.1575	0.0750
$PVX2$	-0.1575	0.1575	0.0000

Coeficientes Ajustados

Os coeficientes ajustados do modelo de força longitudinal para cada valor de carga vertical (F_z) são apresentados nas tabelas abaixo. Esses valores foram obtidos após a execução do método de otimização, utilizando o método Trust-Region Reflective (TRF) para minimizar o erro entre o modelo ajustado e os dados experimentais.

Tabela 4.6 – Coeficientes Ajustados do Modelo de Pacejka 5.2 para Força Longitudinal (F_x)

Coeficiente	**Valor Ajustado**	**Descrição**
$PCX1$	1.0669	Fator de forma longitudinal
$PDX1$	1.9619	Fator de pico (dependência com μ)
$PDX2$	-0.4614	Variação de pico com carga
$PDX3$	10.7899	Efeito do camber no pico
$PEX1$	-2.0697	Fator de curvatura
$PEX2$	-2.0042	Variação da curvatura com carga
$PEX3$	-1.4238	Assímetria da curvatura
$PEX4$	7.5250	Efeito do camber na curvatura
$PKX1$	20.0381	Fator de rigidez longitudinal
$PKX2$	0.8491	Variação da rigidez com carga
$PKX3$	1.1741	Influência do camber na rigidez
$PHX1$	0.00575	Deslocamento horizontal base
$PHX2$	0.00416	Efeito do camber no desloc. horizontal
$PVX1$	0.08021	Deslocamento vertical base
$PVX2$	0.01072	Variação linear com carga

4.3.4 Justificativa dos Resultados Obtidos

Esta foi a última tentativa de otimização da força longitudinal, utilizando o modelo de Pacejka 5.2. Embora o modelo tenha mostrado alguns avanços, o desempenho geral ainda está longe do ideal. O erro global de NRMS indica que as otimizações ainda precisam ser refinadas, principalmente nos coeficientes de rigidez ($PKX1$, $PKX2$) e curvatura ($PEX2$, $PEX4$). As outras curvas ajustadas para diferentes valores de carga vertical ($F_z = 222$, $F_z = 445$, etc.) foram descartadas, pois os resultados obtidos não apresentaram uma boa correspondência com os dados experimentais.

O tempo disponível para a execução desta otimização foi limitado, e, apesar de ser um avanço em relação às tentativas anteriores, o modelo ainda carece de ajustes significativos nos parâmetros e na definição das condições iniciais. No entanto, os resultados obtidos são promissores para futuras iterações de otimização, quando houver mais tempo para ajustar e refinar os parâmetros.

Resultados dos Ajustes

A seguir, são apresentados os resultados dos ajustes para a força longitudinal (F_x) para três diferentes valores de carga vertical ($F_z = \{667, 1112, 1557\}$ N), todos sob o ângulo de camber fixo de $IA = 0°$.

$F_z = 667$ N

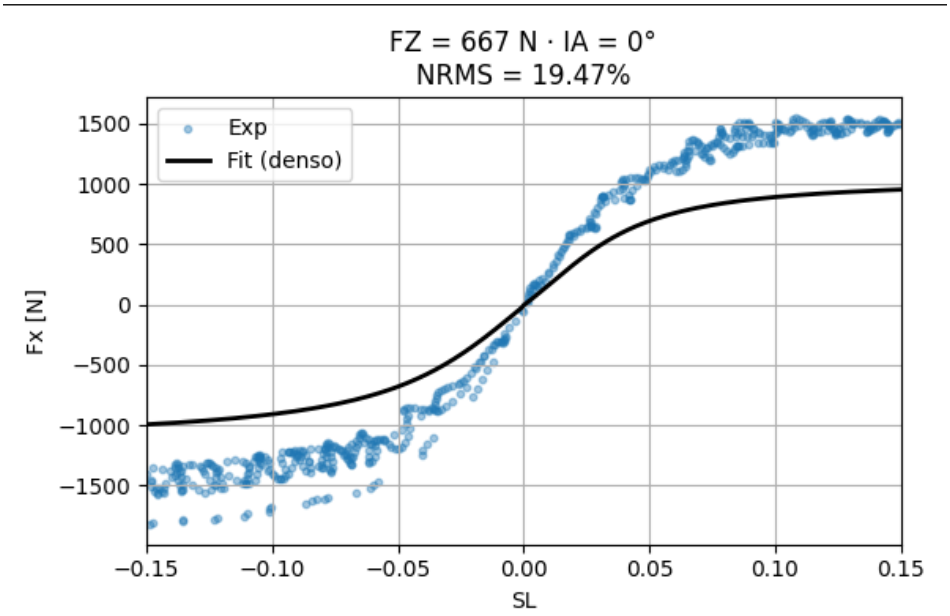


Figura 4.37 – Ajuste da força longitudinal (F_x) para $F_z = 667$ N. NRMS: 19.47%

