

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

INSTITUTO DE FÍSICA

GABRIEL DOS SANTOS BOMFIM

**ASPECTOS DA PROPAGAÇÃO DE RAIOS DE LUZ EM
ESPAÇOS-TEMPOS CURVOS: SOMBRA DE
BURACOS NEGROS E ANÉIS DE FÓTONS.**

BRASÍLIA

21 DE NOVEMBRO DE 2025

“Um dragão que cospe fogo pelas ventas vive na minha garagem.”

Carl Sagan

Gabriel dos Santos Bomfim

**Aspectos da propagação de raios de luz em
espaços-tempos curvos: sombra de buracos negros e
anéis de fótons.**

Trabalho de conclusão de curso apresentado
ao Instituto de Física da Universidade de
Brasília como parte dos requisitos necessários
à obtenção do título de Bacharel em Física.

Orientador: Caio C. Holanda Ribeiro

Universidade de Brasília – UnB

Instituto de Física

Brasília

21 de novembro de 2025

Resumo

Este trabalho tem como objetivo analisar, no contexto da Relatividade Geral, a formação da sombra de buracos negros a partir do estudo de geodésicas nulas na métrica de Schwarzschild. A motivação central surge do artigo *Black Hole Shadows, Photon Rings, and Lensing Rings* (2019), de Gralla, Holz e Wald, que propõe uma revisão conceitual da interpretação da região escura observada em imagens como as produzidas pelo projeto Event Horizon Telescope (EHT). O estudo indica que a sombra observada por um observador distante pode não coincidir exatamente com a curva crítica de fótons, principalmente em contextos físicos mais realistas onde há a presença de um disco de acreção.

Para alcançar os objetivos propostos, o trabalho é estruturado em duas etapas. A primeira consiste na fundamentação teórica dos principais conceitos da Relatividade Geral, incluindo a solução de Schwarzschild e os aspectos geométricos associados a espaços-tempo curvos. A segunda etapa é dedicada à análise detalhada das trajetórias de fótons em torno de buracos negros clássicos, relacionando seus parâmetros de impacto às diferentes estruturas observadas. A análise visa contribuir para aumentar a capacidade de interpretar a imagem de buracos negros, destacando a importância das fontes de luz no contorno observado e da métrica utilizada na modelagem.

Palavras-chave: Buracos negros; Relatividade Geral; Sombra de buraco negro; Métrica de Schwarzschild; Métrica de Kerr; Geodésicas nulas; Parâmetro de impacto; Anel de fótons; Disco de acreção.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Representação da solução homogênea. Fonte: Das (DAS, 2011).	34
Figura 2 – Curva resultante da solução aproximada para a trajetória do fóton.	34
Figura 3 – Gráficos da função $f(u)$ para diferentes parâmetros de impacto.	37
Figura 4 – Solução para $\phi_{0\pm}$, com $M = 1$	38
Figura 5 – Gráfico em coordenadas polares para $u(\phi)$ e $r(\phi)$	39
Figura 6 – Gráfico em coordenadas polares para $u(\phi)$ e $r(\phi)$.	40
Figura 7 – Dependência entre b e o parâmetro P .	42
Figura 8 – $u(\chi)$ para $P = 4M$ e $M = 1$.	42
Figura 9 – Deflexão da luz em função do parâmetro de impacto.	45
Figura 10 – Trajetória do fóton para $P = 3M + 10^{-4}$, $M = 1$	45
Figura 11 – Trajetória do fóton além de $r = P$.	46
Figura 12 – Trajetórias no intervalo $[u_3, +\infty)$.	48
Figura 13 – $\sin^2 \psi$ em função de γ .	50
Figura 14 – $\sin^2 \psi$ para $a = (1/3 + 10^{-4})M$, $M = 1$.	51
Figura 15 – parâmetro de impacto em função de a , $M = 1$.	52
Figura 16 – $r(\phi)$ para $a = (1/3 + 10^{-6})M$, $M = 1$	52
Figura 17 – $r(\phi)$ para $a = M$, $M = 1$	53
Figura 18 – Comparação entre solução exata e aproximação para ϕ_∞	55
Figura 19 – Segunda comparação entre solução exata e aproximação para ϕ_∞	55
Figura 20 – Caso 3 para $\phi = 0$ no infinito.	56
Figura 21 – Visualização para fonte isotrópica de luz.	57
Figura 22 – Visualização para tela infinita de fundo.	58
Figura 23 – Configuração das simulações: “Face-On View”.	59
Figura 24 – Configuração inicial no espaço de fase.	61
Figura 25 – Configuração no espaço de fase após $\delta\tau$. Fonte: Thorne (THORNE; MISNER; WHEELER, 2000).	62
Figura 26 – Observador captando fótons no ângulo sólido Ω	63
Figura 27 – Volume do momento linear, com direção invertida. Fonte: Thorne (THORNE; MISNER; WHEELER, 2000).	63
Figura 28 – $r_m(b)$ para $m = 1, 2, 3$.	65
Figura 29 – Resultados da simulação de intensidade observada ($I^{obs}(b)/I_{max}^{obs}$) e as respectivas imagens da sombra do buraco negro para diferentes configurações de discos de acreção, determinados por ($I^{em}(r)/I_{max}^{em}$).	66
Figura 30 – Resultados da simulação de intensidade observada ($I^{obs}(b)/I_{max}^{obs}$) e as respectivas imagens da sombra do buraco negro para diferentes configurações de discos de acreção, determinados por ($I^{em}(r)/I_{max}^{em}$).	67

Figura 31 – Resultados da simulação de intensidade observada ($I^{obs}(b)/I_{max}^{obs}$) e as respectivas imagens da sombra do buraco negro para diferentes configurações de discos de acreção, determinados por ($I^{em}(r)/I_{max}^{em}$). 68

Sumário

	Introdução	8
1	OBJETIVOS	11
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	12
2.1	Convenções e comentários preliminares.	12
2.2	Equações de Maxwell na relatividade especial.	12
2.3	Equações de Maxwell na relatividade geral.	15
2.4	Linearização da gravidade	17
2.5	Equação de Einstein	19
2.5.1	Constante cosmológica	22
2.6	Solução de Schwarzschild.	22
2.6.1	Singularidades.	26
2.7	Geodésicas do tipo nulo no espaço-tempo de Schwarzschild.	27
2.7.1	Vetores de Killing	27
2.7.2	Aplicação na métrica de Schwarzschild	30
2.7.3	Órbitas de fótons	31
3	SOLUÇÕES EXATAS PARA TRAJETÓRIAS DE FÓTONS NO ESPAÇO DE SCHWARZSCHILD	35
3.1	Solução radial	35
3.2	Órbitas críticas	36
3.2.1	Caso 2	37
3.2.1.1	Sobre $u_2 \leq u$	39
3.2.2	Caso 3	40
3.2.2.1	Sobre $0 \leq u \leq u_2$	42
3.2.2.2	Sobre $u \geq u_3$	47
3.2.3	Caso 1	47
4	SIMULAÇÕES DE BURACOS NEGROS	56
4.1	Casos Didáticos	57
4.1.1	Casca Esférica	57
4.1.2	Tela Infinita	58
4.2	<i>Toy Model</i> com Disco de Acreção	58
4.2.1	Intensidade de emissão - $I(r)$	59
4.2.2	Redshift gravitacional	64

4.2.3	Simulação do <i>toy model</i>	65
	Conclusão	69
5	AGRADECIMENTOS	70
5.1	Família.	70
5.2	Professores.	70
5.3	Amigos e colegas.	70
	REFERÊNCIAS	71

Introdução

Previstos teoricamente como soluções das equações de campo de Einstein, os buracos negros são regiões do espaço-tempo marcadas por campos gravitacionais tão intensos que nada, nem mesmo a luz, consegue escapar de sua atração a partir de uma certa distância. Essa fronteira é popularmente conhecida como o horizonte de eventos. Buracos negros descritos pelas soluções de vácuo da Relatividade Geral (RG) podem ser descritos como “singularidades físicas”, pontos onde a densidade tende ao infinito, resultantes da concentração de grandes quantidades de massa em volumes extremamente reduzidos.

Inicialmente tratados como soluções matemáticas exóticas, esses objetos surgem a partir da métrica proposta por Karl Schwarzschild em 1916, que descreve o espaço-tempo ao redor de corpos esfericamente simétricos e não rotativos:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (1)$$

Onde $\{r, \theta, \phi\}$ representam, respectivamente, as coordenadas radial, polar e azimutal; G é a constante gravitacional; e M denota a massa do corpo central.

Nesta métrica, existe uma indefinição em $r = 2GM$, inicialmente acompanhada de termos da época, como “corpo invisível” ou “gravidade infinita”. O próprio Einstein, acompanhado de outros físicos de renome como Arthur Eddington, interpretou a solução proposta como um artefato matemático, algo separado da realidade física, onde $r = 2GM$ seria apenas uma singularidade de coordenadas (EINSTEIN, 1939; EDDINGTON, 1923).

Estudos posteriores de físicos como Georges Lemaître mostraram ser possível contornar a singularidade da métrica de Schwarzschild por meio de uma mudança de coordenadas, indicando que a região do problema inicial correspondia a uma fronteira geométrica e não a uma divergência física (LEMAÎTRE, 1931). Outro resultado importante foi obtido em 1931 por Subrahmanyan Chandrasekhar, que, no artigo *The Maximum Mass of Ideal White Dwarfs*, demonstrou que uma anã branca possui uma massa limite, dependente da composição estelar. Acima dessa massa crítica, o colapso gravitacional torna-se inevitável, levando à formação de estrelas de nêutrons ou de objetos ainda mais densos (CHANDRASEKHAR, 1931).

Poucos anos depois, em 1939, o artigo *On Continued Gravitational Contraction*, publicado por J. Robert Oppenheimer e Hartland Snyder, corroborou a descoberta de Chandrasekhar ao demonstrar que, ao esgotar seu combustível nuclear, uma estrela suficientemente massiva pode colapsar sob seu próprio campo gravitacional, dando origem a

uma região do espaço-tempo com velocidade de escape superior à luminar ([OPPENHEIMER; SNYDER, 1939](#)).

Contudo, somente a partir da década de 1960 que o conceito de “buraco negro” passou a ser aceito como uma entidade física real, popularizando-se rapidamente na comunidade científica. Esse período contou com os trabalhos de Stephen Hawking e Roger Penrose, que apresentaram os *teoremas da singularidade*, argumentando que a formação de certas entidades físicas não era apenas possível, mas inevitável. Mais precisamente, a primeira formulação destes teoremas foi dada por Penrose ([PENROSE, 1965](#)), sendo Hawking responsável por complementá-la ao fim da década ([HAWKING, 1967](#)). Oficialmente, a formalização do conceito foi dada no artigo *Introducing the Black Hole*, publicado por Remo Ruffini e John Archibald Wheeler na *Physics Today* em janeiro de 1971 ([RUFFINI; WHEELER, 1971](#)).

Apesar dos sólidos fundamentos teóricos sobre a formação e a inevitabilidade dos buracos negros, apenas recentemente foram obtidas confirmações observacionais diretas. Entre essas evidências, destaca-se o estudo do movimento das estrelas na região central da Via Láctea, com ênfase especial nas observações das órbitas das estrelas próximas a Sagittarius A*, uma intensa fonte de emissão em rádio. Os astrônomos Reinhard Genzel e Andrea Ghez, cujos trabalhos se desenvolveram de forma independente, receberam o Prêmio Nobel de Física de 2020 pelas contribuições fundamentais a esse campo ([GHEZ et al., 2008](#); [GENZEL; EISENHAUER; GILLESSEN, 2010](#)).

O estudo empregou técnicas avançadas de óptica adaptativa, que permitiram a observação detalhada dos movimentos dessas estrelas. Os resultados indicaram que elas orbitam em torno de uma grande quantidade de massa invisível e extremamente concentrada, levando à conclusão inevitável da existência de um buraco negro supermassivo no núcleo da galáxia.

Além disso, à medida que os avanços nas observações astronômicas se consolidavam, outros projetos estavam em desenvolvimento para detectar outro fenômeno previsto pela teoria da Relatividade Geral: as ondas gravitacionais. Essas ondas podem ser geradas por diversos eventos cósmicos, como fusões de estrelas de nêutrons ou buracos negros (sistemas binários, em geral), supernovas, entre outros.

Em 14 de Setembro de 2015, o projeto **LIGO** (*Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory*), ativo desde 2002, registrou seu primeiro sinal após 13 anos de funcionamento. Utilizando o observatório LIGO, a colaboração científica conseguiu detectar pela primeira vez as **ondas gravitacionais**, um fenômeno previsto por Einstein há um século. O sinal histórico foi denominado **GW150914**, e a ausência de contrapartida eletromagnética sugeriu que o sinal foi gerado pela fusão de um sistema binário de buracos negros de massa estelar, ocorrida a cerca de 1.3 bilhão de anos-luz da Terra. Essa detecção, premiada com o Nobel de Física em 2017, não apenas confirmou a existência das ondas

gravitacionais, mas também forneceu a primeira prova direta da existência dos buracos negros como predito pela relatividade geral ([ABBOTT; COLLABORATION; COLLABORATION](#)), 2016).

Enquanto os resultados do LIGO representavam um marco na detecção de buracos negros por meio de ondas gravitacionais, outro avanço histórico, desta vez diretamente observacional, foi alcançado: a obtenção da primeira imagem da sombra de um buraco negro. Esse feito foi alcançado pelo projeto **EHT** (*Event Horizon Telescope*), uma colaboração global que conecta diversos radiotelescópios ao redor do planeta, formando, por meio da técnica de interferometria, um telescópio virtual com resolução angular equivalente à de um telescópio do tamanho da Terra.

Com o objetivo de captar a radiação emitida por buracos negros supermassivos relativamente próximos à Terra, como o buraco negro **Sgr A*** localizado no centro da Via Láctea, o projeto obteve êxito ao observar o centro da galáxia **Messier 87** (M87), onde se localiza um buraco negro com aproximadamente **6,5 bilhões de massas solares**. Assim, em 10 de abril de 2019, o projeto **EHT** revelou ao mundo a primeira imagem já obtida da sombra de um buraco negro, fornecendo uma observação direta e sem precedentes da região próxima ao horizonte de eventos, consolidando uma previsão teórica feita mais de um século antes, em 1916. ([AKIYAMA et al.](#), 2019)

É possível afirmar com segurança que este tema mantém um alto nível de relevância acadêmica há mais de um século e continuará a ser um campo de intensa investigação nos próximos anos. As imagens obtidas em 2019, acompanhadas da expectativa por novas observações em um futuro próximo, destacam o uso das métricas de Schwarzschild e Kerr para a interpretação da geometria do espaço-tempo ao redor dos buracos negros. Nesse contexto, a exploração desses dados oferece um vasto campo de pesquisa em aberto, com potenciais descobertas a serem realizadas.

1 Objetivos

No ano de 2019, pouco após a divulgação da primeira imagem da sombra de um buraco negro obtida pelo *Event Horizon Telescope* (**EHT**), foi publicado por Samuel E. Gralla, Daniel E. Holz e Robert M. Wald o artigo *Black Hole Shadows, Photon Rings, and Lensing Rings*. O trabalho apresenta uma análise detalhada dos conceitos de *shadow*, *photon ring* e *lensing ring*, classificando os fótons que compõem essas estruturas com base em seus parâmetros de impacto, principalmente no contexto da métrica de Schwarzschild. (GRALLA; HOLZ; WALD, 2019)

Tal publicação teve um impacto significativo ao chamar a atenção da comunidade científica para possíveis interpretações equivocadas sombra observada na imagem do **EHT**. Na métrica de Schwarzschild, fótons observados com parâmetro de impacto $b_c \approx 5,2M$ (onde M representa a massa do buraco negro) são aqueles que escaparam de órbitas próximas à curva crítica, região onde os fótons executam órbitas circulares instáveis. Por esse motivo, é comum, em um modelo simplificado, associar o raio da curva crítica ao raio da região escura (sombra) de um buraco negro.

O artigo, no entanto, analisa cenários físicos mais realistas e aponta que a região escura observada nem sempre coincide exatamente com a curva crítica. Isso se deve à natureza da fonte de luz: na prática, a radiação detectada é proveniente de um disco de acreção que envolve o buraco negro. Nesse contexto, o raio da região efetivamente escura em geral discorda com o determinado pela curva crítica, o que pode levar a erros na estimativa da massa de buracos negros com base na observação da sombra.

Tendo em vista esse contexto, a proposta do presente projeto consiste em explorar, com base no artigo citado, esta visualização mais realista de um buraco negro para um observador distante. O espaço considerado será o formulado pela métrica de Schwarzschild, com o objetivo de entender como diferentes classes de fótons contribuem para a imagem observada. O trabalho apresentará toda formulação matemática e teórica necessária para entender e realizar simulações semelhantes as apresentadas no artigo, explorando todas as trajetórias possíveis para fótons nos arredores de buracos negros descarregados e não girantes.

2 Fundamentação Teórica

Para fins deste documento, esta seção aborda resumidamente apenas os requisitos teóricos indispensáveis para a análise de geodésicas do tipo nulo no espaço-tempo de Schwarzschild.

2.1 Convenções e comentários preliminares.

Adota-se a convenção de assinatura da métrica espacialmente positiva, isto é, $(-, +, +, +)$. Utiliza-se a notação de somação de Einstein, segundo a qual se assume a soma implícita sobre índices repetidos em posições inferior e superior. Os índices latinos i, j, k, \dots referem-se exclusivamente às componentes espaciais (variando de 1 a 3), enquanto os índices gregos μ, ν, σ, \dots percorrem todas as coordenadas do espaço-tempo (de 0 a 3). Derivadas parciais são eventualmente representadas de forma compacta como ∂_μ ou ∂^μ , conforme a posição do índice e a métrica utilizada.

Ao longo do texto, trabalha-se predominantemente com unidades naturais, nas quais a velocidade da luz c é igual a 1. Essa escolha simplifica diversas expressões e evidência a estrutura geométrica da teoria. No entanto, a constante gravitacional G será mantida explícita sempre que sua presença for relevante, a fim de preservar a clareza física de determinadas relações.

Este trabalho não tem como objetivo desenvolver em profundidade os aspectos formais do cálculo tensorial, tampouco os métodos completos de manipulação de tensores. As operações algébricas e diferenciais envolvendo tensores serão utilizadas quando necessárias para o desenvolvimento lógico dos argumentos, sendo apresentadas de forma direta e sem demonstrações detalhadas, exceto nos casos em que tal exposição se mostrar essencial para a compreensão do problema tratado. Assume-se familiaridade prévia com a notação e as operações básicas da álgebra tensorial e da relatividade geral.

2.2 Equações de Maxwell na relatividade especial.

Esta seção se baseia no desenvolvimento feito em Wald ([WALD, 2010](#)) e também em Carroll ([CARROLL, 2019](#)), consultar essas fontes para mais detalhes.

No contexto da Relatividade Especial, em que o espaço-tempo é tratado como uma entidade quadridimensional dotada de métrica pseudo-euclidiana, torna-se necessário reformular diversas leis da física clássica para que sejam manifestamente covariantes sob transformações de Lorentz. Entre essas leis, destacam-se as equações de Maxwell, tanto

por descreverem os fenômenos eletromagnéticos quanto por incorporarem, de maneira natural, a estrutura relativística do espaço-tempo.

Na forma clássica tridimensional, essas equações são:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \rho \quad (2.1)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (2.2)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2.3)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{J} \quad (2.4)$$

Para expressar essas equações de forma compatível com a estrutura da relatividade, introduz-se o **tensor de campo eletromagnético** $F_{\mu\nu}$, um tensor antissimétrico de segunda ordem, definido por:

$$F_{\mu\nu} \equiv \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{com} \quad F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}.$$

Esse tensor reúne, em uma única entidade, os campos elétrico e magnético. A densidade de carga ρ e a densidade de corrente \vec{J} também são reunidas em um quadrivetor corrente:

$$J^\mu = (\rho, J_x, J_y, J_z).$$

Com essas definições, duas das equações de Maxwell, aquelas que envolvem fontes, podem ser condensadas na forma tensorial:

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = J^\mu. \quad (2.5)$$

As equações restantes, que não dependem diretamente da presença de fontes (isto é, as equações homogêneas), decorrem da antissimetria de $F_{\mu\nu}$ e podem ser expressas por meio da identidade:

$$\partial_{[\mu} F_{\nu\sigma]} = 0, \quad (2.6)$$

onde os colchetes indicam antissimetrização sobre os índices.

