

Ângelo Giordano Silveira Alves

Fundamentos da Teoria Quântica de
Campos: Do Campo Escalar à
Eletrodinâmica Quântica

Brasília

3 de dezembro de 2025

Ângelo Giordano Silveira Alves

Fundamentos da Teoria Quântica de Campos: Do Campo Escalar à Eletrodinâmica Quântica

Trabalho de conclusão de curso apresentado
ao curso de Física da Universidade de Brasília
como requisito parcial para obtenção do
título de Bacharel em Física.

Universidade de Brasília - UnB
Instituto de Física
Curso de Física

Orientador: Carolina Matte Gregory

Brasília
3 de dezembro de 2025

Resumo

Este trabalho apresenta uma introdução sistemática aos fundamentos da Teoria Quântica de Campos (TQC), desde a quantização canônica do campo escalar até a Eletrodinâmica Quântica (QED). Iniciamos com a teoria clássica de campos e sua quantização, estabelecendo o formalismo de Heisenberg e a interpretação de partículas como excitações do vácuo através do espaço de Fock. A extensão para o campo escalar complexo introduz números quânticos conservados via teorema de Noether. Desenvolvemos a teoria de propagadores e funções de Green, conectando-os a amplitudes físicas através da fórmula de Lehmann-Symanzik-Zimmermann. O formalismo de teoria de perturbação é construído através do quadro de interação e do teorema de Wick, culminando nos diagramas de Feynman. A construção do campo de Dirac parte das representações espinoriais do grupo de Lorentz, abordando quiralidade, helicidade e quantização fermiônica. A teoria de Yukawa serve como aplicação das regras de Feynman para férmions. Concluimos com a formulação da QED: simetria de gauge $U(1)$ local, quantização do campo eletromagnético, acoplamento minimal com a matéria e processos de espalhamento.

Palavras-chave: teoria quântica de campos; propagadores; causalidade; quantização canônica; QED.

Abstract

This work presents a systematic introduction to the fundamentals of Quantum Field Theory (QFT), from the canonical quantization of the scalar field to Quantum Electrodynamics (QED). We begin with classical field theory and its quantization, establishing the Heisenberg formalism and the interpretation of particles as vacuum excitations through the Fock space. The extension to the complex scalar field introduces conserved quantum numbers via Noether's theorem. We develop the theory of propagators and Green's functions, connecting them to physical amplitudes through the Lehmann-Symanzik-Zimmermann formula. The perturbation theory formalism is constructed through the interaction picture and Wick's theorem, culminating in Feynman diagrams. The construction of the Dirac field starts from the spinorial representations of the Lorentz group, addressing chirality, helicity and fermionic quantization. Yukawa theory serves as an application of Feynman rules for fermions. We conclude with the formulation of QED: local $U(1)$ gauge symmetry, quantization of the electromagnetic field, minimal coupling with matter and scattering processes.

Keywords: quantum field theory; propagators; causality; canonical quantization; QED.

Sumário

1	Introdução	7
2	Fundamentos e Quantização do Campo Escalar	8
2.1	Introdução e Unidades	8
2.1.1	Unidades Naturais e Escalas	9
2.2	Teoria Clássica de Campos	10
2.2.1	Formalismo Hamiltoniano	13
2.3	Quantização Canônica do Campo Escalar	14
2.3.1	Expansão em Modos Normais	14
2.3.2	Hamiltoniano e Energia de Ponto Zero	15
2.4	Partículas	16
2.4.1	Estados de uma partícula, energia e momento	16
2.4.2	Espaço de Fock	17
2.5	Campo Escalar Complexo	18
2.6	O Formalismo de Heisenberg	20
2.6.1	Equação de Heisenberg	21
2.6.2	Dinâmica dos operadores em Heisenberg	21
3	Causalidade e Propagadores	23
3.1	Histórico e Fundamentos Físicos da Causalidade	23
3.1.1	Comutador do campo e função de Pauli–Jordan	23
3.2	Funções de Green e Amplitudes	24
3.2.1	Funções de Green e Soluções com Fonte	24
3.2.2	Estrutura das Funções de Green	25
3.2.3	Fórmula de LSZ	25
3.3	Propagadores e Causalidade	25
3.3.1	Construção via Transformada de Fourier	26
3.3.2	Polos, Contornos e Comutador	26
3.4	Campos Não Relativísticos	27
4	Teoria de Perturbação e Diagramas	29
4.1	O Quadro de Interação e a Fórmula de Dyson	29
4.1.1	Operadores, Estados e o Operador de Evolução	29
4.1.2	Fórmula de Dyson e a Matriz de Espalhamento	30
4.2	Uma Primeira Olhada no Espalhamento	30
4.2.1	A Matriz S e sua Expansão Perturbativa	30
4.2.2	Estados de Partículas e Normalização Relativística	31
4.3	O Teorema de Wick	32
4.3.1	Ordenamento Normal, Ordenamento Temporal e Contrações	32
4.3.2	Enunciado Geral e Aplicação à Teoria de Espalhamento	33
4.4	Diagramas de Feynman	33
4.4.1	Da Série de Dyson aos Diagramas	33
4.4.2	Elementos Básicos dos Diagramas e Regras	34
4.4.3	Os invariantes de Mandelstam s, t, u	36
4.5	Seções de Choque e Taxas de Decaimento	37
4.5.1	Seções de Choque	38
4.5.2	Taxas de Decaimento	38

5	O Campo de Dirac	40
5.1	A Equação de Dirac	40
5.1.1	O Grupo de Lorentz e sua Álgebra	40
5.1.2	Geradores e Álgebra de Lorentz	41
5.1.3	Decomposição em Duas Cópias de $SU(2)$	41
5.1.4	O Espaço de Representações Espinoriais	42
5.1.5	Construção da Ação e Equação de Movimento	43
5.2	Espinores Quirais e a Matriz γ^5	44
5.2.1	Decomposição quiral do espinor de Dirac	45
5.2.2	Propriedades do Operador γ^5 e dos Projetores Quirais	46
5.2.3	Quiralidade e Transformações de Paridade	47
5.2.4	Estrutura da Ação em Termos de Quiralidades	47
5.3	Soluções de Onda Plana da Equação de Dirac	47
5.3.1	A equação no espaço de momento	48
5.3.2	Soluções explícitas no repouso	49
5.3.3	Soluções gerais e transformação de Lorentz	51
5.3.4	Relações de normalização	53
5.3.5	Helicidade e quiralidade	55
5.4	Quantização do Campo de Dirac	56
5.4.1	O Lagrangiano de Dirac	57
5.4.2	Momento canônico e hamiltoniano	58
5.4.3	Expansão em modos e operadores de criação e destruição	59
5.4.4	O teorema spin-estatística	61
5.4.5	Operadores de energia e carga	62
5.5	Interpretação de Dirac e Propagadores Fermiônicos	64
5.5.1	Interpretação de Dirac e estrutura do vácuo	64
5.5.2	Funções de Green e propagador fundamental	64
5.5.3	Propagador de Feynman	65
5.5.4	Causalidade e anticomutadores	66
5.6	Férmions de Majorana e Simetrias Conservadas	66
5.6.1	Conjugação de Carga e Férmions de Majorana	66
5.6.2	Correntes Conservadas e Simetria Global	67
5.6.3	Simetrias Discretas e Propriedades de Conjugação	68
5.6.4	Corrente Axial e Simetria Quiral	69
5.7	Interações de Yukawa e Regras de Feynman para Férmions	71
5.7.1	O lagrangiano de Yukawa	71
5.7.2	Expansão perturbativa e vértices de interação	71
5.7.3	Linhas externas e espinores	72
5.7.4	Regras de Feynman para férmions	73
5.7.5	Conservação de corrente e simetrias	75
6	Eletrodinâmica Quântica	77
6.1	O Campo de Maxwell e a Simetria de Gauge	77
6.1.1	Da simetria global à construção completa da teoria de gauge	77
6.1.2	Equações de movimento e conservação de corrente	79
6.2	Quantização do Campo Eletromagnético	79
6.2.1	Estrutura clássica e redundância de gauge	79
6.2.2	Fixação de gauge: calibre de Lorentz	80
6.2.3	Quantização canônica no gauge de Coulomb	81

6.2.4	Expansão em modos e operadores de criação e destruição	82
6.2.5	Graus de liberdade físicos	84
6.3	Acoplamento entre o Campo Eletromagnético e a Matéria	85
6.3.1	Acoplamento minimal com férmions	86
6.3.2	Corrente e equações de movimento	87
6.3.3	Acoplamento a campos escalares complexos	89
6.3.4	Invariância de gauge e conservação da carga	90
6.4	Regras de Feynman da Eletrodinâmica Quântica	92
6.4.1	Propagadores livres	92
6.4.2	Vértice de interação	94
6.4.3	Regras de Feynman completas para QED	95
6.4.4	Gauge fixing e independência física	97
6.5	Processos de Espalhamento em Eletrodinâmica Quântica	98
6.5.1	Amplitude de transição e seção de choque	98
6.5.2	Espalhamento elétron-fóton (Compton)	99
6.5.3	Espalhamento elétron-pósitron (Bhabha)	99
6.5.4	Espalhamento elétron-elétron (Møller)	100
6.6	O Potencial de Coulomb em QED	101
6.6.1	Troca de fóton virtual	101
6.6.2	Transformada para o espaço real	101
7	Conclusão	103
8	Referências	104

1 Introdução

A Teoria Quântica de Campos (TQC) constitui a base fundamental para a descrição das interações elementares da natureza, unificando os princípios da mecânica quântica com a relatividade especial. Sua formulação permite tratar sistemas onde o número de partículas não é conservado, incorporando naturalmente processos de criação e aniquilação através da promoção de campos clássicos a operadores quânticos.

O desenvolvimento histórico da TQC foi impulsionado pela necessidade de quantizar o campo eletromagnético e descrever consistentemente a interação entre luz e matéria. A Eletrodinâmica Quântica (QED), primeira teoria quântica de campos completa, emergiu dos trabalhos de Dirac, Heisenberg, Pauli, Feynman, Schwinger e Tomonaga, estabelecendo o paradigma para as teorias de gauge modernas.

Este trabalho apresenta uma introdução sistemática aos fundamentos da TQC, seguindo uma progressão conceitual que parte dos elementos mais simples e constrói gradualmente a complexidade necessária para formular a QED. Iniciamos com a quantização canônica do campo escalar real, estabelecendo a estrutura do espaço de Fock e a interpretação de partículas como excitações quantizadas do vácuo. O formalismo de Heisenberg fornece a descrição dinâmica onde os operadores de campo evoluem no tempo. A extensão para o campo escalar complexo introduz números quânticos conservados através do teorema de Noether, ilustrando como simetrias globais geram cargas conservadas.

Desenvolvemos a estrutura dos comutadores de campos e a função de Pauli-Jordan, mostrando como a causalidade relativística emerge na teoria. Os propagadores e funções de Green aparecem naturalmente, conectando-se a observáveis físicos através da fórmula de Lehmann-Symanzik-Zimmermann (LSZ). A teoria de perturbação é construída através do quadro de interação e do teorema de Wick, culminando nos diagramas de Feynman e suas aplicações ao cálculo de seções de choque e taxas de decaimento.

A introdução do campo de Dirac amplia o formalismo para férmions relativísticos, partindo das representações espinoriais do grupo de Lorentz. Discutimos quiralidade, helicidade e a quantização fermiônica através de anticomutadores, ilustrando o teorema spin-estatística. A teoria de Yukawa serve como primeira aplicação das regras de Feynman para férmions.

O trabalho culmina com a construção da Eletrodinâmica Quântica. A simetria de gauge $U(1)$ local determina a forma da interação entre matéria e radiação através do acoplamento minimal. Desenvolvemos a quantização do campo eletromagnético em diferentes gauges, derivamos as regras de Feynman completas da QED e as aplicamos a processos de espalhamento elementares.

2 Fundamentos e Quantização do Campo Escalar

2.1 Introdução e Unidades

A teoria quântica de campos, ou TQC, é uma generalização natural da mecânica quântica construída para ser compatível com os princípios da relatividade especial. Essa formulação tornou-se indispensável diante das limitações que surgem ao tentar descrever sistemas relativísticos com base apenas nos conceitos da mecânica quântica não-relativística.

Um dos principais problemas dessa abordagem tradicional é a suposição de que o número de partículas em um sistema permanece constante ao longo do tempo. Embora essa hipótese funcione bem em regimes de baixa energia, ela se torna inadequada quando lidamos com escalas energéticas comparáveis à massa de repouso das partículas. Conforme demonstraremos, a combinação dos princípios quânticos com a relatividade torna inevitáveis os fenômenos de criação e aniquilação de partículas.

Para evidenciar essa limitação, consideremos uma partícula de massa m confinada a uma região espacial de tamanho Δx . Pelo princípio da incerteza de Heisenberg, a incerteza em seu momento será da ordem de

$$\Delta p \sim \frac{\hbar}{\Delta x}.$$

Em um contexto relativístico, isso implica uma incerteza na energia aproximadamente igual a

$$\Delta E \sim \frac{\hbar c}{\Delta x}.$$

Quando Δx se aproxima do comprimento de Compton, $\lambda_C = \hbar/(mc)$, a incerteza na energia atinge valores da ordem de mc^2 . Isso indica que o sistema possui energia suficiente para a produção de pares partícula-antipartícula, tornando inadequada qualquer descrição baseada em um número fixo de partículas.

A teoria quântica de campos resolve esse impasse ao reformular a própria ontologia da teoria: em vez de partículas como entidades fundamentais, são os campos quânticos que constituem os objetos básicos. As partículas emergem como excitações quantizadas desses campos, o que explica naturalmente os fenômenos de criação e aniquilação, além de justificar por que partículas de um mesmo tipo são indistinguíveis.

Neste trabalho, seguimos a abordagem da quantização canônica, partindo da formulação clássica dos campos e avançando até a construção dos operadores quânticos e do espaço de Fock. O texto começa com o estudo do campo escalar, incluindo a versão complexa e o formalismo no quadro de Heisenberg. Depois, analisamos causalidade, funções de Green e propagadores, destacando como essas ferramentas permitem relacionar a dinâmica dos campos com amplitudes físicas. Na sequência, apresentamos a teoria de perturbação, o quadro de interação, o teorema de Wick e os diagramas de Feynman, que organizam o cálculo de processos de espalhamento. Em seguida, estendemos o formalismo para o campo de Dirac, discutindo soluções, quantização fermiônica, simetrias e a teoria de Yukawa. Por fim, aplicamos esses resultados à QED, tratando da simetria de gauge,

da quantização do campo eletromagnético e do cálculo de amplitudes, incluindo a derivação do potencial de Coulomb, de modo a mostrar como os principais elementos da teoria quântica de campos se conectam na descrição das partículas e interações fundamentais.

2.1.1 Unidades Naturais e Escalas

Em teoria quântica de campos (TQC), é comum adotar um sistema de unidades que torne as expressões matemáticas mais simples e revele com clareza as estruturas fundamentais da teoria. O sistema de unidades naturais é definido pelas condições $\hbar = c = 1$, em que \hbar é a constante de Planck reduzida e c é a velocidade da luz no vácuo. Com essa escolha, expressamos todas as grandezas físicas em termos de uma única unidade, geralmente a de energia.

No Sistema Internacional de Unidades (SI), as dimensões físicas das constantes fundamentais são:

$$[c] = LT^{-1}, \quad (2.1)$$

$$[\hbar] = ML^2T^{-1}. \quad (2.2)$$

Ao fixarmos $\hbar = c = 1$, as unidades de tempo e comprimento deixam de ser independentes, podendo ser expressas em termos de energia ou massa. Utilizando $E = \hbar\omega$ e $E = mc^2$, obtemos as relações:

$$\text{Energia} \sim \text{Massa} \sim \text{Momento}, \quad (2.3)$$

$$\text{Tempo} \sim \text{Comprimento} \sim \frac{1}{\text{Energia}}. \quad (2.4)$$

Como unidade prática de energia, utiliza-se o elétron-volt (eV). Em física de partículas, é comum trabalhar com múltiplos como MeV (10^6 eV) ou GeV (10^9 eV), pois refletem melhor as escalas envolvidas em experimentos de altas energias.

Um exemplo importante de escala natural é o comprimento de Compton, definido para uma partícula de massa m por:

$$\lambda_C = \frac{\hbar}{mc} \quad \Rightarrow \quad \lambda_C = \frac{1}{m} \quad (\text{em unidades naturais}).$$

Esse comprimento representa a menor escala espacial em que uma partícula pode ser localizada sem que efeitos relativísticos, como a criação de pares, se tornem significativos. Para $\Delta x \lesssim \lambda_C$, a energia necessária para confinar a partícula ultrapassa sua energia de repouso, permitindo a produção de partículas adicionais. Alguns exemplos ilustrativos são:

- Elétron: $m_e = 0,511 \text{ MeV} \quad \Rightarrow \quad \lambda_e \approx 3,9 \times 10^{-11} \text{ cm},$
- Múon: $m_\mu = 105,7 \text{ MeV} \quad \Rightarrow \quad \lambda_\mu \approx 1,9 \times 10^{-13} \text{ cm},$
- Próton: $m_p = 938,3 \text{ MeV} \quad \Rightarrow \quad \lambda_p \approx 2,1 \times 10^{-14} \text{ cm}.$

Análise Dimensional da Lagrangiana

Na TQC, a análise dimensional baseia-se na exigência de que a ação S seja adimensional (isto é, um número puro). Como a ação é dada por

$$S = \int d^4x \mathcal{L},$$

segue-se que a densidade lagrangiana \mathcal{L} deve ter dimensão de massa à quarta potência, ou seja,

$$[\mathcal{L}] = 4.$$

Para um campo escalar real $\phi(x)$, a lagrangiana livre é:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2}m^2 \phi^2.$$

Queremos determinar a dimensão de ϕ . Note que o operador derivada ∂_μ tem dimensão de massa, pois $[x^\mu] = -1$. Assim:

$$[(\partial_\mu \phi)^2] = 2 + 2[\phi],$$

e como $\mathcal{L} \sim (\partial_\mu \phi)^2 \sim \phi^2 m^2$, e $[\mathcal{L}] = 4$, obtemos:

$$[\phi] = 1.$$

Ou seja, o campo escalar tem dimensão de energia (ou massa) na unidade natural. Essa informação será fundamental para classificar os termos de interação em uma teoria, por exemplo, se uma interação é renormalizável ou não. Sendo assim, a análise dimensional permite, portanto, estimar como diferentes termos da lagrangiana contribuem em distintas escalas de energia. Ela é uma ferramenta crucial para entender o comportamento de teorias em regimes de altas energias, e será essencial para a discussão da renormalização e da consistência teórica de modelos físicos realistas.

2.2 Teoria Clássica de Campos

Para descrever sistemas com infinitos graus de liberdade distribuídos no espaço-tempo, como ocorre em ondas eletromagnéticas ou em partículas relativísticas, é necessário utilizar uma teoria de campos. Diferentemente da mecânica de partículas, na qual as variáveis dinâmicas são posições e momentos de um número finito de partículas, a teoria de campos trata de funções que dependem de todas as coordenadas espaciais e do tempo, isto é, campos $\phi(\vec{x}, t)$.

Cada ponto do espaço carrega sua própria cópia dessas variáveis dinâmicas. Assim, os campos são funções

$$\phi_a(x), \quad x^\mu = (t, \vec{x}),$$

onde o índice a distingue diferentes componentes do campo, como sabores, cargas ou graus de liberdade internos.

A dinâmica de um campo clássico é especificada por uma densidade lagrangiana

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi_a, \partial_\mu \phi_a),$$

função dos campos e de suas derivadas em relação ao espaço-tempo. A ação é definida por

$$S[\phi] = \int d^4x \mathcal{L}(\phi_a, \partial_\mu \phi_a). \quad (2.5)$$

O princípio variacional de Hamilton estabelece que a ação deve ser estacionária sob variações arbitrárias $\delta\phi_a$ que desapareçam na fronteira,

$$\delta S = 0.$$

A variação explícita da ação é

$$\delta S = \int d^4x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_a} \delta\phi_a + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_a)} \delta(\partial_\mu \phi_a) \right). \quad (2.6)$$

O segundo termo pode ser integrado por partes:

$$\int d^4x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_a)} \delta(\partial_\mu \phi_a) = \int d^4x \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_a)} \delta\phi_a \right) - \int d^4x \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_a)} \right) \delta\phi_a. \quad (2.7)$$

O primeiro termo se anula pelas condições de fronteira, de modo que

$$\delta S = \int d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_a} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_a)} \right) \right] \delta\phi_a.$$

Como $\delta\phi_a$ é arbitrário, obtemos as equações de Euler–Lagrange para campos:

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_a)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_a} = 0. \quad (2.8)$$

Como exemplo, considere o campo escalar real com densidade lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2. \quad (2.9)$$

Calculamos os termos necessários:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} = \partial^\mu \phi, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = -m^2 \phi.$$

Substituindo na equação de Euler–Lagrange,

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi + m^2 \phi = 0, \quad (2.10)$$

ou, definindo o operador d'Alembert,

$$\square = \partial^\mu \partial_\mu = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2,$$

obtemos a equação de Klein–Gordon:

$$(\square + m^2)\phi(x) = 0. \quad (2.11)$$

Suas soluções podem ser escritas como superposição de ondas planas:

$$\phi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left(A_{\vec{p}} e^{-ip \cdot x} + A_{\vec{p}}^* e^{ip \cdot x} \right), \quad (2.12)$$

com $p^0 = \omega_{\vec{p}} = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$. O termo com $e^{-ip \cdot x}$ representa modos de energia positiva e o termo com $e^{ip \cdot x}$, modos de energia negativa.

Um aspecto fundamental no formalismo lagrangiano é o papel das simetrias. O Teorema de Noether estabelece que, se uma transformação infinitesimal dos campos

$$\phi_a(x) \longrightarrow \phi_a(x) + \delta\phi_a(x)$$

faz a lagrangiana variar apenas por um divergente total,

$$\delta\mathcal{L} = \partial_\mu F^\mu,$$

então a ação permanece invariante e há uma corrente conservada. A variação explícita da lagrangiana é

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_a} \delta\phi_a + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_a)} \delta(\partial_\mu\phi_a), \quad (2.13)$$

e, integrando por partes o último termo,

$$\delta\mathcal{L} = \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_a} - \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_a)} \right) \right] \delta\phi_a + \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_a)} \delta\phi_a \right).$$

O termo entre colchetes se anula pelas equações de Euler–Lagrange e, comparando com a hipótese inicial, identificamos a corrente conservada

$$j^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_a)} \delta\phi_a - F^\mu, \quad (2.14)$$

que satisfaz

$$\partial_\mu j^\mu = 0. \quad (2.15)$$

A carga associada é

$$Q = \int d^3x j^0(x), \quad \frac{dQ}{dt} = 0. \quad (2.16)$$

Como casos importantes, a invariância por translação temporal leva à conservação da energia,

$$E = \int d^3x T^{00},$$

enquanto translações espaciais implicam conservação do momento linear,

$$P^i = \int d^3x T^{0i}.$$

Para uma simetria interna de fase, como no campo escalar complexo com lagrangiana

$$\mathcal{L} = \partial_\mu\phi^* \partial^\mu\phi - m^2\phi^*\phi,$$

a transformação

$$\phi \rightarrow e^{i\alpha}\phi$$

gera a corrente conservada

$$j^\mu = i(\phi^* \partial^\mu\phi - \phi \partial^\mu\phi^*),$$

com carga

$$Q = i \int d^3x (\phi^* \dot{\phi} - \dot{\phi} \phi^*).$$

De forma mais geral, a invariância sob translações no espaço-tempo leva ao tensor energia-momento canônico:

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_a)} \partial^\nu \phi_a - g^{\mu\nu} \mathcal{L}, \quad (2.17)$$

que obedece

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0,$$

e cuja carga associada é o quadrimomento total,

$$P^\nu = \int d^3x T^{0\nu}.$$

2.2.1 Formalismo Hamiltoniano

Para preparar a quantização, reescrevemos a teoria no formalismo hamiltoniano. Nele, o campo $\phi(\vec{x}, t)$ e seu momento conjugado $\pi(\vec{x}, t)$ são tratados como variáveis independentes. O momento conjugado é definido por

$$\pi(\vec{x}, t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}(\vec{x}, t)}. \quad (2.18)$$

No caso do campo escalar,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2,$$

temos

$$\pi(\vec{x}, t) = \dot{\phi}(\vec{x}, t).$$

A densidade hamiltoniana é

$$\mathcal{H} = \pi \dot{\phi} - \mathcal{L} \quad (2.19)$$

$$= \pi^2 - \left(\frac{1}{2} \pi^2 - \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \right) \quad (2.20)$$

$$= \frac{1}{2} \pi^2 + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2. \quad (2.21)$$

Assim, o Hamiltoniano total é

$$H = \int d^3x \left(\frac{1}{2} \pi^2 + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \right). \quad (2.22)$$

As equações de Hamilton para campos são

$$\dot{\phi}(\vec{x}, t) = \frac{\delta H}{\delta \pi(\vec{x}, t)} = \pi(\vec{x}, t), \quad (2.23)$$

$$\dot{\pi}(\vec{x}, t) = -\frac{\delta H}{\delta \phi(\vec{x}, t)}. \quad (2.24)$$

Calculando a variação funcional,

$$\frac{\delta H}{\delta \phi} = -\nabla^2 \phi + m^2 \phi,$$

obtemos

$$\dot{\pi} = \nabla^2 \phi - m^2 \phi.$$

Derivando a equação $\dot{\phi} = \pi$,

$$\ddot{\phi} = \dot{\pi} = \nabla^2 \phi - m^2 \phi,$$

chegamos novamente à equação de Klein–Gordon:

$$\ddot{\phi} - \nabla^2 \phi + m^2 \phi = 0.$$

O formalismo Hamiltoniano é, portanto, consistente com o formalismo lagrangiano e fornece as variáveis canônicas que serão promovidas a operadores no processo de quantização, estabelecendo a ponte para a próxima seção.

2.3 Quantização Canônica do Campo Escalar

Nesta seção realizamos a quantização canônica do campo escalar real. O procedimento consiste em promover os campos clássicos $\phi(\vec{x}, t)$ e $\pi(\vec{x}, t)$ a operadores atuando em um espaço de Hilbert, dotados de relações de comutação adequadas.

No formalismo hamiltoniano, as variáveis dinâmicas tornam-se operadores:

$$\phi(\vec{x}, t) \longrightarrow \hat{\phi}(\vec{x}, t), \quad (2.25)$$

$$\pi(\vec{x}, t) \longrightarrow \hat{\pi}(\vec{x}, t). \quad (2.26)$$

Impondo o análogo quântico das relações de Poisson, temos os comutadores canônicos

$$[\hat{\phi}(\vec{x}, t), \hat{\phi}(\vec{y}, t)] = 0, \quad (2.27)$$

$$[\hat{\pi}(\vec{x}, t), \hat{\pi}(\vec{y}, t)] = 0, \quad (2.28)$$

$$[\hat{\phi}(\vec{x}, t), \hat{\pi}(\vec{y}, t)] = i \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}), \quad (2.29)$$

que expressam o princípio de incerteza aplicado a sistemas com infinitos graus de liberdade. Para garantir a consistência dessas relações, o campo deve ser expandido em modos normais associados a operadores de criação e aniquilação, como mostrado a seguir.

2.3.1 Expansão em Modos Normais

A solução clássica da equação de Klein–Gordon motiva a expansão do campo em ondas planas. No contexto quântico, escrevemos:

$$\hat{\phi}(\vec{x}, t) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{p}}}} \left(\hat{a}_{\vec{p}} e^{i\vec{p} \cdot \vec{x} - i\omega_{\vec{p}} t} + \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger e^{-i\vec{p} \cdot \vec{x} + i\omega_{\vec{p}} t} \right), \quad (2.30)$$

com $\omega_{\vec{p}} = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$. A derivada temporal fornece o operador momento canônico:

$$\hat{\pi}(\vec{x}, t) = \partial_t \hat{\phi}(\vec{x}, t) \quad (2.31)$$

$$= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left(-i\sqrt{\frac{\omega_{\vec{p}}}{2}} \hat{a}_{\vec{p}} e^{i\vec{p} \cdot \vec{x} - i\omega_{\vec{p}} t} + i\sqrt{\frac{\omega_{\vec{p}}}{2}} \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger e^{-i\vec{p} \cdot \vec{x} + i\omega_{\vec{p}} t} \right). \quad (2.32)$$

Os operadores $\hat{a}_{\vec{p}}$ e $\hat{a}_{\vec{p}}^\dagger$, análogos aos dos osciladores harmônicos, satisfazem

$$[\hat{a}_{\vec{p}}, \hat{a}_{\vec{q}}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q}), \quad (2.33)$$

$$[\hat{a}_{\vec{p}}, \hat{a}_{\vec{q}}] = [\hat{a}_{\vec{p}}^\dagger, \hat{a}_{\vec{q}}^\dagger] = 0. \quad (2.34)$$

Substituindo essas relações na expressão dos campos, obtemos:

$$[\hat{\phi}(\vec{x}, t), \hat{\pi}(\vec{y}, t)] = i \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} e^{i\vec{p} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} = i \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}), \quad (2.35)$$

confirmando a compatibilidade da expansão com os comutadores canônicos.

O estado de vácuo é definido por

$$\hat{a}_{\vec{p}}|0\rangle = 0 \quad \forall \vec{p},$$

e estados excitados são obtidos pela ação de operadores de criação:

$$|\vec{p}_1\rangle = \hat{a}_{\vec{p}_1}^\dagger |0\rangle, \quad |\vec{p}_1, \vec{p}_2\rangle = \hat{a}_{\vec{p}_1}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}_2}^\dagger |0\rangle,$$

de forma geral,

$$|\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n\rangle = \hat{a}_{\vec{p}_1}^\dagger \cdots \hat{a}_{\vec{p}_n}^\dagger |0\rangle.$$

Esses estados são automaticamente simétricos sob trocas, refletindo que o campo escalar real descreve bósons, e sua normalização é

$$\langle \vec{q} | \vec{p} \rangle = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q}).$$

Nesta interpretação, cada modo de momento comporta-se como um oscilador harmônico quântico.

2.3.2 Hamiltoniano e Energia de Ponto Zero

Com a estrutura de criação e aniquilação estabelecida, podemos reescrever o Hamiltoniano. No formalismo quântico ele é dado por

$$\hat{H} = \int d^3 x \left[\frac{1}{2} \hat{\pi}^2 + \frac{1}{2} (\nabla \hat{\phi})^2 + \frac{1}{2} m^2 \hat{\phi}^2 \right]. \quad (2.36)$$

Inserindo as expansões em modos, obtemos

$$\hat{H} = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \omega_{\vec{p}} \left(\hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}} + \frac{1}{2} \delta^{(3)}(0) \right), \quad (2.37)$$

em que o termo proporcional a $\delta^{(3)}(0)$ representa a energia de ponto zero de cada modo. A ordenação normal remove essa divergência:

$$: \hat{H} := \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \omega_{\vec{p}} \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}},$$

de modo que o vácuo possui energia nula:

$$: \hat{H} : |0\rangle = 0.$$

Essa forma explicita que as excitações do campo escalar correspondem às partículas livres de momento \vec{p} e energia $\omega_{\vec{p}}$.

2.4 Partículas

Na seção anterior construímos o espaço de Fock a partir dos operadores de criação e aniquilação $\hat{a}_{\vec{p}}^\dagger$, $\hat{a}_{\vec{p}}$ e assumimos a normalização

$$[\hat{a}_{\vec{p}}, \hat{a}_{\vec{q}}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q}).$$

A seguir desenvolvemos a interpretação desses operadores como criadores/aniquiladores de partículas e fazemos os cálculos que a justificam.