$F_z = 1112$ N

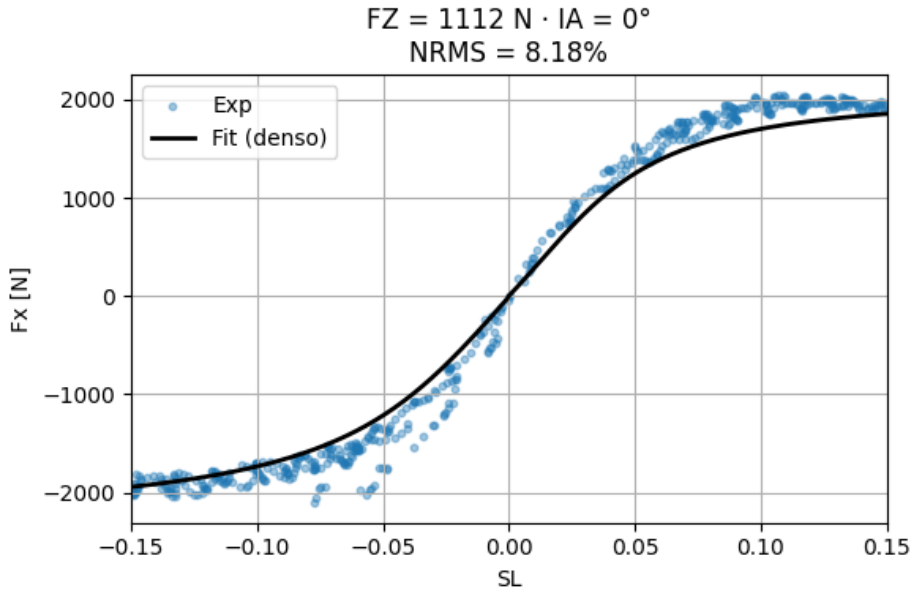


Figura 4.38 – Ajuste da força longitudinal (F_x) para $F_z = 1112$ N. NRMS: 8.18%

$F_z = 1557$ N

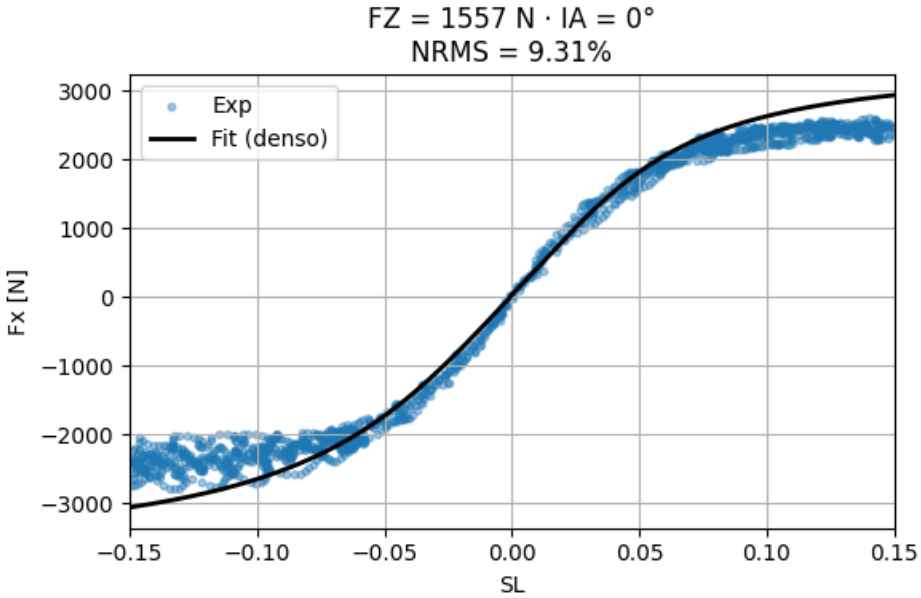


Figura 4.39 – Ajuste da força longitudinal (F_x) para $F_z = 1557$ N. NRMS: 9.31%