É importante destacar que a antissimetria do tensor $F_{\mu\nu}$ implica diretamente na equação de continuidade:

$$\partial_\mu \partial_\nu F^{\mu\nu} = \partial_\mu J^\mu = 0, \quad (2.7)$$

garantindo, assim, a conservação da carga elétrica. Além disso, a equação da força de Lorentz pode ser reformulada utilizando o tensor $F^{\mu\nu}$:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = \eta_{\nu\sigma} \frac{q}{m} F^{\mu\nu} \frac{dx^\sigma}{d\tau}. \quad (2.8)$$

De forma análoga ao quadrivetor corrente J^μ , define-se o quadripotencial A^μ como:

$$A^\mu = (\phi, A_x, A_y, A_z), \quad (2.9)$$

em que ϕ representa o potencial escalar, e A^i as componentes do potencial vetor. Em termos do quadripotencial, o tensor $F_{\mu\nu}$ pode ser escrito como:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \implies \eta^{\sigma\nu} \partial_\sigma (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) = J_\mu. \quad (2.10)$$

Esta equação é manifestamente invariante sob a transformação de gauge:

$$A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \psi, \quad (2.11)$$

onde ψ é um campo escalar arbitrário. Portanto, é possível impor a condição de gauge de Lorenz, definida por:

$$\partial^\mu \partial_\mu \psi = -\partial^\mu A_\mu \implies \partial^\mu A'_\mu = 0. \quad (2.12)$$

Substituindo essa condição na equação 2.10, obtém-se:

$$\partial^\nu \partial_\nu A_\mu = -J_\mu. \quad (2.13)$$

Considerando o caso sem fontes, $J^\mu = 0$, busca-se uma solução na forma de onda plana:

$$A_\mu = C_\mu e^{iS}, \quad (2.14)$$

onde C_μ é uma amplitude constante e S é a chamada **fase**. Sob o gauge de Lorenz,

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \implies C^\mu \partial_\mu S = 0. \quad (2.15)$$

Além disso, ao substituir essa solução na equação 2.13, obtém-se:

$$C^\mu e^{iS} (i\partial^\nu \partial_\nu S - \partial^\nu S \partial_\nu S) = 0, \quad (2.16)$$

o que implica, por fim, nas seguintes condições:

$$\partial^\nu \partial_\nu S = 0, \quad (2.17)$$

$$\partial^\nu S \partial_\nu S = 0. \quad (2.18)$$

Essas condições serão essenciais posteriormente, para discutir **geodésicas do tipo nulo**, pois o termo $\partial_\nu S$ é identificado como o **vetor de onda**, indicando a direção de propagação do sinal.

2.3 Equações de Maxwell na relatividade geral.

Esta seção se baseia no desenvolvimento feito em Wald (WALD, 2010) e também em Carroll (CARROLL, 2019), consultar essas fontes para mais detalhes.

A abordagem mais direta e funcional, para generalizar leis da física formuladas na relatividade especial, consiste em reescrever uma lei válida em espaços planos numa forma tensorial, e atestar sua validade em espaços curvos.

Para aplicar isto nas equações de Maxwell, substitui-se a derivada parcial, responsável por termos não tensoriais em transformações, pela derivada covariante:

$$\nabla_\nu F^{\mu\nu} = J^\mu \quad (2.19)$$

$$\nabla_{[\sigma} F_{\mu\nu]} = 0 \quad (2.20)$$

O mesmo é feito na equação 2.10, que define o tensor de força do campo em termos do quadripotencial:

$$F_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu, \quad (2.21)$$

Novamente, esta permanece invariante sob a transformação $A'_\mu = A_\mu + \nabla_\mu \psi$, com ψ sendo um escalar arbitrário. Substituindo essa definição na equação 2.19, obtém-se:

$$\nabla^\nu F_{\mu\nu} = \nabla^\nu \nabla_\mu A_\nu - \nabla^\nu \nabla_\nu A_\mu. \quad (2.22)$$

Escolher ψ tal que:

$$\nabla^\nu \nabla_\nu \psi = -\nabla^\nu A_\nu \implies \nabla^\nu A'_\nu = 0, \quad (2.23)$$

resulta em:

$$R^\rho_\mu A_\rho - \nabla^\nu \nabla_\nu A_\mu = J_\mu, \quad (2.24)$$

Ao comparar esse resultado com aquele obtido na geometria de Minkowski, a presença do tensor de Ricci torna evidente a curvatura do espaço-tempo. Caso fossem apenas substituídas as derivadas parciais por covariantes em 2.13, o termo envolvendo o tensor de Ricci não surgiria, o que ressalta a necessidade de cautela na aplicação desse procedimento.

Uma forma eficaz de verificar a validade da generalização (além da confrontação com dados experimentais) é assegurar que a equação obtida se reduza ao caso plano na ausência de curvatura. No caso da equação 2.24, além de possuir esse limite, ela implica a conservação da corrente: $\nabla^\mu J_\mu = 0$, o que reforça sua consistência.

Considerando que de forma geral, a escala de variação do campo eletromagnético é muito menor que a da curvatura do espaço, é razoável esperar uma solução próxima àquela obtida em espaço plano, visto que localmente (na escala de variação do campo) o espaço-tempo se assemelha ao de Minkowski. Nessas condições, a solução tem o mesmo formato da equação 2.14:

$$A_\mu = C_\mu e^{iS}, \quad (2.25)$$

Porém a amplitude C_μ não é constante, e varia lentamente em comparação à frequência da onda. Substituindo essa forma na equação 2.24, obtém-se:

$$R^\nu_\mu C_\nu e^{iS} + 2ie^{iS} \nabla_\nu C_\mu e^{iS} + C_\mu e^{iS} (i \nabla^\nu \nabla_\nu S - \nabla^\nu S \nabla_\nu S) = 0 \quad (2.26)$$

Desprezando as derivadas de C_μ e o termo com o tensor de Ricci por serem pequenos em relação à $\nabla_\mu S$, segue-se:

$$\nabla^\nu \nabla_\nu S = 0 \quad (2.27)$$

$$\nabla^\nu S \nabla_\nu S = 0 \quad (2.28)$$

A partir dos resultados desta aproximação, conhecida como *geometrical optics approximation*, é possível retomar a discussão sobre a equação da geodésica para curvas do tipo nulo. Dado o comportamento da derivada covariante sobre escalares, tal aproximação sugere que:

$$\partial^\nu S \partial_\nu S = 0, \quad (2.29)$$

é equação válida inclusive em espaços curvos. Nessa expressão, identifica-se $\partial_\nu S \equiv k_\nu$ como o vetor de onda, indicando a direção de propagação de sinais eletromagnéticos.

Considerando a compatibilidade da derivada covariante com a métrica, tem-se:

$$\nabla_\mu (g^{\sigma\nu} k_\sigma k_\nu) = 0 \implies g^{\sigma\nu} k_\sigma \nabla_\mu k_\nu = 0. \quad (2.30)$$

Além disso, como a derivada covariante comuta quando aplicada a escalares,

$$\nabla_\mu \nabla_\nu S = \nabla_\nu \nabla_\mu S, \quad (2.31)$$

segue-se diretamente que:

$$k^\nu \nabla_\nu k^\mu = 0, \quad (2.32)$$

Logo, esta aproximação sugere que a luz percorre geodésicas do tipo nulo.

2.4 Linearização da gravidade

Esta seção se baseia no desenvolvimento feito em Carroll ([CARROLL, 2019](#)), e também em Das ([DAS, 2011](#)), consultar essas fontes para mais detalhes.

Como a descrição newtoniana da gravidade apresenta bons resultados no limite não relativístico, é essencial que uma nova formulação da gravitação, baseada na geometria do espaço-tempo, recupere tal comportamento em condições apropriadas. Esse regime de validade é denominado *limite newtoniano*, definido pelas seguintes condições:

- Os corpos envolvidos movem-se com velocidades baixas ($v \ll c$);
- O campo gravitacional é fraco;
- O campo gravitacional é estático.

Considerando o parâmetro afim como o tempo próprio τ , a condição de baixas velocidades implica:

$$dx^i \ll dt \implies \frac{dx^i}{d\tau} \ll \frac{dt}{d\tau}. \quad (2.33)$$

Aplicando esse limite à equação geodésica, obtém-se:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\rho\sigma}^\mu \frac{dx^\rho}{d\tau} \frac{dx^\sigma}{d\tau} = 0 \longrightarrow \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{00}^\mu \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 = 0. \quad (2.34)$$

Adicionalmente, considerando a definição do símbolo de Christoffel e a condição de campo estático, tem-se:

$$\begin{aligned}\Gamma_{00}^{\mu} &= \frac{1}{2}g^{\mu\sigma}(\partial_0 g_{\sigma 0} + \partial_0 g_{0\sigma} - \partial_{\sigma} g_{00}) \\ &= -\frac{1}{2}g^{\mu\sigma}\partial_{\sigma} g_{00}.\end{aligned}\tag{2.35}$$

A condição de campo gravitacional fraco permite representar a métrica como uma pequena perturbação da métrica de Minkowski (em sua forma canônica):

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu},\tag{2.36}$$

com $|h_{\mu\nu}| \ll 1$. Define-se, então, sua inversa como:

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu} \implies g^{\mu\nu}g_{\nu\sigma} = \delta_{\sigma}^{\mu} + \mathcal{O}(h^2),\tag{2.37}$$

onde $h^{\mu\nu} = \eta^{\nu\sigma}\eta^{\mu\rho}h_{\sigma\rho}$, e os termos de segunda ordem em h são desprezados. Substituindo esses resultados na equação (2.34), obtém-se:

$$\frac{d^2 x^{\mu}}{d\tau^2} = \frac{1}{2}\eta^{\mu\sigma}\partial_{\sigma} h_{00} \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2.\tag{2.38}$$

Para $\mu = 0$, a equação se reduz a:

$$\frac{d^2 t}{d\tau^2} = 0 \implies \frac{dt}{d\tau} = \text{constante}.\tag{2.39}$$

Já para as componentes espaciais ($\mu = i$), como $\eta^i_{\sigma} = \delta_{\sigma}^i$, a equação resulta:

$$\frac{d^2 x^i}{d\tau^2} = \frac{1}{2}\partial_i h_{00} \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2.\tag{2.40}$$

Essa equação revela uma correspondência interessante ao se compará-la com a equação do potencial gravitacional Φ da teoria clássica:

$$\vec{a} = -\nabla\Phi \implies h_{00} = -2\Phi.\tag{2.41}$$

Portanto, a nova teoria da gravitação reproduz corretamente o limite newtoniano quando consideradas as condições apropriadas. Este resultado implica, por fim, que:

$$g_{00} = -1 - 2\Phi.\tag{2.42}$$

2.5 Equação de Einstein

Esta seção se baseia no desenvolvimento feito em Das (DAS, 2011), e também em Carroll (CARROLL, 2019), consultar essas fontes para mais detalhes.

É necessário formular uma equação que relacione a geometria do espaço-tempo com a distribuição de matéria. Para isso, considera-se o caso clássico da gravitação: a equação de Poisson para o potencial gravitacional Newtoniano,

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho, \quad (2.43)$$

onde ρ representa a densidade de massa. Para aplicar o método discutido anteriormente, é preciso reescrever essa equação de forma covariante e verificar sua validade nesse novo contexto. O lado direito da equação envolve a densidade de massa, indicando que uma versão covariante deve conter o tensor energia-momento $T^{\mu\nu}$. Além disso, a linearização da gravidade permite escrever:

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi \rho \longrightarrow \nabla^2 g_{00} = 4\pi T_{00}, \quad (2.44)$$

com $T_{00} = \rho$ interpretado como densidade de energia.

Esse resultado sugere que a equação tensorial procurada deve conter derivadas da métrica (até segunda ordem), sendo proporcional ao tensor energia-momento. Um tensor construído a partir da métrica e de suas derivadas de primeira e segunda ordem é o tensor de curvatura de Riemann:

$$R^\sigma_{\rho\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\sigma_{\nu\rho} - \partial_\nu \Gamma^\sigma_{\mu\rho} + \Gamma^\sigma_{\mu\lambda} \Gamma^\lambda_{\nu\rho} - \Gamma^\sigma_{\nu\lambda} \Gamma^\lambda_{\mu\rho}. \quad (2.45)$$

Para compatibilidade entre os índices, contrai-se esse tensor obtendo o tensor de Ricci. A simetria dos tensores $R_{\mu\nu}$ e $T^{\mu\nu}$ motiva a seguinte proposta inicial:

$$R^{\mu\nu} = \alpha T^{\mu\nu}. \quad (2.46)$$

De fato, essa foi a primeira equação sugerida por Einstein. No entanto, a conservação da energia e do momento exige que $\nabla_\nu R^{\mu\nu} = 0$, o que, em geral, não se sustenta. Um tensor, simétrico, construído com o tensor de Ricci e cuja divergência covariante é nula é o **tensor de Einstein**:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \quad \text{com} \quad \nabla^\mu G_{\mu\nu} = 0. \quad (2.47)$$

Dessa forma, propõe-se uma nova equação para relacionar geometria com a matéria:

$$G_{\mu\nu} = \alpha T_{\mu\nu}, \quad (2.48)$$

restando determinar o fator de proporcionalidade α e verificar se essa equação reproduz a gravitação Newtoniana no limite apropriado.

A partir da equação 2.48, tem-se:

$$R = -\alpha T^\mu{}_\mu = -\alpha T, \quad (2.49)$$

o que permite reescrever 2.48 como:

$$R^{\mu\nu} = \alpha \left(T^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} T \right), \quad (2.50)$$

uma forma mais conveniente para realizar a comparação com a equação de Poisson.

No limite Newtoniano, considerando um fluido composto por corpos massivos, em baixa velocidade e com interação interna desprezível, utiliza-se o tensor energia-momento da “poeira”:

$$T^{\mu\nu} = \rho \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}. \quad (2.51)$$

No referencial de repouso do fluido:

$$\begin{aligned} T^{00} &= \rho, \\ T^{i\mu} &= 0, \\ T &= g_{\mu\nu} T^{\mu\nu} = -(1 + 2\Phi)\rho \approx \rho. \end{aligned} \quad (2.52)$$

Na última linha, assume-se o regime de perturbações fracas, $|h_{00}| \ll 1$. No mesmo limite, o tensor de Riemann se reduz a:

$$R^\sigma{}_{\rho\mu\nu} \simeq \partial_\mu \Gamma^\sigma_{\nu\rho} - \partial_\nu \Gamma^\sigma_{\mu\rho}, \quad (2.53)$$

visto que os termos quadráticos em Γ são de ordem $O^2(h)$. A contração fornece o tensor de Ricci:

$$R_{\rho\nu} = \partial_\sigma \Gamma^\sigma_{\nu\rho} - \partial_\nu \Gamma^\sigma_{\sigma\rho}. \quad (2.54)$$

Como apenas $T_{00} \neq 0$, considera-se:

$$R_{00} = \partial_\sigma \Gamma^\sigma_{00} - \partial_0 \Gamma^\sigma_{\sigma 0}. \quad (2.55)$$

O segundo termo se anula devido à hipótese de campo estático. Desenvolvendo o primeiro termo:

$$\begin{aligned}
 R_{00} &= \partial_i \left[\frac{1}{2} g^{i\mu} (\partial_0 g_{0\mu} + \partial_0 g_{\mu 0} - \partial_\mu g_{00}) \right] \\
 &= -\partial_i \left(\frac{1}{2} g^{ij} \partial_j g_{00} \right) \\
 &= -\frac{1}{2} \partial^i \partial_i g_{00}.
 \end{aligned} \tag{2.56}$$

Substituindo $g_{00} = -(1 + 2\Phi)$, obtém-se:

$$R_{00} = \partial^i \partial_i \Phi = \nabla^2 \Phi. \tag{2.57}$$

Considerando:

$$\begin{aligned}
 R^{00} &= g^{0\sigma} g^{0\rho} R_{\sigma\rho} \\
 &= [\eta^{0\sigma} \eta^{0\rho} - 2\eta^{0\sigma} h^{0\rho} + O^2(h)] R_{\sigma\rho} \\
 &\simeq R_{00},
 \end{aligned} \tag{2.58}$$

pode-se substituir o resultado 2.57 em 2.50, obtendo:

$$\begin{aligned}
 \nabla^2 \Phi &= \alpha \left(\rho - \frac{1}{2} (1 - 2\Phi) \rho \right) \\
 &\simeq \frac{\alpha}{2} \rho.
 \end{aligned} \tag{2.59}$$

Comparando com a equação de Poisson 2.43, conclui-se que $\alpha = 8\pi G$, e a equação 2.48 torna-se:

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}, \tag{2.60}$$

ou, equivalentemente,

$$R_{\mu\nu} = 8\pi G \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right). \tag{2.61}$$

Ambas conhecidas como **equação de Einstein**. Na ausência de matéria ($T_{\mu\nu} = 0$), essa equação reduz-se a:

$$R_{\mu\nu} = 0, \tag{2.62}$$

denominada **equação de Einstein no vácuo**, que será base para discussões posteriores.

2.5.1 Constante cosmológica

O tensor de Einstein não é o único construído a partir da métrica e de suas derivadas que possui divergência covariante nula. É existente a liberdade de se realizar a seguinte substituição:

$$G^{\mu\nu} \longrightarrow R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}(R + \Lambda), \quad (2.63)$$

em que Λ é uma constante. Essa modificação mantém a conservação associada a ∇_μ , assim como as demais propriedades desejadas.

A constante Λ , chamada de **constante cosmológica**, tem relevância histórica e pode ser interpretada como uma forma de energia do vácuo, ou uma força gravitacional constante que atua uniformemente sobre a matéria. Foi introduzida originalmente por Einstein, com o objetivo de descrever um universo estático, em concordância com as observações astronômicas disponíveis à época.

2.6 Solução de Schwarzschild.

Esta seção se baseia no desenvolvimento feito em Das ([DAS, 2011](#)), e também em Carroll ([CARROLL, 2019](#)), consultar essas fontes para mais detalhes.

Uma das aplicações mais diretas, e certamente mais influentes, da equação de Einstein está na determinação da geometria do espaço-tempo ao redor de uma fonte de massa esfericamente simétrica e estática. Esta solução, obtida inicialmente por Karl Schwarzschild, é fundamental para o estudo de buracos negros.

Ao considerar a equação e a definição do tensor de curvatura, torna-se evidente que se trata de uma equação diferencial altamente complexa, cuja resolução requer encontrar a métrica $g_{\mu\nu}$ satisfazendo uma série de condições não lineares. Essa não linearidade implica que, em geral, não se pode obter novas soluções pela simples combinação de soluções conhecidas, dificultando substancialmente o processo de resolução.

No entanto, a imposição de simetrias deste caso, permite uma considerável simplificação do problema. Tais simetrias restringem significativamente a forma geral da métrica admissível, viabilizando a obtenção de uma solução analítica. É esse o caminho trilhado na derivação da solução de Schwarzschild, a qual será explorada a seguir.

A forma mais direta de explorar as simetrias do problema considerado é por meio do elemento de linha ds^2 . Dado que a fonte gravitacional é estática, os componentes da métrica não podem depender da coordenada temporal. Além disso, a simetria esférica impõe que a única dependência admissível seja na coordenada radial r .