2.4.1 Estados de uma partícula, energia e momento

Definimos o vácuo $|0\rangle$ por $\hat{a}_{\vec{p}}|0\rangle = 0 \ \forall \vec{p}$. O estado de uma partícula com momento \vec{p} é

$$|\vec{p}\rangle \equiv \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger |0\rangle,$$

com produto interno

$$\langle \vec{q} | \vec{p} \rangle = \langle 0 | \hat{a}_{\vec{q}} \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger | 0 \rangle = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q}).$$

Para cálculos covariantes costuma-se usar a normalização relativística

$$|\vec{p}\rangle_{\text{rel}} \equiv \sqrt{2\omega_{\vec{p}}} \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger |0\rangle, \quad \langle \vec{q} | \vec{p} \rangle_{\text{rel}} = 2\omega_{\vec{p}} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q}),$$

onde $\omega_{\vec{p}} = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$. Após normal-ordenar, os operadores Hamiltoniano e momento total podem ser escritos como

$$\hat{H} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \omega_{\vec{k}} \hat{a}_{\vec{k}}^\dagger \hat{a}_{\vec{k}}, \quad (2.38)$$

$$\hat{\vec{P}} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \vec{k} \hat{a}_{\vec{k}}^\dagger \hat{a}_{\vec{k}}. \quad (2.39)$$

Aqui assumimos a subtração (ou ordenação normal) que zera a energia do vácuo: $\langle \hat{H} : |0\rangle = 0$. Mostramos explicitamente que \hat{H} é o gerador da energia dos estados de uma partícula, i.e. $\hat{H}|\vec{p}\rangle = \omega_{\vec{p}}|\vec{p}\rangle$.

Usamos a identidade de comutadores

$$[\hat{A}, \hat{B}\hat{C}] = [\hat{A}, \hat{B}]\hat{C} + \hat{B}[\hat{A}, \hat{C}]$$

para calcular $[\hat{H}, \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger]$. Começando de (2.38):

$$\begin{aligned} [\hat{H}, \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger] &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \omega_{\vec{k}} [\hat{a}_{\vec{k}}^\dagger \hat{a}_{\vec{k}}, \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger] \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \omega_{\vec{k}} \left(\hat{a}_{\vec{k}}^\dagger [\hat{a}_{\vec{k}}, \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger] + [\hat{a}_{\vec{k}}^\dagger, \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger] \hat{a}_{\vec{k}} \right). \end{aligned}$$

Como $[\hat{a}_{\vec{k}}^\dagger, \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger] = 0$ e $[\hat{a}_{\vec{k}}, \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{p})$, obtemos

$$\begin{aligned} [\hat{H}, \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger] &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \omega_{\vec{k}} \hat{a}_{\vec{k}}^\dagger (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{p}) \\ &= \omega_{\vec{p}} \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger. \end{aligned}$$

Logo, agindo sobre o vácuo:

$$\hat{H} \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger |0\rangle = ([\hat{H}, \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger] + \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger \hat{H}) |0\rangle = [\hat{H}, \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger] |0\rangle = \omega_{\vec{p}} \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger |0\rangle,$$

pois $\hat{H}|0\rangle = 0$. Assim

$$\hat{H}|\vec{p}\rangle = \omega_{\vec{p}}|\vec{p}\rangle.$$

Analogamente para o operador momento total $\hat{\vec{P}}$ em (2.39):

$$\begin{aligned} [\hat{\vec{P}}, \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger] &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \vec{k} [\hat{a}_{\vec{k}}^\dagger \hat{a}_{\vec{k}}, \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger] \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \vec{k} \hat{a}_{\vec{k}}^\dagger [\hat{a}_{\vec{k}}, \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger] \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \vec{k} \hat{a}_{\vec{k}}^\dagger (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{p}) \\ &= \vec{p} \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger. \end{aligned}$$

Portanto

$$\hat{\vec{P}}|\vec{p}\rangle = \vec{p}|\vec{p}\rangle,$$

confirmando que $|\vec{p}\rangle$ tem momento \vec{p} .

2.4.2 Espaço de Fock

O espaço de Fock permite a construção de estados com número arbitrário de partículas. Por exemplo, um estado de duas partículas é definido como

$$|\vec{p}_1, \vec{p}_2\rangle \equiv \hat{a}_{\vec{p}_1}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}_2}^\dagger |0\rangle.$$

Como os operadores de criação comutam,

$$\hat{a}_{\vec{p}_1}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}_2}^\dagger = \hat{a}_{\vec{p}_2}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}_1}^\dagger,$$

vemos que

$$|\vec{p}_1, \vec{p}_2\rangle = |\vec{p}_2, \vec{p}_1\rangle,$$

isto é, os estados são simétricos sob troca de partículas, refletindo a estatística bosônica do campo escalar. O produto interno pode ser calculado de forma explícita:

$$\begin{aligned} \langle \vec{q}_1, \vec{q}_2 | \vec{p}_1, \vec{p}_2 \rangle &= \langle 0 | \hat{a}_{\vec{q}_2} \hat{a}_{\vec{q}_1} \hat{a}_{\vec{p}_1}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}_2}^\dagger | 0 \rangle \\ &= (2\pi)^6 \left[\delta^{(3)}(\vec{q}_1 - \vec{p}_1) \delta^{(3)}(\vec{q}_2 - \vec{p}_2) + \delta^{(3)}(\vec{q}_1 - \vec{p}_2) \delta^{(3)}(\vec{q}_2 - \vec{p}_1) \right]. \end{aligned}$$

Com a convenção relativística

$$|\vec{p}\rangle_{\text{rel}} = \sqrt{2\omega_{\vec{p}}} \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger |0\rangle,$$

um estado de duas partículas é

$$|\vec{p}_1, \vec{p}_2\rangle_{\text{rel}} = \sqrt{2\omega_{\vec{p}_1}} \sqrt{2\omega_{\vec{p}_2}} \hat{a}_{\vec{p}_1}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}_2}^\dagger |0\rangle.$$

O produto interno satisfaz

$$\begin{aligned} \langle \vec{q}_1, \vec{q}_2 | \vec{p}_1, \vec{p}_2 \rangle_{\text{rel}} = (2\pi)^6 & \left[2\omega_{\vec{p}_1} 2\omega_{\vec{p}_2} \delta^{(3)}(\vec{q}_1 - \vec{p}_1) \delta^{(3)}(\vec{q}_2 - \vec{p}_2) \right. \\ & \left. + 2\omega_{\vec{p}_1} 2\omega_{\vec{p}_2} \delta^{(3)}(\vec{q}_1 - \vec{p}_2) \delta^{(3)}(\vec{q}_2 - \vec{p}_1) \right], \end{aligned}$$

o que garante a covariância da normalização.

Generalizando, os estados de n partículas formam uma base ortogonal e simétrica:

$$|\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_n\rangle_{\text{rel}} = \prod_{i=1}^n \sqrt{2\omega_{\vec{p}_i}} \hat{a}_{\vec{p}_i}^\dagger |0\rangle,$$

com produtos internos que contêm todas as permutações possíveis das partículas. Assim, o espaço de Fock é a soma direta dos subespaços de n partículas:

$$\mathcal{F} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}_n,$$

onde \mathcal{H}_n é o espaço das funções de onda simétricas de n partículas. Essa estrutura será fundamental para descrever estados físicos e processos de espalhamento em teoria quântica de campos.

As equações acima mostram de forma explícita que as excitações do campo, construídas com $\hat{a}_{\vec{p}}^\dagger$, são autovetores dos operadores de energia e momento com os espectros corretos da equação de Klein–Gordon. Essa interpretação como partículas livres é a base para introduzir interações e estudar processos de espalhamento nas seções seguintes, onde voltaremos à normalização relativística e à construção das amplitudes de S-matrix.

2.5 Campo Escalar Complexo

Após termos quantizado o campo escalar real, que descreve apenas uma partícula neutra, passamos agora ao caso do campo escalar complexo, denotado por $\phi(x)$. Ele carrega naturalmente uma noção de carga, pois ao lado de $\phi(x)$ surge o seu conjugado hermitiano $\phi^\dagger(x)$. A lagrangiana apropriada é

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^\dagger \partial^\mu \phi - m^2 \phi^\dagger \phi, \quad (2.40)$$

que é simplesmente o dobro da lagrangiana do campo real, no sentido de que contém os dois graus de liberdade independentes correspondentes a $\text{Re } \phi$ e $\text{Im } \phi$.

Essa teoria descreve, como veremos, uma partícula e a sua antipartícula, associadas ao mesmo campo. A razão está na invariância global da lagrangiana sob transformações de fase

$$\phi(x) \longrightarrow e^{i\alpha} \phi(x), \quad \phi^\dagger(x) \longrightarrow e^{-i\alpha} \phi^\dagger(x),$$

que gera, pelo teorema de Noether, uma corrente conservada

$$j^\mu(x) = i(\phi^\dagger \partial^\mu \phi - (\partial^\mu \phi^\dagger) \phi). \quad (2.41)$$

A componente temporal dessa corrente é a densidade de carga

$$j^0(x) = i(\phi^\dagger \dot{\phi} - \dot{\phi}^\dagger \phi), \quad (2.42)$$

e a carga total é

$$Q = \int d^3x j^0(x).$$

Quantização e derivadas temporais. Para quantizar, expandimos o campo em ondas planas normalizadas:

$$\phi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{p}}}} \left(a_{\vec{p}} e^{-i\omega_{\vec{p}}t + i\vec{p}\cdot\vec{x}} + b_{\vec{p}}^\dagger e^{+i\omega_{\vec{p}}t - i\vec{p}\cdot\vec{x}} \right), \quad (2.43)$$

$$\phi^\dagger(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{p}}}} \left(a_{\vec{p}}^\dagger e^{+i\omega_{\vec{p}}t - i\vec{p}\cdot\vec{x}} + b_{\vec{p}} e^{-i\omega_{\vec{p}}t + i\vec{p}\cdot\vec{x}} \right), \quad (2.44)$$

onde $\omega_{\vec{p}} = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$. Aqui os operadores $a_{\vec{p}}$ e $b_{\vec{p}}$ são independentes, e satisfazem

$$[a_{\vec{p}}, a_{\vec{q}}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q}), \quad (2.45)$$

$$[b_{\vec{p}}, b_{\vec{q}}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q}), \quad (2.46)$$

com todos os outros comutadores nulos. Naturalmente, $a_{\vec{p}}^\dagger$ cria partículas de momento \vec{p} , enquanto $b_{\vec{p}}^\dagger$ cria antipartículas.

Para construir a densidade de carga, precisamos também das derivadas temporais:

$$\dot{\phi}(x) = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{q}}}} \left(-i\omega_{\vec{q}} a_{\vec{q}} e^{-i\omega_{\vec{q}}t + i\vec{q}\cdot\vec{x}} + i\omega_{\vec{q}} b_{\vec{q}}^\dagger e^{+i\omega_{\vec{q}}t - i\vec{q}\cdot\vec{x}} \right), \quad (2.47)$$

$$\dot{\phi}^\dagger(x) = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{q}}}} \left(i\omega_{\vec{q}} a_{\vec{q}}^\dagger e^{+i\omega_{\vec{q}}t - i\vec{q}\cdot\vec{x}} - i\omega_{\vec{q}} b_{\vec{q}} e^{-i\omega_{\vec{q}}t + i\vec{q}\cdot\vec{x}} \right). \quad (2.48)$$

Cálculo da densidade de carga. Substituímos em

$$j^0(x) = i(\phi^\dagger \dot{\phi} - \dot{\phi}^\dagger \phi).$$

Primeiro,

$$\begin{aligned} \phi^\dagger(x) \dot{\phi}(x) = & \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{4\omega_{\vec{p}}\omega_{\vec{q}}}} \times \\ & \left[a_{\vec{p}}^\dagger (-i\omega_{\vec{q}}) a_{\vec{q}} e^{i(\omega_{\vec{p}} - \omega_{\vec{q}})t} e^{-i(\vec{p} - \vec{q})\cdot\vec{x}} \right. \\ & + a_{\vec{p}}^\dagger (i\omega_{\vec{q}}) b_{\vec{q}}^\dagger e^{i(\omega_{\vec{p}} + \omega_{\vec{q}})t} e^{-i(\vec{p} + \vec{q})\cdot\vec{x}} \\ & + b_{\vec{p}} (-i\omega_{\vec{q}}) a_{\vec{q}} e^{-i(\omega_{\vec{p}} + \omega_{\vec{q}})t} e^{i(\vec{p} + \vec{q})\cdot\vec{x}} \\ & \left. + b_{\vec{p}} (i\omega_{\vec{q}}) b_{\vec{q}}^\dagger e^{-i(\omega_{\vec{p}} - \omega_{\vec{q}})t} e^{i(\vec{p} - \vec{q})\cdot\vec{x}} \right]. \end{aligned} \quad (2.49)$$

Analogamente,

$$\begin{aligned} \dot{\phi}^\dagger(x)\phi(x) = & \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{4\omega_{\vec{p}}\omega_{\vec{q}}}} \times \\ & \left[(i\omega_{\vec{p}})a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{q}} e^{i(\omega_{\vec{p}}-\omega_{\vec{q}})t} e^{-i(\vec{p}-\vec{q})\cdot\vec{x}} \right. \\ & + (i\omega_{\vec{p}})a_{\vec{p}}^\dagger b_{\vec{q}}^\dagger e^{i(\omega_{\vec{p}}+\omega_{\vec{q}})t} e^{-i(\vec{p}+\vec{q})\cdot\vec{x}} \\ & + (-i\omega_{\vec{p}})b_{\vec{p}} a_{\vec{q}} e^{-i(\omega_{\vec{p}}+\omega_{\vec{q}})t} e^{i(\vec{p}+\vec{q})\cdot\vec{x}} \\ & \left. + (-i\omega_{\vec{p}})b_{\vec{p}} b_{\vec{q}}^\dagger e^{-i(\omega_{\vec{p}}-\omega_{\vec{q}})t} e^{i(\vec{p}-\vec{q})\cdot\vec{x}} \right]. \end{aligned} \quad (2.50)$$

Formando a combinação $j^0 = i(\phi^\dagger \dot{\phi} - \dot{\phi}^\dagger \phi)$, vemos que os termos mistos $a^\dagger b^\dagger$, ab , etc., desaparecem após a integração espacial por produzirem $(2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} + \vec{q})$, que impõe $\omega_{\vec{p}} - \omega_{\vec{q}} = 0$. Restam apenas os termos com $a^\dagger a$ e $b^\dagger b$, cujos coeficientes são

$$\frac{\omega_{\vec{p}} + \omega_{\vec{q}}}{2\sqrt{\omega_{\vec{p}}\omega_{\vec{q}}}} \quad \text{e} \quad -\frac{\omega_{\vec{p}} + \omega_{\vec{q}}}{2\sqrt{\omega_{\vec{p}}\omega_{\vec{q}}}},$$

respectivamente.

Operador de carga. Integrando $j^0(x)$ sobre o espaço, obtemos

$$\begin{aligned} Q = & \int d^3x j^0(x) \\ = & \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{\omega_{\vec{p}} + \omega_{\vec{q}}}{2\sqrt{\omega_{\vec{p}}\omega_{\vec{q}}}} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q}) a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{q}} \\ & - \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{\omega_{\vec{p}} + \omega_{\vec{q}}}{2\sqrt{\omega_{\vec{p}}\omega_{\vec{q}}}} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q}) b_{\vec{q}}^\dagger b_{\vec{p}}. \end{aligned} \quad (2.51)$$

A integração em \vec{q} usa a delta de Dirac, que impõe $\vec{q} = \vec{p}$ e simplifica o fator numérico a 1. Obtemos finalmente

$$Q = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left(a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}} - b_{\vec{p}}^\dagger b_{\vec{p}} \right).$$

Este resultado mostra que o operador de carga Q conta o número de partículas criadas por a^\dagger menos o número de antipartículas criadas por b^\dagger . No caso livre, partículas e antipartículas são independentes e seus números se conservam separadamente, sendo assim a carga é a diferença entre eles.

2.6 O Formalismo de Heisenberg

Tendo estabelecido a quantização canônica dos campos escalares, passamos agora ao formalismo de Heisenberg, no qual toda a dependência temporal está nos operadores, enquanto os estados permanecem fixos. Esse formalismo é particularmente natural em teoria quântica de campos, pois trata espaço e tempo em pé de igualdade, de modo compatível com a relatividade.

2.6.1 Equação de Heisenberg

Dado um operador $\mathcal{O}(t)$, sua evolução temporal é regida por

$$\frac{d\mathcal{O}(t)}{dt} = i[H, \mathcal{O}(t)] + \left(\frac{\partial \mathcal{O}}{\partial t} \right), \quad (2.52)$$

onde o segundo termo aparece caso \mathcal{O} tenha dependência temporal explícita.

No caso do campo escalar real, os operadores relevantes são o campo $\phi(\vec{x}, t)$ e seu momento conjugado $\pi(\vec{x}, t)$, definidos em cada ponto do espaço. O Hamiltoniano correspondente é

$$H = \int d^3x \left[\frac{1}{2} \pi^2(\vec{x}, t) + \frac{1}{2} (\nabla \phi(\vec{x}, t))^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2(\vec{x}, t) \right].$$

2.6.2 Dinâmica dos operadores em Heisenberg

As relações de comutação fundamentais estabelecidas na Seção 2.3 serão agora aplicadas para extrair as equações de movimento no formalismo de Heisenberg.

O comutador $[H, \phi(\vec{y})]$

Substituindo a densidade hamiltoniana:

$$[H, \phi(\vec{y})] = \int d^3x \left[\frac{1}{2} [\pi^2(\vec{x}), \phi(\vec{y})] + \frac{1}{2} [(\nabla \phi(\vec{x}))^2, \phi(\vec{y})] + \frac{1}{2} m^2 [\phi^2(\vec{x}), \phi(\vec{y})] \right].$$

Os termos $(\nabla \phi)^2$ e ϕ^2 comutam com $\phi(\vec{y})$, pois $[\phi(\vec{x}), \phi(\vec{y})] = 0$. Resta apenas o termo envolvendo π^2 .

Usando

$$[\pi(\vec{x}), \phi(\vec{y})] = -i\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}),$$

temos

$$[\pi^2(\vec{x}), \phi(\vec{y})] = \pi(\vec{x})[\pi(\vec{x}), \phi(\vec{y})] + [\pi(\vec{x}), \phi(\vec{y})]\pi(\vec{x}) \quad (2.53)$$

$$= -2i \pi(\vec{x}) \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}). \quad (2.54)$$

A integral sobre \vec{x} fixa $\vec{x} = \vec{y}$, resultando em

$$[H, \phi(\vec{y})] = -i\pi(\vec{y}).$$

Pela equação de Heisenberg:

$$\dot{\phi}(\vec{y}, t) = \pi(\vec{y}, t).$$

O comutador $[H, \pi(\vec{y})]$

Agora,

$$[H, \pi(\vec{y})] = \int d^3x \left[\frac{1}{2} [\pi^2(\vec{x}), \pi(\vec{y})] + \frac{1}{2} [(\nabla \phi(\vec{x}))^2, \pi(\vec{y})] + \frac{1}{2} m^2 [\phi^2(\vec{x}), \pi(\vec{y})] \right].$$

O termo π^2 é nulo, pois $[\pi(\vec{x}), \pi(\vec{y})] = 0$.

Para o termo com derivadas espaciais:

$$[\partial_i \phi(\vec{x}), \pi(\vec{y})] = i \partial_i \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}),$$

o que fornece

$$[(\nabla \phi)^2, \pi] = 2i \partial_i \phi(\vec{x}) \partial_i \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}).$$

A integração por partes resulta em

$$\int d^3x \partial_i \phi(\vec{x}) \partial_i \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) = -\nabla^2 \phi(\vec{y}).$$

Para o termo de massa:

$$[\phi^2(\vec{x}), \pi(\vec{y})] = 2i \phi(\vec{x}) \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}),$$

o que leva a

$$\int d^3x \frac{1}{2} m^2 [\phi^2(\vec{x}), \pi(\vec{y})] = i m^2 \phi(\vec{y}).$$

Somando:

$$[H, \pi(\vec{y})] = i \left(-\nabla^2 \phi(\vec{y}) + m^2 \phi(\vec{y}) \right).$$

Logo,

$$\dot{\pi}(\vec{y}, t) = -\nabla^2 \phi(\vec{y}, t) + m^2 \phi(\vec{y}, t).$$

Recuperação da equação de Klein–Gordon

Reunindo agora os dois comutadores obtidos:

$$\dot{\phi} = \pi, \quad \dot{\pi} = -\nabla^2 \phi + m^2 \phi.$$

Derivando a primeira equação no tempo:

$$\ddot{\phi} = -\nabla^2 \phi + m^2 \phi.$$

Assim,

$$(\partial_t^2 - \nabla^2 + m^2) \phi(\vec{y}, t) = 0,$$

ou, em notação covariante,

$$(\square + m^2) \phi(x) = 0.$$

Esse resultado mostra que o formalismo de Heisenberg reproduz exatamente as equações de movimento clássicas, agora no nível de operadores. Essa formulação será essencial ao introduzirmos ordenamento temporal, funções de Green e propagadores, que dependem diretamente da evolução dos operadores no tempo.

3 Causalidade e Propagadores

3.1 Histórico e Fundamentos Físicos da Causalidade

Na seção anterior vimos que, no formalismo de Heisenberg, os campos quânticos $\phi(x)$ são operadores definidos em cada ponto do espaço-tempo, com sua evolução temporal regida pela equação de Heisenberg. Surge assim a pergunta central desta seção: como esses operadores se relacionam quando avaliados em pontos distintos do espaço-tempo? A resposta leva diretamente ao conceito de causalidade relativística.

Na mecânica clássica, causalidade significava que a evolução futura de um sistema era completamente determinada pelas condições iniciais. Com a relatividade restrita, a estrutura causal foi reorganizada em termos do intervalo de Minkowski

$$s^2 = (x^0 - y^0)^2 - (\vec{x} - \vec{y})^2.$$

Apenas eventos separados por intervalos do tipo tempo ou luz podem influenciar-se mutuamente e nenhum sinal físico pode propagar-se fora do cone de luz.

A mecânica quântica não relativística, embora determinista na evolução via equação de Schrödinger, não impõe restrições fundamentais à velocidade das influências. Assim, ao combinar quantização e relatividade, torna-se essencial que a estrutura causal de Minkowski seja preservada.

Em teoria quântica de campos, a exigência de causalidade se traduz no comportamento dos comutadores de operadores localizados em pontos distintos:

$$[\phi(x), \phi(y)] = 0, \quad \text{se } (x - y)^2 < 0.$$

Essa condição, chamada causalidade microfísica, assegura que medições feitas em regiões separadas por intervalos tipo-espaço não interferem entre si. Ela é a contrapartida quântica da proibição relativística de propagação supraluminal.

3.1.1 Comutador do campo e função de Pauli–Jordan

Para verificar essa propriedade, retomamos a expansão em modos do campo escalar real discutida na Seção 2.3:

$$\phi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{p}}}} \left(a_{\vec{p}} e^{-ip \cdot x} + a_{\vec{p}}^\dagger e^{ip \cdot x} \right), \quad p^0 = \omega_{\vec{p}} = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}. \quad (3.1)$$

Como apenas os comutadores cruzados $[a_{\vec{p}}, a_{\vec{q}}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q})$ são não nulos, obtemos

$$[\phi(x), \phi(y)] = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_{\vec{p}}} \left(e^{-ip \cdot (x-y)} - e^{ip \cdot (x-y)} \right). \quad (3.2)$$

Definimos a função de Pauli–Jordan:

$$\Delta(x - y) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_{\vec{p}}} \left(e^{-ip \cdot (x-y)} - e^{ip \cdot (x-y)} \right), \quad (3.3)$$

de modo que

$$[\phi(x), \phi(y)] = i\Delta(x - y).$$

A função 3.3 satisfaz a equação de Klein–Gordon homogênea e pode ser avaliada de forma fechada. O resultado fundamental é o seu suporte causal:

$$\Delta(x - y) = 0 \quad \text{se } (x - y)^2 < 0.$$

Assim,

$$[\phi(x), \phi(y)] = 0 \quad \text{para separações tipo-espaço,}$$

garantindo que operadores localizados fora do cone de luz são compatíveis. Essa propriedade é a expressão matemática da causalidade relativística no contexto quântico.

A condição de causalidade microfísica impõe restrições importantes à estrutura das funções de Green e, em particular, aos propagadores. A prescrição $i\epsilon$ nos propagadores de Feynman é justamente o mecanismo matemático que implementa a compatibilidade entre ordenamento temporal e causalidade. Esse ponto será aprofundado na próxima seção, onde exploraremos a construção dos propagadores e sua interpretação física.

3.2 Funções de Green e Amplitudes

Na seção anterior vimos que a causalidade em teoria quântica de campos se expressa na estrutura dos comutadores dos campos. Agora, introduzimos as funções de Green, que são os objetos matemáticos centrais capazes de implementar simultaneamente a estrutura causal e a descrição quântica da propagação de partículas.

3.2.1 Funções de Green e Soluções com Fonte

Consideremos um campo escalar sujeito à equação de Klein–Gordon,

$$(\square + m^2)\phi(x) = J(x),$$

com $J(x)$ uma fonte externa. A solução formal é obtida pela convolução da fonte com uma função $G(x - y)$ que satisfaça

$$(\square_x + m^2)G(x - y) = \delta^{(4)}(x - y). \quad (3.4)$$

Usando a representação de Fourier,

$$G(x - y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \tilde{G}(p) e^{-ip \cdot (x - y)},$$

obtemos a condição algébrica

$$\tilde{G}(p) = \frac{1}{p^2 - m^2}.$$

A escolha da forma como os polos são contornados no plano complexo de p^0 determina se G é a função retardada, avançada ou a de Feynman. Essa última, relevantíssima para teoria de perturbações, respeita o ordenamento temporal quântico via a prescrição $i\epsilon$ discutida anteriormente na Seção 3.1.1.

3.2.2 Estrutura das Funções de Green

No formalismo de Heisenberg, define-se a função de Green de n pontos como

$$G^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \langle 0 | T \{ \phi(x_1) \cdots \phi(x_n) \} | 0 \rangle, \quad (3.5)$$

onde o ordenamento temporal foi introduzido na Seção 2.6.

Para $n = 2$,

$$G^{(2)}(x, y) = \langle 0 | T \{ \phi(x) \phi(y) \} | 0 \rangle,$$

que coincide com o propagador de Feynman. A expansão em modos usada para sua derivação é a mesma empregada na análise do comutador $[\phi(x), \phi(y)]$ na Seção 3.1.1.

Entre as funções de Green, distinguem-se as conectadas, $G_c^{(n)}$, que não se fatorizam em blocos independentes. Diagramaticamente, elas correspondem aos diagramas de Feynman conectados.

Além disso, a função de Green de dois pontos $G^{(2)}(x, y)$ é exatamente o propagador de Feynman, cuja estrutura analítica codifica a massa do campo, a prescrição $i\epsilon$ e a definição do ordenamento temporal. Nas próximas seções analisaremos esse objeto em detalhe, especialmente sua construção via integrais de Fourier.

3.2.3 Fórmula de LSZ

As amplitudes de espalhamento obtidas experimentalmente estão diretamente relacionadas às funções de Green via o procedimento LSZ. Cada linha externa de uma função de Green representa um propagador livre; para obter a amplitude física, é necessário amputar esses propagadores:

$$\begin{aligned} & \langle p'_1, \dots, p'_m | S | p_1, \dots, p_n \rangle \\ &= \int \left(\prod_{i=1}^n d^4 x_i e^{-ip_i \cdot x_i} (\square_{x_i} + m^2) \right) \left(\prod_{j=1}^m d^4 y_j e^{ip'_j \cdot y_j} (\square_{y_j} + m^2) \right) \langle 0 | T \{ \phi(y_1) \cdots \phi(x_n) \} | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Os operadores diferenciais $(\square + m^2)$ projetam as contribuições externas sobre a camada de massa, isolando as partículas reais envolvidas no processo.

3.3 Propagadores e Causalidade

Nesta seção analisamos a função de Green de dois pontos,

$$G^{(2)}(x, y) = \langle 0 | T \{ \phi(x) \phi(y) \} | 0 \rangle,$$

que no caso do campo escalar real é denominada propagador de Feynman:

$$\Delta_F(x - y) = \langle 0 | T \{ \phi(x) \phi(y) \} | 0 \rangle. \quad (3.7)$$

Ele é a solução fundamental da equação de Green associada ao operador de Klein–Gordon e concentra a estrutura causal e espectral da teoria.

3.3.1 Construção via Transformada de Fourier

O propagador satisfaz

$$(\square_x + m^2) \Delta_F(x - y) = -i\delta^{(4)}(x - y).$$

Escrevendo

$$\Delta_F(x - y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \tilde{\Delta}_F(p) e^{-ip \cdot (x-y)},$$

obtemos a equação algébrica

$$(-p^2 + m^2) \tilde{\Delta}_F(p) = -i, \quad \Rightarrow \quad \tilde{\Delta}_F(p) = \frac{i}{p^2 - m^2}.$$

Os polos em $p^0 = \pm\omega_{\vec{p}}$ devem ser especificados por meio de um deslocamento infinitesimal. A prescrição de Feynman fixa

$$\tilde{\Delta}_F(p) = \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}, \quad \epsilon > 0,$$

resultando em

$$\Delta_F(x - y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ip \cdot (x-y)}. \quad (3.8)$$

O termo $e^{-ip^0(x^0 - y^0)}$ determina o fechamento do contorno de integração no plano complexo de p^0 . De acordo com o lema de Jordan, o contorno deve ser tomado como

$$C = \begin{cases} \text{semiplano inferior,} & x^0 > y^0, \\ \text{semiplano superior,} & x^0 < y^0, \end{cases}$$

de modo que apenas o polo correspondente seja incluído. Para $x^0 > y^0$ captura-se o polo em $p^0 = +\omega_{\vec{p}} - i\epsilon$, enquanto para $x^0 < y^0$ seleciona-se o polo em $p^0 = -\omega_{\vec{p}} + i\epsilon$. Esse procedimento implementa automaticamente o ordenamento temporal no operador $T\{\cdot\}$ e fornece a forma correta do propagador de Feynman.

3.3.2 Polos, Contornos e Comutador

A diferença entre as partes avançada e retardada do campo leva ao comutador

$$[\phi(x), \phi(y)] = i\Delta(x - y),$$

onde a função de Pauli–Jordan é

$$\Delta(x - y) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_{\vec{p}}} \left(e^{-ip \cdot (x-y)} - e^{ip \cdot (x-y)} \right).$$

O suporte causal é determinado pela análise integral:

$$\Delta(x - y) = 0 \quad \text{se } (x - y)^2 < 0.$$

Consequentemente,

$$[\phi(x), \phi(y)] = 0 \quad \text{quando } (x - y)^2 < 0,$$

garantindo que a microcausalidade seja satisfeita.

Os polos de $\tilde{\Delta}_F(p)$ localizam-se em $p^0 = \pm\omega_{\vec{p}} \mp i\epsilon$ e obedecem à condição de massa $p^2 = m^2$. Eles identificam as excitações elementares associadas ao campo livre. Em teorias interativas, esses polos podem deslocar-se ou adquirir parte imaginária, caracterizando modificações do espectro e efeitos de largura finita.