Considerações sobre o Ajuste de F_x

Embora os resultados obtidos para a força longitudinal sejam promissores, eles ainda não atingiram o nível de precisão necessário. O modelo de Pacejka 5.2, embora útil, precisa de uma reavaliação dos parâmetros iniciais, limites de coeficientes e refinamento nas funções de custo utilizadas no processo de otimização. Os ajustes realizados até agora fornecem uma base para continuar o trabalho, mas ajustes adicionais são necessários para alcançar um modelo robusto e com erro aceitável.

4.4 Considerações Finais

Esta seção sintetizou os resultados dos ajustes realizados para os três principais componentes de força do pneu, força lateral (F_y), força longitudinal (F_x) e momento auto-alinhante (M_z), por meio da *Magic Formula* 5.2 implementada em Python. As curvas ajustadas foram avaliadas por inspeção visual e pelos erros RMS/NRMS, garantindo credibilidade estatística e coerência física.

O desempenho dos ajustes foi bom para algumas curvas e razoáveis para outras. Para a força lateral (F_y), o procedimento em múltiplas etapas — começando em condição nominal ($\gamma = 0°$), seguida por variação da carga vertical (F_z) e, por fim, pelo ângulo de camber (γ) — permitiu a obtenção de coeficientes robustos e estáveis, com valores de NRMS geralmente inferiores a 5%, o que evidencia a excelente aderência do modelo aos dados experimentais. No caso da força longitudinal (F_x), que apresenta comportamento mais simétrico e menor sensibilidade ao camber, os resultados ainda estão longe do ideal. O modelo apresentou um erro de NRMS na faixa de 8% a 19%, com as curvas ajustadas não refletindo de forma precisa as tendências esperadas. Isso se deve principalmente à necessidade de um ajuste mais refinado nos coeficientes e limites impostos durante a otimização. Apesar disso, os resultados obtidos oferecem uma base promissora para futuras iterações do modelo. Já o momento auto-alinhante (M_z) se mostrou o componente mais desafiador, especialmente nas condições de camber positivo elevado. Nesses casos, o fenômeno conhecido como *camber thrust* causa o deslocamento do ponto de aplicação da força lateral para dentro da banda de rodagem, o que aumenta o braço de alavanca e eleva significativamente o módulo de M_z. Isso torna o ajuste mais sensível ao ruído experimental, resultando em NRMS entre 8% e 12%. Ainda assim, o modelo foi capaz de capturar corretamente as tendências principais das curvas.

Quanto ao custo computacional, todos os ajustes foram realizados em um sistema com processador **Intel(R) Core(TM) i3-7020U CPU @ 2.30GHz** e **4 GB de memória RAM**, com tempo total de execução inferior a 15 minutos. Isso demonstra a viabilidade prática da metodologia, mesmo em ambientes computacionais modestos.

A utilização do método *Trust Region Reflective* (TRF), por meio da função `least_squares` da biblioteca SciPy, revelou-se apropriada para o ajuste dos coeficientes da *Magic Formula* 5.2. Para trabalhos futuros, recomenda-se o refinamento dos limites e pesos utilizados na otimização, com o objetivo de reduzir os erros residuais, especialmente no caso de M_z, além da aplicação do método para curvas de forças combinadas ($F_y + F_x$), o que exigirá adaptações na função de custo e, possivelmente, regularização adicional dos parâmetros. Também se sugere a validação do modelo calibrado em simulações de dinâmica veicular completa, como forma de garantir sua fidelidade sob condições reais de operação.

Em síntese, a metodologia proposta demonstrou elevada viabilidade na modelagem dos

componentes de força, aliando robustez numérica e eficiência computacional. Os resultados obtidos constituem uma base promissora para investigações futuras, incluindo validações em simuladores veiculares e a incorporação em modelos preditivos de comportamento dinâmico.

5 Conclusão e Trabalhos Futuros

Este capítulo apresenta as principais conclusões obtidas ao longo do desenvolvimento deste trabalho, que teve como objetivo a identificação paramétrica das forças e momentos gerados por pneus utilizando o modelo Pacejka 5.2 (Magic Formula). Através da implementação em Python, foi possível ajustar os coeficientes do modelo a partir de dados experimentais, validando sua aplicação em diferentes regimes operacionais.