Na geometria de Minkowski, expressa em coordenadas esféricas, o elemento de linha é dado por:

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (2.64)$$

No presente caso, observa-se uma estrutura semelhante. Termos lineares em dt (como $dt dx^i$) não devem aparecer, pois uma métrica estática deve ser invariante sob reversão temporal ($t \rightarrow -t$). Da mesma forma, a simetria esférica exclui a presença de termos lineares em $d\theta$ e $d\phi$, uma vez que o espaço-tempo não pode depender da direção angular. Assim, espera-se que a métrica assuma a forma:

$$ds^2 = -A(r)dt^2 + B(r)dr^2 + r^2 [C(r)d\theta^2 + D(r)\sin^2\theta d\phi^2] \quad (2.65)$$

Considerando ds como um comprimento infinitesimal, pode-se impor restrições adicionais sobre os componentes angulares da métrica. Em um instante de tempo fixo ($dt = 0$), no polo norte de uma casca esférica de raio r ($dr = 0$), tem-se que o arco $rd\theta = \epsilon$ leva a:

$$ds^2 = C(r)\epsilon^2. \quad (2.66)$$

Por outro lado, sobre a linha equatorial, onde $\theta = \pi/2$ e $d\theta = 0$, mantendo-se também $dt = dr = 0$, um arco $rd\phi = \epsilon$ leva a:

$$ds^2 = D(r)\epsilon^2. \quad (2.67)$$

Contudo, devido à simetria esférica, ambos os comprimentos devem ser iguais, o que implica $C(r) = D(r)$, resultando na forma reduzida:

$$\begin{aligned} ds^2 &= -A(r)dt^2 + B(r)dr^2 + C(r)r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \\ &= -A(r)dt^2 + B(r)dr^2 + C(r)r^2 d\Omega^2. \end{aligned} \quad (2.68)$$

É possível realizar uma última simplificação: a função $C(r)$ pode ser absorvida por uma redefinição da coordenada radial, por meio da transformação $r \rightarrow r' = \sqrt{C(r)} r$. Com isso, tem-se:

$$dr' = \frac{2C(r) + C'(r)r}{2\sqrt{C(r)}} dr, \quad \text{com } C'(r) = \frac{dC}{dr} \quad (2.69)$$

e a métrica assume a forma:

$$ds^2 = -A(r')dt^2 + B(r')(dr')^2 + (r')^2 d\Omega^2 \quad (2.70)$$

Essa é a chamada *forma geral do elemento de linha de Schwarzschild*, caracterizada por duas funções desconhecidas $A(r)$ e $B(r)$. Redefinindo $r' \rightarrow r$, os componentes da métrica podem ser identificados como:

$$\begin{aligned} g_{00} &= g_{tt} = -A(r) \\ g_{11} &= g_{rr} = B(r) \\ g_{22} &= g_{\theta\theta} = r^2 \\ g_{33} &= g_{\phi\phi} = r^2 \sin^2(\theta) \end{aligned} \quad (2.71)$$

Na região do espaço-tempo onde não há matéria, ou seja, no vácuo, é possível determinar as funções $A(r)$ e $B(r)$ a partir da equação de Einstein no vácuo:

$$R_{\mu\nu} = 0 \quad (2.72)$$

com a condição de contorno de que, no infinito, a métrica (2.70) deve tender à métrica de Minkowski. Para isso, é necessário calcular os símbolos de Christoffel. A seguir, apresentam-se apenas os componentes não nulos:

$$\begin{aligned} \Gamma_{01}^0 &= \Gamma_{10}^0 = \frac{A'(r)}{2A(r)} \quad , \quad \Gamma_{00}^1 = \frac{A'(r)}{2B(r)}, \\ \Gamma_{22}^1 &= -\frac{r}{B(r)} \quad , \quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{r}, \\ \Gamma_{11}^1 &= \frac{B'(r)}{2B(r)} \quad , \quad \Gamma_{13}^3 = \Gamma_{31}^3 = \frac{1}{r}, \\ \Gamma_{33}^1 &= -\frac{r \sin^2 \theta}{B(r)} \quad , \quad \Gamma_{33}^2 = -\sin \theta \cos \theta, \\ \Gamma_{23}^3 &= \Gamma_{32}^3 = \cot \theta \end{aligned} \quad (2.73)$$

Com os símbolos acima, é possível calcular as componentes do tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$. Considerando as equações R_{00} , R_{11} e R_{22} :

$$\frac{A''(r)}{2B(r)} - \frac{A'(r)}{4B(r)} \left(\frac{A'(r)}{A(r)} + \frac{B'(r)}{B(r)} \right) + \frac{A'(r)}{rB(r)} = 0 \quad (2.74)$$

$$\frac{A''(r)}{2A(r)} - \frac{A'(r)}{4A(r)} \left(\frac{A'(r)}{A(r)} + \frac{B'(r)}{B(r)} \right) + \frac{B'(r)}{rB(r)} = 0 \quad (2.75)$$

$$\frac{1}{B(r)} + \frac{r}{2B(r)} \left(\frac{A'(r)}{A(r)} - \frac{B'(r)}{B(r)} \right) - 1 = 0 \quad (2.76)$$

A combinação das duas primeiras equações, conforme abaixo,

$$\frac{B(r)}{A(r)} R_{00} - R_{11} = 0 \implies \frac{1}{r} \left(\frac{B'(r)}{B(r)} + \frac{A'(r)}{A(r)} \right) = 0, \quad (2.77)$$

leva à relação:

$$A'(r)B(r) + A(r)B'(r) = 0 \implies A(r)B(r) = \text{constante} \quad (2.78)$$

Aplicando a condição assintótica,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} A(r) = \lim_{r \rightarrow \infty} B(r) = 1 \implies A(r)B(r) = 1, \quad (2.79)$$

tem-se:

$$A(r) = \frac{1}{B(r)}. \quad (2.80)$$

Substituindo esse resultado na equação de R_{22} , obtém-se:

$$A(r) + rA'(r) = 1 \implies \frac{d}{dr}(rA(r)) = 1, \quad (2.81)$$

cujas solução é:

$$A(r) = 1 + \frac{c}{r}, \quad (2.82)$$

para alguma constante c . Como apenas três das dez equações de (2.72) foram utilizadas, é necessário verificar que a solução obtida satisfaz também as demais componentes do tensor de Ricci.

Abaixo seguem as sete equações restantes, começando pelo último elemento da diagonal:

$$\begin{aligned} R_{33} &= \text{sen}^2\theta - \frac{\text{sen}^2\theta}{B(r)} + r\text{sen}^2\theta \frac{B'(r)}{B(r)} = \text{sen}^2\theta \cdot R_{22} = 0, \\ R_{12} &= \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{\partial}{\partial r} (\cot\theta) = 0, \\ R_{13} &= \partial_\sigma \Gamma_{13}^\sigma - \partial_1 \Gamma_{\sigma 3}^\sigma + \Gamma_{\sigma\lambda}^\sigma \Gamma_{13}^\lambda - \Gamma_{1\lambda}^\sigma \Gamma_{\sigma 3}^\lambda = 0, \\ R_{10} &= \partial_\sigma \Gamma_{10}^\sigma - \partial_1 \Gamma_{\sigma 0}^\sigma + \Gamma_{\sigma\lambda}^\sigma \Gamma_{10}^\lambda - \Gamma_{1\lambda}^\sigma \Gamma_{\sigma 0}^\lambda = 0, \\ R_{23} &= \partial_\sigma \Gamma_{23}^\sigma - \partial_2 \Gamma_{\sigma 3}^\sigma + \Gamma_{\sigma\lambda}^\sigma \Gamma_{23}^\lambda - \Gamma_{2\lambda}^\sigma \Gamma_{\sigma 3}^\lambda = 0, \\ R_{20} &= \partial_\sigma \Gamma_{20}^\sigma - \partial_2 \Gamma_{\sigma 0}^\sigma + \Gamma_{\sigma\lambda}^\sigma \Gamma_{20}^\lambda - \Gamma_{2\lambda}^\sigma \Gamma_{\sigma 0}^\lambda = 0, \\ R_{30} &= \partial_\sigma \Gamma_{30}^\sigma - \partial_3 \Gamma_{\sigma 0}^\sigma + \Gamma_{\sigma\lambda}^\sigma \Gamma_{30}^\lambda - \Gamma_{3\lambda}^\sigma \Gamma_{\sigma 0}^\lambda = 0. \end{aligned} \quad (2.83)$$

Conclui-se que a solução é compatível com todas as dez equações, e portanto a métrica é expressa na forma:

$$ds^2 = -\left(1 + \frac{c}{r}\right)dt^2 + \left(1 + \frac{c}{r}\right)^{-1}dr^2 + r^2d\Omega^2 \quad (2.84)$$

A processo de linearização da gravidade permite definir:

$$g_{00} = -(1 + 2\Phi) \implies c = 2r\Phi. \quad (2.85)$$

A solução da teoria newtoniana para um único corpo orbitante dita $\Phi = -GM/r$, logo a métrica, conhecida como **solução de Schwarzschild** tem a forma final:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1}dr^2 + r^2d\Omega^2, \quad (2.86)$$

onde M é a massa do corpo “fonte” do campo gravitacional. Nota-se que esta solução respeita perfeitamente a condição de contorno em $r \rightarrow \infty$.

2.6.1 Singularidades.

A métrica de Schwarzschild apresenta divergências aparentes nas posições $r = 2GM$ e $r = 0$. O questionamento que isto levanta é se estas singularidades são consequências do sistema de coordenadas escolhido, ou se realmente se traduzem como pontos singulares no espaço-tempo.

Para ilustrar esse tipo de questionamento, é útil considerar a métrica de Minkowski escrita em coordenadas esféricas. Nessa representação, a componente $g^{\theta\theta} = r^{-2}$ da métrica inversa diverge em $r = 0$, embora seja um fato que esse ponto do espaço é regular. Assim, torna-se evidente que a simples divergência de componentes métricos não é, por si só, um indicativo suficiente da presença de uma singularidade física.

É, portanto, necessário dispor de uma ferramenta que permita identificar singularidades que sejam independentes do sistema de coordenadas. Espera-se que uma verdadeira singularidade do espaço-tempo esteja associada à presença de curvatura infinita, o que remete ao estudo do tensor de curvatura de Riemann $R^\rho_{\sigma\mu\nu}$, cujo papel é justamente caracterizar a geometria local do espaço-tempo.

Entretanto, avaliar diretamente os componentes de um tensor não garante invariância sob transformações de coordenadas. A solução está em considerar invariantes escalares construídos a partir do tensor de Riemann, tais como:

$$R, \quad R^{\mu\nu}R_{\mu\nu}, \quad R^{\rho\sigma\mu\nu}R_{\rho\sigma\mu\nu}, \quad \dots \quad (2.87)$$

Se algum desses escalares divergir em certo ponto do espaço-tempo, tal divergência será válida em qualquer sistema de coordenadas, caracterizando, portanto, uma singularidade física (ou real).

No caso da métrica de Schwarzschild, o escalar dado por

$$R^{\rho\sigma\mu\nu}R_{\rho\sigma\mu\nu} = \frac{48G^2M^2}{r^6}, \quad (2.88)$$

diverge claramente em $r = 0$, evidenciando que esse ponto corresponde a uma verdadeira singularidade do espaço-tempo. Por outro lado, não há nenhum escalar que denuncie uma singularidade presente em $r = 2GM$, indicando que a divergência observada nesta posição não possui caráter físico, mas sim coordenado.

Essa interpretação é reforçada pela existência de sistemas de coordenadas alternativos, nos quais a métrica é regular em $r = 2GM$, demonstrando que esse ponto é uma seção bem definida do espaço-tempo.

Ainda assim, é importante destacar que a métrica de Schwarzschild é uma solução da equação de Einstein no vácuo e, portanto, sua validade se restringe à região exterior à fonte gravitacional. A análise de $r = 0$, nesse contexto, é apenas formal, uma vez que a solução não descreve adequadamente o interior do corpo que gera o campo gravitacional.

De maneira análoga, em muitos casos físicos, o raio $r = 2GM$ encontra-se no interior do corpo material, tornando sua interpretação inaplicável. Contudo, existem casos particulares, como os **buracos negros**, em que esse raio representa uma superfície com significado geométrico e causal bem definido.

2.7 Geodésicas do tipo nulo no espaço-tempo de Schwarzschild.

Esta seção se baseia no desenvolvimento feito em Das (DAS, 2011), e também em Carroll (CARROLL, 2019), consultar essas fontes para mais detalhes.

As geodésicas do tipo nulo descrevem o movimento de partículas sem massa, como fótons, em um dado espaço-tempo. No caso da métrica de Schwarzschild, essas trajetórias são fundamentais para a compreensão de fenômenos ópticos associados a estrelas e buracos negros, como lentes gravitacionais e sombras. Nesta seção, analisam-se algumas propriedades dessas geodésicas.

2.7.1 Vetores de Killing

Considere uma métrica arbitrária, expressa como:

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu. \quad (2.89)$$

Se, em uma determinada direção coordenada $x^{\sigma*}$, a métrica for tal que:

$$\partial_{\sigma*} g_{\mu\nu} = 0, \quad (2.90)$$

então o espaço-tempo é invariante sob transformações do tipo:

$$x^{\sigma*} \rightarrow x^{\sigma*} + a^{\sigma*}. \quad (2.91)$$

Tal transformação caracteriza uma *isometria*, ou seja, uma transformação que preserva a métrica (e, portanto, os intervalos), resultando em consequências imediatas para as equações de movimento. Para entender esse ponto, é útil considerar a equação da geodésica para uma partícula massiva, escrita na forma:

$$\frac{dx^\sigma}{d\tau} \nabla_\sigma \frac{dx^\rho}{d\tau} = 0. \quad (2.92)$$

Essa equação pode ser reescrita de maneira mais compacta utilizando o quadrimomento:

$$p^\sigma \nabla_\sigma p_\mu = 0, \quad (2.93)$$

No caso de fótons, uma forma equivalente é obtida ao se adotar um parâmetro afim λ , tal que:

$$p^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}, \quad (2.94)$$

conforme já discutido anteriormente. Ao reescrever a equação (2.93) de forma explícita, tem-se:

$$p^\sigma \partial_\sigma p_\mu - p^\sigma \Gamma_{\sigma\mu}^\lambda p_\lambda = 0. \quad (2.95)$$

O primeiro termo desta equação representa a variação de p_μ ao longo da curva $x^\mu(\lambda)$:

$$p^\sigma \partial_\sigma p_\mu = \frac{dx^\sigma}{d\lambda} \frac{\partial}{\partial x^\sigma} (p_\mu) = \frac{dp_\mu}{d\lambda}. \quad (2.96)$$

Já o segundo termo resulta em:

$$\begin{aligned} p^\sigma \Gamma_{\sigma\mu}^\lambda p_\lambda &= p^\sigma \left[\frac{1}{2} g^{\lambda\rho} (\partial_\sigma g_{\mu\rho} + \partial_\mu g_{\sigma\rho} - \partial_\rho g_{\mu\sigma}) \right] p_\lambda, \\ &= \frac{1}{2} p^\sigma p^\rho (\partial_\sigma g_{\mu\rho} + \partial_\mu g_{\sigma\rho} - \partial_\rho g_{\mu\sigma}), \\ &= \frac{1}{2} p^\sigma p^\rho \partial_\mu g_{\sigma\rho}. \end{aligned} \quad (2.97)$$

Substituindo ambos os resultados na equação (2.93), obtém-se:

$$\frac{1}{2} p^\sigma p^\rho \partial_\mu g_{\sigma\rho} = \frac{dp_\mu}{d\lambda}. \quad (2.98)$$

Portanto, se a métrica não depende explicitamente de $x^{\sigma*}$, há conservação do quadrimomento na direção correspondente, ou seja:

$$\partial_{\sigma*} g_{\mu\nu} = 0 \implies \frac{d}{d\lambda} p_{\sigma*} = 0. \quad (2.99)$$

Sempre que a métrica for independente de uma coordenada, haverá uma isometria associada. No entanto, o recíproco não é garantido pois podem existir mais isometrias do que coordenadas. Além disso, certas representações coordenadas podem ocultar simetrias, como no caso da métrica plana em coordenadas esféricas:

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta) d\phi^2. \quad (2.100)$$

Assim, torna-se útil uma formulação covariante para identificar isometrias. Com esta finalidade, para cada $x^{\sigma*}$ tal que $\partial_{\sigma*} g_{\mu\nu} = 0$, define-se o vetor:

$$K = \partial_{\sigma*} \implies K^\mu = \delta_{\sigma*}^\mu. \quad (2.101)$$

Esse vetor é o *gerador infinitesimal* da isometria associada. Nesse caso, a quantidade:

$$p_{\sigma*} = K^\mu p_\mu = K_\mu p^\mu \quad (2.102)$$

é conservada, pois se trata de um escalar ao longo da curva. De fato:

$$\begin{aligned} p^\nu \nabla_\nu (K_\mu p^\mu) &= p^\nu \partial_\nu (K_\mu p^\mu) \\ &= \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{\partial}{\partial x^\nu} (p_{\sigma*}) \\ &= \frac{d}{d\lambda} p_{\sigma*}, \end{aligned} \quad (2.103)$$

de modo que:

$$p^\nu \nabla_\nu (K_\mu p^\mu) = 0 \iff \frac{d}{d\lambda} p_{\sigma*} = 0. \quad (2.104)$$

É possível expandir o lado esquerdo dessa condição:

$$\begin{aligned} p^\nu \nabla_\nu (K_\mu p^\mu) &= p^\nu p^\mu \nabla_\nu K_\mu + p^\nu K_\mu \nabla_\nu p^\mu \\ &= p^\nu p^\mu \nabla_{(\nu} K_{\mu)}, \end{aligned} \quad (2.105)$$

onde foi usada a simetria de $p^\nu p^\mu$, e o fato de que $p^\nu \nabla_\nu p^\mu = 0$ para uma geodésica.

Esse resultado leva à formulação da **equação de Killing**:

$$\nabla_{(\nu} K_{\mu)} = 0 \implies p^\nu \nabla_\nu (K_\mu p^\mu) = 0. \quad (2.106)$$

Tal equação define os chamados **vetores de Killing** — campos vetoriais que geram isometrias do espaço-tempo e asseguram a conservação da quantidade $K_\mu p^\mu$ ao

longo da trajetória da partícula. No caso em que ∂_{σ^*} seja um vetor de Killing, a equação reduz-se a:

$$\nabla_{(\nu} K_{\mu)} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{d\lambda} p_{\sigma^*} = 0. \quad (2.107)$$

Por fim, dado que vetores de Killing geram isometrias e cada isometria contínua corresponde a um vetor de Killing, **há um mapeamento bijetivo entre vetores de Killing e isometrias do espaço-tempo.**

2.7.2 Aplicação na métrica de Schwarzschild

Com base nas simetrias conhecidas da geometria de Schwarzschild, é possível aplicar o formalismo dos vetores de Killing para identificar, de forma explícita, grandezas conservadas associadas ao movimento de partículas nesse espaço-tempo. A construção dessa métrica fundamenta-se em dois aspectos principais: a **independência temporal** e a **simetria esférica**.

A métrica de Schwarzschild é dada por:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (2.108)$$

A independência da métrica em relação à coordenada temporal é evidente e garante que ∂_0 seja um vetor de Killing, o qual denotado por T_μ . Esta simetria está associada à invariância sob translações no tempo.

Outro vetor de Killing evidente é ∂_3 , denotado K_ν e associado à simetria rotacional em torno do eixo z . Essa simetria traduz a invariância sob rotações no plano azimutal. Assim, tem-se:

$$\begin{aligned} \cdot \quad \partial_0 g_{\mu\nu} &= 0, \\ \cdot \quad \partial_3 g_{\mu\nu} &= 0. \end{aligned} \quad (2.109)$$

Contudo, a simetria esférica implica que o espaço é invariante sob rotações em qualquer direção. Portanto, todas as componentes do momento angular, $\{L_x, L_y, L_z\}$, são conservadas. Essa propriedade garante que partículas em movimento nesse espaço seguem trajetórias em um plano fixo. Por conveniência, pode-se tomar esse plano como sendo o equatorial:

$$\theta(\lambda) = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\theta}{d\lambda} \equiv \dot{\theta} = 0. \quad (2.110)$$

Por fim, as quantidades conservadas associadas aos vetores de Killing podem ser extraídas a partir da relação:

$$p^\nu \nabla_\nu (K_\mu p^\mu) = 0 \quad \Rightarrow \quad K_\mu \frac{dx^\mu}{d\lambda} = \text{constante}. \quad (2.111)$$

Adotando a convenção ($0 = t$, $1 = r$, $2 = \theta$, $3 = \phi$), os vetores de Killing nas componentes da métrica de Schwarzschild são:

$$K_\nu = g_{\mu\nu}(\partial_\phi)^\mu \Rightarrow K_\nu = (0, 0, 0, r^2 \sin^2 \theta), \quad (2.112)$$

$$T_\mu = g_{\mu\nu}(\partial_t)^\nu \Rightarrow T_\mu = \left(-1 + \frac{2GM}{r}, 0, 0, 0\right). \quad (2.113)$$

Dessa forma, obtêm-se duas quantidades conservadas ao longo das trajetórias das partículas nesse espaço-tempo:

$$\cdot \quad r^2 \dot{\phi} \equiv l, \quad (2.114)$$

$$\cdot \quad \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) \dot{t} \equiv k. \quad (2.115)$$

Cabe observar que, embora a notação utilizada seja mais apropriada para partículas sem massa (como os fótons), todo o desenvolvimento permanece válido para partículas massivas, bastando ajustar a parametrização ($\lambda \rightarrow \tau$, por exemplo).

2.7.3 Órbitas de fótons

Uma vez determinadas as quantidades conservadas, é possível analisar diretamente as trajetórias percorridas por fótons no entorno de uma dada fonte gravitacional. Considerando que fótons obedecem à equação da geodésica para um parâmetro afim λ , tem-se:

$$\frac{dx^\mu}{d\lambda} + \Gamma_{\sigma\rho}^\mu \frac{dx^\sigma}{d\lambda} \frac{dx^\rho}{d\lambda} = 0, \quad (2.116)$$

o que, aliado às constantes conservadas k e l , fornece a equação para a componente $\mu = r$:

$$\left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} \ddot{r} - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-2} \frac{GM}{r^2} \dot{r}^2 + \frac{GM}{r^2} \dot{t}^2 - r \dot{\phi}^2 = 0. \quad (2.117)$$

Vale lembrar que, para fótons, impõe-se a condição $ds^2 = 0$, a qual, na métrica de Schwarzschild, assume a forma:

$$\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) \dot{t}^2 - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 - r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 = 0. \quad (2.118)$$

Adotando a condição $\theta = \pi/2$, já discutida anteriormente, essa equação pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned}
& \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) \dot{t}^2 - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 - r^2 \dot{\phi}^2 = 0 \\
& \Rightarrow \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) \frac{\dot{t}^2}{\dot{\phi}^2} - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} \frac{\dot{r}^2}{\dot{\phi}^2} - r^2 = 0 \\
& \Rightarrow \frac{k^2}{\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) l^2} - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 - r^2 = 0 \\
& \Rightarrow \frac{1}{r^4} \left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) - \left(\frac{k}{l}\right)^2 = 0.
\end{aligned} \tag{2.119}$$

Observa-se que, nesse desenvolvimento, são descartadas soluções de queda radial, uma vez que estas correspondem a $\dot{\phi} = 0$, representando fótons que se dirigem diretamente à singularidade. Tais trajetórias não serão consideradas nesta análise.