O fator global i na definição de $\tilde{\Delta}_F(p)$ é uma convenção que torna as regras de Feynman consistentes. A unitariedade do operador S resulta da estrutura completa da teoria, incluindo o ordenamento temporal e a representação utilizada no espaço de Fock.

3.4 Campos Não Relativísticos

Nas seções anteriores vimos que, na teoria relativística, a quantização do campo escalar leva à presença simultânea de partículas e antipartículas, refletida na existência de modos de energia positiva e negativa. A estrutura de Fock correspondente permite um número arbitrário dessas excitações, e a causalidade microfísica é garantida pelo comportamento do comutador e pela estrutura dos propagadores.

Ao passarmos para o regime não relativístico, o cenário se simplifica de maneira significativa. Nesse limite, o campo relevante satisfaz a equação de Schrödinger, de modo que a descrição torna-se efetivamente monocomponente. Um campo escalar complexo $\psi(x)$ é governado pela lagrangiana

$$\mathcal{L} = i\psi^\dagger \partial_t \psi - \frac{1}{2m} \nabla \psi^\dagger \cdot \nabla \psi, \quad (3.9)$$

da qual segue imediatamente a equação de movimento

$$i\partial_t \psi = -\frac{1}{2m} \nabla^2 \psi, \quad (3.10)$$

isto é, a forma usual da equação de Schrödinger.

A estrutura de Fock não relativística é caracterizada pela densidade de partículas

$$\rho(\vec{x}) = \psi^\dagger(\vec{x})\psi(\vec{x}),$$

cujas excitações são contabilizadas pelo número total

$$N = \int d^3x \rho(\vec{x}),$$

que é exatamente conservado. Isso contrasta com o caso relativístico, onde a energia suficiente pode gerar pares de partículas e antipartículas. No regime não relativístico, tais processos são energeticamente proibidos: todas as excitações são partículas, e não há necessidade de operadores independentes para descrever antipartículas. O espaço de Fock correspondente é construído pela ação de ψ^\dagger sobre o vácuo, e as relações de (anti)comutação determinam a estatística do campo:

$$[\psi(\vec{x}), \psi^\dagger(\vec{y})] = \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}), \quad \{\psi(\vec{x}), \psi^\dagger(\vec{y})\} = \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}),$$

para bósons e férmions, respectivamente.

A conexão com a teoria relativística aparece de forma transparente ao decompor o campo relativístico como

$$\phi(x) \approx \frac{1}{\sqrt{2m}} \left(e^{-imt} \psi(x) + e^{imt} \chi^\dagger(x) \right), \quad (3.11)$$

em que ψ descreve partículas e χ descreve antipartículas. O fator oscilatório e^{-imt} remove a energia de repouso da partícula, fazendo com que ψ varie lentamente quando $E - m \ll m$. Já o termo $e^{imt} \chi^\dagger$ oscila rapidamente e torna-se suprimido no limite não relativístico. Assim, ao restringir-se a energias muito menores que a massa de repouso, a contribuição de antipartículas desaparece naturalmente, recuperando-se uma teoria efetivamente monocomponente, exatamente a dinâmica descrita por $\psi(x)$ na mecânica quântica não relativística.

Essa diferença estrutural reflete-se também na propagação. O propagador associado ao campo ψ ,

$$G_{\text{NR}}(t, \vec{x}) = \theta(t) \left(\frac{m}{2\pi i t} \right)^{3/2} \exp\left(i \frac{m \vec{x}^2}{2t} \right), \quad (3.12)$$

não se anula fora do cone de luz. Isso expressa a ausência da restrição relativística: a equação de Schrödinger é de primeira ordem no tempo e não impõe uma estrutura causal baseada no cone de luz. Essa propriedade não implica a possibilidade de transmissão instantânea de informação, mas apenas a natureza distinta da dinâmica não relativística.

Assim, a comparação entre os dois regimes deixa claro o papel fundamental da relatividade: no caso relativístico, a presença de partículas e antipartículas e a necessidade de preservar a causalidade microfísica levam a uma estrutura matemática mais rica. No limite não relativístico, reencontramos a mecânica quântica tradicional, com número de partículas conservado e propagadores que refletem a ausência de vínculos relativísticos.

4 Teoria de Perturbação e Diagramas

4.1 O Quadro de Interação e a Fórmula de Dyson

Ao introduzir interações em teoria quântica de campos, torna-se conveniente adotar o quadro de interação (ou representação de Dirac). Nesse formalismo, o Hamiltoniano total é decomposto como

$$H = H_0 + H_{\text{int}}, \quad (4.1)$$

onde H_0 governa a dinâmica livre e H_{int} contém os termos de interação tratados perturbativamente.

4.1.1 Operadores, Estados e o Operador de Evolução

No quadro de interação, um operador é definido por

$$\mathcal{O}_I(t) = e^{iH_0 t} \mathcal{O}_S e^{-iH_0 t}, \quad (4.2)$$

isto é, evolui apenas com o Hamiltoniano livre. Já os estados evoluem segundo

$$i \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle_I = H_I(t) |\psi(t)\rangle_I, \quad H_I(t) = e^{iH_0 t} H_{\text{int}} e^{-iH_0 t}. \quad (4.3)$$

A solução formal é escrita em termos do operador de evolução,

$$|\psi(t)\rangle_I = U(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle_I, \quad (4.4)$$

com

$$i \frac{d}{dt} U(t, t_0) = H_I(t) U(t, t_0), \quad U(t_0, t_0) = \mathbb{I}. \quad (4.5)$$

A equação integral correspondente é

$$U(t, t_0) = \mathbb{I} - i \int_{t_0}^t dt_1 H_I(t_1) U(t_1, t_0), \quad (4.6)$$

e a substituição recursiva gera a expansão perturbativa

$$U(t, t_0) = \mathbb{I} - i \int_{t_0}^t dt_1 H_I(t_1) + (-i)^2 \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H_I(t_1) H_I(t_2) \quad (4.7)$$

$$+ (-i)^3 \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_3 H_I(t_1) H_I(t_2) H_I(t_3) + \dots \quad (4.8)$$

Essas integrais aninhadas codificam automaticamente a ordem temporal dos operadores. Para escrever a série de forma compacta, introduzimos o operador de ordenamento temporal \mathcal{T} , que rearranja produtos de operadores conforme seus tempos:

$$\mathcal{T}\{H_I(t_1)H_I(t_2)\} = \begin{cases} H_I(t_1)H_I(t_2), & t_1 > t_2, \\ H_I(t_2)H_I(t_1), & t_2 > t_1. \end{cases} \quad (4.9)$$

O mesmo se aplica a produtos com mais fatores.

4.1.2 Fórmula de Dyson e a Matriz de Espalhamento

A presença de \mathcal{T} permite reescrever a expansão perturbativa em sua forma compacta,

$$U(t, t_0) = \mathcal{T} \exp\left(-i \int_{t_0}^t dt' H_I(t')\right), \quad (4.10)$$

conhecida como fórmula de Dyson. A exponencial acima não é uma exponencial comum, mas a soma ordenada dos termos da expansão perturbativa, refletindo o fato de que, em geral, $H_I(t)$ e $H_I(t')$ não comutam para tempos distintos.

O limite assintótico desse operador define a matriz S , que conecta estados livres no passado e no futuro:

$$S = U(\infty, -\infty) = \mathcal{T} \exp\left(-i \int_{-\infty}^{+\infty} dt H_I(t)\right). \quad (4.11)$$

Essa matriz incorpora todos os efeitos da interação e é o ponto de partida para a teoria de espalhamento. Sua expansão perturbativa gera, de maneira sistemática, os diagramas de Feynman, que representam graficamente os termos correspondentes da série em potências de H_{int} .

Assim, o quadro de interação organiza a evolução temporal de sistemas interagentes separando claramente a dinâmica livre daquela gerada pela interação, enquanto a fórmula de Dyson fornece a estrutura matemática que fundamenta a teoria de perturbações em QFT.

4.2 Uma Primeira Olhada no Espalhamento

O estudo de processos de espalhamento constitui a aplicação mais direta e física da teoria quântica de campos. A ideia central é calcular a probabilidade de transição entre estados assintoticamente livres, isto é, estados de partículas que se comportam como não interagentes no passado remoto ($t \rightarrow -\infty$) e no futuro distante ($t \rightarrow +\infty$). Nesses regimes, a dinâmica é dominada pelo Hamiltoniano livre H_0 , e os estados são construídos no espaço de Fock por operadores de criação e aniquilação.

4.2.1 A Matriz S e sua Expansão Perturbativa

A amplitude de transição entre um estado inicial $|i\rangle$ e um estado final $|f\rangle$ é dada pelo operador de evolução no quadro de interação:

$$\langle f | U(+\infty, -\infty) | i \rangle, \quad (4.12)$$

onde $U(t, t_0)$ satisfaz

$$i \frac{d}{dt} U(t, t_0) = H_I(t) U(t, t_0), \quad U(t_0, t_0) = \mathbb{I}.$$

Define-se a matriz S como

$$S \equiv U(+\infty, -\infty), \quad (4.13)$$

de modo que $\langle f|S|i\rangle$ representa a amplitude de espalhamento entre estados assintóticos. A fórmula de Dyson fornece sua expressão formal:

$$S = \mathcal{T} \exp \left[-i \int_{-\infty}^{+\infty} dt H_I(t) \right], \quad (4.14)$$

onde \mathcal{T} implementa o ordenamento temporal. A expansão perturbativa resulta em

$$\begin{aligned} S = \mathbb{I} &- i \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 H_I(t_1) \\ &- \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dt_2 \mathcal{T} \{ H_I(t_1) H_I(t_2) \} + \cdots, \end{aligned} \quad (4.15)$$

e cada termo envolve integrais sobre produtos de Hamiltonianos de interação. O número de integrais corresponde ao número de vértices, antecipando a interpretação diagramática que levará às regras de Feynman.

Uma decomposição útil consiste em separar a parte trivial (nenhuma interação) da parte genuinamente física:

$$S = \mathbb{I} + iT, \quad (4.16)$$

onde T é o operador de transição. Para estados iniciais e finais distintos,

$$\langle f|S|i\rangle = i\langle f|T|i\rangle,$$

e $\langle i|S|i\rangle$ quantifica correções à probabilidade de não haver espalhamento.

4.2.2 Estados de Partículas e Normalização Relativística

Um estado de uma partícula é construído por

$$|\vec{p}\rangle = a_{\vec{p}}^\dagger |0\rangle,$$

e as relações de comutação,

$$[a_{\vec{p}}, a_{\vec{q}}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q}),$$

levam a

$$\langle \vec{p}' | \vec{p} \rangle = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}'). \quad (4.17)$$

Para compatibilidade com a relatividade restrita, adota-se a normalização covariante

$$\langle \vec{p}' | \vec{p} \rangle = 2\omega_{\vec{p}} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{p}'), \quad (4.18)$$

que garante a invariância da medida

$$\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2\omega_{\vec{p}}}.$$

Fisicamente, essa normalização assegura que as regras de conservação de momento e energia sejam compatíveis com transformações de Lorentz, condição indispensável para interpretar corretamente as amplitudes de espalhamento.

Na prática experimental, partículas colidem numa região espacial restrita e tornam-se livres novamente em tempos assintóticos. Cada termo da expansão perturbativa da matriz S descreve processos em que operadores de campo criam e aniquilam partículas em vértices de interação, propagadores conectam esses vértices e a conservação de energia e momento é satisfeita localmente. Essa estrutura prepara o terreno para o teorema LSZ, que estabelecerá como extrair amplitudes físicas a partir das funções de Green, e para a interpretação diagramática dada pelos diagramas de Feynman.

4.3 O Teorema de Wick

Na expansão perturbativa da matriz S , surgem produtos cada vez mais complicados de operadores de campo ordenados temporalmente. O Teorema de Wick fornece o método sistemático que permite reescrever esses produtos em termos de objetos simples: produtos ordenados normalmente e contrações, que correspondem diretamente aos propagadores de Feynman.

4.3.1 Ordenamento Normal, Ordenamento Temporal e Contrações

O ordenamento normal, denotado por $:\mathcal{O}:$, coloca todos os operadores de criação à esquerda dos de aniquilação. Por exemplo,

$$:\hat{a}\hat{a}^\dagger := \hat{a}^\dagger\hat{a}.$$

O ordenamento temporal, denotado por $T\{\cdots\}$, organiza operadores segundo seus tempos:

$$T\{\phi(x)\phi(y)\} = \begin{cases} \phi(x)\phi(y), & x^0 > y^0, \\ \phi(y)\phi(x), & y^0 > x^0. \end{cases}$$

A contração entre dois campos é definida como

$$\overline{\phi(x)\phi(y)} \equiv T\{\phi(x)\phi(y)\} - :\phi(x)\phi(y):, \quad (4.19)$$

e coincide com o propagador de Feynman quando tomamos o valor esperado no vácuo:

$$\langle 0|T\{\phi(x)\phi(y)\}|0\rangle = \overline{\phi(x)\phi(y)}.$$

Exemplos.

Para dois campos,

$$T\{\phi(x)\phi(y)\} = :\phi(x)\phi(y): + \overline{\phi(x)\phi(y)}.$$

Para três,

$$T\{\phi_1\phi_2\phi_3\} = :\phi_1\phi_2\phi_3: + \overline{\phi_1\phi_2}:\phi_3: + \overline{\phi_1\phi_3}:\phi_2: + \overline{\phi_2\phi_3}:\phi_1: + \dots$$

Para quatro campos, surgem contrações simples e duplas:

$$T\{\phi_1\phi_2\phi_3\phi_4\} =: \phi_1\phi_2\phi_3\phi_4 : + \sum_{\text{pares}} \overline{\phi_i\phi_j} : \prod_{k \neq i,j} \phi_k : \quad (4.20)$$

$$+ \sum_{\text{pares independentes}} \overline{\phi_i\phi_j} \overline{\phi_m\phi_n}. \quad (4.21)$$

As contrações simples correspondem a uma única linha interna nos diagramas, enquanto as duplas já representam duas linhas internas conectando dois pares de operadores.

4.3.2 Enunciado Geral e Aplicação à Teoria de Espalhamento

O Teorema de Wick afirma que

$$T\{\phi_1\phi_2 \cdots \phi_n\} =: \phi_1\phi_2 \cdots \phi_n : + \sum_{\text{todas as contrações possíveis}} \prod (\text{propagadores}). \quad (4.22)$$

Assim, todo produto ordenado temporalmente pode ser decomposto em uma soma de termos normal-ordenados multiplicados por contrações.

Essa identidade é essencial na expansão perturbativa da matriz S ,

$$S = \mathcal{T} \exp\left(-i \int d^4x \mathcal{H}_{\text{int}}(x)\right),$$

pois todos os operadores aparecem ordenados temporalmente. Aplicando Wick, cada termo da série é convertido em uma soma de produtos normal-ordenados (cujos valores esperados no vácuo são nulos) e contrações, que são exatamente os propagadores de Feynman.

Desse modo, o Teorema de Wick transforma cálculos operatoriais em combinações puramente algébricas de propagadores, estabelecendo a ponte direta para o formalismo dos diagramas de Feynman, onde cada contração é representada por uma linha entre dois pontos de interação.

4.4 Diagramas de Feynman

A expansão perturbativa da matriz S , organizada pelo Teorema de Wick, leva naturalmente à representação gráfica dos termos de interação por meio dos chamados diagramas de Feynman. Cada termo da série de Dyson corresponde a um conjunto de contrações entre operadores de campo, que por sua vez são traduzidas em elementos gráficos com regras bem definidas.

4.4.1 Da Série de Dyson aos Diagramas

Recordemos que a matriz S no quadro de interação é dada por

$$S = \mathcal{T} \exp\left(-i \int d^4x \mathcal{H}_{\text{int}}(x)\right). \quad (4.23)$$

Expandindo a exponencial em série de potências, temos:

$$S = \mathbb{I} - i \int d^4x \mathcal{H}_{\text{int}}(x) - \frac{1}{2} \int d^4x d^4y \mathcal{T}\{\mathcal{H}_{\text{int}}(x)\mathcal{H}_{\text{int}}(y)\} + \dots \quad (4.24)$$

Cada termo dessa expansão contém produtos de operadores de campo ordenados temporalmente. O Teorema de Wick permite reescrever esses produtos como combinações de ordenamentos normais e contrações. Como vimos, cada contração equivale a um propagador de Feynman:

$$\overline{\phi(x)\phi(y)} \longleftrightarrow \Delta_F(x-y).$$

Assim, a aplicação repetida do Teorema de Wick converte a expansão de S em uma soma de integrais de produtos de propagadores e vértices de interação. Essa é precisamente a estrutura representada graficamente pelos diagramas de Feynman.

4.4.2 Elementos Básicos dos Diagramas e Regras

Um diagrama de Feynman é construído a partir de três ingredientes fundamentais:

- **Linhas externas:** correspondem aos estados de partículas iniciais e finais (operadores de criação e aniquilação não contraídos).
- **Linhas internas:** representam propagadores de partículas virtuais, resultantes das contrações entre operadores de campo.
- **Vértices:** correspondem aos pontos de interação no espaço-tempo, introduzidos por fatores do Hamiltoniano de interação.

Por exemplo, no caso de uma interação escalar do tipo ϕ^4 , o Hamiltoniano de interação é

$$\mathcal{H}_{\text{int}}(x) = \frac{\lambda}{4!} \phi^4(x),$$

e cada vértice no diagrama possui quatro linhas conectadas, associado ao fator

$$-i\lambda \int d^4x.$$

A tradução para o espaço de momentos simplifica os cálculos e fornece as chamadas regras de Feynman:

1. **Linhas externas:** cada partícula inicial/final é representada por um fator de onda de plano $e^{\mp i p \cdot x}$, que na prática se associa a um estado normalizado no espaço de Fock.
2. **Vértice:** associe um fator de $-i\lambda$ (no caso de ϕ^4) e imponha conservação de momento: $\sum p_{\text{entrando}} = 0$.
3. **Linha interna:** associe a cada propagador de momento p o fator

$$\frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}.$$

4. **Integração:** para cada linha interna, integre sobre o momento não fixado:

$$\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4}.$$

5. **Fator de simetria:** divida por um fator que leva em conta o número de permutações equivalentes de linhas ou vértices que não alteram o diagrama.

Para ilustrar a aplicação das regras desenvolvidas, consideremos o processo mais simples de espalhamento $2 \rightarrow 2$ em uma teoria escalar com interação do tipo ϕ^4 . O Hamiltoniano de interação é dado por

$$\mathcal{H}_{\text{int}}(x) = \frac{\lambda}{4!} \phi^4(x), \quad (4.25)$$

onde λ é a constante de acoplamento.

No quadro de interação, o termo de primeira ordem na expansão da matriz S é

$$S^{(1)} = -i \int d^4 x H_I(x) = -i \frac{\lambda}{4!} \int d^4 x T\{\phi^4(x)\}. \quad (4.26)$$

O elemento de matriz que descreve a transição entre um estado inicial de duas partículas $|p_1, p_2\rangle$ e um estado final $|p_3, p_4\rangle$ é

$$\mathcal{S}_{fi}^{(1)} = \langle p_3, p_4 | S^{(1)} | p_1, p_2 \rangle. \quad (4.27)$$

Escrevendo explicitamente,

$$\mathcal{S}_{fi}^{(1)} = -i \frac{\lambda}{4!} \int d^4 x \langle p_3, p_4 | T\{\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(x)\} | p_1, p_2 \rangle. \quad (4.28)$$

Contrações e fator combinatório.

Cada uma das quatro cópias de $\phi(x)$ deve ser contraída com uma das quatro linhas externas do processo (p_1, p_2, p_3, p_4) . Há $4!$ maneiras de realizar esse emparelhamento, cancelando exatamente o fator $1/4!$ presente em (4.28). Assim, o resultado conectado é

$$\mathcal{S}_{fi}^{(1)} = -i\lambda \int d^4 x u_{p_3}^*(x) u_{p_4}^*(x) u_{p_1}(x) u_{p_2}(x), \quad (4.29)$$

onde cada fator de onda é dado por

$$u_{\vec{p}}(x) = \frac{e^{-ip \cdot x}}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}}, \quad u_{\vec{p}}^*(x) = \frac{e^{+ip \cdot x}}{\sqrt{2E_{\vec{p}}}}, \quad p^0 = E_{\vec{p}}.$$

Integração no espaço-tempo.

Substituindo os modos explícitos,

$$\mathcal{S}_{fi}^{(1)} = -i\lambda \int d^4 x \frac{e^{i(p_3+p_4-p_1-p_2) \cdot x}}{\sqrt{\prod_{i=1}^4 2E_{p_i}}}.$$

A integral gera a delta de conservação de 4-momento:

$$\int d^4x e^{i(p_3+p_4-p_1-p_2)\cdot x} = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p_3 - p_4).$$

Logo,

$$\mathcal{S}_{fi}^{(1)} = -i\lambda (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \frac{1}{\sqrt{\prod_{i=1}^4 2E_{p_i}}}. \quad (4.30)$$

Normalização covariante.

Trabalhando com estados covariantemente normalizados, $|p\rangle_{\text{cov}} = \sqrt{2E_p} a_p^\dagger |0\rangle$, os fatores de $1/\sqrt{2E_p}$ das ondas externas são exatamente cancelados. Assim, o resultado simplifica para

$$\langle p_3, p_4 | S | p_1, p_2 \rangle = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) i\mathcal{M},$$

com a amplitude invariante

$$\mathcal{M} = -\lambda \quad (4.31)$$

ao nível de árvore na teoria ϕ^4 .

Este é o diagrama de contato típico da interação ϕ^4 . Não há propagadores internos em primeira ordem, e o cálculo reduz-se a um único vértice. Diagramas mais ricos, com canais s , t e u , surgem em ordens superiores ou em teorias com interações cúbicas.

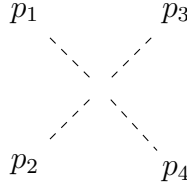


Figura 1 – Diagrama de contato da teoria ϕ^4 para o processo $2 \rightarrow 2$ ao nível de árvore.

4.4.3 Os invariantes de Mandelstam s, t, u

Em processos de espalhamento $2 \rightarrow 2$, é usual introduzir as variáveis invariantes de Lorentz conhecidas como invariantes de Mandelstam. Para quatro-momentos iniciais p_1, p_2 e finais p_3, p_4 , define-se:

$$s = (p_1 + p_2)^2, \quad (4.32)$$

$$t = (p_1 - p_3)^2, \quad (4.33)$$

$$u = (p_1 - p_4)^2. \quad (4.34)$$

Essas quantidades resumem toda a informação cinemática do processo em escalares invariantes de Lorentz. O invariante s mede a energia total ao quadrado no centro de massa e corresponde ao chamado canal s , em que as partículas iniciais se fundem em um estado intermediário. Já t e u descrevem transferências de momento, associados a processos de troca de partículas virtuais entre linhas externas, os canais t e u .

Além disso, os três invariantes não são independentes, satisfazendo a relação

$$s + t + u = \sum_{i=1}^4 m_i^2,$$

o que reduz o número de graus de liberdade cinemáticos.

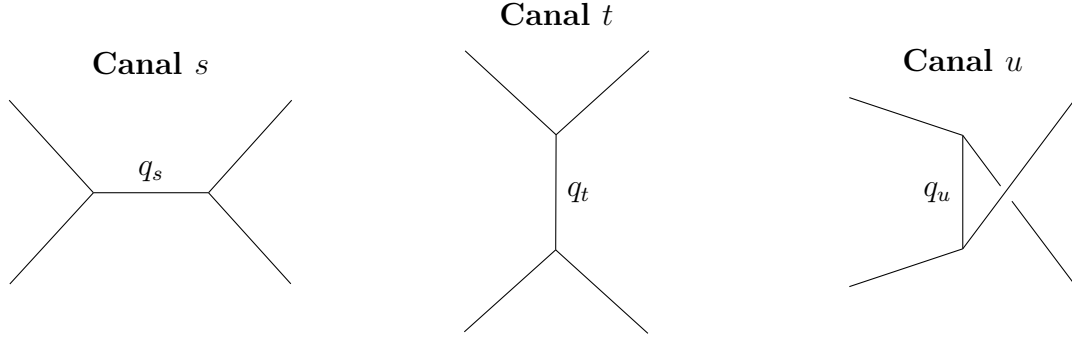


Figura 2 – Os canais s , t e u no espalhamento $2 \rightarrow 2$, representando diferentes combinações de momentos externos nos diagramas de Feynman.

A introdução desses invariantes mostra como a análise de espalhamento ganha clareza com os diagramas de Feynman: cada canal corresponde a uma topologia distinta de propagação virtual, revelando diferentes formas pelas quais as partículas podem interagir.

4.5 Seções de Choque e Taxas de Decaimento

A matriz S contém toda a informação dinâmica proveniente das amplitudes de Feynman; para extrair quantidades observáveis, como seções de choque em colisões e taxas de decaimento para partículas instáveis, é necessário relacioná-la a probabilidades físicas. Essa conexão é estabelecida a partir da decomposição

$$S = \mathbb{I} + iT,$$

na qual os elementos não triviais residem em T . Define-se a amplitude invariante \mathcal{M} por

$$\langle f|T|i \rangle = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_f - P_i) i\mathcal{M}, \quad (4.35)$$

com P_i e P_f os quatro-momentos totais inicial e final. A delta de Dirac garante a conservação global de momento, enquanto \mathcal{M} carrega a dinâmica do processo.

Ao elevar o módulo ao quadrado surgem termos do tipo

$$\delta^{(4)}(P)^2 = \delta^{(4)}(P) \delta^{(4)}(0).$$

O fator $\delta^{(4)}(0)$ é interpretado, no limite de normalização em volume finito, como o volume espaço-temporal:

$$\delta^{(4)}(0) = \frac{VT}{(2\pi)^4}.$$

Assim,

$$|\langle f|S|i \rangle|^2 \longrightarrow (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_f - P_i) VT |\mathcal{M}|^2,$$

quantidade que permite definir taxas e probabilidades.

4.5.1 Seções de Choque

Dividindo por T , obtém-se uma taxa de transição por unidade de tempo. A soma sobre estados finais é substituída pela medida de fase relativística

$$\frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E}.$$

Para o processo geral $1 + 2 \rightarrow 3 + \dots + n$, a seção de choque diferencial é

$$d\sigma = \frac{1}{4\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}} |\mathcal{M}|^2 \left(\prod_{i=3}^n \frac{d^3p_i}{(2\pi)^3 2E_i} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(p_1 + p_2 - \sum_{i=3}^n p_i \right). \quad (4.36)$$

Exemplo: espalhamento $2 \rightarrow 2$ em $\lambda\phi^4$.

Para

$$\phi(p_1) + \phi(p_2) \longrightarrow \phi(p_3) + \phi(p_4),$$

a amplitude ao nível de árvore é simplesmente

$$\mathcal{M} = -i\lambda.$$

A seção de choque diferencial é então

$$d\sigma = \frac{1}{4\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - m^4}} |\mathcal{M}|^2 d\Pi_2, \quad (4.37)$$

onde

$$d\Pi_2 = \frac{d^3p_3}{(2\pi)^3 2E_3} \frac{d^3p_4}{(2\pi)^3 2E_4} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p_3 - p_4). \quad (4.38)$$

Usando a delta espacial para integrar em \vec{p}_4 , e no centro de massa

$$\vec{p}_1 = -\vec{p}_2 \equiv \vec{p}_i, \quad \vec{p}_3 = -\vec{p}_4 \equiv \vec{p}_f,$$

obtém-se

$$d\Pi_2 = \frac{1}{16\pi^2} \frac{|\vec{p}_f|}{\sqrt{s}} d\Omega.$$

Com o fluxo $F = 4|\vec{p}_i|\sqrt{s}$,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{64\pi^2 s} \frac{|\vec{p}_f|}{|\vec{p}_i|} |\mathcal{M}|^2 = \frac{\lambda^2}{64\pi^2 s} \frac{|\vec{p}_f|}{|\vec{p}_i|}.$$

4.5.2 Taxas de Decaimento

Para uma partícula instável de quatro-momento p , a taxa total é

$$\Gamma = \frac{1}{2E} \int \left(\prod_{i=1}^n \frac{d^3p_i}{(2\pi)^3 2E_i} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(p - \sum_i p_i \right) |\mathcal{M}|^2. \quad (4.39)$$

No referencial de repouso, $E = M$, simplificando a expressão.

Exemplo: decaimento $1 \rightarrow 2$.

Para

$$\Phi(M) \longrightarrow \phi(p_1) + \phi(p_2),$$

com partículas idênticas de massa m , a fórmula geral reduz-se a

$$\Gamma = \frac{1}{2M} \int \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3 2E_1} \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3 2E_2} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p - p_1 - p_2) |\mathcal{M}|^2.$$

Usando a delta espacial e

$$|\vec{p}| = \frac{1}{2} \sqrt{M^2 - 4m^2}, \quad E = M/2,$$

chega-se ao resultado conhecido:

$$\Gamma = \frac{|\vec{p}|}{8\pi M^2} |\mathcal{M}|^2, \quad M > 2m.$$

As expressões obtidas estabelecem a ponte entre amplitudes calculadas diagramaticamente e observáveis físicos. Seções de choque e taxas de decaimento fornecem previsões quantitativas comparáveis com experimentos, enquanto correções de ordem superior introduzem dependências energéticas mais refinadas e larguras de ressonância, essenciais para testes de alta precisão e para a estrutura de renormalização da teoria.

5 O Campo de Dirac

5.1 A Equação de Dirac

5.1.1 O Grupo de Lorentz e sua Álgebra

O ponto de partida para a descrição relativística de partículas com spin é a estrutura de simetria do espaço-tempo de Minkowski. Chamamos de grupo de Lorentz o conjunto de transformações lineares que preservam o intervalo invariante

$$s^2 = \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu,$$

Uma transformação de Lorentz atua sobre as coordenadas como

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu,$$

e a invariância do intervalo exige que

$$\Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma \eta^{\rho\sigma} = \eta^{\mu\nu}. \quad (5.1)$$

Essa é a condição definidora do grupo $SO(1, 3)$, formado por todas as matrizes reais 4×4 que preservam a métrica de Minkowski. Ela garante que o produto escalar $x_\mu x^\mu$ é o mesmo em todos os referenciais inerciais relacionados por Λ .

Para explorar a estrutura interna desse grupo, consideramos uma transformação infinitesimal próxima da identidade,

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\nu,$$

em que $\omega^\mu{}_\nu$ é um pequeno parâmetro, linear nas coordenadas de transformação. Substituindo essa forma em (5.1) e retendo apenas os termos de primeira ordem em ω , obtemos

$$(\delta^\mu{}_\rho + \omega^\mu{}_\rho)(\delta^\nu{}_\sigma + \omega^\nu{}_\sigma) \eta^{\rho\sigma} = \eta^{\mu\nu}.$$

Expandindo e desprezando os termos quadráticos, resulta

$$\omega^\mu{}_\rho \eta^{\rho\nu} + \omega^\nu{}_\sigma \eta^{\mu\sigma} = 0.$$

A introdução de índices mistos é conveniente aqui: definindo

$$\omega^{\mu\nu} \equiv \eta^{\nu\rho} \omega^\mu{}_\rho,$$

a condição acima torna-se

$$\omega^{\mu\nu} = -\omega^{\nu\mu}.$$

O parâmetro infinitesimal $\omega^{\mu\nu}$ é, portanto, antissimétrico, e a álgebra de Lie do grupo de Lorentz é caracterizada por seis geradores independentes: três correspondem às rotações espaciais, e três aos boosts (transformações que misturam tempo e espaço).