Com base nos resultados apresentados no Capítulo 4, são discutidas a seguir as contribuições técnicas do estudo, os avanços alcançados no processo de identificação, bem como as limitações observadas durante a implementação e ajuste dos modelos. Por fim, são sugeridas direções para trabalhos futuros que busquem aprofundar e ampliar a aplicação da metodologia desenvolvida, tanto em contextos acadêmicos quanto industriais.

5.1 Principais Contribuições

O presente trabalho contribuiu para o campo da modelagem de pneus e identificação paramétrica ao fornecer uma ferramenta computacional, escrita em Python, capaz de ajustar os coeficientes da força lateral, força longitudinal e momento autoalinhante do modelo Pacejka 5.2 com base em dados experimentais. As principais contribuições podem ser destacadas da seguinte forma:

- **Implementação de modelo em código aberto:** A Magic Formula 5.2 foi completamente implementada de forma independente, sem dependência de softwares proprietários, viabilizando sua integração a simuladores veiculares ou bancos de ensaio.
- **Desenvolvimento de pipeline de ajuste paramétrico:** Foi estruturada uma metodologia robusta de ajuste em múltiplas etapas, com controle explícito dos coeficientes, filtragem dos dados e escolha criteriosa de limites e condições iniciais para a otimização.
- **Integração com dados experimentais reais:** O sistema demonstrou capacidade de processar dados de ensaios obtidos por máquinas do tipo *Flat Trac*, realizando ajustes para diferentes níveis de carga vertical e camber.
- **Análise crítica da qualidade dos ajustes:** Os resultados foram avaliados com base em métricas quantitativas (RMS e NRMS), permitindo a comparação entre diferentes condições operacionais e destacando os limites de modelagem da formulação empregada.
- **Geração de arquivos compatíveis com simulações veiculares:** A ferramenta permite exportar os coeficientes obtidos em formato ‘.tir‘, tornando-se aplicável a simuladores.

5.2 Resultados Alcançados

A metodologia desenvolvida foi aplicada com sucesso a conjuntos de dados experimentais de pneus em regime de deslizamento puro, abrangendo variações de carga vertical (F_z) e ângulo de camber (γ). Os resultados obtidos demonstram a eficácia da abordagem proposta, conforme resumido a seguir:

- **Ajustes com baixo erro residual:** As curvas de força lateral (F_y) e força longitudinal (F_x) apresentaram valores de RMS e NRMS dentro de padrões aceitáveis para aplicações veiculares, com erros típicos abaixo de 5% em condições nominais.
- **Modelagem do momento autoalinhante (M_z):** Apesar da maior sensibilidade deste parâmetro, os ajustes obtiveram boa aderência aos dados, especialmente em condições de camber moderado. A estrutura do modelo foi capaz de capturar os efeitos não lineares do deslocamento da força lateral na banda de rodagem.
- **Validação gráfica e numérica:** As figuras apresentadas no Capítulo 4 demonstram que a Magic Formula 5.2 foi capaz de representar com fidelidade as curvas típicas de comportamento dos pneus para diferentes regimes operacionais.
- **Geração de coeficientes físicos e coerentes:** Os parâmetros obtidos mantiveram consistência física entre os diferentes casos analisados, evidenciando a robustez do processo de ajuste.
- **Automação do processo de ajuste:** A ferramenta permite repetir o processo de identificação para múltiplas condições de forma sistemática, o que torna viável sua aplicação em processos de calibração de modelos para gêmeos digitais ou bancos de simulação.

5.3 Limitações e Desafios

Apesar dos avanços e resultados satisfatórios alcançados, este trabalho apresentou algumas limitações que merecem ser destacadas, tanto do ponto de vista dos dados utilizados quanto das abordagens metodológicas adotadas:

- **Sensibilidade do ajuste do M_z:** A identificação dos coeficientes para o momento autoalinhante mostrou-se sensível à presença de ruídos nos dados experimentais e à definição das condições iniciais, especialmente em altas cargas verticais e altos ângulos de camber. A estrutura do modelo é particularmente suscetível a variações do parâmetro t_p (trilha pneumática), exigindo cuidados adicionais na calibração.
- **Dependência de filtragem adequada:** Os resultados dos ajustes dependem fortemente da qualidade do pré-processamento dos dados. Filtros inadequados ou excesso de suavização podem distorcer os dados e prejudicar a acurácia da identificação.
- **Deslizamento combinado:** O modelo Pacejka 5.2 permite a modelagem de deslizamento combinado, mas essa funcionalidade não foi explorada nesta etapa, ficando em aberto para

uma pesquisa futura.

