

Universidade de Brasília - UnB
Faculdade de Ciências e Tecnologias em Engenharia - FCTE
Engenharia Aeroespacial

**Avaliação Paramétrica da Influência de
Controladores PID e LQR em um Modelo
Aeroservoelástico de Asa Retangular
Simplificada**

Autor: Washington Siqueira da Macena
Orientadora: Dra. Polliana Candida Oliveira Martins
Coorientador: Dr. Roberto de Souza Baptista

Brasília, DF

2024



Washington Siqueira da Macena

Avaliação Paramétrica da Influência de Controladores PID e LQR em um Modelo Aerosservoelástico de Asa Retangular Simplificada

Monografia submetida ao curso de graduação em (Engenharia Aeroespacial) da Universidade de Brasília, como requisito parcial para obtenção do Título de Bacharel em (Engenharia Aeroespacial).

Universidade de Brasília - UnB

Faculdade de Ciências e Tecnologias em Engenharia - FCTE

Orientador: Dra. Polliana Candida Oliveira Martins

Coorientador: Dr. Roberto de Souza Baptista

Brasília, DF

2024

Washington Siqueira da Macena

Avaliação Paramétrica da Influência de Controladores PID e LQR em um Modelo Aerosservoelástico de Asa Retangular Simplificada/ Washington Siqueira da Macena. – Brasília, DF, 2024-

134 p. : il. (algumas color.) ; 30 cm.

Orientador: Dra. Polliana Candida Oliveira Martins

Trabalho de Conclusão de Curso – Universidade de Brasília - UnB
Faculdade de Ciências e Tecnologias em Engenharia - FCTE , 2024.

1. Aerosservoelástico. 2. Flutter. I. Dra. Polliana Candida Oliveira Martins. II. Universidade de Brasília. III. Faculdade UnB Gama. IV. Avaliação Paramétrica da Influência de Controladores PID e LQR em um Modelo Aerosservoelástico de Asa Retangular Simplificada

CDU 02:141:005.6

Washington Siqueira da Macena

Avaliação Paramétrica da Influência de Controladores PID e LQR em um Modelo Aerosservoelástico de Asa Retangular Simplificada

Monografia submetida ao curso de graduação em (Engenharia Aeroespacial) da Universidade de Brasília, como requisito parcial para obtenção do Título de Bacharel em (Engenharia Aeroespacial).

Trabalho aprovado. Brasília, DF, 29 de agosto de 2024:

Dra. Polliana Candida Oliveira Martins
Orientadora

Dr. Roberto de Souza Baptista
Coorientador

Dr. Thiago Felipe Kurudez Cordeiro
Convidado 1

Dr. William Reis Silva
Convidado 2

Brasília, DF
2024

*Este trabalho é dedicado a minha família, orientadores e amigos,
pelo apoio nessa jornada pela engenharia.*

Agradecimentos

Agradeço todos que participaram, direta ou indiretamente do desenvolvimento deste trabalho de pesquisa, enriquecendo o processo de aprendizado, em especial aos meus orientadores pela amizade, confiança e compromisso com o ensino.

*“Trate a Sabedoria como sua irmã
e o Entendimento, como seu melhor amigo.”
(Bíblia Sagrada, Provérbios 7, 4)*

Resumo

Na indústria aeronáutica, os órgãos reguladores estabelecem procedimentos de validação e certificação para garantir a segurança contra fenômenos indesejáveis em aviões e proteger a integridade física dos ocupantes. Uma tendência importante nesse setor é o uso de estruturas flexíveis, o que aumenta a manobrabilidade das aeronaves. No entanto, essa flexibilidade também torna os fenômenos aeroelásticos, como o *flutter*, mais evidentes. Este estudo utiliza um modelo aeroservoelástico para o controle dinâmico do *flutter*, usando a plataforma Matlab-Simulink®. O modelo se baseia nas leis de controle PID e LQR, e a modelagem matemática considera uma asa linear e homogênea com uma superfície de controle na borda de fuga. O objetivo da pesquisa é explorar a interação entre o sistema de controle e o sistema aeroelástico, focando em metas específicas como variação dos ganhos, alteração geométrica da superfície de controle e resposta a rajadas. A análise dos resultados é feita por meio de representações gráficas no espaço $V-g-f$ e pela avaliação da estabilização dos sistemas mecânicos diante de perturbações externas. Este enfoque permite entender o impacto do sistema de controle no desempenho da aeronave, visando um voo controlado e seguro.

Palavras-chaves: aeroservoelástico. *flutter*. sistemas de controle aeronáutico.

Abstract

In the Aerospace Industry, regulatory bodies establish validation and certification procedures to ensure safety against undesirable phenomena in airplanes and protect the physical integrity of the occupants. An important trend in this sector is the use of flexible structures, which increases the maneuverability of aircraft. However, this flexibility also makes aeroelastic phenomena, such as flutter, more evident. This study uses an aeroservoelastic model for the dynamic control of flutter, utilizing the Matlab-Simulink® platform. The model is based on PID and LQR control laws, and the mathematical modeling considers a linear and homogeneous wing with a control surface at the trailing edge. The research aims to explore the interaction between the control system and the aeroelastic system, focusing on specific goals such as gain variation, geometric alteration of the control surface, and response to gusts. The analysis of the results is done through graphical representations in the V-g-f space and by evaluating the stabilization of mechanical systems against external disturbances. This approach allows for understanding the impact of the control system on the aircraft's performance, aiming for controlled and safe flight.

Key-words: Aeroservoelastic. flutter. aeronautical control systems.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Langley’s Aerodrome.	20
Figura 2 – Bomber Bi-Plane Fokker D.VIII.	20
Figura 3 – Pirâmide Aeroservoelasticidade. Adaptada pelo Autor MUKHOPADHYAY (2003): $A \mapsto$ Forças aerodinâmicas; $B \mapsto$ <i>Buffeting</i> ; $C \mapsto$ Forças de controle; $D \mapsto$ Divergência; $E \mapsto$ Forças elásticas; $F \mapsto$ <i>Flutter</i> ; $G \mapsto$ Carga de rajadas; $I \mapsto$ Forças inércias; $L \mapsto$ Carregamento; $R \mapsto$ Reversão de controle; $S \mapsto$ Estabilidade e controle; $V \mapsto$ Vibração Mecânica; $Z \mapsto$ Estabilidade mecânica.	23
Figura 4 – Vórtices relacionados ao aparecimento de <i>Buffeting</i> em uma asa. Fonte: ONERA	24
Figura 5 – Deformações típicas devido ao <i>Flutter</i> . Fonte: MICHELI (2024)	25
Figura 6 – Classificação dos fenômenos aeroelásticos. Adaptado de JÚNIOR (2004)	26
Figura 7 – Sistema massa-mola com dois graus de liberdade	32
Figura 8 – Aerofólio sob movimento translacional e de rotação. Fonte: WRIGHT and COOPER (2015)	36
Figura 9 – Gráfico V-g-f. Fonte: WRIGHT and COOPER (2015)	39
Figura 10 – Sistema de malha fechada com um controlador direto e um circuito de feedback de unidade.: WRIGHT and COOPER (2015)	43
Figura 11 – Sistema em malha fechada com retroalimentação: WRIGHT and COOPER (2015)	44
Figura 12 – Ângulo Efetivo de incidência devido rajada vertical. Fonte: WRIGHT and COOPER (2015).	50
Figura 13 – Diagrama de blocos Simulink® para resposta a rajada, WRIGHT and COOPER (2015).	51
Figura 14 – Modelo aeroelástico demonstrando flexão e torção com uma superfície de controle. Fonte: WRIGHT and COOPER (2015).	52
Figura 15 – Centro de massa de um retângulo. Autor: BEER et al. (2011)	53
Figura 16 – Gráfico V-g-f para os métodos K e P-K. Fonte: WRIGHT and COOPER (2015)	64
Figura 17 – Ilustração da metodologia para encontrar a velocidade crítica de flutter	64
Figura 18 – Ilustração da metodologia para verificar a resposta rajada do sistema	65
Figura 19 – Modos de vibração para os três graus de liberdade z, θ, β	68
Figura 20 – Diagrama V-g-f para três graus de liberdade sem controle	68
Figura 21 – Diagrama V-g-f parametrizado para superfície de controle	70
Figura 22 – Root Locus do sistema em espaço de estados.	70

Figura 23 – A partir da esquerda: Comportamento do sistema aeroelástico com variação do ganho derivativo pelo controlador. Zoom no início do <i>Hump mode</i> demonstrando que o sistema começa estável.	73
Figura 24 – Gráfico Velocidade de <i>flutter</i> x Variação k_v	73
Figura 25 – A partir da esquerda: Comportamento do sistema aeroelástico com variação do ganho proporcional pelo controlador. Zoom nas velocidades críticas de <i>flutter</i>	74
Figura 26 – Gráfico Velocidade de <i>flutter</i> x Variação k_d	75
Figura 27 – Comportamento do sistema aeroelástico com o ganho derivativo e proporcional pelo controlador, sistema instável	76
Figura 28 – Comportamento do sistema aeroelástico com o ganho derivativo e proporcional pelo controlador, sistema estável	77
Figura 29 – Resposta da ponta do bordo de ataque da asa à rajada com/sem a lei de controle.	80
Figura 30 – Resposta da ponta da superfície de controle da asa à rajada com a lei de controle.	80
Figura 31 – Diagrama V-g-f para dois graus de liberdade e um <i>flap</i> com controle LQR com Vel = 184 m/s.	83
Figura 32 – Diagrama V-g-f para dois graus de liberdade um <i>flap</i> com controle LQR com Vel = 166 m/s.	85
Figura 33 – Diagrama V-g-f para dois graus de liberdade um <i>flap</i> com controle LQR com Vel = 32 m/s.	86
Figura 34 – Deslocamento do bordo de ataque para dois graus de liberdade e um <i>flap</i> com controlador LQR com Vel= 180 m/s.	87
Figura 35 – Angulação da superfície de controle para dois graus de liberdade e um <i>flap</i> com controlador LQR com Vel= 180 m/s.	88
Figura 36 – Angulação da superfície de controle para dois graus de liberdade e <i>flap</i> com controlador LQR com Vel= 180 m/s para 3 segundos.	89
Figura 37 – Deslocamento do bordo de ataque para dois graus de liberdade e <i>flap</i> com controlador LQR com Vel= 180 m/s para 3 segundos.	89
Figura 38 – Angulação da superfície de controle para dois graus de liberdade e <i>flap</i> com controlador LQR com Vel= 180 m/s para 1 segundo.	90
Figura 39 – Deslocamento do bordo de ataque para dois graus de liberdade e <i>flap</i> com controlador LQR com Vel= 180 m/s para 1 segundo.	91

Lista de tabelas

Tabela 1 – Dados do sistema numérico utilizado na simulação. WRIGHT and COOPER (2015)	66
Tabela 2 – Relação superfície de controle e velocidade crítica de <i>flutter</i>	71
Tabela 3 – Influência do <i>Hump mode</i> no comportamento do ganho derivativo	72
Tabela 4 – Relação k_v - Velocidade Crítica de <i>flutter</i>	74
Tabela 5 – Relação k_d - Velocidade de <i>flutter</i>	75
Tabela 6 – Influência do <i>Hump mode</i> no comportamento do ganho derivativo e proporcional em conjunto	76
Tabela 7 – Relação k_v e k_d - Velocidade Critica de <i>flutter</i>	77
Tabela 8 – Relação k_v e k_d - Amplitude máxima da resposta rajada	79
Tabela 9 – Parâmetros do controlador LQR	81

Lista de abreviaturas e siglas

ASE	<i>Aeroservoelasticity</i> - Aeroservoelasticidade
V-g-f	Velocidade, amortecimento e frequência
PID	Controlador proporcional, integrativo, derivativo
LQR	<i>Quadratic Linear Regulator</i> - Regulador linear quadrático
MPC	Modelo preditivo de controle
FCS	<i>Flight Control System</i> - Sistema de controle de Voo
FAR	<i>Federal Aviation Administration</i> - Administração Federal de Aviação
EASA	<i>European Union Aviation Safety Agency</i> - Agência Europeia para a segurança da aviação
CFD	<i>Computational Fluid Dynamics</i> - Dinâmica dos fluidos Computacional
MIMO	<i>Multi-Input Multi-Output</i> - Múltiplas entradas e múltiplas saídas
SISO	<i>Single-Input Single-Output</i> - Uma entrada uma saída
RL	Circuito Resistivo Indutivo
SSD	<i>Synchronized switch damping</i> - Amortecimento de chave sincronizado

Lista de símbolos

α	Ângulo de ataque
β	Deslocamento da superfície de controle
ρ	Densidade do ar
ω	Frequência natural
θ	Deslocamento da asa em virtude da torção para cima em relação à sua raiz, ou seja, movimento rotacional
λ	Autovalor
ξ	Função Dissipativa
δx_n	Deslocamento incremental
ζ	Fator de amortecimento, Taxa de amortecimento viscoso
$\Delta\theta$	Ângulo efetivo de incidência devido rajada vertical
k_v	Ganho proporcional
k_d	Ganho derivativo
k_i	Ganho integrativo
a	Parâmetro adimensional que denota a posição do centro elástico
b	Semi-corda do aerofólio
a_a, b_a, c_a, E_a	Coefficientes aerodinâmicos da asa
a_{sc}, b_{sc}, c_{sc}	Coefficientes aerodinâmicos da superfície de controle
\mathbf{A}	Matriz de massa
\mathbf{B}	Matriz de amortecimento aerodinâmico

C	Matriz de rigidez aerodinâmica
D	Matriz de amortecimento estrutural
<i>D</i>	Derivada
<i>A</i>	Matriz do sistema
<i>B</i>	Matriz de entrada
<i>C</i>	Matriz de saída
<i>D</i>	Matriz de transmissão direta
<i>E</i>	Erro
E	Matriz de rigidez estrutural
q	Vetor de coordenadas generalizadas
<i>z</i>	Movimento translacional, ou seja, deslocamento vertical
\dot{z}_a	Velocidade vertical na asa, ou seja, velocidade de subida/decida
EI	Rigidez a elasticidade
GJ	Rigidez a torção
c_l, c_m, c_d	Coefficientes de sustentação, momento e arrasto para um aerofólio
E_c	Taxa da corda equivalente à superfície de controle
m, m_a, Msc	Massa do sistema, massa por unidade da asa e massa por unidade da superfície de controle
M_1, M_2	Massa das partículas
K_1, K_2	Constantes de mola
x_1, x_2	Coordenadas generalizadas associadas aos graus de liberdade do sistema
x_{ac}, x_f, x_h	Posição do eixo aerodinâmico, eixo elástico e posição da superfície de controle
E	Módulo de elasticidade, Erro, Porcentagem da corda que corresponde ao tamanho da superfície de controle
G	Módulo de torção
I	Integral

P	Proporcional
c	Corde do aerofólio, Coeficiente de amortecimento
s	Semi-envergadura da asa
s_o	Distância do transdutor e a raiz da asa
t	Tempo
v	Velocidade de escoamento
x	Vetor de estado, Vetor coluna de deslocamento
\dot{x}	Velocidade, Derivada do vetor de estado em relação ao tempo
\ddot{x}	Aceleração, Derivada do vetor de velocidade em relação ao tempo
W	Trabalho
T	Energia cinética
U	Energia Potencial
T_a	Energia cinética na asa
T_{sc}	Energia cinética na superfície de controle
f_n	Vetor coluna de forças
$f(t)$	Força de excitação aplicada ao sistema em função do tempo
K	Rigidez da mola
K	Matriz de rigidez
M	Matriz de massa
C	Matriz de amortecimento
Q_x	Força generalizada
g	vetor de excitação
\mathcal{E}	Coeficiente de amortecimento estrutural
F, G	Matrizes de feedback de controle
V_w	Valores de frequência
V_g	Coeficientes de amortecimento

$\Phi(x)$	Magnitude da vorticidade no elemento diferencial
y	Vetor de saída
u	Vetor de entrada
u	Vetor de controle
$L_{\dot{z}}, L_{\dot{\theta}}$	Derivadas de sustentação
$M_{\dot{z}}, M_{\dot{\theta}}$	Derivadas de momento
j	Função de custo
t_f	Instante final
x_d	Erro do sistema
X^T	Transposta da matriz X
P	Matriz simétrica P
I	Matriz identidade
h	Vetor de excitação por rajada
$M_{\dot{\theta}}$	Derivada de amortecimento aerodinâmico de controle
q_b, q_t	Coordenadas generalizadas para torção e flexão
Z_f	Deflexão para baixo no eixo elástico
C_m	Centro de massa em função da corda
e	Distância do centro aerodinâmico até o eixo elástico
a_w	Variação do coeficiente de sustentação em relação ao ângulo de ataque
b_w	Variação do coeficiente de sustentação em relação ao ângulo de ataque da superfície de controle
ss	Frequência complexa

Sumário

1	INTRODUÇÃO	19
1.1	Contextualização e Motivação	19
1.1.1	Justificativa	28
1.2	Objetivos	28
1.3	Organização do trabalho	29
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	30
2.1	Fundamentos da Aeroservoelasticidade	30
2.1.1	Modelo estrutural	31
2.1.2	Modelo Aerodinâmico	34
2.1.2.1	Aerodinâmica Estacionária	34
2.1.2.2	Aerodinâmica Não Estacionária	35
2.1.3	Plotagem dos gráficos V-g-f e obtenção da Velocidade de <i>flutter</i>	38
2.2	Fundamentos de Controle	40
2.2.1	Malha Aberta e Malha Fechada	40
2.2.2	Representação em estado de espaços	41
2.2.3	Controlador PID	43
2.2.4	Regulador linear quadrático	44
2.2.4.1	Análise da estabilidade aeroelastica incluindo um modelo LQR	48
2.3	Fundamentos da Resposta Rajada 1 - Cos()	49
3	MODELO AEROSERVOELÁSTICO	52
3.1	Modelagem Matemática	52
3.2	Equações de Controle para o Modelo com 2 Graus de Liberdade e um Flap	57
4	METODOLOGIA	60
4.1	Resolução por Autovalores e Autovetores	60
4.2	Método K	62
4.3	Método P — K	63
4.4	Fluxogramas da metodologia	64
5	RESULTADOS	66
5.1	Parâmetros do Sistema	66
5.2	Análise Aeroelástica	66
5.2.1	Solução do Problema de <i>Flutter</i>	67

5.2.2	Varição Geométrica	69
5.3	Análise aeroservoelástica incluindo controlador do tipo PID	71
5.3.1	Varição Paramétrica nos Ganhos PID	71
5.3.1.1	Varição do ganho derivativo k_v	71
5.3.1.2	Varição do ganho proporcional k_d	74
5.3.1.3	Varição dos ganhos proporcionais k_d e k_v	75
5.3.2	Resposta a rajada	78
5.4	Análise aeroeservoelástica incluindo controlador do tipo LQR	81
5.4.1	Ganho escalonado	82
5.4.2	Velocidade de <i>flutter</i>	82
5.4.3	Resposta a rajada	86
5.4.3.1	Simulação de tempo de resposta	88
5.5	Análise comparativa entre os controladores PID e LQR	91
5.5.1	Velocidade de <i>flutter</i>	91
5.5.2	Resposta a rajada	92
6	CONCLUSÃO	93
	Referências	95
	APÊNDICES	98
	APÊNDICE A – CÓDIGO MATLAB®- AEROSERVOELÁSTICO PID	99
	APÊNDICE B – CÓDIGO MATLAB®- AEROSERVOELÁSTICO LQR	109
	APÊNDICE C – CÓDIGO MATLAB®- AEROELÁSTICO	124
	APÊNDICE D – CÓDIGO MATLAB®- ROOT LOCUS	134

1 Introdução

1.1 Contextualização e Motivação

A disciplina da aeroelasticidade constituiu-se em uma área científica que investiga as complexas interações entre as forças aerodinâmicas, elásticas e inerciais em estruturas mecânicas, conforme amplamente discutido por [BISPLINHOFF et al. \(1996\)](#) e [WRIGHT and COOPER \(2015\)](#). Com as evoluções no panorama do mercado aeroespacial, em que as aeronaves contemporâneas são concebidas com notável flexibilidade estrutural, surge um cenário propício a fenômenos aeroelásticos. Uma análise detalhada em seus graus de liberdade segundo a regulação desses fenômenos detêm caráter imperativo para conferir à aeronave a segurança e eficiência operacional desejadas, como destacado por [WRIGHT and COOPER \(2007\)](#).

A interação entre a flexibilidade estrutural inerente às aeronaves e as forças aerodinâmicas, gravitacionais e inerciais pode precipitar deflexões estáticas e acoplamentos dinâmicos, gerando movimentos oscilatórios intrínsecos ao corpo da aeronave em análise. Tais interações, se não controladas de maneira adequada, podem resultar na redução prematura da vida útil de componentes estruturais, complicações relacionadas ao controle da aeronave e em casos extremos, falhas estruturais catastróficas por [CHAMBERS, J. R. \(2005\)](#).

No contexto histórico da aviação, destaca-se o pioneirismo de Samuel Langley, que concebeu uma configuração de aeronave do tipo *tandem-wing* com uma unidade de cauda *aft-mounted* para proporcionar estabilidade e controle. O objetivo de Langley embora fosse um pioneiro, criou o conceito de estruturas com estabilidade passiva e suas respectivas implementações, com a estabilidade passiva há um aumento sobre cargas nas aeronaves tornando a aeronave mais suscetível aos fenômenos aeroelástico. É importante ressaltar que antes da implementação de controle ativo para um maior domínio dos fenômenos aeroelásticos utilizavam-se somente controle passivo por [NITHIN et al. \(2019\)](#).

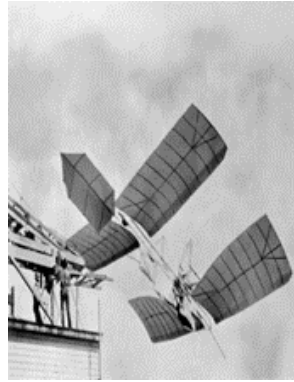


Figura 1 – Langley's Aerodrome.

Na Fig. (1), é documentado um ângulo de diedro expressivo, embora não se tenha imagens claras, promovendo estabilidade lateral. A filosofia de design adotada por Langley visava a construção de uma fuselagem intrinsecamente estável, alheia à intervenção do piloto. Modelos em escala foram confeccionados e lançados de uma plataforma montada em uma embarcação flutuante por meio de catapultas. Entretanto, o avião Aeródromo imergiu abruptamente no rio sem efetivar um voo por [NITHIN et al. \(2019\)](#).

Com o progresso da tecnologia aeronáutica, somado ao aprofundamento do entendimento acerca dos fenômenos aeroelásticos, chegou-se a conclusão que a falha do Aeródromo estava atrelada a uma torção divergente na asa, ou seja, o fenômeno de divergência. Nove dias após o 17 de dezembro de 1903, os irmãos Wright concretizaram o voo, culminando assim no encerramento da empreitada de Langley, voltada para uma competição. Em 1914, Curtis reabilitou o projeto Langley e o Aeródromo alçou voo com êxito por [NITHIN et al. \(2019\)](#).

O projeto do Fokker D-VIII (Fig. 2), apesar de seu desempenho notável, suas asas evidenciavam deficiências em mergulhos acentuados. Os primeiros monoplanos apresentavam inadequada rigidez à torção, resultando em *flutter* na asa, *flutter* na asa-aileron e perda de eficácia do aileron. A resolução dessa problemática envolveu o incremento da rigidez à torção e o equilíbrio de massa por [NITHIN et al. \(2019\)](#).



Figura 2 – Bomber Bi-Plane Fokker D.VIII.

O primeiro registro de um incidente relacionado ao *flutter* envolveu o Bombardeiro Biplano *Handley Page's 0/400* em 1915, que experimentou "oscilações violentas" na cauda, decorrentes de *flutter* desencadeado pela torção na fuselagem acoplada aos profundos por NITHIN et al. (2019).

O pioneiro teste formal de *flutter* foi conduzido por Von Schlippe na Alemanha em 1935, empregando vibrações da aeronave em ressonância de frequência, aumentando progressivamente as velocidades e plotando a amplitude com uma função de velocidade. Esta abordagem foi aplicada a várias aeronaves alemãs, até que o Junkers JU 90 experimentou uma queda durante testes de voo em 1938 devido ao *flutter* por NITHIN et al. (2019).

Atualmente, técnicas analíticas sofisticadas são empregadas para assegurar a ausência de *flutter* com base no design e no intervalo do envelope de voo desejado. Os resultados são validados em túneis de vento com modelos de *flutter* e testes de aumento de vibração. Os testes de *flutter* em voo constituem a verificação final das predições analíticas ao longo do envelope de voo por NITHIN et al. (2019).

O diagrama de Collar, Fig. (3), desempenha o papel instrumental da representação e visualização da categorização dos fenômenos aeroelásticos. Sua aplicação, frequentemente empregada para propósitos pedagógicos, facilita a apreensão conceitual destes fenômenos visualmente. A interconexão entre os vértices do diagrama suscita investigações em áreas de estudo inter-relacionadas.

Os fenômenos aeroelásticos manifestam-se em categorias distintas, sendo classificados como fenômenos de estabilidade ou de respostas, e subdivide-se em fenômenos estáticos e dinâmicos Fig. (6). Fenômenos aeroelásticos de estabilidade surgem quando deformações estruturais em um corpo flexível em movimento via um fluido resultam na indução de forças aerodinâmicas suplementares. Essas forças, por sua vez, provocam novas deformações, instigando um ciclo contínuo de interação. Corpos rigidamente estruturados não apresentam tais problemas, mas a adoção de compósitos viabiliza a redução de peso e maior flexibilidade nas aeronaves, potencializando a ocorrência de fenômenos aeroelásticos, notadamente relevantes no envelope de voo por JÚNIOR (2004).

Os fenômenos aeroelásticos de resposta referem-se à reação de um sistema aeroelástico diante de uma carga externa. Essa carga pode originar-se de deformações em um corpo elástico ou de distúrbios, como rajadas, impactos no pouso ou turbulências atmosféricas. A resposta pode ser a alteração de deslocamento, movimento ou tensões induzidas no corpo elástico. Assim como nos fenômenos de estabilidade, os problemas de respostas são categorizados em estáticos, desconsiderando forças inerciais, e dinâmicos, abarcando forças inerciais, elásticas e aerodinâmicas por JÚNIOR (2004).

Ao adentrar o domínio dos fenômenos aeroelásticos, é imperativo possuir fundamentação em diversas áreas. O estudo das vibrações mecânicas, abordado extensivamente em pesqui-

sas que exploram técnicas para sua mitigação e sua aplicação como indicador em estratégias de planejamento e controle da manutenção, exemplifica uma área intrinsecamente interconectada com diversos campos por [RAO \(2017\)](#). Nesse contexto, a elasticidade focaliza o entendimento das interações entre corpos, permitindo prever o comportamento de estruturas diante de solicitações específicas por [BEER et al. \(2011\)](#). A aerodinâmica, por sua vez, investiga os formatos dos corpos e sua interação com fluidos, resultando na geração de forças aerodinâmicas por [ANDERSON \(2017\)](#). Por fim, as forças inerciais, como a força de Coriolis, são aplicadas em movimentos realizados em referências não inerciais por [CURTIS \(2005\)](#).

Com o advento da ciência aeroservoelástica (ASE), o diagrama de Collar expandiu-se, ampliando as interações aeroelásticas para abranger forças aerodinâmicas e uma estrutura flexível. Essa flexibilidade estrutural pode ser concebida como uma asa fixada em sua base que automaticamente se adapta durante o voo. Desse modo, compreende-se a asa como capaz de ajustar-se a diferentes situações de voo, incorporando um sistema de controle. O sistema de controle, por sua vez, responde a entradas externas gerando respostas desejadas por meio de forças de controle, exemplificado por um sistema de alívio de carga em rajadas para atenuar a turbulência por [DA MACENA \(2023\)](#).

A pirâmide aeroservoelástica, representada na Fig. (3), emerge como uma extensão do tradicional triângulo aeroelástico de Collar. Agora, incorporando as forças resultantes do sistema de controle, além das forças aerodinâmicas, elásticas e inerciais. Os efeitos da aeroservoelasticidade (ASE) assumem relevância em projetos de aeronaves contemporâneas. A implementação frequente de sistemas de controle de voo (FCS) tem por objetivo aprimorar a manobrabilidade, estabilidade, desempenho de voo e conforto durante a viagem ao longo do envelope de voo, ao mesmo tempo, em que gerencia cargas para prolongar a vida útil da aeronave por [WRIGHT and COOPER \(2007\)](#). Esse destaque evidencia o impacto crucial da ASE nos projetos aeroespaciais.

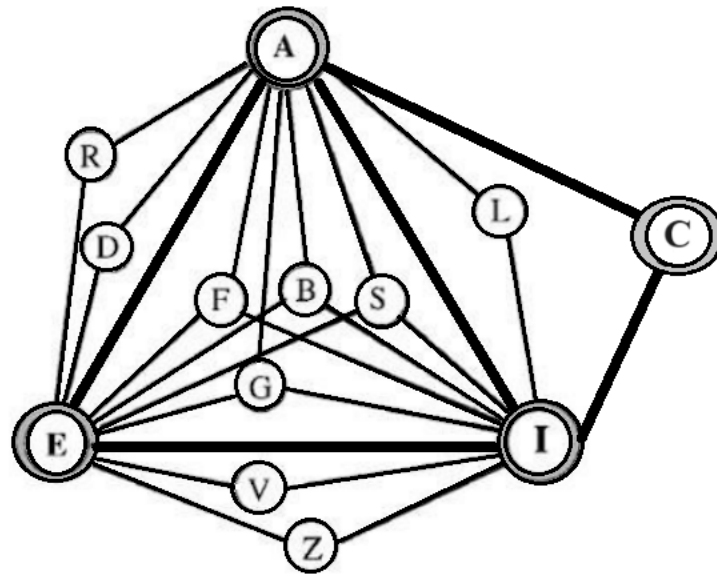


Figura 3 – Pirâmide Aeroservoelasticidade. Adaptada pelo Autor [MUKHOPADHYAY \(2003\)](#):
 $A \mapsto$ Forças aerodinâmicas; $B \mapsto$ *Buffeting*; $C \mapsto$ Forças de controle; $D \mapsto$ Divergência; $E \mapsto$ Forças elásticas; $F \mapsto$ *Flutter*; $G \mapsto$ Carga de rajadas; $I \mapsto$ Forças inércias; $L \mapsto$ Carregamento; $R \mapsto$ Reversão de controle; $S \mapsto$ Estabilidade e controle; $V \mapsto$ Vibração Mecânica; $Z \mapsto$ Estabilidade mecânica.

Quando as forças aerodinâmicas e elásticas coexistem, emergem os problemas categorizados como aeroelasticidade estática. Nesse escopo, destaca-se a divergência, caracterizada pelo momento de arfagem, gerado pelo escoamento aerodinâmico, ultrapassando o limite de rigidez torsional da asa. Adicionalmente, nos fenômenos estáticos, figura a reversão de controle, fenômeno que se materializa quando a força de controle aplicada perde eficácia ou induz comportamento oposto ao esperado em resposta a uma entrada no sistema, em decorrência das deformações elásticas da estrutura. Outro aspecto relevante é a redistribuição de cargas, na qual a elasticidade da estrutura influencia a distribuição das forças aerodinâmicas.

No cenário da aeroelasticidade dinâmica, a interação das forças inerciais com aquelas oriundas da aerodinâmica adquire destaque, culminando no campo conhecido como mecânica de voo ou estabilidade dinâmica. Contudo, quando as forças inerciais, elásticas e aerodinâmicas atuam simultaneamente, fenômenos de aeroelasticidade dinâmica se manifestam. Este domínio de investigação, abarca problemas aeroelásticos de grande relevância devido ao impacto iminente sobre a integridade estrutural. Dentre esses problemas, destacam-se o *buffeting*, a resposta a rajada e o *flutter*.

O *buffeting* Fig. (4), constitui uma excitação relacionada aos vórtices de escoamento externo, situados a jusante das asas, fuselagem e motor. O escoamento desencadeia flutuações aerodinâmicas que provocam vibrações transitórias na estrutura da aeronave, com maior incidência no estabilizador vertical. Importa notar que o termo *buffet* refere-se à excitação da estrutura devido ao escoamento descolado ou oscilação de choque, enquanto o *buffeting* representa a

resposta da estrutura ao *buffet* (vibração). Este fenômeno é particularmente frequente em aeronaves militares, dadas as elevadas velocidades e ângulos de ataque, gerando esteiras de magnitude expressiva, aliadas ao *buffet* proveniente das ondas de choque de armamentos instalados na aeronave.

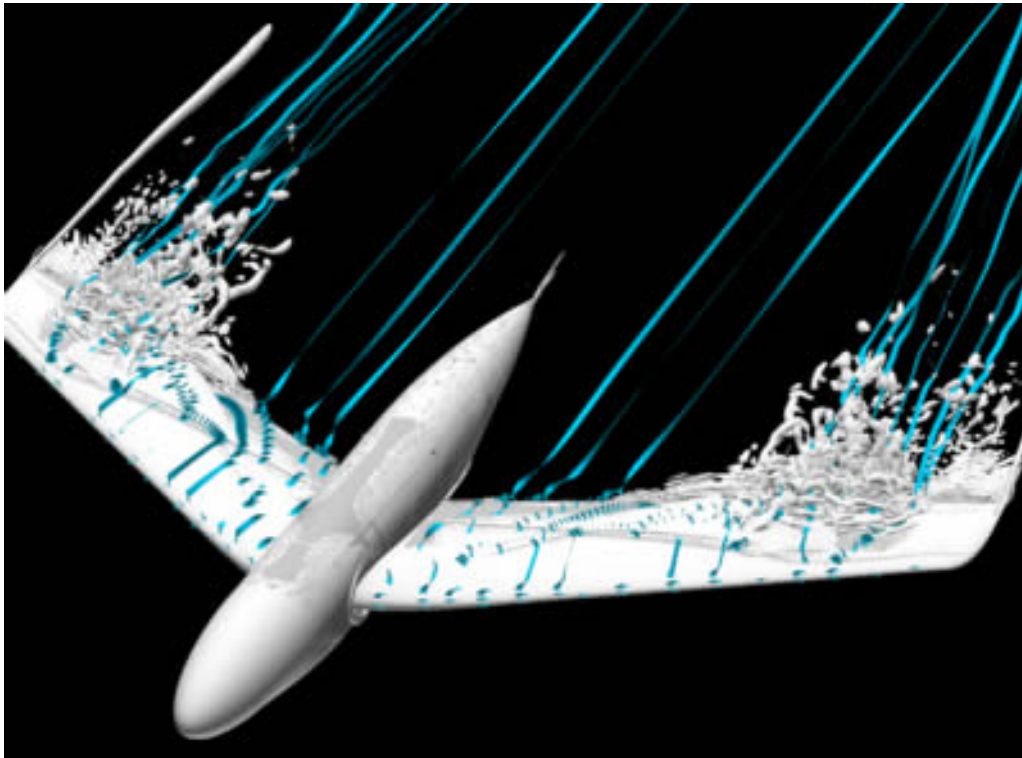


Figura 4 – Vórtices relacionados ao aparecimento de *Buffeting* em uma asa. Fonte: ONERA

A resposta a rajada ocorre quando a aeronave é sujeita a forças transitórias, originárias de ondas de choque ou rajadas de ar, provenientes, por exemplo, de fenômenos climáticos adjacentes à trajetória da aeronave em voo.