A equação (2.119) é não linear e de resolução complexa. Para facilitar sua análise, aplica-se a substituição $u = r^{-1}$, obtendo:

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 + u^2(1 - 2GMu) - \left(\frac{k}{l}\right)^2 = 0. \tag{2.120}$$

Ao diferenciar essa equação em relação a ϕ , obtém-se:

$$\frac{du}{d\phi} \left(\frac{d^2u}{d\phi^2} + u - 3GMu^2 \right) = 0. \tag{2.121}$$

Logo, $u(\phi)$ satisfaz uma das seguintes equações:

$$\frac{du}{d\phi} = 0, \quad \text{ou} \quad \frac{d^2u}{d\phi^2} + u = 3GMu^2. \tag{2.122}$$

A primeira condição implica uma trajetória com raio constante. Isso pode ser visto ao observar:

$$\frac{du}{d\phi} = \frac{du}{d\lambda} \frac{d\lambda}{d\phi} = \frac{-\dot{r}}{l} = 0. \tag{2.123}$$

Para uma órbita circular, impõem-se as condições $\dot{r} = \ddot{r} = 0$. Substituindo tais condições na equação da geodésica para a componente radial, obtém-se:

$$\frac{GM\dot{t}^2}{r^2} = r\dot{\phi}^2. \tag{2.124}$$

Por outro lado, inserindo essas mesmas condições na equação do vínculo $ds^2 = 0$, chega-se a:

$$\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) \dot{t}^2 = r^2 \dot{\phi}^2. \quad (2.125)$$

Combinando essas duas expressões, deduz-se:

$$\left(1 - \frac{3GM}{r}\right) \dot{t}^2 = 0. \quad (2.126)$$

Como $\dot{t} = 0$ não possui significado físico (a partícula não evoluiria temporalmente), a única solução válida é $r = 3GM$. Esse resultado indica que, na métrica de Schwarzschild, órbitas circulares de fótons só são possíveis nesse raio. Embora esse valor não seja fisicamente relevante para a maioria das estrelas (por estar em seu interior), ele se torna crucial na descrição de buracos negros.

Retomando, a outra possibilidade para $u(\phi)$ é satisfazer a equação:

$$\frac{d^2 u}{d\phi^2} + u = 3GM u^2. \quad (2.127)$$

Dado que $3GM \ll 1$ em muitas situações práticas, é conveniente tratar essa equação perturbativamente. Considera-se, portanto, a solução homogênea:

$$\frac{d^2 u}{d\phi^2} + u = 0 \quad \Rightarrow \quad u(\phi) = A \sin(\phi + \delta), \quad (2.128)$$

com δ uma fase arbitrária, a qual pode ser desconsiderada por simplicidade. Assume-se então a forma:

$$u(\phi) = A \sin(\phi) + \epsilon u_1(\phi), \quad (2.129)$$

com $\epsilon \equiv 3GM$ e $u_1(\phi)$ representando a correção de primeira ordem. Substituindo na equação original e mantendo apenas os termos de primeira ordem em ϵ , obtém-se:

$$\epsilon \frac{d^2 u_1}{d\phi^2} + \epsilon u_1 = A \epsilon \sin^2(\phi). \quad (2.130)$$

A solução para essa equação é:

$$u_1(\phi) = \frac{A^2}{2} \left(1 + \frac{1}{3} \cos(2\phi)\right), \quad (2.131)$$

e, portanto, a solução aproximada para r é:

$$\frac{1}{r} \simeq A \left(\sin(\phi) + \frac{A\epsilon}{2} + \frac{A\epsilon}{6} \cos(2\phi) \right). \quad (2.132)$$

Para interpretar a constante A , basta considerar a solução homogênea:

$$r \sin(\phi) = \frac{1}{A}. \quad (2.133)$$

No plano equatorial ($\theta = \pi/2$), a quantidade $r \sin(\phi)$ representa a coordenada y da trajetória em coordenadas esféricas. Assim, essa equação descreve uma linha reta paralela ao eixo x , a uma altura fixa $y = 1/A$:

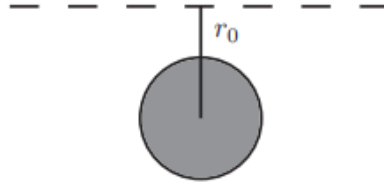


Figura 1 – Representação da solução homogênea. Fonte: Das ([DAS, 2011](#)).

Com essa figura, torna-se evidente que a solução homogênea descreve a trajetória de fótons **não** influenciados pela curvatura gravitacional. A partir dessa interpretação, a constante A é convenientemente reescrita como $A = 1/r_0$, e a solução assume a forma:

$$\frac{1}{r} \simeq \frac{1}{r_0} \left(\sin(\phi) + \frac{\epsilon}{2r_0} + \frac{\epsilon}{6r_0} \cos(2\phi) \right). \quad (2.134)$$

Para fins de comparação, apresenta-se a seguir uma figura gerada com base nessa função. A curva em azul corresponde à solução completa, enquanto a linha traçada representa a solução homogênea, tangente à curva. Os valores de ϵ , r_0 e δ foram ajustados com fins didáticos:

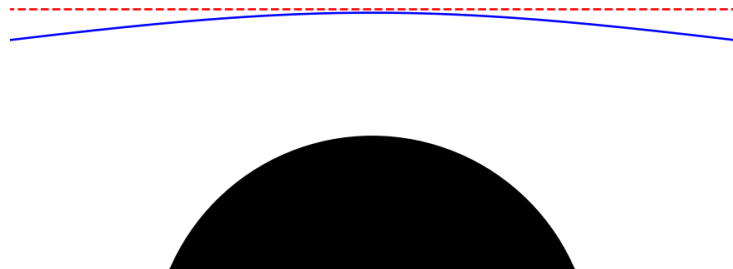


Figura 2 – Curva resultante da solução aproximada para a trajetória do fóton.

3 Soluções exatas para trajetórias de fótons no espaço de Schwarzschild

O capítulo anterior encerrou-se com uma primeira análise das geodésicas do tipo nulo na métrica de Schwarzschild. O desenvolvimento foi conduzido de forma mais simples, primeiramente descartando soluções sem momento angular e, ao final, utilizando métodos perturbativos.

Este capítulo tem como objetivo a obtenção, de forma mais rigorosa, das soluções possíveis para a equação diferencial (3.1). O desenvolvimento das soluções apresentadas a seguir é inspirado em S. Chandrasekhar (CHANDRASEKHAR; THORNE, 1985).

$$\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 - r^2 \left(\frac{d\phi}{d\lambda}\right)^2 = 0. \quad (3.1)$$

Anteriormente, as seguintes grandezas conservadas foram obtidas:

$$\cdot \quad r^2 \dot{\phi} \equiv l, \quad (3.2)$$

$$\cdot \quad \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) \dot{t} \equiv k, \quad (3.3)$$

Com elas, é possível reescrever a equação (3.1) na forma:

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 + u^2(1 - 2Mu) - \left(\frac{k}{l}\right)^2 = 0. \quad (3.4)$$

onde foi realizada a substituição $u = \frac{1}{r}$, e $G = 1$ foi aplicado.

3.1 Solução radial

A fim de cumprir a lacuna deixada no capítulo anterior, será aqui considerado o caso em que $\dot{\phi} = 0$. A equação (3.1) neste caso se torna:

$$\frac{dr}{d\lambda} = \pm k, \quad (3.5)$$

Dado que:

$$\dot{t} = k \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1}, \quad (3.6)$$

é possível encontrar a seguinte solução para o tempo do observador:

$$\frac{dr}{dt} = \pm \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \implies t = \pm \int \frac{r}{r - 2M} dr. \quad (3.7)$$

Por fim,

$$t = \pm\{r + 2M[\log(r - 2M) - 1] + C\} \quad (3.8)$$

$$= \pm \left[r + 2M \log \left(\frac{r}{2M} - 1 \right) \right] + C_{\pm}, \quad (3.9)$$

Aqui se torna evidente que o tempo para o observador tende ao infinito conforme $r \rightarrow 2M$. Neste ponto, é proveitoso definir a variável r_* , tal que:

$$r_* = r + 2M \log \left(\frac{r}{2M} - 1 \right) \implies t = \pm r_* + C_{\pm}. \quad (3.10)$$

Esta variável possui os limites:

$$\lim_{r \rightarrow 2M} r_* = -\infty, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} r_* = \infty, \quad (3.11)$$

e representa o espaço “acessível” $r = (2M, +\infty)$ para a partícula no referencial do observador distante.

Por completude, a solução $r(\lambda)$ é dada por:

$$r(\lambda) = \pm k\lambda + . \quad (3.12)$$

Note que, de acordo com o tempo próprio, não há impedimento algum para a partícula cruzar $r = 2M$.

3.2 Órbitas críticas

Retornando a atenção para casos mais gerais, a equação (3.4) é reescrita na forma:

$$\left(\frac{du}{d\phi} \right)^2 = 2Mu^3 - u^2 + \frac{1}{b^2} = f(u), \quad b = \frac{k}{l}. \quad (3.13)$$

Nota-se a definição de b , chamado **parâmetro de impacto**. Definitivamente as possíveis soluções desta equação estão relacionadas às raízes da função $f(u)$, pois indicam pontos de retorno para $u(\phi)$. Tomando uso das fórmulas de Vieta, as raízes deste polinômio são tais que:

$$u_1 + u_2 + u_3 = \frac{1}{2M}, \quad (3.14)$$

$$u_1 \cdot u_2 \cdot u_3 = \frac{-1}{2Mb^2}, \quad (3.15)$$

Isto indica necessariamente a presença de uma raiz negativa, onde as outras 2 podem ser reais positivas ou complexo conjugadas. A primeira alternativa ainda pode ser dividida em dois casos, onde as duas raízes positivas são iguais ou distintas.

Para um melhor entendimento, verifica-se a disposição das raízes graficamente:

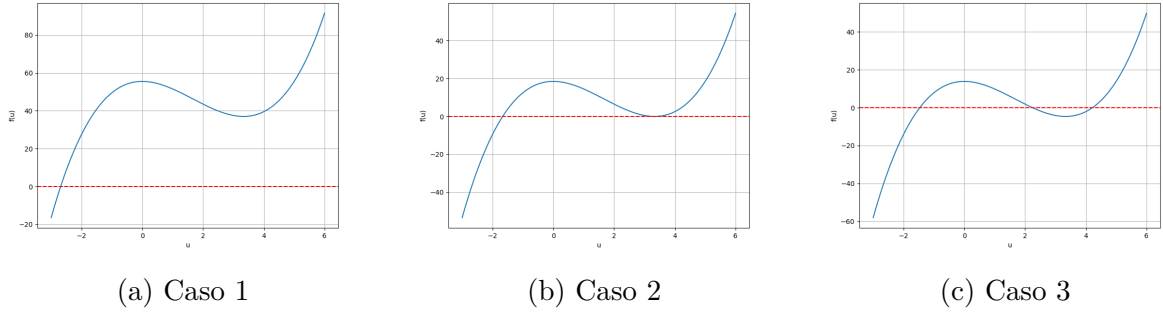


Figura 3 – Gráficos da função $f(u)$ para diferentes parâmetros de impacto.

Os casos 2 e 3 possuem uma análise mais direta, pois são os casos onde as raízes não negativas são reais. O caso 2 retrata o caso onde as raízes coincidem, e o caso 3 retrata o caso onde as raízes são distintas.

Tratando as raízes positivas como pontos de inflexão na trajetória, já é possível concluir que no caso 3, duas órbitas são matematicamente possíveis. A primeira permanece no intervalo $0 \leq u \leq u_2$, e a segunda no intervalo $u_3 \leq u$, dado que $f(u)$ não pode ser negativo.

A solução para o caso 2 resulta numa trajetória circular instável, a mesma obtida no capítulo anterior, e portanto é considerada especial entre as demais. O caso 1 é menos trivial e discuti-lo sem antes desenvolver a equação diferencial não é de grande proveito, mas o que se pode dizer é que o intervalo de u para possíveis soluções de interesse abrange toda a reta \mathbb{R}_+ .

3.2.1 Caso 2

Dada a solução especial que surge deste caso, é proveitoso começar a análise buscando duas raízes positivas coincidentes. Em termos de suas raízes, tem-se $f(u)$ na forma:

$$f(u) = 2M(u - u_1)(u - u_2)(u - u_3). \quad (3.16)$$

Dado que $u_2 = u_3$,

$$f(u) = (u - u_2)^2 q(u) \implies f'(u) = 2(u - u_2)q(u) + (u - u_2)^2 q'(u), \quad (3.17)$$

conclui-se que no caso de raiz dupla, de forma geral, $f(u_2) = f'(u_2) = 0$. Neste caso específico:

$$f'(u) = 6Mu^2 - 2u = 0 \implies u = (3M)^{-1}. \quad (3.18)$$

Substituindo este valor em $f(u)$, obtém-se:

$$f(1/3M) = \frac{2}{27M^2} - \frac{1}{9M^2} + \frac{1}{b^2} = 0 \implies b_c = 3\sqrt{3}M. \quad (3.19)$$

O parâmetro de impacto b_c para esta solução é destacado como **parâmetro de impacto crítico**. Ao substituir $b = b_c$ nas fórmulas de Vieta, tem-se:

$$u_1 = \frac{-1}{6M}; \quad u_2 = u_3 = \frac{1}{3M}, \quad (3.20)$$

E a equação diferencial se torna:

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 = 2Mu^3 - u^2 + \frac{1}{27M^2}. \quad (3.21)$$

É possível integrar esta equação diferencial,

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2M}} \int \frac{du}{(u - 1/3M)\sqrt{(u + 1/6M)}} \quad (3.22)$$

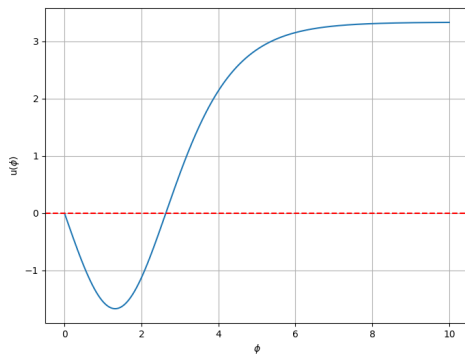
$$= \phi_0 - 2 \tanh^{-1} \left(\sqrt{2M} \sqrt{u + 1/6M} \right). \quad (3.23)$$

Assim é obtida a solução para $u(\phi)$, na forma:

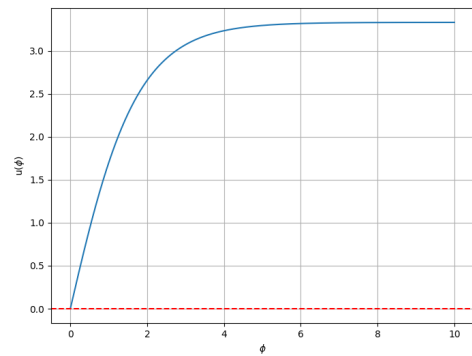
$$u(\phi) = \frac{1}{2M} \tanh^2 \frac{1}{2}(\phi - \phi_0) - \frac{1}{6M}. \quad (3.24)$$

Para que $u(0) = 0$, têm-se os seguintes valores de ϕ_0 :

$$\phi_{0\pm} = \pm 2 \tanh^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right). \quad (3.25)$$



(a) para ϕ_{0+}



(b) para ϕ_{0-}

Figura 4 – Solução para $\phi_{0\pm}$, com $M = 1$

É evidente que a escolha com significado físico corresponde a $\phi_0 = \phi_{0-}$. Os gráficos para $u(\phi)$ e $r(\phi)$ seguem abaixo:

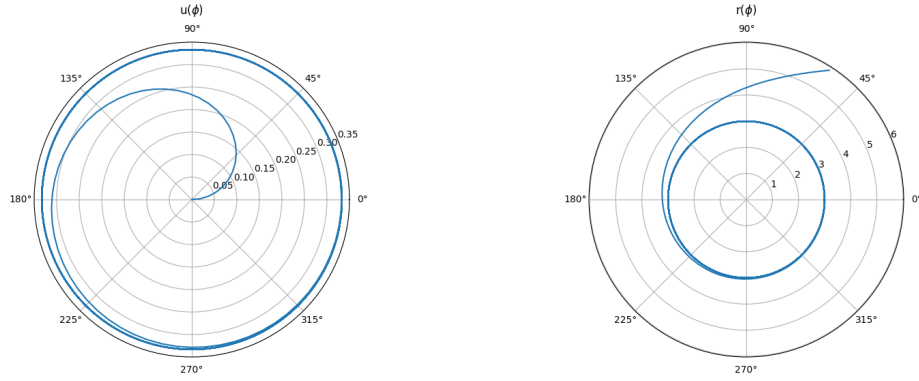


Figura 5 – Gráfico em coordenadas polares para $u(\phi)$ e $r(\phi)$

Logo, a solução exata mostra como fótons com parâmetro de impacto crítico $b = b_c$ são capturados na órbita circular em $r = 3M$ (nos gráficos acima, $M = 1$), assim como demonstrado no capítulo anterior.

3.2.1.1 Sobre $u_2 \leq u$

A solução encontrada por meio da integração da equação diferencial relata a história de uma partícula confinada no intervalo $r_2 \leq r \leq \infty$. Porém, o gráfico 3b não impede a existência de uma solução no intervalo $u_2 \leq u$ ($0 \leq r \leq r_2$).

Uma substituição que expressa esse domínio para u é dada por:

$$u = \frac{1}{3M} + \frac{1}{2M} \tan^2 \frac{\gamma}{2}, \quad (0 \leq \gamma < \pi) \quad (3.26)$$

Ao aplicar esta substituição na equação diferencial, obtém-se:

$$\left(\frac{du}{d\phi} \right)^2 = \left(\frac{1}{2M} \right)^2 \tan^2 \frac{\gamma}{2} \sec^4 \frac{\gamma}{2} \left(\frac{d\gamma}{d\phi} \right)^2 = \left(1 + \tan^2 \frac{\gamma}{2} \right) \frac{1}{4M^2} \tan^4 \frac{\gamma}{2}. \quad (3.27)$$

Simplificar e integrar esta equação, resulta em $\phi(\gamma)$:

$$\left(\frac{d\gamma}{d\phi} \right)^2 = \sin^2 \frac{\gamma}{2} \implies \phi(\gamma) = 2 \log \left[\tan \left(\frac{\gamma}{4} \right) \right] + C. \quad (3.28)$$

Ao aplicar esta relação na substituição (3.26), obtém-se finalmente a solução $u(\phi)$:

$$e^{\frac{1}{2}(\phi-C)} = \tan \frac{\gamma}{4} \implies u = \frac{1}{3M} + \frac{2}{M} \frac{e^{\phi-C}}{(1 - e^{\phi-C})^2}. \quad (3.29)$$

Para $C = 0$, esta solução é tal que:

$$\lim_{\phi \rightarrow 0} \left(\frac{1}{3M} + \frac{2e^\phi}{M(e^\phi - 1)^2} \right) = \infty \implies \lim_{\phi \rightarrow 0} r = 0, \quad (3.30)$$

assim como,

$$\lim_{\phi \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3M} + \frac{2e^\phi}{M(e^\phi - 1)^2} \right) = \frac{1}{3M} \implies \lim_{\phi \rightarrow \infty} r = 3M. \quad (3.31)$$

Conclui-se que esta solução é o “par” previsto pelo gráfico 3b, descrevendo um fóton com origem na singularidade, capturado na órbita circular em $r = 3M$.

De fato, graficamente, esta solução tem esse comportamento:

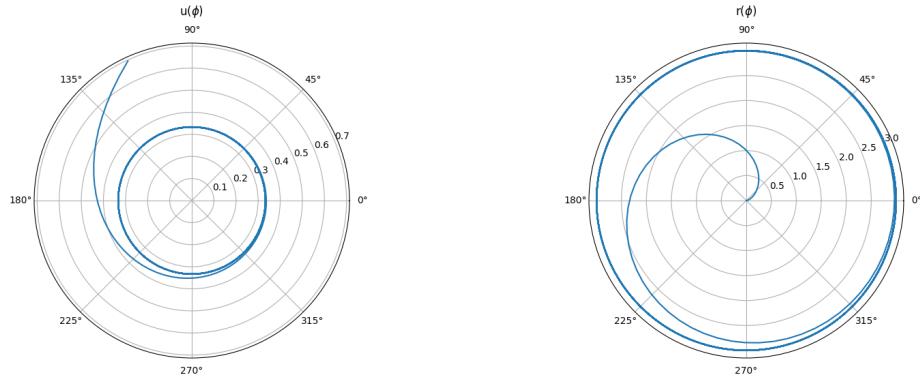


Figura 6 – Gráfico em coordenadas polares para $u(\phi)$ e $r(\phi)$.

