



UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS

DESENVOLVIMENTO DE UM MODELO GEOIDAL GRAVIMÉTRICO
PARA O DISTRITO FEDERAL

YELLINSON DE MOURA ALMEIDA

Orientador: Prof. Dr. Giuliano Sant'Anna Marotta

Brasília
Distrito Federal- Brasil
2018



UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS

DESENVOLVIMENTO DE UM MODELO GEOIDAL GRAVIMÉTRICO
PARA O DISTRITO FEDERAL

Autor

YELLINSON DE MOURA ALMEIDA

Orientador

Prof. Dr. Giuliano Sant'Anna Marotta

Monografia apresentada à Comissão Examinadora do Instituto de Geociências como requisito parcial para obtenção do título de Bacharel em Geofísica.

Brasília

Distrito Federal- Brasil

2018

**DESENVOLVIMENTO DE UM MODELO GEOIDAL GRAVIMÉTRICO
PARA O DISTRITO FEDERAL**

YELLINSON DE MOURA ALMEIDA

COMISSÃO EXAMINADORA:

Prof^a. Dra. Monica Giannoccaro Von Huelsen
Universidade de Brasília
Examinadora

Prof^a. Dra. Rejane Ennes Cicerelli
Universidade de Brasília
Examinadora

Prof. Dr. Giuliano Sant'Anna Marotta
Universidade de Brasília
Orientador

Brasília, dezembro de 2018.

Ao vô Geraldo (in memoriam)

AGRADECIMENTOS

Ao meu orientador e amigo Professor Doutor Giuliano Sant'Anna Marotta, pela paciência e disponibilidade durante a realização desse trabalho, e por me ensinar que ciência se faz com dedicação;

Ao Observatório Sismológico da Universidade de Brasília (SIS/UnB), pela estrutura para realização desse trabalho;

Ao Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), pelos dados de gravimetria terrestre e de posicionamento;

À Agência Nacional de Petróleo, Gás Natural e Biocombustíveis (ANP), pelos dados de gravimetria terrestre;

Ao *United States Geological Survey* (USGS), pela disponibilização dos dados SRTM;

Ao *International Centre for Global Earth Models* (ICGEM), pelos Modelos de Geopotencial Global fornecidos;

À Professora Doutora Roberta Mary Vidotti, pelos dados cedidos de gravimetria terrestre do Distrito Federal;

Ao Professor Doutor José Eloi Guimarães Campos, pelo fornecimento do Mapa Geológico do Distrito Federal;

Aos meus pais e irmã, pelo apoio incondicional durante todo o período da minha graduação;

À minha namorada, Giovanna, por todo o companheirismo e incentivo manifestados ao longo dos anos.

*Eu quase que nada não sei.
Mas desconfio de muita coisa.
Guimarães Rosa*

RESUMO

Um modelo geoidal bem determinado é fundamental para a obtenção de altitudes ortométricas, que são necessárias para diversas aplicações em obras de infraestrutura, construção civil, irrigação, planos diretores, etc. Existem diversas técnicas para determinação de modelos geoidais. Dentre elas, a Remove-Calcula-Restaura tem se destacado e fornecido bons resultados ao redor do mundo. Essa técnica utiliza componentes de longo, médio e curto comprimento de onda, a partir de Modelos de Geopotencial Global, Estações Gravimétricas terrestres e Modelos Digitais de Terreno, para gerar modelos geoidais gravimétricos que são resultado da integração desses dados. Nesse trabalho, foram gerados 24 modelos geoidais gravimétricos para o Distrito Federal, através do pacote de rotinas computacionais GRAVTool. Esses modelos são resultado do cruzamento de dados distintos em cada comprimento de onda utilizado pela técnica Remove-Calcula-Restaura. Também foram realizadas análises estatísticas para verificar a precisão dos modelos determinados e a influência de cada variável nessa precisão.

Palavras-Chave: Remove-Calcula-Restaura; Gravimetria; Densidade; Modelo do Geopotencial Global; Modelo Digital de Terreno.

ABSTRACT

A well-determined geoidal model is fundamental for determination of orthometric altitudes, which are necessary for diverse applications in infrastructure works, civil construction, irrigation, master plans, etc. There are several techniques for determining geoid models. Among them, Remove-Compute-Restore has stood out and provided good results around the world. This technique uses components of long, medium and short wavelength, from Global Geopotential Models, Earth Gravimetric Stations and Digital Terrain Models to generate gravimetric geoidal models that are the result of the integration of this data. In this work, 24 gravimetric geoid models were generated for the Federal District, through the GRAVTool computational routines package. These models are the result of crossing different data at each wavelength used by the Remove-Compute-Restore technique. Statistical analyzes were also performed to verify the precision of the given models and the influence of each variable on that precision.

Keywords: Remove-Compute-Restore; Gravimetry; Density; Global Geopotential Model; Digital Terrain Model.

SUMÁRIO

RESUMO	vii
ABSTRACT	viii
INTRODUÇÃO	1
1.1 Objetivos	2
1.2 Hipótese	2
1.3 Justificativa	2
2 O CAMPO DE GRAVIDADE DA TERRA	3
2.1 Componentes da Força de Atração	3
2.2 Potencial de Atração	4
2.3 Potencial de Gravidade	6
2.4 Potencial de Gravidade Normal	7
2.5 Potencial Anômalo	8
3 ANOMALIAS GRAVIMÉTRICAS	10
3.1 Correções Gravimétricas	10
3.1.1 Correção Ar livre	10
3.1.2 Correção Bouguer	11
3.1.3 Correção de Terreno	12
3.1.4 Correção do Efeito Indireto	12
3.1.5 Correção Atmosférica	13
3.2 Anomalias de Gravidade	13
3.2.1 Anomalia Ar Livre	13
3.2.2 Anomalia Bouguer	14
3.2.3 Anomalia de Helmert	14
4 O MÉTODO GRAVIMÉTRICO	15
4.1 Gravímetros	16
4.2 Gravímetro de Pêndulo	16
4.3 Gravímetro de Queda-livre	16
4.4 Gravímetro de Mola	17
5 DETERMINAÇÃO DO GEOIDE	18
5.1 Método Astrogeodésico	18
5.2 Método GNSS/Nivelamento Geométrico	19
5.3 Método Gravimétrico	20
6 ABORDAGEM RCR	21
7 MATERIAIS E MÉTODOS	24
7.1 Área de Estudo	24
7.2 Modelo de Geopotencial Global	26
7.3 Modelo Digital de Terreno	27
7.4 Estações Gravimétricas Terrestres	29
7.5 Densidades	30
7.5.1 Estimativa da densidade por meio de amostragem de rochas	31
7.5.2 Estimativa da densidade pelo método indireto	32
7.6 Modelo Geoidal Gravimétrico	33
7.7 Precisão	34

8	RESULTADOS E DISCUSSÃO	36
8.1	Determinação dos Valores de Densidade	36
8.2	Determinação do Modelo Geoidal Gravimétrico	36
9	CONCLUSÃO	42
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	43
	APÊNDICE	46

LISTA DE FIGURAS

<i>Figura 1: Desvio da vertical em um ponto P (Fonte: Andrade, 2008).</i>	19
<i>Figura 2: Localização do Distrito Federal (Fonte: Silva, 2017).</i>	24
<i>Figura 3: Limites dos dados utilizados.</i>	25
<i>Figura 4: Modelo de Geopotencial Global GECO. As isolinhas representam intervalos de 1 metro.</i>	27
<i>Figura 5: Altitudes do SRTM 30 metros na área de estudo.</i>	28
<i>Figura 6: Distribuição das Estações Gravimétricas terrestres.</i>	30
<i>Figura 7: Mapa geológico do Distrito Federal e localização das amostras de rocha.</i>	32
<i>Figura 8: Pontos utilizados para análise de precisão dos modelos geoidais.</i>	35
<i>Figura 9: Fluxo de cruzamento dos dados para geração dos modelos geoidais.</i>	37
<i>Figura 10: Desvio padrão e RMS dos modelos gravimétricos geoidais.</i>	39
<i>Figura 11: Modelos gravimétrico geoidal I3G2. As isolinhas estão separadas por intervalos de 0,50m.</i>	39

LISTA DE TABELAS

<i>Tabela 1: Classificação das técnicas de posicionamento das Estações Gravimétricas terrestres</i>	29
<i>Tabela 2: Constantes utilizadas no cálculo das alturas geoidais.</i>	34
<i>Tabela 3: Discriminação dos dados utilizados para geração de cada modelo geoidal.</i>	38
<i>Tabela 4: Resultado das diferenças entre o MAPGEO2015 e o I3G2 em relação às RNs.</i>	40
<i>Tabela 5: Diferenças entre os modelos I3G2 e I3G1 em relação às RNs.</i>	40
<i>Tabela 6: Diferenças entre os modelos I3G2 e I9G2 em relação às RNs.</i>	40
<i>Tabela 7: Diferenças entre os modelos I3G2 e A3G2 em relação às RNs.</i>	41

INTRODUÇÃO

Um dos principais desafios da geodésia na atualidade é a determinação de um geoide cada vez mais preciso, considerando o rápido avanço das tecnologias que servem de suporte para a sua determinação. Os modelos geoidais, segundo Silva (2017), possuem papel importante para a transformação entre altitudes geométricas (h) e ortométricas (H). Além disto, um geoide bem determinado é fundamental para a obtenção de altitudes ortométricas, que são necessárias para diversas aplicações, incluindo obras de infraestrutura (abastecimento de água, drenagem de águas pluviais e esgoto, etc.), construção civil, irrigação, planos diretores, etc..

Um grande salto na evolução das metodologias e técnicas para determinação do geoide foi dado com o surgimento e popularização de levantamentos geodésicos envolvendo técnicas de posicionamento pelo GNSS (Global Navigation Satellite System). Esta evolução se deu, principalmente, pela necessidade de se determinar altitudes ortométricas a partir de altitudes geométricas estimadas por posicionamento GNSS.

Existem vários métodos para determinar a altura do geoide, ou modelo geoidal (N), que utilizam dados de gravidade, modelos geopotenciais, as componentes astrogeodésicas, ou a combinação deles (Marotta e Vidotti, 2017). Também, dentre as técnicas existentes, uma que têm se destacado atualmente é a Remove-Calcula-Restaura (RCR). A aplicação dessa técnica pode ser observada em trabalhos de diversas partes do mundo, como Canadá, Turquia, Áustria e Brasil (Schwars et al., 1990; Ayhan, 1993; Zhang et al., 1998; Blitzkow et al., 2012; Marotta e Vidotti, 2017). Segundo Sansò e Sideris (2013), essa técnica considera os componentes de comprimento de onda curto, médio e longo, que são provenientes de dados de elevação, dados de gravidade terrestre e modelos de geopotencial global, respectivamente.

Considerando a técnica citada e as variáveis envolvidas, é correto afirmar que existem diversos fatores que podem influenciar tanto no processo de redução de dados gravimétricos, quanto na determinação do modelo geoidal. Dentre os fatores, a densidade possui especial importância, pois tradicionalmente são utilizados valores constantes e definidos por literatura.

Diante do exposto, para estimativa de modelos geoidais precisos, considera-se necessário a realização de análise criteriosa do valor de densidade, a fim de verificar sua influência sobre o resultado final.

1.1 Objetivos

Considerando a importância do tema e a possibilidade de desenvolver um estudo que possa beneficiar uma região, o objetivo geral deste trabalho trata da determinação de um modelo geoidal gravimétrico preciso para o Distrito Federal.

Como objetivos específicos, considera-se analisar a influência: de modelos de geopotencial global (MGG) distintos, em diferentes graus e ordens; de modelos digitais de terreno (MDT) com diferentes resoluções espaciais; e as variáveis que são ponderadas no cálculo das reduções gravimétricas, especialmente o valor da densidade.

1.2 Hipótese

Como hipótese afirmativa para o referido trabalho, tem-se a possibilidade de estimar um modelo geoidal gravimétrico para o Distrito Federal, com precisão compatível com a obtida por técnica de nivelamento geométrico apoiado por posicionamento GNSS, levando em conta o MGG, o MDT e o método para estimativa de densidades que geram o melhor ajuste do modelo geoidal, resultante, com os pontos de verificação altimétrica utilizados.

1.3 Justificativa

Considera-se que os resultados obtidos nesse trabalho podem contribuir para o conhecimento das altitudes ortométricas no Distrito Federal e, por isso, são de grande importância para projetos de infraestrutura que visam o desenvolvimento da região.

2 O CAMPO DE GRAVIDADE DA TERRA

De acordo com a Lei de Gravitação de Newton (1687), dois pontos de massas m_1 e m_2 se atraem com uma força (F), denominada força de atração gravitacional, que é proporcional ao produto das suas massas e inversamente proporcional ao quadrado da distância (r) que as separam.

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad (1)$$

onde G é a constante gravitacional.

Segundo Gemael (2012), ao considerar a força de atração que uma partícula exerce sobre a outra e, tomando a partícula atraída como possuindo massa unitária e a partícula atrativa com massa m , a equação da força de atração gravitacional assume seguinte forma:

$$F = \frac{Gm}{r^2} \quad (2)$$

2.1 Componentes da Força de Atração

No espaço tridimensional, considerando a força de atração gravitacional entre duas partículas, segundo expressão vetorial, tem-se:

$$\vec{F} = \frac{Gm}{r^3} \vec{r} \quad (3)$$

onde

$$r = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2} \quad (4)$$

x , y e z são as coordenadas da partícula atraída e x' , y' e z' são as coordenadas da partícula atrativa.