O fenômeno de *flutter* Fig. (5), materializa-se quando a aeronave se aproxima da velocidade crítica de *flutter*, instância em que, devido a uma instabilidade aeroelástica dinâmica, resultante da interação entre forças aerodinâmicas, elásticas e inerciais, manifesta-se uma oscilação autossustentada em superfícies como asas. Esta oscilação pode desencadear problemas estruturais se não devidamente mitigada. A análise de *flutter* assume papel crucial no desenvolvimento de aeronaves, permitindo a identificação e resolução de problemas de instabilidade aeroelástica antes da construção efetiva da aeronave.



Figura 5 – Deformações típicas devido ao *Flutter*. Fonte: MICHELI (2024)

O fenômeno de *flutter* é uma forma de instabilidade aeroelástica dinâmica que ocorre em aeronaves quando estas se aproximam da velocidade crítica de *flutter*. Neste ponto, as interações complexas entre forças aerodinâmicas, elásticas e inerciais dão origem a uma oscilação autossustentada nas superfícies aerodinâmicas, como asas. Essa oscilação, muitas vezes, é caracterizada por uma série de ressonâncias fluido-estrutura que podem se amplificar rapidamente.

No *flutter*, as forças aerodinâmicas que atuam na aeronave interagem de forma significativa com a flexibilidade estrutural das asas. Quando a velocidade da aeronave se aproxima da velocidade crítica de *flutter*, pequenas perturbações na corrente de ar podem causar uma amplificação das oscilações estruturais, levando a uma resposta não linear que pode resultar em danos ou até mesmo na perda do controle da aeronave.

Para entender completamente o *flutter*, é essencial considerar uma variedade de fatores, incluindo a forma e a rigidez das superfícies aerodinâmicas, a distribuição de massa da aeronave e as características do fluxo de ar ao redor da aeronave. A análise de *flutter* desempenha um papel crucial no projeto e desenvolvimento de aeronaves, permitindo que engenheiros identifiquem e mitiguem efetivamente os problemas de instabilidade aeroelástica antes mesmo da construção física da aeronave. Ao compreender os mecanismos subjacentes ao *flutter*, os projetistas podem implementar soluções de design-estrutural e controle para garantir a segurança e o desempenho adequado das aeronaves em uma ampla gama de condições de voo.

	Estático	Dinâmico
Estabilidade	Divergência	Flutter
		Stall Flutter
Resposta	Distribuição de carregamento	Resposta a rajadas
	Efetividade de controle	Resposta a comandos
	Reverso de controle	Buffeting

Figura 6 – Classificação dos fenômenos aeroelásticos. Adaptado de JÚNIOR (2004)

A segurança é assunto de maior importância na indústria aeronáutica, dada a crítica natureza de seus sistemas, cujas falhas podem acarretar prejuízos humanos e financeiros às companhias aéreas e sociedade. As empresas aeroespaciais operam em uma faixa de lucratividade notoriamente estreita, e o desenvolvimento de aeronaves suscetíveis a falhas pode conduzi-las à falência, considerando o extenso período e recursos despendidos para a consecução da certificação, especialmente nos cenários experimentais mais adversos por HEEG (2018). O arcabouço regulatório subjacente à presente investigação recai sobre o Regulamento Brasileiro de Aviação Civil n.º23, com ênfase no título “Requisitos de Aeronavegabilidade: Aviões Categoria Normal”. Importa ressaltar que este regulamento constitui a adaptação nacional do equivalente norte-americano, o *Federal Aviation Administration - FAA, Department of Transportation* dos Estados Unidos da América. Conforme previamente delineado, o escopo desta pesquisa repousa sobre o controle de fenômenos aeroelásticos, e, nesse contexto, a atenção será direcionada à subparte C - Estruturas; Desempenho Estrutural 23.2245 - Aeroelasticidade.

Conforme estabelece o trecho 23.2245 do RBAC ANAC (2019):

- A aeronave deve ser imune a *flutter*, reversões de controle e divergências em todas as velocidades dentro e suficientemente além do envelope estrutural de projeto;
 - Para qualquer configuração e condição de operação;
 - Considerando os graus de liberdade críticos; e
 - Contemplando quaisquer falhas ou mal, funcionamentos críticos.
- O requerente deve estabelecer tolerâncias para todas as grandezas que influenciam o *flutter*.

Em consonância com as normativas estabelecidas pela Federal Aviation Administration (FAA), conforme documentação 25.341-1 da Federal Aviation Administration (2014), que aborda as cargas decorrentes de turbulências e rajadas em aeronaves de transporte, as análises de

resposta a rajadas são empreendidas em um envelope de desenvolvimento. Este envelope abarca a influência de parâmetros críticos como massa, centro de gravidade, capacidade de carga, velocidade e altitude. No que concerne aos modelos de rajadas, o modelo discreto é adotado para representar eventos extremos de turbulência, enquanto o modelo contínuo caracteriza turbulências de longa duração.

A resposta a rajadas pode derivar de condições climáticas adversas, sendo uma das causas de acidentes envolvendo aeronaves. Um exemplo notável refere-se ao incidente ocorrido em maio de 2009 com uma aeronave Airbus A330-225, no percurso Miami-São Paulo, que enfrentou rajadas severas por aproximadamente trinta segundos, resultando em lesões a passageiros e tripulação por [CENIPA \(2013a\)](#). Em setembro de 2013, durante a fase de cruzeiro sobre o Oceano Atlântico no trajeto de Madri para São Paulo, o Airbus A330-203 foi impactado por uma rajada intensa. Neste caso, a rajada provocou uma variação na taxa de subida da aeronave em 4601 pés (aprox. 1.402 m) por minuto e alterou o ângulo de ataque. O fenômeno perdurou por 1 minuto e 37 segundos, sendo particularmente intenso durante 15 segundos, resultando em lesões em alguns passageiros e membros da tripulação por [CENIPA \(2013b\)](#).

Conforme descrito por [BISPLINHOFF et al. \(1996\)](#), a análise de resposta a rajadas figura como um dos principais desafios no projeto de veículos aéreos. A aeronave está suscetível a esses esforços durante os voos, comprometendo potencialmente sua integridade estrutural e aeronavegabilidade. A avaliação da resposta a rajadas é crucial, particularmente para a análise de vida útil em fadiga por [WRIGHT and COOPER \(2015\)](#). Algumas aeronaves modernas incorporam sistemas projetados para mitigar cargas de rajadas.

Ao comparar métodos de análise de cargas de resposta a rajadas para a certificação de grandes aeronaves conforme FAR-25 (Federal Aviation Administration, 2014) e EASA CS25 (EASA, 2007), incluindo tipos de rajadas discretas, como cosseno, e contínuas, evidencia-se que o modelo discreto 1-cosseno, considerado clássico e validado, mostrou-se amplamente utilizado para análises aeroelásticas, permitindo a inserção de não linearidades e atuando como uma variação harmônica. Embora a rajada contínua seja empregada para aviões de grande porte, ela tende a ser mais crítica para aeronaves de elevada razão de massa ou frequência natural baixa por [RIBEIRO \(2019\)](#).

Mudanças atmosféricas podem anteceder rajadas, levando a falhas em equipamentos. Há registros de um incidente relacionado a grandes deformações causadas por rajadas, resultando em falha estrutural e queda do protótipo.

A utilização de transdutores piezoelétricos emerge como uma alternativa para resolver problemas de alívio de carga de rajada ([VERSIANI, 2016](#)). Empregam-se transdutores no bordo de ataque da asa, sem especificar o modelo por [WRIGHT and COOPER \(2015\)](#), sendo o piezoelétrico recomendado para cargas dinâmicas por [EISMIN \(2016\)](#), aplicados a um modelo aerodinâmico com formulação quasiestacionária. Os ganhos de controle para alívio de rajada

são proporcionais e derivativos.

Sistemas de controle, como o PID proposto por [WRIGHT and COOPER \(2015\)](#), podem ser empregados para reduzir o impacto físico das respostas a rajadas, aliviar cargas críticas e aprimorar o conforto e a funcionalidade da aeronave. Em um modelo numérico utilizando MATLAB-SIMULINK®, leis de controle são utilizadas para o alívio de cargas de rajada, com uma superfície de controle por [WRIGHT and COOPER \(2015\)](#).

1.1.1 Justificativa

A análise proposta visa aprofundar a compreensão da resposta dinâmica de sistemas aeroservoelásticos, particularmente em relação aos efeitos dos ganhos, notadamente o ganho proporcional e o ganho derivativo para o controlador PID e calibração dos pesos R e Q para o controlador LQR. Por meio da adição desses parâmetros na estrutura matemática do modelo adotado, almeja-se identificar sua influência na estabilidade aeroelástica.

A utilização de um modelo intermediário baseado em uma placa plana (o qual é utilizado nesse trabalho) apresenta uma aproximação mais realista da estrutura e da aerodinâmica de aeronaves, conferindo à análise maior robustez e alinhamento com as condições reais de voo. Esta abordagem permite uma análise mais detalhada e precisa do comportamento aeroservoelástico, proporcionando uma maior segurança das aeronaves.

Ademais, ressalta-se que modelos simplificados, como o proposto neste trabalho, permitem a análise previa aeroelástica ainda em fase conceitual do projeto, permitindo previsões neste sentido utilizando softwares de programação para engenharia com geometrias simples mantendo uma alta precisão.

Este trabalho representa a colaboração dos professores de engenharia aeroespacial - eletrônica da UnB - FCTE para estabelecer uma linha de pesquisa dedicada aos fenômenos aeroelásticos - aeroservoelásticos e às estratégias de mitigação, visando a formação de profissionais capacitados para atender às demandas do mercado. A complexidade dessa área reside em sua natureza interdisciplinar, exigindo que os engenheiros adquiram habilidades em aerodinâmica, materiais, estruturas, instrumentação eletrônica, sistemas dinâmicos e modelagem matemática de sistemas de controle mecânicos e de carga.

1.2 Objetivos

O objetivo geral desta pesquisa consiste em conduzir uma análise aeroservoelástica utilizando um modelo tridimensional simplificado de asa reta. A avaliação abrange a estabilidade em malha aberta e fechada, investigando os fenômenos aeroelásticos de *flutter* e resposta a rajada.

Os objetivos específicos incluem:

- Realizar um estudo numérico para investigar a influência do controle ativo, especificamente o PID, na instabilidade aeroelástica. Avaliando a influência dos parâmetros de ganho nos fenômenos de *flutter* e resposta a rajada.
- Realizar um estudo numérico para investigar a influência do controle ativo, especificamente o LQR, na instabilidade aeroelástica. Avaliando a influência dos parâmetros de ganho nos fenômenos de *flutter* e resposta a rajada.
- Comparar, qualitativamente, o desempenho do modelo aeroservoelástico incluindo PID e LQR

1.3 Organização do trabalho

Quanto à organização do trabalho, o Capítulo 1 fornece uma introdução contextualizada e apresenta os objetivos da pesquisa.

O Capítulo 2 aborda os fundamentos aeroservoelásticos, princípios de controle, sistemas PID, LQR, resposta a rajada e ensaios experimentais de *flutter*.

O Capítulo 3 desenvolve o modelo aeroservoelástico matemático, incorporando as matrizes de controle e apresentando as equações subjacentes.

O Capítulo 4 detalha a metodologia, destacando o algoritmo para a determinação da velocidade de *flutter* e as formulações matemáticas associadas.

O Capítulo 5 expõe e interpreta os resultados obtidos a partir da análise aeroelástica e com os controladores LQR e PID, discutindo suas influências na resposta a rajada.

O Capítulo 6 apresenta as conclusões finais, encerrando a pesquisa.

2 Fundamentação Teórica

2.1 Fundamentos da Aeroservoelasticidade

Com os avanços notáveis nas diversas disciplinas da engenharia, particularmente na tecnologia aeronáutica, tem-se testemunhado o surgimento de uma variedade de materiais destinados a otimizar a relação resistência-peso. Materiais compósitos, como fibras de vidro, carbono, aramida, entre outros, estão cada vez mais sendo empregados em áreas críticas da estrutura e como encaixes, os quais são diretamente expostos a cargas dinâmicas durante os voos, surgindo, assim, como pontos cruciais na integridade estrutural da aeronave. Em certas instâncias de aviação experimental, é possível encontrar aeronaves construídas predominantemente com materiais compósitos por COSTA (2007).

O progresso no desenvolvimento de materiais culmina em aeronaves mais leves e estruturas mais esbeltas por BISPLINHOFF et al. (1996). Estruturas esbeltas, em geral, apresentam maior flexibilidade em comparação com suas contrapartes mais espessas, suportando não apenas cargas estáticas ou de regime estacionário, mas também ficando sujeitas a cargas dinâmicas, que, por sua vez, representam um desafio adicional ao desempenho da aeronave por COSTA (2007).

A análise aeroelástica do *flutter* assume um papel de extrema importância na antecipação e prevenção desse fenômeno. Quando se torna impraticável corrigir esse problema por meio de modificações na estrutura ou na aerodinâmica da aeronave, uma alternativa viável é a implementação de um sistema de controle. As modificações estruturais ou aerodinâmicas são comumente denominadas contramedidas “passivas”, enquanto o emprego de sistemas automáticos de controle é referido como contramedida “ativa”. Propostas baseadas em técnicas passivas são consideradas conceitos de projeto antiquados; no entanto, durante o processo de projeto estrutural e aerodinâmico, ainda devem ser consideradas. Contudo, com a utilização de materiais modernos, torna-se imprescindível empregar meios de controle ativo.

Estudos sobre a resposta aeroelástica indicam que uma asa oscilando no fluxo apresenta certo fator de amortecimento aerodinâmico. Inicialmente partindo de velocidade zero, à medida que a velocidade aumenta, o amortecimento aerodinâmico atinge um valor máximo antes de decrescer até atingir zero, estabelecendo a velocidade crítica por BISPLINHOFF et al. (1996).

A interação complexa entre a dinâmica estrutural, aerodinâmica e o sistema de controle de voo é denominada aeroservoelasticidade. Até meados da década de 80, devido às limitações computacionais, os estudos estavam predominantemente voltados para a resolução de problemas aeroelásticos em regimes subsônicos e supersônicos. Atualmente, com o advento da Dinâmica dos Fluidos Computacional (CFD - Computational Fluid Dynamics), é possível realizar simulações aeroelásticas em regime transônico, englobando aeroelasticidade compressível e viscosa. Contudo, dada a sua complexidade, ainda persiste a realização de diversos estudos aeroelásticos no domínio do tempo, baseados em escoamentos potenciais.

2.1.1 Modelo estrutural

A vibração, uma disciplina que se debruça sobre o movimento repetitivo de um objeto em relação a um referencial fixo, constitui uma área complexa e indispensável na dinâmica de sistemas mecânicos. No âmbito dos problemas aeroelásticos, a análise das vibrações de um sistema desempenha um papel crucial, visto que representa um método que possibilita a investigação das interações entre forças inerciais, aerodinâmicas e elásticas, abrangendo, assim, todas as forças que dão forma a um problema aeroelástico. O problema de *flutter* aqui abordado envolve uma asa reta tridimensional com três graus de liberdade em malha aberta e com dois graus de liberdade e um flap em malha fechada, sujeita a uma excitação harmônica por meio das forças aerodinâmicas.

Quando um sistema é submetido a uma excitação harmônica, a resposta é harmônica. Considerando um sistema simplificado massa-mola viscosamente-amortecido para um grau de liberdade, a equação de movimento desse sistema pode ser expressa pela segunda lei de Newton por [RAO \(2017\)](#):

$$m\ddot{\mathbf{x}} + c\dot{\mathbf{x}} + k\mathbf{x} = \mathbf{f}(t) \quad (2.1)$$

Onde,

m = Representa a massa do sistema,

c = Coeficiente de amortecimento,

k = Rigidez da mola,

$\ddot{\mathbf{x}}$ = Vetor aceleração,

$\dot{\mathbf{x}}$ = Vetor velocidade,

\mathbf{x} = Deslocamento do sistema,

$\mathbf{f}(t)$ = Representa a força de excitação aplicado ao sistema em função do tempo.

Considerando uma força harmônica $\mathbf{f}(t) = f_0 \cos \omega t$ excitando o sistema, para maiores

detalhes, consultar [RAO \(2017\)](#), a equação do momento torna-se:

$$m\ddot{\mathbf{x}} + c\dot{\mathbf{x}} + k\mathbf{x} = \mathbf{f}(t) = f_0 \cos \omega t \quad (2.2)$$

Dividindo todos os termos da equação pela massa (m),

$$\ddot{\mathbf{x}} + 2\zeta\omega_n\dot{\mathbf{x}} + \omega_n^2\mathbf{x} = f_0 \cos \omega t \quad (2.3)$$

Onde,

ω_n é a frequência natural dada por $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$,

ζ é o fator de amortecimento dado por $\zeta = \frac{c}{2m\omega_n}$.

A Eq. (2.3) constitui a forma generalizada da equação de movimento para um sistema dinâmico sujeito a excitação harmônica em um grau de liberdade por [RAO \(2017\)](#).

Quando se lida com múltiplos graus de liberdade onde n é um número natural inteiro, é viável empregar o método das equações de energia de Lagrange para derivar as equações de movimento. As equações de Lagrange representam uma maneira de expressar as equações diferenciais em termos de energia e trabalho:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial \xi}{\partial \dot{\mathbf{x}}} + \frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{Q}_x = \frac{\partial (\delta W)}{\partial (\delta \mathbf{x})} \quad (2.4)$$

Onde,

T = Energia cinética,

U = Energia Potencial,

ξ = Função dissipativa,

\mathbf{Q}_x = Força generalizada,

W = Trabalho.

Em um sistema massa-mola convencional com dois graus de liberdade Fig. (7) tem-se que a energia cinética é dada pela Eq. (2.5) e a energia potencial é dada pela Eq. (2.6):

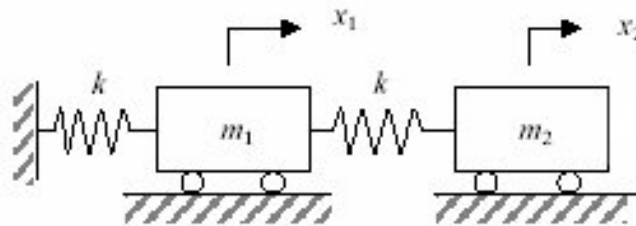


Figura 7 – Sistema massa-mola com dois graus de liberdade

$$T = \frac{1}{2}m_1\|\dot{\mathbf{x}}_1\|^2 + \frac{1}{2}m_2\|\dot{\mathbf{x}}_2\|^2 \quad (2.5)$$

$$U = \frac{1}{2}k_1\|\mathbf{x}_1\|^2 + \frac{1}{2}k_2\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|^2 \quad (2.6)$$

Onde,

m_1, m_2 São as massas das partículas,

k_1, k_2 São as constantes de mola,

$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ São as coordenadas generalizadas associadas aos graus de liberdade do sistema.

O amortecimento é considerado uma força dissipativa, dado que trabalha dissipando energia, portanto se pode incluí-lo na função dissipativa (ξ).

$$\xi = \frac{1}{2}c_1\|\dot{\mathbf{x}}_1\|^2 + \frac{1}{2}c_2\|\dot{\mathbf{x}}_2 - \dot{\mathbf{x}}_1\|^2 \quad (2.7)$$

O trabalho incremental pode ser obtido quando a força f_n se move por meio de um deslocamento incremental $\delta\mathbf{x}_n$,

$$\delta W = f_1\delta\mathbf{x}_1 + f_2\delta\mathbf{x}_2 \quad (2.8)$$

Substituindo as equações de energia cinética Eq. (2.5), energia potencial Eq. (2.6), função dissipativa Eq. (2.7) e trabalho Eq. (2.8) na equação de energia de Lagrange Eq. (2.4), obtêm-se as equações do movimento mostradas nas equações Eq. (2.9) e Eq. (2.10).

$$m_1\ddot{\mathbf{x}} + (c_1 + c_2)\dot{\mathbf{x}}_1 - c_2\dot{\mathbf{x}}_2 + (k_1 + k_2)\mathbf{x}_1 - k_2\mathbf{x}_2 = \mathbf{f}_1(t) \quad (2.9)$$

$$m_2\ddot{\mathbf{x}}_2 - c_2\dot{\mathbf{x}}_1 + c_2\dot{\mathbf{x}}_2 - k_2\mathbf{x}_1 + k_2\mathbf{x}_2 = \mathbf{f}_2(t) \quad (2.10)$$

Na forma matricial, temos;

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{x}}_1 \\ \ddot{\mathbf{x}}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_1 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_1 \\ \dot{\mathbf{x}}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \end{Bmatrix} \quad (2.11)$$

Ao observar a Eq. (2.11), nota-se que a matriz de massa é diagonal, o que indica que o sistema é fisicamente desacoplado. Por outro lado, as matrizes de amortecimento e rigidez são acopladas. Na forma simplificada:

$$M\ddot{\mathbf{x}} + C\dot{\mathbf{x}} + K\mathbf{x} = \mathbf{f}(t) \quad (2.12)$$

Onde,

M = Matriz de massa,

C = Matriz de amortecimento,

K = Matriz de rigidez,

x = Vetor coluna de deslocamento,

f = Vetor coluna de forças.

2.1.2 Modelo Aerodinâmico

2.1.2.1 Aerodinâmica Estacionária

A aerodinâmica estacionária representa o caso mais simplificado do escoamento, sendo o regime adotado o subsônico, a aerodinâmica estacionária caracterizando-se pelo fluxo ao redor do aerofólio, o qual é independente do tempo em relação às forças e momentos aerodinâmicos. Conforme os princípios aerodinâmicos, ao se considerar um aerofólio esbelto, é possível substituí-lo e interpretá-lo como uma distribuição contínua de vórtices. Consoante o teorema de Kutta-Joukowski, a sustentação gerada em cada elemento não nulo de corda, por unidade de comprimento de asa por [MARTINS et al. \(2022\)](#), é expressa por:

$$dL = \rho_{\infty} \mathbf{v} \Phi(x) dx \quad (2.13)$$

Na expressão matemática apresentada, $\Phi(x)$ simboliza a magnitude da vorticidade no referido elemento diferencial. Ao realizar a integração ao longo da extensão completa da corda do aerofólio, é possível obter a sustentação estacionária resultante;

$$L = \rho_{\infty} \mathbf{v} \int_0^c \Phi(x) dx \quad (2.14)$$

Ao efetuar a substituição da magnitude da vorticidade, conforme as premissas adotadas na abordagem de aerofólios finos, deduz-se a formulação para a sustentação e o momento aerodinâmico em regime estacionário por [ANDERSON \(2017\)](#),

$$L = 2\pi\rho_{\infty}\mathbf{v}^2b\alpha \quad (2.15)$$

$$M_{\alpha} = -L \left(a + \frac{1}{2} \right) b \quad (2.16)$$

Na referida expressão, b simboliza a semi-corda do aerofólio, enquanto a é o parâmetro adimensional que denota a posição do centro elástico.

2.1.2.2 Aerodinâmica Não Estacionária

O escoamento não estacionário se revela como a formulação mais apropriada para a abordagem do cenário em análise, uma vez que contempla a variação dos esforços aerodinâmicos em relação ao tempo. Este tipo de escoamento incorpora a influência temporal associada ao movimento do fluido resultante do deslocamento de corpos sólidos dentro de seu domínio. Para análises de *flutter* e resposta a rajadas, é imperativo considerar esses fatores, comumente referidos como fatores de esteira por [ANDERSON \(2017\)](#).

A solução para o fluxo em torno do aerofólio sujeito a oscilação harmônica tanto no sentido translacional quanto em movimento rotacional é delineada da seguinte forma:

Os termos circulatorios estão intrinsecamente relacionados às vorticidades, conforme descrito pela função de Theodorsen, uma função complexa $C(k) = F(k) + iG(k)$, sendo os responsáveis pela geração de forças aerodinâmicas de momento e sustentação. Em contraste, os termos não circulatorios englobam forças de inércia provenientes de razões diversas da vorticidade. Esses termos não circulatorios podem incorporar uma sustentação resultante da diferença de pressão entre a superfície superior e inferior do aerofólio, gerando assim uma força de sustentação. Além disso, os termos não circulatorios podem incluir um arrasto derivado da componente de pressão, no qual a discrepância de pressão entre a parte superior e inferior do aerofólio resulta em uma força de arrasto que age como uma resistência ao movimento do aerofólio através do ar.

Considerando um aerofólio bidimensional de corda c e ec centro elástico, conforme abordado por [WRIGHT and COOPER \(2015\)](#), com um eixo elástico localizado a uma distância de $ab = (\frac{ac}{2})$ após o meio da corda, conforme ilustrado na Fig. (8), submetido a um movimento translacional expresso por $z = z_0 e^{i\omega t}$ e a um movimento rotacional expresso por $\theta = \theta_0 e^{i\omega t}$, a solução clássica para sustentação e momento sobre o eixo elástico, normalizada pela envergadura e idealizada por Theodorsen, por [FUNG \(1969\)](#) e [BISPLINHOFF et al. \(1996\)](#), é expressa como;

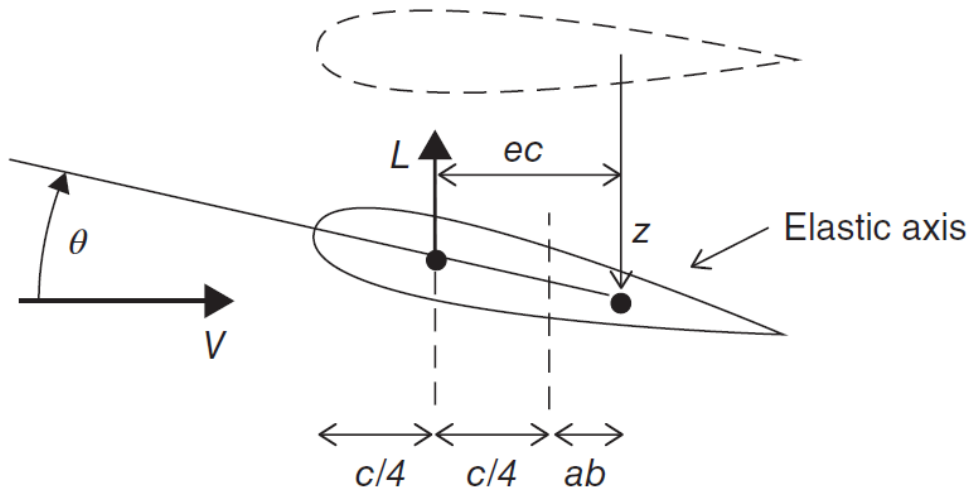


Figura 8 – Aerofólio sob movimento translacional e de rotação. Fonte: [WRIGHT and COOPER \(2015\)](#)

$$\mathbf{L} = \pi \rho b^2 \left[\ddot{\mathbf{z}} + \mathbf{v} \dot{\boldsymbol{\theta}} - ba \ddot{\boldsymbol{\theta}} \right] + 2\pi \rho \mathbf{v} b C(k) \left[\dot{\mathbf{z}} + \mathbf{v} \boldsymbol{\theta} + b \left(\frac{1}{2} - a \right) \dot{\boldsymbol{\theta}} \right] \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M} = & \pi \rho b^2 \left[ba \ddot{\mathbf{z}} - \mathbf{v} b \left(\frac{1}{2} - a \right) \dot{\boldsymbol{\theta}} - b^2 \left(\frac{1}{8} - a^2 \right) \ddot{\boldsymbol{\theta}} \right] \\ & + 2\pi \rho \mathbf{v} b^2 \left(a + \frac{1}{2} \right) C(k) \left[\dot{\mathbf{z}} + \mathbf{v} \boldsymbol{\theta} + b \left(\frac{1}{2} - a \right) \dot{\boldsymbol{\theta}} \right] \end{aligned} \quad (2.18)$$

Escrevendo as expressões do momento e da sustentação na forma algébrica complexa:

$$\begin{aligned} \mathbf{L} = & \left\{ \pi \rho b^2 \left[-\omega^2 \mathbf{z}_0 + i\omega \mathbf{v} \boldsymbol{\theta}_0 + \omega^2 ba \boldsymbol{\theta}_0 \right] \right. \\ & \left. + 2\pi \rho \mathbf{v} b (F + iG) \left[i\omega \mathbf{z}_0 + \mathbf{v} \boldsymbol{\theta}_0 + i\omega b \left(\frac{1}{2} - a \right) \boldsymbol{\theta}_0 \right] \right\} e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M} = & \left\{ \pi \rho b^2 \left[-\omega^2 ba \mathbf{z}_0 - i\omega \mathbf{v} b \left(\frac{1}{2} - a \right) \boldsymbol{\theta}_0 + b^2 \omega^2 \left(\frac{1}{8} + a^2 \right) \boldsymbol{\theta}_0 \right] \right. \\ & \left. + 2\pi \rho \mathbf{v} b^2 \left(a + \frac{1}{2} \right) (F + iG) \left[i\omega \mathbf{z}_0 + \mathbf{v} \boldsymbol{\theta}_0 + i\omega b \left(\frac{1}{2} - a \right) \boldsymbol{\theta}_0 \right] \right\} e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (2.20)$$

Essas equações podem ser expressas na forma derivativa;

$$\mathbf{L} = \rho \mathbf{v}^2 b \left[(\mathbf{L}_z + ik \mathbf{L}_{\dot{z}}) \frac{\mathbf{z}_0}{b} + (\mathbf{L}_{\boldsymbol{\theta}_0} + ik \mathbf{L}_{\dot{\boldsymbol{\theta}}_0}) \boldsymbol{\theta}_0 \right] e^{i\omega t} \quad (2.21)$$

$$\mathbf{M} = \rho \mathbf{v}^2 b^2 \left[(\mathbf{M}_z + ik \mathbf{M}_{\dot{z}}) \frac{\mathbf{z}_0}{b} + (\mathbf{M}_{\boldsymbol{\theta}_0} + ik \mathbf{M}_{\dot{\boldsymbol{\theta}}_0}) \boldsymbol{\theta}_0 \right] e^{i\omega t} \quad (2.22)$$

Ao comparar as Eq. (2.19) e Eq. (2.21), obtêm-se as derivadas de sustentação,

$$\mathbf{L}_z = 2\pi \left(-\frac{k^2}{2} - Gk \right) \quad (2.23)$$

$$\mathbf{L}_{\dot{z}} = 2\pi F \quad (2.24)$$

$$\mathbf{L}_\theta = 2\pi \left[\frac{k^2 a}{2} + F - Gk \left(\frac{1}{2} - a \right) \right] \quad (2.25)$$

$$\mathbf{L}_{\dot{\theta}} = 2\pi \left[\frac{1}{2} + F \left(\frac{1}{2} - a \right) + \frac{G}{k} \right] \quad (2.26)$$

Ao comparar as Eq. (2.20) e Eq. (2.22), obtêm-se as derivadas de momento,

$$\mathbf{M}_z = 2\pi \left[-\frac{k^2}{2} - k \left(a + \frac{1}{2} \right) G \right] \quad (2.27)$$

$$\mathbf{M}_{\dot{z}} = 2\pi \left(a + \frac{1}{2} \right) F \quad (2.28)$$

$$\mathbf{M}_\theta = 2\pi \left[\frac{k^2}{2} \left(\frac{1}{8} - a^2 \right) + F \left(s + \frac{1}{2} \right) - kG \left(A + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{2} - a \right) \right] \quad (2.29)$$

$$\mathbf{M}_{\dot{\theta}} = 2\pi \left[-\frac{k}{2} \left(\frac{1}{2} - a \right) + kF \left(a + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{2} - a \right) + \frac{G}{k} \left(a + \frac{1}{2} \right) \right] \quad (2.30)$$

Com base nos parâmetros \mathbf{L}_z e $\mathbf{L}_{\dot{z}}$, as magnitudes derivativas apresentam uma dependência significativa da posição do eixo elástico ao longo da corda.

Em um regime de quasi-estacionaridade para as derivadas aerodinâmicas, caracterizado pelo limite $k \rightarrow 0$, $F \rightarrow 1$, $G \rightarrow 0$, observa-se que:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_z &= 0 & \mathbf{L}_{\dot{z}} &= 2\pi & k\mathbf{L}_{\dot{\theta}} &= 0 & \mathbf{M}_z &= 0 \\ \mathbf{M}_{\dot{z}} &= 2\pi \left(a + \frac{1}{2} \right) & \mathbf{M}_\theta &= 2\pi \left(a + \frac{1}{2} \right) & k\mathbf{M}_{\dot{\theta}} &= 0 \end{aligned} \quad (2.31)$$

Com base nas informações disponíveis, é viável prosseguir com a dedução das matrizes de rigidez e amortecimento aerodinâmico empregadas em sistemas aeroelásticos dinâmicos. Conforme destacado por HANCOCK et al. (1927), o termo aerodinâmico não estacionário M_θ , responsável pelo amortecimento aerodinâmico devido ao momento de arfagem, emerge como uma componente de proeminente relevância na análise. WRIGHT and COOPER (2015) propõem uma aproximação para esse termo, fixando-o em $-1,2$, e tal constante tem-se revelado

como um valor bastante apropriado em consonância com dados empíricos, demonstrando, adicionalmente, independência em relação à frequência. Considerando a frequência reduzida em relação à frequência natural, definida por $s = \frac{\omega b}{v}$, e procedendo com a análise dos deslocamentos verticais e de rotação, i.e., $z = z_0 e^{i\omega t}$ e $\theta = \theta_0 e^{i\omega t}$, juntamente com suas derivadas $\dot{z} = i\omega z_0 e^{i\omega t}$ e $\dot{\theta} = i\omega \theta_0 e^{i\omega t}$, permite-se a substituição destas grandezas nas equações em questão. Eq. (2.21) e Eq. (2.22);

$$\mathbf{L} = \rho v^2 \left(\mathbf{L}_z z + \mathbf{L}_{\dot{z}} \frac{b\dot{z}}{v} + \mathbf{L}_\theta b\theta + \mathbf{L}_{\dot{\theta}} \frac{b^2\dot{\theta}}{v} \right) \quad (2.32)$$

$$\mathbf{L} = \rho v^2 \left(\mathbf{M}_z b z + \mathbf{M}_{\dot{z}} \frac{b^2\dot{z}}{v} + \mathbf{M}_\theta b^2\theta + \mathbf{M}_{\dot{\theta}} \frac{b^2\dot{\theta}}{v} \right) \quad (2.33)$$

Reescrevendo na forma matricial:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \mathbf{L} \\ \mathbf{M} \end{Bmatrix} &= \rho v \begin{bmatrix} b\mathbf{L}_{\dot{z}} & b^2\mathbf{L}_{\dot{\theta}} \\ b^2\mathbf{M}_{\dot{z}} & b^3\mathbf{M}_{\dot{\theta}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{z} \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} + \rho v^2 \begin{bmatrix} \mathbf{L}_z & b\mathbf{L}_\theta \\ b\mathbf{M}_z & b^2\mathbf{M}_\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z \\ \theta \end{Bmatrix} \\ &= \rho v \mathbf{B} \begin{Bmatrix} \dot{z} \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} + \rho v^2 \mathbf{C} \begin{Bmatrix} z \\ \theta \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (2.34)$$

Para o desfecho, as matrizes que delineiam as características de amortecimento e rigidez aerodinâmicas são representadas por \mathbf{B} e \mathbf{C} , respectivamente.

2.1.3 Plotagem dos gráficos V-g-f e obtenção da Velocidade de *flutter*

A investigação do *flutter* em sistemas aeroelásticos tem grande importância ao assegurar a estabilidade e segurança dessas estruturas. Ademais, proporciona uma maior viabilidade ao desenvolvimento de novas aeronaves, permitindo a aplicação de métodos analíticos sofisticados para prevenir a ocorrência desses fenômenos no envelope de voo, evitando custos associados à manufatura de fuselagens suscetíveis ao *flutter*. A análise é conduzida por meio de diversos métodos, como os K ou P-K, abordados de forma mais detalhada no capítulo de metodologia. A construção dos gráficos V-g-f emerge como uma ferramenta primordial para essa análise, onde são plotadas a velocidade do fluxo de ar, frequência associada ao modo aeroelástico e taxa de amortecimento inerente a estrutura da asa por [WRIGHT and COOPER \(2015\)](#). Assim, a análise de *flutter* constitui uma etapa crucial no ciclo de desenvolvimento de aeronaves.