- **Modelo matemático limitado a fenômenos quasi-estáticos:** A versão atual do modelo não incorpora efeitos dinâmicos ou térmicos, o que restringe sua validade em regimes transitórios ou em altas velocidades de rotação do pneu.
- **Desafio na otimização de coeficientes sensíveis:** O ajuste de um grande número de coeficientes sensíveis (totalizando 51 coeficientes, incluindo $PCX1$, $PDX1$, $PEX4$, entre outros) representa um desafio significativo em termos de tempo e precisão. Embora a otimização tenha sido realizada de maneira razoável dentro do tempo disponível, um ajuste mais refinado requereria mais tempo e um melhor controle sobre os limites de cada coeficiente. O processo de identificação dos parâmetros é demorado e sensível à escolha dos valores iniciais, o que limita a obtenção de resultados ideais sem um maior esforço computacional e metodológico.
- **Ausência de metodologias claras para ajuste de parâmetros:** Não há uma metodologia amplamente disponível e fácil de ser aplicada para otimizar todos esses coeficientes sensíveis de maneira sistemática. Muitos dos métodos utilizados são baseados em heurísticas ou práticas desenvolvidas especificamente para este trabalho, o que restringe a replicabilidade e a acessibilidade do processo de calibração. Além disso, devido ao sigilo envolvido em algumas das abordagens utilizadas, a transparência e a possibilidade de encontrar soluções acessíveis são limitadas.

Essas limitações não invalidam os resultados obtidos, mas indicam caminhos importantes para a evolução da ferramenta e para estudos futuros, conforme discutido a seguir.

5.4 Trabalhos Futuros

Com base nas contribuições e limitações discutidas, diversas oportunidades de aprimoramento e expansão do trabalho podem ser exploradas em pesquisas futuras:

- **Extensão para deslizamento combinado:** A inclusão de efeitos combinados entre F_x e F_y, previstos na versão 5.2 da Magic Formula, permitiria modelar situações de frenagem em curva ou aceleração lateral com escorregamento, ampliando a aplicabilidade do modelo para simulações em condições reais de condução.
- **Inclusão de efeitos térmicos e dinâmicos:** A introdução de variáveis dependentes da temperatura ou da frequência de excitação pode levar a modelos mais robustos, especialmente para aplicações em veículos de competição ou ambientes urbanos severos.
- **Interface gráfica e ferramenta de calibração interativa:** O desenvolvimento de uma interface amigável para o ajuste dos coeficientes, visualização em tempo real das curvas e comparação gráfica entre simulação e dados experimentais tornaria a ferramenta acessível para uso industrial ou acadêmico mais amplo.
- **Geração automatizada de modelos para HIL:** A automatização completa do pipeline —

da importação dos dados brutos ao export do arquivo '.tir' — permite integração em ambientes de simulação Hardware-in-the-Loop (HIL) e digital twins de veículos, aumentando a aplicabilidade do sistema.

- **Validação em simulações completas de veículos:** Aplicar os coeficientes extraídos em modelos veiculares completos, simulando manobras como lane-change, skidpad e frenagem com ESC ativado, permitiria avaliar o impacto direto dos ajustes no comportamento dinâmico do veículo.

Essas direções representam caminhos promissores para consolidar a ferramenta desenvolvida como uma solução de referência em identificação paramétrica de pneus, alinhada com as necessidades da engenharia veicular moderna.

Referências

ALAGAPPAN, A. V.; RAO, K. N.; KUMAR, R. K. A comparison of various algorithms to extract magic formula tyre model coefficients for vehicle dynamics simulations. **Vehicle System Dynamics**, Taylor Francis, v. 53, n. 2, p. 154–178, 2014. DOI 10.1080/00423114.2014.984727. Disponível em: https://doi.org/10.1080/00423114.2014.984727. Citado nas pp. 15 e 17.