Nas situações reais, não se pode considerar os corpos atrativos e atraídos como partículas pontuais e, segundo Torge (2001), a Terra é composta por um número infinito

de elementos diferenciais de massa dm . Desta forma, no espaço representado por coordenadas no sistema cartesiano tridimensional (x, y, z) , ao considerar uma distribuição contínua de massa atrativa (M), segundo Torge (2001) e Gemael (2012), tem-se as seguintes componentes da força de atração:

$$F_x = -G \iiint_M \frac{(x-x')}{r^3} dm \quad (5)$$

$$F_y = -G \iiint_M \frac{(y-y')}{r^3} dm \quad (6)$$

$$F_z = -G \iiint_M \frac{(z-z')}{r^3} dm \quad (7)$$

Segundo expressão vetorial para a força de atração, tem-se

$$\vec{F} = -G \iiint_M \frac{dm}{r^3} \vec{r} \quad (8)$$

em que, segundo Gemael (2012), o elemento de massa atrativa dm de coordenadas (x', y', z') pode ser expresso pela densidade (ρ) e elemento de volume (dv).

$$dm = \rho dv = \rho dx' dy' dz' \quad (9)$$

2.2 Potencial de Atração

Segundo Gemael (2012), a teoria do potencial vem sendo usada para conhecimento do campo de gravidade e de suas vinculações com o problema da forma da Terra. Em uma função escalar, o potencial gravitacional de atração (V) em um ponto, parte de um corpo de massa m , pode ser dado por:

$$V = \frac{Gm}{r} \quad (10)$$

Já considerando a Terra com distribuição contínua de massa (M), o potencial gravitacional de atração, em um ponto P da Terra, é expresso por (Moritz, 1980):

$$V = V(x, y, z) = G \iiint_M \frac{dm}{r} \quad (11)$$

A relação entre F e V pode ser dada por meio de derivadas considerando os eixos coordenados, na forma:

$$F_x = \frac{\partial V}{\partial x}; F_y = \frac{\partial V}{\partial y}; F_z = \frac{\partial V}{\partial z} \quad (12)$$

Gemael (2012) considera que, se a cada ponto de uma região pode-se associar um vetor, de maneira unívoca, a região e o conjunto de vetores associados constituem um campo vetorial. E, segundo Torge (2001), Hofmann-Wellenhof e Moritz (2005) e Gemael (2012), o campo é invariante de rotações, $\text{Rot}(\vec{F}) = 0$, o que permite admitir a existência de uma função escalar V :

$$\vec{F} = \nabla V \quad (13)$$

onde

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k \quad (14)$$

i, j e k são os vetores de módulo unitário, para os eixos cartesianos x, y e z .

O potencial de atração satisfaz a equação de Laplace no exterior das massas atrativas. Portanto, segundo Torge (2001) e Gemael (2012), o potencial de atração pode ser considerado uma função harmônica.

$$\nabla^2 V = 0 \quad (15)$$

Segundo Gemael (2012), uma função harmônica, para uma região, satisfaz a equação de Laplace em todos os pontos do espaço, nessa região.

Conforme Hofmann-Wellenhof e Moritz (2005) e Gemael (2012), no interior das massas atrativas o potencial de atração satisfaz a equação de Poisson:

$$\nabla^2 V = -4\pi G\rho \quad (16)$$

2.3 Potencial de Gravidade

A força que atua sobre um corpo em repouso na superfície da Terra, denominada gravidade ($\vec{g}$), é resultante da força de atração gravitacional ($\vec{F}$) e da força centrífuga ($\vec{c}$) gerada pela rotação da Terra (Hofmann-Wellenhof e Moritz, 2005).

$$\vec{g} = \vec{F} + \vec{c} \quad (17)$$

A força centrífuga ($\vec{c}$) que atua sobre um ponto considera a velocidade de rotação (ω) e a distância entre o ponto e o eixo de rotação ($\vec{d}$) da Terra, e pode ser apresentada, conforme Gemael (2012):

$$\vec{c} = \omega^2 \vec{d} \quad (18)$$

sendo o vetor $\vec{d}$, em módulo, dado por:

$$d = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (19)$$

Observa-se que, em média, $\vec{c}$ corresponde a apenas aproximadamente 0,35% da intensidade da força gravitacional, anulando-se nos polos e sendo máxima no equador (Gemael, 1999).

Sendo $\vec{c}$ originada do potencial centrífugo (C), tal que (Torge, 2001):

$$\vec{c} = \nabla C \quad (20)$$

Tem-se que:

$$C = \frac{1}{2} \omega^2 d^2 \quad (21)$$

Considerando o potencial de atração (V) e o potencial centrífugo (C), tem-se que o potencial de gravidade (W) pode ser expresso por:

$$W(x, y, z) = V(x, y, z) + \frac{1}{2} \omega^2 d^2 \quad (22)$$

ou

$$W = G \iiint_M \frac{dm}{r} + \frac{1}{2} \omega^2 d^2 = G \iiint_M \frac{dm}{r} + \frac{1}{2} \omega^2 (x^2 + y^2) \quad (23)$$

Ao relacionar W com $\vec{g}$, tem-se:

$$\vec{g} = \nabla W \quad (24)$$

Analogamente, W possui equações que se assemelham às do potencial de atração no exterior e interior das massas atrativas (Equações 14 e 15) e, conforme Torge (2001), seguindo a equação diferencial generalizada de Laplace e a equação diferencial generalizada de Poisson, respectivamente, para o exterior e interior das massas atrativas, tem-se:

$$\nabla^2 W = 2\omega^2 \quad (25)$$

$$\nabla^2 W = -4\pi G\rho + 2\omega^2 \quad (26)$$

2.4 Potencial de Gravidade Normal

A superfície física da Terra, também chamada de superfície topográfica, é demasiadamente irregular, de forma que não se pode, matematicamente, defini-la completamente. Entretanto, essa superfície é achatada nos polos e, por simplificação, se aproxima a um modelo matemático, denominado elipsoide, gerado pela rotação de uma semi-elipse em torno de seu eixo menor. A esse elipsoide dá-se o nome de Terra Normal.

Segundo Gemaél (2012), a Terra Normal é definida por um elipsoide de revolução injuncionado a uma superfície equipotencial, ao qual se atribui a mesma massa (M) (incluindo a massa da atmosfera) e a mesma velocidade de rotação (ω) da Terra real. Ainda, segundo Gemaél (2012), o potencial produzido pela Terra Normal é denominado potencial de gravidade normal (U), sendo que:

$$U = V' + C \quad (27)$$

em que V' representa o potencial de atração da Terra normal e C o potencial centrífugo.

Assim, a gravidade normal representa o vetor gravidade associado à Terra Normal (perpendicular à superfície do elipsoide de referência), dado pelo gradiente do potencial de gravidade normal:

$$\vec{\gamma} = \nabla U \quad (28)$$

Segundo Smith (1998), a gravidade normal (γ) pode ser calculada pela equação:

$$\gamma = \gamma_a \frac{1 + k \sin^2 \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} \quad (29)$$

$$k = \frac{b\gamma_b - a\gamma_a}{a\gamma_a} \quad (30)$$

onde a , b e e são o semieixo maior, semieixo menor e a primeira excentricidade do elipsoide de referência; φ é a latitude do ponto de interesse; γ_a e γ_b são as gravidades normais calculadas para o equador e os pólos, respectivamente (Moritz, 1984).

2.5 Potencial Anômalo

A diferença entre os potenciais produzidos num ponto pela Terra real e pela Terra normal chama-se potencial anômalo (T) ou potencial perturbador (Gemael, 2012). Essa diferença de potencial é devida às diferenças locais de massa entre a Terra real e a Terra normal, uma vez que, em seu total, ambas possuem a mesma massa.

$$T = W - U \quad (31)$$

Considerando as Equações 21 e 25, tem-se:

$$\delta_g = g - \gamma \quad (32)$$

onde δ_g representa o distúrbio de gravidade, e g e γ representam, em módulo, os vetores de gravidade da Terra real e normal, respectivamente.

3 ANOMALIAS GRAVIMÉTRICAS

Considerando a Equação 29 e, no caso de g representar a gravidade ao nível do geoide (superfície equipotencial da Terra real, referenciada ao nível médio dos mares e prolongada por toda porção terrestre) e assumindo que γ está referenciado à Terra normal (elipsoide de revolução), tem-se a denominada anomalia de gravidade (Δg), ou gravimétrica. Portanto, conforme Hofmann-Wellenhof e Moritz (2005), Δg é definida como:

$$\Delta g = g - \gamma \quad (33)$$

Uma vez que os valores de gravidade são observados na superfície física da Terra e, para estimar anomalias gravimétricas é preciso conhecer o valor de gravidade ao nível do geoide, torna-se necessário realizar a redução, ou correção, dos dados de gravidade, da superfície física da Terra para o geoide.

3.1 Correções Gravimétricas

Segundo Gemael (2012), os valores de g estão sujeitos a diferentes tipos de redução, considerando o fim a que se destinam. Estas reduções, também denominadas correções, dão origem, também, a diferentes tipos de anomalia de gravidade.

3.1.1 Correção Ar livre

Segundo Hofmann-Wellenhof e Moritz (2005), para reduzir de forma correta o valor de gravidade observado na superfície física da Terra ao geoide, é necessário considerar um gradiente vertical de gravidade. Esse procedimento é realizado aplicando uma correção conhecida como correção ar livre, dada por:

$$C_{FA} = \frac{\partial \gamma}{\partial H} H \quad (34)$$

$\frac{\partial \gamma}{\partial H}$ é o gradiente vertical de gravidade e H é a altitude ortométrica.

Em aplicações gerais, é comum se utilizar o gradiente de gravidade normal, de tal forma que:

$$C_{FA} = 0,3086H \quad (35)$$

Para maior precisão, o cálculo da correção ar livre, segundo Featherstone e Dentith (1997), é dado por:

$$C_{FA} = \frac{2\gamma}{a} H_P [1 + f + m - 2f \sin^2 \varphi] - \frac{3\gamma H_P^2}{a^2} \quad (36)$$

onde

$$m = \frac{\omega^2 a^2 b}{GM} \quad (37)$$

em que γ é a gravidade normal no ponto de interesse (Moritz, 1984); H_P é a altitude ortométrica do ponto na superfície; φ é a latitude geodésica no ponto; a , f , ω , b e GM são o semieixo maior, achatamento, velocidade angular, semieixo menor e constante gravitacional geocêntrica do elipsoide de referência, respectivamente.

3.1.2 Correção Bouguer

Segundo Hinze *et. al.* (2005), a correção Bouguer (C_B) é aplicada aos dados de gravidade observados a fim de considerar o efeito, na aceleração da gravidade, das massas topográficas entre o ponto de observação e o nível de referência. A correção Bouguer tem a forma:

$$C_B = 2\pi\rho G(H_P) \quad (38)$$

onde H_P é a altitude ortométrica do ponto na superfície; ρ é o valor de densidade; e G representa a constante de gravitação universal.

3.1.3 Correção de Terreno

A correção Bouguer possui efetividade em um raio de aproximadamente 166,7 km, no chamado platô de Bouguer, uma superfície tridimensional de espessura H_P . Ocorre que ainda existem diferenças topográficas entre a superfície física e o platô de Bouguer. De acordo com Hofmann-Wellenhof e Moritz (2005), essas diferenças topográficas podem ser tratadas por meio da correção do terreno (C_T). A correção de terreno pode ser calculada pela equação:

$$C_T = G \iint_E \int_{z=H_P}^H \frac{\rho(x,y,z)(H-H_P)}{[\sqrt{(x-x_P)^2+(y-y_P)^2+(z-z_P)^2}]^3} dx dy dz \quad (39)$$

x , y e z representam as coordenadas planas e altitudes ortométricas dos pontos (p) de integração; x_p , y_p e H_p são as coordenadas planas e altitudes ortométricas dos pontos de cálculo; ρ é o valor de densidade; e G representa a constante de gravitação universal.

3.1.4 Correção do Efeito Indireto

Segundo Heiskanen e Moritz (1967), os processos de remoção, ou deslocamento das massas topográficas, realizados durante as correções gravimétricas modificam o geoide, devido à alteração que causam no potencial de gravidade. Essa alteração é chamada de efeito indireto da topografia, e deve ser corrigida. Cada superfície equipotencial gerada pela aplicação de uma correção gravimétrica é chamada de co-geoide. A correção do efeito indireto sena gravidade (δ_g), também denominado também denominado efeito indireto secundário, é, então, uma correção que conduz o co-geoide ao geoide.

$$\delta_g = 0.3086 N_{IE} \quad (40)$$

δ_g é calculado segundo gradiente vertical de gravidade aplicado ao efeito indireto primário da topografia (N_{IE}) que, segundo Wichiencharoen (1982), é dado por:

$$N_{IE} = -\frac{\pi G \rho H_P^2}{\gamma_0} - \frac{G \rho}{6 \gamma_0} \iint_E \frac{H^3 - H_P^3}{[\sqrt{(x-x_P)^2+(y-y_P)^2}]^3} dx dy \quad (41)$$

x , y e H são as coordenadas planas e altitudes ortométricas dos pontos de integração; x_p , y_p e H_p são as coordenadas planas e altitudes ortométricas dos pontos de cálculo; γ é a gravidade normal no ponto de cálculo; ρ é o valor de densidade; e G representa a constante de gravitação universal.