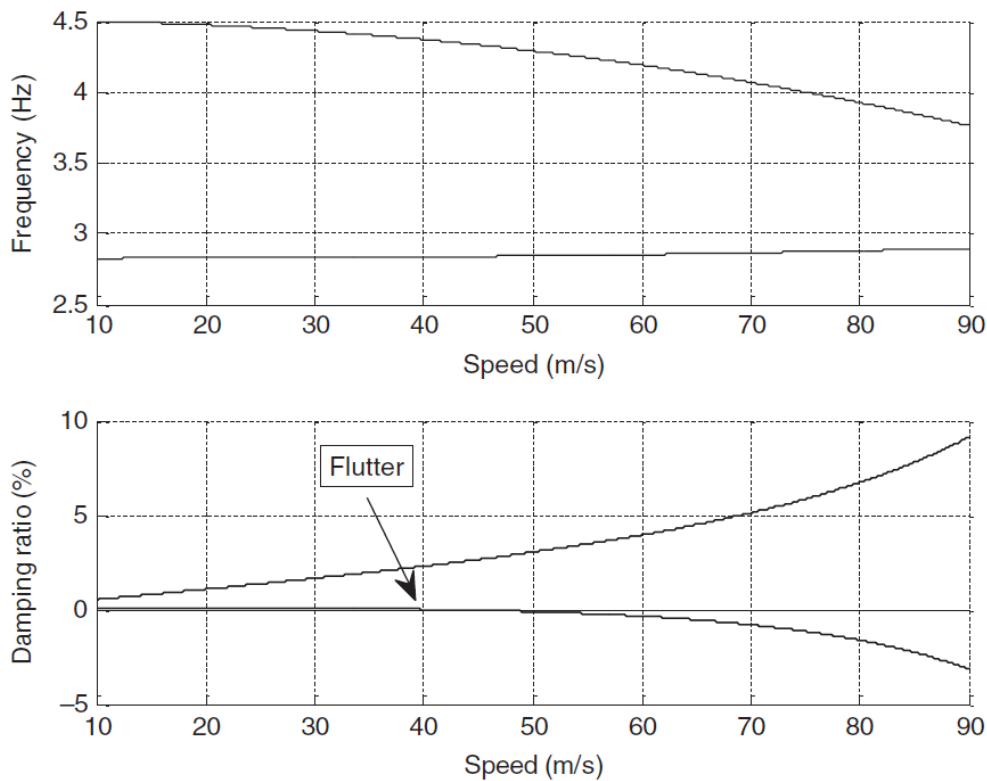


Figura 9 – Gráfico V-g-f. Fonte: [WRIGHT and COOPER \(2015\)](#)

O gráfico V-g-f é delineado em um plano cartesiano, com o eixo x representando a velocidade e o eixo y representando a taxa de amortecimento, enquanto as frequências são representadas em função desses eixos. O número de linhas no gráfico é equivalente ao número de graus de liberdade, visto que a frequência é calculada para cada grau de liberdade, os graus de liberdade no presente trabalho são os esforços que a asa está suscetível e a deformação causada pela mesma como a flexão e torção que geram deformação e com base nesses esforços obtém-se como resposta a angulação da superfície de controle. Desta maneira, o gráfico V-g-f manifesta-se como uma ferramenta indispensável para a análise do *flutter* em sistemas aeroelásticos.

A interpretação dessas representações gráficas assume papel fundamental para avaliar as condições propícias ao *flutter* e estabelecer limites de segurança para o projeto e operação das estruturas aeroelásticas. A análise dos gráficos permite a identificação de comportamentos dinâmicos que comprometam a integridade estrutural da aeronave ou do sistema em estudo. Apresenta-se um exemplo de gráfico V-g-f para 2 graus de liberdade de uma asa reta na Fig. (9) sendo os graus de liberdade os modos aeroelásticos sendo o primeiro modo o de flexão e o segundo de torção por [WRIGHT and COOPER \(2015\)](#). É importante notar que em análises aeroelásticas trabalha-se com modos aeroelásticos e não com a frequência natural da estrutura, as quais não podem ser alteradas. Desse modo, a análise dos gráficos V-g-f representa um estágio crítico no processo de projeto de aeronaves.

2.2 Fundamentos de Controle

Dentro do âmbito dos sistemas de controle para supressão de *flutter*, a monitoração de variáveis vinculadas à dinâmica da asa se revela crucial. Esses parâmetros são reintroduzidos no sistema por intermédio de um sistema de atuação, sendo o deslocamento da superfície de controle empregado como comando de atuação, com atuadores como servo motores ou outros dispositivos que atendam aos requisitos do sistema. É saliente observar que cargas dinâmicas mais elevadas podem requerer um sistema hidráulico devido à magnitude necessária de força, como aviões comerciais.

Na aeroservoelasticidade, os sistemas de controle são implementados para suprimir o *flutter* e mitigar o comportamento oscilatório de estruturas aeronáuticas. O propósito da supressão do *flutter* é otimizar o peso estrutural dos componentes e aprimorar a eficiência e manobrabilidade da aeronave por COSTA (2007). O *flutter* representa uma instabilidade aeroelástica dinâmica decorrente da interação entre forças aerodinâmicas, elásticas e inerciais. Ele pode manifestar-se em superfícies de aeronaves, como asas, desencadeando comportamento oscilatório autossustentado e possíveis complicações estruturais se não for devidamente suprimido. Para atender a essa problemática, os sistemas de controle intervêm na estabilização e controle das oscilações, contribuindo para a segurança e desempenho das aeronaves.

Uma abundância de livros publicados que abordam sistemas de controle aeronáutico (WANG, 2009; WRIGHT and COOPER, 2015; TEWARI, 2016) adotam uma modelagem utilizando a representação no espaço de estados, uma vez que essa abordagem é mais apropriada para lidar com sistemas de maior complexidade. A teoria fundamental para trabalhar com controladores para sistemas lineares no espaço de estados pode ser encontrada em obras clássicas, como os livros de DORF and BISHOP (2021b), WRIGHT and COOPER (2015) e NISE (2017). Como não é o foco do trabalho apresenta-se uma breve introdução.

A abordagem no espaço de estados é empregada no projeto de controladores MIMO (múltiplas entradas e múltiplas saídas). Sistemas de controle MIMO possibilitam realimentar sinais provenientes de vários sensores em mais de um sistema, como ailerons, spoilers e atuadores piezoelétricos integrados à estrutura. Esse tipo de sistema é notoriamente complexo por COSTA (2007).

Entretanto, WRIGHT and COOPER (2015) apresenta uma metodologia simplificada e conclui que leis de controle muito simples e sistemas SISO (uma entrada e uma saída) são suficientes para eficaz supressão do *flutter*.

2.2.1 Malha Aberta e Malha Fechada

- Malha Aberta: Em um sistema de malha aberta, o controlador envia um sinal de controle para o processo, sem receber nenhuma informação sobre o estado atual do processo, ou

seja, não se tem uma retroalimentação. Isso significa que o sistema não monitora o resultado ou o efeito das ações de controle que está executando.

- **Malha Fechada:** Em um sistema de malha fechada, o controlador monitora continuamente o resultado do processo por meio de sensores e utiliza essa informação para ajustar a ação de controle, ou seja, o sistema monitora continuamente o processo e realiza ajustes com base em informações em tempo real, tornando-o mais preciso e adaptável às mudanças nas condições do processo.

2.2.2 Representação em estado de espaços

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathcal{A}\mathbf{x} + \mathcal{B}\mathbf{u}$$

$$\mathbf{y} = \mathcal{C}\mathbf{x} + \mathcal{D}\mathbf{u}$$

\mathbf{x} = Vetor de estado

$\dot{\mathbf{x}}$ = Derivada do vetor de estado em relação ao tempo

\mathbf{y} = Vetor de saída

\mathbf{u} = Vetor de entrada ou vetor de controle

\mathcal{A} = Matriz do sistema

\mathcal{B} = Matriz de entrada

\mathcal{C} = Matriz de saída

\mathcal{D} = Matriz de transmissão direta

Ao se descrever um sistema, o número mínimo de equações necessário corresponde à ordem da equação diferencial que caracteriza o sistema. Entretanto, é possível introduzir variáveis de estado adicional, contanto que esta seja linearmente independente das demais. No cenário em análise, a velocidade da massa será empregada como variável de estado, sendo linearmente independente da posição da massa. Para obter a posição da massa, é viável realizar a integração da velocidade de saída por [NISE \(2017\)](#).

As matrizes \mathcal{A} , \mathcal{B} , \mathcal{C} , \mathcal{D} são descritas por [WRIGHT and COOPER \(2015\)](#):

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ -\mathbf{A}^{-1}(\rho V^2 \mathbf{C} + \mathbf{E}) & -\mathbf{A}^{-1}(\rho V \mathbf{B}) \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

$$\mathcal{B} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \mathbf{A}^{-1} \mathbf{g} \end{Bmatrix} \quad (2.36)$$

$$\mathbf{g} = \rho V^2 \left\{ \begin{array}{c} -ca_c s \\ \frac{6}{c^2 b_c s} \\ \frac{4}{4} \end{array} \right\} \quad (2.37)$$

$$\mathcal{C} = [0, 1, 0, -x_f] \quad (2.38)$$

$$\mathcal{D} = [0] \quad (2.39)$$

Com foco em uma compreensão mais clara do trabalho, algumas variáveis do sistema em espaço de estados são demonstradas detalhadamente por [WRIGHT and COOPER \(2015\)](#). Embora sejam explicadas com maior rigor na seção sobre o modelo dinâmico.

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_b \\ \mathbf{q}_t \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

Sendo \mathbf{q}_b e \mathbf{q}_t as coordenadas generalizadas para a amplitude da flexão e torção. As coordenadas generalizadas são baseadas em vetores por [WRIGHT and COOPER \(2015\)](#):

$$\mathbf{q}_b = \begin{bmatrix} z_b \\ \theta_b \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

$$\mathbf{q}_t = \begin{bmatrix} z_t \\ \theta_t \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

A partir das forças gerada pelo modelo aerodinâmico não estacionário podemos calcular z e θ , relembrando o capítulo de modelo aerodinâmico não estacionário por [WRIGHT and COOPER \(2015\)](#).

$$\begin{aligned} z &= z_0 e^{i\omega t} & \text{e} & \quad \theta = \theta_0 e^{i\omega t} \\ \dot{z} &= i\omega z_0 e^{i\omega t} & \text{e} & \quad \dot{\theta} = i\omega \theta_0 e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (2.43)$$

Considerando a entrada de controle $\mathbf{u} = \{\beta\}$ e um termo de perturbação de rajada estão presentes, tendo como a saída medida \mathbf{y} dada por [WRIGHT and COOPER \(2015\)](#)

$$\mathbf{y} = \{\dot{z}_a\} = [0 \ 1 \ 0 \ -x_f] \left\{ \begin{array}{c} q_b \ \dot{q}_b \ q_t \ \dot{q}_t \end{array} \right\}^T = \mathbf{C}\mathbf{x} \quad (2.44)$$

Explicitando o vetor de controle \mathbf{u} .

$$\mathbf{u} = \{\beta\} = [K]\{\dot{z}_a\} = Ky \quad (2.45)$$

Onde \mathbf{K} é a matriz de ganhos.

Substituindo a Eq. (2.45) por K_s , sendo o s para simbolizar variáveis em espaço de estados, a Eq. (3.27) sofre simplificações, resultando na equação de estado revisada para o sistema em malha fechada.

$$\dot{\mathbf{x}} = [\mathbf{A}_s + \mathbf{B}_s \mathbf{K}_s \mathbf{C}_s] \mathbf{x} + \mathbf{E}_s \mathbf{w}_g \quad (2.46)$$

2.2.3 Controlador PID

O Controlador Proporcional-Integral-Derivativo (PID), conhecido também como controlador de três termos, encontra aplicações em diversas áreas, tais como eletrônica de sistemas, pilotos automáticos, navios e robôs industriais. Sua notoriedade decorre da estrutura simples e da robustez em várias aplicações, somada à familiaridade de engenheiros e técnicos com o algoritmo PID, devido à sua implementação facilitada. Como consequência dessas características, o Controlador PID é frequentemente adotado como uma introdução aos sistemas de controle por [DORF and BISHOP \(2021a\)](#).

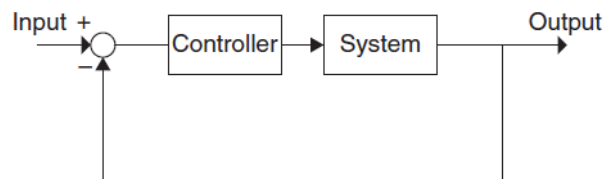


Figura 10 – Sistema de malha fechada com um controlador direto e um circuito de feedback de unidade.: [WRIGHT and COOPER \(2015\)](#)

O paradigma predominante de estratégia de controle define o controlador do sistema, conforme representado na Fig. (10), como uma composição linear do erro E , juntamente com o seu proporcional P sua integral I e sua derivada D , multiplicadas por valores de ganho específicos. Dessa forma, o controlador Proporcional-Integral-Derivativo (PID) pode ser expresso como,

$$h_{PID}(t) = k_p E + k_i \int E dt + k_d \frac{dE}{dt}, \quad (2.47)$$

Onde k_p , k_i , k_d são os ganhos proporcional, integral e derivativo. No domínio de Laplace, torna-se:

$$H(s) = k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s \quad (2.48)$$

Diversos esquemas empíricos estão disponíveis para a definição dos três valores de ganho. Contudo, a sintonização dos ganhos ainda se faz necessária para alcançar um desempenho

ideal. O termo proporcional influencia a rapidez da resposta, o termo integral aprimora a precisão do estado estacionário final, enquanto o termo derivativo auxilia na estabilização da resposta.

O controle de feedback de estado adota frequentemente a configuração apresentada na Fig (11), com o feedback do controlador sendo igual a $-k_x$. Tal abordagem converge para técnicas de controle ótimo (Whittle, 1996), as quais determinam que a matriz de ganho k é tal que alguma função de custo seja minimizada.

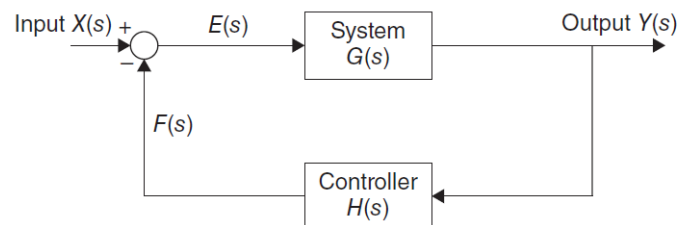


Figura 11 – Sistema em malha fechada com retroalimentação: [WRIGHT and COOPER \(2015\)](#)

No domínio da aerosservoelasticidade, especialmente na análise de *flutter*, tanto sistemas de malha aberta quanto de malha fechada desempenham funções essenciais. A análise de malha aberta consiste na investigação do comportamento estrutural de uma aeronave sem a influência de entradas de controle, possibilitando a identificação de velocidades e modos críticos de *flutter*. Por outro lado, a análise de malha fechada considera os efeitos das leis de controle e dos mecanismos de feedback no controle do *flutter*. Ela examina como os sistemas de controle atenuam ou retardam ativamente as oscilações de *flutter*, contribuindo assim para o aumento da estabilidade e segurança da aeronave durante o voo. Uma compreensão abrangente das características de malha aberta e malha fechada é essencial para uma avaliação completa dos fenômenos de *flutter* no contexto da engenharia aeronáutica.

2.2.4 Regulador linear quadrático

A execução referente ao projeto de controle automático de controle ótimo assume uma posição de relevância no âmbito dos engenheiros especializados em controle e automação, devido às respostas ótimas. A meta subjacente a este projeto consiste na concepção de um sistema composto por componentes pragmaticamente eficazes, capaz de proporcionar o desempenho operacional almejado. Tal desempenho pode ser diretamente formulado em termos de índices de desempenho no domínio temporal. Neste estudo em específico, quatro variáveis de *Linear Quadratic Regulator* (LQR) são consideradas. O horizonte finito no tempo contínuo é empregado após análise, tendo um conjunto de perturbações limitado. A teoria de controle ótimo consiste em utilizar sistemas dinâmicos baseados em equações diferenciais lineares, ou seja, o controlador LQR trabalha com sistema lineares ou linearizados visando diminuir a função custo. Um dos resultados preponderantes nesta teoria é a solução proporcionada pelo Regulador Linear-

Quadrático (LQR), um controlador retroalimentado. As equações inerentes a este regulador serão apresentadas a seguir, sendo estas intrínsecas a problemas fundamentais no âmbito da teoria de controle.

Os controladores LQR de horizonte finito ostentam uma robustez inerente [DRAŽENOVIC \(1969\)](#), manifestando-se por meio de ganho e margem de fase;

Robustez inerente: Um sistema é considerado robusto quando a propriedade de interesse permanece confinada a uma região delimitada diante de uma classe de perturbações limitadas por [DRAŽENOVIC \(1969\)](#).

As configurações de um controlador regente de um sistema mecânico ou de um processo, onde o processo pode ser interpretado como um conjunto de máquinas em operação (exemplificado por um avião, por exemplo), podem ser determinadas mediante um algoritmo matemático que minimiza uma função de custo ponderada pelos fatores determinados por um engenheiro. Esta função de custo, frequentemente definida como a soma dos desvios das principais medições, tais como altitude, em relação aos valores desejados, pode incluir a magnitude da ação de controle por meio de uma inequação $\leq X$ por [DORF and BISHOP \(2021b\)](#), X é um valor escalar que representa a magnitude máxima permitida para a ação de controle. O algoritmo LQR visa minimizar a quantidade de trabalho demandada ao engenheiro de sistemas de controle para otimizar o controlador. Entretanto, o engenheiro ainda é responsável por especificar os parâmetros da função de custo e avaliar os resultados em relação aos objetivos de projeto delineados, realizando ajustes conforme necessário. Isso atesta que a construção de um controlador constitui um processo iterativo, no qual o engenheiro avalia os controladores “ótimos” gerados por meio de simulação e, posteriormente, ajusta os parâmetros para obter um controlador mais alinhado com os objetivos do projeto.

O algoritmo LQR é essencialmente uma forma analítica que podemos automatizar por meio de parametrizações com o intuito de encontrar os ganhos para um controlador de feedback de estado apropriado. A dificuldade em encontrar os fatores de ponderação corretos limita a aplicação da síntese do controlador baseado em LQR embora para sistemas mais complexos seja mais intuitivo. Existem quatro variações do LQR: horizonte finito e infinito no tempo contínuo e horizonte finito e infinito no tempo discreto.

Uma vantagem do método de controle quadrático ótimo sobre o método de alocação é que o primeiro fornece um modo sistemático do cálculo da matriz de ganho de controle por realimentação de estado por [OGATA \(2010\)](#). O desempenho desejado pode ser formulado diretamente em termos de índices de desempenho j no domínio do tempo, também conhecido como função de custo. No caso de desempenho em estado estacionário e transitório, os índices são normalmente especificados no domínio do tempo por [DORF and BISHOP \(2021b\)](#).

Através das medidas de desempenho integral, é possível determinar o desempenho do sistema de controle, fundamentando assim o projeto do sistema com base na minimização de

um índice de desempenho. Os sistemas ajustados para proporcionar um índice de desempenho mínimo são designados como sistemas de controle ótimo. O presente trabalho empregará uma formulação em termos de variáveis de estado, considerando a medida das variáveis de estado e seu uso no desenvolvimento de um sistema de controle $\mathbf{u}(t)$ otimizado em termos de desempenho. O desempenho de um sistema de controle, expresso em termos das variáveis de estado do sistema, é encontrado pela integral [DORF and BISHOP \(2021b\)](#):

$$J = \int_0^{t_f} g(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) dt, \quad (2.49)$$

Como horizonte finito podemos notar na eq.2.49, que temos um intervalo de t_f de $[0, t_f]$.

Onde \mathbf{x} representa o vetor de estado, \mathbf{u} denota o vetor de controle, e t_f é equivalente ao instante final. A condição *sine qua non* (ou seja, essencial) para o sistema alcançar um estado ótimo reside na minimização do erro do sistema, onde $X_d = 0$. Nesse contexto, o erro pode ser conceptualmente equiparado ao valor do vetor de estado quando $\mathbf{x} = X_d = 0$. A situação em que $\mathbf{x} = X_d = 0$ denota que o sistema encontra-se em um estado de equilíbrio, e qualquer desvio deste estado é considerado uma manifestação de erro. Consequentemente, no desenvolvimento de um sistema de controle ótimo, será adotada uma abordagem de retroalimentação envolvendo variáveis de estado e índices de desempenho associados ao erro quadrático por [DORF and BISHOP \(2021b\)](#).

Considerando uma planta modelada no espaço de estados por meio de uma equação diferencial vetorial

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (2.50)$$

Com um controlador com retroação de modo que \mathbf{u} seja alguma função das variáveis de estado medidas \mathbf{x} ,

$$\mathbf{u} = \mathbf{k}(\mathbf{x}) \quad (2.51)$$

A escolha de sinais de controle é arbitrária e depende parcialmente do desempenho real desejado e da complexidade da estrutura de retroação admissível. Tem-se uma limitação quanto ao número de variáveis de estado disponíveis para retroação, uma vez que só é possível utilizar variáveis de estado mensuráveis. Podemos limitar a função de retroação a uma função linear de modo que $\mathbf{u} = \mathbf{K}\mathbf{x}$, onde \mathbf{K} é uma matriz $m \times n$. Assim, em forma matricial tem-se por [DORF and BISHOP \(2021b\)](#)

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & \cdots & k_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{m1} & \cdots & k_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (2.52)$$

Substituindo Eq. (2.52) na Eq. (2.50), obtém-se

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathcal{A}\mathbf{x} + \mathcal{B}\mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{H}\mathbf{x}, \quad (2.53)$$

Resultando na matriz \mathbf{H} $n \times n$ da adição dos elementos \mathcal{A} e de $\mathcal{B}\mathbf{k}$.

O índice de desempenho do erro quadrático para o índice de desempenho para uma única variável de estado, \mathbf{x}_1 , é escrito como

$$J = \int_0^{t_f} [\mathbf{x}_1(\mathbf{t})]^2 dt \quad (2.54)$$

Para duas variáveis de estado seria, então,

$$J = \int_0^{t_f} [\mathbf{x}_1^2 + \mathbf{x}_2^2] dt \quad (2.55)$$

Dado que o índice de desempenho é expresso como a integral da soma dos quadrados das variáveis de estado, utilizaremos \mathbf{x}^T para denotar a transposta da matriz \mathbf{x} . Assim, alcançamos a forma específica do índice de desempenho em termos do vetor de estado por [DORF and BISHOP \(2021b\)](#),

$$J = \int_0^{t_f} (\mathbf{x}^T \mathbf{x}) dt \quad (2.56)$$

A forma geral do índice de desempenho, conforme expressa na Eq. (2.49), engloba um termo relacionado a \mathbf{u} que ainda não foi incorporado neste ponto, mas será abordado posteriormente nesta seção por [DORF and BISHOP \(2021b\)](#).

Revisitando a Eq. (2.56), estabeleceremos o tempo final de interesse como $t_f = \infty$. Para alcançar o valor mínimo de J , consideraremos a existência de uma equação diferencial exata por [DORF and BISHOP \(2021b\)](#), de modo a

$$\frac{d}{dx} (\mathbf{x}^T \mathbf{P}\mathbf{x}) = -\mathbf{x}^T \mathbf{x}, \quad (2.57)$$

Na determinação da matriz \mathbf{P} , a adoção de uma matriz simétrica simplifica a manipulação algébrica. Portanto, para uma matriz simétrica \mathbf{P} , temos $p_{ij} = p_{ji}$. Procedendo à expansão da derivada indicada no lado esquerdo da Eq. (2.57), obtemos por [DORF and BISHOP \(2021b\)](#):

$$\frac{d}{dx} (\mathbf{x}^T \mathbf{P}\mathbf{x}),$$

Substituindo na Eq.(11.9), obtém-se

$$\frac{d}{dx} (\mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x}) = \mathbf{x}^T (\mathbf{H}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{H}) \mathbf{x} \quad (2.58)$$

Onde $(\mathbf{H} \mathbf{x})^T = \mathbf{x}^T \mathbf{H}^T$ pela definição de transporta do produto de matrizes. $(\mathbf{H}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{H}) = -\mathbf{I}$, sendo I a matriz identidade, então a Eq.(2.58) torna-se,

$$\frac{d}{dx} (\mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x}) = -\mathbf{x}^T \mathbf{x}, \quad (2.59)$$

resultando na equação diferencial exata. Substituindo a Eq.(2.59) na Eq.(2.56), obtemos:

$$J = \int_0^\infty -\frac{d}{dt} (\mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x}) dt = -\mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} \Big|_0^\infty = \mathbf{x}^T (\mathbf{0}) \mathbf{P} \mathbf{x} (\mathbf{0}), \quad (2.60)$$

Para o cálculo do limite superior da integral em $T = \infty$ admitiu-se que o sistema é estável e que, portanto, $\mathbf{x}(\infty) = \mathbf{0}$, como desejado. Para minimizar o índice de desempenho J , consideram-se duas equações por [DORF and BISHOP \(2021b\)](#)

$$J = \int_0^\infty \mathbf{x}^T \mathbf{x} dt = \mathbf{x}^T (\mathbf{0}) \mathbf{P} \mathbf{x} (\mathbf{0}), \quad (2.61)$$

e

$$\mathbf{H}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{H} = -\mathbf{I}. \quad (2.62)$$

Incluindo as matrizes \mathbf{R} e \mathbf{Q} na equação de desempenho de um sistema linear quadrático Eq. (2.60) por [DORF and BISHOP \(2021b\)](#), onde \mathbf{Q} é uma matriz com função de penalizar os estados $\mathbf{x}(t)$ e \mathbf{R} é uma matriz com função de penalizar os esforços o esforço de controle $\mathbf{u}(t)$ por [HESPANHA \(2018\)](#), temos

$$J = \int_0^\infty (\mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q} \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R} \mathbf{u}(t)) dt \quad (2.63)$$

As etapas do projeto a seguir são por [DORF and BISHOP \(2021b\)](#):

- Determinar a matriz \mathbf{P} que satisfaz a Eq.(2.62), onde \mathbf{H} é conhecida.
- Minimizar J determinando o mínimo da Eq.(2.61), por meio do ajuste de um ou mais parâmetros do sistema.

2.2.4.1 Análise da estabilidade aeroelastica incluindo um modelo LQR

O código implementa um modelo de *flutter* aeroelástico para uma asa, incorporando controle linear quadrático (LQR) para estabilização. Inicialmente, são definidos os pesos Q e

R que influenciam na função custo a ser minimizada pelo controlador LQR. Posteriormente, os parâmetros do sistema são especificados, incluindo características geométricas da asa, massa, densidade do ar e termos de amortecimento torsional não estacionários .

As matrizes de inércia A e rigidez E , juntamente com as matrizes de amortecimento e rigidez aerodinâmica B e C , são calculadas para representar as propriedades dinâmicas do sistema. Em seguida, um loop é iniciado para iterar sobre diferentes velocidades que o sistema estará suscetível, onde é calculada as matrizes do sistema em espaço de estados $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$.

No loop, o controlador LQR é calculado utilizando as matrizes \mathcal{A} e \mathcal{B} do sistema, bem como os pesos Q e R previamente definidos. Os termos de controle da superfície são calculados com base na velocidade do vento, e as matrizes de feedback de controle são derivadas. Além disso, os termos de rajada são determinados para modelar a influência das rajadas de vento no sistema.

As matrizes do sistema são então configuradas, e os autovalores são calculados usando a função ‘polyeig’. A estabilidade do sistema é verificada através da análise dos autovalores, procurando por aqueles com parte real negativa, importante verificar que essa interpretação é para análises aeroelásticas onde queremos a troca de sinal do modo, o que indicaria instabilidade. Caso autovalores instáveis sejam encontrados, a velocidade de *flutter* correspondente é impressa, sendo verificada no gráfico $V - g - f$, no modo que primeiro demonstrar um amortecimento negativo.

Após a análise de estabilidade do sistema com as matrizes em espaço de estados, o código continua iterando sobre diferentes velocidades de vento ou até que uma velocidade de *flutter* seja identificada ou a velocidade de vento final, seja alcançada. Posteriormente, o código realiza uma varredura do ganho do controlador LQR e calcula os autovalores correspondentes para cada valor de ganho, proporcionando uma análise mais detalhada do comportamento do sistema em relação à estabilidade.

O código utilizado simula o comportamento aeroelástico de uma asa em diferentes velocidades de vento, aplicando um controlador LQR para estabilização e verificando a estabilidade do sistema em relação à velocidade de *flutter*.

Para cada velocidade é encontrado os valores das frequências e amortecimentos do sistema dinâmico tanto para malha aberta como para malha fechada.

2.3 Fundamentos da Resposta Rajada 1 – $Cos(\theta)$

Para simular a resposta à rajada, incorporaremos o efeito de uma rajada vertical uniforme de velocidade w_g ao longo de toda a envergadura da asa, a fim de induzir uma perturbação externa, como anteriormente demonstrado na inclusão de uma perturbação externa na Seção 3.1. Esta abordagem simplificada é embasada em uma série de pressupostos. A Fig. (12) ilustra

que uma rajada resultará em uma mudança instantânea efetiva de incidência $\Delta\theta$ devido a tal perturbação;

$$\Delta\theta = \frac{w_g}{v} \quad (2.64)$$



Figura 12 – Ângulo Efetivo de incidência devido rajada vertical. Fonte: [WRIGHT and COOPER \(2015\)](#).

Adicionando a sustentação e o momento de arfagem agindo em uma faixa elementar na asa devido à rajada se torna:

$$dL_{\text{Gust}} = \frac{1}{2} \rho v^2 c dy a_w \frac{w_g}{v} \quad dM_{\text{Gust}} = \frac{1}{2} \rho v^2 c^2 dy e a_w \frac{w_g}{v}$$

Agora adicionando o termo de excitação do lado direito devido à entrada de rajada é:

$$\rho v \left\{ \begin{array}{c} -\frac{ca_w s}{6} \\ \frac{c^2 e a_w s}{4} \end{array} \right\} w_g = \left\{ \begin{array}{c} h_1 \\ h_2 \end{array} \right\} w_g = \mathbf{h} w_g \quad (2.65)$$

Assim, o sistema com controle e excitação de rajada tem a seguinte forma geral:

$$\mathbf{A}\ddot{\mathbf{q}} + \rho v \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} + (\rho v^2 \mathbf{C} + \mathbf{E})\mathbf{q} = \mathbf{g}\beta + \mathbf{h}w_g \quad (2.66)$$

Mais uma vez, por praticidade, o termo ρv está incorporado no vetor de excitação de rajada \mathbf{h} . Agora, o termo de perturbação da rajada surge no lado direito das equações, juntamente com a entrada proveniente da superfície de controle. É evidente que a resposta resultante de um histórico temporal da rajada pode agora ser calculada.

Ilustrando o sistema de blocos utilizado no MATLAB para realizar as simulações de rajadas, segue uma foto com o intuito de facilitar o entendimento do fluxo de trabalho.

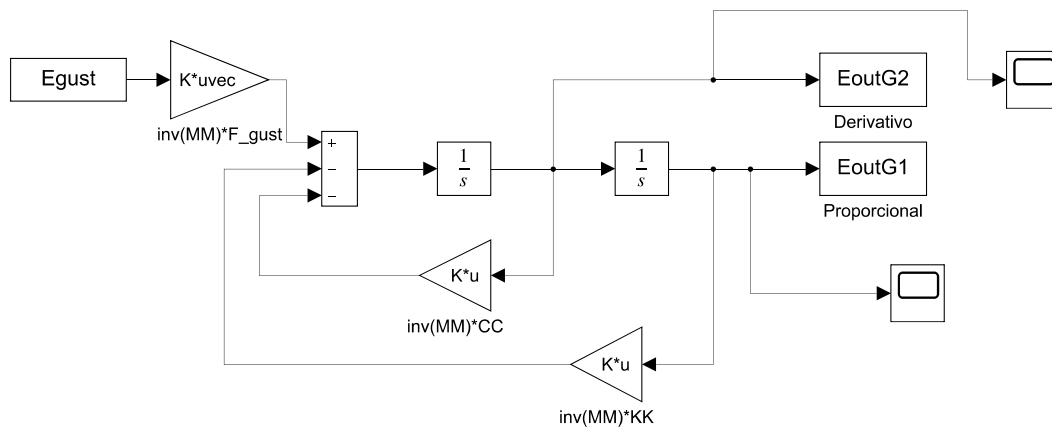


Figura 13 – Diagrama de blocos Simulink® para resposta a rajada, [WRIGHT and COOPER \(2015\)](#).

3 Modelo Aeroservoelástico

3.1 Modelagem Matemática

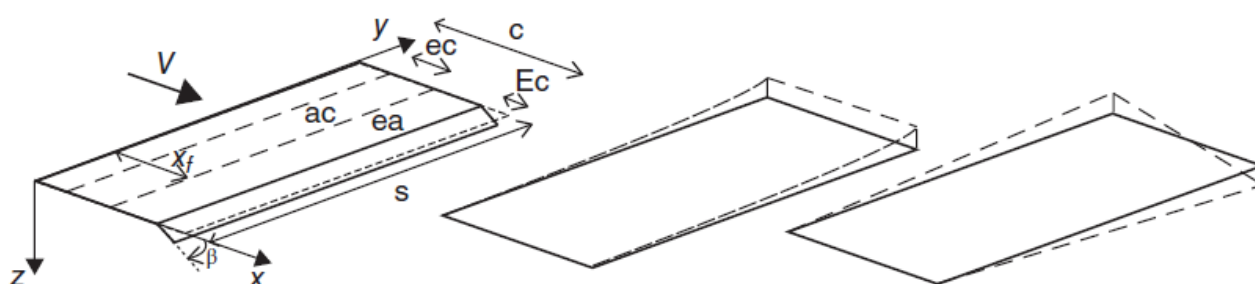


Figura 14 – Modelo aeroelástico demonstrando flexão e torção com uma superfície de controle.
Fonte: [WRIGHT and COOPER \(2015\)](#).

A plataforma Matlab® e Simulink® foi empregada para incorporar um modelo de asa com 2 graus de liberdade e uma superfície de controle para a análise aeroservoelástica, para a análise em malha aberta durante a análise aeroelástica foi utilizado o modelo de 3 graus de liberdade, ambos definidos por parâmetros matematicamente descritos.

O Simulink® desempenhou um papel essencial na construção de um diagrama de blocos para simular o sistema PID e a resposta a rajada. Posteriormente, após a operacionalização bem-sucedida do código e validação, a parametrização de variáveis com influência notável no comportamento relacionado ao *flutter* da asa foi realizada. Os resultados que se seguiram são apresentados aqui. Os parâmetros físicos e geométricos utilizados por [WRIGHT and COOPER 2015](#), bem como aqueles descritos adicionalmente neste estudo, são detalhados na Tab. (1).