Essa decomposição já antecipa a estrutura fundamental das representações de Lorentz. As rotações formam um subgrupo compacto $SO(3)$, associado à conservação do momento angular, enquanto os boosts formam um conjunto não compacto, refletindo o caráter hiperbólico do espaço-tempo relativístico. Na formulação quântica, esses geradores serão promovidos a operadores hermitianos que atuam sobre os estados de partículas, definindo a forma como cada tipo de campo, escalar, vetorial ou espinorial, responde a transformações de Lorentz.

5.1.2 Geradores e Álgebra de Lorentz

As transformações de Lorentz podem ser expressas em termos dos geradores infinitesimais da álgebra associada. Assim como em qualquer grupo contínuo, uma transformação finita é obtida pela exponenciação de uma combinação linear dos geradores:

$$\Lambda = \exp\left(\frac{1}{2} \omega_{\rho\sigma} M^{\rho\sigma}\right). \quad (5.2)$$

O fator $\frac{1}{2}$ evita dupla contagem dos índices antissimétricos de $\omega_{\rho\sigma}$ e assegura que a expansão linear de Λ reproduza corretamente a transformação infinitesimal.

A representação vetorial dos geradores é obtida diretamente da ação de Λ sobre um vetor v^μ . Da condição de preservação da métrica, segue que

$$(M^{\rho\sigma})^\mu{}_\nu = \eta^{\mu\rho} \delta^\sigma{}_\nu - \eta^{\mu\sigma} \delta^\rho{}_\nu.$$

Essas matrizes formam uma base da álgebra de Lorentz no espaço vetorial de quatro dimensões e satisfazem o comutador característico

$$[M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}] = \eta^{\nu\rho} M^{\mu\sigma} - \eta^{\mu\rho} M^{\nu\sigma} - \eta^{\nu\sigma} M^{\mu\rho} + \eta^{\mu\sigma} M^{\nu\rho}. \quad (5.3)$$

Essa relação define a estrutura de Lie do grupo $SO(1, 3)$ e mostra explicitamente como os diferentes geradores se misturam sob sucessivas transformações.

As componentes puramente espaciais M^{ij} correspondem às rotações usuais no espaço tridimensional, enquanto as componentes mistas M^{0i} descrevem as transformações de boost que conectam referenciais inerciais em movimento relativo. É útil introduzir os operadores vetoriais

$$J_i = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} M^{jk}, \quad K_i = M^{0i},$$

que isolam os graus de liberdade associados, respectivamente, às rotações e aos boosts. As relações de comutação seguem diretamente de (5.3):

$$[J_i, J_j] = \epsilon_{ijk} J_k, \quad [J_i, K_j] = \epsilon_{ijk} K_k, \quad [K_i, K_j] = -\epsilon_{ijk} J_k.$$

Os operadores J_i satisfazem a álgebra familiar de $SO(3)$, refletindo o caráter compacto das rotações espaciais. Já os K_i obedecem a relações de comutação com sinal oposto, indicando que o conjunto dos boosts forma um subespaço não compacto, responsável pela estrutura hiperbólica do espaço-tempo relativístico.

Essa distinção entre as partes compacta e não compacta da álgebra é central para a construção das representações de Lorentz: ela antecipa a decomposição em duas cópias independentes de $SU(2)$, que constitui o ponto de partida para introduzir os espinores de Weyl e, posteriormente, a equação de Dirac.

5.1.3 Decomposição em Duas Cópias de $SU(2)$

A estrutura da álgebra de Lorentz torna-se mais clara quando introduzimos combinações lineares complexas dos operadores de rotação e de boost. Definimos

$$A_i = \frac{1}{2} (J_i + iK_i), \quad B_i = \frac{1}{2} (J_i - iK_i).$$

Essas combinações têm a virtude de diagonalizar a ação mútua entre os conjuntos $\{J_i\}$ e $\{K_i\}$, separando a álgebra em duas partes independentes. Usando as relações de comutação anteriores,

$$[J_i, J_j] = \epsilon_{ijk} J_k, \quad [J_i, K_j] = \epsilon_{ijk} K_k, \quad [K_i, K_j] = -\epsilon_{ijk} J_k,$$

obtem-se diretamente

$$[A_i, A_j] = \epsilon_{ijk} A_k, \quad [B_i, B_j] = \epsilon_{ijk} B_k, \quad [A_i, B_j] = 0.$$

Os operadores A_i e B_i satisfazem, portanto, duas cópias independentes da álgebra de $SU(2)$ e comutam entre si. Em outras palavras, a álgebra complexificada de Lorentz pode ser escrita como

$$\mathfrak{so}(1, 3)_{\mathbb{C}} \simeq \mathfrak{su}(2)_L \oplus \mathfrak{su}(2)_R.$$

Cada cópia corresponde a um setor independente de graus de liberdade, frequentemente interpretados como “esquerdo” e “direito”, ou equivalentes às representações de quiralidade.

As representações irredutíveis da álgebra de Lorentz são então rotuladas por dois números quânticos de spin,

$$(j_L, j_R),$$

onde j_L e j_R identificam, respectivamente, as dimensões das representações de cada cópia de $SU(2)$. A representação vetorial usual, associada a quatro-vetores de Minkowski, corresponde a $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, enquanto as representações fundamentais

$$\left(\frac{1}{2}, 0\right) \quad \text{e} \quad \left(0, \frac{1}{2}\right)$$

descreverão os espinores de Weyl, que constituem o bloco básico para a formulação relativística de férmions. Essa decomposição revela que o comportamento espinorial das partículas relativísticas é uma consequência direta da estrutura da álgebra de Lorentz.

5.1.4 O Espaço de Representações Espinoriais

A decomposição da álgebra de Lorentz em duas cópias independentes de $SU(2)$ revela que é possível definir objetos que transformam separadamente sob cada um desses grupos. Chamamos de espinor de Weyl esquerdo um campo que pertence à representação fundamental de $SU(2)_L$ e é invariante sob $SU(2)_R$, ou seja, uma representação do tipo $(\frac{1}{2}, 0)$. Analogamente, o espinor de Weyl direito pertence à representação $(0, \frac{1}{2})$.

Para um espinor esquerdo ψ_L , as transformações de Lorentz agem de forma linear segundo

$$\psi_L \longrightarrow S_L \psi_L, \quad S_L = \exp\left(i \frac{\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{2} + \frac{\boldsymbol{\eta} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{2}\right),$$

onde $\boldsymbol{\theta}$ parametriza rotações espaciais e $\boldsymbol{\eta}$ parametriza boosts. A presença de i no termo de rotação e a ausência dele no termo de boost reflete o fato de que rotações são operações unitárias (compactas), enquanto boosts correspondem a transformações hiperbólicas (não compactas).

De maneira análoga, um espinor direito ψ_R transforma segundo

$$\psi_R \longrightarrow S_R \psi_R, \quad S_R = \exp\left(i \frac{\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{2} - \frac{\boldsymbol{\eta} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{2}\right).$$

As transformações S_L e S_R pertencem a grupos independentes: cada uma delas é construída a partir das combinações A_i e B_i da seção anterior, e satisfaz a álgebra de $SU(2)$. Esses dois tipos de espinores, portanto, representam graus de liberdade distintos sob o grupo de Lorentz, uma manifestação da estrutura quirial do espaço-tempo relativístico.

Podemos, contudo, combinar os dois em um único objeto de quatro componentes,

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix},$$

que constitui o espinor de Dirac. Essa unificação permite construir expressões covariantes sob transformações de Lorentz e define o campo fundamental de férmions relativísticos. O espinor de Dirac comporta tanto componentes de quiralidade esquerda quanto direita, o que o torna adequado para descrever partículas com massa, já que um termo de massa necessariamente mistura os dois setores de quiralidade. A formulação dinâmica que incorpora essas propriedades emerge naturalmente da equação de Dirac, que construiremos a seguir.

5.1.5 Construção da Ação e Equação de Movimento

O objetivo agora é construir uma teoria de campo para férmions relativísticos que seja covariante sob transformações de Lorentz e que leve a uma equação de movimento linear em derivadas do tempo. Essa linearidade é crucial, pois garante que o campo ψ tenha interpretação probabilística consistente no limite não relativístico, evitando o problema das derivadas de segunda ordem na equação de Klein–Gordon, que dificultam a definição de uma densidade de probabilidade positiva.

Como o campo ψ pertence a uma representação espinorial, ele não se transforma como um vetor ou tensor comum. A invariância de Lorentz requer, portanto, que o termo cinético seja construído a partir de uma combinação bilinear de ψ e de seu adjunto $\bar{\psi}$, envolvendo uma derivada covariante que atue sobre ψ e um conjunto de matrizes γ^μ que conectem os índices de Lorentz com os índices de spin. A forma mais geral compatível com essas exigências é

$$\bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi.$$

Para que essa expressão se comporte como um escalar sob transformações de Lorentz, as matrizes γ^μ devem transformar como vetores contravariantes, satisfazendo a relação fundamental

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}. \quad (5.4)$$

Essas relações de anticomutação definem a álgebra de Clifford associada ao espaço-tempo de Minkowski e determinam que as matrizes γ^μ formam uma representação matricial dessa álgebra. Existem diversas representações equivalentes, todas relacionadas por transformações de similaridade, sendo as mais comuns a representação de Dirac e a representação de Weyl. A escolha de representação não afeta a física, apenas a forma explícita das matrizes.

Com isso, a ação de Dirac é escrita como

$$S = \int d^4x \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi, \quad (5.5)$$

onde o adjunto de Dirac é definido por

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0,$$

de modo que a quantidade bilinear $\bar{\psi}\psi$ seja invariante sob transformações de Lorentz. Essa construção assegura que tanto o termo cinético quanto o termo de massa da ação possuam a estrutura covariante apropriada.

A equação de movimento segue da condição de extremalização da ação em relação ao campo ψ :

$$\delta S = \int d^4x \delta\bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0,$$

o que implica

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0. \quad (5.6)$$

Essa é a equação de Dirac, a forma relativisticamente covariante da dinâmica para partículas de spin $\frac{1}{2}$. Ela é linear em derivadas e garante uma evolução temporal bem definida, com um operador de Hamiltoniano hermitiano no espaço de Hilbert.

A consistência com a relatividade pode ser verificada aplicando o operador conjugado $(i\gamma^\nu \partial_\nu + m)$ sobre (5.6):

$$(i\gamma^\nu \partial_\nu + m)(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0.$$

Usando a relação de anticomutação (5.4), obtemos

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\psi = 0,$$

ou seja,

$$(\square + m^2)\psi = 0,$$

que é justamente a equação de Klein–Gordon. Logo, cada componente do espinor de Dirac descreve uma partícula relativística de massa m , mostrando que a equação de Dirac não substitui a de Klein–Gordon, mas a generaliza, incorporando o grau de liberdade de spin de forma natural.

Fisicamente, a introdução das matrizes γ^μ permite representar o acoplamento entre o momento e o spin de uma partícula de maneira covariante, traduzindo geometricamente como o spin é afetado por rotações e boosts. O termo de massa $m\bar{\psi}\psi$ tem papel essencial: ele acopla as componentes de quiralidade esquerda e direita, ψ_L e ψ_R , que, em ausência de massa, transformariam de maneira independente sob as duas cópias de $SU(2)$. Assim, a presença de massa rompe a separação quiral e conecta os dois setores da representação espinorial, refletindo o fato de que partículas massivas não possuem quiralidade bem definida.

A ação (5.5) condensa de forma elegante os princípios da relatividade e da mecânica quântica: é local, covariante, linear e compatível com a estrutura de spin- $\frac{1}{2}$ do campo. Ela constitui o ponto de partida para a quantização fermiônica e para a formulação de teorias interativas, como a Eletrodinâmica Quântica, onde o campo de Dirac interage com o campo eletromagnético por meio do princípio de gauge.

5.2 Espinores Quirais e a Matriz γ^5

A equação de Dirac introduz um campo de quatro componentes

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0,$$

onde as matrizes γ^μ obedecem à álgebra de Clifford

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}.$$

Esse formalismo unifica as duas representações fundamentais do grupo de Lorentz, $(\frac{1}{2}, 0)$ e $(0, \frac{1}{2})$, em um único objeto que descreve férmions relativísticos. Entretanto, para compreender a estrutura interna do espinor de Dirac, é conveniente separar essas duas componentes, o que conduz naturalmente ao conceito de quiralidade.

5.2.1 Decomposição quiral do espinor de Dirac

A matriz

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$$

é introduzida para distinguir entre as duas representações fundamentais. Ela satisfaz

$$(\gamma^5)^2 = 1, \quad \{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0.$$

Essas propriedades permitem definir os operadores de projeção

$$P_L = \frac{1 - \gamma^5}{2}, \quad P_R = \frac{1 + \gamma^5}{2}, \quad (5.7)$$

que satisfazem

$$P_L^2 = P_L, \quad P_R^2 = P_R, \quad P_L P_R = 0, \quad P_L + P_R = 1.$$

Aplicando-os ao espinor de Dirac, obtemos as componentes

$$\psi_L = P_L \psi, \quad \psi_R = P_R \psi,$$

de modo que o campo completo pode ser escrito como

$$\psi = \psi_L + \psi_R.$$

A anticomutação entre γ^5 e γ^μ garante que cada projeção se transforma de maneira independente sob o grupo de Lorentz:

$$\gamma^\mu P_{L,R} = P_{R,L} \gamma^\mu.$$

Consequentemente, a equação de Dirac pode ser reescrita como duas equações acopladas:

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_L - m\psi_R = 0, \quad (5.8)$$

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_R - m\psi_L = 0. \quad (5.9)$$

No limite $m = 0$, as duas quiralidades se desacoplam completamente:

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_{L,R} = 0,$$

e cada componente descreve um espinor de Weyl. Assim, um férmion sem massa é representado por apenas uma das duas quiralidades.

5.2.2 Propriedades do Operador γ^5 e dos Projetores Quirais

A matriz γ^5 , definida na subseção anterior, desempenha papel central na estrutura quiral da teoria de férmions relativísticos. Ela depende apenas da orientação do espaço-tempo e não de uma direção específica, sendo portanto invariante sob rotações e transformações de Lorentz próprias.

A hermiticidade de γ^5 segue diretamente das propriedades usuais das matrizes de Dirac:

$$(\gamma^5)^\dagger = (i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3)^\dagger = -i(\gamma^3)^\dagger(\gamma^2)^\dagger(\gamma^1)^\dagger(\gamma^0)^\dagger = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \gamma^5,$$

onde utilizamos que $(\gamma^0)^\dagger = \gamma^0$ e $(\gamma^i)^\dagger = -\gamma^i$. Assim, γ^5 é hermitiana e possui autovalores ± 1 , o que justifica a sua utilização como operador de projeção de quiralidade.

Os projetores quirais definidos anteriormente satisfazem

$$P_L^2 = P_L, \quad P_R^2 = P_R, \quad P_L P_R = 0, \quad P_L + P_R = 1,$$

e decompõem o espaço espinorial em duas sub-representações ortogonais. Aplicando-os ao espinor de Dirac,

$$\psi_L = P_L \psi, \quad \psi_R = P_R \psi, \quad \psi = \psi_L + \psi_R.$$

A anticomutação entre γ^5 e γ^μ implica que γ^μ troca quiralidades:

$$\gamma^\mu P_L = P_R \gamma^\mu, \quad \gamma^\mu P_R = P_L \gamma^\mu.$$

Esse fato mostra que o termo cinético $\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi$ mistura as duas componentes quirais.

Um ponto sutil, frequentemente omitido, é a relação entre os projetores quirais e o adjunto de Dirac. Definindo $\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0$, verifica-se que

$$\bar{\psi}_L = \bar{\psi}P_R, \quad \bar{\psi}_R = \bar{\psi}P_L.$$

Essa inversão dos projetores decorre da anticomutação

$$\gamma^0\gamma^5 = -\gamma^5\gamma^0.$$

Assim, bilineares quirais puros se anulam:

$$\bar{\psi}_L\psi_L = 0, \quad \bar{\psi}_R\psi_R = 0,$$

enquanto termos cruzados não:

$$\bar{\psi}_L\psi_R = \bar{\psi}P_R P_R \psi = \bar{\psi}_L \psi.$$

Isso evidencia que o termo de massa $m\bar{\psi}\psi = m(\bar{\psi}_L\psi_R + \bar{\psi}_R\psi_L)$ acopla necessariamente as duas quiralidades.

No limite $m = 0$, a ação separa-se e surge simetria axial com corrente

$$j_5^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi,$$

classicamente conservada:

$$\partial_\mu j_5^\mu = 0.$$

5.2.3 Quiralidade e Transformações de Paridade

A operação de paridade inverte as coordenadas espaciais,

$$P : (t, \mathbf{x}) \mapsto (t, -\mathbf{x}),$$

e exige que

$$\gamma^0 \mapsto \gamma^0, \quad \gamma^i \mapsto -\gamma^i.$$

Como γ^5 contém três fatores espaciais, ela transforma como

$$P : \gamma^5 \mapsto -\gamma^5.$$

Assim,

$$P_L \longleftrightarrow P_R,$$

e portanto

$$\psi_L \longrightarrow \psi_R, \quad \psi_R \longrightarrow \psi_L.$$

O espinor de Dirac é construído para transformar como

$$\psi(t, \mathbf{x}) \mapsto \psi'(t, \mathbf{x}) = \gamma^0 \psi(t, -\mathbf{x}),$$

o que preserva a estrutura da ação

$$S = \int d^4x \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi.$$

Espinores de Weyl isolados não possuem essa propriedade, evidenciando a violação de paridade em teorias puramente quirais.

5.2.4 Estrutura da Ação em Termos de Quiralidades

A decomposição do espinor de Dirac em ψ_L e ψ_R permite reescrever a ação como

$$S = \int d^4x \left(\bar{\psi}_L i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_L + \bar{\psi}_R i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_R - m(\bar{\psi}_L \psi_R + \bar{\psi}_R \psi_L) \right). \quad (5.10)$$

O termo cinético é diagonal em quiralidade, enquanto o de massa é off-diagonal. No limite $m = 0$, as duas quiralidades se desacoplam completamente:

$$S = \int d^4x \left(\bar{\psi}_L i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_L + \bar{\psi}_R i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_R \right),$$

e a teoria exibe simetria $U(1)_L \times U(1)_R$, com correntes vetorial e axial.

A introdução de massa reduz essa invariância ao subgrupo diagonal, refletindo que a massa mistura as representações $(\frac{1}{2}, 0)$ e $(0, \frac{1}{2})$. Fisicamente, essa estrutura mostra que férmions leves se comportam aproximadamente como férmions de Weyl, enquanto férmions massivos apresentam mistura intensa entre as duas componentes de quiralidade.

5.3 Soluções de Onda Plana da Equação de Dirac

Tendo estabelecido a estrutura da equação de Dirac e a natureza de suas componentes quirais, podemos agora buscar suas soluções explícitas. O objetivo é compreender como o campo $\psi(x)$ descreve partículas relativísticas de $\text{spin}=\frac{1}{2}$, com massa m , e como surgem as interpretações de partícula e antipartícula no formalismo.

5.3.1 A equação no espaço de momento

Busquemos soluções de onda plana da equação de Dirac, da forma

$$\psi(x) = u(p) e^{-ip \cdot x}, \quad (5.11)$$

onde $p^\mu = (E, \mathbf{p})$ é o quatro-momento da partícula. Essa forma é natural, pois traduz a invariância por translações em espaço e tempo na linguagem de modos de Fourier, tal como ocorre na equação de Schrödinger livre.

Substituindo (5.11) na equação de Dirac

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0,$$

e observando que $\partial_\mu \psi = -ip_\mu \psi$, obtemos

$$(\gamma^\mu p_\mu - m)u(p) = 0. \quad (5.12)$$

Essa é a equação de Dirac no espaço de momento. Ela não é mais uma equação diferencial, mas sim uma equação algébrica matricial de dimensão 4×4 , que impõe restrições sobre as componentes do espinor $u(p)$.

Condição de existência de soluções não triviais.

Soluções não nulas $u(p) \neq 0$ existem apenas se o determinante do operador $\gamma^\mu p_\mu - m$ for nulo. Para verificar essa condição, multiplicamos a equação (5.12) à esquerda por $(\gamma^\nu p_\nu + m)$:

$$(\gamma^\nu p_\nu + m)(\gamma^\mu p_\mu - m)u(p) = 0.$$

Expandindo o produto,

$$\gamma^\nu p_\nu \gamma^\mu p_\mu - m\gamma^\nu p_\nu + m\gamma^\mu p_\mu - m^2 = 0.$$

Os termos lineares em γ se cancelam, e o termo quadrático pode ser simplificado usando a anticomutação das matrizes de Dirac:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}.$$

Assim,

$$\gamma^\nu p_\nu \gamma^\mu p_\mu = \frac{1}{2} (\gamma^\nu \gamma^\mu + \gamma^\mu \gamma^\nu) p_\nu p_\mu = \eta^{\mu\nu} p_\mu p_\nu \mathbb{I} = p^2 \mathbb{I},$$

de modo que

$$(\gamma^\nu p_\nu + m)(\gamma^\mu p_\mu - m) = (p^2 - m^2) \mathbb{I}.$$

Portanto, a equação (5.12) implica

$$(p^2 - m^2)u(p) = 0.$$

Para que existam soluções não triviais, é necessário que o fator escalar se anule:

$$p^2 = m^2, \quad (5.13)$$

ou seja,

$$E^2 = \mathbf{p}^2 + m^2. \quad (5.14)$$

Esta é a relação de dispersão relativística padrão, garantindo que a equação de Dirac descreve partículas de massa m propagando-se com quatro-momento sobre a hipersuperfície de massa de Minkowski.

Energia positiva e negativa.

A relação (5.14) admite duas soluções:

$$E = \pm \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}. \quad (5.15)$$

As soluções com $E > 0$ correspondem a estados de energia positiva, que serão interpretados como partículas, as soluções com $E < 0$ representam estados de energia negativa. O problema das energias negativas foi um ponto central na formulação original de Dirac, levando à interpretação de que esses estados representam antipartículas, entidades com carga oposta mas mesma massa que as partículas correspondentes.

Exemplo: momento unidimensional.

Para fixar ideias, consideremos $\mathbf{p} = (0, 0, p_z)$, com $p_z > 0$. A relação (5.15) dá

$$E = \pm \sqrt{p_z^2 + m^2}.$$

Em unidades naturais ($c = \hbar = 1$), se $m = 1$ e $p_z = 2$, temos $E = \pm\sqrt{5}$. Logo, as soluções e^{-iEt} e e^{+iEt} descrevem ondas que se propagam com a mesma velocidade de grupo, mas associadas a fluxos de energia oposta.

Equação para as soluções de energia negativa.

De maneira análoga, podemos considerar soluções com dependência de fase oposta:

$$\psi(x) = v(p) e^{+ip \cdot x}.$$

Substituindo em $(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0$, obtemos

$$(\gamma^\mu p_\mu + m) v(p) = 0.$$

As funções $u(p)$ e $v(p)$ satisfazem, portanto, equações complementares:

$$(\not{p} - m) u(p) = 0, \quad (\not{p} + m) v(p) = 0,$$

onde usamos a notação compacta $\not{p} = \gamma^\mu p_\mu$. Essas duas famílias de soluções, $u(p)$ para energia positiva e $v(p)$ para energia negativa, formam um conjunto completo de espinores, descrevendo, respectivamente, partículas e antipartículas. Elas constituirão a base para a quantização do campo de Dirac e para a construção do propagador de férmions.

5.3.2 Soluções explícitas no repouso

Para determinar explicitamente $u(p)$ e $v(p)$, é conveniente começar pelo sistema de repouso da partícula, onde $\mathbf{p} = 0$ e, portanto, $p^\mu = (m, \mathbf{0})$. Nesse caso, a equação (5.12) se reduz a

$$(\gamma^0 m - m) u(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad (\gamma^0 - \mathbb{I}) u(0) = 0. \quad (5.16)$$

Escolhendo a representação de Dirac,

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & -\mathbb{I} \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix},$$

onde σ^i são as matrizes de Pauli, podemos escrever o espinor de quatro componentes $u(0)$ como

$$u(0) = \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix},$$

com ϕ e χ espinores de duas componentes.

Substituindo essa forma em (5.16), obtemos

$$\begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & -\mathbb{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix},$$

o que implica

$$\phi = \phi, \quad -\chi = \chi.$$

Portanto, $\chi = 0$, e o espinor assume a forma

$$u(0) = \begin{pmatrix} \phi \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5.17)$$

O vetor ϕ é um espinor arbitrário de duas componentes, que contém a informação sobre o estado de spin da partícula. Como o spin- $\frac{1}{2}$ possui dois autoestados, podemos escolher uma base conveniente em que ϕ seja autoestado de σ^3 :

$$\phi_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \phi_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Assim, no repouso, as duas soluções independentes de energia positiva são

$$u^{(1)}(0) = \begin{pmatrix} \phi_+ \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u^{(2)}(0) = \begin{pmatrix} \phi_- \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5.18)$$

Esses dois estados representam, respectivamente, spin para cima e para baixo em relação ao eixo z .

De modo completamente análogo, as soluções de energia negativa são obtidas a partir da equação

$$(\gamma^\mu p_\mu + m) v(p) = 0. \quad (5.19)$$

No repouso, $p^\mu = (m, \mathbf{0})$, de modo que

$$(\gamma^0 + \mathbb{I}) v(0) = 0.$$

Escrevendo $v(0)$ também em blocos de duas componentes,

$$v(0) = \begin{pmatrix} \phi' \\ \chi' \end{pmatrix},$$

obtemos

$$\begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & -\mathbb{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi' \\ \chi' \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \phi' \\ \chi' \end{pmatrix},$$

o que leva a $\phi' = 0$. Logo,

$$v(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ \chi' \end{pmatrix}. \quad (5.20)$$

As soluções independentes correspondem a escolher χ' como ϕ_+ ou ϕ_- :

$$v^{(1)}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ \phi_+ \end{pmatrix}, \quad v^{(2)}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ \phi_- \end{pmatrix}. \quad (5.21)$$

Esses quatro espinores, dois $u^{(s)}(0)$ e dois $v^{(s)}(0)$, formam uma base completa de soluções no repouso. Eles satisfazem, respectivamente,

$$(\gamma^0 - \mathbb{I}) u^{(s)}(0) = 0, \quad (\gamma^0 + \mathbb{I}) v^{(s)}(0) = 0,$$

verificando-se diretamente que são soluções da equação de Dirac nas condições $E = \pm m$ e $\mathbf{p} = 0$. Cada espinor de quatro componentes carrega, portanto, a estrutura de um par de espinores de Pauli: o setor superior descreve as partículas de energia positiva, enquanto o inferior descreve as de energia negativa. No repouso, essa separação é completa: os setores não se misturam, e os dois graus de liberdade remanescentes correspondem aos autoestados do spin- $\frac{1}{2}$. Sob transformações de Lorentz, esses setores se acoplarão, como veremos a seguir, gerando as soluções gerais $u(p, s)$ e $v(p, s)$ para momento arbitrário.

5.3.3 Soluções gerais e transformação de Lorentz

Tendo obtido as soluções no repouso, consideremos agora o caso de momento arbitrário $\mathbf{p} \neq 0$. A partir do vetor de quatro-momento no repouso $p_{(0)}^\mu = (m, \mathbf{0})$, podemos construir $p^\mu = (E, \mathbf{p})$ aplicando um boost de Lorentz ao longo da direção de \mathbf{p} , com velocidade $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{p}/E$ e fator de Lorentz $\gamma = E/m$.

Sob essa transformação, o campo de Dirac transforma-se como

$$\psi'(x') = S(\Lambda) \psi(x),$$

onde $S(\Lambda)$ é a representação espinorial do grupo de Lorentz, satisfazendo

$$S^{-1}(\Lambda) \gamma^\mu S(\Lambda) = \Lambda^\mu{}_\nu \gamma^\nu.$$

No caso de um boost puro na direção $\hat{\mathbf{p}}$, o operador $S(\Lambda)$ assume a forma

$$S(\Lambda) = \exp\left(-\frac{\omega}{2} \gamma^0 \gamma^i \hat{p}_i\right), \quad (5.22)$$

onde o parâmetro ω é definido por

$$\cosh \omega = \frac{E}{m}, \quad \sinh \omega = \frac{|\mathbf{p}|}{m}.$$

Aplicando essa transformação ao espinor de repouso $u(0, s)$, obtemos a solução correspondente com momento \mathbf{p} :

$$u(p, s) = S(\Lambda) u(0, s).$$

Para calcular $S(\Lambda)$ de modo explícito, observemos que $\gamma^0 \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix}$, e que $(\gamma^0 \gamma^i \hat{p}_i)^2 = \mathbb{I}$. Assim,

$$S(\Lambda) = \cosh \frac{\omega}{2} - (\gamma^0 \gamma^i \hat{p}_i) \sinh \frac{\omega}{2}.$$

Usando $\cosh(\omega/2) = \sqrt{\frac{E+m}{2m}}$ e $\sinh(\omega/2) = \sqrt{\frac{E-m}{2m}}$, obtemos

$$S(\Lambda) = \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \left[\mathbb{I} - \frac{\gamma^0 \gamma^i p_i}{E+m} \right].$$

Aplicando esse operador à solução de repouso (5.17), temos

$$u(p, s) = S(\Lambda) u(0, s) = \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \left[\mathbb{I} + \frac{\gamma^0 \gamma^i p_i}{E+m} \right] \begin{pmatrix} \phi_s \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5.23)$$

Multiplicando as matrizes, obtemos

$$u(p, s) = \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \begin{pmatrix} \phi_s \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E+m} \phi_s \end{pmatrix}. \quad (5.24)$$

Essa expressão mostra que o boost mistura as componentes superior e inferior do espinor: para $\mathbf{p} = 0$, o termo inferior se anula e recuperamos o resultado anterior, enquanto para $\mathbf{p} \neq 0$ ele adquire uma contribuição proporcional ao momento.

De forma completamente análoga, para as soluções de energia negativa temos

$$v(p, s) = \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \begin{pmatrix} \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E+m} \chi_s \\ \chi_s \end{pmatrix},$$

onde χ_s representa o estado de spin da antipartícula.

Essas expressões podem ser escritas de forma covariante usando a notação de Feynman:

$$u(p, s) = \frac{\not{p} + m}{\sqrt{2m(E+m)}} u(0, s), \quad v(p, s) = \frac{\not{p} - m}{\sqrt{2m(E+m)}} v(0, s). \quad (5.25)$$

Com essa forma, é imediato verificar que as soluções satisfazem as equações de Dirac correspondentes:

$$(\not{p} - m) u(p, s) = 0, \quad (\not{p} + m) v(p, s) = 0,$$

pois $(\not{p} - m)(\not{p} + m) = p^2 - m^2 = 0$ para quatro-momento sobre a hipersuperfície de massa.

Por fim, é útil relacionar essas expressões covariantes à notação mais compacta em termos de matrizes de Pauli. Recordando que

$$p \cdot \sigma = p_\mu \sigma^\mu = E - \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad p \cdot \bar{\sigma} = E + \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma},$$

pode-se mostrar que

$$\sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} = \sqrt{E+m} \left(\mathbb{I} - \frac{\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{E+m} \right)^{\frac{1}{2}},$$

o que leva às formas equivalentes

$$u(p, s) = \begin{pmatrix} \sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \xi_s \\ \sqrt{p \cdot \sigma} \xi_s \end{pmatrix}, \quad v(p, s) = \begin{pmatrix} \sqrt{p \cdot \sigma} \eta_s \\ -\sqrt{p \cdot \bar{\sigma}} \eta_s \end{pmatrix}, \quad (5.26)$$

como citado anteriormente.