3.1.5 Correção Atmosférica

O efeito da massa da atmosfera acima da Terra afeta o campo de gravidade observado em sua superfície, e este efeito se altera de acordo com a altitude do ponto considerado. Portanto, há a necessidade de se remover o efeito citado, por meio da correção atmosférica (C_{ATM}), de forma a deslocar a atmosfera verticalmente para o interior do geóide. Segundo Kuroishi (1995), esta correção pode ser realizada por meio da seguinte expressão:

$$C_{ATM} = (0.8658 - 9.727 \times 10^{-5} H_p) + (3.482 \times 10^{-9} H_p^2) \quad (42)$$

3.2 Anomalias de Gravidade

As reduções gravimétricas, ou correções, aplicadas aos valores do campo de gravidade observado na superfície da Terra podem resultar em diferentes anomalias do campo de gravidade terrestre, ou anomalias gravimétricas. Dentre as principais anomalias utilizadas da determinação do geóide estão a anomalia ar livre, a anomalia Bouguer e a anomalia de Helmert.

3.2.1 Anomalia Ar Livre

A anomalia ar livre (Δg_{FA}) trata da aplicação da correção ar livre (C_{FA}) aos dados de gravidade observados (g_{obs}) na superfície física da Terra, para redução dos valores de gravidade auferidos para o nível do geóide, e de sua diferença em relação à gravidade normal (γ_0). Sua formulação pode ser dada por:

$$\Delta g_{FA} = g_{obs} + C_{FA} - \gamma_0 \quad (43)$$

3.2.2 Anomalia Bouguer

Em geral, a anomalia Bouguer, ao contrário da anomalia ar livre, não possui correlação com a topografia. Isso implica que, se em certa região, após a aplicação da correção Bouguer, ainda restarem anomalias gravitacionais, estas estão relacionadas a variações de densidade das rochas em subsuperfície. Tradicionalmente, a anomalia Bouguer (Δg_B) é dada por:

$$\Delta g_B = \Delta g_{FA} - C_B + C_T \quad (44)$$

3.2.3 Anomalia de Helmert

A anomalia de Helmert (Δg_{HEL}) refere-se ao denominado segundo método de condensação de Helmert. Neste método, as massas topográficas são condensadas ponto a ponto, sobre a superfície do geoide (Gemael, 2012). Ainda segundo Gemael (2012), em regiões com relevo pouco acidentado, esse método produz resultados semelhantes aos da anomalia ar livre, sem introduzir grandes variações de potencial. A anomalia de gravidade de Helmert é dada por:

$$\Delta g_{HEL} = \Delta g_{FA} + C_{ATM} + C_T + \delta_g \quad (45)$$

4 O MÉTODO GRAVIMÉTRICO

Segundo Telford *et al.* (1990), a gravimetria é considerada um dos métodos geofísicos mais antigos e foi utilizada inicialmente para prospecção mineral e exploração de hidrocarbonetos. Hinze *et al.* (2013) afirma que é uma técnica importante para muitos problemas que envolvem o mapeamento da subsuperfície e é o método principal em vários tipos específicos de estudos geológicos.

O método fundamenta-se nas variações do campo de gravidade da Terra, causadas pela distribuição heterogênea de suas massas. Essas variações são analisadas através de medidas da aceleração da gravidade. As medidas podem ser realizadas de forma absoluta ou relativa. As unidades mais comumente utilizadas para a aceleração da gravidade são:

$$1 \frac{10^{-2}m}{s^2} = 1 \frac{cm}{s^2} = 1 Gal \quad (46)$$

$$1 \frac{10^{-5}m}{s^2} = 1 \frac{\mu m}{s^2} = 1 mGal \quad (47)$$

De acordo com Gemael (2012), as determinações ditas absolutas proporcionam diretamente o valor de g e podem ser conduzidas pelo método pendular (atualmente em desuso) ou explorando a queda livre de uma massa. Ainda segundo Gemael (2012), nos métodos relativos o operador ocupa duas estações e mede a diferença de gravidade entre ambas.

Nabighian *et al.* (2005), afirma que, em geral, os instrumentos de medição absoluta da gravidade absoluta são muito mais caros, são muito maiores, demoram muito mais para fazer uma medição de alta precisão e exigem mais conhecimento e habilidade do que os instrumentos de medição relativa da gravidade. Por essa razão, é comum que levantamentos gravimétricos terrestres, para as mais diversas aplicações, sejam realizados com gravímetros relativos, e que seus valores de gravidade observados sejam referenciados a uma estação de gravidade absoluta.

4.1 Gravímetros

Existem diferentes técnicas para se obter a aceleração da gravidade em um ponto. Por essa razão, os equipamentos utilizados para essa tarefa, os gravímetros, operam baseados em diferentes princípios. Nas últimas décadas, os gravímetros evoluíram consideravelmente, permitindo uma maior densificação da rede global de estações absolutas e maior rapidez e acurácia no levantamento de estações de gravidade relativa. O avanço histórico da instrumentação gravitacional foi impulsionado por uma combinação de maior precisão, tempo reduzido para cada medição, maior portabilidade e um desejo de automação e facilidade de uso (Nabighian *et al.*, 2005).

4.2 Gravímetro de Pêndulo

O movimento de pêndulos é utilizado há séculos para determinar a aceleração da gravidade. O princípio físico envolvido é de que o período de movimento de um pêndulo depende do seu comprimento e do valor da gravidade local.

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (48)$$

onde T é o período de oscilação do pêndulo; l é seu comprimento; e g é o valor da aceleração da gravidade no local.

4.3 Gravímetro de Queda-livre

Medir a aceleração da gravidade através da queda-livre de um corpo requer uma observação muito acurada do tempo de percurso deste (em geral, esse tempo é bastante curto). De acordo com Nabighian *et al* (2005), isso só foi possível com a criação do relógio de quartzo na década de 50. O autor ainda menciona que os primeiros instrumentos de queda-livre usaram um interferômetro, um sistema de registro fotográfico, um relógio de quartzo e um corpo em queda de, tipicamente, 1 metro. A equação da queda-livre é dada por:

$$s = \frac{1}{2}gt^2 \quad (49)$$

em que s é a altura da queda; t é o tempo de percurso da queda; e g é a aceleração da gravidade no local.

4.4 Gravímetro de Mola

Os gravímetros de mola são os mais usualmente utilizados em levantamentos gravimétricos de campo, devido a sua portabilidade, operacionalidade e precisão. Esse tipo de gravímetro fornece um valor de aceleração da gravidade relativo. Os gravímetros de mola medem a mudança na posição de equilíbrio de uma massa de prova que resulta da mudança no campo de gravidade entre diferentes estações gravitacionais (Nabighian *et al.*, 2005).

5 DETERMINAÇÃO DO GEOIDE

O termo geoide foi utilizado pela primeira vez por J.F. Listing, em 1873 (Torge, 1991). O geoide é uma forma geométrica limitada por uma superfície equipotencial do campo de gravidade, que tem por referência o potencial do nível médio não perturbado dos mares. Sua forma é a que mais se aproxima da forma real da Terra, porém, não possui determinação matemática completa. Portanto, determinar a superfície do geoide não constitui tarefa fácil, mas é primordial para ciências como a geodésia e a geofísica.

A determinação do geoide consiste na determinação da separação, em todos os pontos, entre o geoide e o elipsoide de referência. Essa separação é conhecida por ondulação geoidal (N), ou altura geoidal. Por convenção, a ondulação geoidal é positiva quando o geoide encontra-se acima do elipsoide de referência e negativa em caso contrário. Existem diversos métodos utilizadas para a determinação do geoide, dos quais pode-se citar o astrogeodésico, o nivelamento geométrico apoiado por posicionamento por satélites artificiais (GNSS/Nivelamento geométrico) e o gravimétrico.

5.1 Método Astrogeodésico

Esse método possui esse nome por utilizar a comparação entre coordenadas astronômicas e geodésicas para determinar o desvio da vertical em um ponto. O desvio da vertical θ em um ponto (Figura 1) é o ângulo formado entre a vertical local e a reta normal ao elipsoide de referência passante pelo ponto (Andrade, 2008). Ou seja, para Gemael (1999), isso corresponde à inclinação do geoide em relação ao elipsoide de referência no ponto.

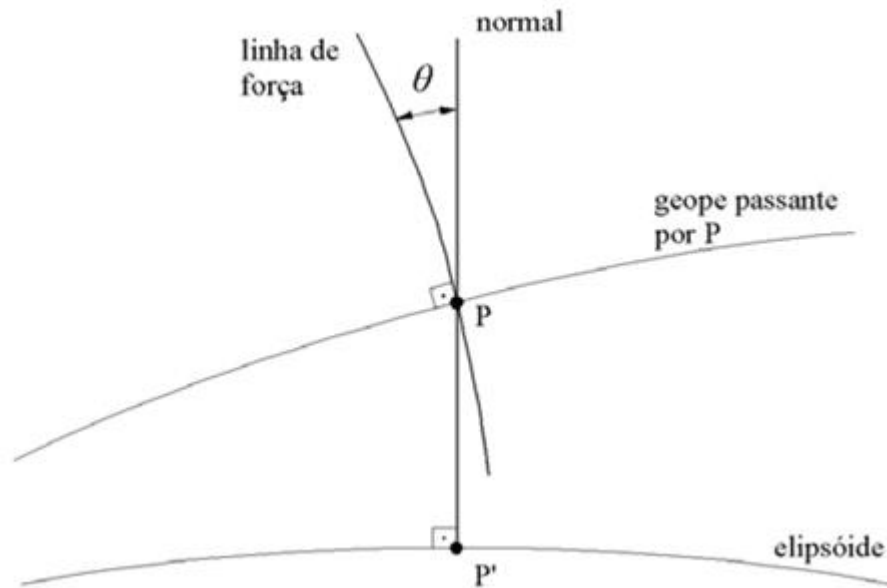


Figura 1: Desvio da vertical em um ponto P (Fonte: Andrade, 2008).

A diferença da ondulação geoidal dN entre dois pontos separados por uma distância infinitesimal ds , tem a forma:

$$dN = -\theta ds \quad (50)$$

Para distâncias maiores, essa diferença pode ser dada por:

$$N_B = N_A - \int_A^B \theta ds \quad (51)$$

onde N_A e N_B são as alturas geoidais nos pontos A e B.

Diante do exposto, basta, portanto, conhecer a altura geoidal e o desvio da vertical em um ponto para que a diferença entre as alturas geoidais, e a altura geoidal do ponto de interesse, seja determinada.

5.2 Método GNSS/Nivelamento Geométrico

A técnica de nivelamento geométrico permite a estimativa de altitudes ortométricas (H) em pontos de interesse, por estimativa de diferença de nível, tomando como referência pontos de altitudes ortométricas conhecidas. Também, é possível estimar as altitudes geométricas (h) dos pontos de interesse, por meio de técnica de posicionamento por sinais de satélites artificiais, denominado posicionamento pelo

GNSS. Por meio das informações citadas, a altura geoidal (N) é dada pela diferença entre a altitude geométrica (h) e a altitude ortométrica (H).

$$N = h - H \quad (52)$$

5.3 Método Gravimétrico

Determinar a altura geoidal (N) por meio de anomalia do campo de gravidade (Δg) é possível com a utilização da fórmula de Stokes (1849). Stokes, apesar de não ter conseguido fazê-lo devido a limitações tecnológicas, constatou que, conhecendo o valor da aceleração da gravidade em todos os pontos de uma superfície, era possível determinar sua forma matematicamente. A equação de Stokes para determinação da altura geoidal é:

$$N = \frac{R}{4\pi G} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \Delta g_s S(\psi) \sin \psi \, d\psi \, ds \quad (53)$$

onde R é o raio médio da Terra; Δg_s é o valor médio de gravidade do elemento de superfície ds ; e $S(\psi)$ é a função de Stokes que considera o elemento de área ds e a distância esférica (ψ) entre esse elemento e o ponto para o qual se está determinando a altura geoidal.

$$S(\psi) = \csc \frac{\psi}{2} + 1 - 6 \sin \frac{\psi}{2} - 5 \cos \psi - 3 \cos \psi \log_e \left[\sin \frac{\psi}{2} \left(1 + \sin \frac{\psi}{2} \right) \right] \quad (54)$$

6 ABORDAGEM RCR

O procedimento para determinação de um modelo geoidal (N) utilizando a técnica RCR pode ser dividido, segundo Marotta e Vidotti (2017), em três etapas. Na primeira, remove-se a componente de longo comprimento de onda da anomalia de gravidade, ou anomalia de Hemlert (Δg_{HEL}), estimada por observações gravimétricas terrestre, utilizando anomalias de gravidade (Δg_{GM}) provenientes de um modelo de geopotencial global (MGG). A esta anomalia de gravidade resultante dá-se o nome de anomalia de gravidade residual (Δg_{RES}). No segundo estágio calcula-se o modelo de co-geoide residual (N_{RES}), utilizando Δg_{RES} , o modelo co-geoide para os comprimentos de onda longos (N_{GM}), proveniente do MGG adotado, e o efeito indireto primário da topografia (N_{IE}). Por fim, estima-se o modelo do geoide utilizando os valores calculados no segundo estágio.

$$\Delta g_{RES} = \Delta g_{HEL} - \Delta g_{MGG} \quad (55)$$

$$N = N_{MGG} + N_{RES} + N_{IE} \quad (56)$$

Segundo Smith (1998), Δg_{MGG} e N_{MGG} podem ser calculados utilizando os coeficientes harmônicos do modelo geopotencial truncados para um grau definido, considerando apenas os longos comprimentos de onda.

$$\Delta g_{GM} = \frac{GMg}{r} \sum_{n=2}^{n_{max}} \left(\frac{ag}{r} \right)^n \left(\frac{n-1}{r} \right) \sum_{m=0}^n [\delta \bar{C}_{n,m} \cos(m\lambda) + \delta \bar{S}_{n,m} \sin(m\lambda)] \bar{P}_{n,m} \sin(\bar{\varphi}) \quad (57)$$

$$N_{GM} = \frac{GMg}{\gamma_0 r} \sum_{n=2}^{n_{max}} \left(\frac{ag}{r} \right)^n \sum_{m=0}^n [\delta \bar{C}_{n,m} \cos(m\lambda) + \delta \bar{S}_{n,m} \sin(m\lambda)] \bar{P}_{n,m} \sin(\bar{\varphi}) \quad (58)$$

onde

$$r = a \sqrt{1 - \frac{e^2(1-e^2)\sin^2\varphi}{1-e^2\sin^2\varphi}} \quad (59)$$

$$\bar{\varphi} = tg^{-1} \left[\left(\frac{b}{a} \right)^2 tg(\varphi) \right] \quad (60)$$

Smith (1998) define a_g como o fator de escala equatorial do modelo de geopotencial utilizado, r é o raio geocêntrico da Terra, a , b e e são parâmetros do elipsoide de referência utilizado e λ e φ são as coordenadas de latitude e longitude geodésicas em cada ponto; $\bar{\varphi}$ é a latitude geocêntrica (Torge, 1991); γ_0 é a gravidade normal no ponto de interesse, γ_a e γ_b são, respectivamente, a gravidade normal no equador e nos pólos (Moritz, 1984). $\delta\bar{C}_{n,m}$ e $\delta\bar{S}_{n,m}$ são os coeficientes harmônicos esféricos normalizados do potencial perturbador e $\bar{P}_{n,m}$ são as funções de Legendre normalizadas para o grau e ordem n e m , respectivamente (Shwarz *et al.*, 1990).