O modelo utilizado nas simulações apresentadas neste trabalho foi derivado de [WRIGHT and COOPER \(2015\)](#). Ele foi estabelecido por meio da aplicação das equações de energia de Lagrange para o movimento, conforme detalhado em [RAO \(2017\)](#). O modelo consiste em uma asa retangular reta, sem enflechamento e afilamento, sendo rígida e de material homogêneo. Enquanto o modelo aerodinâmico instável empregado é fundamentado no método de aproxima-

ção de HANCOK et al. (1927). Dessa perspectiva, é possível definir o problema ASE pela Eq. (3.18).

A variável x_f representa a distância do eixo elástico até o bordo de ataque Figura (14). O eixo elástico é uma linha transversal na geometria da asa, encontrada analiticamente. Como a asa é simétrica e tem uma forma geométrica comum, é possível encontrar a centroide de forma simples utilizando fórmulas da literatura para um retângulo, que o coloca no centro da figura, conforme ilustrado na Fig. (15). Aplicando profundidade no retângulo, tem-se uma linha formando o centro de massa. Considerando os princípios de elasticidade, é possível simplificar que o centro de massa está localizado em função da corda $C_m = 0.5 \times C$. O eixo elástico, por definição, encontra-se próximo do centro de massa, utilizando $X_f = 0.48 \times C$, o X_f não é arbitrário, ele vem da geometria da asa a ser analisada. O eixo elástico é o ponto onde as forças elásticas concentram-se. O e indica a distância do centro aerodinâmico até o eixo elástico. O GJ é a rigidez à torção, e EI é a rigidez à flexão, sendo ambos inerentes ao material utilizado e à geometria da asa. As variáveis a_w e b_w representam, respectivamente, a variação do coeficiente de sustentação em relação ao ângulo de ataque e a variação do coeficiente de sustentação em relação ao ângulo de ataque da superfície de controle. O E é a porcentagem da corda que corresponde ao tamanho da superfície de controle, enquanto s é a semi-envergadura da asa e β representa o deslocamento da superfície de controle. A variável $M_{\dot{\theta}}$ representa a derivada de amortecimento aerodinâmico de controle, e x_h é a distância do bordo de ataque até o início da linha de dobra da superfície de controle. A origem do sistema cartesiano é ilustrada na Figura 14 no canto superior esquerdo.

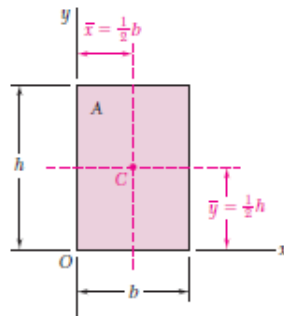


Figura 15 – Centro de massa de um retângulo. Autor: BEER et al. (2011)

Neste modelo, a sustentação e o momento são considerados:

$$\mathbf{L} = \frac{1}{2} \rho \mathbf{v}^2 c a_1 \left(\boldsymbol{\theta} + \frac{\dot{\mathbf{z}}}{\mathbf{v}} \right) \quad (3.1)$$

$$\mathbf{M} = \frac{1}{2}\rho\mathbf{v}^2c^2 \left[ea1 \left(\boldsymbol{\theta} + \frac{\dot{\mathbf{z}}}{\mathbf{v}} \right) + \mathbf{M}_{\dot{\boldsymbol{\theta}}} \frac{\dot{\boldsymbol{\theta}}\mathbf{c}}{4\mathbf{v}} \right] \quad (3.2)$$

A deflexão translacional \mathbf{z} , positiva para baixo é expressa como uma combinação das coordenadas generalizadas \mathbf{q}_b , \mathbf{q}_t e β , rotação da superfície de controle,

$$\mathbf{z} = \left(\frac{y}{s} \right)^2 \mathbf{q}_b + \left(\frac{y}{s} \right) (\mathbf{x} - \mathbf{x}_f) \mathbf{q}_t + \mathbf{x} - \mathbf{x}_h \beta \phi_b \mathbf{q}_b + \phi_t \mathbf{q}_t + \phi_\beta \mathbf{q}_\beta \quad (3.3)$$

Com base nas informações e na Eq. (3.3), é possível afirmar que o modelo é representado matematicamente em termos dos modos assumidos de flexão ϕ_b , torção ϕ_t , e deslocamento da superfície de controle β . A deflexão para baixo no eixo elástico, z_f , e a torção inclinada para cima em relação à sua raiz, θ , são calculadas pelas expressões:

$$\mathbf{z}_f = \left(\frac{y}{s} \right)^2 \mathbf{q}_b \quad (3.4)$$

$$\boldsymbol{\theta} = \left(\frac{y}{s} \right) \mathbf{q}_t \quad (3.5)$$

Para aplicar a equação de Lagrange na determinação das equações de movimento para três graus de liberdade, é imprescindível calcular a energia cinética na asa, representada pelo subscrito a , e na superfície de controle, representada pelo subscrito sc :

$$T_a = \frac{m_a}{2} \int_0^s \int_0^{x_h} \left(\frac{y}{s} \right)^2 \dot{\mathbf{q}}_b + (x - x_f) \left(\frac{y}{s} \right) \dot{\mathbf{q}}_t dx dy \quad (3.6)$$

$$T_{sc} = \frac{m_{sc}}{2} \int_0^s \int_{x_h}^c \left(\frac{y}{s} \right)^2 \dot{\mathbf{q}}_b + (x - x_f) \left(\frac{y}{s} \right) \dot{\mathbf{q}}_t + (x - x_h) \dot{\beta}^2 dx dy \quad (3.7)$$

Onde m_a e m_{sc} representam as massas por unidade de área da asa e superfície de controle, respectivamente. Quanto à energia potencial, temos:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^s EI \left(\frac{2\mathbf{q}_b}{s^2} \right)^2 dy + \frac{1}{2} \int_0^s GJ \left(\frac{\mathbf{q}_t}{s} \right)^2 dy + \frac{1}{2} k_\beta s \beta^2 \quad (3.8)$$

Para as matrizes aerodinâmicas, emprega-se a mesma abordagem da aerodinâmica não estacionária para um aerofólio oscilando harmonicamente, conforme encontrada em [WRIGHT and COOPER \(2015\)](#), com a adição da influência da rotação da superfície de controle:

$$d\mathbf{L} = \frac{1}{2}\rho\mathbf{v}^2c dy \left[a_a \left(\frac{y^2\dot{\mathbf{q}}_b}{s^2\mathbf{v}} + \frac{y}{s}\mathbf{q}_t \right) + a_{sc}\beta \right] \quad (3.9)$$

$$d\mathbf{L} = \frac{1}{2}\rho\mathbf{v}^2c dy \left[b_a \left(\frac{y^2\dot{\mathbf{q}}_b}{s^2\mathbf{v}} + \frac{y}{s}\mathbf{q}_t \right) + \mathbf{M}_{\dot{\boldsymbol{\theta}}} c \frac{y}{4s\mathbf{v}} \dot{\mathbf{q}}_t + b_{sc}\beta \right] \quad (3.10)$$

$$d\mathbf{H} = \frac{1}{2}\rho\mathbf{v}^2 c dy \left[c_a \left(\frac{\mathbf{y}^2 \mathbf{q}_b}{s^2 \mathbf{v}} + \frac{\mathbf{y}}{s} \mathbf{q}_t \right) + \mathbf{M}_{\beta} c \frac{\beta}{4\mathbf{v}} + c_{sc} \beta \right] \quad (3.11)$$

Os coeficientes da asa e da superfície de controle podem ser definidos conforme detalhado em FUNG (1969).

$$\begin{aligned} a_a &= 2\pi \\ b_a &= e a_a \\ c_a &= -\frac{T_{12}}{2} \\ a_{sc} &= \frac{a_a}{\pi} \left[\cos^{-1}(1 - 2E_c) + 2\sqrt{E(1 - E)} \right] \\ b_a &= e a_a \\ b_{sc} &= -\frac{a_a}{\pi} \left[(1 - E) \sqrt{E(1 - E)} \right] \\ c_a &= -\frac{T_{12}}{2} \\ c_{sc} &= -\frac{T_{12} T_{10}}{2\pi} \\ d &= \frac{2x_h}{c} - 1 \\ E_a &= c - x_h \end{aligned}$$

Onde, T_4 , T_{10} , T_{11} e T_{12} são funções de Theodorsen dadas por:

$$T_4 = \cos^{-1}(d) + d * \sqrt{1 - d^2} \quad (3.12)$$

$$T_{10} = \sqrt{1 - d^2} + \cos^{-1}d \quad (3.13)$$

$$T_{11} = \cos^{-1}d * (1 - 2 * d) + \sqrt{1 - d^2} * 2 - d \quad (3.14)$$

$$T_{12} = \sqrt{1 - d^2} (2 + d) - \cos^{-1}d (2d + 1) \quad (3.15)$$

Aplicando os valores na equação de Lagrange, chegamos às equações finais aeroelásticas para uma asa reta retangular de três graus de liberdade, envolvendo a interação entre flexão, torção e rotação da superfície de controle, o modelo com os 3 graus de liberdade foi utilizado para a análise aeroelástica sem sistema de controle. As equações são dadas por:

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} m \frac{sc}{5} & m \frac{s}{4} \left(\frac{c^2}{2} - x_f c \right) & m \frac{s}{3} \left(\frac{c^2 - x_h^3}{2} - x_h (c - x_h) \right) \\ A_{tb} & m \frac{s}{3} \left(\frac{c^3}{3} - x_f c^2 + s_f^2 c \right) & m \frac{s}{2} \left(\frac{c^3 - x_h^3}{3} - (x_f + x_h) \frac{c^2 - x_h^2}{2} + x_f x_h (c - x_h) \right) \\ A_{\beta b} & A_{\beta t} & m s \left(\frac{c^3 - x_h^3}{3} + x_h^2 c - x_h c^2 \right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_b \\ \ddot{\mathbf{q}}_t \\ \ddot{\beta} \end{Bmatrix} \\
& + \left(\rho \mathbf{v} \begin{bmatrix} \frac{cs}{10} a_w & 0 & 0 \\ -\frac{c^2 s}{8} b_w & -\frac{c^3 s}{24} M_{\dot{\theta}} & 0 \\ -\frac{c^2 s}{6} c_w & 0 & -\frac{c^3 s}{8} M_{\dot{\beta}} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_b \\ \dot{\mathbf{q}}_t \\ \dot{\beta} \end{Bmatrix} \\
& + \left(\rho \mathbf{v}^2 \begin{bmatrix} 0 & \frac{cs}{8} a_w & \frac{cs}{6} a_c \\ 0 & -\frac{c^2 s}{6} b_w & -\frac{c^2 s}{4} b_c \\ 0 & -\frac{c^2 s}{4} c_w & -\frac{c^2 s}{2} c_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{4EI}{s^3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{GJ}{s} & 0 \\ 0 & 0 & k_{\beta} s \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_b \\ \mathbf{q}_t \\ \beta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.16)
\end{aligned}$$

A equação 3.16 é reescrita em seu formato reduzido como:

$$\mathbf{A} \ddot{\mathbf{q}} + (\rho \mathbf{v} \mathbf{B} + \mathbf{D}) \dot{\mathbf{q}} + (\rho \mathbf{v}^2 \mathbf{C} + \mathbf{E}) \mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (3.17)$$

Ao explicitar a Eq. (3.17), a matriz \mathbf{A} é a matriz de inércia, \mathbf{B} é a matriz de amortecimento aerodinâmico, \mathbf{C} é a matriz de rigidez aerodinâmica, e \mathbf{D} é a matriz de amortecimento estrutural, neste caso $\mathbf{D} = \mathbf{0}$. $\ddot{\mathbf{q}}$, $\dot{\mathbf{q}}$ e \mathbf{q} são os vetores de aceleração, velocidade e deslocamento das coordenadas generalizadas, respectivamente. Uma observação importante, inclusive para entender o código, é que a Eq. (3.16) considera uma matriz de inércia simétrica, assumindo uma massa igual por unidade de área tanto para a asa quanto para a superfície de controle, por ser uma estrutura homogênea $m_a - m_{sc} = m$.

O controle é inserido na equação por meio de β , onde a equação é trabalhada para três graus de liberdade, colocando o β como uma saída. A equação volta a ter dois graus de liberdade e β como saída, como demonstrado na Eq. (3.18). O termo $\rho \mathbf{v}^2$ está embutido em \mathbf{g} por conveniência. Chegando ao modelo que será utilizado, com tal equação, podemos utilizar os dados do vetor \mathbf{g} para achar os valores para \mathbf{F} e \mathbf{G} , nossas matrizes de controle. Agora temos um sistema aeroservoelástico com a implementação das forças de controle.

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} m \frac{sc}{5} & m \frac{s}{4} \left(\frac{c^2}{2} - x_f c \right) \\ m \frac{s}{4} \left(\frac{c^2}{2} - x_f c \right) & m \frac{s}{3} \left(\frac{c^3}{3} - x_f c^2 + x_f^2 c \right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q}_b \\ \ddot{q}_t \end{Bmatrix} + \left(\rho \mathbf{v} \begin{bmatrix} \frac{cs}{10} a_w & 0 \\ -\frac{c^2 s}{8} b_w & -\frac{c^3 s}{24} M_{\dot{\theta}} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \dot{q}_b \\ \dot{q}_t \end{Bmatrix} + \\
& + \left(\rho \mathbf{v}^2 \begin{bmatrix} 0 & \frac{cs}{8} a_w \\ 0 & -\frac{c^2 s}{6} b_w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{4EI}{s^3} & 0 \\ 0 & \frac{GJ}{s} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} q_b \\ q_t \end{Bmatrix} = \rho \mathbf{v}^2 \begin{Bmatrix} -\frac{ca_c s}{6} \\ \frac{c^2 b_c s}{4} \end{Bmatrix} \beta \quad (3.18)
\end{aligned}$$

Em sua forma resumida,

$$\mathbf{A}\ddot{\mathbf{q}} + \rho\mathbf{v}\mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} + (\rho\mathbf{v}^2\mathbf{C} + \mathbf{E})\mathbf{q} = \mathbf{g}\beta \quad (3.19)$$

Usando a abordagem baseada na resposta à excitação harmônica, onde a resposta pode ser determinada mediante equações expressas via equações físicas ou coordenadas modais empregando álgebra matricial, uma excitação harmônica $\beta = \beta_0 e^{i\omega t}$ e resposta $\mathbf{q} = \mathbf{q}_0 e^{i\omega t}$ levam à Função de Resposta em Frequência entre os graus de liberdade de resposta e o controle de rotação superficial. Uma abordagem no domínio da frequência pode então ser usada para determinar a resposta do sistema devido à entrada do sistema de controle em qualquer ponto do envelope de voo. Alternativamente, uma abordagem baseada na integração numérica no domínio do tempo poderia ser empregada para qualquer entrada de excitação geral, como simular rajadas.

3.2 Equações de Controle para o Modelo com 2 Graus de Liberdade e um Flap

Para N graus de liberdade,

$$\mathbf{A}\ddot{\mathbf{q}} + (\rho\mathbf{v}\mathbf{B} + \mathbf{D})\dot{\mathbf{q}} + (\rho\mathbf{v}^2\mathbf{C} + \mathbf{E})\mathbf{q} = 0 \quad (3.20)$$

Usualmente considera-se $\mathbf{D} = 0$, a partir da Eq. (3.16),

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} m \frac{sc}{5} & m \frac{s}{4} \left(\frac{c^2}{2} - x_f c \right) & m \frac{sc}{3} \\ m \frac{s}{4} \left(\frac{c^2}{2} - x_f c \right) & m \frac{s}{3} \left(\frac{c^3}{3} - x_f c^2 + x_f^2 c \right) & m \frac{s}{2} \left(\frac{c^2}{2} - x_f c \right) \\ m \frac{sc}{3} & m \frac{s}{2} \left(\frac{c^2}{2} - x_f c \right) & (m s c + M) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_b \\ \ddot{\mathbf{q}}_t \\ \ddot{\mathbf{q}}_h \end{Bmatrix} \\ & + \rho\mathbf{v} \begin{bmatrix} \frac{cs}{10} a_w & 0 & \frac{cs}{6} a_w \\ -\frac{c^2 s}{8} b_w & -\frac{c^3 s}{24} \mathbf{M}_{\dot{\theta}} & -\frac{c^2 s}{4} b_w \\ \frac{cs}{6} a_w & 0 & -\frac{cs}{2} a_w \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_b \\ \ddot{\mathbf{q}}_t \\ \ddot{\mathbf{q}}_h \end{Bmatrix} + \\ & + \begin{bmatrix} \frac{4EI}{s^3} & \rho\mathbf{v}^2 \frac{cs}{8} a_w & 0 \\ 0 & \left(\frac{GJ}{s} - \rho\mathbf{v}^2 \frac{c^2 s}{6} b_w \right) & 0 \\ 0 & \rho\mathbf{v}^2 \frac{cs}{4} a_w & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_b \\ \ddot{\mathbf{q}}_t \\ \ddot{\mathbf{q}}_h \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (3.21)$$

Acrescentando as entradas de controle:

$$\mathbf{A}\ddot{\mathbf{q}} + \rho\mathbf{v}\mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} + (\rho\mathbf{v}^2\mathbf{C} + \mathbf{E})\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{g}\beta \quad (3.22)$$

Para maior comodidade, o termo $\rho\mathbf{v}^2$ está incorporado no vetor de excitação \mathbf{g} .

A primeira lei de controle a ser abordada é a lei de controle PI (proporcional integrativa), na qual o ângulo demandado da superfície de controle é linearmente proporcional à velocidade e

ao deslocamento do sistema. A fim de simplificar os cálculos, consideraremos que o transdutor está localizado no bordo de ataque, onde $x = 0$, e sua distância da raiz da asa é representada por s_0 . Além disso, a deflexão da asa é proporcional ao deslocamento e à velocidade.

$$\begin{aligned} & \left[\beta = k_v \dot{\mathbf{z}}_{\text{wing}} + k_d \mathbf{z}_{\text{wing}} = \right. \\ & \left. \left[k_v \left(\left(\frac{s_0}{s} \right)^2 \right) \dot{\mathbf{q}}_{\mathbf{b}} - x_f \left(\frac{s_0}{s} \right) \dot{\mathbf{q}}_{\mathbf{t}} \right] + k_d \left(\left(\frac{s_0}{s} \right)^2 \right) \mathbf{q}_{\mathbf{b}} - x_f \left(\frac{s_0}{s} \right) \mathbf{q}_{\mathbf{t}} \right] = \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$\left[k_v \left(\frac{s_0}{s} \right)^2 - x_f \left(\frac{s_0}{s} \right) \right] \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_{\mathbf{b}} \\ \dot{\mathbf{q}}_{\mathbf{t}} \end{bmatrix} + k_d \left(\frac{s_0}{s} \right)^2 - x_f \left(\frac{s_0}{s} \right) \begin{bmatrix} \mathbf{q}_{\mathbf{b}} \\ \mathbf{q}_{\mathbf{t}} \end{bmatrix}$$

Onde k_v e k_d são os ganhos aplicados aos termos de velocidade e deslocamento, respectivamente. A aeronave responde ao *feedback* via superfície de controle, modificando assim as características intrínsecas da aeronave.

Para examinar a estabilidade do sistema em malha fechada, a lei de controle na Eq. (3.23) deve ser combinada com as equações fundamentais da asa na Eq. (3.22). A fim de simplificar as expressões, o transdutor foi posicionado na ponta do bordo de ataque ($s_0 = s$), resultando em $\frac{s_0}{s} = 1$. Portanto, a Eq. (3.22) da asa, juntamente com a superfície de controle, assume a seguinte forma:

$$\begin{aligned} A\ddot{\mathbf{q}} + \rho v B \dot{\mathbf{q}} + (\rho v^2 C + E) \mathbf{q} &= \mathbf{g} \beta \\ &= k_v \begin{bmatrix} \mathbf{g1} \\ \mathbf{g2} \end{bmatrix} (1 - x_f) \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_{\mathbf{b}} \\ \dot{\mathbf{q}}_{\mathbf{t}} \end{bmatrix} + k_d \begin{bmatrix} \mathbf{g1} \\ \mathbf{g2} \end{bmatrix} (1 - x_f) \begin{bmatrix} \mathbf{q}_{\mathbf{b}} \\ \mathbf{q}_{\mathbf{t}} \end{bmatrix} \\ &= k_v \begin{bmatrix} \mathbf{g1} - \mathbf{g1}x_f \\ \mathbf{g2} - \mathbf{g2}x_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_{\mathbf{b}} \\ \dot{\mathbf{q}}_{\mathbf{t}} \end{bmatrix} + k_d \begin{bmatrix} \mathbf{g1} - \mathbf{g1}x_f \\ \mathbf{g2} - \mathbf{g2}x_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_{\mathbf{b}} \\ \mathbf{q}_{\mathbf{t}} \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{F} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{G} \mathbf{q} \end{aligned} \quad (3.24)$$

Onde F e G são matrizes de feedback compostas com coeficientes que são uma função do controle de ganhos, densidade e velocidade do ar. Reorganizando a equação:

$$A\ddot{\mathbf{q}} + (\rho v B - \mathbf{F}) \dot{\mathbf{q}} + (\rho v^2 C + E - \mathbf{G}) \mathbf{q} = 0 \quad (3.25)$$

Na análise do sistema em malha fechada, nota-se que a dinâmica do sistema pode ser alterada em virtude da presença de matrizes adicionais de rigidez e amortecimento introduzidas pelo sistema de controle. Tais modificações impactam no comportamento aeroelástico, influenciando, por exemplo, a velocidade de *flutter*.

A formulação em espaço de estados revela-se particularmente vantajosa para a aplicação de técnicas de controle, tais como a teoria de controle ótimo.

A equação voltada para uma malha aberta, com controle de entrada de rajada, é derivada ao operar sobre a equação:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \ddot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ -\mathbf{A}^{-1}(\rho\mathbf{v}^2\mathbf{C} + \mathbf{E}) & -\mathbf{A}^{-1}(\rho\mathbf{v}\mathbf{B}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{A}^{-1}\mathbf{g} \end{bmatrix} \beta + \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{A}^{-1}\mathbf{h} \end{bmatrix} w_g \quad (3.26)$$

Em sua forma resumida,

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_s\mathbf{x} + \mathbf{B}_s\mathbf{u} + \mathbf{E}_s\mathbf{w}_g \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}_s\mathbf{x} + \mathbf{D}_s\mathbf{u} \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

Ao considerar exclusivamente a medição de velocidade na borda de ataque, a saída medida y é expressa como $\mathbf{u} = \beta$,

4 Metodologia

4.1 Resolução por Autovalores e Autovetores

Com base na expressão da Eq. (3.17), a equação aeroelástica clássica de segunda ordem, aplicável a sistemas com N graus de liberdade, pode ser eficazmente solucionada utilizando métodos que empregam autovalores. Essa abordagem possibilita a determinação das frequências intrínsecas do sistema e a amplitude do amortecimento para condições específicas de voo, considerando variáveis como velocidade e altitude de voo. Introduzindo a expressão trivial:

$$\mathbf{I}\ddot{\mathbf{q}} - \mathbf{I}\dot{\mathbf{q}} = 0 \quad (4.1)$$

Ao combinar a equação aeroelástica clássica Eq. (3.17) em uma forma particionada, conjuntamente à inclusão da matriz identidade \mathbf{I} , alcançamos a seguinte formulação:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ 0 & \mathbf{A} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \ddot{\mathbf{q}} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ -(\rho v^2 \mathbf{C} + \mathbf{E}) & -(\rho v \mathbf{B} + \mathbf{D}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \ddot{\mathbf{q}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.2)$$

Ao reescrever a equação, obtemos:

$$\begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \ddot{\mathbf{q}} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ -\mathbf{A}^{-1}(\rho v^2 \mathbf{C} + \mathbf{E}) & -\mathbf{A}^{-1}(\rho v \mathbf{B} + \mathbf{D}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \ddot{\mathbf{q}} \end{Bmatrix} = 0 \quad (4.3)$$

Ao transcrever a equação particionada Eq. (4.3) para a forma de primeira ordem, observa-se que a matriz \mathbf{Q} possui dimensões $2N \times 2N$, sendo o dobro do tamanho das matrizes aeroelásticas representadas pela Eq. (3.17). A solução para tal equação pode ser obtida ao considerar $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 e^{\lambda t}$, resultando na seguinte forma para a Eq. (4.3):

$$(\mathbf{I}\lambda - \mathbf{Q}) \mathbf{x}_0 = 0 \quad (4.4)$$

A expressão clássica que define o problema de autovalores e autovetores é representada por $(\mathbf{A} - \mathbf{I}\lambda)\mathbf{x} = 0$.

Conforme indicado por [WRIGHT and COOPER \(2015\)](#), antecipando um subseqüente trabalho, como o sistema aeroelástico, os autovalores λ associados ao sistema \mathbf{Q} manifestam-se como pares conjugados.

$$\lambda_j = -\zeta_j \omega_j \pm i \omega_j \sqrt{1 - \zeta_j^2}, j = 1, 2, \dots, N \quad (4.5)$$

Conforme destacado por [WRIGHT and COOPER \(2015\)](#), as frequências naturais são denotadas por ω_j , enquanto as taxas de amortecimento são representadas por ζ_j . Os autovetores se apresentam como colunas complexas conjugadas, seguindo a configuração atual:

$$\mathbf{x}_j = \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_j \\ \lambda_j \mathbf{q}_j \end{Bmatrix}, j = 1, 2, \dots, N \quad (4.6)$$

Conforme explicitado por [WRIGHT and COOPER \(2015\)](#), os modos de vibração expressos em coordenadas generalizadas emergem a partir das porções superior ou inferior dos autovalores, ao decompor o autovetor em suas metades superior e inferior, estamos simplesmente separando a parte que descreve o deslocamento da parte que descreve a velocidade (ou momento). Isso é útil para interpretar fisicamente os modos de vibração (deslocamentos) e suas derivadas (velocidades). É crucial notar que, devido à influência de termos aerodinâmicos assimétricos, esses modos manifestam-se como grandezas complexas. Além disso, é pertinente observar que a mesma solução pode ser obtida ao resolver diretamente o polinômio associado à matriz, mantendo $q = qe^{\lambda t}$, isto é:

$$[\lambda^2 \mathbf{A} + \lambda (\rho \mathbf{v} \mathbf{B} + \mathbf{D}) + (\rho \mathbf{v}^2 \mathbf{C} + \mathbf{E})] \mathbf{q}_0 = \mathbf{0} \quad (4.7)$$

Seguindo as considerações de [WRIGHT and COOPER \(2015\)](#), a parte real dos autovalores assume relevância ao tornar-se positiva, indicando a instabilidade do sistema. Contudo, quando os autovalores são reais, as raízes assumem natureza não oscilatória e não se apresentam em pares conjugados, sendo a definição do fenômeno de divergência. A explanação prossegue ao elucidar que, ao evitar a aproximação de $M_{\dot{\theta}}$, as matrizes de rigidez e amortecimento aerodinâmico tornam-se dependentes da frequência reduzida $k = \frac{\omega_b}{\mathbf{v}}$. Tal dependência resulta na problemática de que as matrizes \mathbf{B} e \mathbf{C} não podem ser formuladas a menos que a frequência reduzida seja conhecida, e essa informação não pode ser determinada até que se resolva os autovalores da matriz do sistema \mathbf{Q} por meio da equação 4.4. Surge, então, um impasse, pois para resolver a matriz \mathbf{Q} , é necessário ter conhecimento prévio das matrizes \mathbf{B} e \mathbf{C} . Para contornar essa complexidade, [WRIGHT and COOPER \(2015\)](#) propõem dois métodos comumente utilizados: os métodos K e $P - K$.

4.2 Método K

O método K presume a existência de um amortecimento histerese, no qual o coeficiente estrutural, representado por \mathcal{E} , é empregado para calcular a matriz \mathbf{B} em função da matriz de rigidez estrutural \mathbf{E} . Nesse contexto, a relação entre essas matrizes é expressa por $\mathbf{B} = i\mathcal{E}\mathbf{E}$, sendo \mathcal{E} o símbolo utilizado para denotar o coeficiente de amortecimento estrutural [WRIGHT and COOPER \(2015\)](#).

Ao elaborar a solução harmônica sob a forma $q = q_0 e^{i\omega t}$ e realizando a divisão por ω^2 na equação aeroelástica clássica 3.17, obtém-se,

$$\left[\mathbf{A} - i\rho \left(\frac{b}{k} \right) \mathbf{B} - \rho \left(\frac{b^2}{k} \mathbf{C} - \frac{1 + i\mathcal{E}}{\omega^2} \right) \mathbf{E} \right] \mathbf{q}_0 = \mathbf{0} \quad (4.8)$$

Refatorando a equação com ênfase nos termos da frequência reduzida k , a questão evolui para o problema de autovalor generalizado:

$$(\mathbf{F} - \lambda \mathbf{E}) \mathbf{q}_0 = \mathbf{0} \quad (4.9)$$

Onde,

$$\mathbf{F} = \left[\mathbf{A} - i\rho \left(\frac{b}{k} \right) \mathbf{B} - \rho \left(\frac{b}{k} \right)^2 \mathbf{C} \right] \quad (4.10)$$

$$\lambda = \frac{1 + i\mathcal{E}}{\omega^2} \quad (4.11)$$

Também nota-se que:

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{\text{Re}(\lambda)}} \quad (4.12)$$

$$\mathcal{E} = 2\zeta = \frac{\text{Im}(\lambda)}{\text{Re}(\lambda)} \quad (4.13)$$

$$\mathbf{v} = \frac{\omega c}{2k} \quad (4.14)$$

Na expressão ζ , denotamos a taxa de amortecimento viscoso para o movimento na frequência natural. Para cada frequência reduzida de interesse, é necessário:

1. Calcular as matrizes \mathbf{B} e \mathbf{C} correspondentes.
2. Resolver o problema de autovalores complexos na Eq. (4.9), obtendo os autovalores complexos λ .
3. Determinar as frequências e coeficientes de amortecimento a partir dos autovalores com a Eq. (4.9).

4. Relacionar os valores à velocidade do ar por meio da definição da frequência reduzida k na Eq. (3.17).

Esses procedimentos devem ser seguidos para as demais frequências reduzidas, e os valores correspondentes das frequências e coeficientes de amortecimento devem ser plotados em um gráfico v_w e v_g . Uma objeção crucial ao método K é relacionada às aproximações realizadas, especialmente aquela utilizada para a estimativa do amortecimento estrutural \mathbf{D} . Quando \mathcal{E} não é nulo, as frequências e amortecimentos obtidos não representam adequadamente o comportamento real do sistema proposto por [WRIGHT and COOPER \(2015\)](#).

4.3 Método P — K

Para o método P-K, que evita a aproximação estrutural, um método iterativo é adotado. Recomenda-se, para cada velocidade de interesse, as seguintes etapas:

1. Estabelecer uma estimativa inicial para a frequência do modo (utilizando geralmente resultados anteriores da velocidade do ar ou condições de voo sem vento) e calcular a frequência reduzida correspondente para a combinação de velocidade do vento relativo/-frequência.
2. Determinar as matrizes de rigidez e amortecimento aerodinâmico \mathbf{B} e \mathbf{C} utilizando essa frequência reduzida assumida.
3. Calcular as frequências do sistema nessa condição de voo usando a solução dos autovalores da matriz mostrada na Eq. (4.3), na forma reduzida para a primeira ordem.
4. Selecionar a solução de frequência mais próxima da estimativa inicial e repetir o procedimento.
5. Continuar até que as frequências converjam, observando a taxa de amortecimento.

Para determinar a velocidade de *flutter* utilizando esse método, é necessário plotar em um gráfico as frequências, taxas de amortecimento e velocidades, ou seja, o gráfico $V - g - f$, cada uma correspondente a uma frequência reduzida. A velocidade de *flutter* será aquela no qual o amortecimento se torna zero, onde a linha do amortecimento toca o eixo das abscissas, ou seja, a velocidade de *flutter* será a velocidade que primeiro apresenta sinal negativo -1 , visto que o método iterativo é conduzido com base na velocidade, ou simplesmente quando a taxa é igual a zero.

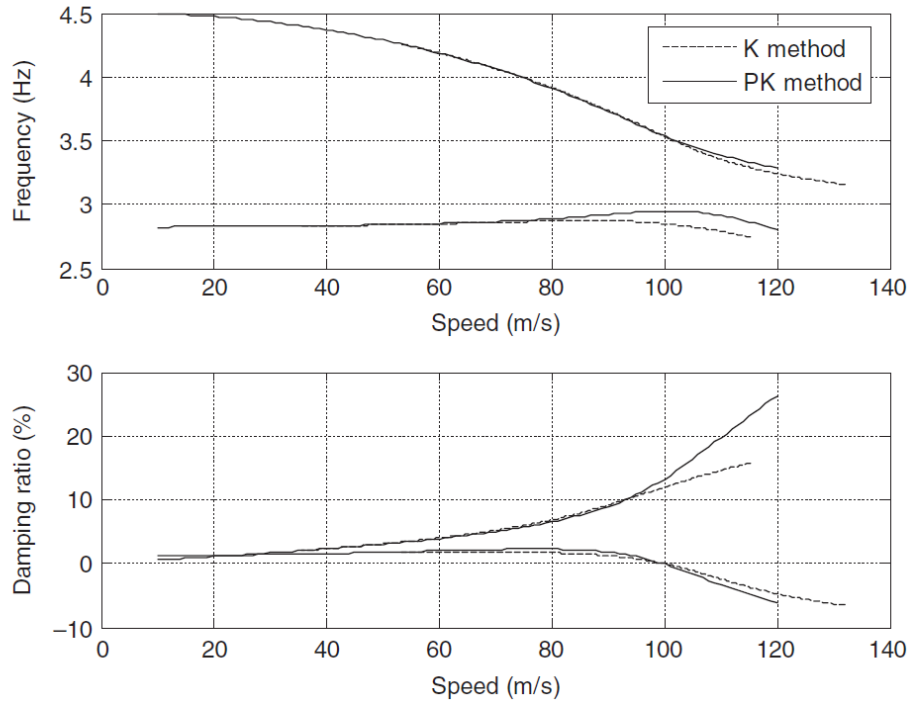


Figura 16 – Gráfico V-g-f para os métodos K e P-K. Fonte: [WRIGHT and COOPER \(2015\)](#)

4.4 Fluxogramas da metodologia

Os fluxos de trabalho ilustrados nos fluxogramas:

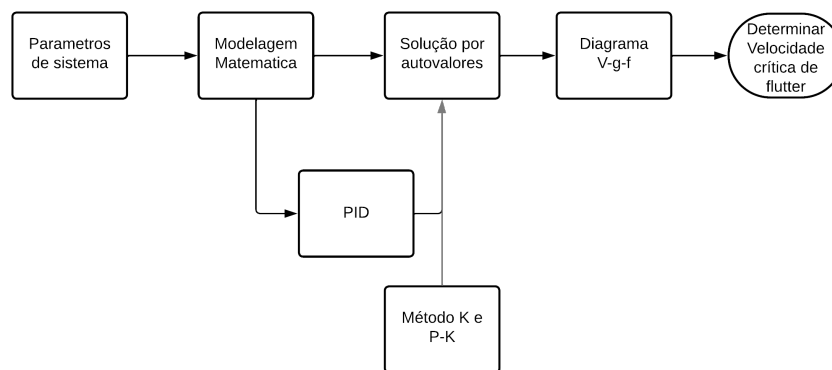


Figura 17 – Ilustração da metodologia para encontrar a velocidade crítica de flutter

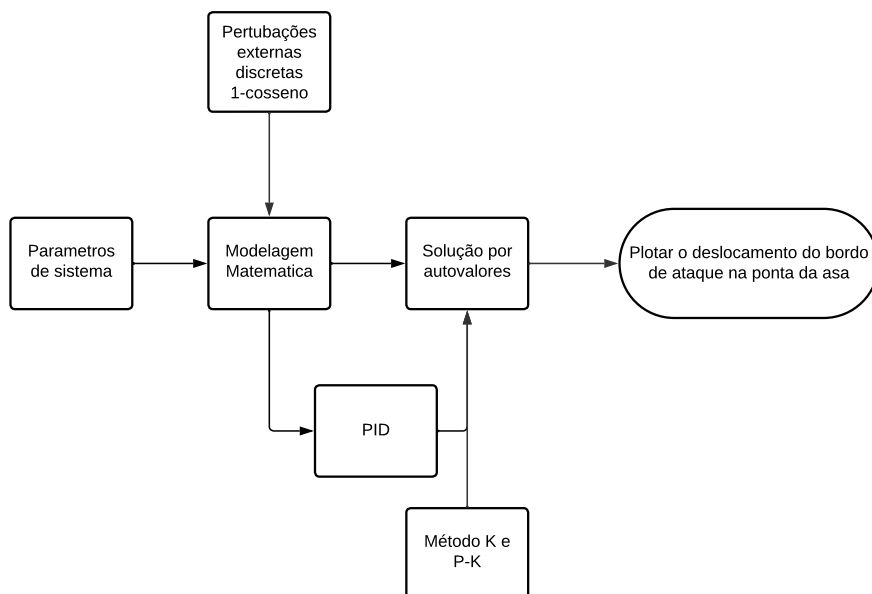


Figura 18 – Ilustração da metodologia para verificar a resposta rajada do sistema

5 Resultados

5.1 Parâmetros do Sistema

Os parâmetros do sistema são derivados da asa proposta por [WRIGHT and COOPER \(2015\)](#) sendo apresentados na Tabela 1. Esses parâmetros são incorporados como entradas no método numérico empregado neste estudo. Vale ressaltar que o método desenvolvido pode ser aplicado a diversas aeronaves, considerando configurações distintas.