3.2.2 Caso 3

Busca-se agora a solução correspondente ao gráfico 3c, com duas raízes positivas e distintas. Ao relembrar as relações 3.15, é possível escrever as 3 raízes de $f(u)$ na seguinte forma:

$$u_1 = \frac{P - 2M - Q}{4MP}; \quad u_2 = \frac{1}{P}; \quad u_3 = \frac{P - 2M + Q}{4MP}. \quad (3.32)$$

Ela imediatamente satisfaz a relação de soma, com Q sendo uma constante a determinar. Além disso, a relação $u_1 < u_2 < u_3$ permanece, resultando em:

$$u_3 > u_2 \implies \frac{1}{P} < \frac{P - 2M + Q}{4MP} \quad (3.33)$$

$$\implies P - 6M + Q > 0, \quad (3.34)$$

e,

$$u_2 > u_1 \implies \frac{1}{P} > \frac{P - 2M - Q}{4MP} \quad (3.35)$$

$$\implies P - 6M - Q < 0 \quad (3.36)$$

$$\implies |Q| > |P - 6M|, \quad (3.37)$$

Nota-se que esta configuração é especialmente intuitiva para a órbita confinada em $0 \leq u \leq u_2$, na qual $r_2 = P$ seria o “periélio”. Ao escrever $f(u)$ na forma:

$$f(u) = 2M \left(u - \frac{P - 2M - Q}{4MP} \right) \left(u - \frac{1}{P} \right) \left(u - \frac{P - 2M + Q}{4MP} \right) \quad (3.38)$$

$$= 2Mu^3 - u^2 + u \left[\frac{P^2 - (2M - Q)^2}{8MP^2} + \frac{P - 2M - Q}{2P^2} \right] - \frac{(P - 2M)^2 - Q^2}{8MP^3}, \quad (3.39)$$

e comparar com a expressão (3.13), obtém-se a seguinte relação para Q :

$$\left[\frac{P^2 - (2M - Q)^2}{8MP^2} + \frac{P - 2M - Q}{2P^2} \right] = 0 \implies Q^2 = (P - 2M)(P + 6M). \quad (3.40)$$

E para b ,

$$\frac{1}{b^2} = \frac{Q^2 - (P - 2M)^2}{8MP^3} = \frac{(P - 2M)(P + 6M) - (P - 2M)^2}{8MP^3} \quad (3.41)$$

$$\implies b = \sqrt{\frac{P^3}{P - 2M}}. \quad (3.42)$$

Dada a inequação (3.37), a definição de Q tem uma importante consequência:

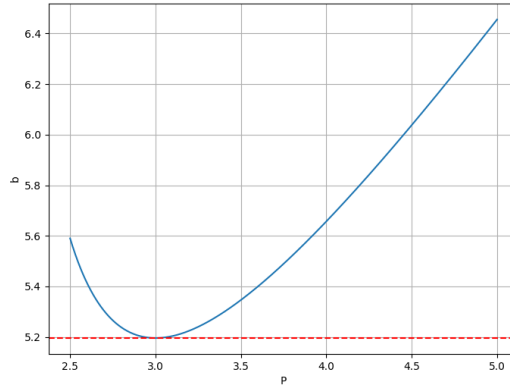
$$Q^2 > (P - 6M)^2 \quad (3.43)$$

$$\implies (P - 2M)(P + 6M) > (P - 6M)^2 \quad (3.44)$$

$$\implies P > 3M. \quad (3.45)$$

Pensando na órbita respectiva ao intervalo $0 \leq u \leq u_2$, **o ponto mais próximo da singularidade está além do raio definido para trajetória circular.**

A dependência entre b e P , vista graficamente, torna evidente que o ponto para $P = 3M$ é tal que $b = b_c$. Logo, o caso de duas raízes positivas distintas é o caso para $b > b_c$.

Figura 7 – Dependência entre b e o parâmetro P .3.2.2.1 Sobre $0 \leq u \leq u_2$

É possível reparametrizar u neste intervalo por meio da substituição:

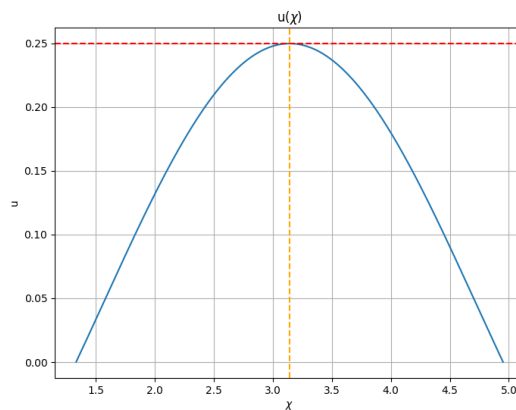
$$u - \frac{1}{P} = -\frac{(Q - P + 6M)}{8MP} (1 + \cos \chi). \quad (3.46)$$

Com esta escolha de variável, verifica-se diretamente que $u(\chi = \pi) = 1/P$. Já no limite inferior, correspondente a $u = 0$, a condição sobre $\chi = \chi_\infty$ resulta em

$$\cos \chi_\infty = -2 \frac{Q - P + 2M}{Q - P + 6M} + 1, \quad (3.47)$$

$$\implies \sin^2 \frac{\chi_\infty}{2} = \frac{Q - P + 2M}{Q - P + 6M}. \quad (3.48)$$

Para determinar de forma mais precisa o intervalo de variação de χ , é útil analisar o comportamento gráfico de $u(\chi)$:

Figura 8 – $u(\chi)$ para $P = 4M$ e $M = 1$.

Observa-se, conforme discutido anteriormente, que $u(\chi = \pi) = 1/P$. Mais importante ainda, nota-se que u permanece confinado no intervalo $0 \leq u \leq u_2$ para $\chi_\infty \leq \chi \leq 2\pi - \chi_\infty$.

Substituindo em (3.13), após simplificações algébricas sequenciais, obtém-se:

$$\left(\frac{d\chi}{d\phi}\right)^2 = \frac{Q}{P} \left(1 - \frac{Q - P + 6M}{2Q} \sin^2 \frac{\chi}{2}\right) \quad (3.49)$$

$$= \frac{Q}{P} \left(1 - k^2 \sin^2 \frac{\chi}{2}\right), \quad (3.50)$$

Foi então introduzido o parâmetro

$$k^2 = \frac{Q - P + 6M}{2Q}. \quad (3.51)$$

A solução desta equação diferencial é dada por

$$\phi = 2\sqrt{\frac{P}{Q}} \left[K(k) - F\left(\frac{\chi}{2}, k\right) \right], \quad (3.52)$$

em que $F(\phi, k)$ denota a integral elíptica incompleta de primeira espécie e

$$K(k) = F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) \quad (3.53)$$

é a integral elíptica completa de primeira espécie (GRADSHTEYN; RYZHIK, 2014). Os limites foram escolhidos de modo que $\phi = 0$ a $u = 1/P$.

No limite $u \rightarrow 0$ (isto é, $r \rightarrow \infty$), tem-se:

$$\phi_\infty = 2\sqrt{\frac{P}{Q}} \left[K(k) - F\left(\frac{\chi_\infty}{2}, k\right) \right], \quad (3.54)$$

$$\chi_\infty = 2 \arcsin \left(\frac{Q - P + 2M}{Q - P + 6M} \right)^{1/2}. \quad (3.55)$$

Em posse desta solução, é instrutivo investigar o comportamento de ϕ_∞ no limite $P \rightarrow 3M$, o qual corresponde a $b \rightarrow b_c$. Observa-se que, nas integrais elípticas, a dependência em P aparece apenas no parâmetro k , para o qual:

$$\lim_{P \rightarrow 3M} k = \lim_{P \rightarrow 3M} \sqrt{\frac{Q - P + 6M}{2Q}} = 1. \quad (3.56)$$

Para $F(\chi_\infty, k)$, $k = 1$ é definido e tal que:

$$F\left(\frac{\chi_\infty}{2}, 1\right) = \int_0^{\frac{\chi_\infty}{2}} \frac{d\chi'}{\sqrt{1 - \sin^2 \chi'}} = \frac{1}{2} \log \left(\frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1} \right). \quad (3.57)$$

Para a integral $K(k)$ sabe-se que ocorre uma divergência no limite $k \rightarrow 1$. Assim, considera-se uma pequena variação em torno do raio crítico, escrevendo

$$P = (3 + \delta)M, \quad (3.58)$$

com $\delta \ll 1$, de modo a buscar uma aproximação assintótica.

Partindo da definição

$$Q = \sqrt{(P - 2M)(P + 6M)}, \quad (3.59)$$

expande-se em série para δ pequeno:

$$Q = 3M + \frac{5}{3}\delta M + O(\delta^2). \quad (3.60)$$

Dessa forma, o parâmetro elíptico satisfaz

$$k^2 = \frac{Q - P + 6M}{2Q} \implies k^2 \approx 1 - \frac{4}{9}\delta. \quad (3.61)$$

É conveniente então introduzir

$$k'^2 \equiv 1 - k^2 = \frac{4}{9}\delta, \quad (3.62)$$

onde k' é chamado de *complemento* do módulo elíptico.

No regime $k' \rightarrow 0$, utiliza-se a aproximação assintótica bem conhecida para a integral elíptica completa de primeira espécie:

$$K(k) \approx \log \frac{4}{k'} = \log 6 - \frac{1}{2} \log \delta. \quad (3.63)$$

Juntando todos os resultados anteriores, obtém-se:

$$\lim_{P \rightarrow 3M} \phi_\infty \approx \frac{1}{2} \log \left[6^4 \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3} - 1)^2}{2(\sqrt{3} + 1)^2} \right] - \frac{1}{2} \log \frac{\sqrt{3}\delta^2}{2}. \quad (3.64)$$

É possível associar este resultado à variação do parâmetro de impacto:

$$b = \sqrt{\frac{P^3}{P - 2M}} = \sqrt{\frac{M^3(3 + \delta)^3}{M(1 + \delta)}} \approx b_c + \frac{\sqrt{3}}{2}M\delta^2. \quad (3.65)$$

Nota-se que a correção de primeira ordem em δ para b é nula. Definindo

$$\delta b \equiv \frac{\sqrt{3}}{2}M\delta^2, \quad (3.66)$$

tem-se finalmente

$$\lim_{P \rightarrow 3M} \phi_\infty \approx \frac{1}{2} \log \left[6^4 \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3} - 1)^2}{2(\sqrt{3} + 1)^2} \right] - \frac{1}{2} \log \frac{\delta b}{M}. \quad (3.67)$$

A seguir apresenta-se a comparação gráfica entre a aproximação obtida e a expressão exata de ϕ_∞ :

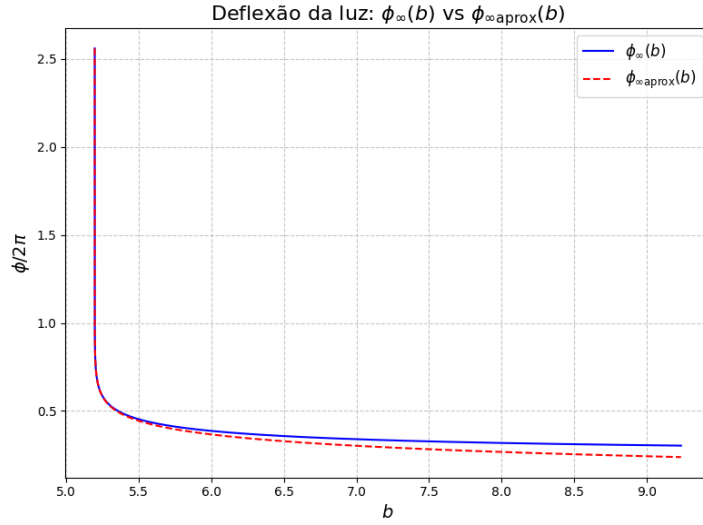


Figura 9 – Deflexão da luz em função do parâmetro de impacto.

Este gráfico, com $\phi = 0$ no periélio, indica, para cada b , a **deflexão total da luz até o ponto de retorno em $u = u_2$** .

Observa-se uma forte concordância na vizinhança de $b \approx b_c$ ($P \approx 3M$). Além disso, mesmo afastando-se deste regime, a discrepância entre as duas expressões permanece pequena. Por fim, ambas as expressões concordam no aspecto fundamental: a deflexão torna-se infinita no parâmetro de impacto crítico, correspondente à órbita circular.

Pode-se, portanto, a partir da solução de ϕ , obter $r(\phi)$ de forma a visualizar mais intuitivamente a trajetória do fóton e confirmar a deflexão até o periélio em $r = P$.

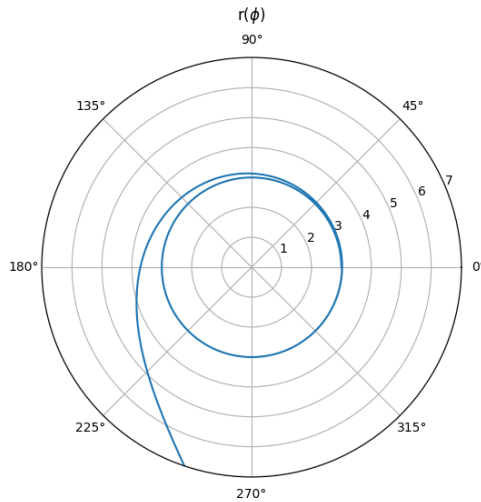
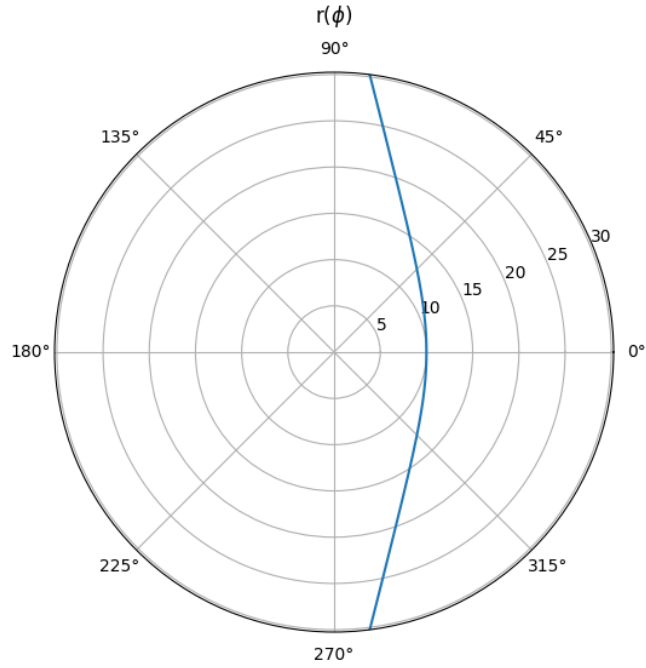
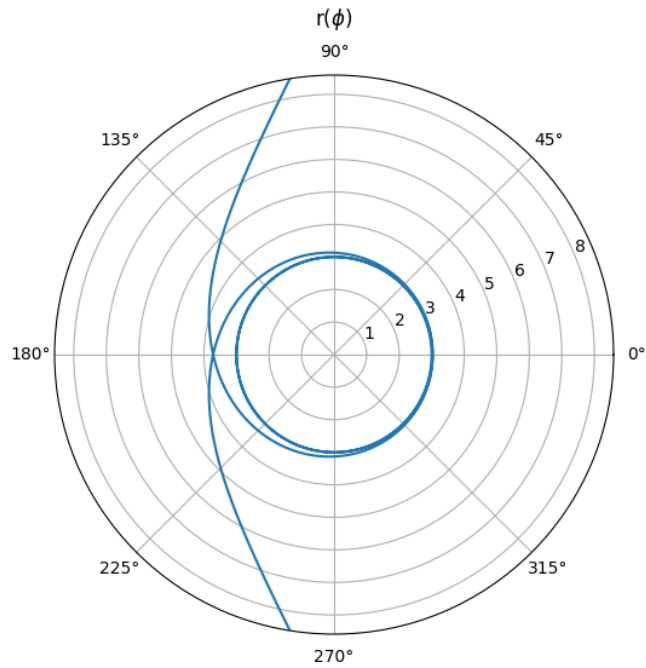


Figura 10 – Trajetória do fóton para $P = 3M + 10^{-4}$, $M = 1$.

Observando a trajetória para além do ponto de retorno (lembrando que $\chi_\infty \leq \chi \leq 2\pi - \chi_\infty$), tem-se:



(a) $P = 10M$, $M = 1$



(b) $P = (3 + 10^{-4})M$, $M = 1$

Figura 11 – Trajetória do fóton além de $r = P$.

3.2.2.2 Sobre $u \geq u_3$

Resta agora considerar uma solução confinada no intervalo $[u_3, +\infty)$, a qual corresponde a trajetórias que permanecem entre a singularidade $r = 0$ e um ponto máximo r_3 . Com isto em mente, propõe-se a seguinte substituição:

$$u = \frac{1}{P} + \frac{Q + P - 6M}{4MP} \sec^2 \frac{\chi}{2}. \quad (3.68)$$

Esta substituição apresenta os seguintes limites:

$$\lim_{\chi \rightarrow 0} u = \frac{Q + P - 2M}{4MP} = u_3, \quad (3.69)$$

$$\lim_{\chi \rightarrow \pi} u = \infty. \quad (3.70)$$

Neste caso, o intervalo de variação para χ é definido trivialmente como $0 \leq \chi \leq \pi$.

É aplicada a substituição acima à equação (3.13), após simplificações obtém-se:

$$\left(\frac{d\chi}{d\phi} \right)^2 = \frac{Q}{P} \left(1 - \frac{Q - P + 6M}{2Q} \sin^2 \frac{\chi}{2} \right), \quad (3.71)$$

$$= \frac{Q}{P} \left(1 - k^2 \sin^2 \frac{\chi}{2} \right). \quad (3.72)$$

Neste formato, fica evidente que a solução é novamente expressa em termos de integrais elípticas. Escolhendo $\phi(0) = 0$, tem-se:

$$\phi = 2\sqrt{\frac{P}{Q}} F\left(\frac{\chi}{2}, k\right). \quad (3.73)$$

Desta solução obtém-se a relação $r(\phi)$, que descreve trajetórias iniciadas em u_3 e direcionadas para a singularidade. Tais trajetórias estão representadas, em dois casos distintos, na figura 12.

3.2.3 Caso 1

Antes de qualquer análise mais detalhada, recorda-se que o Caso 1 é caracterizado pela presença de uma raiz negativa ($u_1 < 0$) e de duas raízes complexo-conjugadas ($u_2, u_3 \in \mathbb{C}$). Recorda-se também que elas devem satisfazer as relações:

$$u_1 + u_2 + u_3 = \frac{1}{2M} \quad (3.74)$$

$$u_1 \cdot u_2 \cdot u_3 = \frac{-1}{2Mb^2} \quad (3.75)$$

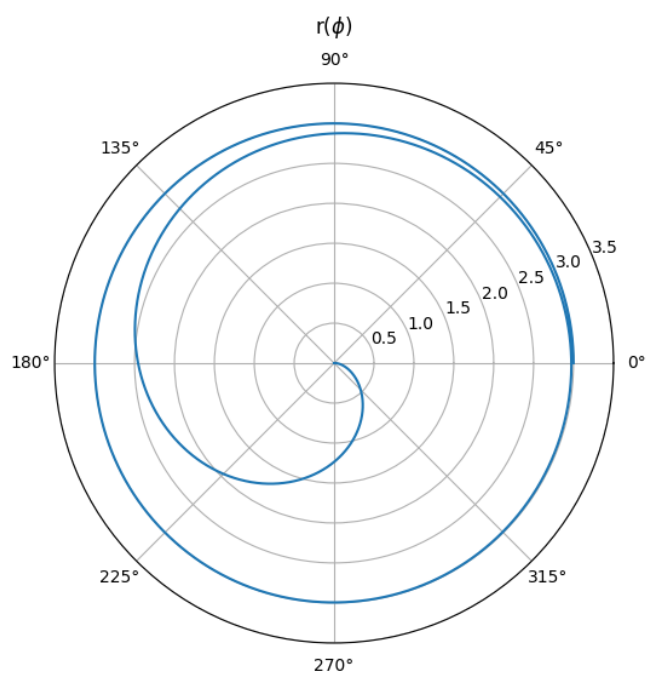
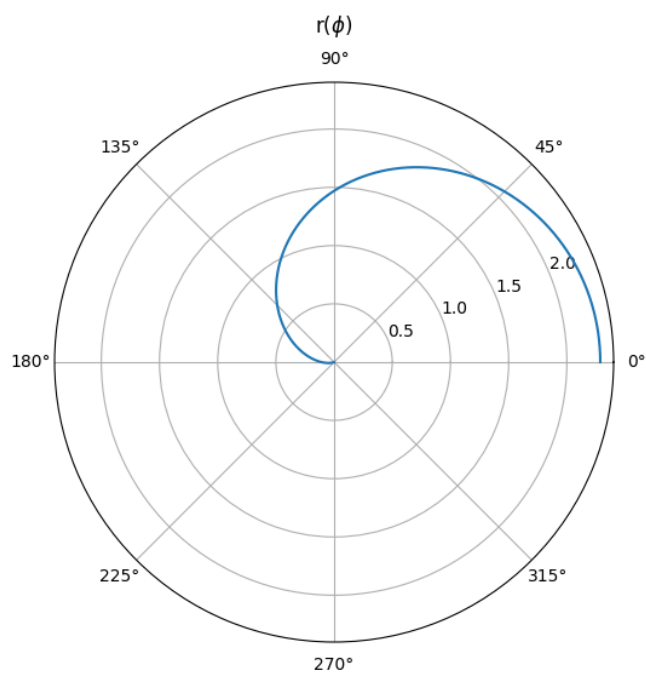

 (a) $P = (3 + 10^{-4})M$, $M = 1$

 (b) $P = 5M$, $M = 1$

 Figura 12 – Trajetórias no intervalo $[u_3, +\infty)$.