Nas equações acima, não são calculados os termos de grau zero para a anomalia de gravidade (Δg_0) e o co-geoide (N_0) residuais. Portanto, para calcular esses termos, podem-se utilizar as equações estabelecidas por Kirby e Featherstone (1997) e adicionar os valores em Δg_{MGG} e N_{MGG} , respectivamente:

$$\Delta g_0 = \left(\frac{GM_g - GM}{r^2} \right) - 2 \left(\frac{W_0 - U}{r} \right) \quad (61)$$

$$N_0 = \left(\frac{GM_g - GM}{\gamma_0 r} \right) - \left(\frac{W_0 - U}{r} \right) \quad (62)$$

W_0 é o potencial da gravidade na superfície do geoide. U é o potencial de gravidade normal na superfície do elipsóide normal.

O co-geoide residual (N_{RES}) é obtido utilizando os valores de gravidade coletados na superfície física da Terra. Assim, considerando a Terra uma superfície esférica, podemos estimar as alturas geoidais de acordo com Stokes (1849). Em sua forma discreta, os elementos dessa superfície têm seus valores definidos por (Sideris e She, 1995):

$$N_{RES} = \frac{R\Delta\varphi\Delta\lambda}{4\pi\bar{\gamma}_0} \sum_{\varphi'=\varphi_1}^{\varphi_n} \sum_{\lambda'=\lambda_1}^{\lambda_m} \Delta g(\varphi', \lambda') S_M(\psi) \cos \varphi' \quad (63)$$

$\Delta g(\varphi', \lambda')$ representa o valor médio da anomalia gravimétrica de uma quadrícula pertencente a uma grade contendo n paralelos e m meridianos; $\Delta\varphi$ e $\Delta\lambda$ são as variações em coordenadas geodésicas, em latitude e longitude, que compreendem cada quadrícula; λ' e φ' são as coordenadas geodésicas do centro de cada quadrícula; $\bar{\gamma}_0$ é a gravidade normal média de cada quadrícula; ψ é a distância esférica entre dois pontos; e

$S_M(\psi)$ é a função núcleo de Stokes modificada, usada para remover os termos de baixo grau dos polinômios de Legendre para $S(\psi)$.

Segundo Vaníček e Kleusberg (1987), a função modificada de Stokes pode ser calculada por:

$$S_M^{VK}(\psi) = S_M^{WG}(\psi) - \sum_{k=2}^L \frac{2k+1}{2k} t_k(\cos \psi_0) P_k(\cos \psi) \quad (64)$$

em que, de acordo com Wong e Gore (1969):

$$S_M^{WG}(\psi) = S(\psi) - \sum_{n=2}^L \frac{2n+1}{n-1} P_n(\cos \psi) \quad (65)$$

L é o máximo grau, P_n é o polinômio de Legendre de ordem n e t_k é o coeficiente de Vaníček e Kleusberg (Marotta e Vidotti, 2017).

7 MATERIAIS E MÉTODOS

Para atender aos objetivos do referido trabalho, foram analisadas a influência de MGGs, MDTs e valor da densidade na precisão de um modelo geoidal calculado para a área de estudo.

7.1 Área de Estudo

O Distrito Federal está localizado na região Centro-Oeste do Brasil (Figura 2). O limite geográfico do Distrito Federal é compreendido pelo enquadramento 48,25° e 47,33° de longitude oeste e 15,45° e 16,06° de latitude sul (Silva, 2017), possuindo uma área total de aproximadamente 5.800km². Segundo Marotta e Vidotti (2017), a região possui relevo levemente ondulado, com altitudes que variam entre 600 e 1340 metros.

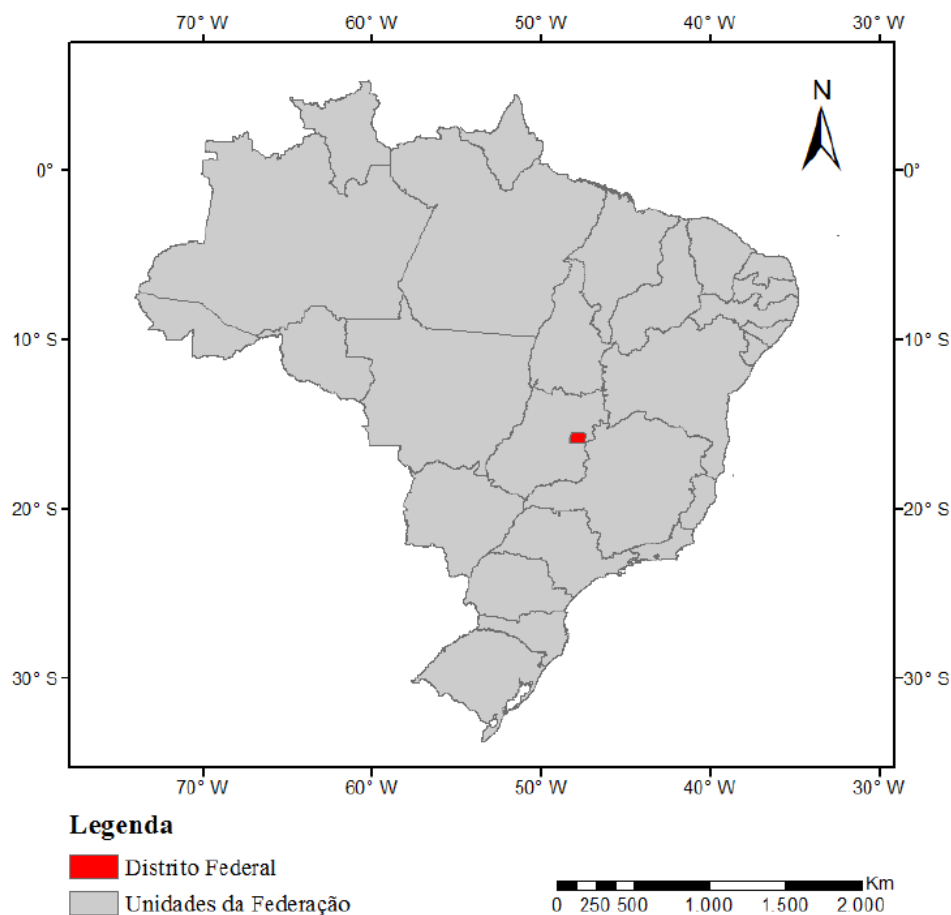


Figura 2: Localização do Distrito Federal (Fonte: Silva, 2017).

A técnica RCR exige, em sua forma, que os dados utilizados estejam disponíveis em uma área maior do que aquela para qual se pretende determinar o modelo geoidal. Por essa razão, a região empregada para geração do modelo geoidal compreende também parte dos estados da Bahia, Minas Gerais e Goiás, conforme mostra a Figura 3. Também, na Figura 3, são apresentados os limites dos dados utilizados para determinação dos modelos geoidais.

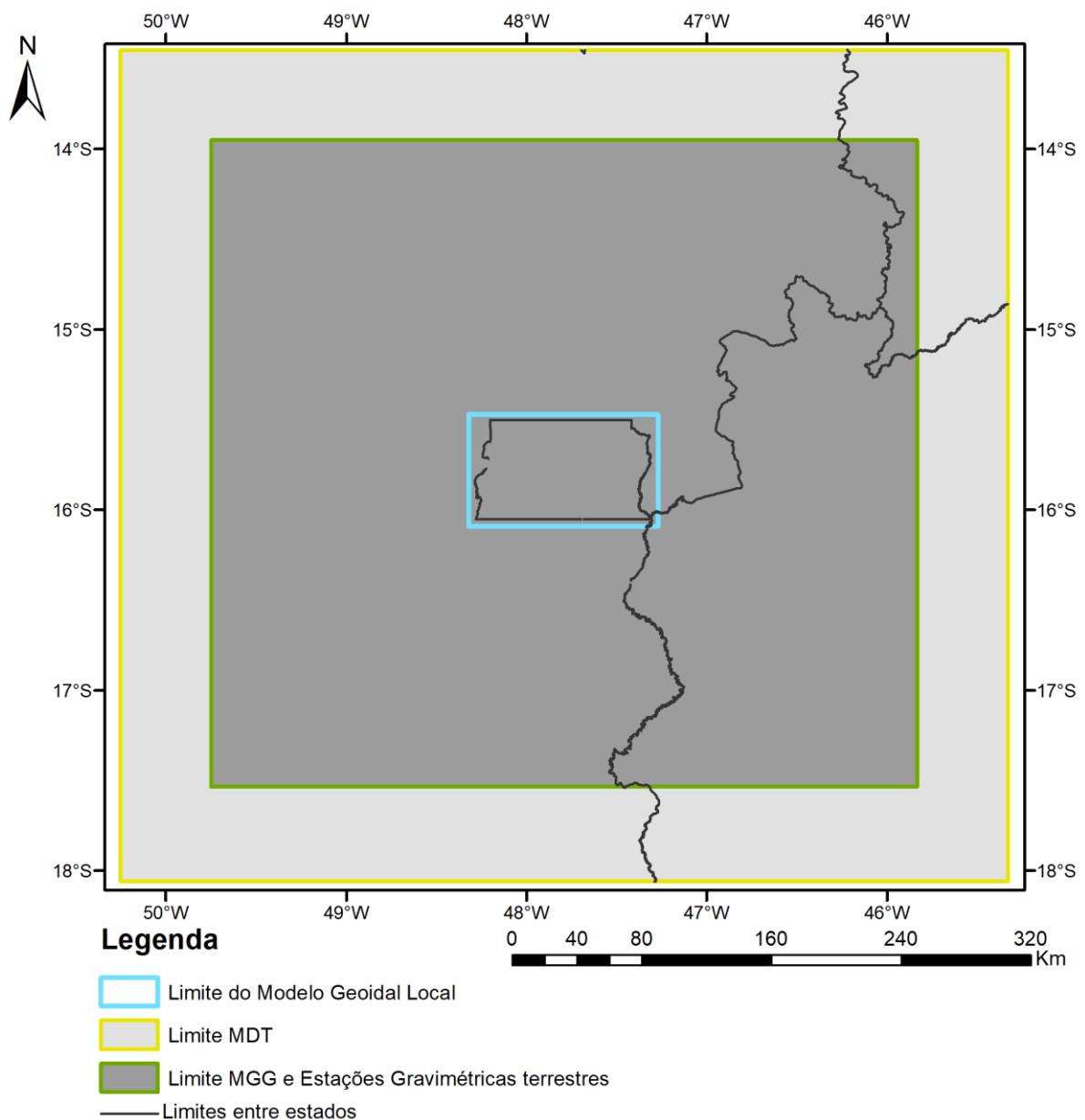


Figura 3: Limites dos dados utilizados.

7.2 Modelo de Geopotencial Global

Segundo Botai e Combrinck (2012), os MGGs representam o campo de gravidade terrestre e podem ser divididos em três grupos, de acordo com os dados utilizados para sua determinação: provenientes apenas de dados de satélite; combinados (dados de satélite, de altimetria, levantamentos gravimétricos terrestres, etc.); e refinados (ajustados e estendidos para graus e ordens mais altos).

A evolução dos MGGs nos últimos anos tem contribuído de forma fundamental para a melhoria dos modelos geoidais. Guimarães et. al. (2012), afirma que as grandes missões de satélite recentes, por exemplo, GRACE (Gravity Recovery and Climate Experiment), CHAMP (Challenging Minisatellite Payload) e GOCE (Gravity Field and Steady State Ocean Circulation), permitiram o conhecimento mais preciso dos longos comprimentos de onda do campo de gravidade da Terra, utilizados em diversas técnicas de determinação do geóide, incluindo a RCR.

Um grande número de MGGs tem sido publicado atualmente, e os modelos combinados e/ou refinados são os mais utilizados para determinação do geóide, em função de sua melhor resolução espacial. Por isso, o ICGEM (International Centre for Global Earth Models) tem papel fundamental, uma vez que é responsável pelo armazenamento e publicação dos MGGs calculados por diversos grupos de pesquisa.