Tabela 1 – Dados do sistema numérico utilizado na simulação. [WRIGHT and COOPER \(2015\)](#)

Parâmetro	valor
Semi-envergadura (s)	7,5 m
Corda (c)	2 m
Tamanho da superfície de controle por porcentagem da corda (E)	10 %
Eixo Elástico (x_f)	0,48c
Eixo de Massa (x_{cm})	0,5c
Massa por unidade de área	100kg/m ²
Rigidez a Flexão (EI)	$3 \times 10^7 Nm^2$
Rigidez a Torção (GJ)	$5 \times 10^6 Nm^2$
Variação do coeficiente de sustentação em relação ao ângulo de ataque (a_W)	2π
Derivada adimensional por passo de amortecimento (M_θ)	-1,2
Densidade do Ar (ρ)	1,225 kg/m ³

5.2 Análise Aeroelástica

A análise permite o entendimento do comportamento aeroelástico, fornecendo informações essenciais sobre a estabilidade e desempenho estrutural da aeronave. O uso de meios de controle ativos é fundamental para lidar com a crescente flexibilidade das estruturas e otimizar o desempenho, especialmente diante das demandas por eficiência de combustível. Nos próximos tópicos, exploraremos os resultados obtidos para uma asa semelhante à abordada no modelo

matemático, mas sem a aplicação das matrizes **F** e **G** para a realimentação do sistema, ou seja, considerando um sistema em malha aberta.

5.2.1 Solução do Problema de *Flutter*

A determinação da velocidade de *flutter* foi realizada no domínio do tempo, utilizando o método de solução de autovalores e autovetores. Em seguida, geramos o gráfico V-g-f (velocidade, amortecimento e frequência). O modelo no espaço de estados, com 3 graus de liberdade e as matrizes obtidas pela Eq. (3.18), foi considerado, lembrando que na modelagem matemática $\mathbf{D} = 0$. As equações diferenciais foram resolvidas com os dados de geometria e ambiente operacional, resultando nos autovalores e autovetores correspondentes. O *flutter* é identificado quando a parte imaginária de um dos autovalores cruza o eixo horizontal. Posteriormente, os resultados são representados no gráfico V-g-f, o fenômeno de *flutter* pode ser identificado quando o amortecimento se torna negativo, esta sentença vale para todos os modos sendo identificada no modo que primeiro que apresentar um valor negativo para o amortecimento. Essa análise é crucial no desenvolvimento aeroespacial, proporcionando percepções essenciais para a estabilidade e o desempenho estrutural da aeronave, ao permitir uma análise da velocidade zero até a velocidade crítica de *flutter* permitindo uma análise precisa do envelope de voo.

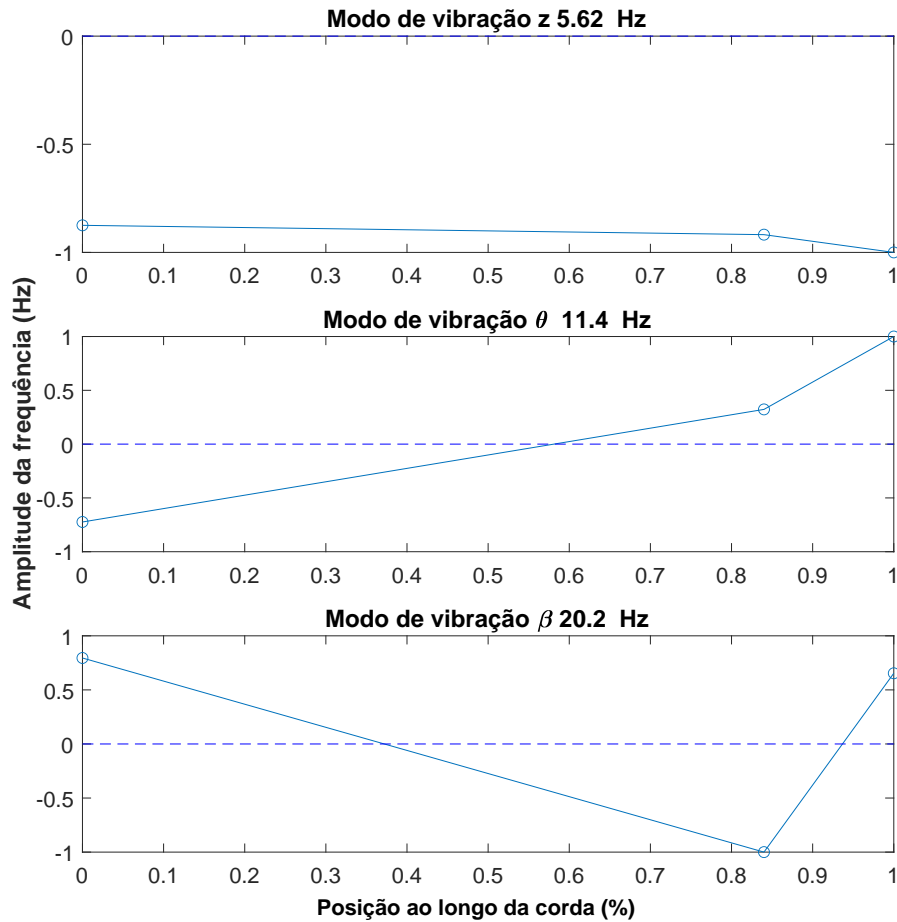


Figura 19 – Modos de vibração para os três graus de liberdade z , θ , β

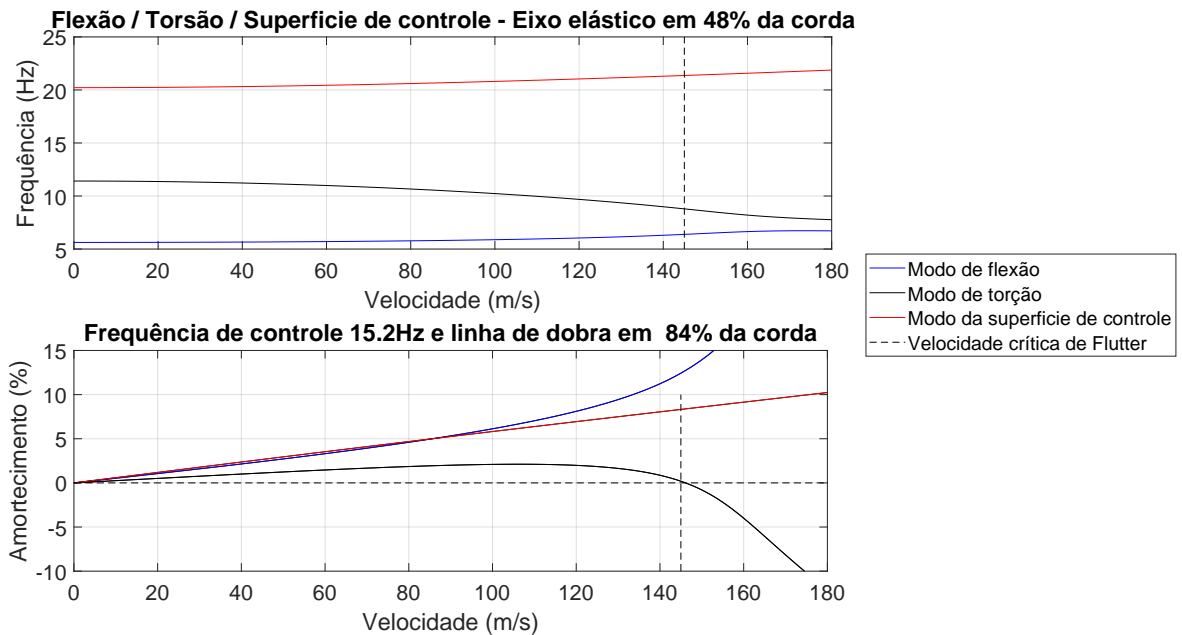


Figura 20 – Diagrama V-g-f para três graus de liberdade sem controle

A velocidade de *flutter* se manifesta quando a velocidade cruza o eixo de amortecimento, tornando-se negativa, conforme evidenciado no gráfico V-g-f. Essa velocidade crítica de *flutter* deve ser mantida fora do envelope de voo para garantir a segurança e estabilidade das estruturas aeroelásticas. As técnicas de análise de *flutter* são essenciais para compreender esse fenômeno e assegurar a certificação segura de aeronaves.

No gráfico, é notável que o amortecimento se torna negativa em $145m/s$, indicando a identificação da velocidade de *flutter* para um sistema sem controle. Usando essa velocidade crítica de *flutter* como referência, $V_{flutter} = 145m/s$, procederemos à incorporação de retroalimentação ao sistema, transformando-o em malha fechada.

5.2.2 Variação Geométrica

A análise revelou que o aumento da superfície de controle em uma asa resulta na redução da velocidade de *flutter*, devido à diminuição da instabilidade aerodinâmica decorrente da interação entre as cargas aerodinâmicas e a estrutura flexível da asa. O *flutter* é um fenômeno caracterizado por uma oscilação autossustentada da asa, podendo ocasionar sua falha se não for controlado adequadamente.

A variação geométrica consiste em alterar os parâmetros da superfície de controle, determinado em função da corda, conforme demonstrado no modelo matemático citado por [ANDERSON \(2017\)](#). Aumentar a superfície da asa proporciona maior sustentação e reduz o consumo de combustível.

A análise destaca que aumentar a superfície de controle em uma asa diminui o ângulo de ataque da asa e, por conseguinte, o momento aerodinâmico que tende a provocar *flutter*. O comportamento relatado em referências bibliográficas, confirmadas por meio das simulações aeroelásticas sem controle para as simulações.

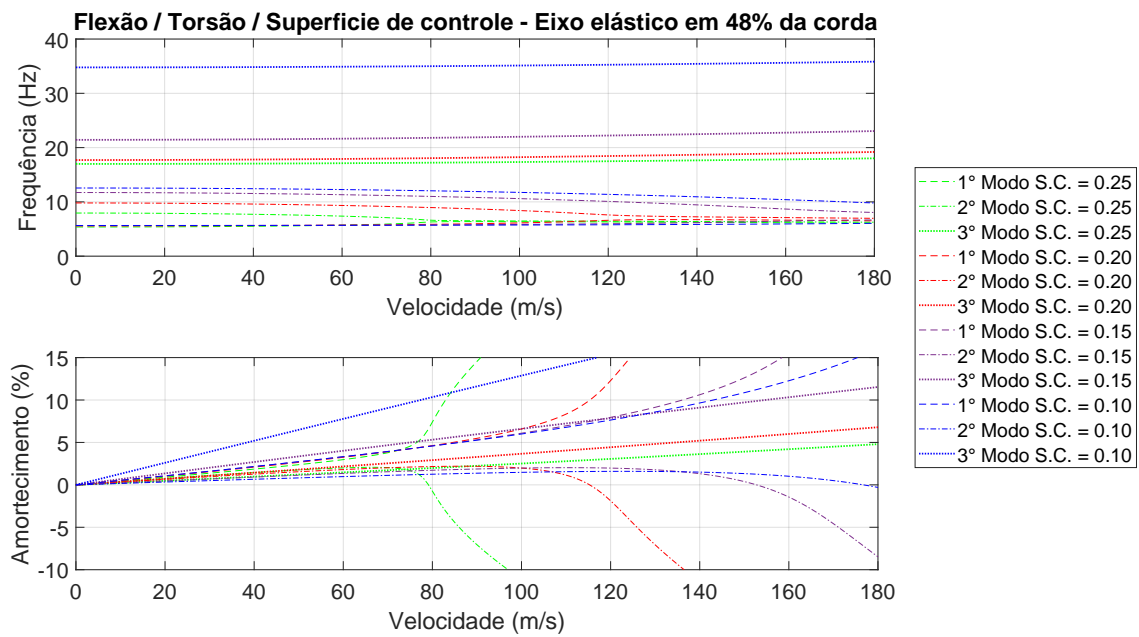


Figura 21 – Diagrama V - g - f parametrizado para superfície de controle

Para o *Root Locus* Fig. (22) foi utilizado às matrizes de espaço de estados, convertida em função de transferência e em seguida do plot utilizando funções de controle disponível no Matlab®, Disponível nos códigos em anexo.

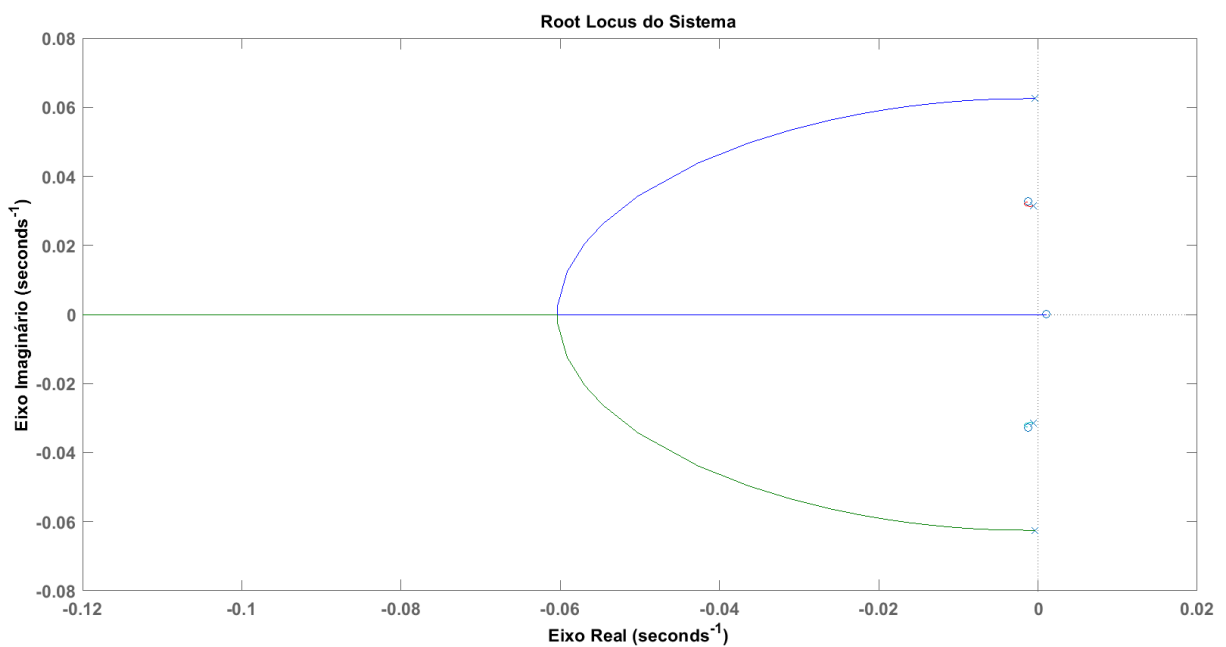


Figura 22 – Root Locus do sistema em espaço de estados.

É possível notar um sistema estável devido às raízes estarem no semiplano esquerdo para valores de ganho até certo ponto indicando a estabilidade, é necessário precaução com o

aumento dos ganhos, pois vemos a tendência a instabilidade do sistema visualizada com a linha azul.

Este fenômeno pode ser logicamente deduzido ao se considerar que a ampliação da área da asa por intermédio da superfície de controle implica em um aumento na sustentação em regimes de velocidade mais baixos. Este acréscimo na sustentação resulta em um correspondente aumento na frequência das oscilações aeroelásticas, conseqüentemente, culminando em uma diminuição da velocidade crítica de *flutter*.

Tabela 2 – Relação superfície de controle e velocidade crítica de *flutter*

Varição no Tamanho da Superfície de Controle (Fração da Corda)	Velocidade de Flutter (m/s)
0,10	177
0,15	151
0,20	115
0,25	79

5.3 Análise aeroservoelástica incluindo controlador do tipo PID

5.3.1 Variação Paramétrica nos Ganhos PID

5.3.1.1 Variação do ganho derivativo k_v

Em uma primeira abordagem, é essencial compreender o conceito de ganho na velocidade. A existência de um ganho sugere a implementação de um sistema de controle em malha fechada, onde a velocidade é medida e utilizada para ajustar a entrada do sistema de controle. O ganho, nesse contexto, é um parâmetro que regula a magnitude da correção aplicada à entrada do sistema, proporcional à diferença entre a velocidade desejada e a velocidade real. Em termos simples, o ganho amplifica o erro de velocidade, gerando uma correção mais expressiva na entrada do sistema de controle. A manipulação do ganho proporciona melhorias, precisão e estabilidade ao sistema de controle.

Entretanto, é crucial compreender que o ganho de velocidade em um sistema de controle de malha fechada pode aumentar a velocidade de *flutter*, devido à maior sensibilidade do sistema a perturbações. A elevação do ganho resulta em uma resposta mais precisa do sistema a variações na velocidade. Assim, é imperativo que o engenheiro exerça cautela ao definir o ganho, evitando, valores excessivamente altos que possam potencialmente induzir instabilidade e *flutter*. Para prevenir tais problemas, estratégias de controle ótimo são podem ser utilizadas como será visto na seção do controlador LQR.

Os resultados revelaram a presença do “*hump mode*”, uma tendência à instabilidade sobre uma faixa finita de velocidades seguida por uma tendência à estabilidade alta segundo [HEEG \(2018\)](#), associada a modos envolvendo a flexão da asa, é possível analisar que com o *Hump Mode*

na flexão ocorre um atraso na velocidade de *flutter* para o modo de torção. De suma importância observar que os modos trabalhados não são os modos harmônicos inerentes a estrutura, pois os mesmos não variam, porém, os modos aeroelásticos variam com base na velocidade da aeronave. O *hump mode* no contexto aeroelástico é um fenômeno benéfico, por ampliar o intervalo de velocidades no envelope de voo da aeronave livre de fenômenos aeroelásticos, porém na literatura não há um consenso sobre o quanto de amortecimento negativo máximo o sistema pode apresentar o valor de referência utilizado foi 10 %.

Tabela 3 – Influência do *Hump mode* no comportamento do ganho derivativo

k_v	Velocidade de desestabilização (m/s)	Velocidade de estabilização (m/s)
- 0,03	58	130
- 0,04	40	142
- 0,05	33	147

Análise do *Hump mode*, demonstrou que alguns ganhos voltam a estabilização somente após a velocidade de 145 m/s (3), demonstrando que esses ganhos não atendem aos requisitos de desempenho onde os mesmos devem estabilizar antes da velocidade de *flutter*, como o ganho $k_v = -0,05$ que se estabiliza em 147 m/s.

Durante processo de desenvolvimento de uma aeronave, a definição de um perfil de missão é fundamental onde se levantam os desempenhos desejados. A parametrização minuciosa das características para verificar o desempenho, no estágio conceitual, possibilita decisões validadas para aprimorar a segurança e, simultaneamente, reduzir custos. O método utilizado para calibrar o controlador foi o de sintonia por tentativa e erro, sendo utilizado durante a calibração do PID.

Neste contexto específico, adotou-se $k_d = 0$, variando apenas o k_v .

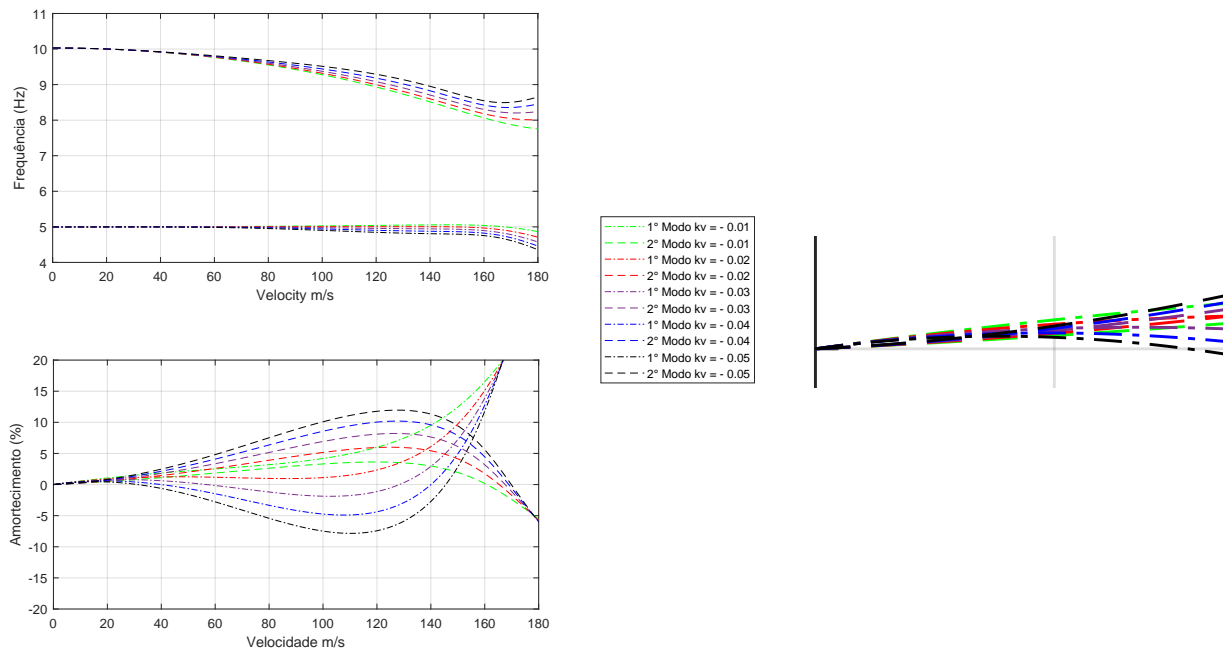


Figura 23 – A partir da esquerda: Comportamento do sistema aeroelástico com variação do ganho derivativo pelo controlador. Zoom no início do *Hump mode* demonstrando que o sistema começa estável.

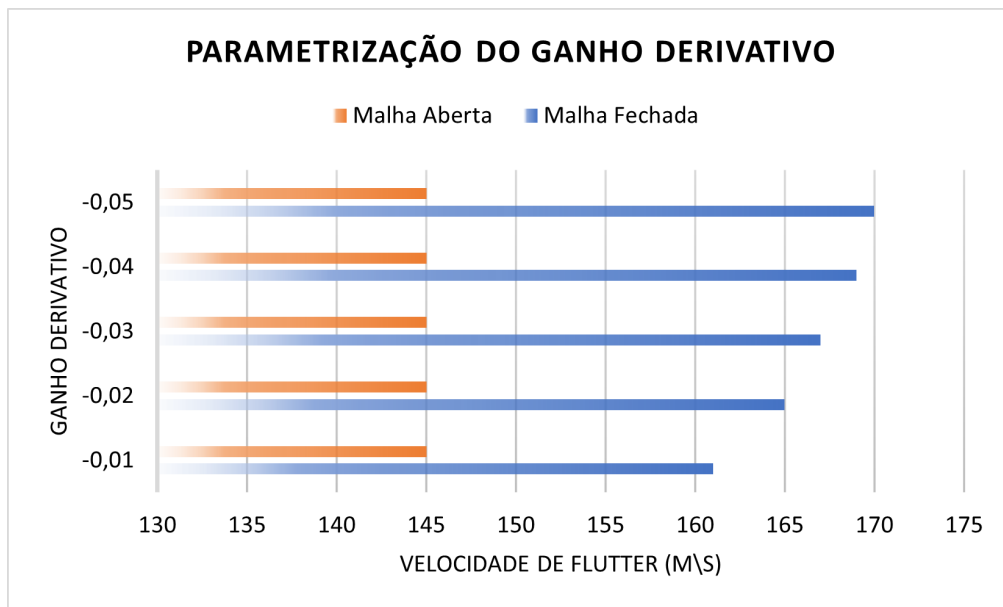


Figura 24 – Gráfico Velocidade de flutter x Variação k_v

Tabela 4 – Relação k_v - Velocidade Crítica de *flutter*

k_v	Malha Aberta (m/s)	Malha Fechada(m/s)
- 0,01	145	161
- 0,02	145	165
- 0,03	145	167
- 0,04	145	169
- 0,05	145	170

Ao manipular o ganho de velocidade em um intervalo de $-0,01$ a $-0,05$, observa-se uma correlação direta entre o aumento deste parâmetro e a melhoria da precisão do sistema, concomitantemente ao retardamento da ocorrência do fenômeno conhecido como *flutter*. É relevante destacar que mesmo incrementos mínimos no valor do ganho exercem influência substancial sobre o desempenho global da asa. Durante a investigação dos valores específicos de ganho abordados, o sistema em análise manteve-se estável para quase todos os ganhos, o que, por sua vez, contribuiu significativamente para a mitigação da velocidade crítica de *flutter*, com um envelope que se estende até 169 m/s.

5.3.1.2 Variação do ganho proporcional k_d

Procede-se com à exploração do ganho no deslocamento k_d . Salieta-se que todos os princípios e considerações anteriormente estabelecidos para o coeficiente de velocidade são diretamente aplicáveis ao coeficiente de deslocamento, visto que ambos os ganhos são destinados a otimizar a resposta dinâmica e ação específica do sistema em questão.

O *Hump Mode* não esta presente no ganho proporcional, demonstrando estabilidade em todo o envelope de voo, especialmente em velocidades baixas.

Neste contexto, foi adotado $k_v = 0$, variando o k_d .

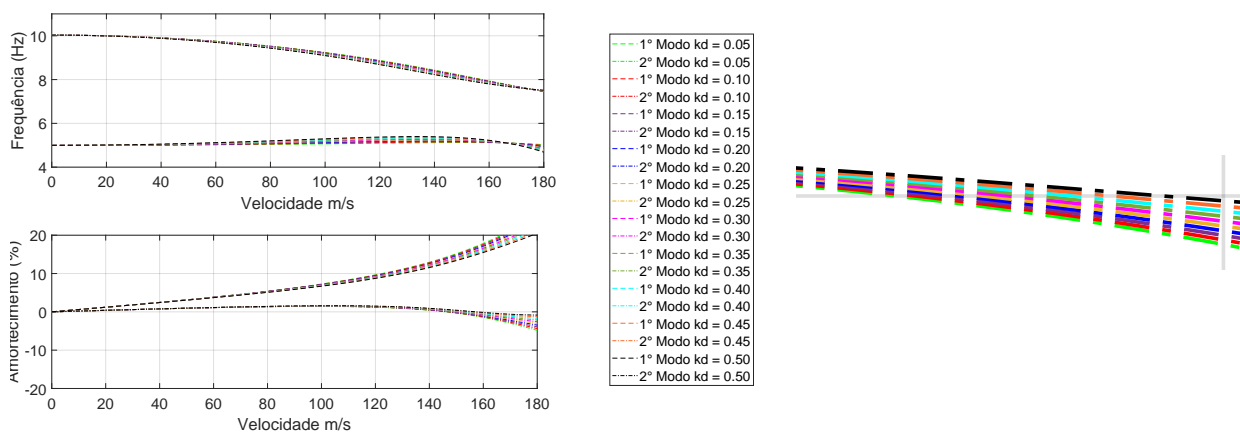


Figura 25 – A partir da esquerda: Comportamento do sistema aeroelástico com variação do ganho proporcional pelo controlador. Zoom nas velocidades críticas de *flutter*

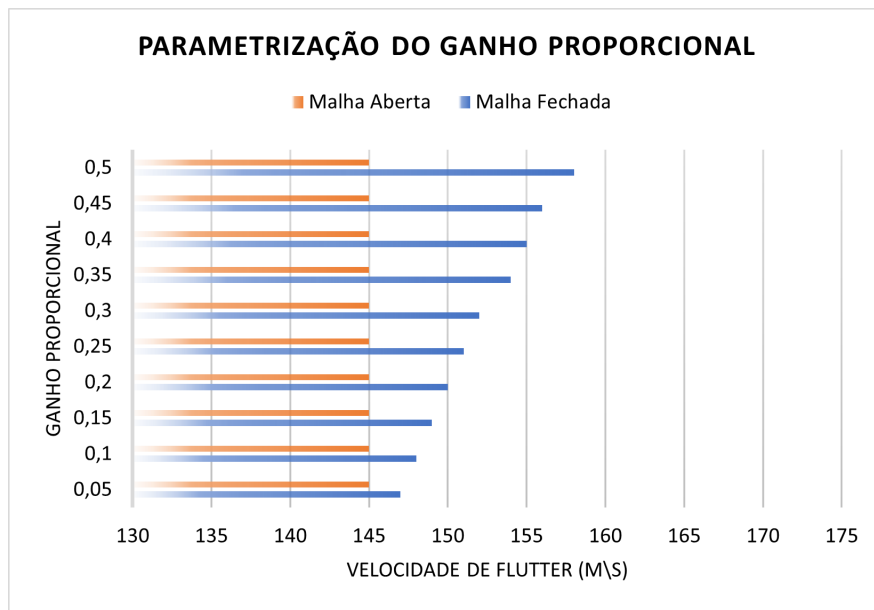


Figura 26 – Gráfico Velocidade de *flutter* x Variação k_d

Tabela 5 – Relação k_d - Velocidade de *flutter*

k_d	Malha Aberta	Malha fechada	velocidade de <i>flutter</i> (m/s)
0,05	145		147
0,10	145		148
0,15	145		149
0,20	145		150
0,25	145		151
0,30	145		152
0,35	145		154
0,40	145		155
0,45	145		156
0,50	145		158

Ao manipular o ganho derivativo k_d , observa-se a necessidade de empregar valores mais substanciais em comparação com o ganho de velocidade, resultando em um incremento menos significativo na velocidade crítica de *flutter*. Tal constatação é corroborada pela análise da curva de amortecimento, a qual demonstra um aumento na velocidade de *flutter*. É saliente mencionar que, para os valores de ganho especificados, o sistema permaneceu estável, exercendo assim um efeito favorável na mitigação da velocidade crítica de *flutter*.

5.3.1.3 Variação dos k_d e k_v

Na análise de sistemas em malha fechada, observa-se que a dinâmica do sistema pode ser modificada devido à presença de matrizes adicionais de rigidez e amortecimento introduzidas através do sistema de controle. Essas alterações impactam o comportamento aeroelástico, incluindo a velocidade de *flutter*.

Para introduzir os futuros engenheiros aos desafios encontrados na indústria, uma abordagem viável é a utilização do modelo simplificado proposto por [WRIGHT and COOPER \(2015\)](#). Esse modelo oferece uma alternativa que evita a necessidade de recorrer a sistemas de controle robustos e adaptativos de alta complexidade, demonstrou ser uma escolha assertiva para alunos graduandos, os quais são frequentemente empregados na indústria. Essa abordagem simplificada permite aos estudantes compreenderem os conceitos fundamentais de aeroelasticidade e sua interação com forças de controle de forma didática, porém sem perder a suas aplicações práticas, preparando-os para os desafios enfrentados na análise conceitual de uma aeronave.

No presente tópico, são aplicados valores os ganhos k_v e k_d simultaneamente obtendo um desempenho aprimorado quando se analisa o envelope de voo.