Definindo de forma geral $u_{2/3} = a \pm ic$, tem-se:

$$u_1 + u_2 + u_3 = \frac{1}{2M} \implies u_1 = \frac{1}{2M} - 2a. \quad (3.76)$$

Deste resultado surge a restrição $a \geq 1/4M$, dado que u_1 deve ser negativo. Com essas expressões para as raízes, é possível escrever o polinômio $f(u)$ na forma:

$$f(u) = 2M \left(u - \frac{1}{2M} + 2a \right) (u - a - ic)(u - a + ic), \quad (3.77)$$

$$= 2M \left(u - \frac{1}{2M} + 2a \right) [(u - a)^2 + c^2]. \quad (3.78)$$

Comparar esta expressão com a equação (3.13) leva às seguintes equações:

$$Mc^2 + a - 3Ma^2 = 0, \quad (3.79)$$

$$a^2 + c^2 - 4Ma^3 - 4Mac^2 = -\frac{1}{b^2}. \quad (3.80)$$

Da primeira equação é obtido um novo limite sobre a :

$$c^2 = 3a^2 - \frac{a}{M} \implies a > \frac{1}{3M}. \quad (3.81)$$

Ao substituir a expressão de c^2 na segunda equação, tem-se:

$$8a^3 - \frac{4a^2}{M} + \frac{a}{2M^2} = \frac{1}{2Mb^2}, \quad (3.82)$$

dado que $a > \frac{1}{3M}$,

$$b < 3\sqrt{3}M. \quad (3.83)$$

Conclui-se que o caso 1 abrange fótons com parâmetro de impacto inferior ao crítico b_c . Para confinar a variável na reta \mathbb{R}_+ , como indicado no gráfico 3a, propõe-se a substituição:

$$u = a + c \tan \frac{\gamma}{2}. \quad (3.84)$$

onde o limite inferior ($u = 0$) é dado por:

$$a + c \tan \frac{\gamma_\infty}{2} = 0 \implies \gamma_\infty = -2 \arctan \frac{a}{c}, \quad (3.85)$$

e o intervalo para γ neste caso também é trivialmente definido como $\gamma_\infty \leq \gamma \leq \pi$.

Esta substituição leva a equação (3.13) à:

$$\left(\frac{d\gamma}{d\phi}\right)^2 = 2[(6Ma - 1) + (6Ma - 1)\cos\gamma + 2Mc\sin\gamma]. \quad (3.86)$$

Neste ponto, propõe-se uma segunda substituição:

$$\sin^2\psi = \frac{1}{\Delta + 6Ma - 1} \{\Delta - 2Mc\sin\gamma - (6Ma - 1)\cos\gamma\}, \quad \Delta = \sqrt{(6Ma - 1)^2 + 4M^2c^2} \quad (3.87)$$

Para $\gamma = \pi$ obtém-se $\sin^2\psi = 1$. Já para $\gamma = \gamma_\infty$, tem-se:

$$\sin^2\psi_\infty = \frac{1}{\Delta + 6Ma - 1} \left[\Delta + \frac{6Ma^3 - 2Mc^2a + c^2 - a^2}{c^2 + a^2} \right]. \quad (3.88)$$

Considerando que $c^2 = 3a^2 - a/M$, essa expressão se reduz a

$$\sin^2\psi_\infty = \frac{\Delta + 1}{\Delta + 6Ma - 1}. \quad (3.89)$$

É instrutivo analisar graficamente o comportamento desta substituição no intervalo $\gamma_\infty \leq \gamma \leq \pi$:

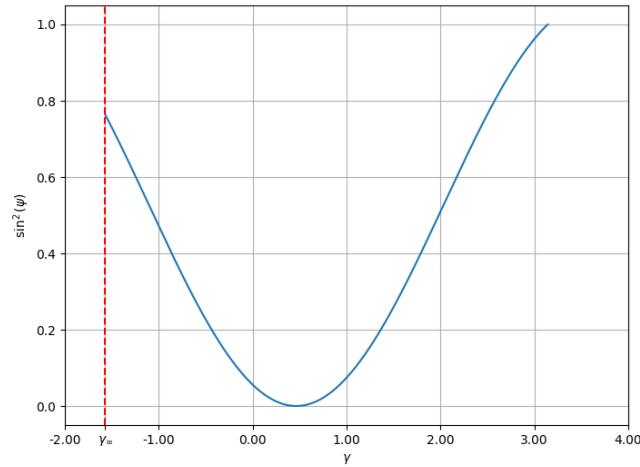


Figura 13 – $\sin^2\psi$ em função de γ .

Observa-se que o zero de $\sin^2\psi$ ocorre dentro do intervalo considerado, entre γ_∞ e $\gamma = \pi$. Conclui-se, portanto, que ψ deve satisfazer

$$\psi_\infty \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}, \quad \psi_\infty < 0 \quad (3.90)$$

De forma mais exata, o zero de $\sin^2 \psi$ é:

$$\gamma_0 = \arctan \left[\frac{2Mc}{6Ma - 1} \right]. \quad (3.91)$$

Com esta substituição, a equação (3.86) se torna:

$$\left(\frac{d\psi}{d\phi} \right)^2 = \Delta [1 - k^2 \sin^2 \psi], \quad k^2 = \frac{\Delta + 6Ma - 1}{2\Delta} \quad (3.92)$$

Para $\phi(\pi/2) = 0$, a solução é dada na forma:

$$\phi(\psi) = \frac{1}{\Delta^{1/2}} [K(k) - F(\psi, k)], \quad \psi_\infty \leq \psi \leq \frac{\pi}{2} \quad (3.93)$$

Antes de visualizar graficamente a solução $r(\phi)$, é didático fazer algumas observações sobre a equação (3.89). Foi constatado o limite $a > 1/3M$, e este é tal que,

$$\lim_{a \rightarrow 1/3M} \sin^2 \psi = 1. \quad (3.94)$$

Graficamente,

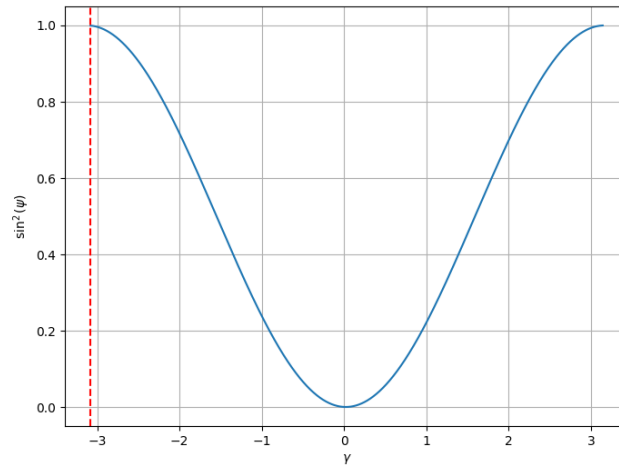


Figura 14 – $\sin^2 \psi$ para $a = (1/3 + 10^{-4})M$, $M = 1$.

Isto implica que o limite inferior do intervalo para ψ é tal que:

$$\lim_{a \rightarrow 1/3M} \psi_\infty = -\frac{\pi}{2}. \quad (3.95)$$

Além disso, é fato que $\psi_\infty < 0$ para todo $a \in (1/3M, \infty)$, pois $\gamma_\infty < 0$ neste intervalo. Este limite para a também se traduz de forma importante na equação (3.80) para b :

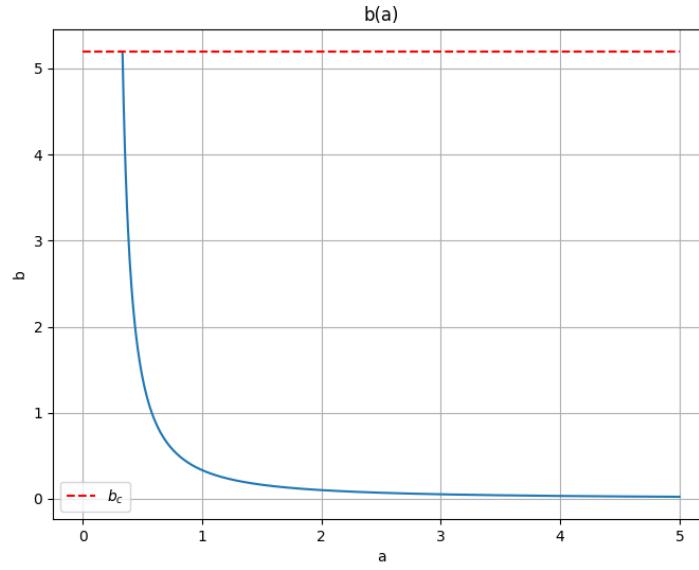


Figura 15 – parâmetro de impacto em função de a , $M = 1$.

Com o gráfico, se torna evidente que,

$$\lim_{a \rightarrow 1/3M} b = b_c. \quad (3.96)$$

Na trajetória $r(\phi)$ portanto, espera-se que estes casos se traduzam em maiores deflexões. De fato:

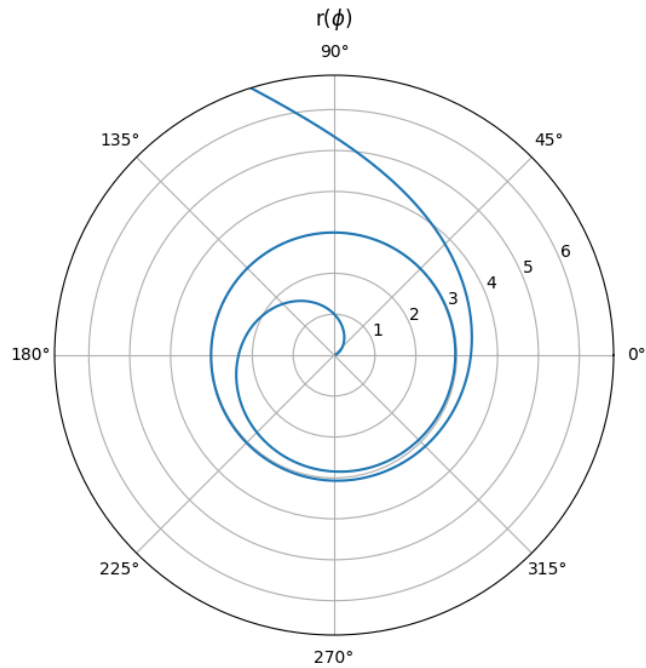


Figura 16 – $r(\phi)$ para $a = (1/3 + 10^{-6})M$, $M = 1$

A figura 17 evidencia por outro lado, que a deflexão cai rapidamente em comparação com o crescimento de a :

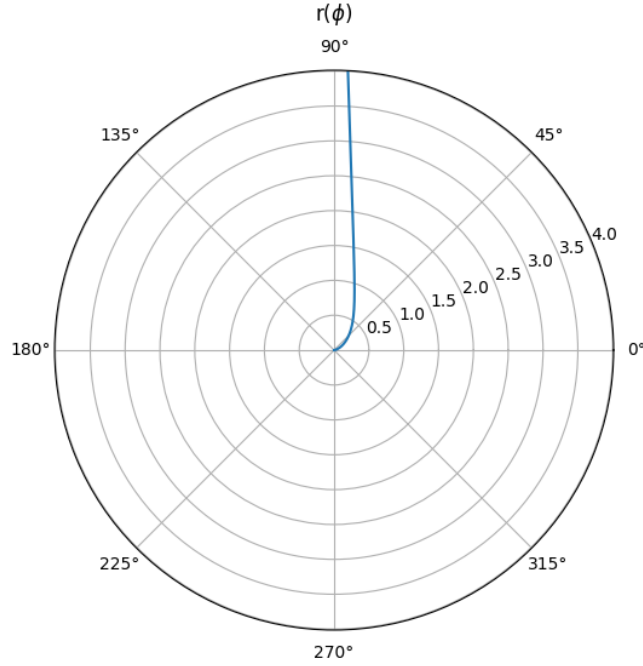


Figura 17 – $r(\phi)$ para $a = M$, $M = 1$

É válido portanto fazer, analogamente ao caso 3, a análise da deflexão total ϕ_∞ , do infinito à singularidade, onde:

$$\phi_\infty = \frac{1}{\Delta^{1/2}} [K(k) - F(\psi_\infty, k)], \quad (3.97)$$

$$= \frac{1}{[48M^2a^2 - 16Ma + 1]^{1/4}} \left[\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{(1 - k^2 \sin^2(\theta))} - \int_0^{\psi_\infty} \frac{d\theta}{(1 - k^2 \sin^2(\theta))} \right], \quad (3.98)$$

onde $c^2 = 3a^2 - a/M$ foi utilizado. Tem-se que k e Δ são tais que:

$$\lim_{a \rightarrow 1/3M} k^2 = 1, \quad \lim_{a \rightarrow 1/3M} \Delta^{1/2} = 1 \quad (3.99)$$

Aliando isto à equação (3.96), é possível obter novamente uma aproximação para a deflexão total na região $b \approx b_c$:

$$\lim_{a \rightarrow 1/3M} \phi_\infty = \lim_{a \rightarrow 1/3M} \left[\frac{K(k) - F(\psi_\infty, k)}{\Delta^{1/2}} \right] \quad (3.100)$$

$$\Rightarrow \lim_{b \rightarrow b_c} \phi_\infty = \lim_{k \rightarrow 1} K(k) - \lim_{a \rightarrow 1/3M} F(\psi_\infty, k) \quad (3.101)$$

Novamente, dada a singularidade presente em $K(k)$ para $k = 1$, busca-se a resposta por meio de uma pequena variação:

$$a = \frac{1}{3M} + \delta, \quad \delta \ll 1. \quad (3.102)$$

Para k^2 , tem-se:

$$k^2 = \frac{1}{2} + \frac{6Ma - 1}{2[48M^2a^2 - 16Ma + 1]^{1/2}} \quad (3.103)$$

$$\implies k^2|_{a=(3M)^{-1}+\delta} = 1 - \delta M + O^2(\delta). \quad (3.104)$$

Para b ,

$$b = \left(16Ma^3 - 8a^2 + \frac{a}{M}\right)^{-1/2} \quad (3.105)$$

$$\implies b|_{a=(3M)^{-1}+\delta} = b_c - \frac{(27)^{3/2}}{2}\delta M^2. \quad (3.106)$$

Deste resultado tem-se a relação:

$$\delta = \frac{2\delta b}{(27)^{3/2}M^2}, \quad \delta b = b_c - b. \quad (3.107)$$

Novamente definindo a variável $k'^2 = 1 - k^2$, ressurge a aproximação:

$$K(k) \approx \log \frac{4}{k'}, \quad (k' \rightarrow 0). \quad (3.108)$$

Logo,

$$K(k)|_{a=(3M)^{-1}+\delta} \approx \frac{1}{2} \log \left(8(27)^{3/2} \frac{M}{\delta b}\right) \quad (3.109)$$

Antes de considerar o limite para $F(\psi_\infty, k)$, é necessário relembrar 3.95. Com isto em mente, conclui-se que:

$$\lim_{a \rightarrow 1/3M} F(\psi_\infty, k) = \lim_{k \rightarrow 1} F\left(-\frac{\pi}{2}, k\right) = -\lim_{k \rightarrow 1} K(k), \quad (3.110)$$

logo,

$$\lim_{b \rightarrow b_c} \phi_\infty = \lim_{k \rightarrow 1} K(k) - \lim_{a \rightarrow 1/3M} F(\psi_\infty, k) \quad (3.111)$$

$$= \log \left(8(27)^{3/2} \frac{M}{\delta b}\right). \quad (3.112)$$

O gráfico 18 apresenta a comparação gráfica entre a aproximação obtida e o resultado exato 3.98:

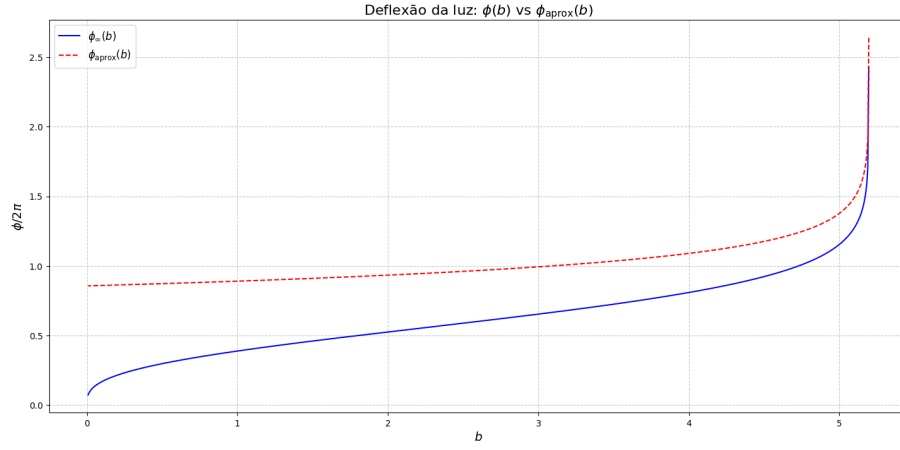


Figura 18 – Comparação entre solução exata e aproximação para ϕ_∞

Em oposição à análise do caso onde $b > b_c$, a presente aproximação diverge rapidamente. Para uma aproximação de k em segunda ordem de δ , onde

$$k'^2 = 1 - k^2 = \delta M - 12M^2\delta^2, \quad \delta = \frac{2\delta b}{(27)^{3/2}M^2} \quad (3.113)$$

tem-se:

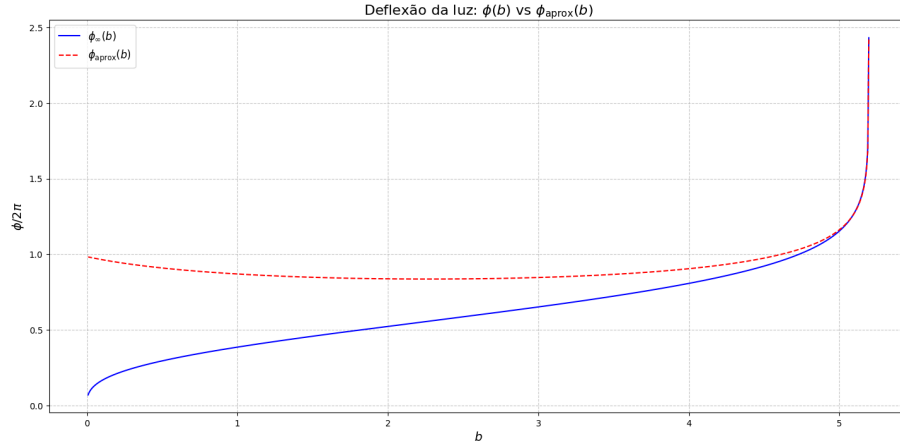


Figura 19 – Segunda comparação entre solução exata e aproximação para ϕ_∞

Tal aproximação apresenta uma concordância mais significativa nas proximidades de b_c .

4 Simulações de Buracos Negros

De posse das soluções para todas as situações possíveis, o último passo relevante é simular cenários didáticos e simplificados, a fim de obter uma intuição maior sobre a aparência de buracos negros.