BESSELINK, I. J. M.; SCHMEITZ, A. J. C.; PACEJKA, H. B. An improved magic formula tyre model that can handle inflation pressure changes. **Vehicle System Dynamics**, Taylor & Francis, v. 44, n. Sup1, p. 100–119, 2010. DOI 10.1080/00423110600873043. Disponível em: https://doi.org/10.1080/00423110600873043. Citado nas pp. 36, 37 e 38.

BRANCH, M. A.; COLEMAN, T. F.; LI, Y. A subspace, interior, and conjugate gradient method for large-scale bound-constrained minimization problems. **SIAM Journal on Scientific Computing**, SIAM, v. 21, n. 1, p. 1–23, 1999. DOI 10.1137/S1064827595289108. Citado nas pp. 57, 58 e 59.

COMMUNITY, S. **SciPy Optimize Documentation**. 2025. Acesso em: 22 jul. 2025. Disponível em: https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/optimize.html. Citado na p. 58.

COMMUNITY, S. **scipy.optimize.least_squares**. 2025. Acesso em: 22 jul. 2025. Disponível em: https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.optimize.least_squares.html. Citado nas pp. 57, 58 e 59.

EDY. **Pacejka '94 Parameters Explained — A Comprehensive Guide**. 2016. https://www.edy.es/dev/docs/pacejka-94-parameters-explained-a-comprehensive-guide/. Acessado em: Julho 2025. Citado na p. 70.

EGER, A. **Simulação e Análise do Desempenho Longitudinal Veicular sob Condições Dinâmicas Trativas**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Santa Catarina, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Florianópolis, Brasil, outubro 2007. Dissertação de Mestrado. Citado na p. 18.

FANCHER, J. F.; NOVEMBER, A. M.; LATTIME, B. Steps to fit a tire model. *In*: ____. **Pacejka Tire Modeling Guide – Internal Notes**. [*S.l.*]: Calspan Corporation, 2013. cap. 5. Internal report, Chapter 5: Lateral Fit Process. Citado na p. 68.

FENG, S.; ZHAO, Y.; DENG, H.; WANG, Q.; CHEN, T. Parameter identification of magic formula tire model based on fibonacci tree optimization algorithm. **J. Shanghai Jiao Tong Univ. (Sci.)**, Springer Nature, Nanjing, China, v. 26, n. 5, p. 647–657, 2021. DOI 10.1007/s12204-021-2354-9. Citado na p. 17.

FSAE Tire Test Consortium – Round 9 Contents Overview. 2020. https://www.calspan.com/. Calspan Tire Testing Services, Buffalo, NY. Citado na p. 68.

FSAE Tire Test Consortium – Round 9 Run Guide. 2020. https://www.calspan.com/. Calspan Tire Testing Services, Buffalo, NY. Citado na p. 68.

GENT, A. N.; WALTER, J. D. (Ed.). **The Pneumatic Tire**. Washington, D.C.: National Highway Traffic Safety Administration (NHTSA), 2005. Disponível em: https://www.nhtsa.gov/sites/nhtsa.gov/files/pneumatictire_hs810561.pdf. Citado nas pp. 9, 22, 26 e 28.

GILAT, A.; SUBRAMANIAM, V. **Métodos Numéricos para Engenheiros e Cientistas: Uma Introdução com Aplicações usando o MATLAB**. Porto Alegre: Bookman, 2008. ISBN 978-85-7780-297-5. Citado na p. 60.

MILLIKEN, W. F.; MILLIKEN, D. L. **Race Car Vehicle Dynamics**. Warrendale, PA: SAE International, 1995. ISBN 978-1560915263. Citado nas pp. 9, 22, 23, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 52, 53 e 54.

NOCEDAL, J.; WRIGHT, S. J. **Numerical Optimization**. 2. ed. New York: Springer, 2006. Citado nas pp. 55 e 56.

OLAZAGOITIA, J. L.; PEREZ, J. A.; BADEA, F. Identification of tire model parameters with artificial neural networks. **Applied Sciences**, MDPI, v. 10, n. 24, p. 9110, 2020. DOI 10.3390/app10249110. Disponível em: https://www.mdpi.com/2076-3417/10/24/9110. Citado na p. 18.