Tabela 6 – Influência do *Hump mode* no comportamento do ganho derivativo e proporcional em conjunto

k_v	k_d	Velocidade de desestabilização (m/s)	Velocidade de estabilização (m/s)
- 0,05	0,5	32	151
- 0,03	0,5	54	139

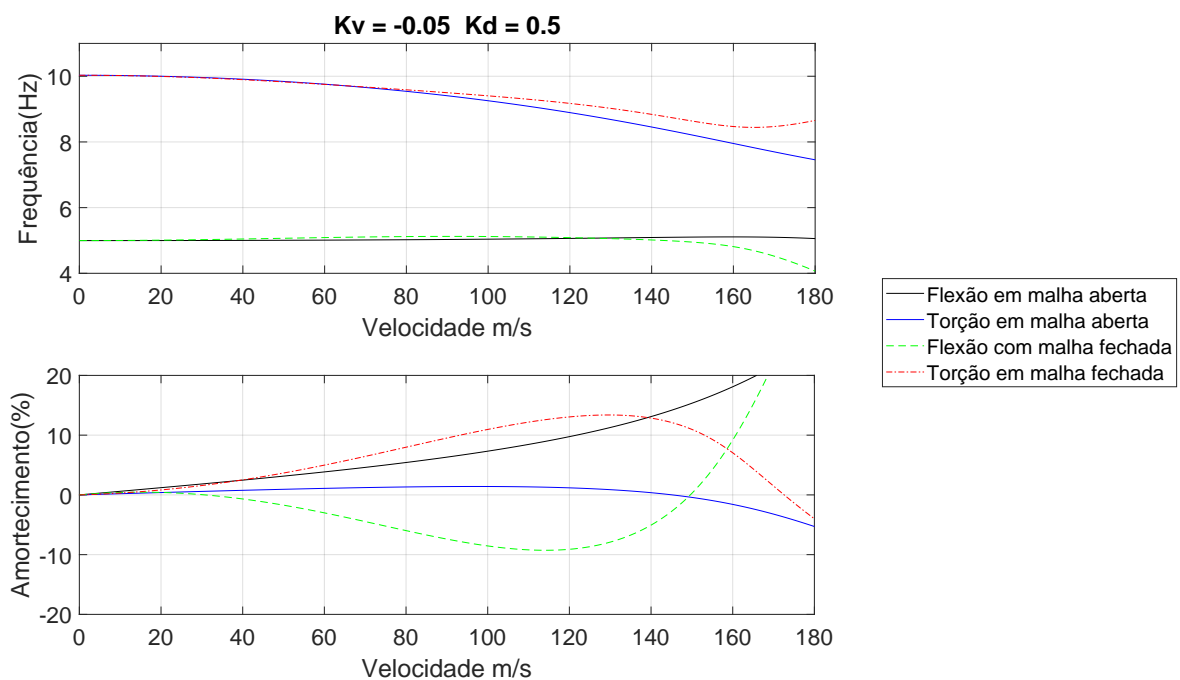


Figura 27 – Comportamento do sistema aeroelástico com o ganho derivativo e proporcional pelo controlador, sistema instavel

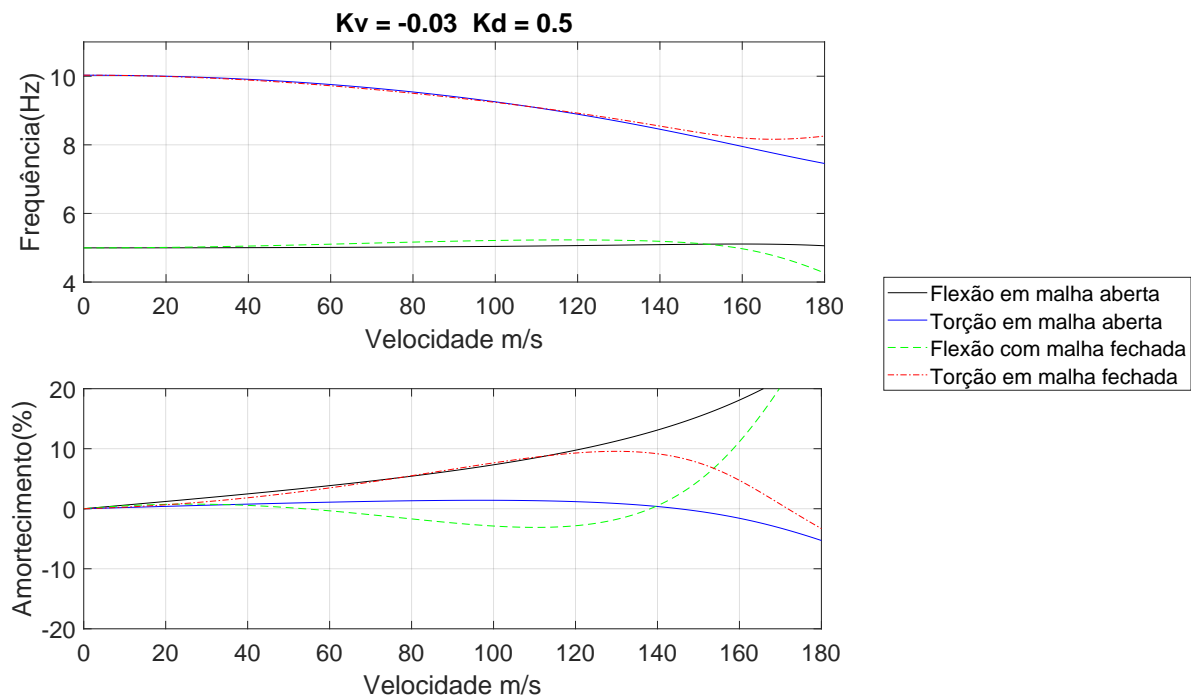


Figura 28 – Comportamento do sistema aeroelástico com o ganho derivativo e proporcional pelo controlador, sistema estável

Tabela 7 – Relação k_v e k_d - Velocidade Crítica de *flutter*

k_v	k_d	Malha Aberta	Malha Fechada	Velocidade de <i>flutter</i> (m/s)
- 0,05	0,50	145		174
- 0,03	0,50	145		172

Após uma análise minuciosa das tabelas 5 e 4, constata-se que as velocidades de *flutter* correspondentes aos ganhos $k_v = -0,05$ e $k_d = 0,5$ são, respectivamente, 170 m/s e 158 m/s. Comparativamente, em relação ao valor de 174 m/s obtido quando ambos os ganhos são empregados simultaneamente, verifica-se acréscimo de 2,29% e 9,19% para cada ganho individualmente, referente ao ganho derivativo e proporcional, respectivamente. Ao considerar o impacto conjunto dos ganhos na velocidade crítica, observa-se que o ganho derivativo possui uma influência preponderante, enquanto o ganho proporcional contribui marginalmente com um incremento de 4 m/s em relação ao resultado obtido unicamente com o ganho derivativo. Porém, quando o *Hump mode* é analisado a velocidade de estabilização é 151 m/s, mostrando que houve um aumento na velocidade de estabilização quando comparado com a utilização de somente o ganho k_v isoladamente, sendo a velocidade crítica 147 m/s, ambos não alcançam o desempenho desejado, mesmo sendo os ganhos que mais aumentam o envelope de voo. Com o intuito de alcançar os critérios de desempenho, diminuiu-se o ganho derivativo tendo como objetivo a diminuição da instabilidade causada pelo *Hump mode*, onde para atender os critérios de estabilização o sistema deveria estabilizar em 145 m/s, utilizando o ganho $k_v = -0,03$ foi obtido um

sistema onde o *Hump mode* estabiliza em 139 m/s atendendo os requisitos e mantendo um envelope de voo longo com uma leve diminuição para 172 m/s. O ganho proporcional foi mantido devido o mesmo não apresentar o *Hump mode* quando utilizado isoladamente, como observado no tópico anterior. Verifica-se acréscimo de 2,90% e 8,14% para cada ganho individualmente.

De forma geral, ao analisar a fig. (23) e considerar a curva de amortecimento em relação à velocidade crítica, evidencia-se que a curva associada ao segundo modo de vibração do sistema tende a alcançar uma condição crítica para velocidades maiores à medida que o ganho do controlador aumenta, devido ao amortecimento positivo ampliado. Observa-se que o coeficiente k_v , quando aumentado, tem o efeito de expandir o envelope de voo. No entanto, para valores de ganho maiores que 0,05, ocorre a instabilidade do sistema, manifestada pela mudança no ângulo do bordo de ataque. Essa instabilidade pode resultar em uma queda significativa na velocidade de *flutter*, a qual pode ser potencialmente inferior àquela observada em sistemas de malha aberta por MARTINS et al. (2022). Para evitar sistemas mal calibrados devemos realizar simulações similares as propostas no presente trabalho e ajustes finos com o sistema físico em operação, pois o próprio modelo matemático apresenta limitações, sendo uma representação do sistema físico.

Os dados apresentados revelam que o modelo matemático adotado evidencia um desempenho superior em aplicações de ganho derivativo em comparação com o ganho proporcional. Entretanto, é imperativo destacar que o ganho derivativo pode desestabilizar o sistema quando mal ajustado, resultando em um desempenho inferior em comparação com sistemas sem retroalimentação ou até mesmo sem sistemas de controle. Tal fenômeno é comumente observado em sistemas de controle mecânicos, representando um dos desafios significativos enfrentados no desenvolvimento desses sistemas, especialmente em sua implementação. O *Hump mode* demonstrou ser um variável com alta complexidade ao analisar a estabilidade do sistema, sendo extremamente relevante o conhecimento sobre o mesmo quando se analisa sistemas dinâmicos.

Na análise realizada, observou-se que o ganho proporcional consegue expandir o envelope de voo, embora apresente um desempenho inferior em comparação ao ganho derivativo. Foi necessário empregar ganhos maiores para alcançar esse desempenho reduzido. No entanto, não foram identificados problemas de desestabilização em outros modos aeroelásticos durante o processo de ajuste dos ganhos. E o mesmo não apresentou *Hump mode* quando utilizado isoladamente. Alguns autores consideram que sistemas aeronáuticos não devem apresentar nenhuma instabilidade, neste caso o ganho proporcional demonstrar ser o mais assertivo.

5.3.2 Resposta a rajada

Ao aplicar os ganhos simultaneamente para mitigar os efeitos de rajadas, em uma metodologia semelhante à apresentada no tópico 5.3.1.3, e ao introduzir perturbações externas simuladas na forma de rajadas, é possível avaliar a eficácia do sistema na estabilização da aeronave

durante o voo, com o intuito de concluir a análise do controlador PID. As rajadas foram configuradas com base em um estudo conduzido por MAGGIOTTO1 et al. (2013), que investigou as velocidades do vento em Brasília - Distrito Federal, em uma altitude correspondente à utilizada no contexto de aerodesign.

O referido estudo derivou a velocidade máxima de rajada como sendo 14 m/s, que foi empregada como parâmetro para ajustar o sistema de rajadas na simulação. A velocidade da aeronave utilizada na simulação foi de 32 m/s, representativa da velocidade alcançada pelos motores mais potentes atualmente, em média. Contudo, constatou-se que para velocidades superiores, houve uma redução mais significativa na amplitude das perturbações, indicando a eficiência do sistema em comparação com o sistema em malha aberta. Entretanto, é importante destacar que após atingir 40 m/s, o sistema se mostrou instável.

O parâmetro k_d revelou-se de significativa influência na resposta do sistema às rajadas, embora tenha apresentado um desempenho inferior em retardar a velocidade crítica de *flutter*. Este parâmetro destacou-se por seu impacto substancial nos resultados obtidos. Por outro lado, a escolha do parâmetro $k_v = 0,04$, determinada por análises prévias, demonstrou ser apropriada. É digno de nota que k_v representou o ponto ótimo antes da ocorrência de instabilidades no sistema, sendo que qualquer redução do ganho resultou em um desempenho inferior na resposta às rajadas e na velocidade crítica de *flutter*. O k_d utilizado poderia ter sido aumentado, mas foi restrito pelos ganhos testados.

O propósito subjacente ao código de simulação reside em minimizar a amplitude máxima da resposta diante de rajadas, permitindo que o sistema se estabilize de maneira segura e eficiente após a ocorrência de uma perturbação. A eficácia do sistema é visível, como evidenciado pela concretização dos objetivos estabelecidos para a resposta à rajadas.

Tabela 8 – Relação k_v e k_d - Amplitude máxima da resposta rajada

Velocidade(m/s)	k_v	k_d	Redução da amplitude máxima em Malha Fechada (%)
32	0,04	0,40	3,39
32	0,04	0,50	3,73
40	0,04	0,50	5,63

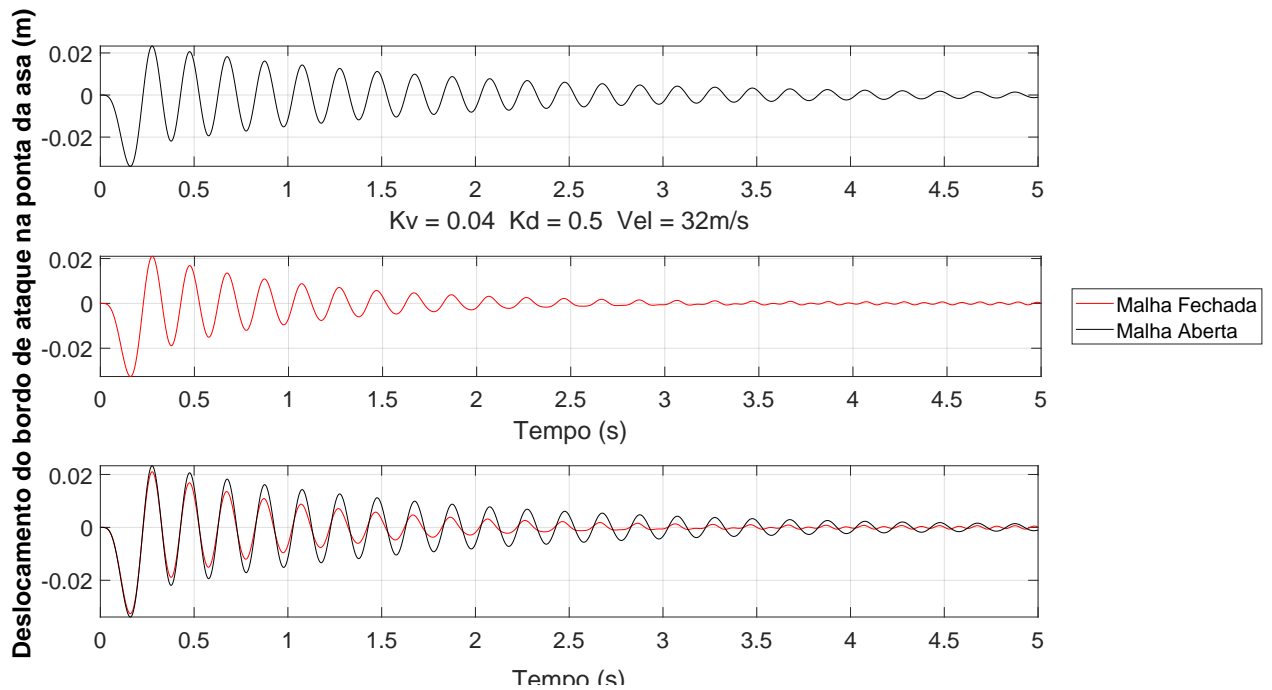


Figura 29 – Resposta da ponta do bordo de ataque da asa à rajada com/sem a lei de controle.

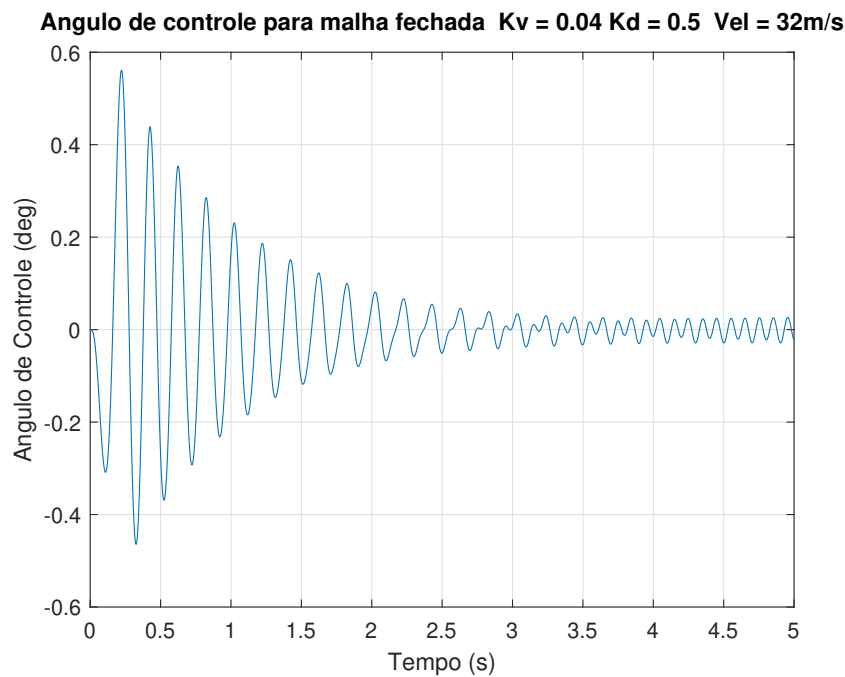


Figura 30 – Resposta da ponta da superfície de controle da asa à rajada com a lei de controle.

Inserir a perturbação através do termo ρV na equação clássica eq. 3.17 resulta no vetor de excitação para a rajada. É crucial destacar que esse termo está presente na equação fundamental do sistema.

Uma limitação inerente a esta implementação de controle é que a deflexão da superfície de controle é considerada linearmente relacionada ao deslocamento e à velocidade da asa. Existirão restrições tanto para a deflexão do controle quanto para a taxa com a qual ela pode ser realizada. Além disso, a aerodinâmica estacionária tende a diminuir a eficácia da superfície de controle à medida que a frequência aplicada aumenta.

5.4 Análise aeroeservoelástica incluindo controlador do tipo LQR

Os resultados do LQR consistem na utilização de parâmetros de geometria similares ao utilizados para o PID, utilizando a asa placa plana [WRIGHT and COOPER \(2015\)](#), com o intuito de comparar os resultados dos controladores e analisar o comportamento do sistema para cada controlador, seguindo o padrão de análise será verificada a velocidade de *flutter* e o comportamento de resposta a rajada da asa. O sistema foi calibrado inicialmente por meio do *root locus* do sistema e em seguida utilizando heurística para o desempenho desejado com base em simulações variando o Q e R.

Tabela 9 – Parâmetros do controlador LQR

R	Q	Tempo(s)	Velocidade de Flutter (m/s)
1	$\begin{bmatrix} 0.000000000001 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0002 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.000001 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0000002 \end{bmatrix}$	5	184
0.01	$\begin{bmatrix} 0.00001 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.01 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.00001 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$	5	166
1	$\begin{bmatrix} 0.0001 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.01 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1 \end{bmatrix}$	5	32

Similarmente ao PID será plotado os gráficos V - g - f e os gráficos de angulação da superfície de controle e deslocamento do bordo de ataque em malha aberta e fechada. As velocidades analisadas serão 184 m/s, 166 m/s e 32 m/s as quais representam um calibrador com folga, um controlador com *hump mode* e um controlador calibrado erroneamente que adianta a velocidade de *flutter* respectivamente. Não será utilizado um conjunto de ganhos para cada velocidade fi-

nal, pois para as velocidades de estudo é desejado analisar o comportamento não desejado do sistema, demonstrado por meio do gráfico $V-g-f$.

5.4.1 Ganho escalonado

Trabalhar com múltiplos ganhos em um sistema de controle proporciona vantagens significativas. Em particular, em sistemas de controle de aeronaves, é prática comum ajustar os ganhos do controlador para diferentes regimes de voo, tais como decolagem, cruzeiro e pouso. Esse método, denominado ganho escalonado (*gain scheduling*), implica na seleção de diferentes conjuntos de ganhos com base nas condições operacionais vigentes. Além disso, a utilização de múltiplos ganhos é justificada pela observação de que alguns sistemas podem exibir comportamentos distintos em diferentes faixas de frequência, como no *flutter*. Portanto, ajustar os ganhos para diferentes faixas de frequência é fundamental para alcançar o melhor desempenho do sistema. Sistemas LQR demonstram grande eficiência quando aplicados em sistemas de ganho escalonado.

5.4.2 Velocidade de *flutter*

1º Caso $V = 184$ m/s:

Com o controlador calibrado para a velocidade crítica de 184 m/s, realizou-se a verificação da velocidade de *flutter* pelo gráfico $V-g-f$ Fig. (31) o qual demonstrou que o intervalo até 183 m/s estava livre do fenômeno de *flutter*. Obteve-se 26 % de aumento na velocidade *flutter*, sendo a média de aumento para asas de placa plana 25 % por KASEM (2022) mostrando-se um valor razoável.

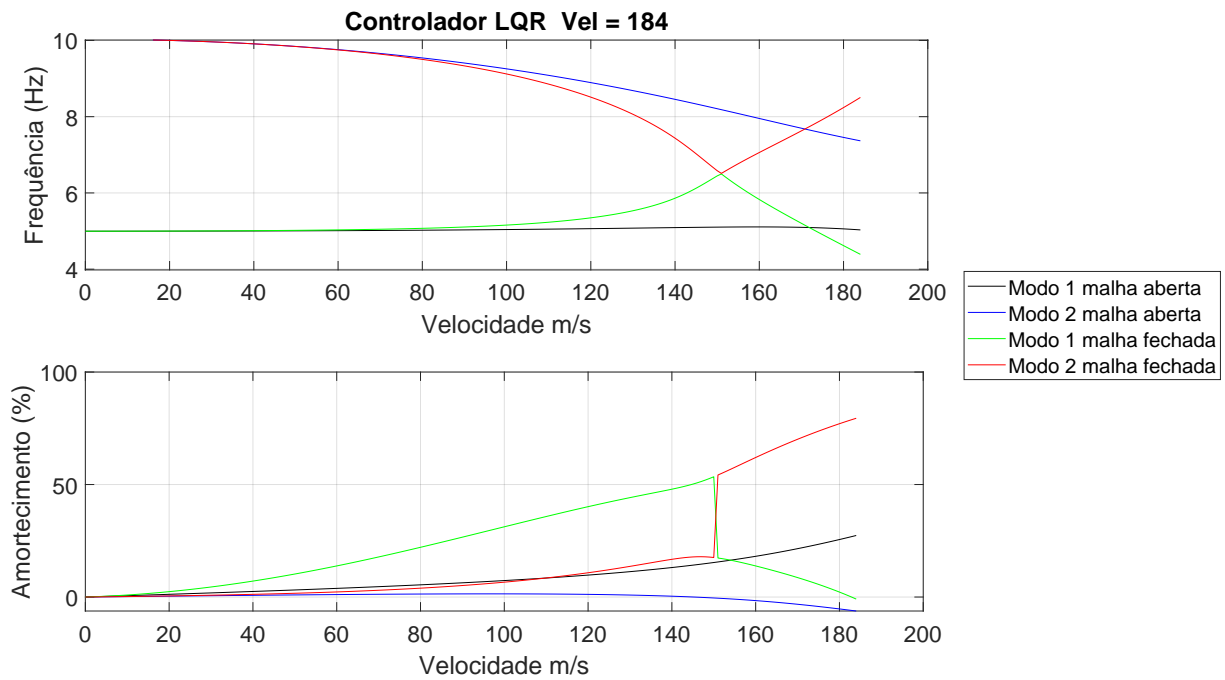


Figura 31 – Diagrama V-g-f para dois graus de liberdade e um *flap* com controle LQR com Vel = 184 m/s.

Uma observação de suma importância sobre o LQR é que o mesmo deve ser desenvolvido para uma velocidade específica e nesta velocidade o controlador terá um desempenho ótimo, demonstrando que o LQR é uma boa opção para sistemas de ganhos escalonados, sistemas estes com grande popularidade e uso em sistemas aeronáuticos, ao permitir utilizar um conjunto de configurações para controladores otimizando o desempenho da aeronave com ganhos diferentes para diferentes ambientes operacionais, neste caso segundo a velocidade da aeronave. Os códigos em anexo também permitem alterações para trabalhar com a pressão dinâmica caso o engenheiro responsável deseje, assim como algumas referências que utilizam o controlador M.P.C. por (WANG, 2009), sistemas que utilizam a pressão dinâmica facilitam os cálculos de saturação da superfície de controle.

Utilizando-se o controlador para velocidades maiores a velocidade crítica de *flutter* é reduzida demonstrando que diferentemente do PID onde as matrizes do sistema não são alteradas somente as de controle, para o sistema LQR as matrizes \mathcal{A} e \mathcal{B} segundo o modelo dinâmico utilizado, matrizes do sistema e de entrada respectivamente, são alteradas segundo a velocidade impactando na plotagem do V-g-f o que não permite plotar todos os gráficos para uma velocidade final como o PID sendo necessário um conjunto de controladores, plotando o gráfico para 190 m/s observa-se que a velocidade crítica abaixa para 178 m/s. Devido esta condição o gráfico é plotado até a velocidade crítica somente para um controlador sendo possível verificar o comportamento com base nos ganhos propostos. O amortecimento obteve valor nulo na velocidade de 184 m/s para o modo 2 em malha fechada, sendo o modo de torção Fig. (31).

Ao analisar as frequências se verifica que o modo 2 seria o modo a ter o amortecimento nulo primeiro devido à diminuição da frequência e é realmente isso que ocorre, embora no gráfico demonstre que foi o modo 1, isso ocorre devido às frequências ficarem próximas como vemos no gráfico de frequência por velocidade Fig. (31) e o MATLAB pela proximidade dos valores, uma inconsistência é verificada pela troca de modos o mesmo ocorre com os casos 2 e 3. Uma velocidade maior que a encontrada no controlador PID foi obtida, sendo a velocidade máxima obtida pelo controlador PID 174 m/s conforme a Tab. (7), um aumento de 10 m/s no envelope de voo utilizando o controlador LQR Tab. (9) um aumento de 5,74 %.

2º Caso $V = 166$ m/s com *Hump Mode*:

Para a velocidade crítica de 166 m/s foi identificado o fenômeno de *Hump Mode*, o que a primeira vista é um fenômeno benéfico quando se analisam fenômenos aeroelásticos, pois se trata de uma instabilidade para uma faixa finita de velocidades e em seguida um aumento de estabilidade alta. Ou seja, o sistema demonstra instabilidade para velocidades baixas e estabilidade em velocidades altas onde o sistema de atraso de *flutter* é necessário, velocidades superiores a 144 m/s, demonstra uma estabilidade maior. Porém, em algumas literaturas é tido que sistemas aeronáuticos não devem demonstrar nenhuma instabilidade e algumas que aceitam o *Hump Mode* até 10 ou 20 % do amortecimento. Neste caso o *Hump Mode* demonstrado foi até 6,9 % do amortecimento, porém ainda se encontrava instável para velocidades acima de 144 m/s se estabilizando somente em 156 m/s, o qual resulta em um controlador não satisfatório segundo os critérios de desempenho. Demonstrando as nuances de analisar o gráfico $V-g-f$, que não é somente avaliar o modo que primeiro apresenta um amortecimento nulo ou negativo e se apresenta o *Hump mode*.

Um fator importante para análise é que o *Hump Mode* é normalmente aceito em sistemas de amortecimento viscoso, sendo o sistema proposto no presente trabalho livre de sistemas viscosos, mostrando que o controlador LQR pode ser um controlador assertivo para o sistema, como o PID também apresentou o *Hump Mode* e o controlador para 184 m/s não apresentou.

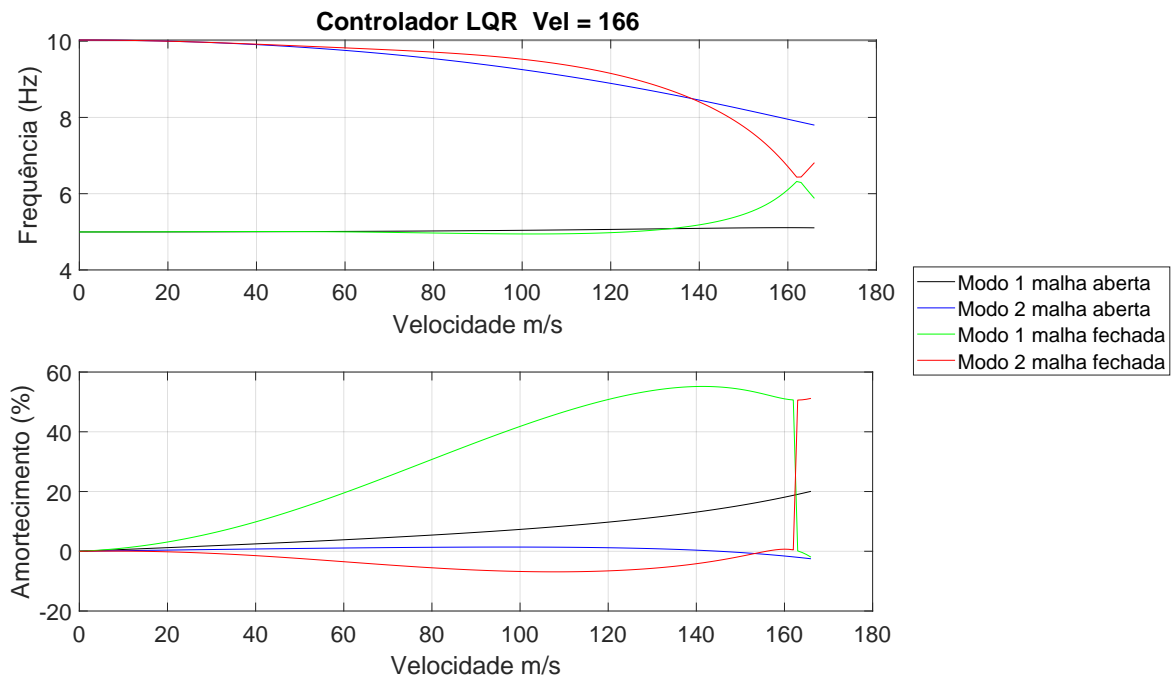


Figura 32 – Diagrama V-g-f para dois graus de liberdade um *flap* com controle LQR com Vel = 166 m/s.

3º Caso $V = 32$ m/s:

Foi feita a análise para o caso em que a velocidade de *flutter* ocorria antes da velocidade crítica em malha aberta. Com o PID não era possível por meio dos ganhos abaixar a velocidade de *flutter* porém com o LQR temos uma interferência direta na matriz do sistema e de entrada conforme a velocidade o que pode ser interessante para desenvolver sistemas que se quer que o *flutter* aconteça, por exemplo, para geração de energia como o *energy harvesting* por meio do *flapping flag models* [KASEM \(2022\)](#).

Para o sistema proposto este controlador não atende aos requisitos de desempenho, e demonstra que apesar do LQR permitir um desempenho maior caso o engenheiro não realize a calibração, simule e realize o ajuste fino corretamente poderá ter um desempenho pior que o sistema em malha aberta, o que não faz sentido no contexto aeroelástico quando analisamos uma asa.

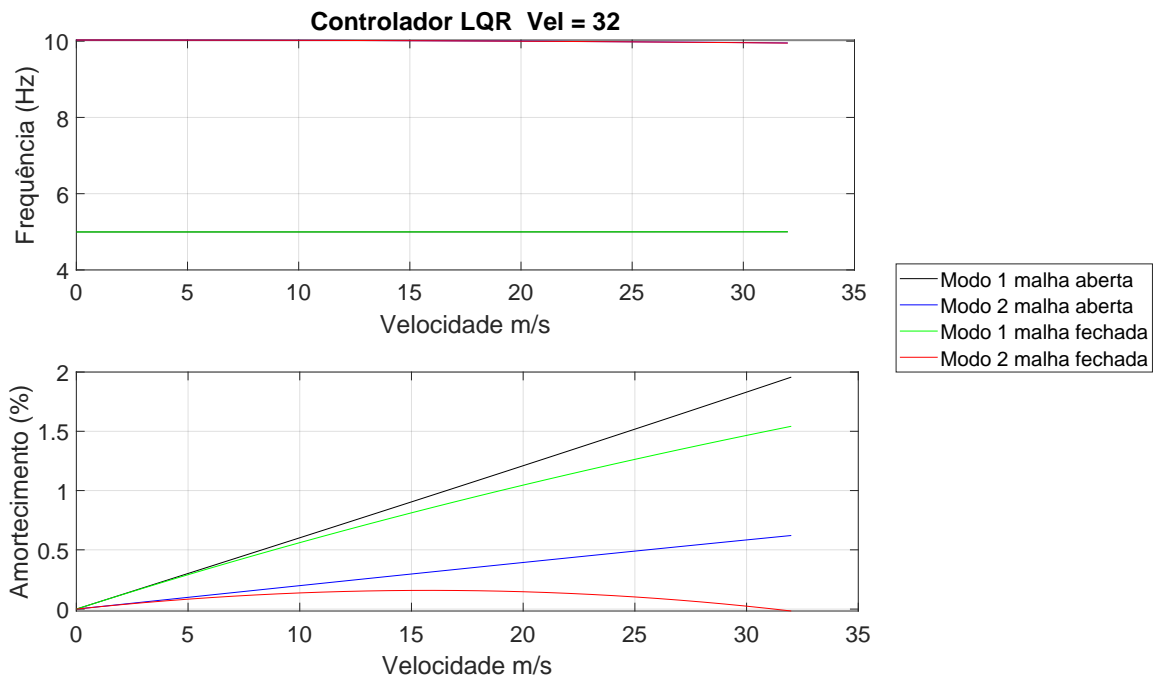


Figura 33 – Diagrama V-g-f para dois graus de liberdade um *flap* com controle LQR com Vel = 32 m/s.

5.4.3 Resposta a rajada

A resposta a rajada será similar a utilizada para o controlador PID Fig. (18), sendo analisada a resposta a rajada para uma velocidade de 180 m/s Fig. (34).

Os parâmetros do controlador será o mesmo utilizado para encontrar a velocidade de *flutter* igual a 185 m/s Tab. (9). Entre os casos apresentados demonstrou o melhor desempenho em conseguir atender aos requisitos, porém as simulações serão feitas utilizando somente 180 m/s, pois o sistema de resposta a rajada apresenta um desempenho menor quanto mais próximo da velocidade crítica no caso do LQR, embora tenha demonstrado uma facilidade maior para a calibração do que o sistema com PID dado que o sistema permite utilizar o mesmo controlador que o utilizado para encontrar a velocidade de *flutter* só é necessário diminuir um pouco a velocidade até o sistema apresentar um desempenho satisfatório para estabilização da rajada onde encontramos a velocidade final do envelope de voo da aeronave.

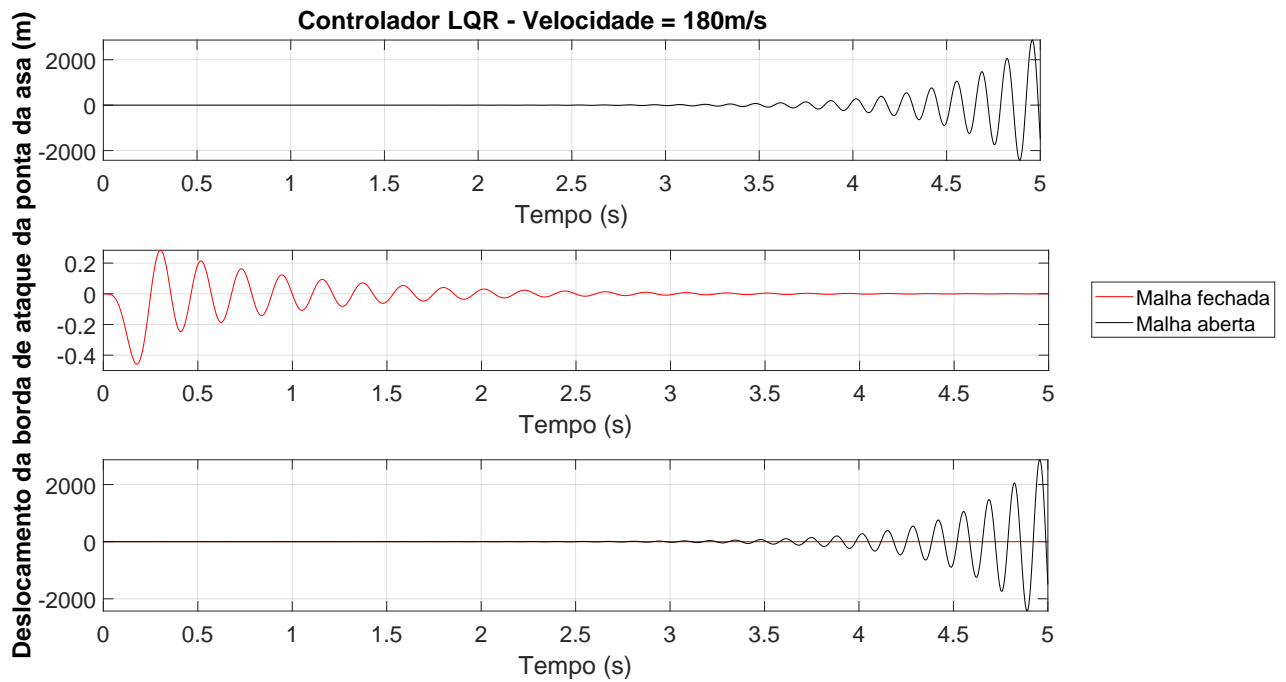


Figura 34 – Deslocamento do bordo de ataque para dois graus de liberdade e um *flap* com controlador LQR com Vel= 180 m/s.

A redução da amplitude máxima está em 99,98 %, o aumento da redução em comparação com o PID é explicada devido à velocidade estar fora do intervalo que a malha aberta demonstra estabilidade, velocidades maiores que 144 m/s, pode se observar que o sistema em malha aberta terá uma amplitude maior para velocidades e intervalos de tempo maiores devido à instabilidade causada pelo *flutter*.