No contexto deste capítulo, todas as soluções foram ajustadas para que o ângulo inicial da trajetória ($\phi = 0$) ocorra no observador distante (infinito). Como exemplo prático, a solução do caso 3 para esse ponto inicial assume a forma:

$$\phi = 2\sqrt{\frac{P}{Q}} \left(F - F\left(\frac{\chi_\infty}{2}, k\right) \right). \quad (4.1)$$

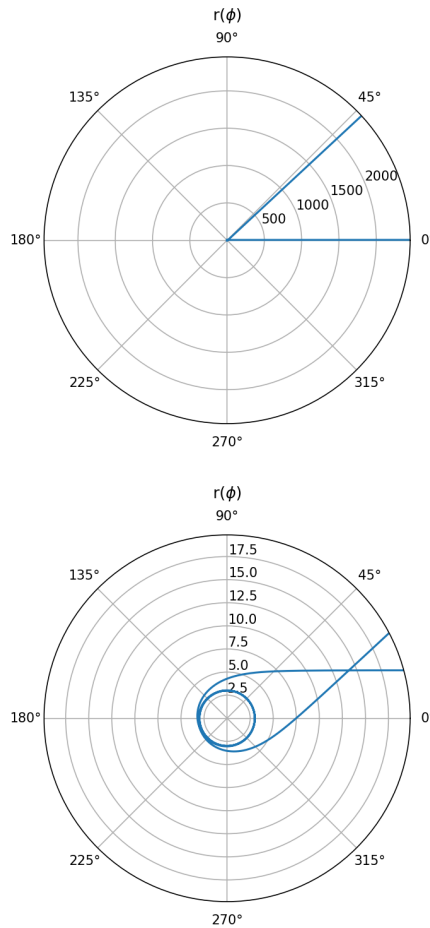


Figura 20 – Caso 3 para $\phi = 0$ no infinito.

A visualização ampliada deixa clara a coincidência entre o raio aparente e o parâmetro de impacto, que, neste caso, é $b \approx 5.196M$.

4.1 Casos Didáticos

As primeiras e mais simples simulações possíveis retratam casos irrealis, porém importantes do ponto de vista didático. São situações em que a singularidade possui uma **iluminação de fundo**: uma fonte luminosa de intensidade homogênea, posicionada no infinito.

4.1.1 Casca Esférica

Esta situação possui uma descrição simples: considera-se um observador distante da singularidade, e uma tela luminosa, de emissão homogênea e formato de casca esférica, envolvendo ambos.

Para simular a visão que o observador distante tem da singularidade, utiliza-se um “rastreamento reverso” do fóton, em que a trajetória do fóton começa no olho do observador e termina na tela esférica, ou então cai na singularidade. Fótons que encontram a tela no infinito (isto é, escapam da singularidade) são plotados com seu respectivo raio aparente (b) e a intensidade de emissão da tela (isotrópica). Fótons capturados pela singularidade não são plotados.

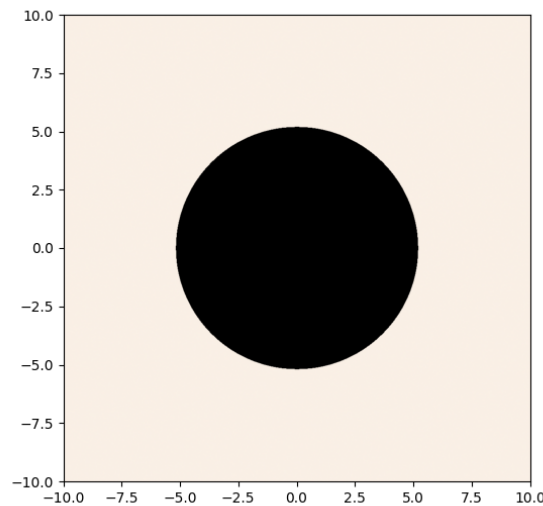


Figura 21 – Visualização para fonte isotrópica de luz.

Como esperado, a região negra da imagem corresponde a todos os fótons cujo parâmetro de impacto é inferior a b_c . Esses percorrem trajetórias que vão de encontro à singularidade.

4.1.2 Tela Infinita

Neste caso, o observador distante encara diretamente a singularidade, e atrás dela, no infinito, encontra-se uma tela de proporções infinitas e emissão homogênea. Em todas as simulações deste capítulo, aplica-se a metodologia do “rastreamento reverso”, e neste caso, para que o fóton seja plotado, não é suficiente apenas que ele escape da singularidade, mas também que, ao escapar para o infinito, o faça na direção da tela.

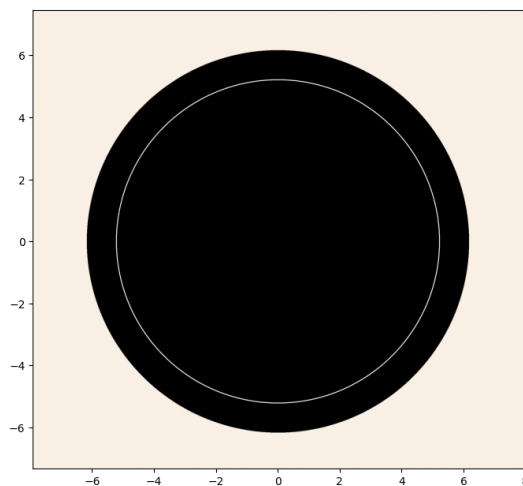


Figura 22 – Visualização para tela infinita de fundo.

Um resultado importante emerge desta simulação: a região negra se estende até $r \approx 6.17M$. Entretanto, dentro dessa área, um pequeno anel luminoso se destaca, formado por fótons com $b \approx 5.20M$. A interpretação é direta: entre b_c e $b = 6.17M$, apenas esses fótons escapam da singularidade e seguem na direção da tela de fundo.

4.2 Toy Model com Disco de Acreção

Os casos relatados anteriormente são importantes para a construção intuitiva, mas são extremamente simplificados e irreais. De forma mais realista, as fontes de luminosidade que determinam a sombra do buraco negro são os chamados discos de acreção, aglomerados de matéria que orbitam a singularidade.

Tudo o que será discutido nesta seção baseia-se no contexto representado na Figura 23. O observador distante encara a singularidade diretamente pelo “polo norte”, enquanto o disco de acreção está situado no plano equatorial. Apesar dessas considerações mais realistas, este ainda é um *toy model*, pois tanto o buraco negro quanto o disco de acreção são não girantes e eletricamente neutros.

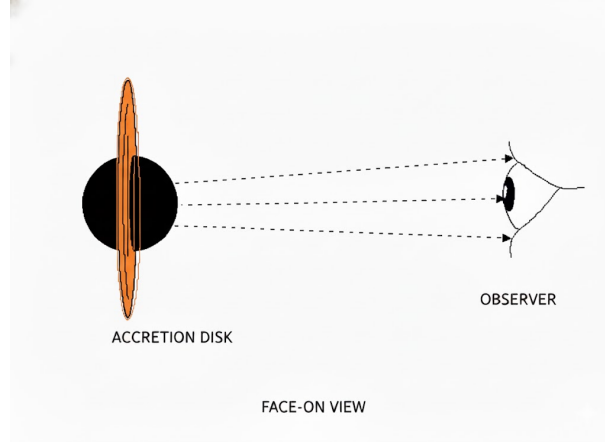


Figura 23 – Configuração das simulações: “Face-On View”.

No presente contexto, o disco é também opticamente fino, no sentido de que os fótons atravessam-no livremente, sem absorção (como no caso em que a matéria do disco é gasosa). A intensidade de emissão do disco é angularmente simétrica, dependendo apenas da distância até a singularidade.

4.2.1 Intensidade de emissão - $I(r)$

O desenvolvimento apresentado nesta seção é inspirado em Thorne ([THORNE; MISNER; WHEELER, 2000](#)).

Considera-se uma nuvem de partículas idênticas, seguindo suas respectivas trajetórias geodésicas no espaço tempo, esta nuvem é tal que **não há colisões internas**. Em um certo ponto P_0 desta trajetória, é considerado um observador local lorentziano.

Este observador, determina um volume V_x em torno de si mesmo (da origem) e um intervalo de momento linear V_p também centrado nele mesmo (referencial de repouso),

$$V_p = \Delta p^x \Delta p^y \Delta p^z, \quad V_x = \Delta x \Delta y \Delta z \quad (4.2)$$

Por fim, o observador contabiliza quantas (N) partículas da nuvem estão presentes dentro de V_x e V_p . Nota-se que as partículas possuem mesma massa, e portanto a energia está fixada pelo intervalo V_p , pois:

$$p^0 = \sqrt{m^2 + p_i p^i} \quad (4.3)$$

Por fim, define-se o **volume no espaço de fase** na seguinte forma:

$$V = V_x V_p = \Delta p^x \Delta p^y \Delta p^z \Delta x \Delta y \Delta z \quad (4.4)$$

Definitivamente dois observadores com velocidades relativas em geral não concordam sobre V_x ou V_p , porém o volume no espaço de fase é especial por ser invariante por transformações de Lorentz.

Para provar esta afirmação, considera-se um segundo observador \bar{O} , tal que os volumes ocupados por essas N partículas idênticas são:

$$V_{\bar{x}} = \Delta \bar{x} \Delta \bar{y} \Delta \bar{z}, \quad (4.5)$$

$$V_{\bar{p}} = \Delta p^{\bar{x}} \Delta p^{\bar{y}} \Delta p^{\bar{z}}, \quad (4.6)$$

Por simplicidade, a velocidade relativa β entre os dois está na direção \hat{x} , e portanto, pela contração de Lorentz:

$$V_{\bar{x}} = (1 - \beta^2)^{1/2} V_x. \quad (4.7)$$

Para encontrar a relação entre $V_{\bar{p}}$ e V_p é necessário contabilizar o jacobiano:

$$\implies J = \left| \frac{\partial p^{\bar{i}}}{\partial p^j} \right|. \quad (4.8)$$

Dada a direção do movimento relativo,

$$V_{\bar{p}} = \left| \frac{p^{\bar{0}}}{p^0} \right| V_p, \quad (4.9)$$

e dado que $p^0 = m$,

$$V_{\bar{p}} = (1 - \beta^2)^{-1/2} V_p, \quad (4.10)$$

logo,

$$V = V_x V_p = V_{\bar{x}} V_{\bar{p}}. \quad (4.11)$$

é provada assim a invariância por transformações de Lorentz do volume no espaço de fase ocupado por N partículas. Sendo N e V quantidades invariantes, a seguinte função de distribuição também é:

$$f = \frac{N}{V}. \quad (4.12)$$

Essa função representa a densidade de partículas por unidade de volume no espaço de fase. No contexto da relatividade geral, é desejável atestar o comportamento desta função ao longo da trajetória geodésica.

Para isto, em um determinado ponto desta geodésica (parametrizada pelo parâmetro afim λ) define-se um sistema de coordenadas normal, e no seu entorno a função de distribuição f . Todo observador local concorda sobre f , como provado.

Neste ponto:

$$\frac{dV}{d\lambda} \propto \frac{dV}{d\tau}, \quad V = \Delta p^x \Delta p^y \Delta p^z \Delta x \Delta y \Delta z. \quad (4.13)$$

Nota-se que para este observador, não há forças pelo princípio de equivalência de Einstein:

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = 0. \quad (4.14)$$

Com isto, é considerada a determinada configuração no espaço de fase:

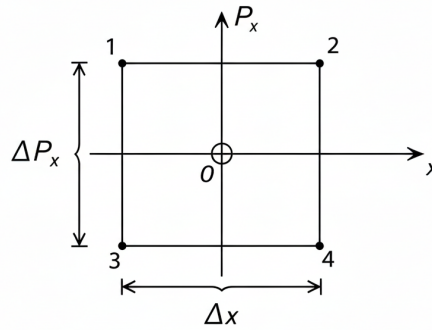


Figura 24 – Configuração inicial no espaço de fase.

nesta configuração, são escolhidos dois pontos tais que:

$$\implies (-\Delta x/2, p'_x), (\Delta x/2, p'_x), \quad (4.15)$$

de mesmo momento $p'_x > 0$. Se $v_x = p'_x/m$, após certo $\delta\tau$, tem-se:

$$\implies (-\Delta x/2 + \frac{p'_x}{m}\delta\tau, p'_x), (\Delta x/2 + \frac{p'_x}{m}\delta\tau, p'_x), \quad (4.16)$$

Nota-se portanto que a distância espacial entre os pontos se mantém:

$$\Delta x/2 - (-\Delta x/2) = \Delta x/2 + \frac{p'_x}{m}\delta\tau - \left(-\Delta x/2 + \frac{p'_x}{m}\delta\tau\right) = \Delta x. \quad (4.17)$$

Dada a condição (4.14), a evolução da figura 24 é ilustrada na figura 25. Logo, conclui-se que a área se deforma ao longo do tempo, mas sua magnitude permanece sempre a mesma:

$$A = \Delta x \Delta p_x, \quad (4.18)$$

conclui-se que:

$$\Rightarrow \frac{dA}{d\tau} = \frac{d(\Delta x \Delta p_x)}{d\tau} = 0. \quad (4.19)$$

Este argumento é válido sobre todos os pontos da geodésica, e vale da mesma forma para $\Delta y \Delta p_y$ e $\Delta z \Delta p_z$

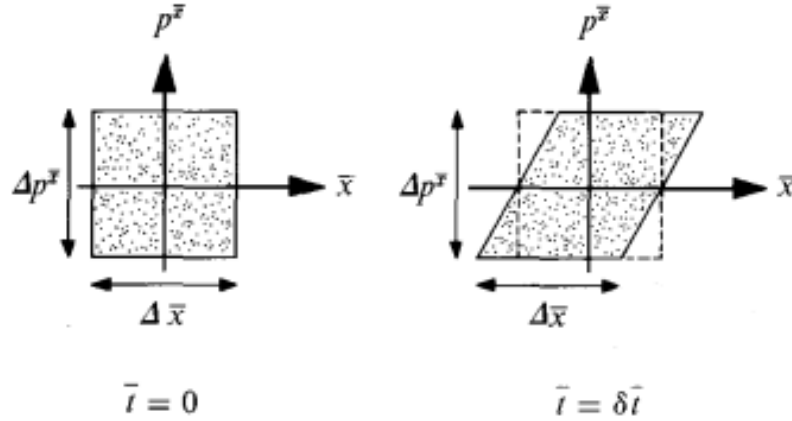


Figura 25 – Configuração no espaço de fase após $\delta\tau$. Fonte: Thorne (THORNE; MISNER; WHEELER, 2000).

Como consequência, para todos os pontos da geodésica:

$$\Rightarrow \frac{dV}{d\lambda} \propto \frac{dV}{d\tau} \quad (4.20)$$

$$\propto \frac{d}{d\tau}(\Delta p^x \Delta p^y \Delta p^z \Delta x \Delta y \Delta z) = 0. \quad (4.21)$$

Diretamente disto, conclui-se para a função de distribuição:

$$\frac{df}{d\lambda} = N \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{1}{V} \right) = 0, \quad (4.22)$$

isto é válido para todos os pontos da geodésica. O resultado exposto em (4.22) é uma prova simplificada da conhecida **equação de Boltzmann para sistemas sem colisão**. Todo o argumento construído pode ser considerado para partículas com velocidades tão próximas de $c = 1$ quanto se queira. No escopo deste documento, isto é dado como prova suficiente sobre sua validade para fótons.

Tratando de fótons, é de pouca utilidade falar diretamente de f , e portanto é construída a noção de **intensidade específica** (I_ν). Considera-se um observador, com um telescópio que capta fótons num determinado ângulo sólido Ω ilustrado na figura 26.

Todos os que cruzam a área num intervalo δt ocupam o volume $A\delta t$, e este é definido como V_x . Para simplificar a visualização de V_p à ser definido, os fótons são ilustrados “saindo do olho” (ou seja, direção do momento linear invertido) na figura 27.

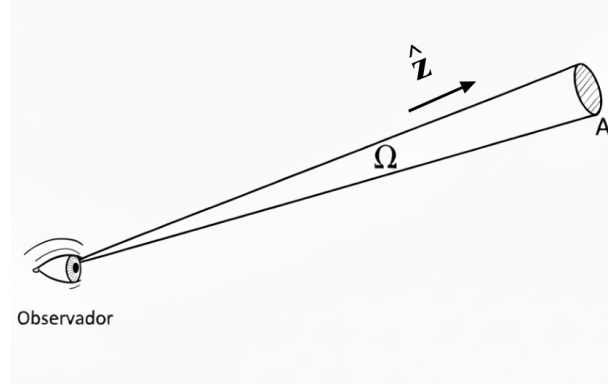


Figura 26 – Observador captando fótons no ângulo sólido Ω

Pela ilustração é evidente que $dV_p = |p|^2 dp d\Omega$, logo o volume de momento linear é definido como $V_p = |p|^2 \Delta p \Delta \Omega$.

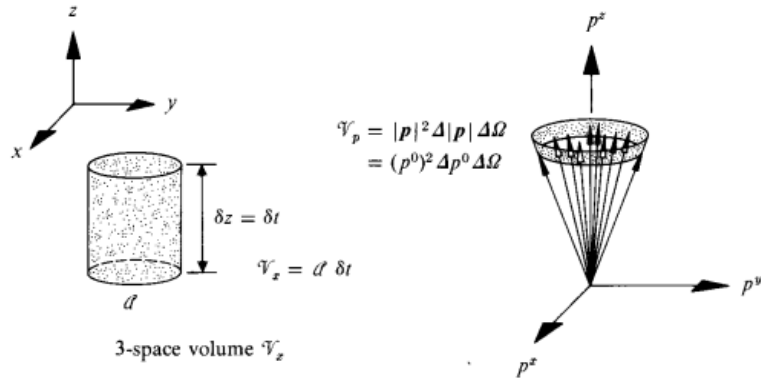


Figura 27 – Volume do momento linear, com direção invertida. Fonte: Thorne ([THORNE; MISNER; WHEELER, 2000](#)).

Definindo como δN o numero de fótons que cruzam a área A em δt , a função de distribuição f toma a forma:

$$f = \frac{\delta N}{V_x V_p}, \quad (4.23)$$

$$= \frac{\delta N}{A \delta t p^2 \Delta p \Delta \Omega}, \quad (4.24)$$

$$= \frac{\delta N}{A \delta t (p^0)^2 \Delta p^0 \Delta \Omega}, \quad (p^0 = \hbar \nu) \quad (4.25)$$

$$= \frac{\delta N}{\hbar^3 \delta t A \nu^2 \Delta \nu \Delta \Omega}. \quad (4.26)$$

Define-se portanto I_ν como o fluxo de energia por unidade de área, por unidade de tempo, por unidade de frequência, por unidade de ângulo sólido que cruza a área A do telescópio, desta forma:

$$I_\nu = \frac{\hbar \nu \delta N}{A \delta t \Delta \nu \Delta \Omega} \implies f = \hbar^3 \frac{I_\nu}{\nu^3}. \quad (4.27)$$

Uma conclusão imediata desta definição é que **a quantidade I_ν/ν^3 é conservada ao longo da trajetória**. A integração de I_ν sobre a faixa de frequência emitida dá portanto a intensidade de emissão,

$$I(r) = \int I_\nu d\nu. \quad (4.28)$$

4.2.2 Redshift gravitacional

Definida a intensidade de emissão, é importante discutir rapidamente o fator de redshift gravitacional (g), antes de qualquer avanço. Lembra-se que, no presente contexto, é utilizada a métrica de Schwarzschild. Neste espaço são definidos dois eventos: um deles como observador no infinito e o segundo como o emissor de fótons em um determinado r .

Sendo ambos estáticos, suas quadrivelocidades são:

$$u_{obs} = (1, 0, 0, 0), \quad u_{em} = \left(\sqrt{1 - \frac{2M}{r_{em}}}, 0, 0, 0 \right). \quad (4.29)$$

Dado que a variação do tempo próprio é inversamente proporcional à frequência da luz, no referencial do observador:

$$d\tau_{obs} \propto \frac{1}{\nu_{obs}}, \quad (4.30)$$

logo,

$$\frac{d\tau_{em}}{d\tau_{obs}} = \frac{\nu_{obs}}{\nu_{em}} \implies \nu_{obs} = g \nu_{em}, \quad g = \sqrt{1 - \frac{2M}{r_{em}}}. \quad (4.31)$$

Portanto, a frequência observada é sempre menor do que a emitida. Neste caso, a conservação da quantidade I_ν/ν^3 permite afirmar que a intensidade específica observada I_ν^{obs} é igual a $g^3 I_\nu^{em}$.

A intensidade de emissão observada I^{obs} é obtida ao integrar sobre $d\nu_{obs}$, logo:

$$I^{obs} = \int I_\nu^{obs} d\nu_{obs} = g^4 I(r). \quad (4.32)$$

4.2.3 Simulação do *toy model*

Bem estabelecido o conceito de intensidade de emissão, é possível discutir a lógica e os pontos fundamentais que permeiam o contexto da simulação do modelo com disco de acreção.

Assim como nos primeiros dois modelos, a trajetória dos fótons é acompanhada de modo que a marca $\phi = 0$ se encontra no observador distante. A deflexão total, portanto, é determinada quando o fóton escapa para o infinito ou é capturado pela singularidade. No caso de trajetória circular, a deflexão torna-se infinita.

O agente principal da análise nesse novo contexto é o que se define como **função de transferência** $r_m(b)$. Ao acompanhar a trajetória de um fóton capturado pelo observador com raio aparente b , e determinar a deflexão total deste utilizando as soluções apresentadas no capítulo anterior, obtém-se o número m de vezes em que esse fóton cruza o plano do disco de acreção.