Essas soluções explicitam a estrutura relativística do espinor de Dirac: as componentes superiores e inferiores, originalmente independentes no repouso, tornam-se acopladas pelo movimento, refletindo a natureza quiral e o caráter misto de partícula e antipartícula intrínseco à descrição relativística de férmions. A relação (5.25) evidencia ainda a simetria entre as soluções u e v , que diferem apenas pelo sinal da massa, um aspecto fundamental na interpretação do campo de Dirac como descrevendo simultaneamente partículas e antipartículas.

5.3.4 Relações de normalização

As soluções $u(p, s)$ e $v(p, s)$ obtidas anteriormente contêm uma constante de normalização global que pode ser fixada de modo covariante. O objetivo é que os produtos de Dirac $\bar{u}u$ e $\bar{v}v$ assumam valores simples e invariantes sob transformações de Lorentz.

Recordemos que o conjugado de Dirac é definido como

$$\bar{u}(p, s) = u^\dagger(p, s) \gamma^0.$$

Usando a forma explícita de $u(p, s)$ obtida em (5.24),

$$u(p, s) = \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \begin{pmatrix} \phi_s \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E+m} \phi_s \end{pmatrix},$$

temos

$$u^\dagger(p, s) = \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \left(\phi_s^\dagger \quad \phi_s^\dagger \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E+m} \right),$$

e, portanto,

$$\bar{u}(p, s) = \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \left(\phi_s^\dagger, \quad -\phi_s^\dagger \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E+m} \right).$$

Normalização de $u(p, s)$.

Multiplicando $\bar{u}(p, s)$ por $u(p, s')$, obtemos

$$\bar{u}(p, s) u(p, s') = \frac{E+m}{2m} \phi_s^\dagger \left[\mathbb{I} - \frac{(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})}{(E+m)^2} \right] \phi_{s'}. \quad (5.27)$$

Usando a identidade das matrizes de Pauli,

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{a})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \mathbb{I} + i \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}),$$

e observando que $\mathbf{a} = \mathbf{b} = \mathbf{p}$ implica $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = 0$, temos

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})^2 = \mathbf{p}^2 \mathbb{I}.$$

Substituindo em (5.27),

$$\bar{u}(p, s) u(p, s') = \frac{E+m}{2m} \phi_s^\dagger \left[1 - \frac{\mathbf{p}^2}{(E+m)^2} \right] \phi_{s'}.$$

Usando $E^2 - \mathbf{p}^2 = m^2$, obtemos

$$1 - \frac{\mathbf{p}^2}{(E + m)^2} = \frac{2m}{E + m}.$$

Logo,

$$\bar{u}(p, s) u(p, s') = 2m \phi_s^\dagger \phi_{s'} = 2m \delta_{ss'}, \quad (5.28)$$

assumindo a normalização usual $\phi_s^\dagger \phi_{s'} = \delta_{ss'}$.

Normalização de $v(p, s)$.

De forma análoga, usando

$$v(p, s) = \sqrt{\frac{E + m}{2m}} \begin{pmatrix} \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E + m} \chi_s \\ \chi_s \end{pmatrix},$$

obtemos

$$\bar{v}(p, s) = \sqrt{\frac{E + m}{2m}} \left(-\chi_s^\dagger \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E + m}, \chi_s^\dagger \right).$$

Então,

$$\begin{aligned} \bar{v}(p, s) v(p, s') &= \frac{E + m}{2m} \chi_s^\dagger \left[-\frac{(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})}{(E + m)^2} + \mathbb{I} \right] \chi_{s'} \\ &= \frac{E + m}{2m} \chi_s^\dagger \left[-\frac{\mathbf{p}^2}{(E + m)^2} + 1 \right] \chi_{s'} = -2m \delta_{ss'}. \end{aligned}$$

Assim, as normalizações convencionais são

$$\bar{u}(p, s) u(p, s') = 2m \delta_{ss'}, \quad (5.29)$$

$$\bar{v}(p, s) v(p, s') = -2m \delta_{ss'}, \quad (5.30)$$

enquanto os produtos mistos $\bar{u}(p, s) v(p, s')$ e $\bar{v}(p, s) u(p, s')$ se anulam devido à ortogonalidade dos setores de energia positiva e negativa.

Identities de completude.

As relações de normalização permitem construir projeções completas sobre o espaço de soluções. Como $\{u(p, s)\}$ e $\{v(p, s)\}$ formam uma base ortogonal de soluções da equação de Dirac, deve valer

$$\sum_s u(p, s) \bar{u}(p, s) = A(\not{p} + m), \quad \sum_s v(p, s) \bar{v}(p, s) = B(\not{p} - m),$$

para alguns escalares A e B . Multiplicando à esquerda por $\bar{u}(p, s')$ e usando (5.29),

$$\bar{u}(p, s') \left[\sum_s u(p, s) \bar{u}(p, s) \right] u(p, s') = 2m = A \bar{u}(p, s') (\not{p} + m) u(p, s').$$

Mas $(\not{p} - m)u(p, s') = 0$ implica $\not{p}u(p, s') = m u(p, s')$, e portanto o lado direito vale $2mA$. Logo, $A = 1$. O mesmo raciocínio vale para $B = 1$. Temos, portanto,

$$\sum_s u(p, s) \bar{u}(p, s) = \not{p} + m, \quad (5.31)$$

$$\sum_s v(p, s) \bar{v}(p, s) = \not{p} - m. \quad (5.32)$$

Essas identidades são de extrema importância prática: elas permitem reescrever expressões envolvendo somas sobre estados de spin de forma covariante. Por exemplo, nos cálculos de espalhamento, a soma sobre spins iniciais e finais pode ser substituída pelas combinações $\not{p} \pm m$, o que simplifica enormemente a manipulação algébrica. Além disso, as relações (5.31)–(5.32) estão na base da definição do propagador de férmions, que surge justamente como a inversa do operador $(\not{p} - m)$ no espaço de momento.

5.3.5 Helicidade e quiralidade

A equação de Dirac, ao descrever férmions relativísticos, admite naturalmente uma decomposição em componentes de quiralidade definida. Introduzimos os operadores de projeção quirais

$$P_L = \frac{1 - \gamma^5}{2}, \quad P_R = \frac{1 + \gamma^5}{2}, \quad (5.33)$$

onde

$$\gamma^5 = i \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I} \\ \mathbb{I} & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{na representação de Dirac}).$$

Esses projetores satisfazem $P_L^2 = P_L$, $P_R^2 = P_R$, e $P_L P_R = 0$. Aplicando-os ao espinor de Dirac, obtemos as componentes de quiralidade esquerda e direita:

$$\psi_L = P_L \psi, \quad \psi_R = P_R \psi.$$

Como $P_L + P_R = \mathbb{I}$, o campo total se decompõe em

$$\psi = \psi_L + \psi_R.$$

Substituindo essa decomposição na equação de Dirac

$$(i\not{\partial} - m)\psi = 0,$$

e lembrando que γ^5 anticommuta com todas as γ^μ , ou seja, $\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0$, obtemos o sistema acoplado

$$i\not{\partial} \psi_L = m \psi_R, \quad (5.34)$$

$$i\not{\partial} \psi_R = m \psi_L. \quad (5.35)$$

Essas equações mostram que a massa do férmion acopla as duas componentes de quiralidade: ψ_L e ψ_R não evoluem de forma independente. No entanto, no limite $m \rightarrow 0$, as equações (5.34)–(5.35) se desacoplam, resultando em duas equações de Weyl independentes:

$$i\not{\partial} \psi_L = 0, \quad i\not{\partial} \psi_R = 0. \quad (5.36)$$

Nesse caso, as soluções podem ser escolhidas de forma que

$$\gamma^5 u_{L,R}(p) = \mp u_{L,R}(p), \quad (5.37)$$

ou seja, u_L é autoestado de γ^5 com autovalor -1 , e u_R com autovalor $+1$. O mesmo vale para os espinores $v_{L,R}(p)$, associados a antipartículas. Essas relações estabelecem que, para campos sem massa, as componentes quirais correspondem exatamente aos espinores de Weyl discutidos anteriormente: a equação de Dirac sem massa se decompõe em duas equações de Weyl independentes, uma para ψ_L e outra para ψ_R .

Para relacionar quiralidade e propriedades observáveis, introduzimos o operador de helicidade,

$$h = \frac{\mathbf{S} \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}, \quad (5.38)$$

onde $\mathbf{S} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}$ é o operador de spin relativístico. A helicidade mede a projeção do spin na direção do movimento e, portanto, indica se o spin está alinhado ou anti-alinhado com o momento linear. Aplicando h sobre uma solução $u(p, s)$ com \mathbf{p} orientado ao longo do eixo z , obtemos

$$h u(p, \pm) = \pm \frac{1}{2} u(p, \pm),$$

de modo que $u(p, +)$ representa helicidade “para cima” e $u(p, -)$ helicidade “para baixo”.

Para partículas massivas, helicidade e quiralidade são conceitos distintos: a helicidade depende do referencial inercial, já que um observador suficientemente rápido pode ultrapassar a partícula e inverter o sentido de seu momento, trocando o sinal de h . A quiralidade, por outro lado, é uma propriedade intrínseca da representação, ela não muda sob transformações de Lorentz. Entretanto, quando $m = 0$, a quiralidade e a helicidade tornam-se equivalentes: como as componentes ψ_L e ψ_R não se acoplam, o operador de helicidade comuta com o Hamiltoniano, e cada partícula pode ser caracterizada simultaneamente por um valor fixo de helicidade e de quiralidade.

Essa coincidência entre quiralidade e helicidade no regime sem massa possui consequências profundas. No Modelo Padrão, apenas as componentes de quiralidade esquerda dos férmions (e as direitas dos antiférmions) participam das interações fracas, o que leva à violação observada de paridade. A decomposição quiral do campo de Dirac e o comportamento das soluções de onda plana analisadas até aqui constituem, portanto, a base conceitual da formulação moderna das interações fundamentais: a estrutura bilinear da equação de Dirac permite descrever simultaneamente partículas e antipartículas, enquanto sua decomposição em quiralidades revela como a simetria de Lorentz acomoda, de forma natural, a assimetria das interações de gauge na natureza.

5.4 Quantização do Campo de Dirac

A equação de Dirac, embora formulada inicialmente como uma equação de onda relativística para partículas de spin- $\frac{1}{2}$, não constitui por si só uma teoria quântica consistente. Assim como no caso escalar, a interpretação probabilística da função de onda entra em conflito com a existência de soluções de energia negativa. A resolução desse problema requer reinterpretar $\psi(x)$ não como uma função de onda, mas como um campo quântico, cujos coeficientes de Fourier se tornam operadores obedecendo a relações de anticomutação.

5.4.1 O Lagrangiano de Dirac

O ponto de partida para a formulação quântica do campo de férmions é o lagrangiano covariante

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi, \quad (5.39)$$

onde $\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0$ é o espinor adjunto de Dirac. Esse lagrangiano é linear nas derivadas temporais de ψ e invariante sob transformações de Lorentz, como será verificado adiante.

Equações de movimento

Aplicando o princípio de mínima ação,

$$\delta S = \delta \int d^4x \mathcal{L} = 0,$$

as variações independentes de ψ e $\bar{\psi}$ produzem equações distintas, pois tratamos ψ e $\bar{\psi}$ como campos independentes durante a variação. A variação em relação a $\bar{\psi}$ fornece:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \bar{\psi})} \right) = 0.$$

Como \mathcal{L} depende apenas de $\partial_\mu \psi$ e não de $\partial_\mu \bar{\psi}$, o segundo termo é nulo, e obtemos diretamente

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi = 0,$$

que é precisamente a equação de Dirac.

De modo análogo, variando agora em relação a ψ :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi)} \right) = 0,$$

temos

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = -m\bar{\psi}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi)} = i\bar{\psi}\gamma^\mu,$$

de onde segue

$$\partial_\mu(i\bar{\psi}\gamma^\mu) + m\bar{\psi} = 0,$$

ou, equivalentemente,

$$i\partial_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu + m\bar{\psi} = 0, \quad (5.40)$$

que é a equação adjunta de Dirac. Essas duas expressões, (5.12) e (5.40), formam o par de equações fundamentais que governam a dinâmica do campo espinorial.

Corrente conservada e simetria global de fase

O lagrangiano (5.39) é invariável sob uma transformação global de fase:

$$\psi(x) \longrightarrow e^{i\alpha}\psi(x), \quad \bar{\psi}(x) \longrightarrow \bar{\psi}(x)e^{-i\alpha},$$

com α constante. Segundo o teorema de Noether, a invariância sob tal simetria contínua implica a existência de uma corrente conservada j^μ , obtida pela regra geral

$$j^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi)} \delta\psi + \delta\bar{\psi} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \bar{\psi})}.$$

Como \mathcal{L} depende apenas de $\partial_\mu \psi$, o segundo termo é nulo, e com $\delta\psi = i\alpha\psi$ temos

$$j^\mu = i\alpha \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)} \psi \right) = i\alpha(i\bar{\psi}\gamma^\mu\psi).$$

Eliminando o fator arbitrário α , obtemos a corrente conservada

$$j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi, \quad (5.41)$$

que satisfaz $\partial_\mu j^\mu = 0$ como consequência direta das equações de movimento.

O componente temporal dessa corrente,

$$j^0 = \bar{\psi}\gamma^0\psi = \psi^\dagger\psi,$$

é positivo definido, permitindo interpretar j^0 como uma densidade de probabilidade ou, mais precisamente, como uma densidade de carga positiva. Isso contrasta com o caso do campo escalar relativístico, onde a densidade $j^0 = i(\phi^*\dot{\phi} - \dot{\phi}^*\phi)$ pode assumir valores negativos, impossibilitando uma interpretação probabilística direta.

A carga total associada à simetria global de fase é, portanto,

$$Q = \int d^3x j^0 = \int d^3x \psi^\dagger\psi, \quad (5.42)$$

a qual é conservada no tempo, $\dot{Q} = 0$, e permanecerá como o gerador da transformação de fase global. Esse mesmo mecanismo servirá, posteriormente, de base para introduzir o acoplamento local com o campo eletromagnético A_μ , quando a simetria for promovida de global a local.

5.4.2 Momento canônico e hamiltoniano

A partir do lagrangiano (5.39), identificamos o momento canonicamente conjugado ao campo ψ como

$$\pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \psi)}. \quad (5.43)$$

Escrevendo explicitamente a derivada temporal no lagrangiano,

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^0\dot{\psi} + i\bar{\psi}\gamma^i\partial_i\psi - m\bar{\psi}\psi,$$

e lembrando que $\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0$, temos

$$\mathcal{L} = i\psi^\dagger\gamma^0\gamma^0\dot{\psi} + i\psi^\dagger\gamma^0\gamma^i\partial_i\psi - m\psi^\dagger\gamma^0\psi.$$

Como $(\gamma^0)^2 = I$, o primeiro termo simplifica para $i\psi^\dagger\dot{\psi}$. Portanto,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\dot{\psi})} = i\psi^\dagger,$$

e obtemos o momento canônico

$$\pi(x) = i\psi^\dagger(x). \quad (5.44)$$

Construção do hamiltoniano

A densidade hamiltoniana é definida, como de costume, por

$$\mathcal{H} = \pi \dot{\psi} - \mathcal{L}. \quad (5.45)$$

Substituindo (5.44) e o lagrangiano explícito, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= i \psi^\dagger \dot{\psi} - \left(i \psi^\dagger \dot{\psi} + i \psi^\dagger \gamma^0 \gamma^i \partial_i \psi - m \psi^\dagger \gamma^0 \psi \right) \\ &= -i \psi^\dagger \gamma^0 \gamma^i \partial_i \psi + m \psi^\dagger \gamma^0 \psi. \end{aligned} \quad (5.46)$$

Definindo as matrizes

$$\alpha^i = \gamma^0 \gamma^i, \quad \beta = \gamma^0, \quad (5.47)$$

a densidade hamiltoniana assume a forma compacta

$$\mathcal{H} = \psi^\dagger \left(-i \boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla + m \beta \right) \psi. \quad (5.48)$$

Essa é precisamente a densidade hamiltoniana associada à equação de Dirac.

Equação de movimento e consistência

O campo ψ deve evoluir no tempo segundo a equação de Heisenberg clássica

$$i \dot{\psi} = [\psi, H]_{\text{cl}} = \frac{\delta H}{\delta \psi^\dagger},$$

onde $H = \int d^3x \mathcal{H}$ é o hamiltoniano total e $[\cdot, \cdot]_{\text{cl}}$ denota o colchete de Poisson clássico (ou anticomutador na versão quântica). Usando (5.48), obtemos

$$i \dot{\psi} = (-i \boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla + m \beta) \psi.$$

Multiplicando ambos os lados por $\beta = \gamma^0$ e usando $\gamma^0 \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\gamma}$, temos

$$i \gamma^0 \dot{\psi} = (-i \gamma^i \partial_i + m) \psi,$$

ou, de forma covariante,

$$(i \gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi = 0,$$

que é precisamente a equação de Dirac original.

Essa verificação demonstra a consistência entre as formulações lagrangiana e hamiltoniana do campo espinorial. O papel das matrizes $\boldsymbol{\alpha}$ e β é, portanto, o de fornecer uma representação explícita do operador hamiltoniano relativístico para férmions, conectando a estrutura matricial de Dirac com a evolução temporal gerada por H .

5.4.3 Expansão em modos e operadores de criação e destruição

Para quantizar o campo de Dirac, partimos de sua solução clássica geral. Como a equação é linear, qualquer solução pode ser expressa como uma superposição de soluções elementares de onda plana, correspondentes a partículas de momento definido \mathbf{p} e spin s . Assim, escrevemos

$$\psi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \sum_s \left(a_{\mathbf{p},s} u(p,s) e^{-ip \cdot x} + b_{\mathbf{p},s}^\dagger v(p,s) e^{ip \cdot x} \right), \quad (5.49)$$

Consequentemente, o campo adjunto é dado por:

$$\psi^\dagger(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \sum_s \left(a_{\mathbf{p},s}^\dagger u^\dagger(p,s) e^{ip \cdot x} + b_{\mathbf{p},s} v^\dagger(p,s) e^{-ip \cdot x} \right). \quad (5.50)$$

onde $u(p,s)$ e $v(p,s)$ satisfazem, respectivamente,

$$(\not{p} - m)u(p,s) = 0, \quad (\not{p} + m)v(p,s) = 0.$$

O primeiro termo representa a superposição de modos de energia positiva ($E > 0$), enquanto o segundo termo, com $e^{+ip \cdot x}$, corresponde a soluções de energia negativa. A introdução explícita de $b_{\mathbf{p},s}^\dagger$ antecipa sua futura interpretação como operador de criação de antipartículas.

Normalização relativística

O fator $(2E_{\mathbf{p}})^{-1/2}$ é escolhido de modo que a expansão (5.49) satisfaça as relações canônicas de quantização relativísticas. No caso do campo de Dirac, o momento canônico é $\pi = i\psi^\dagger$, de modo que a relação fundamental é

$$\{\psi_a(\mathbf{x}, t), \psi_b^\dagger(\mathbf{y}, t)\} = \delta_{ab} \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (5.51)$$

com todos os demais anticomutadores nulos. A presença do fator $1/\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}$ garante que, ao substituir a expansão (5.49) e sua adjunta, a integral em \mathbf{p} reproduza exatamente a delta tridimensional em (5.51). De fato, usando a ortonormalidade dos espinores,

$$u^\dagger(p,s)u(p,s') = v^\dagger(p,s)v(p,s') = 2E_{\mathbf{p}}\delta_{ss'},$$

a normalização escolhida assegura que cada modo de momento contribua corretamente para a decomposição unitária do campo.

Promoção a operadores

Na teoria clássica, os coeficientes $a_{\mathbf{p},s}$ e $b_{\mathbf{p},s}$ são amplitudes complexas associadas a cada modo de Fourier. A passagem para a teoria quântica consiste em promover esses coeficientes a operadores sobre o espaço de Fock, satisfazendo as relações de anticomutação fundamentais

$$\{a_{\mathbf{p},s}, a_{\mathbf{p}',s'}^\dagger\} = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \delta_{ss'}, \quad (5.52)$$

$$\{b_{\mathbf{p},s}, b_{\mathbf{p}',s'}^\dagger\} = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \delta_{ss'}, \quad (5.53)$$

enquanto todos os demais anticomutadores se anulam.

Com essa promoção, a expansão (5.49) transforma o campo $\psi(x)$ em um operador de criação e destruição de quanta de energia e momento bem definidos:

$$a_{\mathbf{p},s}^\dagger \longrightarrow \text{cria uma partícula com } (\mathbf{p}, s), \quad b_{\mathbf{p},s}^\dagger \longrightarrow \text{cria uma antipartícula com } (\mathbf{p}, s).$$

A consistência entre (5.49) e a relação canônica (5.51) pode ser verificada explicitamente substituindo as expansões do campo e de seu adjunto:

$$\begin{aligned} \{\psi_a(\mathbf{x}), \psi_b^\dagger(\mathbf{y})\} &= \int \frac{d^3p d^3p'}{(2\pi)^6} \frac{1}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{p}'}}} \sum_{s,s'} \left[u_a(p,s) u_b^\dagger(p',s') \{a_{\mathbf{p},s}, a_{\mathbf{p}',s'}^\dagger\} e^{-ip \cdot x + ip' \cdot y} \right. \\ &\quad \left. + v_a(p,s) v_b^\dagger(p',s') \{b_{\mathbf{p},s}, b_{\mathbf{p}',s'}^\dagger\} e^{ip \cdot x - ip' \cdot y} \right]. \end{aligned}$$

Usando (5.52)–(5.53) e as relações de completude dos espinores,

$$\sum_s u(p, s) \bar{u}(p, s) = \not{p} + m, \quad \sum_s v(p, s) \bar{v}(p, s) = \not{p} - m,$$

a integral resulta exatamente em $\delta_{ab} \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y})$, confirmando a consistência da normalização.

Natureza fermiônica do campo

As relações de anticomutação (5.52)–(5.53) asseguram duas propriedades cruciais. Primeiro, a positividade da energia: os modos de energia negativa são reinterpretados como estados de antipartículas de energia positiva, evitando o colapso do vácuo. Segundo, a antissimetria sob troca de partículas, que implica o princípio de exclusão de Pauli. Dessa forma, a quantização do campo de Dirac fornece uma realização concreta do teorema spin–estatística para partículas de spin- $\frac{1}{2}$.

5.4.4 O teorema spin–estatística

O uso de anticomutadores na quantização do campo de Dirac não é uma simples convenção, mas uma exigência de consistência física. Para compreender isso, consideremos o que ocorreria se, em vez de impor anticomutadores, utilizássemos comutadores entre os operadores $a_{\mathbf{p},s}$ e $b_{\mathbf{p},s}$:

$$[a_{\mathbf{p},s}, a_{\mathbf{p}',s'}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \delta_{ss'}, \quad [b_{\mathbf{p},s}, b_{\mathbf{p}',s'}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \delta_{ss'}.$$

Energia negativa com comutadores

Substituindo as expansões (5.49)–(5.50) no hamiltoniano clássico (5.48), obtemos, após normal ordenação, o operador de energia

$$H = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_{\mathbf{p}} \sum_s \left(a_{\mathbf{p},s}^\dagger a_{\mathbf{p},s} - b_{\mathbf{p},s}^\dagger b_{\mathbf{p},s} \right), \quad (5.54)$$

onde o sinal negativo no segundo termo resulta da contribuição das soluções de energia negativa associadas aos espinores $v(p, s)$.

Com comutadores, o operador $b_{\mathbf{p},s}^\dagger b_{\mathbf{p},s}$ tem autovalores não negativos, e portanto o segundo termo em (5.54) torna a energia total ilimitada inferiormente. Nesse cenário, o vácuo tenderia a decair espontaneamente para estados de energia cada vez mais negativa, o mesmo problema que já havia motivado a reinterpretação das soluções de energia negativa na equação de Dirac original.

Ao substituir comutadores por anticomutadores, o sinal do termo correspondente se inverte:

$$H = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_{\mathbf{p}} \sum_s \left(a_{\mathbf{p},s}^\dagger a_{\mathbf{p},s} + b_{\mathbf{p},s}^\dagger b_{\mathbf{p},s} \right), \quad (5.55)$$

restabelecendo a positividade do espectro de energia. As excitações criadas por $b_{\mathbf{p},s}^\dagger$ são, portanto, reinterpretadas como antipartículas de energia positiva.

Positividade da carga

Um problema análogo aparece na definição da densidade de carga

$$j^0 = \psi^\dagger \psi, \quad Q = \int d^3x j^0.$$

Usando comutadores, o operador Q não seria positivo definido, pois o termo associado aos modos $b_{\mathbf{p},s}$ surgiria com o sinal incorreto:

$$Q = \sum_s \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} (a_{\mathbf{p},s}^\dagger a_{\mathbf{p},s} - b_{\mathbf{p},s}^\dagger b_{\mathbf{p},s}).$$

Com anticomutadores, o operador Q permanece hermitiano e a densidade j^0 positiva definida, preservando a interpretação física de $\psi^\dagger \psi$ como densidade de probabilidade (ou de carga).

O conteúdo do teorema spin–estatística

Esses resultados refletem de forma concreta o conteúdo do teorema spin–estatística: partículas de spin semi-inteiro devem obedecer a relações de anticomutação (estatística de Fermi–Dirac), enquanto partículas de spin inteiro devem obedecer a relações de comutação (estatística de Bose–Einstein).

O teorema não é apenas um postulado empírico, mas decorre de princípios fundamentais da teoria quântica de campos relativística, em particular, da exigência de causalidade local e da positividade da energia. O uso de anticomutadores garante que observáveis construídos em pontos do espaço-tempo separados por intervalos espaciais comutem entre si, preservando a causalidade, e assegura simultaneamente que o espectro de energia do hamiltoniano seja limitado inferiormente.

No caso do campo de Dirac, essa estrutura implica que a troca de dois férmions idênticos muda o sinal do estado quântico total:

$$|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle = -|\psi_2\rangle \otimes |\psi_1\rangle,$$

o que estabelece o princípio de exclusão de Pauli como uma consequência direta da quantização fermiônica do campo.

5.4.5 Operadores de energia e carga

A estrutura dos operadores físicos do campo de Dirac é obtida substituindo as expansões (5.49)–(5.50) na densidade hamiltoniana (5.48). Partindo de

$$\mathcal{H} = \psi^\dagger (-i \boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla + m\beta) \psi,$$

temos o hamiltoniano total

$$H = \int d^3x \psi^\dagger (-i \boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla + m\beta) \psi.$$

Substituindo as expansões dos campos em modos de momento:

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \sum_s \left(a_{\mathbf{p},s} u(p, s) e^{-ip \cdot x} + b_{\mathbf{p},s}^\dagger v(p, s) e^{ip \cdot x} \right), \\ \psi^\dagger(x) &= \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}'}}} \sum_{s'} \left(a_{\mathbf{p}',s'}^\dagger u^\dagger(p', s') e^{ip' \cdot x} + b_{\mathbf{p}',s'} v^\dagger(p', s') e^{-ip' \cdot x} \right), \end{aligned}$$

e observando que

$$(-i\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla + m\beta)e^{-ip\cdot x} = (\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{p} + m\beta)e^{-ip\cdot x},$$

obtemos

$$H = \int \frac{d^3p d^3p'}{(2\pi)^6} \frac{1}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{p}'}}} \sum_{s,s'} \int d^3x e^{i(\mathbf{p}'-\mathbf{p})\cdot\mathbf{x}} \\ \times \left[a_{\mathbf{p}',s'}^\dagger a_{\mathbf{p},s} u^\dagger(p',s') (\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{p} + m\beta) u(p,s) + b_{\mathbf{p}',s'} b_{\mathbf{p},s}^\dagger v^\dagger(p',s') (\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{p} + m\beta) v(p,s) \right].$$

A integral espacial fornece $(2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p}' - \mathbf{p})$, o que simplifica a expressão para

$$H = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} \sum_s \left[a_{\mathbf{p},s}^\dagger a_{\mathbf{p},s} u^\dagger(p,s) (\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{p} + m\beta) u(p,s) \right. \\ \left. + b_{\mathbf{p},s} b_{\mathbf{p},s}^\dagger v^\dagger(p,s) (\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{p} + m\beta) v(p,s) \right].$$

As identidades espinoriais

$$(\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{p} + m\beta)u(p,s) = E_{\mathbf{p}}u(p,s), \quad (\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{p} + m\beta)v(p,s) = -E_{\mathbf{p}}v(p,s),$$

levam a

$$H = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_{\mathbf{p}} \sum_s \left(a_{\mathbf{p},s}^\dagger a_{\mathbf{p},s} - b_{\mathbf{p},s} b_{\mathbf{p},s}^\dagger \right).$$

A relação de anticomutação

$$b_{\mathbf{p},s} b_{\mathbf{p},s}^\dagger = -b_{\mathbf{p},s}^\dagger b_{\mathbf{p},s} + (2\pi)^3 \delta^{(3)}(0)$$

mostra que há um termo de energia infinita associado ao vácuo, proporcional a $\delta^{(3)}(0)$. Como apenas diferenças de energia são fisicamente observáveis, essa contribuição é removida pelo procedimento de normal ordenação, em que todos os operadores de criação são colocados à esquerda dos de destruição. O hamiltoniano normal ordenado assume então a forma

$$H = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_{\mathbf{p}} \sum_s \left(a_{\mathbf{p},s}^\dagger a_{\mathbf{p},s} + b_{\mathbf{p},s}^\dagger b_{\mathbf{p},s} \right), \quad (5.56)$$

cujos espectro é manifestamente positivo.

O operador de número total de quanta é

$$N = \sum_s \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left(a_{\mathbf{p},s}^\dagger a_{\mathbf{p},s} + b_{\mathbf{p},s}^\dagger b_{\mathbf{p},s} \right), \quad (5.57)$$

e a carga elétrica total, assumindo $q = -e$ para o elétron, é

$$Q = -e \sum_s \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left(a_{\mathbf{p},s}^\dagger a_{\mathbf{p},s} - b_{\mathbf{p},s}^\dagger b_{\mathbf{p},s} \right). \quad (5.58)$$

A simetria entre partículas e antipartículas é evidente: as partículas criadas por $a_{\mathbf{p},s}^\dagger$ possuem carga $-e$, enquanto as antipartículas criadas por $b_{\mathbf{p},s}^\dagger$ possuem carga $+e$, preservando a conservação de Q . Essa construção fornece uma formulação completa e consistente da energia e da carga no campo de Dirac, eliminando o problema das energias negativas e incorporando naturalmente o caráter fermiônico do campo.

5.5 Interpretação de Dirac e Propagadores Fermiônicos

A quantização canônica do campo de Dirac resolve o problema das energias negativas reinterpretando as soluções da equação como operadores de criação e aniquilação de partículas e antipartículas. A partir dessa estrutura, torna-se possível definir as funções de Green fermiônicas e, em particular, o propagador de Feynman, elemento central da formulação covariante da teoria perturbativa.

5.5.1 Interpretação de Dirac e estrutura do vácuo

Com a quantização, o campo $\psi(x)$ deixa de ser uma função de onda de uma única partícula e passa a ser um operador capaz de criar ou destruir excitações quânticas. A expansão em modos mostra que os coeficientes associados às soluções de energia positiva e negativa tornam-se operadores independentes:

$$\psi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \sum_s \left(a_{\mathbf{p},s} u(p, s) e^{-ip \cdot x} + b_{\mathbf{p},s}^\dagger v(p, s) e^{ip \cdot x} \right).$$

A presença simultânea de $a_{\mathbf{p},s}$ e $b_{\mathbf{p},s}^\dagger$ expressa a reinterpretação das soluções de energia negativa como criação de antipartículas com energia positiva. O vácuo é definido por

$$a_{\mathbf{p},s}|0\rangle = b_{\mathbf{p},s}|0\rangle = 0,$$

garantindo que não existam estados de energia inferior.