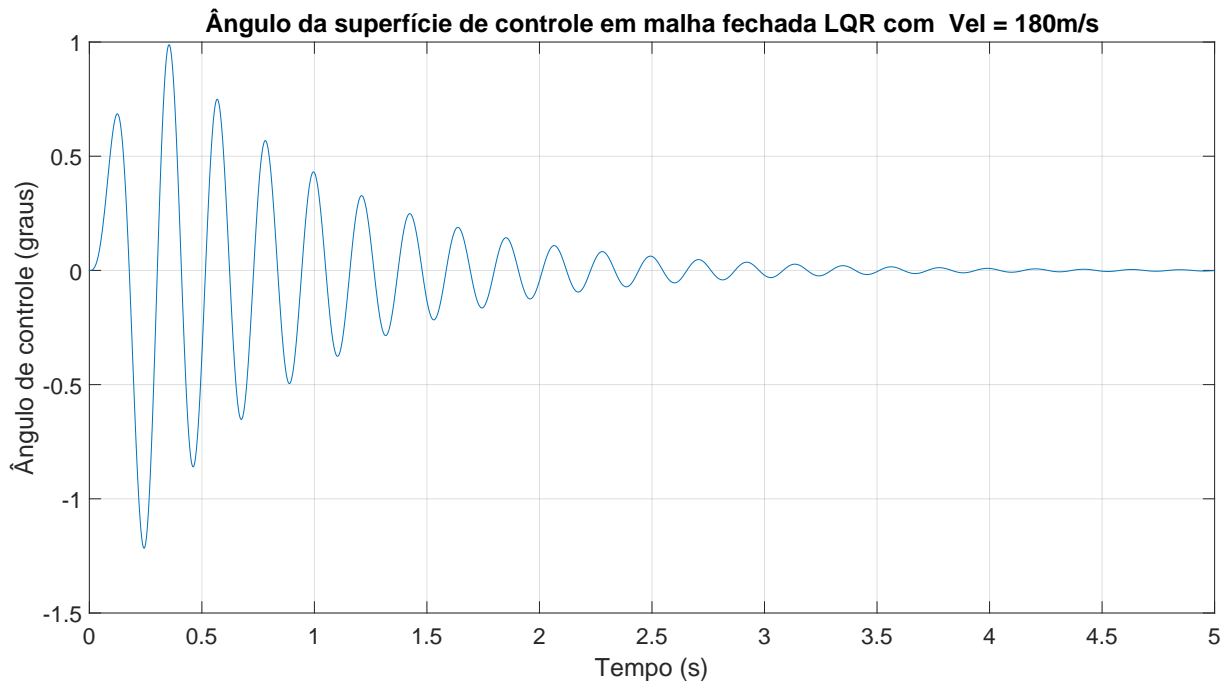


Figura 35 – Angulação da superfície de controle para dois graus de liberdade e um *flap* com controlador LQR com Vel= 180 m/s.

5.4.3.1 Simulação de tempo de resposta

A simulação de tempo de resposta será feita para a velocidade de 180 m/s por ser a velocidade principal do estudo, devido seu uso no aerodesign. Os tempos analisados são 3 e 1 segundos, além do sistema com 5 segundos já apresentado.

- 3 Segundos:

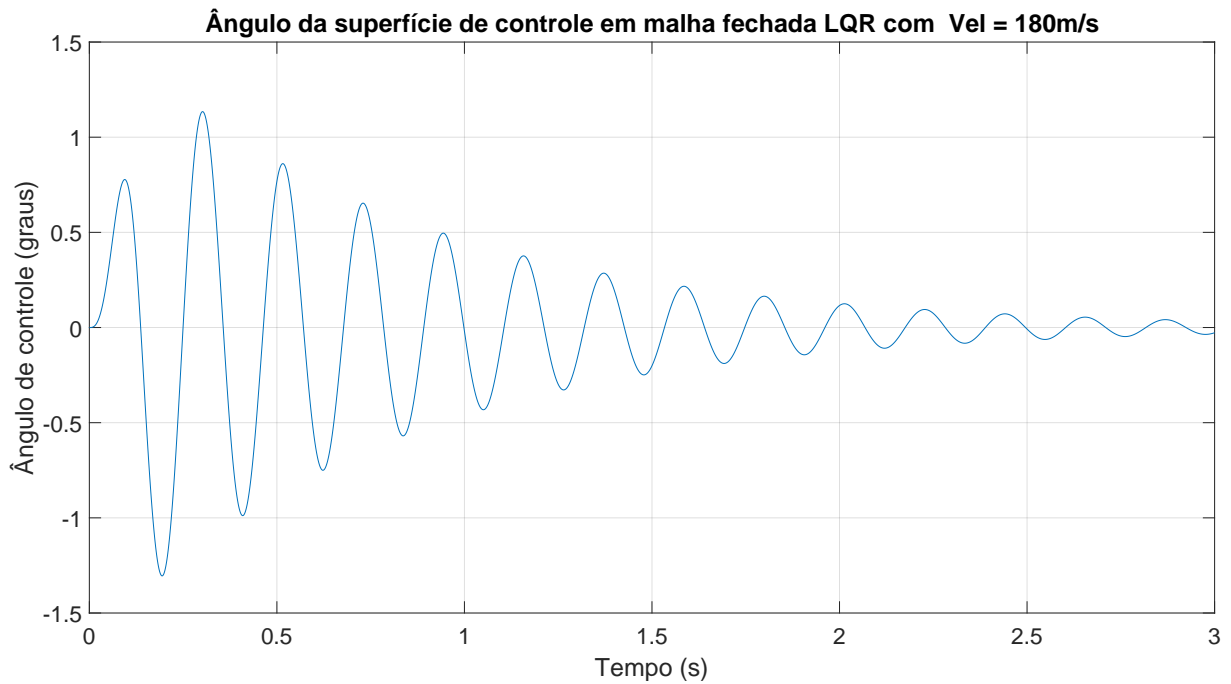


Figura 36 – Angulação da superfície de controle para dois graus de liberdade e *flap* com controlador LQR com Vel= 180 m/s para 3 segundos.

É possível verificar que o sistema continua estável e reagiu bem a um menor tempo de resposta, como esperado a amplitude máxima teve um acréscimo pequeno.

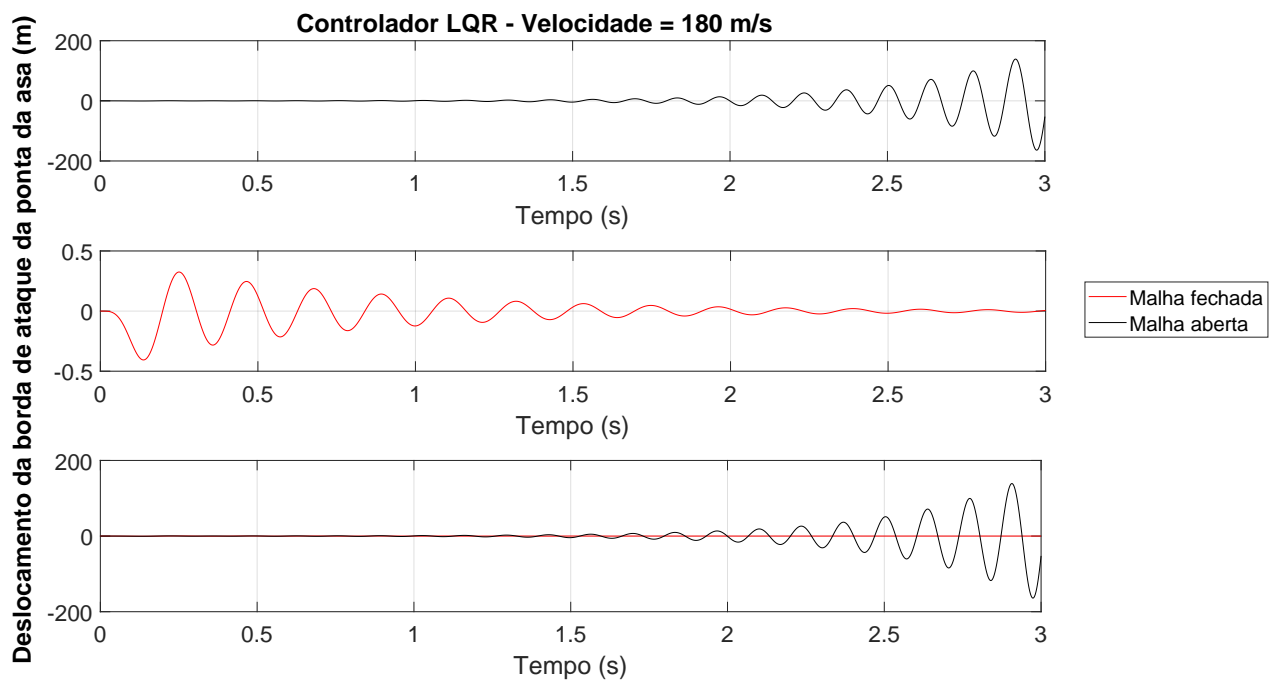


Figura 37 – Deslocamento do bordo de ataque para dois graus de liberdade e *flap* com controlador LQR com Vel= 180 m/s para 3 segundos.

O deslocamento do bordo de ataque apresentou uma redução de 99,75 % em comparação com a malha aberta, o que demonstrou uma diminuição da redução em comparação aos 5 segundos e o sistema continua estável.

- 1 Segundos:

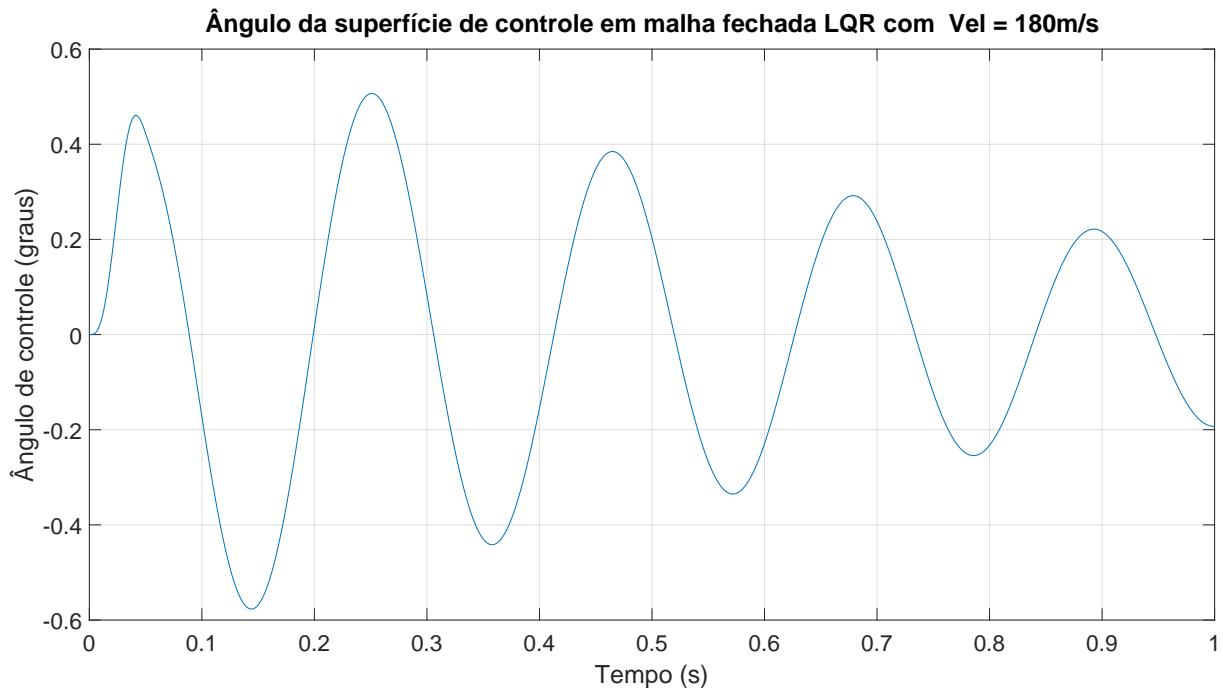


Figura 38 – Angulação da superfície de controle para dois graus de liberdade e *flap* com controlador LQR com Vel= 180 m/s para 1 segundo.

É possível verificar que o sistema continua estável e reagiu bem a um menor tempo de resposta. Porém, a estabilidade começa a ser atingida pelo tempo menor de resposta. Embora a amplitude máxima tenha diminuído, é necessário notar que o sistema necessitar de um tempo maior para estabilizar o sistema.

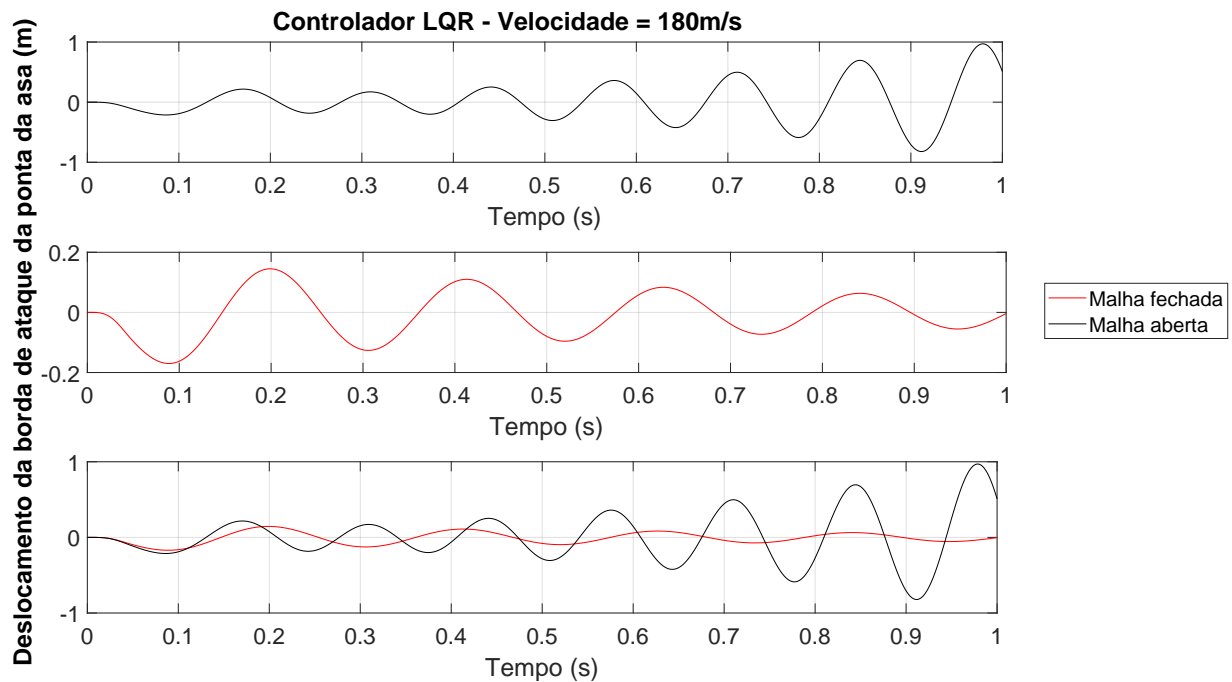


Figura 39 – Deslocamento do bordo de ataque para dois graus de liberdade e *flap* com controlador LQR com Vel= 180 m/s para 1 segundo.

O deslocamento do bordo de ataque apresentou uma redução de 82,47% em comparação com a malha aberta, com o sistema apresentando estável, podemos verificar que a amplitude do sistema em malha aberta está ficando menor e como resultado da amplitude entre o sistema em malha fechada e malha aberta diminui-se para um menor tempo de resposta.

5.5 Análise comparativa entre os controladores PID e LQR

5.5.1 Velocidade de *flutter*

Foi possível analisar o sistema e verificar que o desenvolvimento do controlador LQR permitiu uma maior liberdade durante a calibração, como demonstrado durante os três casos apresentados, com o intuito de suprimir fenômenos adversos como o *Hump mode* e uma maior eficácia quando analisado o envelope de voo apresentado pela aeronave.

O controlador PID obteve um aumento na velocidade de *flutter* de 15,70% em comparação com o sistema em malha aberta para os ganhos $k_v = 0,03$ e $k_d = 0,5$, ficando abaixo de 25%, uma média de aproveitamento entre os estudos publicados segundo KASEM (2022), já o controlador LQR demonstrou um aproveitamento de 26% quando comparado com o sistema em malha aberta, alocando-se relativamente na média. Com o intuito de obter respostas ótimas e obter um envelope de voo maior foi proposto o controlador LQR após as simulações foi demonstrado que o controlador ótimo provavelmente poderá ser uma boa opção de controlador.

Porém, após analisar os *root locus*, não foi possível verificar um ganho onde o overshoot estivesse abaixo de 10 % sendo todos os valores acima de 50% para os dois controladores. Tais dados são inerentes ao sistema dinâmico e pode-ser visto como uma limitação, visando que para sistemas aeronáuticos são desejados overshoots abaixo de 10 %.

Na plotagem do diagrama $V-g-f$, percebeu-se que com o PID o gráfico pode ser plotado para diferentes velocidades e a velocidade crítica para ganhos determinados permanece a mesma, o mesmo não ocorre com o sistema LQR, pois após ultrapassar a velocidade crítica se for utilizado velocidade maiores a velocidade de *flutter* irá sofrer alterações, porém se houver a utilização de ganhos escalonados para determinadas faixas de velocidade não é necessariamente um problema.

O sistema LQR demonstrou potencial para utilização em sistemas de colheita de energia como pode ser notado no caso 3, há estudos que buscam utilizar a energia gerada por fenômenos aeroelásticos com o intuito de desenvolver aeronaves sustentáveis e com maior viabilidade econômica.

5.5.2 Resposta a rajada

A angulação da superfície de controle aumentou em comparação com o controlador PID, porém partiu-se de um sistema que atuava até 40 m/s para um com 180 m/s, onde pode-se desconsiderar o aumento da amplitude máxima, devido à amplitude apresentada se encontrar na faixa de operação encontrada nas especificações da superfície de controle.

Para o sistema resposta a rajada foi possível avaliar que assim como o controlador PID a redução da amplitude tende a ser maior para velocidades maiores. Podemos notar que a redução da amplitude aumenta com o aumento da instabilidade do sistema em malha aberta tanto para o PID como para o LQR. Para comparar o sistema PID e o sistema LQR realizaram-se as simulações para as velocidades utilizadas no PID.

Foi possível notar que o sistema PID apresentava instabilidades para velocidades maiores que 40 m/s quando calibrado para rajadas até 30 metros de altitude em Brasília–DF, tendo uma redução de amplitude máxima maior devido à instabilidade do sistema em malha aberta quando comparado com o LQR para 40 m/s. Enquanto no LQR é possível notar que a redução para 40 m/s é ínfima devido o sistema em malha aberta se torna instável somente após 144 m/s e o em malha fechada após 183 m/s.

Apesar do controlador LQR obter melhores valores, foi requerido um maior tempo para sua calibração, portanto o engenheiro deve avaliar o tempo disponível para projetar e para a manutenção do sistema, não somente o desempenho além da energia necessária.

6 Conclusão

A análise desenvolvida neste trabalho evidenciou uma notável versatilidade no apoio à tomada de decisões no desenvolvimento de projetos conceituais. A flexibilidade mostra-se de grande relevância para equipes de aerodesign e entusiastas de design de aeronaves. Apesar da simplificação do modelo, os resultados fornecem informações suficientes para realizar *trade-offs* preliminares em projetos conceituais de aeronaves. Adicionalmente, a adaptabilidade do modelo permite a incorporação de tecnologias emergentes e conjecturas científicas iniciais.

Na análise do desempenho paramétrico, torna-se notável que o aumento no módulo de ganho para k_v (sinal negativo) impulsiona o ganho derivativo, ampliando as capacidades aerolásticas do sistema e atrasando efetivamente as condições de *flutter*. Contudo, o risco de desestabilização emerge com ganhos superiores a 0,05. Portanto, para o teste de resposta a rajada, o valor de 0,04 foi escolhido por razões de segurança na simulação de resposta a rajada.

Na análise do ganho proporcional k_d , seu impacto no envelope de voo revelou-se modesto em comparação com o ganho derivativo. No entanto, sua vantagem reside na ausência de tendência à desestabilização em voos de baixa velocidade devido não apresentar *hump mode*.

O aumento na área de superfície de controle resultou em uma diminuição na velocidade de *flutter*, atribuível ao aumento de sustentação na estrutura. Entretanto, é imperativo analisar as tensões e vibrações na asa devido ao aumento das forças em função da área de superfície de controle. O desafio é balancear os benefícios do aumento da sustentação com as possíveis perdas de rigidez na estrutura, a diminuição de rigidez adianta a velocidade de *flutter*.

Quando analisado o sistema dinâmico sobre a ação do controlador LQR é possível verificar que o sistema apresentou um acréscimo no envelope de voo comparado ao PID e mostrou uma maior facilidade para calibrar o sistema com intuito de atrasar a velocidade de *flutter* e a resposta a rajada, alcançando o objetivo e como a mais o sistema de ganhos para *flutter* é o mesmo para o sistema de resposta a rajada.

Foi possível verificar que o sistema quando bem calibrado com o LQR não apresenta o *hump mode* assim como o k_d porém consegue ter um impacto maior no atraso da velocidade crítica o qual o ganho k_d não conseguia ser tão eficiente. Ao mesmo tempo, não apresentou *hump mode* como o k_v apresentou, e mesmo sem o fenômeno apresentou um envelope de voo maior.

Porém, devesse ter um controlador calibrado corretamente conforme o desempenho desejado do subsistema da aeronave e atendendo as limitações dos atuadores, o foco do modelo utilizado não é na instrumentação, mas deve-se lembrar que é um modelo *SISO* de introdução a aeroelasticidade tendo como faixa de operação somente as limitações da superfície de controle sendo uma angulação de ± 15 e uma faixa de operação de 30° por segundo, além de não apresentar um overshoot baixo, sendo os menores valores apresentados acima de 50 % e 60 %, sem rajada e com rajada respectivamente, devido às limitações inerentes ao sistema.

Apesar das limitações inerentes ao modelo, o panorama introduzido neste contexto emerge como uma ferramenta relevante. Seu potencial pode ser aprimorado pela incorporação de diversos modelos de leis de controle, integração de elementos não lineares e adoção de modos estruturais e aerodinâmicos mais abrangentes. Essas melhorias visam mitigar ou retardar as instabilidades aeroelásticas nos sistemas aeronáuticos.

Como perspectivas de melhorias, é proposto a utilização de ferramentas de otimização dos modelos aeroelásticos. Comparar o desempenho dos algoritmos em diferentes cenários e tipos de modelos para identificar quais são mais eficazes em contextos específicos. Em acréscimo, como ferramentas para verificar os resultados obtidos podem ser feitos testes utilizando aparatos em túnel de vento, softwares que simulam sistemas mecânicos multi-corpos e softwares CFD como Nastran® e Femap®.

Referências

- ANAC. *RBAC23EMD64*. RBAC, Brasília, August 2019. Citado na página 26.
- JOHN D ANDERSON. *Fundamentals of Aerodynamics*. Mc Graw Hill, 6 edition, 2017. Citado 4 vezes nas páginas 22, 34, 35 e 69.
- FERNANDID P. BEER, E. RUSSEL JR. JOHNSTON, JOHN T. DEWOLF, and DAVID F. MAZUREK. *Mecânica dos Materiais*. Mc Graw Hill, 5 edition, 2011. Citado 3 vezes nas páginas 9, 22 e 53.
- RAYMOND L. BISPLINHOFF, HOLT ASHLEY, and ROBERT L. HALFMAN. *Aeroelasticity*. Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1996. ISBN 978-0486691893. Citado 4 vezes nas páginas 19, 27, 30 e 35.
- CENIPA. *RELATÓRIO FINAL A - 064/CENIPA/2013*. Comando da Aeronautica, 2013a. Citado na página 27.
- CENIPA. *RELATÓRIO FINAL A - 158/CENIPA/2013*. Comando da Aeronautica, 2013b. Citado na página 27.
- CHAMBERS, J. R. *Innovation in Flight: Research of the NASA Langley Research Center on Revolution Advanced Concepts for Aeronautics*. NASA Langley Research Center, 2005. Citado na página 19.
- TIAGO FRANCISCO GOMES DA COSTA. Estudo numérico de uma asa com controle ativo de flutter por realimentação da pressão medida num ponto. *EEED/USP*, 2007. Citado 2 vezes nas páginas 30 e 40.
- HOWARD D. CURTIS. *Orbital Mechanics for Engineering Students*. Elsevier Aerospace Engineering Series, 1 edition, 2005. Citado na página 22.
- WASHINGTON S DA MACENA. Comprehensive aeroservoelastic evaluation of a simplified rectangular wing subjected to parametric control analysis. *CILAMCE-2023 Proceedings of the XLIV Ibero-Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering, ABMEC, Porto, Portugal, 2023*. Citado na página 22.

- RICHARD C. DORF and ROBERT H. BISHOP. *Sistemas de Controle Modernos*. LTC Editora, ISBN 0-201-30864-9, 2021a. Citado na página 43.
- RICHARD C. DORF and ROBERT H. BISHOP. *Sistemas de Controle Modernos*. LTC Editora, ISBN 0-201-30864-9, 2021b. Citado 5 vezes nas páginas 40, 45, 46, 47 e 48.
- B. DRAŽENVIĆ. The invariance conditions in variable structure systems. *Automatica*, 5(3): 287–295, 1969. ISSN 0005-1098. doi: [https://doi.org/10.1016/0005-1098\(69\)90071-5](https://doi.org/10.1016/0005-1098(69)90071-5). URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0005109869900715>. Citado na página 45.
- THOMAS K. EISMIN. *Eletrônica de Aeronaves: Introdução aos sistemas aviônicos*. bookman, 2016. Citado na página 27.
- Y. C. FUNG. *An Introduction to the theory of Aeroelasticity*. Dover Publications, Inc., 1969. ISBN 0-486-67871-7. Citado 2 vezes nas páginas 35 e 55.
- G. J HANCOCK, J.R. WRIGHT, and A. SIMPSON. *On the teaching of the principles of wing flexure-torsion flutter*. The Aeronautical Journal, 1927. doi: 10.1017/S0001924000015050. Citado 2 vezes nas páginas 37 e 53.
- J. HEEG. Status report on aeroelasticity in the vehicle development for x-57 maxwell. *AIAA 2018-3487*, 2018. Citado 2 vezes nas páginas 26 e 71.
- João P. HESPANHA. *Linear Systems Theory*. Princeton University Press, 2018. Citado na página 48.
- CARLOS DE MARQUI JÚNIOR. *Estudo Teórico e Experimental de um Controlador para Supressão de Flutter*. Doutorado em engenharia mecânica, Escola de Engenharia de São Paulo da Universidade de São Paulo, 2004. Citado 3 vezes nas páginas 9, 21 e 26.
- M M KASEM. Analysis, control, and optimization of aeroelastic systems: an introduction to the recent literature for the new investigator. *Journal of Physics: Conference Series*, 2022. Citado 3 vezes nas páginas 82, 85 e 91.
- SELMA R. MAGGIOTTO1, FERNANDA M. S. FERREIRA, and CHRISTIAN V. MAXIMIANO. *UM ESTUDO DA VELOCIDADE E DIREÇÃO PREDOMINANTE DO VENTO EM BRASÍLIA, DF*. XVIII Congresso Brasileiro de Agrometeorologia, 2013. Citado na página 79.
- POLLIANA C.O. MARTINS, ALINE S. DE PAULA, Sergio H.S. CARNEIRO, and DOMINGOS A. RADE. Hybrid control technique applied to an aero-servo-viscoelastic simplified wing model. *Aerospace Science and Technology*, 122:107387, 2022. ISSN 1270-9638. doi: <https://doi.org/10.1016/j.ast.2022.107387>. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S127096382200061X>. Citado 2 vezes nas páginas 34 e 78.

- BORIS MICHELI. Active flutter suppression: Are we reactive enough? Technical report, DLR Institute of Aeroelasticity, 2024. Citado 2 vezes nas páginas 9 e 25.
- VIVEK MUKHOPADHYAY. Historical perspective on analysis and control of aeroelastic responses. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 26(5), 673–684., 2003. Citado 2 vezes nas páginas 9 e 23.
- NORMAN S. NISE. *Engenharia de sistemas de controle*. John Wiley e sons, Inc, 2017. Citado 2 vezes nas páginas 40 e 41.
- S. NITHIN, KOVVURI, and VIJAYALAKSHMI. Review on aeroelasticity. *International Journal of Engineering Applied Sciences and Technology*, 04:271–274, 2019. Citado 3 vezes nas páginas 19, 20 e 21.
- KATSUHIKO OGATA. *Engenharia de controle moderno*. Pearson Education, 2010. Citado na página 45.
- SINGIRESU S. RAO. *Vibrações Mecânicas*. Mechanical Vibrations, 2017. ISBN 978-0-13-212819-3. Citado 4 vezes nas páginas 22, 31, 32 e 52.
- FREDERICO ALBUQUERQUE RIBEIRO. Resposta aeroelástica à rajada 1-cosseno usando aproximação aerodinâmica não estacionária. *UNESP/Ilha Solteira*, 2019. Citado na página 27.
- ASHISH TEWARI. *Adaptive Aeroservoelastic Control*. John Wiley & Sons, ISBN 9781118457634, 2016. Citado na página 40.
- LIUPING WANG. *Model Predictive Control System Design and Implementation Using MATLAB*. Springer-Verlag London Limited, ISBN 10.1007/978-1-84882-331-0, 2009. Citado 2 vezes nas páginas 40 e 83.
- JAN R. WRIGHT and JONATHAN E. COOPER. *Introduction to Aircraft Aeroelasticity and Loads*. John Wiley & Sons, 2007. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 22.
- JAN R. WRIGHT and JONATHAN EDWARD COOPER. *Introduction to aircraft aeroelasticity and load*. John Wiley & Sons, ISBN TL574.A37W75 2014 629.132'362–dc23, 2015. Citado 26 vezes nas páginas 9, 11, 19, 27, 28, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 50, 51, 52, 54, 61, 62, 63, 64, 66, 76 e 81.

Apêndices

```

% System parameters
s = 7.5;           % semi span
c = 2;            % chord
xcm = 0.5 * c;    % position of centre of mass from leading
                 edge ***** DEFAULT VALUE - CAN'T BE CHANGED
xf = 0.48 * c;    % position of elastic axis from leading
                 edge
e = xf / c - 0.25; % eccentricity between elastic axis and
                 aero centre (1/4 chord)
aw = 2 * pi;     % lift curve slope
bw = e * aw;     % control surface lift curve slope
m = 100;         % unit mass / area of wing
rho = 1.225;     % air density

Mtdot = -1.2;    % unsteady torsional damping term

modes = 2;

bending_freq = 5; % bending freq in Hz - approximate -
                 ignores coupling term
torsion_freq = 10; % torsion freq in Hz - approximate -
                 ignores coupling term

% Inertia matrix A
A = zeros(modes,modes);
A(1,1) = (m * s * c) / 5;
A(2,2) = m * s / 3 * (c^3 / 3 - c^2 * xf + xf^2 * c);
A(1,2) = m * s / 4 * (c^2 / 2 - c * xf);
A(2,1) = A(1,2);

% Stiffness matrix E
E = zeros(modes,modes);
EI = (bending_freq * pi * 2)^2 * A(1,1) / 4 * s^3; % q1 term
    - bending stiffness
GJ = (torsion_freq * pi * 2)^2 * A(2,2) * s; % q2 term
    - torsion stiffness
E(1,1) = 4 * EI / s^3;
E(2,2) = GJ / s;

```

```

for V = vstart:vinc:vend

    vels = [vels V];

    for iloop = 0:1:1 ;      % Loop with and w/o control gain

        % Control surface terms (rhs of aeroelastic equations)
        F_control = rho * V^2 * [-c * s * ac / 6; c^2 * s * bc
            / 4];

        % Control feedback matrices
        g1 = F_control(1);
        g2 = F_control(2);
        F = Kv * [g1 -g1 * xf;  g2 -g2 * xf]; % control
            damping matrix
        G = Kd * [g1 -g1 * xf;  g2 -g2 * xf]; % control
            stiffness matrix

        % Gust terms (rhs of aeroelastic equations)
        F_gust = rho * V * [-aw * s * c / 6; bw * c^2 * s / 4];

        % Loop for no control and control
        if iloop == 0      % First loop without any control
            terms
                CC = rho * V * B;
                KK = rho * V^2 * C + E ;
        else              % Second loop is for the control
            term case
                CC = CC - F;
                KK = KK - G ;
        end

        % Set up system matrices (in standard not aeroelastic
            notation)
        MM = A;
        MCC = MM\CC;
        MKK = MM\KK;
        MFG = MM\F_gust;
    end
end

```

```

if nvel > 1      % Determine open / closed loop
    STABILITY

    peval = polyeig(MKK,MCC,eye(2,2)); % Solve using 2
        nd order form
    ff = abs(peval) / 2 / pi;
    dd = -real(peval)./abs(peval) * 100;
    rp = real(peval); ip = imag(peval);
    ff = ff(1:2:3,:); dd = dd(1:2:3,:);
    rp = rp(1:2:3,:); ip = ip(1:2:3,:);

    if iloop == 0      % First loop without any
        control terms
        freqs = [freqs ff]; damps = [damps dd];
        rpart = [rpart rp]; ipart = [ipart ip];
    else              % Second loop is for the
        control term case
        cfreqs = [cfreqs ff]; cdamps = [cdamps dd];
        crpart = [crpart rp]; cipart = [cipart ip];
    end

else      % Otherwise compute the open / closed loop GUST
    RESPONSE

    % Gust input terms for a (1 - cosine) gust
    Sgust = zeros(size(t));
    g_end = tmax * gust_t;
    gt = sum(t < g_end);

    if gust_amp_1_minus_cos ~= 0
        for ii = 1:gt
            Sgust(ii) = gust_amp_1_minus_cos / 2 * (1 -
                cos(2 * pi * t(ii) / g_end));
        end
    end

    Egust = [t,Sgust]; % Gust Array composed of time
        and data columns

```

```

[tout] = sim('Aero_Servo');

q1 = EoutG1(:,1);    % q1 generalised coordinate
q2 = EoutG1(:,2);    % q2 generalised coordinate
q1dot = EoutG2(:,1);
q2dot = EoutG2(:,2);

% Determine the control response (in rads)
beta = Kv * (q1dot * s^2 - q2dot * s * xf) + Kd * (
    q1dot * s^2 - q2dot * s * xf);

% Determine the measurement position response
z = q1 * s^2 - q2 * s * xf;

if iloop == 0
    z_nogain = z;
    q1_nogain = q1;
    q2_nogain = q2;
end

end % evals or response loop

end % iloop loop

end % velocity loop

% Sort frequencies and corresponding dampings and poles

[freqs,iord] = sort(freqs);
nsize = size(freqs,2);
for j = 1:nsize, damps(:,j) = damps(iord(:,j),j); end
for j = 1:nsize, rpart(:,j) = rpart(iord(:,j),j); end
for j = 1:nsize, ipart(:,j) = ipart(iord(:,j),j); end

[cfreqs,iord] = sort(cfreqs);
for j = 1:nsize, cdamps(:,j) = cdamps(iord(:,j),j); end
for j = 1:nsize, crpart(:,j) = crpart(iord(:,j),j); end
for j = 1:nsize, cipart(:,j) = cipart(iord(:,j),j); end

```

```

if nvel == 1      %%% Plot out the responses for a single case
    figure(1)
    plot(t,Sgust)
    title('Gust input time history (1 - cosine)')
    xlabel('Time (s)')
    ylabel('Gust velocity (m/s)')

    figure(2)
    subplot(211)
    plot(t,q1,'r',t,q1_nogain,'k')
    title('q1 and q2 responses for open and closed loop cases')
    xlabel('Time (s)')
    ylabel('q1 Response ')
    grid
    legend('Closed loop','Open loop')
    subplot(212)
    plot(t,q2,'r',t,q2_nogain,'k')
    xlabel('Time (s)')
    ylabel('q2 Response ')
    grid

    figure(3)
    plot(t,beta)
    title(['Control Angle for Closed Loop Case',' Kv = ',
          num2str(Kv),...
          ' Kd = ',num2str(Kd), ' Vel = ',num2str(V), 'm/s'] )
    xlabel('Time (s)')
    ylabel('Control Angle (deg)')
    grid

    figure(4)
    subplot(311)
    plot(t,z_nogain,'k')
    title('Wing tip Leading Edge Displacement (m)')
    xlabel(['Kv = ',num2str(Kv),' Kd = ',num2str(Kd), ' Vel = ',
          num2str(V),...
          'm/s'])
    ylabel('Open loop')
    subplot(312)