Neste trabalho, foram utilizados os seguintes MGGs, disponibilizados pelo ICGEM:

- EIGEN-6C4, desenvolvido por Förste et al. (2014). Esse modelo é resultado da integração de dados de altimetria, gravidade coletada na superfície da Terra e dos satélites GOCE, GRACE e Lageos;

- GECO (Combinação de dados GOCE e EGM2008), desenvolvido por Gilardoni et al., (2015); e

- EGM2008, desenvolvido por Pavlis et al. (2008), resultado da combinação de dados de altimetria, estações gravimétricas terrestres e dados do satélite GRACE.

A escolha do EGM2008 é devida à recomendação feita pelo IERS (International Earth Rotation and Reference Systems Service), em convenção realizada em 2010, de utilizá-lo como MGG da Terra. Os outros dois modelos utilizados (EIGEN-6C4 e GECO) foram escolhidos por possuírem em sua determinação dados do EGM2008 combinados com dados de outras fontes.

Para todos os MGGs selecionados, foram utilizados grau e ordem até 150, 250 e 2190. Os graus e ordem até 150 e 250 foram utilizados com base na análise realizada

por Silva (2017), que definiu esses valores considerando as maiores diferenças de amplitude entre os três modelos e, ainda, priorizando os coeficientes determinados por dados de longo comprimento de onda. Os grau e ordem até 2190 foram utilizados para complementar a área onde faltam dados de gravidade terrestre.

Para os MGGs, foi definido um limite de extensão de $1,5^\circ$ além do limite do Distrito Federal. O limite dos MGG é dado, portanto, pelas coordenadas $49,75^\circ$ e $45,83^\circ$ de longitude oeste e $13,95^\circ$ e $17,56^\circ$ de latitude sul. A Figura 4 mostra, como exemplo, o modelo GECO em grau e ordem 250 para a área de estudo.

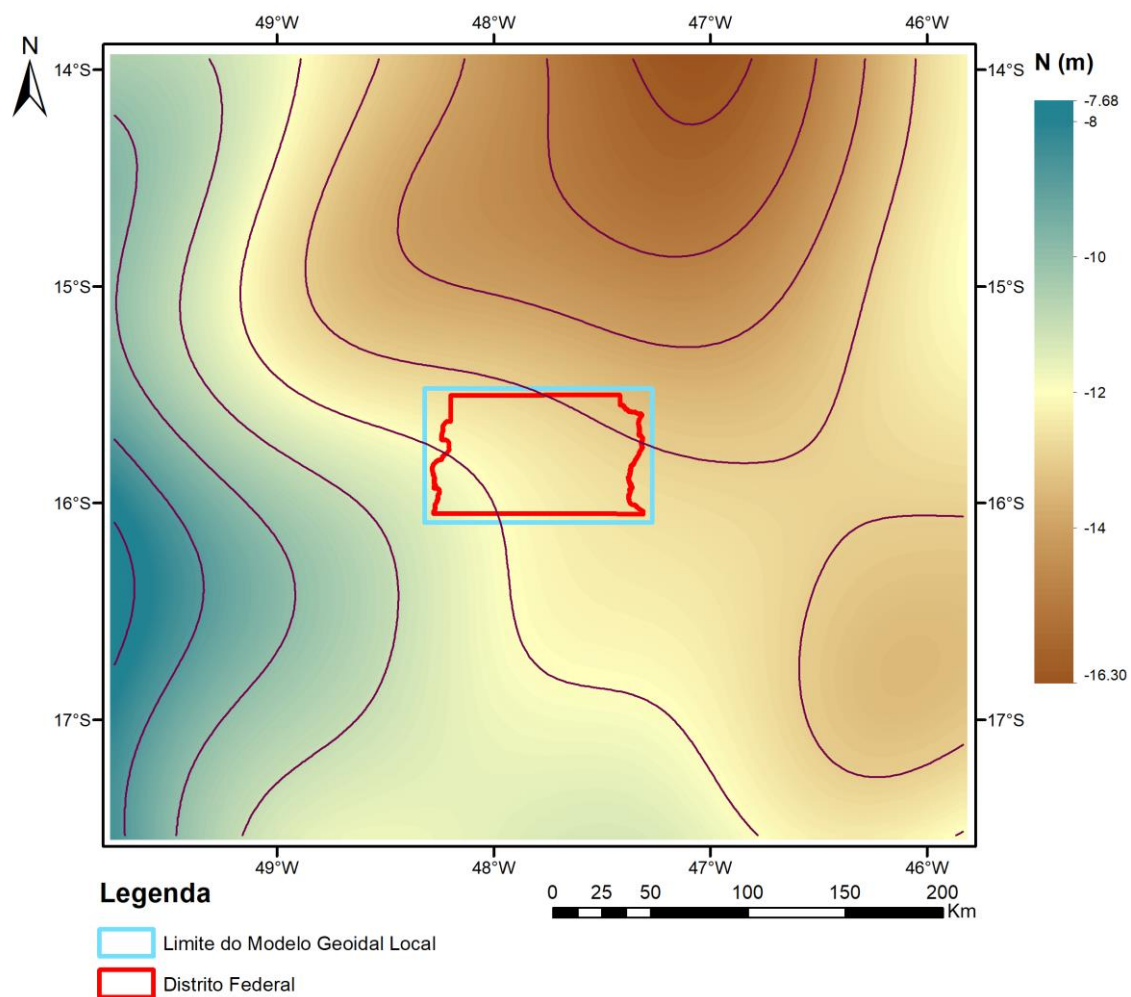


Figura 4: Modelo de Geopotencial Global GECO. As isolinhas representam intervalos de 1 metro.

7.3 Modelo Digital de Terreno

Segundo Silva (2017), os MDTs gerados a partir da missão SRTM (Shuttle Radar Topography Mission) são os mais utilizados, por possuírem informações recentes, boa

resolução espacial e por serem obtidos a partir de imageamento RADAR (Radio Detection and Ranging).

O USGS (United States Geological Survey) disponibiliza os produtos gerados por essa missão nas resoluções de 1 arco-segundo e 3 arco-segundos, que correspondem a aproximadamente 30 e 90 metros, respectivamente. A figura 5 apresenta o MDT SRTM de 30 metros.

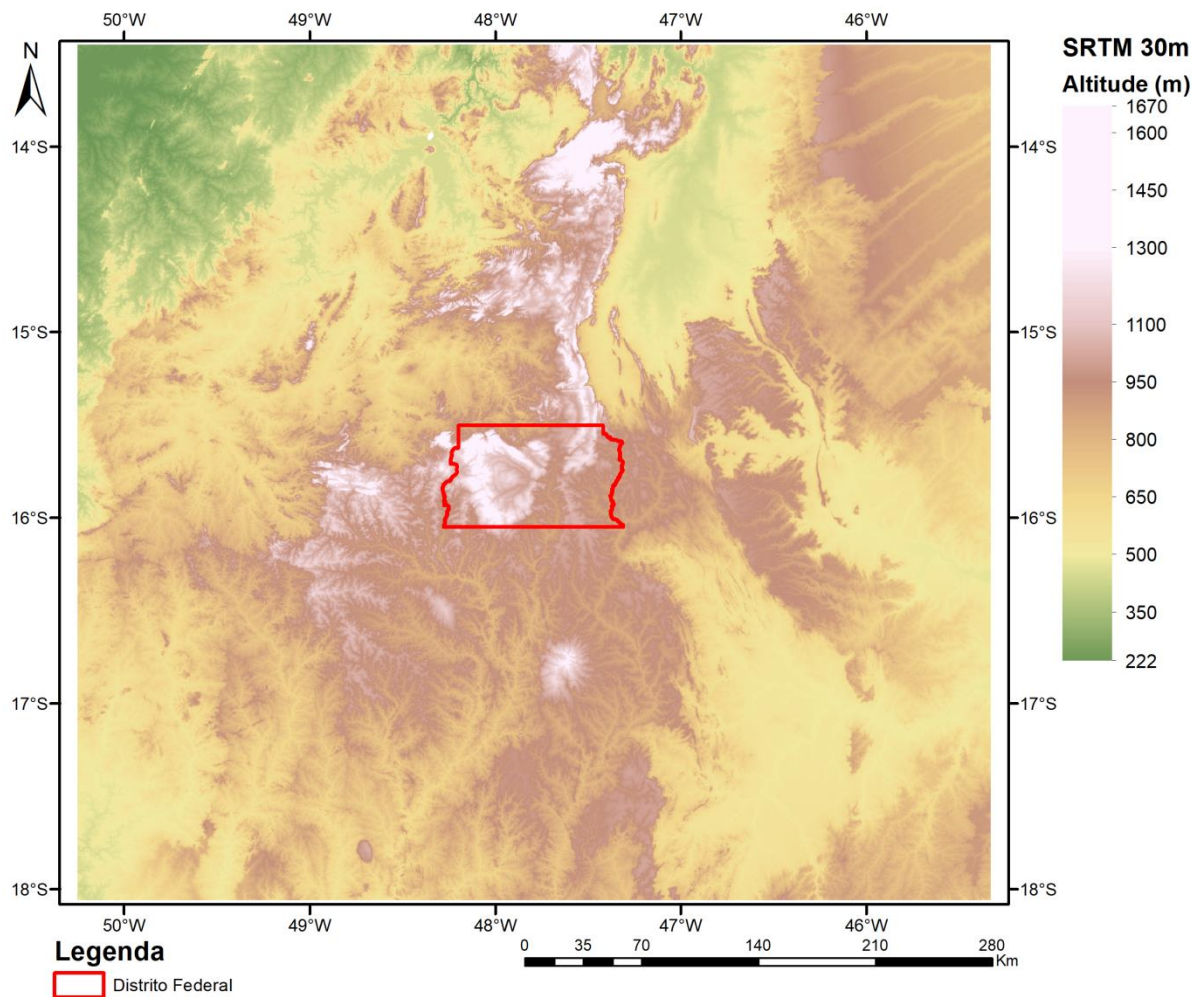


Figura 5: Altitudes do SRTM 30 metros na área de estudo.

Os MDTs utilizados nesse trabalho são o SRTM 1 arco-segundo e 3 arco-segundos, cedidos pelo USGS, com resoluções espaciais de aproximadamente 30 e 90 metros, respectivamente. O limite dos MDTs abrange uma área de 2° além do território do Distrito Federal, e é compreendido pelas coordenadas 50,25° e 45,33° de longitude oeste e 13,45° e 18,06° de latitude sul.

7.4 Estações Gravimétricas Terrestres

A Rede Gravimétrica Brasileira está aos cuidados do IBGE (Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística), a quem cabe densificar o número de estações gravimétricas e disponibilizar os dados existentes. Segundo Gemaél (2012), geocientistas das diversas áreas também realizam levantamentos gravimétricos em diferentes escalas, a fim de contribuir com a obtenção de resultados que satisfaçam seus objetivos. Essas estações gravimétricas devem estar vinculadas, direta ou indiretamente, a estações de 1ª ordem, como são conhecidas as estações gravimétricas absolutas.

Nesse trabalho, foram utilizados 3897 dados de estações gravimétricas terrestres fornecidos pelo IBGE, pela ANP (Agência Nacional do Petróleo, Gás Natural e Biocombustíveis) e provenientes de levantamentos realizados por pesquisadores (professores Roberta Mary Vidotti e Giuliano Sant'Anna Marotta) da UnB. Também foram utilizados 555 dados do modelo EIGEN-6C4 em grau 2190, regularmente espaçados com distância de 5', para complementar a área dos dados de gravidade terrestre. Isso evita efeitos negativos gerados pela irregularidade dos dados terrestres.

Os dados das estações gravimétricas terrestres foram selecionados considerando as técnicas de aquisição de posicionamento altimétrico e planimétrico. Foram atribuídos índices de 1 a 7 para as técnicas de posicionamento planimétrico e de 1 a 6 para o posicionamento altimétrico aos dados disponíveis, como se pode observar na Tabela 1. Neste trabalho, foram utilizados apenas os dados das estações com técnicas de posicionamento planimétrico de índice 1 a 4 e posicionamento altimétrico com índice de 1 a 3. A Figura 6 apresenta os dados de gravimetria terrestre utilizados nesse trabalho.