A densidade de carga, discutida no capítulo anterior, toma aqui a forma normal-ordenada:

$$Q = -e \int d^3x : \psi^\dagger \psi : = -e \sum_s \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} (a_{\mathbf{p},s}^\dagger a_{\mathbf{p},s} - b_{\mathbf{p},s}^\dagger b_{\mathbf{p},s}),$$

tornando explícita a simetria entre partículas e antipartículas como excitações do mesmo campo. Esse formalismo estabelece o ponto de partida para estudar a propagação causal de férmions.

5.5.2 Funções de Green e propagador fundamental

A dinâmica livre é caracterizada pela função de Green $S(x - y)$, definida pela equação

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)S(x - y) = \delta^{(4)}(x - y), \quad (5.59)$$

análoga à equação para o caso escalar,

$$(\square + m^2)D(x - y) = -\delta^{(4)}(x - y), \quad (5.60)$$

introduzida anteriormente. Assim como no caso escalar, buscamos expressar $S(x - y)$ em termos de $D(x - y)$.

Aplicando o operador conjugado $(i\gamma^\mu \partial_\mu + m)$ e usando a identidade já demonstrada,

$$(i\cancel{\partial} - m)(i\cancel{\partial} + m) = -(\square + m^2),$$

obtemos imediatamente

$$(i\cancel{\partial}_x - m)(i\cancel{\partial}_x + m)D(x - y) = \delta^{(4)}(x - y),$$

o que implica a solução

$$S(x - y) = (i\cancel{\partial}_x + m)D(x - y). \quad (5.61)$$

Esse resultado mostra que a estrutura de spin aparece por meio do operador $(i\cancel{\partial} + m)$ aplicado à função escalar de Green, como esperado para campos que satisfazem a equação de Dirac.

5.5.3 Propagador de Feynman

A generalização natural para férmions do propagador de Feynman escalar é o valor esperado do ordenamento temporal fermiônico:

$$S_F(x - y) = \langle 0 | T \{ \psi(x) \bar{\psi}(y) \} | 0 \rangle, \quad (5.62)$$

com

$$T \{ \psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(y) \} = \theta(x^0 - y^0) \psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(y) - \theta(y^0 - x^0) \bar{\psi}_\beta(y) \psi_\alpha(x).$$

Substituindo as expansões modais,

$$\psi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \sum_s \left(a_{\mathbf{p},s} u(p, s) e^{-ip \cdot x} + b_{\mathbf{p},s}^\dagger v(p, s) e^{ip \cdot x} \right),$$

e usando os anticomutadores canônicos,

$$\{a_{\mathbf{p},s}, a_{\mathbf{q},r}^\dagger\} = \{b_{\mathbf{p},s}, b_{\mathbf{q},r}^\dagger\} = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \delta_{sr},$$

os termos que sobrevivem ao valor esperado no vácuo são aqueles envolvendo $a a^\dagger$ e $b b^\dagger$.

Para $x^0 > y^0$,

$$\langle 0 | \psi(x) \bar{\psi}(y) | 0 \rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} \sum_s u(p, s) \bar{u}(p, s) e^{-ip \cdot (x-y)}. \quad (5.63)$$

Para $y^0 > x^0$,

$$\langle 0 | \bar{\psi}(y) \psi(x) | 0 \rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} \sum_s v(p, s) \bar{v}(p, s) e^{ip \cdot (x-y)}. \quad (5.64)$$

Usando as relações de completude,

$$\sum_s u(p, s) \bar{u}(p, s) = \cancel{p} + m, \quad \sum_s v(p, s) \bar{v}(p, s) = \cancel{p} - m,$$

obtemos

$$S_F(x - y) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\mathbf{p}}} \left[\theta(x^0 - y^0) (\cancel{p} + m) e^{-ip \cdot (x-y)} - \theta(y^0 - x^0) (\cancel{p} - m) e^{ip \cdot (x-y)} \right]. \quad (5.65)$$

Introduzindo p^0 como variável independente e aplicando a prescrição de contorno de Feynman no plano complexo, chegamos à forma covariante final:

$$S_F(x - y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i(\cancel{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ip \cdot (x-y)}. \quad (5.66)$$

Ou, equivalentemente,

$$S_F(x - y) = (i\cancel{\partial}_x + m)D_F(x - y),$$

onde $D_F(x - y)$ é o propagador escalar de Feynman.

5.5.4 Causalidade e anticomutadores

A consistência relativística da teoria exige que campos localizados em regiões espacialmente separadas não influenciem um ao outro. Para férmions, isso se expressa pela anulação do anticomutador:

$$\{\psi_\alpha(x), \bar{\psi}_\beta(y)\} = 0, \quad (x - y)^2 < 0. \quad (5.67)$$

O propagador de Feynman não coincide com esse anticomutador, mas ambos estão relacionados pela identidade:

$$S_F(x - y) - S_F(y - x) = \langle 0 | \{\psi(x), \bar{\psi}(y)\} | 0 \rangle. \quad (5.68)$$

Assim, a anulação para separações espaciais implica

$$S_F(x - y) = S_F(y - x), \quad (x - y)^2 < 0.$$

Como $S_F = (i\not{D} + m)D_F$ e o propagador escalar D_F possui suporte causal no sentido do comutador de Pauli–Jordan discutido antes, segue que S_F herda a mesma propriedade de causalidade.

Fisicamente, isso significa que a teoria preserva a localidade: nenhum sinal pode se propagar fora do cone de luz, e observáveis construídos com campos fermiônicos respeitam a estrutura causal da relatividade especial. Diagramaticamente, cada linha fermiônica interna,

$$S_F(p) = \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon},$$

transporta informação causal entre dois vértices, obedecendo à prescrição de contorno que torna toda a expansão perturbativa consistente.

5.6 Férmions de Majorana e Simetrias Conservadas

A decomposição quiral da ação de Dirac mostrou que, em geral, as componentes ψ_L e ψ_R são independentes e se acoplam apenas por meio do termo de massa. Entretanto, existe uma construção alternativa na qual essas duas partes não são independentes, mas relacionadas por conjugação de carga. Essa possibilidade conduz a um tipo especial de férmion, cuja partícula é indistinguível de sua antipartícula: o férmion de Majorana.

5.6.1 Conjugação de Carga e Férmions de Majorana

A equação de Dirac é invariante sob a operação de conjugação de carga, que transforma um campo de partícula em seu correspondente de antipartícula. Essa transformação é definida por

$$\psi^c = C \bar{\psi}^T, \quad (5.69)$$

onde C é a matriz de conjugação de carga, cuja ação sobre as matrizes de Dirac é determinada pela relação

$$C \gamma^\mu C^{-1} = -(\gamma^\mu)^T. \quad (5.70)$$

Essa propriedade assegura que, se ψ satisfaz a equação de Dirac

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0,$$

então ψ^c também a satisfaz:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi^c = 0.$$

O campo ψ^c descreve, portanto, uma antipartícula com a mesma massa e o mesmo spin, mas com carga oposta. Na linguagem das transformações de simetria interna, a conjugação de carga inverte o sinal de todos os números quânticos associados a grupos abelianos, como a carga elétrica ou o número leptônico.

Um férmion de Majorana é definido pela condição de auto-conjugação

$$\psi = \psi^c. \quad (5.71)$$

Essa restrição implica que o campo é idêntico ao seu conjugado de carga, de modo que partícula e antipartícula correspondem ao mesmo grau de liberdade físico. Diferentemente do férmion de Dirac, que carrega uma carga conservada, o férmion de Majorana é necessariamente neutro sob quaisquer simetrias globais abelianas, pois tal simetria exigiria a existência de um parceiro de carga oposta.

Na base de Weyl, em que o espinor de Dirac é escrito como $\psi = (\psi_L, \psi_R)^T$, a condição (5.71) relaciona as duas quiralidades:

$$\psi_R = i\sigma^2 \psi_L^*.$$

Portanto, um férmion de Majorana pode ser completamente descrito por um único espinor de Weyl, reduzindo pela metade o número de graus de liberdade em comparação com um férmion de Dirac. Essa relação também mostra que o campo de Majorana não admite uma fase global arbitrária, já que a conjugação complexa fixa o módulo e o argumento do campo.

O termo de massa correspondente assume a forma

$$\mathcal{L}_M = -\frac{1}{2} m (\psi_L^T C \psi_L + \bar{\psi}_L C \bar{\psi}_L^T), \quad (5.72)$$

que é manifestamente invariante sob Lorentz, uma vez que as contrações de índices espinoriais são realizadas com o tensor antissimétrico C . O fator $\frac{1}{2}$ evita dupla contagem dos termos, já que a condição de Majorana reduz o número de graus de liberdade independentes. Contudo, o lagrangiano (5.72) não é invariante sob rotações de fase do tipo $\psi_L \rightarrow e^{i\alpha} \psi_L$, o que reflete a ausência de uma simetria global de conservação de número de férmions.

Fisicamente, isso significa que, para campos de Majorana, não há distinção entre criação e aniquilação de partículas e antipartículas, ambos os processos correspondem à mesma excitação do campo. Essa característica é central em extensões do Modelo Padrão, onde a massa dos neutrinos pode ser explicada pela existência de termos de Majorana que violam o número leptônico em duas unidades.

Essa perda da simetria global associada à corrente vetorial $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ nos conduz naturalmente à análise das correntes e simetrias conservadas da teoria, que discutiremos a seguir.

5.6.2 Correntes Conservadas e Simetria Global

A equação de Dirac admite uma simetria global de fase contínua,

$$\psi \longrightarrow e^{i\alpha} \psi, \quad \bar{\psi} \longrightarrow e^{-i\alpha} \bar{\psi},$$

sob a qual a ação (5.5) permanece invariante. Essa simetria é global porque o parâmetro α é constante no espaço-tempo. Se fosse local, seria necessário introduzir um campo de calibre acoplado a ψ para restaurar a invariância. Aplicando o teorema de Noether, obtemos a corrente associada

$$j^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi, \quad \partial_\mu j^\mu = 0. \quad (5.73)$$

A conservação dessa corrente decorre diretamente das equações de movimento. De fato,

$$\partial_\mu j^\mu = (\partial_\mu \bar{\psi}) \gamma^\mu \psi + \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi = im \bar{\psi} \psi - im \bar{\psi} \psi = 0.$$

O componente temporal, $j^0 = \psi^\dagger \psi$, é positivo definido e pode ser interpretado como densidade de probabilidade ou densidade de carga. A quantidade

$$Q = \int d^3x j^0$$

é o número quântico associado a essa simetria global, representando o número de partículas menos o número de antipartículas. No contexto quântico, Q corresponde ao operador de número de férmions, que comuta com o Hamiltoniano e gera as rotações de fase $U(1)$ no espaço de estados.

Para o campo de Majorana, entretanto, a condição de auto-conjugação $\psi = \psi^c$ impõe uma restrição mais forte. Usando a definição (5.69) e a propriedade (5.70), obtemos

$$\bar{\psi} \gamma^\mu \psi = \bar{\psi}^c \gamma^\mu \psi^c = -\bar{\psi} \gamma^\mu \psi,$$

o que implica

$$\bar{\psi} \gamma^\mu \psi = 0.$$

Logo, a corrente de Noether associada à simetria global de fase se anula identicamente, indicando a ausência de qualquer número conservado. Essa característica distingue de forma fundamental os férmions de Majorana dos férmions de Dirac: enquanto estes preservam uma carga global $U(1)$, aqueles não a possuem, refletindo o fato de que partícula e antipartícula são o mesmo objeto físico.

A perda dessa simetria global está intimamente ligada à estrutura quiral da teoria. Como discutido na seção anterior, a corrente vetorial j^μ e a corrente axial $j_5^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^5 \psi$ representam as combinações simétrica e antissimétrica das fases independentes de ψ_L e ψ_R . No caso de Majorana, ambas se tornam dependentes e não podem ser associadas a rotações de fase independentes, restando apenas as simetrias relacionadas a transformações de Lorentz e à dinâmica do campo. Essas propriedades tornam o férmion de Majorana uma entidade conceitualmente distinta, fundamental em teorias onde a conservação de número leptônico pode ser violada.

5.6.3 Simetrias Discretas e Propriedades de Conjugação

Além das simetrias contínuas associadas às fases globais e às transformações de Lorentz, a teoria de férmions relativísticos admite três operações discretas fundamentais: conjugação de carga (C), paridade (P) e reversão temporal (T). Essas transformações desempenham papel essencial na caracterização das propriedades de partícula e antipartícula, e sua combinação revela aspectos profundos da estrutura da teoria de campos.

A ação dessas operações sobre o campo de Dirac pode ser representada por:

$$P : \psi(t, \mathbf{x}) \longrightarrow \gamma^0 \psi(t, -\mathbf{x}), \quad C : \psi \longrightarrow C \bar{\psi}^T, \quad T : \psi(t, \mathbf{x}) \longrightarrow i\gamma^1 \gamma^3 \psi^*(-t, \mathbf{x}).$$

A matriz C satisfaz a condição (5.70), garantindo que a equação de Dirac seja invariante sob conjugação de carga. A transformação de paridade inverte a orientação espacial e troca as quiralidades, conforme discutido anteriormente, enquanto a reversão temporal troca a direção do fluxo temporal e complexifica o campo, alterando o sentido das correntes e spins.

Essas três operações modificam de forma distinta as quantidades bilineares construídas a partir de ψ e $\bar{\psi}$. Por exemplo:

$$\begin{aligned} \text{Escalar:} & \quad \bar{\psi}\psi \xrightarrow{P,C,T} + \bar{\psi}\psi, \\ \text{Pseudoscalar:} & \quad \bar{\psi}\gamma^5\psi \xrightarrow{P} - \bar{\psi}\gamma^5\psi, \\ \text{Vetor:} & \quad \bar{\psi}\gamma^\mu\psi \xrightarrow{P} (\bar{\psi}\gamma_0\psi, -\bar{\psi}\boldsymbol{\gamma}\psi), \\ \text{Axial:} & \quad \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi \xrightarrow{P} (-\bar{\psi}\gamma_0\gamma^5\psi, \bar{\psi}\boldsymbol{\gamma}\gamma^5\psi). \end{aligned}$$

Essas propriedades mostram que o termo de massa $\bar{\psi}\psi$ é invariante sob todas as três operações, ao passo que o termo pseudoscalar $\bar{\psi}\gamma^5\psi$ muda de sinal sob paridade e tempo. Isso explica, por exemplo, por que uma massa de Dirac preserva P , C e T , enquanto interações do tipo pseudoscalar (como o acoplamento de Yukawa a um campo escalar ímpar por paridade) podem violá-las separadamente.

Cada uma dessas simetrias pode ser violada de forma independente em teorias interativas, a interação fraca, por exemplo, preserva CPT mas quebra P e C isoladamente. No entanto, a combinação das três é sempre uma simetria exata de qualquer teoria de campos quânticos local, relativisticamente invariante e unitária. Esse resultado é formalizado no teorema CPT, que garante

$$(CPT) \mathcal{L} (CPT)^{-1} = \mathcal{L},$$

independentemente dos detalhes do conteúdo de campos ou interações. A origem dessa invariância está na estrutura analítica dos propagadores de Feynman e na causalidade microscópica: operadores de campo devem comutar ou anticomutar a separação espacial tipo-espaço, o que impõe restrições profundas à forma das amplitudes de espalhamento e à simetria fundamental do espaço-tempo.

Assim, as transformações C , P e T não apenas classificam as propriedades de férmions e antiférmions, mas também expressam os pilares de localidade e causalidade que sustentam toda a formulação quântica relativística.

5.6.4 Corrente Axial e Simetria Quiral

Além da corrente vetorial $j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$, associada à simetria global de fase, a teoria de Dirac admite uma segunda corrente de grande relevância física, a corrente axial,

$$j_5^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi, \quad (5.74)$$

que mede a diferença entre as contribuições das duas quiralidades. Essa corrente surge ao considerar a transformação global

$$\psi \longrightarrow e^{i\alpha\gamma^5}\psi, \quad \bar{\psi} \longrightarrow \bar{\psi} e^{i\alpha\gamma^5},$$

sob a qual o termo cinético da ação de Dirac é invariante, enquanto o termo de massa não o é. De fato, variando a ação (5.5) sob essa transformação, obtemos

$$\delta S = \int d^4x \partial_\mu (\alpha j_5^\mu) - 2i\alpha m \int d^4x \bar{\psi} \gamma^5 \psi,$$

de onde se identifica a divergência da corrente axial:

$$\partial_\mu j_5^\mu = 2im \bar{\psi} \gamma^5 \psi. \quad (5.75)$$

A equação acima pode também ser obtida diretamente a partir das equações de movimento. Usando

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0, \quad \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu + m) = 0,$$

temos

$$\begin{aligned} \partial_\mu j_5^\mu &= (\partial_\mu \bar{\psi}) \gamma^\mu \gamma^5 \psi + \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^5 \partial_\mu \psi \\ &= (-im \bar{\psi} \gamma^5) \psi + im \bar{\psi} \gamma^5 \psi \\ &= 2im \bar{\psi} \gamma^5 \psi, \end{aligned}$$

confirmando (5.75).

A corrente axial é, portanto, conservada apenas no limite de férmions sem massa. Nesse caso, $\partial_\mu j_5^\mu = 0$, e a transformação acima define uma simetria global contínua, a simetria quiral.

Podemos entender essa simetria de forma mais clara decompondo o espinor de Dirac em suas componentes quirais,

$$\psi = \psi_L + \psi_R, \quad \psi_{L,R} = P_{L,R} \psi,$$

onde os projetores $P_{L,R}$ foram definidos em (5.7). Usando $\gamma^5 \psi_{L,R} = \mp \psi_{L,R}$, vemos que a transformação quiral age separadamente sobre cada componente:

$$\psi_L \longrightarrow e^{-i\alpha} \psi_L, \quad \psi_R \longrightarrow e^{i\alpha} \psi_R.$$

A simetria quiral corresponde, portanto, a rotações opostas de fase entre as duas representações fundamentais do grupo de Lorentz. O termo de massa $m\bar{\psi}\psi = m(\bar{\psi}_L\psi_R + \bar{\psi}_R\psi_L)$ mistura essas componentes e quebra explicitamente essa simetria, pois conecta estados de quiralidade oposta.

Fisicamente, a conservação de j_5^μ no regime sem massa implica que a quiralidade é um número quântico preservado na evolução temporal. Partículas e antipartículas sem massa mantêm quiralidade fixa e se comportam como espinores de Weyl independentes. Quando $m \neq 0$, essa conservação se perde: a interação de massa permite transições entre ψ_L e ψ_R , e a quiralidade deixa de ser uma boa quantum number.

Essa distinção entre o caso massivo e o caso sem massa terá papel central na análise das soluções de onda plana da equação de Dirac. Como veremos a seguir, para férmions sem massa a quiralidade coincide com a helicidade, a projeção do spin na direção do momento linear, enquanto para férmions massivos as duas noções se separam, refletindo a quebra explícita da simetria quiral.

5.7 Interações de Yukawa e Regras de Feynman para Férmions

A formulação completa da teoria quântica de campos requer a inclusão de interações entre diferentes espécies de campos. O caso mais simples e historicamente relevante é o acoplamento entre um campo escalar $\phi(x)$ e um campo fermiônico $\psi(x)$, conhecido como interação de Yukawa. Essa estrutura fornece o protótipo das interações que aparecem tanto na física nuclear quanto no Modelo Padrão, sendo o mecanismo responsável, por exemplo, pela geração de massa de férmions no acoplamento com o campo de Higgs.

5.7.1 O lagrangiano de Yukawa

Consideremos o lagrangiano

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi + \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi) - \frac{1}{2}M^2\phi^2 - g\bar{\psi}\psi\phi, \quad (5.76)$$

onde g é a constante de acoplamento e M a massa do campo escalar. O último termo representa a interação linear entre o campo escalar e a densidade $\bar{\psi}\psi$, que é um escalar de Lorentz. O lagrangiano é, portanto, covariante e compatível com as simetrias relativísticas fundamentais.

A variação da ação em relação a $\bar{\psi}$ fornece a equação de movimento para o campo fermiônico:

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m - g\phi)\psi = 0, \quad (5.77)$$

mostrando que o campo escalar atua como um potencial local que modifica a propagação do férmion. De modo análogo, a variação em relação a ϕ leva à equação

$$(\square + M^2)\phi = -g\bar{\psi}\psi, \quad (5.78)$$

em que o termo à direita atua como uma fonte escalar gerada pela densidade fermiônica.

As equações (5.77) e (5.78) formam um sistema acoplado que descreve a emissão e absorção de quanta do campo escalar por férmions. Essa estrutura constitui o protótipo de interação local entre campos com spins distintos, servindo como modelo para processos de espalhamento e decaimento, e como base conceitual para o acoplamento entre férmions e o campo de Higgs no Modelo Padrão.

5.7.2 Expansão perturbativa e vértices de interação

Na formulação perturbativa, o termo de interação

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = -g\bar{\psi}\psi\phi$$

determina a estrutura dos vértices nos diagramas de Feynman. Cada vértice conecta duas linhas fermiônicas e uma linha escalar, refletindo a natureza do acoplamento $\bar{\psi}\psi\phi$. A cada ocorrência desse vértice associa-se um fator $-ig$, que representa a contribuição elementar da interação à amplitude do processo.

As linhas internas do diagrama correspondem aos propagadores dos campos que se propagam virtualmente entre vértices:

$$\begin{aligned} \text{Linha escalar: } & \frac{i}{p^2 - M^2 + i\epsilon}, \\ \text{Linha fermiônica: } & \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon}. \end{aligned}$$

Esses fatores são acompanhados pelas integrais sobre os momentos internos e pelas deltas de conservação de momento em cada vértice, assegurando a coerência global do diagrama.

A amplitude total de um processo é obtida pela soma de todas as topologias de diagramas possíveis, ordenadas segundo o número de vértices de interação. Essa soma define uma expansão em potências do acoplamento g , análoga à série de Dyson. Além disso, cada diagrama fechado de férmions introduz um fator adicional de -1 , consequência direta da natureza anticomutativa dos operadores fermiônicos na construção do campo.

5.7.3 Linhas externas e espinores

As linhas externas dos diagramas de Feynman representam estados físicos assintóticos, as partículas presentes antes e depois da interação. No caso fermiônico, cada linha externa está associada a um espinor de Dirac que carrega a informação de momento, spin e orientação de fluxo de número fermiônico.

Para uma linha externa de entrada de férmion com quatro-momento p e projeção de spin s , associa-se o espinor $u(p, s)$, que satisfaz a equação de Dirac $(\not{p} - m)u(p, s) = 0$. Por outro lado, uma linha externa de saída de férmion é representada pelo espinor adjunto $\bar{u}(p, s) = u^\dagger(p, s)\gamma^0$.

De modo análogo, para antipartículas, as convenções são invertidas: uma linha de entrada de antipartícula é associada a $v(p, s)$, que satisfaz $(\not{p} + m)v(p, s) = 0$; enquanto uma linha de saída de antipartícula corresponde a $\bar{v}(p, s)$.

Tipo de linha	Fluxo de número fermiônico	Fator associado
Entrada de férmion	para frente no tempo	$u(p, s)$
Saída de férmion	para trás no tempo	$\bar{u}(p, s)$
Entrada de antipartícula	para trás no tempo	$\bar{v}(p, s)$
Saída de antipartícula	para frente no tempo	$v(p, s)$

Essas convenções garantem que o fluxo de número fermiônico, representado por uma seta orientada ao longo da linha fermiônica, seja preservado em cada vértice de interação. O resultado é uma prescrição covariante e consistente para o cálculo de amplitudes envolvendo férmions e antipartículas.

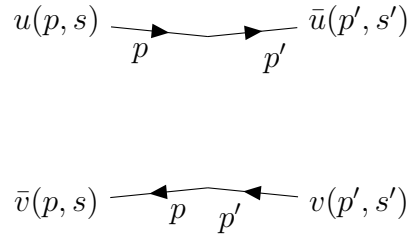


Figura 3 – Convenções de fluxo de número fermiônico e fatores associados às linhas externas. As setas indicam o sentido do fluxo: para férmions, a seta aponta do estado inicial para o final; para antipartículas, no sentido oposto.

Em particular, após a contração dos índices de spin, cada amplitude se reduz a uma sequência de fatores do tipo $\bar{u}\Gamma u$ ou $\bar{v}\Gamma v$, onde Γ é um produto de matrizes γ^μ e outros operadores provenientes da interação. A estrutura espinorial completa do processo é, assim, explicitamente controlada e diretamente associada à orientação das linhas fermiônicas nos diagramas.

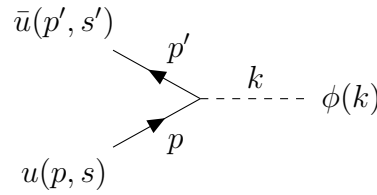


Figura 4 – Vértice de interação Yukawa, conectando duas linhas fermiônicas e uma linha escalar. O sentido das setas indica o fluxo de número fermiônico, preservado no vértice.

5.7.4 Regras de Feynman para férmions

De modo resumido, as regras de Feynman para férmions na interação de Yukawa são:

$$\text{Propagador fermiônico: } \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon},$$

$$\text{Propagador escalar: } \frac{i}{p^2 - M^2 + i\epsilon},$$

$$\text{Vértice Yukawa: } -ig,$$

$$\text{Linha externa de entrada (férmion): } u(p, s),$$

$$\text{Linha externa de saída (férmion): } \bar{u}(p, s),$$

$$\text{Linha externa de entrada (antipartícula): } \bar{v}(p, s),$$

$$\text{Linha externa de saída (antipartícula): } v(p, s).$$

Em cada diagrama, deve-se conservar o fluxo de número fermiônico em todos os

vértices e integrar sobre os momentos internos com medida

$$\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4}.$$

Cada diagrama fechado de férmions contribui com um fator adicional de (-1) , proveniente da anticomutação dos operadores fermiônicos. Esse fator de sinal é indispensável para manter a consistência estatística da teoria e reflete diretamente o teorema spin-estatística.

A construção das amplitudes segue, portanto, os mesmos princípios da teoria escalar, mas com a presença adicional das matrizes de Dirac e do fluxo de setas, que controlam a estrutura de spin de cada processo.

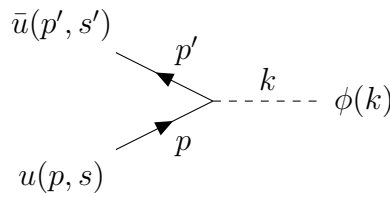
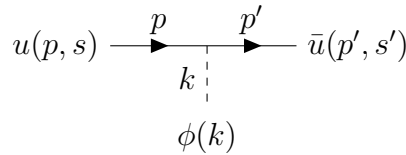


Figura 5 – Vértice Yukawa com conservação de momento $p' = p - k$ e fator associado $-ig$. As linhas fermiônicas mantêm o fluxo de número fermiônico orientado, enquanto a linha escalar representa o bóson trocado.

Exemplo: emissão escalar por um férmion

Como ilustração, consideremos o processo em que um férmion inicial de momento p emite um quanta escalar de momento k , resultando em um férmion final de momento $p' = p - k$. O diagrama correspondente contém um único vértice Yukawa, e pode ser representado por



No vértice, a conservação de momento impõe

$$p = p' + k,$$

garantindo que a energia e o momento sejam preservados localmente na interação.

De acordo com as regras de Feynman, a amplitude de primeira ordem associada ao diagrama é

$$i\mathcal{M} = (-ig) \bar{u}(p', s') u(p, s), \quad (5.79)$$

onde o fator $-ig$ provém do vértice de interação e os espinores $u(p, s)$ e $\bar{u}(p', s')$ descrevem, respectivamente, o estado inicial e o estado final do férmion.

A dependência espinorial está inteiramente contida na combinação bilinear $\bar{u}(p')u(p)$, que mede a sobreposição entre os estados de spin antes e depois da emissão. Para férmions não relativísticos, essa quantidade se reduz aproximadamente a $\chi^\dagger \chi$, correspondendo à

conservação quase total da orientação de spin, o que justifica a interpretação de que o campo escalar acopla apenas à densidade $\bar{\psi}\psi$, sem alterar o momento angular intrínseco.

O caráter escalar da interação também é refletido na ausência de matrizes γ^μ no vértice, em contraste com o caso da interação eletromagnética, em que o acoplamento é vetorial e depende explicitamente de $\gamma^\mu A_\mu$. Essa distinção torna o modelo de Yukawa uma excelente introdução para compreender como o tipo de campo mediador (escalar, vetorial ou tensorial) determina a estrutura de Lorentz da interação.

O cálculo da amplitude total para processos mais complexos, como o espalhamento $f\bar{f} \rightarrow \phi\phi$ ou o decaimento $\phi \rightarrow f\bar{f}$, segue o mesmo princípio, envolvendo a combinação de múltiplos vértices, propagadores intermediários e integrais sobre os momentos internos.

5.7.5 Conservação de corrente e simetrias

O lagrangiano de Yukawa (5.76) é invariante sob transformações globais de fase do campo fermiônico, dadas por

$$\psi \rightarrow e^{i\alpha}\psi, \quad \bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi}e^{-i\alpha},$$

onde α é um parâmetro constante. Essa invariância define uma simetria global do tipo $U(1)$, associada à conservação da carga fermiônica.

Para verificar a corrente de Noether correspondente, consideremos uma transformação infinitesimal,

$$\delta\psi = i\alpha\psi, \quad \delta\bar{\psi} = -i\alpha\bar{\psi}.$$

A variação da densidade lagrangiana é então

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\delta(\partial_\mu\psi) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\bar{\psi})}\delta(\partial_\mu\bar{\psi}) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi}\delta\psi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar{\psi}}\delta\bar{\psi}.$$

Usando as equações de movimento (5.77) e seu adjunto, e lembrando que \mathcal{L} é invariante sob a transformação, obtemos a identidade de conservação

$$\partial_\mu j^\mu = 0, \quad \text{com} \quad j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi.$$

A densidade de carga associada é $\rho = j^0 = \psi^\dagger\psi$, que é positiva definida, refletindo a interpretação probabilística consistente do campo fermiônico.

Essa corrente permanece conservada mesmo na presença do termo de interação $-g\bar{\psi}\psi\phi$, pois este é um escalar de Lorentz e invariante sob a mesma transformação global. Logo, a interação de Yukawa preserva a simetria de fase e, consequentemente, a conservação de número fermiônico.

Uma consequência notável surge se o campo escalar ϕ adquirir um valor de expectativa no vácuo,

$$\langle\phi\rangle = v.$$

Nesse caso, o termo de interação induz um termo efetivo de massa para o férmion:

$$-g\bar{\psi}\psi\phi \longrightarrow -g v \bar{\psi}\psi,$$

de modo que a massa física do férmion se torna

$$m_{\text{efetivo}} = m + g v.$$

Esse mecanismo, a geração de massa por acoplamento a um campo escalar com valor de expectativa não nulo, constitui a base do mecanismo de Higgs no Modelo Padrão, no qual os férmions adquirem massa de maneira espontaneamente simétrica, preservando a coerência relativística e a estrutura quântica da teoria.

6 Eletrodinâmica Quântica

6.1 O Campo de Maxwell e a Simetria de Gauge

A unificação entre o campo eletromagnético e a teoria de Dirac surge naturalmente a partir da exigência de que a invariância de fase global do campo fermiônico se estenda a uma simetria local. Essa exigência leva à introdução de um novo campo dinâmico, o campo de gauge, cuja presença garante a consistência da teoria sob transformações de fase dependentes do espaço-tempo. Esse princípio simples é o alicerce das interações fundamentais do Modelo Padrão.