```

```

plot(t,z,'r')
xlabel('Time (s)')
ylabel('Closed loop')
subplot(313)
plot(t,z,'r',t,z_nogain,'k')
xlabel('Time (s)')
ylabel('Both')
grid
legend('Closed loop','Open loop')

figure(5)
plot(t,z,'r',t,z_nogain,'k')
xlabel('Time (s)')
ylabel('Open and closed loop response')
grid
legend('Closed loop','Open loop')
title(['Kv = ',num2str(Kv),' Kd = ',num2str(Kd),' Vel = ',num2str(V),...
      'm/s'])

resp_no_gain_max = max(abs(z_nogain));
resp_gain_max = max(abs(z));
reduction = 100 * (resp_no_gain_max - resp_gain_max) /
    resp_no_gain_max;
astring = ['Reduction = ' num2str(reduction), '%'];
disp(astring)

else          %%%          vg, vw, eigenvalue and root locus
plots

figure(6)
subplot(211)
plot(vels,freqs(1,:), 'k',vels,freqs(2,:), 'b',vels,cfreqs
    (1,:), 'g',vels,cfreqs(2,:), 'r')
xlabel('Velocity m/s')
ylabel('Frequency (Hz)')
title(['Kv = ',num2str(Kv),' Kd = ',num2str(Kd)])
grid
subplot(212)

```

```

plot(vels,damps(1,:), 'k',vels,damps(2,:), 'b',vels,cdamps
    (1,:), 'g',vels,cdamps(2,:), 'r')
xlabel('Velocity m/s')
ylabel('Damping (%)')
grid
legend('Mode 1 open loop','Mode 2 open loop','Mode 1 closed
    loop','Mode 2 closed loop',...
    'Location','NorthWest')

figure(7)
subplot(211)
plot(vels,rpart(1,:), 'k',vels,rpart(2,:), 'b',vels,crpart
    (1,:), 'g',vels,crpart(2,:), 'r')
xlabel('Velocity m/s')
ylabel('Real part of evals')
title(['Kv = ',num2str(Kv),'   Kd = ',num2str(Kd)])
grid
legend('Mode 1 open loop','Mode 2 open loop','Mode 1 closed
    loop','Mode 2 closed loop',...
    'Location','SouthWest')
subplot(212)
plot(vels,ipart(1,:), 'k',vels,ipart(2,:), 'b',vels,cipart
    (1,:), 'g',vels,cipart(2,:), 'r')
xlabel('Velocity m/s')
ylabel('Imag part of evals')
grid

figure(8)
plot(rpart(1,:),ipart(1,:), 'k',rpart(2,:),ipart(2,:), 'b',
    ...
    crpart(1,:),cipart(1,:), 'g',crpart(2,:),cipart(2,:), 'r'
    ,...
    rpart(1,1),ipart(1,1), 'Ok',crpart(1,1),cipart(1,1), 'Og'
    ,...
    rpart(2,1),ipart(2,1), 'Ob',crpart(2,1),cipart(2,1), 'Or'
    )
xlabel('Real part')
ylabel('Imag part')
title(['Kv = ',num2str(Kv),'   Kd = ',num2str(Kd), '   Vstart

```

```
    = ',num2str(vstart),...  
      'm/s  Vend = ',num2str(vend), 'm/s']])  
grid  
legend('Mode 1 open loop','Mode 2 open loop','Mode 1 closed  
      loop','Mode 2 closed loop',...  
      'Location','NorthWest')  
end
```

B CÓDIGO MATLAB®- AEROSERVO- ELÁSTICO LQR

```

% Flutter model with control

%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

format compact; clear all; close all

% Parâmetros de entrada

tic
% Velocity values - dictates gust or stability cases

vstart = 0; vinc = 1; vend = 32;
nvel = floor((vend - vstart) / vinc) + 1;

%%%%%%%%% If nvel = 1 then determines the gust response for
          +/- gain
%%%%%%%%% If nvel > 1 then determines stability for +/- gain

%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% System parameters
s = 7.5;           % semi span
c = 2;            % chord
xcm = 0.5 * c;    % position of centre of mass from leading

```

```

    edge ***** DEFAULT VALUE - CAN'T BE CHANGED
xf = 0.48 * c;      % position of elastic axis from leading
    edge
e = xf / c - 0.25; % eccentricity between elastic axis and
    aero centre (1/4 chord)
aw = 2 * pi;      % lift curve slope
bw = e * aw;      % control surface lift curve slope
m = 100;          % unit mass / area of wing
rho = 1.225;      % air density

Mtdot = -1.2;     % unsteady torsional damping term

modes = 2;

bending_freq = 5; % bending freq in Hz - approximate -
    ignores coupling term
torsion_freq = 10; % torsion freq in Hz - approximate -
    ignores coupling term

%% Definição das matrizes de inercia, rigidez e amortecimento

% Inertia matrix A
A = zeros(modes,modes);
A(1,1) = (m * s * c) / 5;
A(2,2) = m * s / 3 * (c^3 / 3 - c^2 * xf + xf^2 * c);
A(1,2) = m * s / 4 * (c^2 / 2 - c * xf);
A(2,1) = A(1,2);

% Stiffness matrix E
E = zeros(modes,modes);
EI = (bending_freq * pi * 2)^2 * A(1,1) / 4 * s^3; % q1 term
    - bending stiffness
GJ = (torsion_freq * pi * 2)^2 * A(2,2) * s; % q2 term
    - torsion stiffness
E(1,1) = 4 * EI / s^3;
E(2,2) = GJ / s;

EE = 0.1; % fraction of chord made up by control surface

```

```

ac = aw / pi * (acos(1 - 2 * EE) + 2 * sqrt(EE * (1 - EE)));
bc = -aw / pi * (1 - EE) * sqrt(EE * (1 - EE));

%% Matrizes aerodinâmicas

% Aerodynamic damping matrix
B = zeros(modes,modes);
B = [c * s * aw / 10, 0; -c^2 * s * bw / 8, -c^3 * s * Mtdot /
    24];

% Aerodynamic stiffness matrix
C = zeros(modes,modes);
C = [0, c * s * aw / 8; 0, -c^2 * s * bw / 6];

D= zeros(modes,modes);

%% Controlador LQR e representação em matrizes de espaço de
    estados

% LQR weights

% % Para velocidade de flutter em 184 m/s
% Q = [0.000000000001,0,0,0;0, 0.0002, 0, 0; 0, 0, 0.000001,
    0; 0, 0, 0, 0.0000002]*10^(-2) ; % Identity matrix for
    state weights
% R = 1; % Scalar for control input weight

% % Para velocidade de flutter em 185 m/s
% Q = [0.000001,0,0,0;0, 1, 0, 0; 0, 0, 10, 0; 0, 0, 0, 1] ;
    % Identity matrix for state weights
% R = 100000000; % Scalar for control input
    weight

% %Para velocidade de flutter em 166 m/s
% Q = [0.00001,0,0,0;0, 0.01, 0, 0; 0, 0, 0.00001, 0; 0, 0,
    0, 10] ; % Identity matrix for state weights
% R = 0.01; % Scalar for control input weight

% Para velocidade de flutter em 32 m/s

```

```

Q = [0.0001,0,0,0;0, 0.1, 0, 0; 0, 0, 0.01, 0; 0, 0, 0, 0.1]
    ;           % Identity matrix for state weights
R = 1;           % Scalar for control input weight

I=eye(2);
g=[(-ac*s*c)/6;((c^2) * bc*s)/4];
A_inv=inv(A);
Vel = vstart:vinc:vend;
for ii = 1:length(Vel)
V=Vel(1,ii);
AA=[zeros(modes,modes) I; (-A_inv)*(rho*(V^2)*C+E) (-A_inv)*
    rho*V*B ];
BB=[zeros(modes,1); (A_inv)*(g*rho*(V^2))];
CCC=[0, 1, 0, -(xf)];

end
% LQR control
[K,S,ee(ii,:)] = lqr(AA, BB, Q, R);

%% Parametros de rajada configurado para Brasília
% (1 - cosine) gust parameters
dt = 0.001; tmin = 0; tmax = 5;
t = [0:dt:tmax]';           % Column vector
npts = max(size(t));

gust_amp_1_minus_cos = 14.50;           % Max velocity of (1 - cosine
) gust (m/s)
gust_t = 0.05;           % Fraction of total time that is
gust (0 - 1)

% Variables
% Variables to be updated each time round the velocity loop
freqs = []; damps = []; rpart = []; ipart = [];
% Applied control variables to be updated each time round the
velocity loop
cfreqs = []; cdamps = []; crpart = []; cipart = []; vels = [];

```

```

%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% Velocity loop - nvel = 1 gust response and nvel = 0 stability
%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%% Matrizes de controle - Simulação aeroservoelástica
for V = vstart:vinc:vend

    vels = [vels V];

    for iloop = 0:1:1 ;      % Loop with and w/o control gain

        % Control surface terms (rhs of aeroelastic equations)
        F_control = rho * V^2 * [-c * s * ac / 6; c^2 * s * bc
            / 4];

        % Control feedback matrices
        g1 = F_control(1);
        g2 = F_control(2);

        % Control damping and stiffness matrices
        g_xf_matriz = [g1 -g1 .* xf; g2 -g2.* xf];

        % Adaptando os tamanho:
        % Set up system matrices
        G_matriz=zeros(2,4);

        row_start = 1;
        col_start = 1;
        G_matriz(row_start:row_start+size(g_xf_matriz, 1)-1,
            col_start:col_start+size(g_xf_matriz, 2)-1) =
            g_xf_matriz;
    end
end

```

```

%%%%%%%%%%%%%%
F = -K .* G_matriz;
G = -K .* G_matriz;

% Gust terms (rhs of aeroelastic equations)
F_gust = rho * V * [-aw * s * c / 6; bw * c^2 * s / 4];

% Loop for no control and control

if iloop == 0          % First loop without any control
    terms

        CC = rho * V * B;
        KK = rho * V^2 * C + E ;
else                  % Second loop is for the control term
    case

        F = [F(1:2, 1:2)];
        G = [G(1:2, 1:2)];
        CC = CC - F;
        KK = KK - G ;

    end

% Set up system matrices (in standard not aeroelastic
    notation)
MM = A;
MCC = MM\CC;
MKK = MM\KK;
MFG = MM\F_gust;

if nvel > 1          % Determine open / closed loop
    STABILITY

```

```

peval = polyeig(MKK,MCC,eye(2,2)); % Solve using 2
    nd order form
ff = abs(peval) / 2 / pi;
dd = -real(peval)./abs(peval) * 100;
rp = real(peval); ip = imag(peval);
ff = ff(1:2:3,:); dd = dd(1:2:3,:);
rp = rp(1:2:3,:); ip = ip(1:2:3,:);

if iloop == 0      % First loop without any
    control terms
    freqs = [freqs ff]; damps = [damps dd];
    rpart = [rpart rp]; ipart = [ipart ip];
else              % Second loop is for the
    control term case
    cfreqs = [cfreqs ff]; cdamps = [cdamps dd];
    crpart = [crpart rp]; cipart = [cipart ip];
end

else % Otherwise compute the open / closed loop GUST
RESPONSE

    % Gust input terms for a (1 - cosine) gust
%% Integração Simulink

Sgust = zeros(size(t));
g_end = tmax * gust_t;
gt = sum(t < g_end);

if gust_amp_1_minus_cos ~= 0
    for ii = 1:gt
        Sgust(ii) = gust_amp_1_minus_cos / 2 * (1 -
            cos(2 * pi * t(ii) / g_end));
    end
end

Egust = [t,Sgust]; % Gust Array composed of time
and data columns

[tout] = sim('Aero_Servo');
```

```

    q1 = EoutG1(:,1)*(pi/180);    % q1 generalised
        coordinate
    q2 = EoutG1(:,2)*(pi/180);    % q2 generalised
        coordinate
    q1dot = EoutG2(:,1)*(pi/180);
    q2dot = EoutG2(:,2)*(pi/180);

    % Determine the control response (in rads)
    beta = K.* (q1dot .* s^2 - q2dot .* s * xf) + K.* (
        q1dot .* s^2 - q2dot .* s * xf);

    % Determine the measurement position response
    z = q1 * s^2 - q2 * s * xf;

    if iloop == 0
        z_nogain = z;
        q1_nogain = q1;
        q2_nogain = q2;
    end

    end % evals or response loop

end % iloop loop

end % velocity loop
%% Alocação dos amortecimento e frequências
% Sort frequencies and corresponding dampings and poles

[freqs,iord] = sort(freqs);
nsize = size(freqs,2);
for j = 1:nsize, damp(:,j) = damp(iord(:,j),j); end
for j = 1:nsize, rpart(:,j) = rpart(iord(:,j),j); end
for j = 1:nsize, ipart(:,j) = ipart(iord(:,j),j); end

[cfreqs,iord] = sort(cfreqs);

for j = 1:nsize, cdamp(:,j) = cdamp(iord(:,j),j); end
for j = 1:nsize, crpart(:,j) = crpart(iord(:,j),j); end

```

```

for j = 1:nsize, cipart(:,j) = cipart(iord(:,j),j); end

%% Formatação e plot dos gráficos
if nvel == 1      %%% Plot out the responses for a single case
    figure(1)
    plot(t,Sgust)
    title(['Histórico de tempo de entrada de rajada (1 -
           cosseno) LQR Vel = ',num2str(V), 'm/s'])
    xlabel('Tempo (s)')
    ylabel('Velocidade da rajada (m/s)')
    set(gca, 'FontSize', 18) % Tamanho das fontes
%     filename = input('Inserir o nome para salvar o arquivo:
%     ') % Nomear para salvar a figura
%     folder = 'C:\Users\washid\Desktop\TCC-Aeroelasticidade\
%     TCC2 - Figures'; % Pasta a ser salva a figura
%     saveas(gcf, fullfile(folder, [filename, '.fig'])) %Salva
%     no formato fig
%     print(gcf, fullfile(folder, [filename, '.eps']), '-depsc
%     ') %Salva no formato eps
%     saveas(gcf, fullfile(folder, [filename, '.pdf'])) %Salva
%     no formato pdf
%     clear folder; folder = [];

    figure(2)
    subplot(211)
    plot(t,q1,'r',t,q1_nogain,'k')
    title(['Respostas q1 e q2 para malha aberta e malha fechada
           LQR Vel = ',num2str(V), 'm/s'])
    xlabel('tempo (s)')
    ylabel('Resposta q1 ')
    grid
    legend('Malha aberta','Malha Fechada')
    set(gca, 'FontSize', 18)
    subplot(212)
    plot(t,q2,'r',t,q2_nogain,'k')
    xlabel('tempo (s)')
    ylabel('Resposta q2 ')
    grid

```

```

    set(gca, 'FontSize', 18)
%     filename = input('Inserir o nome para salvar o arquivo:
%) % Nomear para salvar a figura
%     folder = 'C:\Users\wash\\Desktop\TCC-Aeroelasticidade\
TCC2 - Figures'; % Pasta a ser salva a figura
%     saveas(gcf, fullfile(folder, [filename, '.fig'])) %Salva
no formato fig
%     print(gcf, fullfile(folder, [filename, '.eps']), '-depsc
') %Salva no formato eps
%     saveas(gcf, fullfile(folder, [filename, '.pdf'])) %Salva
no formato pdf
%     clear folder; folder = [];

figure(3)
plot(t,beta(:,1))
title(['Ângulo da superfície de controle em malha fechada
LQR com Vel = ',num2str(V), 'm/s'] )
xlabel('Tempo (s)')
ylabel('Ângulo de controle (graus)')
grid
set(gca, 'FontSize', 18)
%     filename = input('Inserir o nome para salvar o arquivo:
%) % Nomear para salvar a figura
%     folder = 'C:\Users\wash\\Desktop\TCC-Aeroelasticidade\
TCC2 - Figures'; % Pasta a ser salva a figura
%     saveas(gcf, fullfile(folder, [filename, '.fig'])) %Salva
no formato fig
%     print(gcf, fullfile(folder, [filename, '.eps']), '-depsc
') %Salva no formato eps
%     saveas(gcf, fullfile(folder, [filename, '.pdf'])) %Salva
no formato pdf
%     clear folder; folder = [];

figure(4)

subplot(311)
plot(t,z_nogain,'k')
title(['Deslocamento da borda de ataque da ponta da asa (m)
- Controlador LQR Vel = ',num2str(V), 'm/s'])

```

```

xlabel('Tempo (s)')
ylabel('Malha aberta')
grid
set(gca, 'FontSize', 18)
subplot(312)
plot(t,z,'r')
xlabel('Tempo (s)')
ylabel('Malha fechada')
grid
set(gca, 'FontSize', 18)
subplot(313)
plot(t,z,'r',t,z_nogain,'k')
xlabel('Tempo (s)')
ylabel('Comparativo')
grid
legend('Malha fechada','Malha aberta')
set(gca, 'FontSize', 18)
%   filename = input('Inserir o nome para salvar o arquivo:
%   ') % Nomear para salvar a figura
%   folder = 'C:\Users\wash\\Desktop\TCC-Aeroelasticidade\
%   TCC2 - Figures'; % Pasta a ser salva a figura
%   saveas(gcf, fullfile(folder, [filename, '.fig'])) %Salva
%   no formato fig
%   print(gcf, fullfile(folder, [filename, '.eps']), '-depsc
%   ') %Salva no formato eps
%   saveas(gcf, fullfile(folder, [filename, '.pdf'])) %Salva
%   no formato pdf
%   clear folder; folder = [];

figure(5)
plot(t,z,'r',t,z_nogain,'k')
xlabel('Tempo (s)')
ylabel('Resposta em malha aberta e fechada')
grid
legend('Malha fechada','Malha aberta')
title(['Controlador LQR Vel = ',num2str(V),...
      'm/s'])
set(gca, 'FontSize', 18)
%   filename = input('Inserir o nome para salvar o arquivo:

```

```

') % Nomear para salvar a figura
%   folder = 'C:\Users\wash\\Desktop\TCC-Aeroelasticidade\
TCC2 - Figures'; % Pasta a ser salva a figura
%   saveas(gcf, fullfile(folder, [filename, '.fig'])) %Salva
no formato fig
%   print(gcf, fullfile(folder, [filename, '.eps']), '-depsc
') %Salva no formato eps
%   saveas(gcf, fullfile(folder, [filename, '.pdf'])) %Salva
no formato pdf
%   clear folder; folder = [];

resp_no_gain_max = max(abs(z_nogain));
resp_gain_max = max(abs(z));
reduction = 100 * (resp_no_gain_max - resp_gain_max) /
    resp_no_gain_max;
astring = ['Reduction = ' num2str(reduction), ' %'];
disp(astring)

else          %%%      vg, vw, eigenvalue and root locus
plots

figure(6)
subplot(211)
plot(vels, freqs(1,:), 'k', vels, freqs(2,:), 'b', vels, cfreqs
    (1,:), 'g', vels, cfreqs(2,:), 'r')
xlabel('Velocidade m/s')
ylabel('Frequência (Hz)')
    %xlim([0, 200]); % Define os limites do eixo x de 0 a
    185

title(['Controlador LQR Vel = ', num2str(V)])
set(gca, 'FontSize', 18) % Tamanho das fontes
grid
subplot(212)
plot(vels, damps(1,:), 'k', vels, damps(2,:), 'b', vels, cdamps
    (1,:), 'g', vels, cdamps(2,:), 'r')
xlabel('Velocidade m/s')
ylabel('Amortecimento (%)')
    %xlim([0, 200]); % Define os limites do eixo x de 0 a
    185

```

```

grid
legend('Modo 1 malha aberta','Modo 2 malha aberta','Modo 1
malha fechada','Modo 2 malha fechada',...
'Location','Best')
set(gca, 'FontSize', 18) % Tamanho das fontes
% filename = input('Inserir o nome para salvar o arquivo:
') % Nomear para salvar a figura
% folder = 'C:\Users\washu\Desktop\TCC-Aeroelasticidade\
TCC2 - Figures'; % Pasta a ser salva a figura
% saveas(gcf, fullfile(folder, [filename, '.fig'])) %Salva
no formato fig
% print(gcf, fullfile(folder, [filename, '.eps']), '-depsc
') %Salva no formato eps
% saveas(gcf, fullfile(folder, [filename, '.pdf'])) %Salva
no formato pdf
% clear folder; folder = [];

figure(7)
subplot(211)
plot(vels, rpart(1,:), 'k', vels, rpart(2,:), 'b', vels, crpart
(1,:), 'g', vels, crpart(2,:), 'r')
xlabel('Velocidade m/s')
ylabel('Parte Real dos autovalores')
title(['Controlador LQR = ', num2str(vend), ' m/s'])
grid
legend('Mode 1 open loop','Mode 2 open loop','Mode 1 closed
loop','Mode 2 closed loop',...
'Location','Best Outside')
set(gca, 'FontSize', 18) % Tamanho das fontes
subplot(212)
plot(vels, ipart(1,:), 'k', vels, ipart(2,:), 'b', vels, cipart
(1,:), 'g', vels, cipart(2,:), 'r')
xlabel('Velocidade m/s')
ylabel('Parte Imaginária dos autovalores')
grid
set(gca, 'FontSize', 18) % Tamanho das fontes
% filename = input('Inserir o nome para salvar o arquivo:
') % Nomear para salvar a figura

```

```
% folder = 'C:\Users\washu\Desktop\TCC-Aeroelasticidade\
TCC2 - Figures'; % Pasta a ser salva a figura
% saveas(gcf, fullfile(folder, [filename, '.fig'])) %Salva
no formato fig
% print(gcf, fullfile(folder, [filename, '.eps']), '-depsc
') %Salva no formato eps
% saveas(gcf, fullfile(folder, [filename, '.pdf'])) %Salva
no formato pdf
% clear folder; folder = [];

figure(8)
plot(rpart(1,:), ipart(1,:), 'k', rpart(2,:), ipart(2,:), 'b',
    ...
    crpart(1,:), cipart(1,:), 'g', crpart(2,:), cipart(2,:), 'r'
    ,...
    rpart(1,1), ipart(1,1), 'Ok', crpart(1,1), cipart(1,1), 'Og'
    ,...
    rpart(2,1), ipart(2,1), 'Ob', crpart(2,1), cipart(2,1), 'Or'
    )
xlabel('Parte Real')
ylabel('Parte Imaginária')
title(['LQR para Vinicial = ', num2str(vstart), ...
    'm/s Vfinal = ', num2str(vend), 'm/s'])
grid
legend('Mode 1 open loop', 'Mode 2 open loop', 'Mode 1 closed
loop', 'Mode 2 closed loop', ...
    'Location', 'NorthWest')
set(gca, 'FontSize', 18) % Tamanho das fontes
% filename = input('Inserir o nome para salvar o arquivo:
') % Nomear para salvar a figura
% folder = 'C:\Users\washu\Desktop\TCC-Aeroelasticidade\
TCC2 - Figures'; % Pasta a ser salva a figura
% saveas(gcf, fullfile(folder, [filename, '.fig'])) %Salva
no formato fig
% print(gcf, fullfile(folder, [filename, '.eps']), '-depsc
') %Salva no formato eps
% saveas(gcf, fullfile(folder, [filename, '.pdf'])) %Salva
no formato pdf
% clear folder; folder = [];
```

end

toc

C CÓDIGO MATLAB®- AEROELÁSTICO

```
% 3dof_flutter
```

```
%
```

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```
% Plots out the vg and vw plots for a rectangular main wing and
    full span
```

```
% control - 3DOF - bending / torsion shapes with
```

```
% modified strip theory aerodynamics - quasi steady plus
    unsteady terms
```

```
%  $z = qb(y/s)^2 + qt(y/s)(x-xf) + [x - xh]beta$ 
```

```
% Control stiffnesses in book example are kbeta 1e3, 1e4 and 1
    e5 (Nm/m)/rad
```

```
% IAAL 2nd edition pp193 - 199
```

```
%
```

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```
format compact; clear all; close all
```

```
% Geometric data
```

```
s = 7.5; % semi span
```

```
c = 2; % chord
```

```
for i = 0:5:15
```

```
hline = 75+i; % hinge line as percentage of
    chord
```

```

xh = hline / 100 * c;           % distance of hinge line aft of
    leading edge
fa = 48;                       % elastic axis as percentage of
    chord
xf = fa / 100 * c;             % position of elastic axis aft of
    le
xac = 0.25 * c;                % distance of ac aft of le
xe = xf - xac;                 % distance of elastic axis aft of
    ac
e = xe / c;                    % eccentricity of fa aft of ac per
    chord

% Mass data
m = 100;                       % mass per unit area
mmain = m;                     % mass per unit area of main
    surface
mcont = m;                     % mass per unit area of control
    surface

% Stiffness data
EI = 4e+7;                     % flexural rigidity
GJ = 8e+6;                     % torsional rigidity
kbeta = 1e+4;                  % control stiffness per unit span

GJstr = sprintf('%0.5g',GJ); EIstr = sprintf('%0.5g',EI);
astring = ['xf/c = ', num2str(xf/c), ' xh/c = ', num2str(xh/c), '
    EI = ', EIstr, ...
    ' GJ = ', GJstr, ' kbeta = ', num2str(kbeta)];
disp(astring)

modes = 3;

% Inertia matrix
A = zeros(modes, modes);
% Main surface
Amain = zeros(modes, modes);
Amain(1,1) = xh * s / 5;
Amain(1,2) = (xh^2 / 2 - xh * xf) * s / 4;
Amain(2,1) = Amain(1,2);

```

```

Amain(2,2) = (xh^3 / 3 - xh^2 * xf + xf^2 * xh) * s / 3;
% Control surface
Acont = zeros(modes, modes);
Acont(1,1) = (c - xh) * s / 5;
Acont(1,2) = ((c^2 - xh^2) / 2 - xf * (c - xh)) * s / 4;
Acont(1,3) = ((c^2 - xh^2) / 2 - xh * (c - xh)) * s / 3;
Acont(2,2) = ((c^3 - xh^3) / 3 - xf * (c^2 - xh^2) + xf^2 * (c
    - xh)) * s / 3;
Acont(2,3) = ((c^3 - xh^3) / 3 - xf * (c^2 - xh^2) / 2 - xh * (
    c^2 - xh^2) / 2 + xf * xh * (c - xh)) * s / 2;
Acont(3,3) = ((c^3 - xh^3) / 3 - xh * (c^2 - xh^2) + xh^2 * (c
    - xh)) * s;
Acont(2,1) = Acont(1,2);
Acont(3,1) = Acont(1,3);
Acont(3,2) = Acont(2,3);

A = mmain * Amain + mcont * Acont;

% Structural damping matrix is zero
D = zeros(modes, modes);

% Structural stiffness matrix
E = zeros(modes, modes);
E(1,1) = 4 * EI / s^3;
E(2,2) = GJ / s;
E(3,3) = kbeta * s;

% Natural frequencies and mode shapes of the wind off system
[evects, evals1] = eig(A \ E) ;
sfreqs = sqrt(diag(eval1))/(2 * pi);
[sfreqs, sort_f] = sort(sfreqs);
freqs = sfreqs'

% Transformation of normal modes to tip displacements
Ttip = [1^2 -1 * xf 0;
    1^2 1 * (xh - xf) 0;
    1^2 1 * (c - xf) (c - xh)];
Tvects = Ttip * evects;
Tvects = Tvects(:, sort_f');

```

```

max_Tvect = max(abs(Tvects));
for jj = 1:modes
    Tvects(1:modes, jj) = Tvects(1:modes, jj) / max_Tvect(jj);
end
Tvects

% Plot mode shapes at wing tip
zline = [0 0 0];
zvals = [0 xh/c 1];
figure(1)
subplot(311)
plot(zvals, Tvects(:,1), '0-')
title([num2str(sfreqs(1),3), ' Hz'])
hold on
plot(zvals, zline, '--b')
subplot(312)
plot(zvals, Tvects(:,2), '0-')
hold on
plot(zvals, zline, '--b')
title([num2str(sfreqs(2),3), ' Hz'])
subplot(313)
plot(zvals, Tvects(:,3), '0-')
hold on
plot(zvals, zline, '--b')
title([num2str(sfreqs(3),3), ' Hz'])

% Bending / torsion / control alone natural frequencies

fbend = 1/2/pi * sqrt(E(1,1)/A(1,1));
ftors = 1/2/pi * sqrt(E(2,2)/A(2,2));
fcont = 1/2/pi * sqrt(E(3,3)/A(3,3));

% Aerodynamic data

% Theodorsen's T functions

chat = 2 * (xh / c) - 1;

```

```

T4 = - acos(chat) + chat * sqrt(1 - chat ^ 2);
T10 = sqrt(1 - chat ^ 2) + acos(chat);
T11 = acos(chat) * (1 - 2 * chat) + sqrt(1 - chat ^ 2) * (2 -
    chat);
T12 = sqrt(1 - chat ^ 2) * (2 + chat) - acos(chat) * (2 * chat
    + 1);

% Aerodynamic coefficients

aw = 2 * pi;           % lift per incidence
ac = aw * T10 / pi;   % lift per control rotation
bw = e * aw;          % pitching moment per control
    rotation
bc = e * aw * T10 / pi; % pitching moment per control
    rotation
cw = - T12 / 2;       % hinge moment per incidence
cc = - T12 * T10 / 2 / pi; % hinge moment per control rotation

Mtdot = -1.2;         % unsteady torsional damping term
Mbdot = -0.1;         % unsteady control rotation damping
    term

rho = 1.225;          % air density
vstart = 0;           % velocity range
vinc = 1;
vend = 180;

% Aerodynamic matrices

B = zeros(modes, modes); % aero damping - based on rho*V*B
C = zeros(modes, modes); % aero stiffness - based on rho*V
    ^2*C

B(1,1) = aw * c * s / 10;
B(1,2) = 0;
B(1,3) = 0;
B(2,1) = - bw * c^2 * s / 8;
B(2,2) = - Mtdot * c^3 * s / 24;
B(2,3) = 0;

```

```

B(3,1) = - cw * c^2 * s / 6;
B(3,2) = 0;
B(3,3) = - Mbdot * c^3 * s / 8;

C(1,1) = 0;
C(1,2) = aw * c * s / 8;
C(1,3) = ac * c * s / 6;
C(2,1) = 0;
C(2,2) = - bw * c^2 * s / 6;
C(2,3) = - bc * c^2 * s / 4;
C(3,1) = 0;
C(3,2) = - cw * c^2 * s / 4;
C(3,3) = - cc * c^2 * s / 2;

% Set up for flutter solution

f = []; d = []; evalr = []; evali = []; ev = [];
icount = 0;

% Loop round for flutter solution at each velocity
% Determine first order eval solution      evals = eig(A\rho*
      v^2*C + E));

for v = vstart : vinc : vend
    icount = icount + 1;
    vel(icount) = v;
    Q = [zeros(modes, modes) eye(modes, modes); -A\rho * v^2 *
         C + E) -A\rho * v * B + D];
    evals = eig(Q);
    er = real(evals);
    ei = imag(evals);

    for ii = 1 : 2 * modes
        wrad(ii,1) = abs(evals(ii));
        zeta(ii,1) = -real(evals(ii)) / wrad(ii);
        whz(ii,1) = wrad(ii) / (2 * pi);
    end

    % [ei, eisort] = sort(ei);      % sort evalues in order of

```

```

    imaginary part of evalue
%   [er, ersort] = sort(er);    % real part of evals for
    plotting

[whz, wsort] = sort(whz);    % sort frequencies in order

f = [f whz]; d = [d zeta(wsort) * 100];
evalr = [evalr er(wsort)]; evali = [evali ei(wsort)];
ev = [ev evals(wsort)];
end

% Determine the flutter and divergence velocity based upon real
    evaluate behaviour picking out crossings
% Depending upon imag evaluate determine whether flutter or
    divergence

vs = sum(cumsum((real(ev) > 0), 2) == 1);
nvels = vs(sum(cumsum((real(ev) > 0), 2) == 1) > 0); % number
    of roots that change at each stability bound
vcrit = vel(sum(cumsum((real(ev) > 0), 2) == 1) > 0); %
    velocities at stability bounds

icount = 0;
for ii = 1:max(size(nvels))
    for jj = 1:nvels(ii)
        icount = icount + 1;
        v_all(icount) = vcrit(ii);    % crit velocity vector
            with extra (same) value for flutter root
    end
end

ecrit = ev(cumsum((real(ev) > 0), 2) == 1);

for ii = 1:max(size(ecrit))
    if imag(ecrit(ii)) == 0 % check for flutter or divergence
        [num2str(v_all(ii)) ' m/s = divergence']
    else
        fflut = abs(ecrit(ii))/(2 * pi);
        [num2str(v_all(ii)) ' m/s = flutter      ' num2str(

```

```
        fflut) ' Hz']
    end
end

% Plot eigenvalues

figure(2)
subplot(211)
plot(vel, evalr, '-k')
xlabel('Velocity m/s')
ylabel('Real part evals')
grid
subplot(212)
plot(vel, evali, '-k')
xlabel('Velocity m/s')
ylabel('Imag part evals')
grid

% Plot frequency and damping vs velocity
figure(3)
subplot(211)
vf = v_all(1);
xfa = [145 145];
yf = [5 25];
plot(vel,f)
title(['Flexão / Torsão / Superfície de controle - Eixo
        elástico em ',num2str(fa),'% da corda'])
xlabel('Velocidade (m/s)')
ylabel('Frequência (Hz)')
set(gca, 'FontSize', 18) % Tamanho das fontes
hold on
grid

subplot(212)
vf = v_all(1);
xfa = [145 145];
yf = [-10 10];
y0 = [0 0];
```

```
x0 = [0 vend];
plot(vel,d)
title(['Frequência de controle ', num2str(fcont,3), 'Hz e linha
      de dobra em ', num2str(hline), '% da corda'])
xlabel('Velocidade (m/s)')
ylabel('Amortecimento (%)')
set(gca, 'FontSize', 18) % Tamanho das fontes
axis([0 vend -10 15])
hold on
grid

end

% Plot do locus das raízes para a primeira saída
sys = ss(A, B, C, D);
figure(99);
K= (0.01:0.01:10);
R=rlocus(sys(2,1),K); % Escolhe a primeira saída (primeira
  linha, primeira coluna)
rlocus(sys(2,1),K)
title('Locus das Raízes para a Segunda Saída');
grid on;

O = obsv(A, C);
rank_O = rank(O);
if rank_O == size(A,1)
    disp('O sistema é observável.');
```

```
else
    disp('O sistema não é observável.');
```

```
end

C = ctrb(A, B);
rank_C = rank(C);
if rank_C == size(A,1)
    disp('O sistema é controlável.');
```

```
else
    disp('O sistema não é controlável.');
```

```
end
B_all = isstable(sys)
```

```
figure(100)
nyquist(sys);
grid on

% Calcule a margem de ganho e fase
[magnitude, phase, frequency] = margin(sys(2,1));
```

D CÓDIGO MATLAB®- ROOT LOCUS

```
% Definir as matrizes do sistema de estado
A = [0 0 0.0010 0;
      0 0 0 0.0010;
      -0.9914 0.1461 -0.0013 0;
      0.0888 -3.9068 0.0014 -0.0007];

B = [0;
      0;
      -24.5908;
      -28.1337];

C = [0 1 0 -0.9600];

D = 0;

% Criar o sistema de espaço de estados
sys = ss(A, B, C, D);

% Converter para função de transferência
sys_tf = tf(sys);

% Plotar o Root Locus
figure;
rlocus(sys_tf);
title('Root Locus do Sistema');
```