Tabela 1: Classificação das técnicas de posicionamento das Estações Gravimétricas terrestres

Nº	Posicionamento Planimétrico	Posicionamento Altimétrico
1	GPS GEODÉSICO	NIVELAMENTO GEOMÉTRICO
2	GPS TOPOGRÁFICO	NIVELAMENTO TRIGONOMÉTRICO
3	POLIGONAÇÃO	GPS TOPOGRÁFICO
4	TRIANGULAÇÃO	BAROMETRIA
5	GPS NAVEGAÇÃO	NÃO INFORMADA
6	DOPPLER	CAMPO VAZIO
7	CARTA e NÃO ESPECIFICADA	

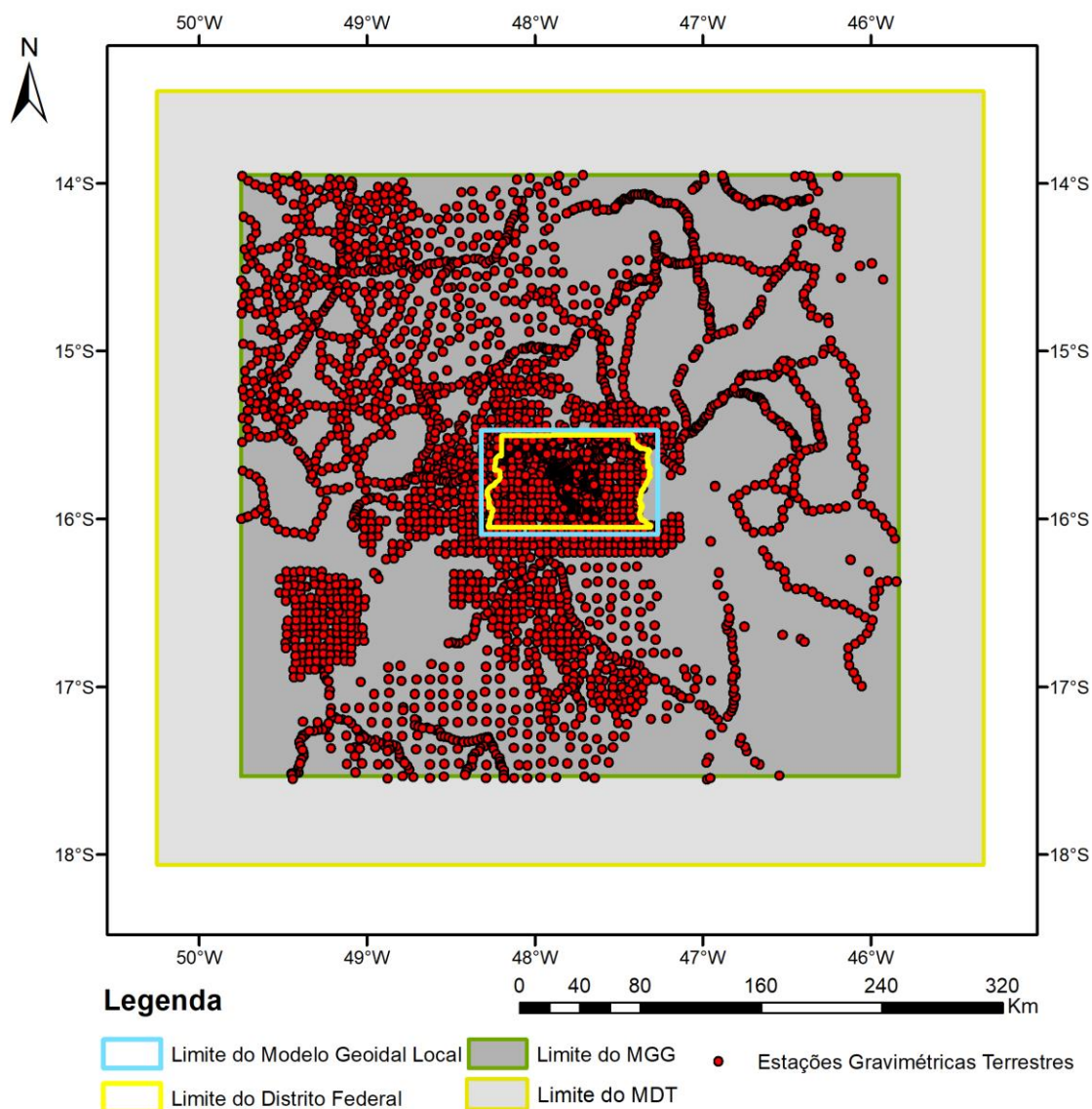


Figura 6: Distribuição das Estações Gravimétricas terrestres.

7.5 Densidades

Diversas reduções gravimétricas possuem o valor de densidade (ρ) inserido em suas formulações (correção Bouguer, correção de terreno, efeito indireto...). Por essa razão, a estimativa das densidades das rochas em subsuperfície é um importante aspecto a ser considerado na determinação de alturas geoidais. Essa estimativa pode ser realizada de forma direta ou indireta.

Silva (2017) afirma que, no método direto, amostras de rocha são coletadas em campo e analisadas em laboratório, tendo seus valores de densidade determinados em função do conhecimento de seu volume e massa. Já para estimar os valores de densidade de forma indireta, pode-se utilizar técnicas de inversão que envolvam dados do campo de gravidade terrestre.

Neste trabalho, foram determinados valores de densidade de forma direta, por meio de amostra de rochas, e indireta, por meio de inversão de dados gravimétricos.

7.5.1 Estimativa da densidade por meio de amostragem de rochas

Para obter a densidade das rochas amostradas em campo, utilizou-se o método de Arquimedes. Nesse método, um sólido de volume desconhecido é imerso em um líquido padrão, sendo o deslocamento desse líquido equivalente ao volume do sólido. Portanto, é possível estimar o volume do sólido e, medindo a massa do mesmo, estimar sua densidade, pela seguinte relação:

$$\rho = \frac{m}{V} \quad (66)$$

onde ρ é a densidade do sólido, m é a sua massa e V o volume.

Para a estimativa da densidade de forma direta, foi realizada campanha de coleta de amostras de rocha em todo o Distrito Federal, no mês de janeiro de 2018. O planejamento realizado para a coleta das amostras envolveu análise de imagens de mapa geológico do Distrito Federal, mapa de malha viária e método de coleta das amostras (tamanho, número de amostras por ponto, etc...).

Para a coleta das amostras de rocha buscou-se compreender todas as unidades litológicas no Distrito Federal, por meio de um mapa geológico do Distrito Federal fornecido pelo professor José Eloi Guimarães Campos, do Instituto de Geociências da Universidade de Brasília. A partir daí, foram coletadas 38 amostras de rocha (APÊNDICE A) por todo Distrito Federal. A localização dessas amostras pode ser observada na Figura 7.

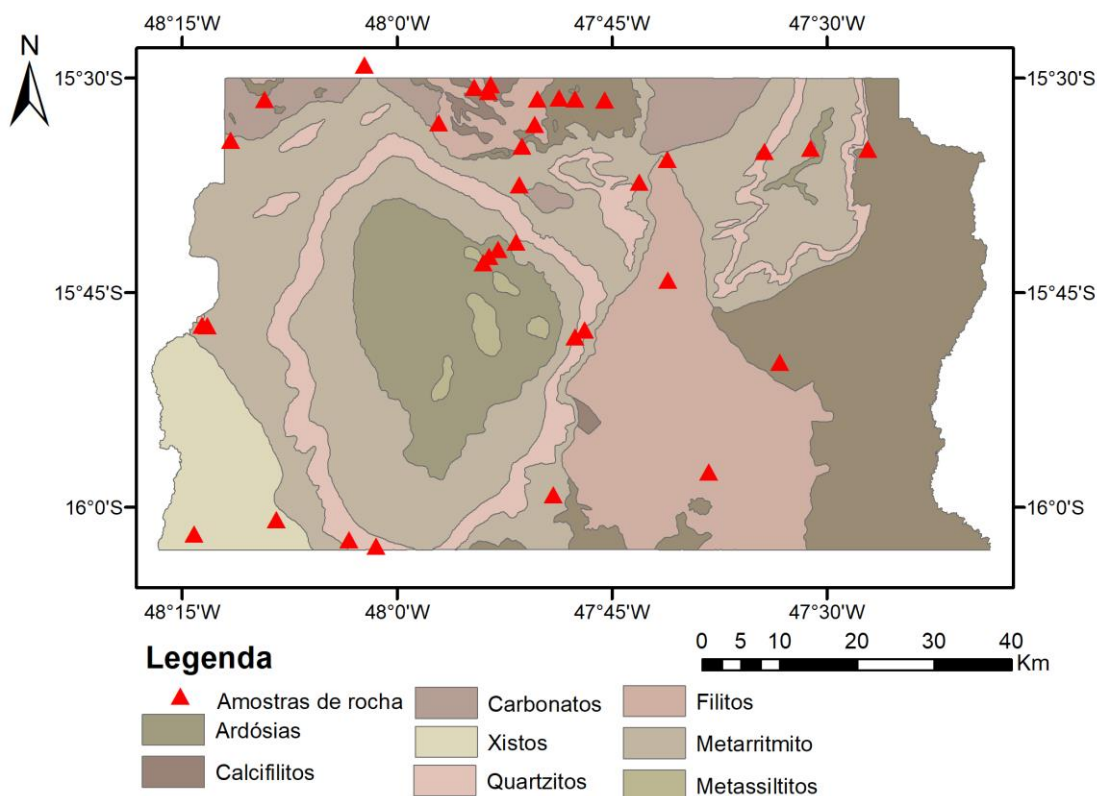


Figura 7: Mapa geológico do Distrito Federal e localização das amostras de rocha.

As amostras foram preparadas para serem imersas em uma proveta de 100 ± 1 ml, com diâmetro de 2,5cm, contendo água destilada. Todas as amostras apresentaram diâmetro aproximado de 2,5 cm e comprimento de 3 a 6 cm. Também, as amostras foram envoltas em uma fina camada de filme PVC para impermeabilização. Elas foram pesadas em uma balança de precisão repetidas vezes para obter o valor de sua massa e, em seguida, foram imersas na água. Utilizando a graduação da proveta foi possível observar o volume de água deslocado. Vale ressaltar que as densidades estimadas pelo presente método correspondem à densidade de bulk, onde, tanto as partículas que compõe o material quanto os poros e fluidos que nele existem foram considerados na determinação da densidade.

Por meio das densidades estimadas para cada amostra, foi estimado um valor de densidade média para uso nesse trabalho.

7.5.2 Estimativa da densidade pelo método indireto

No método de inversão F-H, proposto por Parasnis (1952, 1979), a densidade estimada para uma região é determinada minimizando as somas da anomalia Bouguer

média de toda a região e as anomalias Bouguer em cada ponto de gravidade observada (Yamamoto, 1999). A densidade estimada para uma região é dada por:

$$\rho = \frac{\sum_{i=1}^N (C_{B_i} H_i - \overline{C_B H}) (\Delta g_{FA_i} - \overline{\Delta g_{FA}})}{\sum_{i=1}^N (C_{B_i} H_i - \overline{C_B H})^2} \quad (67)$$

onde ρ é o valor de densidade calculado; C_{B_i} , H_i e Δg_{FA_i} são os valores da correção Bouguer, altitude ortométrica e anomalia ar livre em cada ponto, respectivamente; $\overline{C_B H}$ e $\overline{\Delta g_{FA}}$ são as médias da correção Bouguer multiplicada pela altitude ortométrica e da anomalia ar livre; e N é um número inteiro que varia de 1 até o número máximo de pontos na região.

Neste trabalho, foram utilizados dados das estações gravimétricas presentes dentro dos limites do Distrito Federal (Figura 6) para estimativa de densidade média para a região. A escolha dos limites do Distrito Federal se deu por causa da existência de grande quantidade de dados gravimétricos com distribuição homogênea e por englobar a mesma região utilizada na determinação de densidade pelo método direto.

7.6 Modelo Geoidal Gravimétrico

Todos os procedimentos realizados para determinar o modelo geoidal gravimétrico para o Distrito Federal foram desenvolvidos com base nas equações apresentadas no capítulo 6. A técnica RCR foi implementada computacionalmente por Marotta (2015), como um pacote de rotinas matemáticas chamado GRAVTool, desenvolvido para leitura, cálculo e geração de resultados no software MATLAB®. Como ferramentas auxiliares para geração de mapas, malhas regulares, tabelas e gráficos, foram utilizados os softwares ArcGIS® e Microsoft® Office Excel.

O pacote GRAVTool requer como dados de entrada para o cálculo do modelo geoidal: dados de gravidade e de posição, observados em campo, dados de anomalia de gravidade proveniente do MGG; dados de altitude proveniente do MDT; valor de densidade estimada; e constantes relacionadas ao elipsoide de referência.

O elipsoide de referência utilizado em todos os cálculos nesse trabalho foi o GRS80 (Geodetic Reference System 1980). Os parâmetros desse elipsoide são apresentados em nota técnica do IERS, por Petit e Luzum (2010). Também foram utilizadas constantes

referentes ao potencial de gravidade na superfície do geoide, determinado por Moritz (1984). As constantes utilizadas são apresentadas abaixo, na Tabela 2.

Tabela 2: Constantes utilizadas no cálculo das alturas geoidais.

Elipsoide de Referência GRS80		
a	6378137m	Semieixo maior
b	6356752.3141m	Semieixo menor
GM	$3.986005 \times 10^{14} \text{ m}^3/\text{s}^2$	Constante gravitacional geocêntrica
ω	$7.292115 \times 10^{-5} \text{ rad/s}$	Velocidade angular nominal média da Terra
γ_a	$9.7803267715 \text{ m/s}^2$	Gravidade Normal no equador
γ_b	$9.8321863685 \text{ m/s}^2$	Gravidade Normal nos pólos
G	$6.67428 \times 10^{-11} \text{ m}^3/(\text{kg} \cdot \text{s}^2)$	Constante de gravitação
W_0	$62636856 \text{ m}^2/\text{s}^2$	Potencial de gravidade na superfície do geoide

Neste trabalho, foram estimados modelos geoidais envolvendo alternância entre todos os MGGs, MDTs e valores de densidade, descritos nas sessões anteriores, a fim de se obter, por meio dos diversos modelos estimados e, segundo critérios estatísticos, o modelo mais preciso.

7.7 Precisão

Para estimativa de precisão dos modelos Geoidais, determinados nesse trabalho, foram utilizados 26 pontos de Referência de Nível (RN) localizadas no Distrito Federal, pertencentes ao Sistema Geodésico Brasileiro (SGB) e disponibilizadas pelo IBGE. Essas RNs permitem o cálculo pontual de suas ondulações geoidais através da diferença entre a altitude ortométrica, determinada por nivelamento geométrico, e a altitude geométrica, dada por posicionamento GNSS.