6.1.1 Da simetria global à construção completa da teoria de gauge

A ação do campo de Dirac livre,

$$S = \int d^4x \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi, \quad (6.1)$$

é invariante sob a transformação global de fase

$$\psi(x) \rightarrow e^{i\alpha} \psi(x), \quad \bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}(x) e^{-i\alpha}, \quad (6.2)$$

onde α é uma constante real. Essa transformação corresponde a uma rotação no espaço interno de fases do campo, deixando inalterados todos os observáveis físicos.

De acordo com o teorema de Noether, a existência dessa simetria contínua implica a conservação de uma corrente associada:

$$j^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi, \quad \partial_\mu j^\mu = 0. \quad (6.3)$$

A componente temporal dessa corrente define a densidade de carga,

$$j^0 = \psi^\dagger \psi,$$

de modo que a carga total

$$Q = \int d^3x \psi^\dagger \psi \quad (6.4)$$

é conservada no tempo.

Fisicamente, Q representa a diferença entre o número de partículas e antipartículas do campo, evidenciando que a invariância de fase global está diretamente associada à conservação da carga elétrica.

Uma vez estabelecida a simetria global, promovê-la a uma simetria local exige uma modificação estrutural da teoria.

Consideremos agora uma transformação em que a fase do campo depende do ponto do espaço-tempo:

$$\psi(x) \rightarrow e^{i\alpha(x)} \psi(x), \quad \bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}(x) e^{-i\alpha(x)}. \quad (6.5)$$

Essa generalização, de uma simetria global para uma simetria local, exige que a Lagrangiana permaneça invariante sob transformações com parâmetro $\alpha(x)$ arbitrário.

A derivada ordinária do campo transforma segundo

$$\partial_\mu \psi(x) \rightarrow e^{i\alpha(x)} (\partial_\mu + i \partial_\mu \alpha(x)) \psi(x),$$

de modo que o termo cinético da Lagrangiana de Dirac,

$$\bar{\psi} i \gamma^\mu \partial_\mu \psi,$$

não é mais invariante: surge o termo adicional $\bar{\psi} \gamma^\mu (\partial_\mu \alpha) \psi$.

Para restaurar a invariância, introduzimos um novo campo vetorial $A_\mu(x)$, cuja transformação compensa exatamente o termo espúrio. Define-se então a derivada covariante

$$D_\mu = \partial_\mu + ie A_\mu, \quad (6.6)$$

e exige-se que ela se transforme da mesma forma que o campo de Dirac:

$$D_\mu \psi(x) \rightarrow e^{i\alpha(x)} D_\mu \psi(x).$$

Essa condição determina a transformação de gauge de A_μ :

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) - \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha(x). \quad (6.7)$$

Com essa modificação, o termo cinético

$$\bar{\psi} i \gamma^\mu D_\mu \psi$$

passa a ser invariante sob transformações locais de fase.

A introdução do campo A_μ cria novos graus de liberdade, cuja dinâmica precisa ser descrita.

Para caracterizar o conteúdo físico desse campo, definimos o tensor de campo de força como o comutador das derivadas covariantes:

$$[D_\mu, D_\nu] = ie F_{\mu\nu}, \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu.$$

Esse tensor mede a não comutatividade das derivações locais e é o análogo geométrico da curvatura associada à conexão de gauge.

Por construção, $F_{\mu\nu}$ é invariante sob transformações de gauge (6.7), sendo, portanto, o objeto físico que contém as componentes observáveis do campo eletromagnético:

$$E_i = F_{0i}, \quad B_i = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} F_{jk}.$$

Para dotar o campo A_μ de dinâmica, introduzimos o termo cinético mais simples que preserva a invariância de gauge:

$$\mathcal{L}_{\text{EM}} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}.$$

Combinando esse termo com o lagrangiano de Dirac acoplado por derivada covariante:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (i \gamma^\mu D_\mu - m) \psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \quad (6.8)$$

6.1.2 Equações de movimento e conservação de corrente

A variação da Lagrangiana (6.8) em relação a $\bar{\psi}$ conduz à equação de Dirac acoplada ao campo de gauge:

$$(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi = 0.$$

De modo análogo, a variação em relação a A_μ fornece as equações de Maxwell com fonte fermiônica:

$$\partial_\nu F^{\nu\mu} = e \bar{\psi} \gamma^\mu \psi. \quad (6.9)$$

O termo do lado direito é precisamente a corrente de Noether associada à simetria global de fase do campo fermiônico.

A teoria de Maxwell e a equação de Dirac unem-se assim em uma única estrutura abeliana localmente invariante, cuja consistência covariante serve de paradigma para as teorias não abelianas do Modelo Padrão.

6.2 Quantização do Campo Eletromagnético

O campo de Maxwell, descrito pela Lagrangiana $\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$, é um campo vetorial com uma simetria de gauge abeliana. Essa simetria reflete o fato de que as componentes do potencial A_μ não são todas fisicamente independentes. A quantização do campo eletromagnético requer, portanto, o tratamento cuidadoso dessas redundâncias, de modo que apenas os graus de liberdade físicos, os dois modos transversos do fóton, sejam promovidos a operadores quânticos.

6.2.1 Estrutura clássica e redundância de gauge

A ação do campo eletromagnético livre é dada por

$$S[A_\mu] = -\frac{1}{4} \int d^4x F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (6.10)$$

Essa forma é covariante e contém implicitamente as componentes espaciais e temporais do campo elétrico e magnético.

A variação da ação em relação ao potencial vetorial A_μ fornece as equações de movimento. Explicitamente, temos

$$\delta S = -\frac{1}{4} \int d^4x \delta(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) = -\frac{1}{2} \int d^4x F^{\mu\nu} \delta F_{\mu\nu}.$$

Como

$$\delta F_{\mu\nu} = \partial_\mu \delta A_\nu - \partial_\nu \delta A_\mu,$$

segue que

$$\begin{aligned} \delta S &= -\frac{1}{2} \int d^4x F^{\mu\nu} (\partial_\mu \delta A_\nu - \partial_\nu \delta A_\mu) \\ &= - \int d^4x F^{\mu\nu} \partial_\mu \delta A_\nu \quad (\text{pois } F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}). \end{aligned}$$

Integrando por partes e desprezando termos de fronteira:

$$\delta S = \int d^4x (\partial_\mu F^{\mu\nu}) \delta A_\nu.$$

A condição de extremização $\delta S = 0$ para variações arbitrárias δA_ν conduz à equação de movimento

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0, \quad (6.11)$$

que corresponde às equações de Maxwell no vácuo, nas quais não há fontes de corrente nem de carga.

O lagrangiano (6.10) é invariante sob a transformação de gauge

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + \partial_\mu \Lambda(x), \quad (6.12)$$

onde $\Lambda(x)$ é uma função arbitrária e suave. De fato, substituindo em $F_{\mu\nu}$:

$$F'_{\mu\nu} = \partial_\mu(A_\nu + \partial_\nu \Lambda) - \partial_\nu(A_\mu + \partial_\mu \Lambda) = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = F_{\mu\nu},$$

vemos que o tensor de campo é invariante, e portanto a ação também o é.

Essa liberdade de gauge significa que diferentes potenciais A_μ podem gerar o mesmo campo físico $F_{\mu\nu}$. Consequentemente, o espaço de soluções de (6.11) contém redundâncias, muitas configurações matematicamente distintas de A_μ representam o mesmo estado físico. A remoção sistemática dessas redundâncias, conhecida como fixação de gauge, é essencial para a quantização consistente do campo eletromagnético.

6.2.2 Fixação de gauge: calibre de Lorentz

Uma escolha particularmente conveniente para eliminar parte da redundância de gauge é o calibre de Lorentz, definido pela condição

$$\partial_\mu A^\mu = 0. \quad (6.13)$$

Essa condição preserva a covariância relativística, pois é expressa como um escalar de Lorentz.

Para verificar o efeito dessa escolha sobre as equações de movimento, retomemos a forma geral das equações de Maxwell no vácuo,

$$\partial_\nu F^{\nu\mu} = 0, \quad F^{\nu\mu} = \partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu. \quad (6.14)$$

Substituindo a definição de $F^{\nu\mu}$, obtemos:

$$\begin{aligned} \partial_\nu F^{\nu\mu} &= \partial_\nu (\partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu) \\ &= \partial_\nu \partial^\nu A^\mu - \partial^\mu (\partial_\nu A^\nu). \end{aligned}$$

A primeira parcela é o operador d'Alembertiano aplicado a A^μ , ou seja, $\square A^\mu = \partial_\nu \partial^\nu A^\mu$. Logo, as equações de movimento podem ser reescritas como

$$\square A^\mu - \partial^\mu (\partial_\nu A^\nu) = 0. \quad (6.15)$$

Ao impor a condição de calibre (6.13), o segundo termo anula-se identicamente, resultando em

$$\square A^\mu = 0. \quad (6.16)$$

Portanto, cada componente de A^μ obedece individualmente a uma equação de onda livre, o que torna o formalismo simples e covariante.

No entanto, mesmo após a imposição de (6.13), ainda existe uma liberdade residual de gauge. De fato, sob a transformação

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu \Lambda(x),$$

a condição de Lorentz se transforma em

$$\partial_\mu A'^\mu = \partial_\mu A^\mu + \square \Lambda.$$

Assim, se a função de gauge $\Lambda(x)$ satisfaz

$$\square \Lambda = 0, \quad (6.17)$$

então a condição (6.13) continua válida. Essas transformações residuais mostram que o calibre de Lorentz não fixa completamente a liberdade de gauge: há ainda um conjunto de transformações que preservam a condição de divergência nula de A^μ .

Consequentemente, mesmo no calibre de Lorentz, as quatro componentes de A_μ não correspondem a quatro graus de liberdade físicos independentes. O campo vetorial massless possui apenas dois graus de liberdade reais, correspondentes às polarizações transversas do fóton, como será demonstrado explicitamente ao quantizarmos o campo.

6.2.3 Quantização canônica no gauge de Coulomb

Para explicitar de forma mais transparente os graus de liberdade físicos do campo eletromagnético, é conveniente trabalhar no calibre de Coulomb, definido por

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0, \quad A_0 = 0. \quad (6.18)$$

A primeira condição elimina o componente longitudinal do vetor potencial, enquanto a segunda suprime a componente temporal, que não é dinâmica. Assim, as únicas variáveis independentes são as componentes transversas \mathbf{A}_\perp , satisfazendo

$$\nabla \cdot \mathbf{A}_\perp = 0.$$

No espaço-tempo, a densidade lagrangiana do campo de Maxwell livre é

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}.$$

No calibre de Coulomb, $A_0 = 0$ implica $F_{0i} = \dot{A}_i$ e $F_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i$. Substituindo esses termos na expressão acima, obtemos:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2) = \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{A}}^2 - (\nabla \times \mathbf{A})^2).$$

Como \mathbf{A} é transversal no calibre escolhido, podemos escrever diretamente

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{A}}_\perp^2 - (\nabla \times \mathbf{A}_\perp)^2). \quad (6.19)$$

O momento canônico conjugado ao campo \mathbf{A}_\perp é obtido pela derivada funcional da Lagrangiana em relação à velocidade do campo:

$$\boldsymbol{\pi}_\perp = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{A}}_\perp} = \dot{\mathbf{A}}_\perp.$$

Portanto, o campo elétrico transversal é identificado como o momento conjugado do vetor potencial:

$$\mathbf{E}_\perp = -\boldsymbol{\pi}_\perp = -\dot{\mathbf{A}}_\perp. \quad (6.20)$$

A Hamiltoniana é então obtida via a transformação de Legendre:

$$\mathcal{H} = \boldsymbol{\pi}_\perp \cdot \dot{\mathbf{A}}_\perp - \mathcal{L} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\pi}_\perp^2 + (\nabla \times \mathbf{A}_\perp)^2),$$

de modo que a Hamiltoniana total é

$$H = \int d^3x \frac{1}{2}(\boldsymbol{\pi}_\perp^2 + (\nabla \times \mathbf{A}_\perp)^2).$$

A estrutura de Poisson clássica é dada por

$$\{A_i(\mathbf{x}), \pi_j(\mathbf{y})\} = \delta_{ij} \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}).$$

No entanto, como o campo satisfaz $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ e $\nabla \cdot \boldsymbol{\pi} = 0$, devemos restringir as variáveis a subespaços transversos. Para isso, introduz-se o projetor transversal

$$P_{ij}^\perp = \delta_{ij} - \frac{\partial_i \partial_j}{\nabla^2}, \quad (6.21)$$

que satisfaz $P_{ij}^\perp \partial_j = 0$ e $(P^\perp)^2 = P^\perp$. Aplicando-o à estrutura de Poisson, obtemos

$$\{A_i(\mathbf{x}), \pi_j(\mathbf{y})\}_\perp = P_{ij}^\perp \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \left(\delta_{ij} - \frac{\partial_i \partial_j}{\nabla^2} \right) \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}).$$

Ao promovermos as variáveis a operadores quânticos, a prescrição de quantização canônica substitui $\{, \} \rightarrow -i[,]$, resultando em

$$[A_i(\mathbf{x}), \pi_j(\mathbf{y})] = i \left(\delta_{ij} - \frac{\partial_i \partial_j}{\nabla^2} \right) \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (6.22)$$

O operador de projeção assegura que apenas as componentes transversas de \mathbf{A} e $\boldsymbol{\pi}$ participem das relações de comutação, eliminando explicitamente as variáveis redundantes.

Em suma, o calibre de Coulomb fornece uma formulação não covariante, porém fisicamente transparente: apenas as duas polarizações transversas do campo são quantizadas, enquanto os componentes longitudinais e escalares são completamente eliminados. Essa será a base para a construção da expansão em modos e a introdução dos operadores de criação e destruição na subseção seguinte.

6.2.4 Expansão em modos e operadores de criação e destruição

A equação de movimento para o campo vetorial livre no calibre de Coulomb, obtida de (6.19), é

$$\ddot{\mathbf{A}}_\perp - \nabla^2 \mathbf{A}_\perp = 0, \quad (6.23)$$

com a condição de transversidade

$$\nabla \cdot \mathbf{A}_\perp = 0.$$

Cada componente do campo satisfaz uma equação de onda, de modo que é natural expandi-lo em modos de Fourier. Escrevemos

$$\mathbf{A}_\perp(\mathbf{x}, t) = \sum_{\lambda=1}^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left[\mathbf{f}_{\mathbf{k},\lambda}(t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + \mathbf{f}_{\mathbf{k},\lambda}^*(t) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \right], \quad (6.24)$$

onde o índice λ denota as polarizações transversas. A condição $\mathbf{k} \cdot \mathbf{A}_\perp = 0$ impõe que $\mathbf{f}_{\mathbf{k},\lambda}$ seja ortogonal a \mathbf{k} :

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{f}_{\mathbf{k},\lambda} = 0.$$

Substituindo (6.24) em (6.23), obtemos a equação diferencial temporal para cada modo:

$$\ddot{\mathbf{f}}_{\mathbf{k},\lambda}(t) + |\mathbf{k}|^2 \mathbf{f}_{\mathbf{k},\lambda}(t) = 0,$$

cuja solução geral é

$$\mathbf{f}_{\mathbf{k},\lambda}(t) = \frac{1}{\sqrt{2|\mathbf{k}|}} \left(\boldsymbol{\epsilon}^{(\lambda)}(\mathbf{k}) a_{\mathbf{k},\lambda} e^{-i|\mathbf{k}|t} + \boldsymbol{\epsilon}^{(\lambda)}(\mathbf{k})^* a_{-\mathbf{k},\lambda}^\dagger e^{i|\mathbf{k}|t} \right), \quad (6.25)$$

onde $\boldsymbol{\epsilon}^{(\lambda)}(\mathbf{k})$ são vetores de polarização que formam uma base ortonormal no subespaço transversal:

$$\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\epsilon}^{(\lambda)}(\mathbf{k}) = 0, \quad \boldsymbol{\epsilon}^{(\lambda)}(\mathbf{k}) \cdot \boldsymbol{\epsilon}^{(\lambda')*}(\mathbf{k}) = \delta_{\lambda\lambda'}.$$

Substituindo (6.25) em (6.24), obtemos a forma final da expansão:

$$\mathbf{A}_\perp(\mathbf{x}, t) = \sum_{\lambda=1}^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2|\mathbf{k}|}} \left[\boldsymbol{\epsilon}^{(\lambda)}(\mathbf{k}) a_{\mathbf{k},\lambda} e^{-i(|\mathbf{k}|t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} + \boldsymbol{\epsilon}^{(\lambda)}(\mathbf{k})^* a_{-\mathbf{k},\lambda}^\dagger e^{i(|\mathbf{k}|t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} \right]. \quad (6.26)$$

O momento canônico conjugado, $\boldsymbol{\pi}_\perp = \dot{\mathbf{A}}_\perp$, é então

$$\boldsymbol{\pi}_\perp(\mathbf{x}, t) = -i \sum_{\lambda=1}^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{|\mathbf{k}|}{2}} \left[\boldsymbol{\epsilon}^{(\lambda)}(\mathbf{k}) a_{\mathbf{k},\lambda} e^{-i(|\mathbf{k}|t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} - \boldsymbol{\epsilon}^{(\lambda)}(\mathbf{k})^* a_{-\mathbf{k},\lambda}^\dagger e^{i(|\mathbf{k}|t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} \right]. \quad (6.27)$$

A imposição das relações de comutação (6.22) leva às condições sobre os operadores de modo:

$$[a_{\mathbf{k},\lambda}, a_{\mathbf{k}',\lambda'}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \delta_{\lambda\lambda'}, \quad [a_{\mathbf{k},\lambda}, a_{\mathbf{k}',\lambda'}] = 0.$$

Essas relações são idênticas às dos operadores de criação e destruição de um conjunto de osciladores harmônicos independentes.

Substituindo as expansões (6.26) e (6.27) na Hamiltoniana

$$H = \frac{1}{2} \int d^3x \left(\boldsymbol{\pi}_\perp^2 + (\nabla \times \mathbf{A}_\perp)^2 \right),$$

e utilizando a ortogonalidade das funções de onda e das polarizações, obtém-se

$$H = \sum_{\lambda=1}^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} |\mathbf{k}| \left(a_{\mathbf{k},\lambda}^\dagger a_{\mathbf{k},\lambda} + \frac{1}{2} \right).$$

O termo $\frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}, \lambda} |\mathbf{k}|$ corresponde à energia do ponto zero, que é divergente mas fisicamente irrelevante, podendo ser removida por redefinição do nível de energia. Desprezando esse termo, a Hamiltoniana física assume a forma

$$H = \sum_{\lambda=1}^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} |\mathbf{k}| a_{\mathbf{k}, \lambda}^\dagger a_{\mathbf{k}, \lambda}, \quad (6.28)$$

que descreve um conjunto de osciladores harmônicos independentes, cada um representando um modo de fóton com energia $E_{\mathbf{k}} = |\mathbf{k}|$ e polarização λ .

Cada operador $a_{\mathbf{k}, \lambda}^\dagger$ cria um fóton com momento \mathbf{k} e polarização λ , enquanto $a_{\mathbf{k}, \lambda}$ o aniquila. O vácuo $|0\rangle$ é definido pela condição $a_{\mathbf{k}, \lambda}|0\rangle = 0$ para todo \mathbf{k}, λ , e os estados de n fótons são construídos por sucessivas aplicações dos operadores de criação:

$$|\mathbf{k}_1, \lambda_1; \dots; \mathbf{k}_n, \lambda_n\rangle = a_{\mathbf{k}_1, \lambda_1}^\dagger \cdots a_{\mathbf{k}_n, \lambda_n}^\dagger |0\rangle.$$

Essa quantização mostra explicitamente que o campo de Maxwell livre equivale a um gás de bósons sem massa, cada qual com duas polarizações transversas.

6.2.5 Graus de liberdade físicos

O potencial vetorial A_μ possui, em princípio, quatro componentes independentes. No entanto, nem todas correspondem a graus de liberdade físicos, pois a teoria apresenta uma simetria de gauge que permite eliminar componentes redundantes.

Para entender isso, consideremos o espaço das soluções das equações de Maxwell livres,

$$\partial_\nu F^{\nu\mu} = 0, \quad (6.29)$$

com $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. Tomando a derivada de (6.29), obtemos

$$\partial_\mu \partial_\nu F^{\nu\mu} = 0,$$

que é automaticamente satisfeita devido à antissimetria de $F^{\nu\mu}$. A simetria de gauge

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \Lambda \quad (6.30)$$

permite modificar A_μ sem alterar $F_{\mu\nu}$, o que mostra que A_μ não é observável diretamente.

Contagem de graus de liberdade

No espaço de Fourier, as equações de movimento se tornam

$$k_\nu F^{\nu\mu}(k) = 0, \quad F^{\nu\mu}(k) = i(k^\nu A^\mu - k^\mu A^\nu). \quad (6.31)$$

Substituindo, temos

$$k^2 A^\mu - k^\mu (k \cdot A) = 0.$$

Para campos de fóton, $k^2 = 0$, de modo que a equação se reduz a

$$k \cdot A = 0. \quad (6.32)$$

Isso mostra que apenas as componentes de A_μ ortogonais ao vetor de momento k^μ são fisicamente relevantes.

Podemos, portanto, contar os graus de liberdade:

- A_μ possui inicialmente 4 componentes reais.
- a condição de gauge (por exemplo, $\partial_\mu A^\mu = 0$) elimina 1 delas.
- a liberdade de realizar uma transformação residual $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \Lambda$ (com $\square \Lambda = 0$) elimina mais 1.

restando apenas $4 - 2 = 2$ graus de liberdade físicos. Esses dois modos correspondem exatamente às duas polarizações transversas do fóton.

Representação explícita das polarizações

Escolhendo o eixo z na direção de propagação, $k^\mu = (|\mathbf{k}|, 0, 0, |\mathbf{k}|)$, a condição de transversidade (6.32) impõe $A^0 = A^3$. Usando uma transformação de gauge, podemos anular ambos, restando apenas as componentes transversas:

$$\epsilon^{(1)} = (1, 0, 0), \quad \epsilon^{(2)} = (0, 1, 0),$$

que representam as polarizações linearmente independentes do fóton. Em geral, podemos definir polarizações lineares ou circulares por combinações complexas dessas bases.

Implementação covariante: formalismo de Gupta–Bleuler

Embora o calibre de Coulomb torne a contagem de graus de liberdade intuitiva, ele não é manifestamente covariante. Para preservar a covariância de Lorentz, utiliza-se o calibre de Lorentz (6.13), com o formalismo de Gupta–Bleuler. Nesse esquema, quantiza-se o campo A_μ com quatro componentes, mas impõe-se a condição de restrição sobre os estados físicos:

$$\partial_\mu A^{\mu(+)}|\text{físico}\rangle = 0, \quad (6.33)$$

onde $A^{\mu(+)}$ é a parte positiva do campo (com operadores de aniquilação). Essa condição elimina os modos longitudinais e temporais do espaço de Hilbert, deixando apenas os dois modos transversos como estados físicos observáveis.

O resultado final é que o campo eletromagnético quântico possui apenas dois graus de liberdade reais: as duas polarizações transversas do fóton. Os modos longitudinais e escalares não são observáveis, sendo eliminados pela invariância de gauge. Cada modo de oscilação transversal do potencial vetorial corresponde a um fóton com momento \mathbf{k} e polarização $\lambda = 1, 2$.

A ausência de polarizações longitudinais observáveis é, portanto, uma consequência direta da simetria de gauge. Essa estrutura é o arquétipo de todas as teorias de gauge: ao promover uma simetria global a local, introduz-se um campo de conexão A_μ cujo conteúdo físico é reduzido apenas aos modos transversos. No caso abeliano, isso leva à descrição do fóton como um bóson de gauge sem massa propagando-se com duas polarizações transversas, a base conceitual sobre a qual repousa a Eletrodinâmica Quântica.

6.3 Acoplamento entre o Campo Eletromagnético e a Matéria

A estrutura de gauge introduzida anteriormente permite acoplar de modo natural o campo eletromagnético a diferentes tipos de campos de matéria. A exigência de invariân-

cia local sob transformações de fase determina de forma única a forma desse acoplamento, tanto para férmions quanto para escalares complexos. Essa unificação conceitual é o fundamento da Eletrodinâmica Quântica (QED), a mais precisa e bem verificada teoria física já construída.

6.3.1 Acoplamento minimal com férmions

O ponto de partida é o lagrangiano do campo de Dirac livre,

$$\mathcal{L}_\psi = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi, \quad (6.34)$$

que, como já discutido, é invariante sob transformações de fase globais

$$\psi(x) \rightarrow e^{i\alpha}\psi(x), \quad \bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}(x)e^{-i\alpha}.$$

No entanto, essa invariância é quebrada quando o parâmetro α passa a depender de x . De fato, sob a transformação local $\psi(x) \rightarrow e^{i\alpha(x)}\psi(x)$, a derivada ordinária transforma-se como

$$\begin{aligned} \partial_\mu \psi(x) &\rightarrow \partial_\mu (e^{i\alpha(x)}\psi(x)) \\ &= e^{i\alpha(x)}(\partial_\mu + i\partial_\mu \alpha(x))\psi(x), \end{aligned} \quad (6.35)$$

e, portanto, o termo cinético na Lagrangiana,

$$\bar{\psi}i\gamma^\mu \partial_\mu \psi,$$

gera uma contribuição adicional

$$\delta\mathcal{L} = \bar{\psi}\gamma^\mu (\partial_\mu \alpha)\psi,$$

quebrando a invariância local.

Para restaurá-la, introduzimos um novo campo vetorial $A_\mu(x)$ e substituímos a derivada comum pela derivada covariante,

$$D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu, \quad (6.36)$$

de modo que $D_\mu \psi$ se transforme da mesma maneira que ψ :

$$D_\mu \psi(x) \rightarrow e^{i\alpha(x)}D_\mu \psi(x).$$

Essa condição fixa a transformação de gauge do campo A_μ :

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) - \frac{1}{e}\partial_\mu \alpha(x), \quad (6.37)$$

assegurando a invariância local da teoria.

O lagrangiano invariante de gauge para o campo fermiônico acoplado a A_μ é, então,

$$\mathcal{L}_{\text{QED}} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \quad (6.38)$$

onde o termo $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ fornece a dinâmica do campo eletromagnético livre.

Expandindo a derivada covariante (6.36), obtemos explicitamente:

$$i\gamma^\mu D_\mu = i\gamma^\mu(\partial_\mu + ieA_\mu) = i\gamma^\mu\partial_\mu - e\gamma^\mu A_\mu, \quad (6.39)$$

de modo que a Lagrangiana assume a forma

$$\mathcal{L}_{\text{QED}} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi - e\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}. \quad (6.40)$$

O segundo termo,

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = -e\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi,$$

representa o acoplamento minimal entre o campo fermiônico e o campo eletromagnético. Esse termo é o mais simples (linear em A_μ) que preserva simultaneamente a covariância de Lorentz e a invariância de gauge local. Qualquer outra forma de acoplamento violaria uma dessas propriedades fundamentais.

O parâmetro e é identificado com a carga elétrica do campo fermiônico. Assim, o termo $-e\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi$ expressa, de forma covariante, a interação entre o elétron e o fóton. Toda a fenomenologia da Eletrodinâmica Quântica, desde os processos de espalhamento e emissão até as correções radiativas de alta precisão, emerge desse único termo de interação.

6.3.2 Corrente e equações de movimento

A Lagrangiana da Eletrodinâmica Quântica, dada em (6.40), é

$$\mathcal{L}_{\text{QED}} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi - e\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}. \quad (6.41)$$

As equações de movimento dos campos seguem da aplicação direta do princípio da ação estacionária.

Equação de Dirac acoplada.

A variação de \mathcal{L}_{QED} em relação ao campo conjugado $\bar{\psi}$ dá:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar{\psi}} - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\bar{\psi})}\right) = 0.$$

Observando que apenas o primeiro termo de (6.41) depende de $\partial_\mu\bar{\psi}$, temos:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\bar{\psi})} = 0, \quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)} = i\bar{\psi}\gamma^\mu.$$

Assim, a equação de Euler–Lagrange para $\bar{\psi}$ resulta:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar{\psi}} - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\bar{\psi})}\right) \\ &= (i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi - e\gamma^\mu A_\mu\psi. \end{aligned} \quad (6.42)$$

Portanto,

$$(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi = 0, \quad (6.43)$$

que é a equação de Dirac com acoplamento minimal. Nela, o campo A_μ atua como um potencial eletromagnético que modifica a derivada comum, incorporando os efeitos de interação.

Equações de Maxwell com corrente fermiônica.

A variação da Lagrangiana (6.41) em relação a A_μ produz:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} - \partial_\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu A_\mu)} \right) = 0.$$

Calculando os termos explicitamente:

- O termo de interação fornece

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} = -e \bar{\psi} \gamma^\mu \psi.$$

- O termo cinético do campo A_μ , $-\frac{1}{4} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma}$, depende de $\partial_\nu A_\mu$ via

$$F_{\rho\sigma} = \partial_\rho A_\sigma - \partial_\sigma A_\rho.$$

Logo,

$$\frac{\partial F_{\rho\sigma}}{\partial (\partial_\nu A_\mu)} = \delta_\rho^\nu \delta_\sigma^\mu - \delta_\sigma^\nu \delta_\rho^\mu,$$

e portanto,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu A_\mu)} = -\frac{1}{2} F^{\rho\sigma} (\delta_\rho^\nu \delta_\sigma^\mu - \delta_\sigma^\nu \delta_\rho^\mu) = -F^{\nu\mu}.$$

Substituindo na equação de Euler-Lagrange, obtemos:

$$0 = -e \bar{\psi} \gamma^\mu \psi + \partial_\nu F^{\nu\mu}, \quad (6.44)$$

ou, equivalentemente,

$$\partial_\nu F^{\nu\mu} = e \bar{\psi} \gamma^\mu \psi. \quad (6.45)$$

Esta é a equação de Maxwell com corrente fermiônica como fonte.

Corrente e conservação.

O termo de acoplamento $-e \bar{\psi} \gamma^\mu A_\mu \psi$ identifica diretamente a corrente elétrica como

$$j^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi.$$

A conservação dessa corrente segue imediatamente da invariância de gauge. De fato, tomando a derivada e usando a equação de Dirac (6.43):

$$\begin{aligned} \partial_\mu j^\mu &= \partial_\mu (\bar{\psi} \gamma^\mu \psi) = (\partial_\mu \bar{\psi}) \gamma^\mu \psi + \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi \\ &= i \bar{\psi} (m + e \gamma^\mu A_\mu) \psi - i \bar{\psi} (m + e \gamma^\mu A_\mu) \psi = 0. \end{aligned} \quad (6.46)$$

Assim,

$$\partial_\mu j^\mu = 0. \quad (6.47)$$

A invariância local de fase garante automaticamente a conservação da carga elétrica. O termo $-e \bar{\psi} \gamma^\mu A_\mu \psi$ pode, portanto, ser interpretado como o produto entre o potencial eletromagnético e a corrente j^μ , descrevendo o acoplamento físico entre o campo e sua fonte.