ORTIZ, A.; CABRERA, J.; FERNANDEZ, A. J. G. An easy procedure to determine magic formula parameters. **International Journal of Vehicle Performance**, 2006. DOI 10.1080/00423110600574558. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/233300121_An_easy_procedure_to_determine_Magic_Formula_parameters_A_comparative_study_between_the_starting_value_optimization_technique_and_the_IMMa_optimization_algorithm. Citado na p. 17.

PACEJKA, H. B. **Tire and Vehicle Dynamics**. 2nd. ed. Warrendale, PA: SAE International, 2006. Disponível em: https://books.google.com/books?id=JCHDuED3WIkC. Citado nas pp. 9, 14, 15, 22, 24, 27, 28, 29, 30, 35, 36, 40, 41, 47, 52, 53, 54 e 71.

PACEJKA, H. B. **Tire and Vehicle Dynamics**. 3rd. ed. Oxford, UK: Butterworth-Heinemann, 2012. ISBN 978-0-08-097016-5. DOI 10.1016/C2010-0-68548-8. Citado nas pp. 36 e 38.

REN, Z.; SHI, Q.; SHEN, J.; LIU, X.; ZHANG, W. Parameter identification of heavy traction solid tire model for mining vehicles based on hybrid optimization. **Journal of China**

Coal Society, v. 48, n. 10, p. 3937–3946, 2023. Artigo em chinês com resumo em inglês. DOI 10.13225/j.cnki.jccs.2022.1463. Citado na p. 17.

RILL, G.; CASTRO, A. A. **Road Vehicle Dynamics: Fundamentals and Modeling with MATLAB**. 2nd. ed. Boca Raton, FL: CRC Press, 2019. Disponível em: https://www.routledge.com/Road-Vehicle-Dynamics-Fundamentals-and-Modeling-with-MATLAB-Second-Edition/Rill-Castro/p/book/9780367349034. Citado na p. 14.

ROADVIEW Consortium. **Deliverable 3.6 — Vehicle Dynamics Modelling Methodology**. Brussels, 2024. Acesso em 15 jun. 2025. Disponível em: https://roadview-project.eu. Citado na p. 17.

RUSSELL, S.; NORVIG, P. **Artificial Intelligence: A Modern Approach**. 3. ed. London: Pearson, 2016. Citado na p. 57.

SALVI, W. D. **Caracterização dos mecanismos de envelhecimento de elastômeros para aplicação em pneus rodoviários e urbanos**. Dissertação (Dissertação de Mestrado) — Universidade Estadual de Campinas, Limeira, SP, abril 2021. Orientadora: Profa. Dra. Laís Pellizzer Gabriel. Disponível em: https://unicamp.br/unicamp/teses/2021/03/30/caracterizacao-dos-mecanismos-de-envelhecimento-de-elastomeros-para-aplicacao-em/. Citado nas pp. 9, 19, 20 e 21.

SEWARD, D. **Race Car Design**. London: Palgrave Macmillan, 2014. ISBN 9781137030141. Citado nas pp. 9 e 24.

SMITH, C. **Tune to Win: The art and science of race car development and tuning**. Fallbrook, CA: Aero Publishers, 1978. ISBN 978-0879380717. Citado nas pp. 9, 25 e 33.

SOLIMAN, A.; KALDAS, M. Semi-active suspension systems from research to mass-market – a review. **Journal of Low Frequency Noise, Vibration and Active Control**, SAGE, v. 40, n. 2, p. 1005–1023, 2021. DOI 10.1177/1461348419876392. Disponível em: https://journals.sagepub.com/doi/10.1177/1461348419876392. Citado na p. 14.

SOUZA, I. S. B. **Estudo comparativo de modelos de pneus para aplicação em sistemas de controle de estabilidade**. Trabalho de Conclusão de Curso — Universidade de Brasília (UnB), Brasília, DF, 2023. Citado nas pp. 9 e 20.

TNO. **MF-Tyre/MF-Swift 6.2 Help Manual**. Helmond, Netherlands, 2014. Document revision: 5/1/2014. Disponível em: http://www.delft-tyre.nl. Citado nas pp. 9, 38 e 39.

VIRTANEN, P.; GOMMERS, R.; OLIPHANT, T. E. *et al.* Scipy 1.0: Fundamental algorithms for scientific computing in python. **Nature Methods**, v. 17, p. 261–272, 2020. DOI 10.1038/s41592-019-0686-2. Citado na p. 58.

Apêndices

Anexos


UnB