A localização dos pontos de RN apoiado por posicionamento GNSS é apresentada na Figura 8.

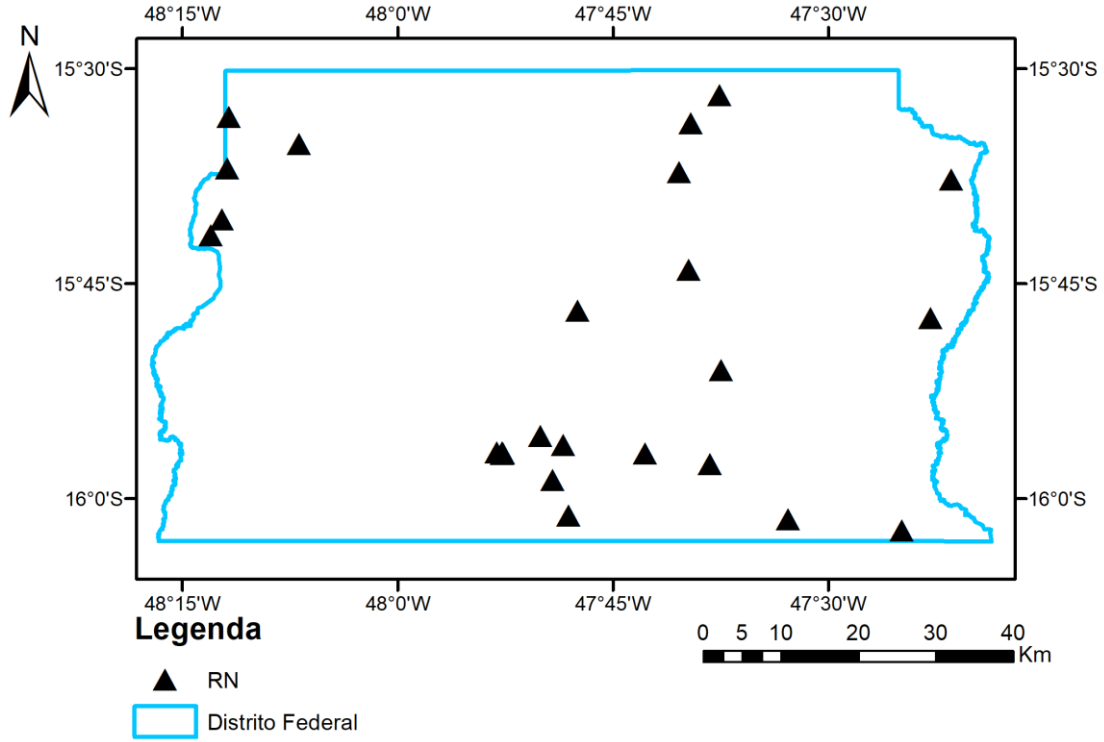


Figura 8: Pontos utilizados para análise de precisão dos modelos geoidais.

A precisão dos modelos geoidais foi estimada por meio das diferenças entre as alturas geoidais, extraídas dos modelos calculados e dos pontos de RN apoiado por posicionamento GNSS. O modelo geoidal oficial brasileiro, MAPGEO2015, também foi analisado quanto a sua precisão, cuja finalidade foi observar as diferenças entre os modelos geoidais locais determinados nesse trabalho e o modelo oficial brasileiro. O MAPGEO2015 é um modelo geoidal desenvolvido pelo IBGE em parceria com a EPUSP (Escola Politécnica da Universidade de São Paulo) e publicado em 2015.

A análise de precisão foi realizada através de estatística descritiva, determinando os valores de média, desvio-padrão, mínimos, máximos e amplitude, através das diferenças entre as RN/GNSS, o MAPGEO2015 e modelos geoidais locais. Também foram determinados os desvios médios quadráticos, RMS_N (do inglês root mean square). Esse desvio é dado pela equação:

$$RMS_N = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^m (N_{int_i} - N_{ind_i})^2}{m}} \quad (68)$$

onde N_{int_i} são as alturas geoidais a serem analisadas; N_{ind_i} são as alturas geoidais RN/GNSS; m é o número total de pontos; e i é o número inteiro que varia de 1 a m .

8 RESULTADOS E DISCUSSÃO

8.1 Determinação dos Valores de Densidade

O valor de densidade média para crosta continental de $2,67 \text{ g/cm}^3$ é o mais amplamente utilizado nas geociências e é recomendado pelo IERS. No capítulo 7, foram apresentadas as metodologias utilizadas para determinação das densidades, de forma direta e indireta, utilizadas neste trabalho. As densidades estimadas foram utilizadas como constantes.

O método indireto F-H resultou em uma densidade de $2,58 \text{ g/cm}^3$, com desvio padrão de $0,024 \text{ g/cm}^3$. O método direto forneceu uma densidade de $2,12 \text{ g/cm}^3$. A densidade média obtida por amostras de rocha foi resultado da média das densidades de todas as amostras, ponderadas com um peso dado pela área total dos litotipos em que se encontram. Ambos os valores foram utilizados na determinação dos modelos geoidais. O mapa geológico do Distrito Federal, apresentado no capítulo 7 (Figura 7), mostra que as rochas que compõe a geologia local são predominantemente sedimentares e metamórficas de baixo grau, o que torna os valores de densidade utilizados nesse trabalho adequados, uma vez que o valor de densidade de $2,67 \text{ g/cm}^3$ é recomendado para uma crosta composta por embasamento cristalino.

8.2 Determinação do Modelo Geoidal Gravimétrico

Para obter o modelo geoidal gravimétrico com a melhor precisão, todos os dados apresentados no capítulo 7 foram cruzados para gerar 24 modelos geoidais distintos, conforme apresentado na Figura 9.

De acordo com a técnica RCR, utilizaram-se os MGG EGM2008, EIGEN-6C4 e GECO, cada um em graus e ordem até 150 e 250, para obter os valores de Δg_{GM} e N_{GM} . Utilizando os dados de gravidade terrestre e os modelos digitais de terreno, foram calculados os valores de Δg_{HEL} e N_{IE} . No cálculo de Δg_{HEL} , também foram utilizados, de acordo com as formulações apresentadas no capítulo 3, os valores de densidade determinados nesse trabalho.

Todos os dados utilizados na etapa final do cálculo dos modelos geoidais (equações 52 e 53) foram interpolados através do método do inverso do quadrado da distância, em uma malha regular de $2,5'$, para que, dispostos em uma distribuição espacial homogênea, fossem realizados os cálculos de determinação dos modelos.



37

Tabela 3: Discriminação dos dados utilizados para geração de cada modelo geoidal.

ID	Modelo	MGG			Grau e Ordem		MDT		Densidade	
		EIGEN-6C4	EGM2008	GECO	150	250	SRTM30	SRTM90	F-H	Direto
1	I3E1	×			×		×		×	
2	I3E2	×				×	×		×	
3	I3C1		×		×		×		×	
4	I3C2		×			×	×		×	
5	I3G1			×	×		×		×	
6	I3G2			×		×	×		×	
7	I9E1	×			×			×	×	
8	I9E2	×				×		×	×	
9	I9C1		×		×			×	×	
10	I9C2		×			×		×	×	
11	I9G1			×	×			×	×	
12	I9G2			×		×		×	×	
13	A3E1	×			×		×			×
14	A3E2	×				×	×			×
15	A3C1		×		×		×			×
16	A3C2		×			×	×			×
17	A3G1			×	×		×			×
18	A3G2			×		×	×			×
19	A9E1	×			×			×		×
20	A9E2	×				×		×		×
21	A9C1		×		×			×		×
22	A9C2		×			×		×		×
23	A9G1			×	×			×		×
24	A9G2			×		×		×		×

Em seguida, determinados todos os modelos geoidais, realizou-se interpolação dos modelos para permitir a extração das alturas geoidais de cada modelo nos pontos onde se localizam as 26 RNs/GNSS utilizadas para verificação da precisão. Após esse procedimento, realizou-se a análise estatística da precisão, conforme apresentado no capítulo 7. A Figura 10 mostra o resultado da análise da precisão dos 24 modelos geoidais com relação às RNs. Os modelos estão identificados pelos números apresentados na Tabela 2.

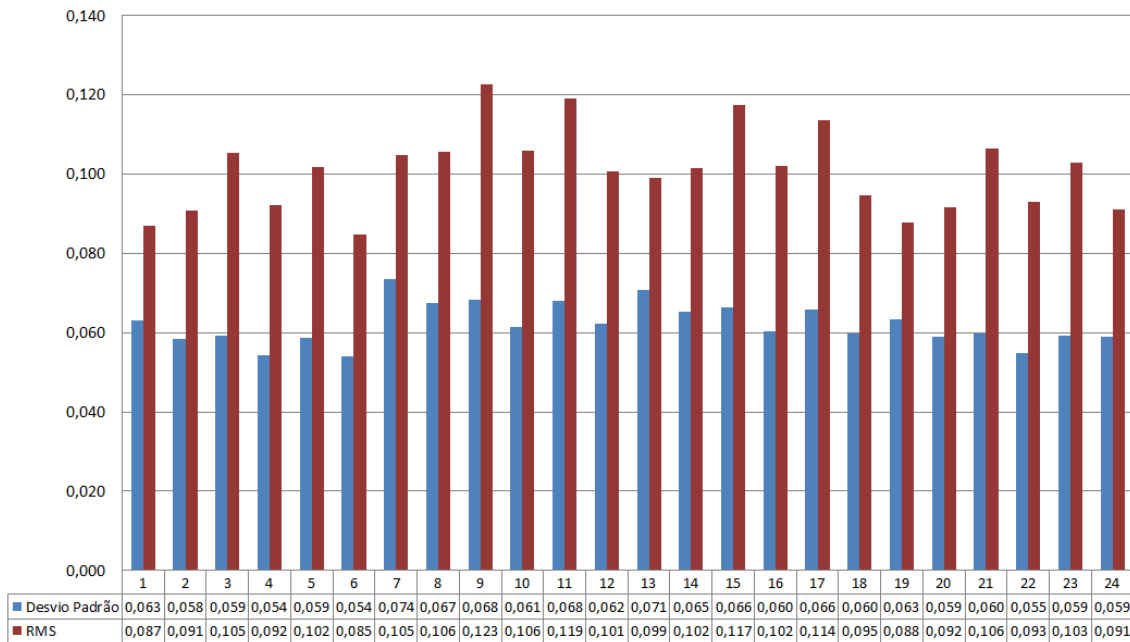


Figura 10: Desvio padrão e RMS dos modelos gravimétricos geoidais.

Como se pode observar na figura acima, o modelo que obteve a maior precisão foi o I3G2 (Figura 11), gerado a partir do MGG GECO com grau e ordem 250, do MDT SRTM 30 metros e da densidade obtida pelo método F-H. O desvio padrão desse modelo é de 0,054m e desvio quadrático médio de 0,085m. Na Tabela 4, são apresentados os resultados estatísticos da precisão do modelo I3G2 e do MAPGEO2015 em relação às RNs.

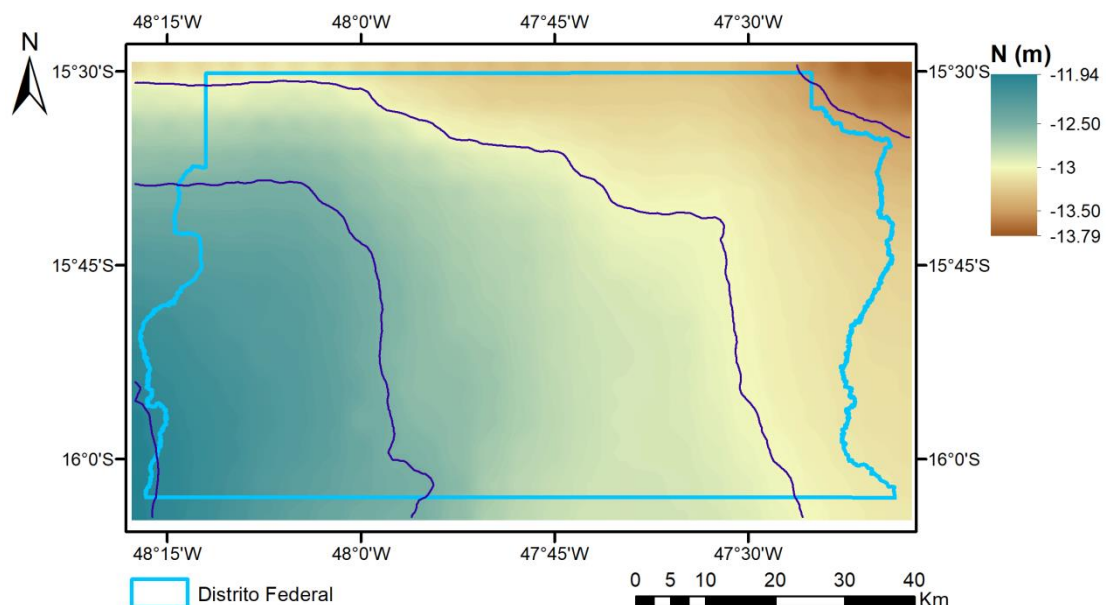


Figura 11: Modelos gravimétrico geoidal I3G2. As isolinhas estão separadas por intervalos de 0,50m.

Tabela 4: Resultado das diferenças entre o MAPGEO2015 e o I3G2 em relação aos pontos de RN/GNSS.