Por construção, a função $r_m(b)$ representa o raio da m -ésima intersecção do fóton com o plano do disco de acreção, **fora do horizonte de eventos**. Esta função determina a aparência de cada fóton para o respectivo parâmetro de impacto b , pois, para cada raio aparente b , o observador enxerga a seguinte intensidade:

$$\Rightarrow I^{obs}(b) = \sum_m g^4 I(r) \Big|_{r_m(b)}. \quad (4.33)$$

O motivo da soma é simples: para este raio aparente, a intensidade observada é dada pelos fótons emitidos diretamente ($m = 1$), pelos fótons que têm origem na face oposta do disco ($m = 2$), pelos que completam uma volta completa ($m = 3$) e assim sucessivamente, até que o fóton escape para o infinito ou $r_m < 2M$.

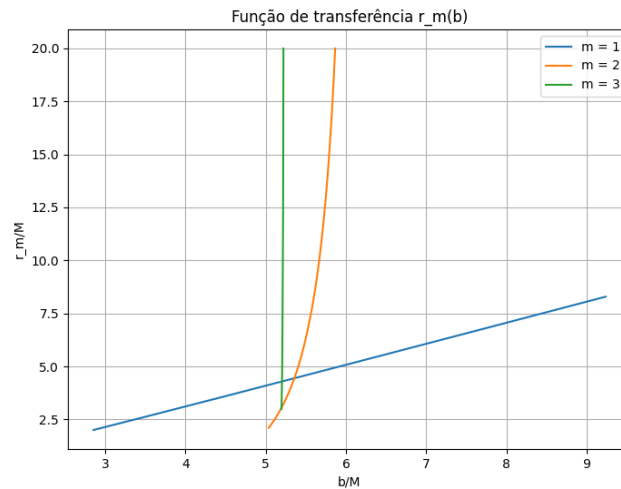


Figura 28 – $r_m(b)$ para $m = 1, 2, 3$.

Embora a construção seja válida para valores arbitrários de m , o número de fótons com parâmetros de impacto correspondentes a $m \geq 4$ é desprezível. A Figura 28 mostra a distribuição no espectro de b das ordens $m = 1, 2, 3$ das funções de transferência. A primeira ordem (emissão direta) apresenta distribuição ampla ao longo dos raios aparentes, enquanto a terceira ordem é fortemente concentrada em $b \approx 5.19M$. Observa-se também que a emissão observada possui um limite inferior em $b \approx 2.8M$.

Com todas as ferramentas necessárias estabelecidas, torna-se possível compreender e implementar a simulação do *toy model* proposto. A seguir, diversos discos de acreção são modelados pelas intensidades de emissão $I^{em}(r)$ representadas nos gráficos.

As intensidades observadas são plotadas de acordo com sua dependência no raio aparente, produzindo $I^{obs}(b)$. Em seguida, a intensidade observada é convertida em um gradiente de cores (adaptado para cada caso) variando de branco, amarelo, laranja e vermelho até preto absoluto. Tanto as intensidades emitidas quanto as observadas são normalizadas pelos respectivos valores máximos, I_{max}^{em} e I_{max}^{obs} .

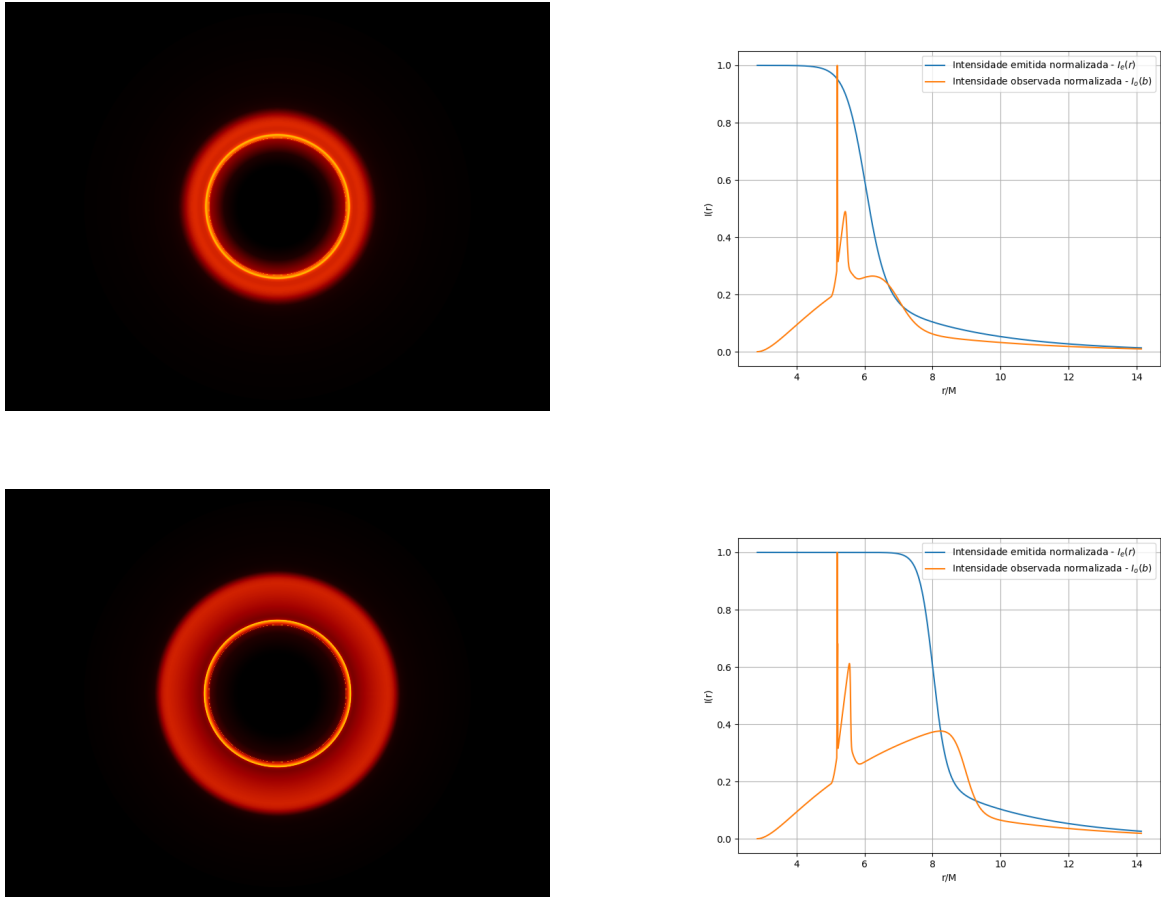


Figura 29 – Resultados da simulação de intensidade observada ($I^{obs}(b)/I_{max}^{obs}$) e as respectivas imagens da sombra do buraco negro para diferentes configurações de discos de acreção, determinados por ($I^{em}(r)/I_{max}^{em}$).

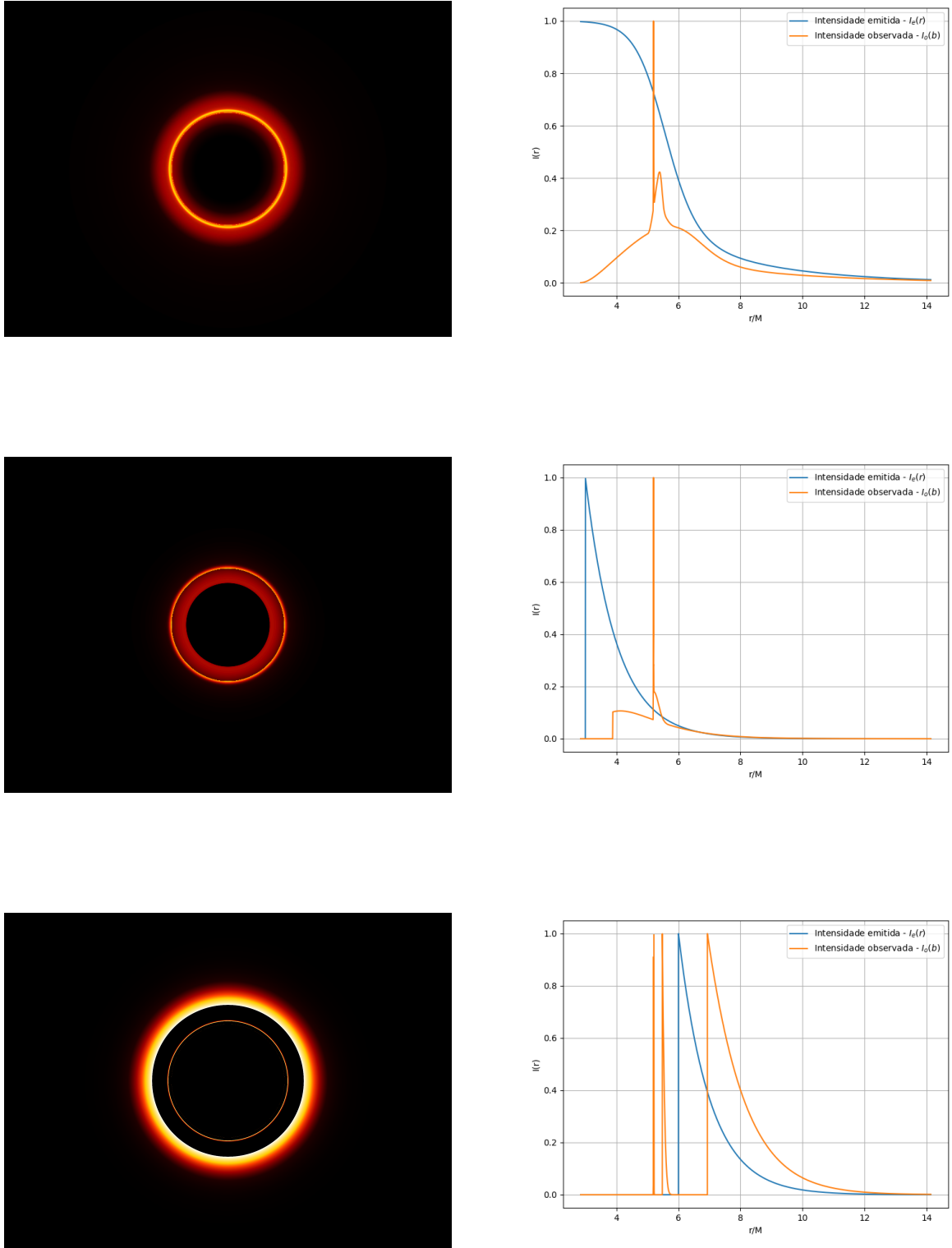


Figura 30 – Resultados da simulação de intensidade observada ($I^{obs}(b)/I_{max}^{obs}$) e as respectivas imagens da sombra do buraco negro para diferentes configurações de discos de acreção, determinados por ($I^{em}(r)/I_{max}^{em}$).

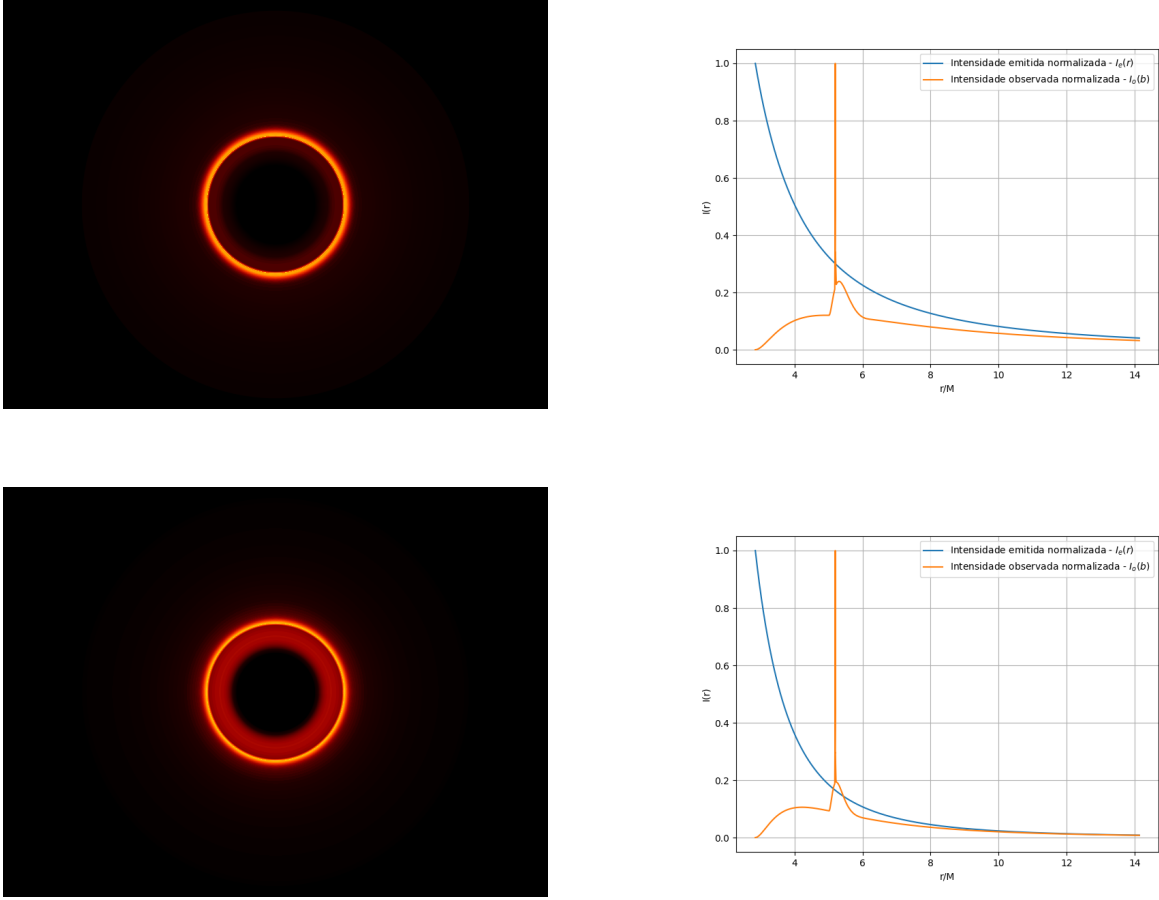


Figura 31 – Resultados da simulação de intensidade observada ($I^{obs}(b)/I_{max}^{obs}$) e as respectivas imagens da sombra do buraco negro para diferentes configurações de discos de acreção, determinados por ($I^{em}(r)/I_{max}^{em}$).

Em todas as simulações, observa-se um pico pronunciado em $b \approx 5.19M$. Este pico corresponde a fótons que executam múltiplas órbitas ao redor da singularidade, na vizinhança da órbita circular crítica em b_c , e caracteriza o **anel de fótons**. A região central escura, prevista no gráfico 28, é reproduzida de forma consistente em todas as imagens, com limite aproximadamente em $b \approx 2.8M$. Por fim, nota-se que o aspecto observacional é significativamente alterado mesmo para leves modificações na configuração do disco.

Conclusão

Os resultados obtidos a partir da formulação matemática das **geodésicas nulas** no espaço-tempo de Schwarzschild tornam clara a divisão visual dos fótons com base em seus **parâmetros de impacto** (b). Essa classificação é essencial para a interpretação correta das imagens de buracos negros, como as produzidas pelo projeto EHT.

As simulações do *toy model* com disco de acreção evidenciam que assumir a região negra central da sombra de um buraco negro como delimitada pelo raio aparente crítico ($b_c \approx 5.2M$) é um **erro categórico** e deve ser evitado (GRALLA; HOLZ; WALD, 2019). Embora a órbita circular crítica em $r = 3M$ (que corresponde ao raio aparente b_c) seja fundamental, as simulações mostram que o limite da região efetivamente escura, na presença do disco, se estende até um raio aparente menor, aproximadamente $b \approx 2.8M$. A intensidade observada apresenta um **pico pronunciado** nessa vizinhança do raio crítico, caracterizando o **anel de fótons**, o que reforça a complexidade do contorno da sombra e a necessidade de se considerar a fonte de luz, mais diretamente a configuração do disco de acreção, para a estimativa precisa dos parâmetros do buraco negro.

5 Agradecimentos

5.1 Família.

Agradeço primeiramente a minha família, por todo apoio, emocional e financeiro durante os últimos anos. Ao meu pai Eliseu, por me ensinar o verdadeiro significado de integridade e persistência, à minha mãe Elizabete pelo amor incondicional, ao meu irmão Felipe por entender minhas diferenças e me apoiar nas dificuldades, e ao meu irmão Pedro, meu amigo de infância. Aos meus avós, tios e primos, agradeço profundamente pelas palavras e atitudes de apoio.

5.2 Professores.

Agradeço a todos os professores que me ensinaram durante o curso, mas em especial ao meus orientadores e mentores neste período: Arsen Melikyan, Caio Cesar Holanda Ribeiro, Mariana Penna Lima Vitenti, Vanessa Carvalho de Andrade, Erondina Azevedo de Lima, Marco Cezar Barbosa Fernandes.

5.3 Amigos e colegas.

Agradeço a todos os amigos próximos e colegas de curso que me ajudaram e me fizeram companhia nestes anos. Dentre eles: Adriano, Alex (Arex), Alexandre Kerry, Caio Matheus, Caio Martins, Clara, Érick, Eduarda Barboza (Duda), Gabriel Patriarca, Gustavo Cunha, Hugo Diniz, João Victor, João Gabriel (Jhonni), Luana Claussen, Lucca, Luigi, Luiz Dittberner (Didi), Luiz Henrique, Lucas, Maria Eduarda, Martha Barbosa, Maria Vitória, Mateus (Matt), Mateus Luz. É difícil citar todos, e por isso estendo meu agradecimentos a todos os colegas de curso.

Em especial gostaria de agradecer a João Paulo Stawiarski Miranda (Jopa), não temos mesmo sangue, mas não penso duas vezes antes de te chamar de irmão.

Referências

ABBOTT, B. P.; COLLABORATION others L. S.; COLLABORATION), V. Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger. *Physical Review Letters*, v. 116, p. 061102, 2016. Disponível em: <<https://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.116.061102>>. Citado na página 10.

AKIYAMA, K. et al. First m87 event horizon telescope results. i. the shadow of the supermassive black hole. *The Astrophysical Journal Letters*, Institute of Physics, v. 875, 2019. Citado na página 10.

CARROLL, S. M. *Spacetime and geometry*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2019. Citado 6 vezes nas páginas 12, 15, 17, 19, 22 e 27.

CHANDRASEKHAR, S. The maximum mass of ideal white dwarfs. *Astrophysical Journal*, v. 74, p. 81–82, 1931. Citado na página 8.

CHANDRASEKHAR, S.; THORNE, K. S. *The mathematical theory of black holes*. [S.l.]: American Association of Physics Teachers, 1985. Citado na página 35.

DAS, A. *Lectures on gravitation*. [S.l.]: World scientific, 2011. Citado 6 vezes nas páginas 4, 17, 19, 22, 27 e 34.

EDDINGTON, A. S. *The mathematical theory of relativity*. [S.l.]: The University Press, 1923. Citado na página 8.

EINSTEIN, A. On a stationary system with spherical symmetry consisting of many gravitating masses. *Annals of Mathematics*, JSTOR, v. 40, n. 4, p. 922–936, 1939. Citado na página 8.

GENZEL, R.; EISENHAUER, F.; GILLESSEN, S. The galactic center massive black hole and nuclear star cluster. *Reviews of modern physics*, APS, v. 82, n. 4, p. 3121–3195, 2010. Citado na página 9.

GHEZ, A. M. et al. Measuring distance and properties of the milky way’s central supermassive black hole with stellar orbits. *The Astrophysical Journal*, IOP Publishing, v. 689, n. 2, p. 1044, 2008. Citado na página 9.

GRADSHTEYN, I. S.; RYZHIK, I. M. *Table of integrals, series, and products*. [S.l.]: Academic press, 2014. Citado na página 43.

GRALLA, S. E.; HOLZ, D. E.; WALD, R. M. Black hole shadows, photon rings, and lensing rings. *Physical Review D*, APS, v. 100, n. 2, p. 024018, 2019. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 69.

HAWKING, S. W. The occurrence of singularities in cosmology. . causality and singularities. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, The Royal Society London, v. 300, n. 1461, p. 187–201, 1967. Citado na página 9.

LEMAÎTRE, G. The expanding universe. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, v. 91, p. 490–501, 1931. Citado na página 8.

OPPENHEIMER, J. R.; SNYDER, H. On continued gravitational contraction. *Physical Review*, American Physical Society, v. 56, n. 5, p. 455–459, 1939. Citado na página 9.

PENROSE, R. Gravitational collapse and space-time singularities. *Physical Review Letters*, APS, v. 14, n. 3, p. 57, 1965. Citado na página 9.

RUFFINI, R.; WHEELER, J. A. Introducing the Black Hole. *Physics Today*, v. 24, p. 30–41, 1971. Citado na página 9.

THORNE, K. S.; MISNER, C. W.; WHEELER, J. A. *Gravitation*. [S.l.]: Freeman San Francisco, 2000. Citado 4 vezes nas páginas 4, 59, 62 e 63.

WALD, R. M. *General relativity*. [S.l.]: University of Chicago press, 2010. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 15.