Estatística	MAPGEO2015	I3G2
Máximo (m)	0,320	0,122
Mínimo (m)	-0,065	-0,146
Amplitude (m)	0,385	0,268
Média (m)	0,060	-0,065
Desvio Padrão (m)	0,079	0,054
RMS (m)	0,099	0,085

Os resultados da análise estatística mostram que o modelo I3G2 apresenta um ajuste melhor às RNs, quando comparado com o MAPGEO2015. Considerando apenas o desvio-padrão, nota-se que todos os 24 modelos gerados nesse trabalho apresentam menores valores que o MAPGEO2015.

Para verificar a influência de cada fator considerado nesse trabalho, na determinação de modelos geoidais, realizou-se a análise do modelo I3G2 comparado aos modelos em que somente um dos fatores varia. Esses modelos são: I3G1, onde o grau e ordem do MGG GECO é 150; I9G2, onde o MDT utilizado é o SRTM 90 metros; e A3G2, em que a densidade utilizada é obtida pela amostragem de rochas. Essa análise é apresentada nas tabelas 5, 6 e 7. A estatística apresentada diz respeito às diferenças entre o modelo I3G2 e os demais modelos com relação às RNs.

Tabela 5: Diferenças entre os modelos I3G2 e I3G1 em relação aos pontos de RN/GNSS.

Estatística	I3G2	I3G1
Máximo (m)	0.122	0.105
Mínimo (m)	-0.146	-0.164
Amplitude (m)	0.268	0.270
Média (m)	-0.065	-0.083
Desvio Padrão (m)	0.054	0.059
RMS (m)	0.085	0.102

Tabela 6: Diferenças entre os modelos I3G2 e I9G2 em relação aos pontos de RN/GNSS.

Estatística	I3G2	I9G2
Máximo (m)	0.122	0.113
Mínimo (m)	-0.146	-0.172
Amplitude (m)	0.268	0.285
Média (m)	-0.065	-0.079
Desvio Padrão (m)	0.054	0.062
RMS (m)	0.085	0.101

Tabela 7: Diferenças entre os modelos I3G2 e A3G2 em relação aos pontos de RN/GNSS.

Estatística	I3G2	A3G2
Máximo (m)	<i>0.122</i>	<i>0.122</i>
Mínimo (m)	<i>-0.146</i>	<i>-0.167</i>
Amplitude (m)	<i>0.268</i>	<i>0.290</i>
Média (m)	<i>-0.065</i>	<i>-0.073</i>
Desvio Padrão (m)	<i>0.054</i>	<i>0.060</i>
RMS (m)	<i>0.085</i>	<i>0.095</i>

A maior discrepância observada nas tabelas acima é devida à utilização do MDT SRTM 90 metros ao invés do SRTM 30 metros. Isso gerou um desvio padrão e desvio quadrático médio de 0,062m e 0,101m, respectivamente. O fator que gerou menor influência nessa comparação foi o valor de densidade adotado.

9 CONCLUSÃO

Foram determinados 24 modelos geoidais gravimétricos para o Distrito Federal, através da técnica RCR, que considera informações de longo, médio e curto comprimento de onda. Esses modelos foram gerados através da alternância de diferentes MGGs, MDTs e densidades. Para verificar a precisão dos modelos gerados, foram utilizados 26 pontos de RN/GNSS, que permitiram a análise estatística dos modelos geoidais.

O modelo geoidal gravimétrico que apresentou a melhor precisão, denominado I3G2, foi desenvolvido utilizando dados do Modelo de Geopotencial Global GECO, em grau e ordem 250; Modelo Digital de Terreno SRTM 1 arco-segundo; e densidade obtida através da inversão de dados gravimétricos terrestres. Esse modelo resultou em uma melhor aderência às RNs utilizadas, em relação ao MAPGEO2015, modelo geoidal oficial brasileiro, que também foi analisado estatisticamente. Isso mostra que o modelo determinado nesse trabalho apresenta precisão compatível com os modelos geoidais mais utilizados e com alturas geoidais determinadas através de nivelamento geométrico apoiado por posicionamento GNSS.

Também foi realizada uma comparação entre os modelos geoidais gerados com dados que apresentam a maior similaridade com os dados utilizados na determinação do modelo I3G2, a fim de analisar quais fatores mais influenciam na determinação e precisão do modelo geoidal gravimétrico. Essa análise mostrou que a escolha do MDT gerou a maior diferença na precisão do modelo geoidal resultante, e que o fator que causou a menor influência foi o valor de densidade.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Andrade, R. J. O. Determinação do Desvio da Vertical empregando observáveis da Topografia Clássica e do Posicionamento por Satélites. 2008. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Universidade Federal de Viçosa, 2008.

Ayhan, M. E. 1993. Geoid determination in Turkey. *Bulletin Geodesique*, 67, pp.10–22.

Blitzkow, D.; Matos, A. C. O. C.; Fairhead, J. D.; Pacino, M. C.; Lobianco, M. C. B.; Campos, I. O. 2012. The progress of the geoid model computation for South America under GRACE and EGM2008 models. *International Association of Geodesy Symposia*, 136, pp.893-899.

Botai, C. M.; COMBRINCK, L. Global geopotential models from Satellite Laser Ranging data with geophysical applications: A review. *South African Journal of Science*, v. 108, n. 3, 10 p., 2012.

Featherstone, W. E.; Dentith, M. C. 1997. A Geodetic Approach to Gravity Reduction for Geophysics. *Computers and Geosciences*, 23(10), pp.1063-1070.

Förste C.; Bruinsma S. L.; Abrikosov, O.; Lemoine, J. M.; Schaller, T.; Götze, H. J.; Ebbing, J.; Marty, J. C.; Flechtner, F.; Balmino, G.; Biancale, R. 2014. EIGEN-6C4 The latest combined global gravity field model including GOCE data up to degree and order 2190 of GFZ Potsdam and GRGS Toulouse. 5th GOCE User Workshop, Paris, 25-28 November 2014.

Gemael, C. Introdução à Geodésia Física. Curitiba: Ed. UFPR, 1999. 304p. (Didática; n.43)

Gilardoni, M.; Reguzzoni, M.; Sampietro, D. 2016. GECO: a global gravity model by locally combining GOCE data and EGM2008. *Studia Geophysica et Geodaetica* 60, 228–247

Guimarães, G. N.; Matos A. C. O. C.; Blitzkow, D. 2012. An evaluation of recent GOCE geopotential models in Brazil. *Journal of Geodetic Science* 2(2), 144–155.

Heiskanen, W. A.; Moritz, H. 1967. Physical geodesy. San Francisco and London: W. H. Freeman and Company, 364 p.

Hinze, W. J.; Von Frese, R. R. B.; Saad, A. H. 2013. Gravity and Magnetic-Exploration Principles, Practices, and Applications. Cambridge University Press, 512 p.

Hofmann-Wellenhof, B.; Moritz, H. 2005. Physical Geodesy. Springer, Springer-Verlag Wien, 2nd ed., 404p.

Kirby, J. F.; Featherstone, W. E. 1997. A study of zero- and first-degree terms in geopotential models over Australia. *Geomatics Research Australasia* 66, 93–108.

Kuroishi, Y. 1995. Precise determination of geoid in the vicinity of Japan. *Bulletin of the Geographical Survey Institute* 41, 1–94.

Marotta, G. S.. GravTool – Pacote para cálculo de modelo geoidal gravimétrico. 2015.

Marotta, G.; Vidotti, R. M. 2017. Developement of a Local Geoid Model at the Federal District, Brazil, Patch by the Remove-Compute-Restore Technique, Following Helmert's Condensation Method, *Bulletin of Geodetic Sciences*, vol. 23 (3), 520-538.

Moritz, H. Advanced Physical Geodesy. Karlsruhe: Wichmann, 1980.

Moritz, H., 1984. Geodetic Reference System 1980. *Buletin géodésique* 58 (3), 388–398.

Nabighian, M. N.; Ander, M. E.; Grauch, V. J. S.; Hansen, R. O.; LaFehr, T. R.; Li, Y.; Pearson, W. C.; Peirce, J. W.; Phillips, J. D.; Ruder, M. E. 2005. Historical development of the gravity method in exploration. *Geophysics*, 70(6): 63-89.

Parasnis, D. S., 1952. A study od rock density in English Midlands. Mon. Not. R. Astron. Soc. Geophys. Suppl., 6, 252-271.

Parasnis. D. S., 1979. Principles of applied geophysics. Third edition, Chapman and Hall, London, 275p.

Pavlis, N. K.; Holmes, S. A.; Kenyon, S. C.; Factor J. K. 2012. The developement and evaluation of the Earth Gravitational Model 2008 (EGM2008). *Journal of Geophysical Research* , vol 117, B04406.

Petit, G.; Luzum, B. 2010. IERS Conventions (2010). IERS Technical Note No. 36. Verlag des Bundesamts für Kartographie und Geodäsie.

Sansò, F.; Sideris, M. G. 2013. Geoid determination – theory and methods. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1st ed, 734 p.

Schwarz, K. P.; Sideris, M. G.; Forsberg, R. 1990. The use of FFT techniques in physical geodesy. *Geophysical Journal International* 100, 485–514.

Sideris, M. G.; She, B. B. 1995. A new, high resolution geoid for Canadá and part of the U. S. By 1D-FFT method, *Bulletin Géodésique* 69, 92–108.

Silva, D. V. R. Determinação de um modelo geoidal local para o Distrito Federal. 2017. Dissertação (Mestrado em Geociências Aplicadas) – Universidade Federal de Brasília, 2017.

Smith, D. A. 1998. There is no such thing as “The” EGM96 geoid: Subtle points on the use of a global geopotential model. IGeS Bulletin No. 8, International Geoid Service, Milan, Italy, 17–28.

Telford, W. M.; Geldart, L. P.; Sheriff, R. E. 1990. Applied Geophysics 2nd ed. Cambridge University Press, 744p.

Torge, W. 1991. Geodesy. Second Edition, de Gruyter, Berlin, 264p.

Torge, W. 2001. Geodesy. Third Edition, de Gruyter, Berlin, 432p.

Vaníček, P.; Kleusberg, A. 1987. The Canadian geoid - Stokesian approach. *Manuscripta Geodaetica* 12, 86-98.

Wichiencharoen, C. 1982. The indirect effects on the computation of geoid undulations. Report No. 336 Dept. of Geodetic Science and Surveying, The Ohio State University, Columbus, 96p.

Wong, L.; Gore, R. 1969. Accuracy of Geoid Heights from Modified Stokes Kernels. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* 18, 81–91.

Yamamoto, A. 1999. Estimating the Optimum Reduction Density for Gravity Anomaly : A Theoretical Overview. *Journal of Faculty of Science, Hokkaido University. Series 7, Geophysics*, 11(3), 577-599.

Zhang, K.; Featherstone, W.; Stewart, M.; Dodson, A. 1998. A new gravimetric geoid for Austria. In: Second Continental Workshop on the Geoid, Reports of the Finnish Geodetic Institute, 225–233.

APÊNDICE

1- Amostras de rocha coletadas no Distrito Federal e respectivas densidades.

Nº	Amostra	Latitude (°)	Longitude (°)	Massa (g)	Volume (cm³)	Densidade (g/cm³)
1		-15,802024	-47,792595	27,74	12,00	2,3117
2		-15,794088	-47,781586	36,44	15,50	2,3510
3		-15,735875	-47,684192	20,24	10,50	1,9276
4		-15,525952	-47,758063	26,07	10,20	2,5559
5		-15,524288	-47,792738	23,45	9,30	2,5215
6		-15,523502	-47,810966	22,52	9,10	2,4747
7		-15,554473	-47,839142	19,61	7,80	2,5141

8		-15,579669	-47,854117	24,66	9,90	2,4909
9		-15,594820	-47,685291	21,23	10,60	2,0028
10		-15,552548	-47,951474	18,74	10,00	1,8740
11		-15,484895	-48,037813	25,89	12,10	2,1397
12a		-15,715371	-47,899450	31,24	14,00	2,2314
12b		-15,715371	-47,899450	14,08	6,10	2,3082
13		-15,624404	-47,857175	27,23	14,80	1,8399
14		-15,524759	-47,836333	26,63	10,90	2,4431
15		-15,508062	-47,890856	22,29	14,00	1,5921

16		-15,515689	-47,893316	33,56	16,50	2,0339
17		-15,510906	-47,909827	22,51	12,00	1,8758
18		-15,525293	-48,153825	21,22	10,50	2,0210
19a		-15,572734	-48,193599	56,69	28,00	2,0246
19b		-15,572734	-48,193599	37,31	17,80	2,0961
20		-16,045659	-48,023887	24,65	11,80	2,0890
21		-16,038674	-48,055768	33,43	15,70	2,1293
22		-15,707899	-47,892761	44,66	20,10	2,2219
23		-15,700084	-47,882314	30,71	14,20	2,1627

24		-15,691355	-47,860891	20,8	9,90	2,1010
25		-15,621830	-47,717578	30,73	13,00	2,3638
26		-15,585880	-47,571696	18,48	8,00	2,3100
27		-15,581878	-47,518349	24,11	11,30	2,1336
28		-15,582991	-47,451269	25,7	10,80	2,3796
30		-15,959618	-47,636550	16,3	7,20	2,2639
31		-15,986075	-47,818068	21,81	11,10	1,9649
32		-16,014908	-48,139997	19,3	9,50	2,0316
33		-16,031844	-48,235878	10,14	5,00	2,0280

34		-15,788864	-48,220866	20	11,20	1,7857
35		-15,788577	-48,227043	19,83	9,30	2,1323
36		-15,831641	-47,554080	37,66	18,30	2,0579