6.3.3 Acoplamento a campos escalares complexos

O mesmo princípio de invariância de gauge aplica-se a campos escalares complexos $\phi(x)$. O lagrangiano livre é

$$\mathcal{L}_\phi = (\partial_\mu \phi)^* (\partial^\mu \phi) - m^2 |\phi|^2, \quad (6.48)$$

o qual é invariante apenas sob transformações de fase globais

$$\phi(x) \rightarrow e^{i\alpha} \phi(x).$$

Para promover a simetria a local, $\alpha \rightarrow \alpha(x)$, introduzimos a derivada covariante

$$D_\mu \phi = (\partial_\mu + ieA_\mu) \phi, \quad (6.49)$$

que se transforma da mesma forma que ϕ :

$$D_\mu \phi \rightarrow e^{i\alpha(x)} D_\mu \phi.$$

O lagrangiano invariante de gauge é então

$$\mathcal{L}_\phi = (D_\mu \phi)^* (D^\mu \phi) - m^2 |\phi|^2 - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \quad (6.50)$$

Expansão do termo cinético.

Explicitemos o primeiro termo:

$$\begin{aligned} (D_\mu \phi)^* (D^\mu \phi) &= (\partial_\mu \phi^* - ieA_\mu \phi^*) (\partial^\mu \phi + ieA^\mu \phi) \\ &= (\partial_\mu \phi^*) (\partial^\mu \phi) + ieA^\mu (\phi^* \partial_\mu \phi - \phi \partial_\mu \phi^*) + e^2 A_\mu A^\mu |\phi|^2. \end{aligned} \quad (6.51)$$

O primeiro termo descreve a dinâmica livre do campo escalar, o segundo termo linear em A_μ corresponde à interação com um único fóton, e o termo quadrático $e^2 A_\mu A^\mu |\phi|^2$ representa a interação simultânea de dois fótons com a partícula escalar.

Equações de movimento.

As equações dinâmicas seguem novamente do princípio da ação estacionária.

(a) Variação em relação a ϕ^* . A equação de Euler–Lagrange para ϕ^* é

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^*} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^*)} \right) = 0.$$

Calculando termo a termo a partir de (6.50):

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi^*)} = (D^\mu \phi), \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^*} = -ieA_\mu (D^\mu \phi) - m^2 \phi.$$

Logo,

$$\begin{aligned} 0 &= -ieA_\mu (D^\mu \phi) - m^2 \phi - \partial_\mu (D^\mu \phi) \\ &= (D_\mu D^\mu + m^2) \phi, \end{aligned} \quad (6.52)$$

ou seja,

$$D_\mu D^\mu \phi + m^2 \phi = 0. \quad (6.53)$$

Essa é a equação de Klein–Gordon modificada pela presença do campo eletromagnético.

(b) Variação em relação a A_μ . Do termo $(D_\mu \phi)^*(D^\mu \phi)$, a dependência em A_μ é

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} = -ie(\phi^* \partial^\mu \phi - \phi \partial^\mu \phi^*) + 2e^2 A^\mu |\phi|^2.$$

O termo de Maxwell fornece, como antes,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu A_\mu)} = -F^{\nu\mu}.$$

Substituindo na equação de Euler–Lagrange,

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} - \partial_\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu A_\mu)} \right) \\ &= -ie(\phi^* \partial^\mu \phi - \phi \partial^\mu \phi^*) + 2e^2 A^\mu |\phi|^2 + \partial_\nu F^{\nu\mu}. \end{aligned} \quad (6.54)$$

Assim, obtemos

$$\partial_\nu F^{\nu\mu} = e j^\mu, \quad (6.55)$$

onde a corrente conservada é

$$j^\mu = i(\phi^* \partial^\mu \phi - \phi \partial^\mu \phi^*) - 2e A^\mu |\phi|^2. \quad (6.56)$$

Os dois termos em (6.56) representam, respectivamente, a corrente de probabilidade livre e a contribuição devida à presença do campo A_μ .

Conservação da corrente.

A invariância local da Lagrangiana (6.50) sob

$$\phi(x) \rightarrow e^{i\alpha(x)} \phi(x), \quad A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) - \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha(x),$$

implica diretamente na conservação de j^μ :

$$\partial_\mu j^\mu = 0. \quad (6.57)$$

Essa propriedade decorre da identidade de Noether aplicada a uma simetria local e garante a consistência entre as equações de Maxwell e de Klein–Gordon acopladas.

O termo linear $e A_\mu j^\mu$ descreve os processos de emissão e absorção de fótons, enquanto o termo quadrático $e^2 A_\mu A^\mu |\phi|^2$ introduz correções de ordem superior, como a criação ou aniquilação de dois fótons simultâneos. Portanto, o lagrangiano (6.50) reproduz de forma completa os efeitos eletromagnéticos clássicos e quânticos associados a partículas carregadas sem spin.

6.3.4 Invariância de gauge e conservação da carga

Tanto no caso fermiônico quanto no escalar, o acoplamento minimal garante a invariância local sob transformações de fase dependentes do espaço-tempo:

$$\psi(x) \rightarrow e^{i\alpha(x)} \psi(x), \quad \phi(x) \rightarrow e^{i\alpha(x)} \phi(x), \quad A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) - \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha(x). \quad (6.58)$$

Verificação explícita da invariância.

Para o caso fermiônico, substituindo (6.58) em

$$\mathcal{L}_\psi = \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi,$$

temos

$$D_\mu \psi = (\partial_\mu + ieA_\mu)\psi \longrightarrow e^{i\alpha(x)}(\partial_\mu + ieA_\mu - i\partial_\mu \alpha/e \cdot e)\psi = e^{i\alpha(x)}D_\mu \psi.$$

Logo,

$$\bar{\psi}' i\gamma^\mu D'_\mu \psi' = \bar{\psi} e^{-i\alpha} i\gamma^\mu e^{i\alpha} D_\mu \psi = \bar{\psi} i\gamma^\mu D_\mu \psi,$$

mostrando que \mathcal{L}_ψ é exatamente invariante. O mesmo raciocínio vale para o termo escalar $(D_\mu \phi)^*(D^\mu \phi)$, uma vez que ambos os fatores se transformam com a mesma fase.

Corrente conservada.

A invariância de gauge implica uma corrente conservada por meio do teorema de Noether. Para o caso fermiônico, considerando uma transformação infinitesimal

$$\psi \rightarrow (1 + i\alpha)\psi, \quad \bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi}(1 - i\alpha),$$

a variação da Lagrangiana é

$$\delta \mathcal{L}_\psi = \frac{\partial \mathcal{L}_\psi}{\partial \psi} \delta \psi + \frac{\partial \mathcal{L}_\psi}{\partial \bar{\psi}} \delta \bar{\psi} = i\alpha \partial_\mu (\bar{\psi} \gamma^\mu \psi).$$

Como $\delta \mathcal{L}_\psi = 0$ para simetrias, segue que

$$\partial_\mu j^\mu = 0, \quad j^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi. \quad (6.59)$$

Essa é precisamente a corrente que aparece como fonte nas equações de Maxwell acopladas (6.45).

No caso escalar, o mesmo procedimento aplicado a (6.50) leva à corrente

$$j^\mu = i(\phi^* \partial^\mu \phi - \phi \partial^\mu \phi^*) - 2eA^\mu |\phi|^2, \quad (6.60)$$

cujas conservação, $\partial_\mu j^\mu = 0$, decorre da invariância de gauge local.

Interpretação geométrica.

O acoplamento minimal, expresso pela substituição

$$\partial_\mu \longrightarrow D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu,$$

revela o caráter geométrico da interação eletromagnética. O campo A_μ atua como uma conexão que define o transporte paralelo das fases do campo de matéria em um fibrado principal com grupo estrutural $U(1)$. A curvatura associada a essa conexão é precisamente

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu,$$

e corresponde fisicamente ao tensor de campo eletromagnético.

O transporte paralelo de $\psi(x)$ ou $\phi(x)$ ao longo de uma trajetória infinitesimal dx^μ é dado por

$$\psi(x + dx) = e^{-ieA_\mu dx^\mu} \psi(x),$$

o que mostra que A_μ mede a variação relativa de fase entre pontos vizinhos, a essência do potencial eletromagnético.

Unificação entre simetria e interação.

O quadro de gauge unifica, portanto, simetria e dinâmica:

- a simetria local define como os campos se transformam.
- a conexão de gauge A_μ surge para restaurar a invariância.
- a curvatura $F_{\mu\nu}$ codifica a força eletromagnética.

Qualquer termo que quebre a simetria (6.58) violaria a conservação da corrente (6.59), tornando a teoria inconsistente. Assim, a exigência de invariância de gauge não é apenas uma convenção estética, mas uma condição de consistência interna da estrutura quântica.

Significado físico.

A invariância de gauge local traduz o fato de que apenas as quantidades associadas à curvatura $F_{\mu\nu}$ são observáveis, enquanto o potencial A_μ é definido apenas até uma derivada de $\Lambda(x)$. Essa redundância é o preço a pagar pela descrição covariante das interações mediadas por bósons vetoriais sem massa.

A geometria de conexões, introduzida aqui no contexto abeliano $U(1)$, servirá como base para generalizações não abelianas, nas quais o campo de gauge possui autointerações e múltiplos geradores, dando origem às teorias de Yang–Mills e ao próprio Modelo Padrão das interações fundamentais.

6.4 Regras de Feynman da Eletrodinâmica Quântica

A lagrangiana da QED,

$$\mathcal{L}_{\text{QED}} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \quad (6.61)$$

contém todos os ingredientes necessários para descrever o espalhamento e as interações entre elétrons, pósitrons e fótons. Nesta seção, derivamos sistematicamente as regras de Feynman associadas a essa teoria, que constituem o formalismo operacional para o cálculo de amplitudes em ordem perturbativa.

6.4.1 Propagadores livres

O ponto de partida da quantização canônica é a separação entre a parte livre e a parte de interação da Lagrangiana. Expandindo (6.61):

$$\mathcal{L}_{\text{QED}} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi - e\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}.$$

Identificamos:

$$\mathcal{L}_0 = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \quad \mathcal{L}_{\text{int}} = -e\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi.$$

A partir de \mathcal{L}_0 , obtemos os propagadores das partículas livres.

Propagador fermiônico.

A equação de movimento correspondente ao campo de Dirac livre é

$$(i\cancel{\partial} - m)\psi = 0,$$

de modo que o propagador de Feynman $S_F(x - y)$ é definido como a função de Green do operador $(i\cancel{\partial} - m)$:

$$(i\cancel{\partial}_x - m)S_F(x - y) = \delta^{(4)}(x - y). \quad (6.62)$$

Passando para o espaço de momento, escrevemos

$$S_F(x - y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} S_F(p) e^{-ip \cdot (x - y)}.$$

Substituindo em (6.62):

$$(\cancel{p} - m)S_F(p) = i,$$

ou seja, $S_F(p)$ é o inverso do operador $(\cancel{p} - m)$, o que fornece

$$S_F(p) = \frac{i}{\cancel{p} - m + i\epsilon}.$$

Multiplicando numerador e denominador por $(\cancel{p} + m)$, obtemos a forma racionalizada:

$$S_F(p) = \frac{i(\cancel{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon}. \quad (6.63)$$

Voltando ao espaço-tempo:

$$S_F(x - y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i(\cancel{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ip \cdot (x - y)}.$$

Esse propagador descreve a propagação causal de uma partícula de spin- $\frac{1}{2}$ (elétron ou pósitron) entre dois pontos no espaço-tempo.

Propagador do fóton.

O termo $-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ na Lagrangiana contém uma redundância associada à invariância de gauge

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \Lambda.$$

Para definir o propagador do campo vetorial, adicionamos um termo de fixação de gauge:

$$\mathcal{L}_{\text{gauge}} = -\frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)^2, \quad (6.64)$$

onde ξ é um parâmetro real que especifica o calibre. A Lagrangiana total para o campo A_μ torna-se

$$\mathcal{L}_A = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)^2.$$

Expandindo $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$:

$$\mathcal{L}_A = \frac{1}{2}A_\mu \left[\eta^{\mu\nu} \square - \left(1 - \frac{1}{\xi} \right) \partial^\mu \partial^\nu \right] A_\nu.$$

O operador cinético no espaço de momento é, portanto,

$$K^{\mu\nu}(p) = -p^2 \eta^{\mu\nu} + \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) p^\mu p^\nu.$$

O propagador $D_F^{\mu\nu}(p)$ é definido como o inverso de $K^{\mu\nu}(p)$:

$$K^{\mu\rho}(p) D_{F\rho\nu}(p) = i \delta^\mu_\nu.$$

A inversão desse operador fornece

$$D_F^{\mu\nu}(p) = \frac{-i}{p^2 + i\epsilon} \left[\eta^{\mu\nu} - (1 - \xi) \frac{p^\mu p^\nu}{p^2} \right]. \quad (6.65)$$

Para o gauge de Feynman ($\xi = 1$), o propagador simplifica para

$$D_F^{\mu\nu}(p) = \frac{-i\eta^{\mu\nu}}{p^2 + i\epsilon}. \quad (6.66)$$

Outras escolhas, como o gauge de Lorentz ($\xi = 0$) ou o gauge de Coulomb, são matematicamente distintas mas fisicamente equivalentes: todas conduzem aos mesmos observáveis mensuráveis, refletindo a invariância de gauge da teoria.

6.4.2 Vértice de interação

O termo de interação na Lagrangiana é

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = -e \bar{\psi} \gamma^\mu A_\mu \psi. \quad (6.67)$$

Ele descreve o acoplamento entre o campo fermiônico ψ (elétron/pósitron) e o campo vetorial A_μ (fóton). Na expansão perturbativa da amplitude de espalhamento, cada inserção desse termo na série de Dyson corresponde a um ponto de interação no diagrama de Feynman.

Transformação para o espaço de momento.

Escrevendo os campos como expansões em ondas planas:

$$\psi(x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \psi(p) e^{-ip \cdot x}, \quad \bar{\psi}(x) = \int \frac{d^4p'}{(2\pi)^4} \bar{\psi}(p') e^{ip' \cdot x}, \quad A_\mu(x) = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} A_\mu(q) e^{-iq \cdot x}.$$

Substituindo em (6.67):

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = -e \int \frac{d^4p'}{(2\pi)^4} \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \bar{\psi}(p') \gamma^\mu \psi(p) A_\mu(q) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p' - p - q),$$

onde a integral sobre x gera o delta de Dirac que assegura a conservação de momento em cada vértice:

$$(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p' - p - q).$$

Fator de vértice.

Cada ponto de interação, portanto, está associado a um fator

$$(-ie) \gamma^\mu, \quad (6.68)$$

que conecta duas linhas fermiônicas (com momentos p e p') e uma linha de fóton (com momento $q = p' - p$). O sinal de $-i$ provém da convenção da série de Dyson no espaço de interação:

$$S = T \exp \left[i \int d^4x \mathcal{L}_{\text{int}}(x) \right],$$

de modo que cada inserção de \mathcal{L}_{int} contribui com um fator i multiplicando o termo $(-e\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi)$.

Assim, o vértice fundamental da QED corresponde graficamente a:

$$\text{vértice:} \quad \begin{cases} \text{entrada de férmion:} & p, u(p), \\ \text{saída de férmion:} & p', \bar{u}(p'), \\ \text{fóton associado:} & q = p' - p, \\ \text{fator:} & (-ie)\gamma^\mu. \end{cases}$$

Esse fator é universal: todas as interações elétron-fóton, independentemente da ordem perturbativa, utilizam o mesmo vértice elementar.

Observação sobre o fluxo de partículas.

Quando a linha fermiônica é percorrida no sentido oposto ao fluxo de carga (ou seja, representa um pósitron), o mesmo fator de vértice $(-ie\gamma^\mu)$ é mantido, mas as convenções de momento e orientação de linha são ajustadas para preservar a conservação de momento global. Essas regras garantem a coerência entre o formalismo algébrico e a interpretação física dos diagramas de Feynman.

6.4.3 Regras de Feynman completas para QED

A partir da Lagrangiana interativa da QED,

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = -e \bar{\psi} \gamma^\mu A_\mu \psi,$$

a evolução temporal no espaço de interação é dada pela série de Dyson,

$$S = T \exp \left[i \int d^4x \mathcal{L}_{\text{int}}(x) \right], \quad (6.69)$$

onde T denota a ordenação temporal. Expandindo (6.69) em potências do acoplamento e , obtém-se:

$$S = 1 + i \int d^4x \mathcal{L}_{\text{int}}(x) + \frac{(i)^2}{2!} \int d^4x d^4y T[\mathcal{L}_{\text{int}}(x)\mathcal{L}_{\text{int}}(y)] + \cdots. \quad (6.70)$$

Cada inserção de \mathcal{L}_{int} corresponde a um vértice de interação no diagrama de Feynman, e as contrações entre campos nas médias de vácuo geram as linhas internas associadas aos propagadores. As integrais sobre os pontos x e y originam os fatores de conservação de momento $(2\pi)^4 \delta^{(4)}(\sum p_i)$ em cada vértice.

Construção das amplitudes.

De forma geral, uma amplitude \mathcal{M} em QED é obtida segundo as seguintes etapas:

1. Expande-se o operador S na ordem desejada de e ;
2. Contraem-se todos os pares de campos utilizando os propagadores apropriados (de férmions e fótons);
3. Associam-se os fatores correspondentes a cada vértice e linha propagadora;
4. Integra-se sobre todos os momenta internos;
5. Multiplica-se pelos espinores externos adequados (u, \bar{u}, v, \bar{v}) e pelos deltas de conservação de momento globais.

Regras em espaço de momento.

O resultado dessas operações pode ser organizado em um conjunto de regras algébricas universais, válidas para qualquer diagrama conectado. No espaço de momento, as regras de Feynman para a QED são:

- **Linha fermiônica (elétron):** fator

$$\frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon}.$$

- **Linha fermiônica (pósitron):** mesma expressão, porém com orientação de fluxo oposta ao da carga elétrica.
- **Linha de fóton:** fator

$$\frac{-i}{p^2 + i\epsilon} \left[\eta^{\mu\nu} - (1 - \xi) \frac{p^\mu p^\nu}{p^2} \right],$$

onde ξ é o parâmetro do gauge introduzido no termo de fixação $-\frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)^2$.

- **Vértice de interação:** fator $(-ie\gamma^\mu)$, conectando duas linhas fermiônicas e uma linha de fóton.
- **Conservação de momento:** em cada vértice, o momento total é conservado:

$$(2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(\sum_i p_i \right).$$

Integração sobre linhas internas.

Cada linha interna (de férmion ou fóton) introduz uma integração sobre o quadri-momento:

$$\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4}.$$

Dessa forma, um diagrama de n vértices e L linhas internas contribui com um termo de ordem e^n e com L integrais sobre momenta virtuais, que devem ser avaliadas segundo as regras de contorno de Feynman ($i\epsilon$).

Essas regras permitem construir a amplitude de qualquer processo perturbativo em QED de forma sistemática e covariante. Os propagadores codificam a propagação de partículas livres entre interações; os vértices representam os pontos de acoplamento elétron-fóton; e as integrais sobre momenta internos refletem a soma quântica sobre todos os caminhos possíveis. A invariância de gauge assegura que, apesar das dependências aparentes em ξ , todos os observáveis físicos, como seções de choque e taxas de decaimento, são independentes da escolha de gauge.

6.4.4 Gauge fixing e independência física

O termo de gauge (6.64) é introduzido apenas para definir corretamente o propagador do fóton, mas não altera as previsões físicas da teoria. Observáveis mensuráveis, como seções de choque ou taxas de decaimento, são independentes do parâmetro ξ . Essa propriedade é consequência direta da invariância de gauge, que garante que diferentes escolhas de gauge correspondem apenas a diferentes representações matemáticas de uma mesma física subjacente.

De fato, o propagador do fóton no gauge covariante geral é

$$D_F^{\mu\nu}(p) = \frac{-i}{p^2 + i\epsilon} \left[\eta^{\mu\nu} - (1 - \xi) \frac{p^\mu p^\nu}{p^2} \right].$$

O termo proporcional a $p^\mu p^\nu / p^2$ depende explicitamente de ξ , mas ele nunca contribui a grandezas físicas. Em uma amplitude genérica, cada linha de fóton conecta-se a uma corrente conservada J_μ proveniente das linhas fermiônicas, de modo que o fator relevante é sempre da forma

$$J_\mu D_F^{\mu\nu}(p) J'_\nu.$$

Usando a conservação da corrente $p_\mu J^\mu = 0$, o termo dependente de ξ desaparece:

$$J_\mu \frac{p^\mu p^\nu}{p^2} J'_\nu = 0.$$

Assim, a parte longitudinal do propagador não tem efeito sobre amplitudes físicas, somente as polarizações transversas do fóton participam nos processos observáveis.

Essa propriedade é expressa de maneira mais geral pela identidade de Ward–Takahashi, que relaciona a estrutura do vértice e do propagador fermiônico:

$$q_\mu \Gamma^\mu(p', p) = S_F^{-1}(p') - S_F^{-1}(p), \quad (6.71)$$

onde Γ^μ é o vértice completo e S_F o propagador fermiônico renormalizado. Essa relação assegura que qualquer variação na escolha de gauge (ou no parâmetro ξ) é compensada automaticamente pela conservação de corrente elétrica em todos os níveis de perturbação.

Em abordagens covariantes, o gauge de Feynman ($\xi = 1$) é preferido pela simplicidade algébrica, enquanto o gauge de Coulomb é mais intuitivo para problemas não relativísticos. Independentemente da escolha, o formalismo das regras de Feynman preserva a coerência e a unidade da descrição quântica das interações eletromagnéticas.

A construção das regras de Feynman evidencia a força preditiva da formulação de gauge: toda a estrutura interativa da QED, propagadores, vértices e simetrias, é determinada a partir de um único princípio de invariância local. A teoria resultante é renormalizável, unitária e experimentalmente confirmada com precisão sem precedentes, consolidando-se como o modelo paradigmático de uma teoria de gauge quântica.

6.5 Processos de Espalhamento em Eletrodinâmica Quântica

A Eletrodinâmica Quântica (QED) fornece o arcabouço teórico mais preciso para descrever interações entre partículas carregadas e fótons. Com as regras de Feynman estabelecidas, podemos agora aplicá-las ao cálculo de amplitudes de espalhamento, analisando como os princípios de simetria e a estrutura de gauge da teoria determinam os resultados observáveis.

6.5.1 Amplitude de transição e seção de choque

A probabilidade de transição entre um estado inicial $|i\rangle$ e um estado final $|f\rangle$ é descrita pela amplitude de espalhamento

$$S_{fi} = \langle f | S | i \rangle,$$

onde o operador de espalhamento S é construído a partir da série de Dyson:

$$S = T \exp \left[-i \int d^4x \mathcal{H}_{\text{int}}(x) \right].$$

Expansões perturbativas em potências de e produzem diagramas de Feynman com número crescente de vértices. Cada termo da expansão corresponde a uma ordem de correção quântica à amplitude clássica.

A quantidade fisicamente mensurável é a seção de choque diferencial, que mede a probabilidade de espalhamento por unidade de ângulo sólido. Para um processo $a + b \rightarrow c + d$, ela é dada por

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{64\pi^2 s} \frac{|\mathbf{p}_f|}{|\mathbf{p}_i|} |\mathcal{M}|^2, \quad (6.72)$$

onde $s = (p_a + p_b)^2$ é o invariante de Mandelstam, \mathbf{p}_i e \mathbf{p}_f são os módulos dos momentos no centro de massa, e \mathcal{M} é a amplitude invariante associada ao processo.

Os processos de espalhamento em QED podem ser classificados em termos dos canais de Mandelstam, que refletem as diferentes maneiras pelas quais o momento é transmitido entre as partículas. Definem-se os invariantes:

$$s = (p_1 + p_2)^2, \quad t = (p_1 - p_3)^2, \quad u = (p_1 - p_4)^2,$$

os quais satisfazem $s + t + u = \sum m_i^2$. Cada um desses canais corresponde a uma topologia distinta de diagrama: o canal- s a uma aniquilação e recriação intermediária de partículas,

e os canais- t e- u à troca de fóton entre as linhas externas. Essa decomposição será útil para identificar a estrutura de cada processo de espalhamento.

6.5.2 Espalhamento elétron-fóton (Compton)

O espalhamento Compton é o processo no qual um elétron interage com um fóton, emitindo um novo fóton e sendo defletido:

$$e^-(p) + \gamma(k) \rightarrow e^-(p') + \gamma(k').$$

O termo de interação $-e\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi$ permite dois diagramas de Feynman na menor ordem (ordem e^2), correspondendo às duas possíveis ordens de absorção e emissão do fóton pelo elétron.

As amplitudes correspondentes são:

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_s &= (-ie)^2 \bar{u}(p') \epsilon_\mu'^* \gamma^\mu \frac{i(\not{p} + \not{k} + m)}{(p+k)^2 - m^2 + i\epsilon} \epsilon_\nu \gamma^\nu u(p), \\ \mathcal{M}_u &= (-ie)^2 \bar{u}(p') \epsilon_\nu \gamma^\nu \frac{i(\not{p} - \not{k}' + m)}{(p-k')^2 - m^2 + i\epsilon} \epsilon_\mu'^* \gamma^\mu u(p).\end{aligned}$$

O sinal de mais no numerador dos propagadores é consequência da convenção $(+, -, -, -)$ adotada. O fator total da amplitude é então

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_s + \mathcal{M}_u.$$

A soma $\mathcal{M} = \mathcal{M}_s + \mathcal{M}_u$ é essencial para garantir a invariância de gauge. De fato, substituindo uma polarização longitudinal $\epsilon_\mu \rightarrow k_\mu$ em qualquer um dos termos individuais, obtém-se uma contribuição não nula; no entanto, a soma total satisfaz $k_\mu \mathcal{M}^\mu = 0$, conforme exige a conservação de corrente do elétron. Essa propriedade, consequência direta da identidade de Ward-Takahashi, assegura que apenas as polarizações físicas do fóton contribuem para o resultado observável.

O cálculo explícito de $|\mathcal{M}|^2$, após a soma sobre polarizações do fóton e spins do elétron, conduz à famosa fórmula de Klein-Nishina, que descreve a variação angular da energia do fóton espalhado e é uma das primeiras confirmações experimentais diretas da quantização do campo eletromagnético.

6.5.3 Espalhamento elétron-pósitron (Bhabha)

Outro processo fundamental é o espalhamento elétron-pósitron:

$$e^-(p_1) + e^+(p_2) \rightarrow e^-(p_3) + e^+(p_4).$$

Nesse caso, há dois diagramas distintos em ordem e^2 : o canal- s , mediado pela aniquilação do par e^-e^+ em um fóton virtual, e o canal- t , correspondente à troca de fóton entre as partículas incidentes.

A amplitude total é

$$\mathcal{M} = (-ie)^2 \left[\bar{v}(p_2) \gamma^\mu u(p_1) \frac{-i\eta_{\mu\nu}}{(p_1 + p_2)^2} \bar{u}(p_3) \gamma^\nu v(p_4) - \bar{u}(p_3) \gamma^\mu u(p_1) \frac{-i\eta_{\mu\nu}}{(p_1 - p_3)^2} \bar{v}(p_2) \gamma^\nu v(p_4) \right].$$

A estrutura de sinais reflete a estatística fermiônica e a orientação das linhas de partículas e antipartículas. O primeiro termo representa o canal- s (aniquilação), e o segundo, o canal- t (espalhamento direto).

Após somar sobre spins e integrar sobre o espaço de fase, obtém-se a seção de choque diferencial de Bhabha, que depende dos invariantes de Mandelstam s , t e u , com a simetria característica

$$s + t + u = 4m^2.$$

No limite de altas energias ($m \ll \sqrt{s}$), os resultados se aproximam dos obtidos para espalhamento de partículas de massa nula, revelando a consistência ultrarrelativística da teoria.

6.5.4 Espalhamento elétron-elétron (Møller)

Para o espalhamento entre dois elétrons,

$$e^-(p_1) + e^-(p_2) \rightarrow e^-(p_3) + e^-(p_4),$$

existem novamente dois diagramas na menor ordem, correspondendo aos canais- t e- u de troca de fóton. A amplitude total é

$$\mathcal{M} = (-ie)^2 \left[\bar{u}(p_3) \gamma^\mu u(p_1) \frac{-i\eta_{\mu\nu}}{(p_1 - p_3)^2} \bar{u}(p_4) \gamma^\nu u(p_2) - \bar{u}(p_4) \gamma^\mu u(p_1) \frac{-i\eta_{\mu\nu}}{(p_1 - p_4)^2} \bar{u}(p_3) \gamma^\nu u(p_2) \right].$$

A diferença de sinal entre os dois termos decorre da antissimetria da função de onda fermiônica sob troca de partículas idênticas, garantindo a obediência ao princípio de exclusão de Pauli.

A dependência angular da seção de choque, obtida após soma sobre spins, reproduz o resultado experimental de Møller, validando a estrutura estatística e relativística da QED.

A análise desses processos de espalhamento mostra que todas as interações entre partículas carregadas podem ser expressas em termos de trocas de fótons virtuais, cuja propagação é mediada pelo propagador (6.66). Essa estrutura garante que a QED preserve simultaneamente unitariedade, invariância de gauge e causalidade, independentemente da escolha de gauge covariante.

Além disso, a correspondência entre amplitudes e observáveis experimentais evidencia como a teoria de campos fornece não apenas uma descrição matemática consistente, mas também previsões quantitativas de altíssima precisão, como no caso da razão giromagnética do elétron e da dispersão Compton, medidas com exatidão de partes por bilhão.

As regras de Feynman e os exemplos de espalhamento tratados nesta seção completam a formulação perturbativa da QED. O formalismo é suficientemente geral para descrever processos envolvendo múltiplos fótons, pares elétron-pósitron e correções radiativas de ordem superior, que serão tratadas posteriormente dentro da estrutura da renormalização. A clareza estrutural da QED faz dela o protótipo conceitual de todas as teorias de gauge do Modelo Padrão.

6.6 O Potencial de Coulomb em QED

O formalismo da Eletrodinâmica Quântica permite interpretar as forças eletrostáticas clássicas como o resultado da troca de fótons virtuais entre partículas carregadas. Nesta seção, mostramos como o potencial de Coulomb emerge naturalmente do limite não relativístico do espalhamento elétron-elétron.

6.6.1 Troca de fóton virtual

Considere o processo

$$e^-(p_1) + e^-(p_2) \rightarrow e^-(p_3) + e^-(p_4),$$

cuja amplitude em menor ordem (ordem e^2) é dominada pelo diagrama de troca de fóton no canal- t :

$$\mathcal{M} = (-ie)^2 \bar{u}(p_3) \gamma^\mu u(p_1) \frac{-i\eta_{\mu\nu}}{(p_1 - p_3)^2} \bar{u}(p_4) \gamma^\nu u(p_2).$$

Nesse contexto, o fóton interno é virtual, ele não satisfaz $p^2 = 0$, e é o mediador da interação eletromagnética entre os elétrons.

No regime não relativístico, as componentes temporais das correntes dominam, pois a velocidade das partículas é muito menor que c . Assim,

$$\bar{u}(p_3) \gamma^0 u(p_1) \approx 2m, \quad \bar{u}(p_4) \gamma^0 u(p_2) \approx 2m,$$

e as componentes espaciais γ^i são suprimidas por fatores da ordem de $|\mathbf{p}|/m$. A amplitude reduz-se então a

$$\mathcal{M} \approx (-ie)^2 \frac{(2m)^2}{\mathbf{q}^2},$$

onde $\mathbf{q} = \mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_1$ é o momento transferido entre os elétrons.

6.6.2 Transformada para o espaço real

A interação potencial correspondente é obtida tomando a transformada de Fourier da amplitude no espaço de momento:

$$V(\mathbf{r}) = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \mathcal{M}(\mathbf{q}) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}.$$

Substituindo o resultado acima e normalizando por $4m^2$ (para remover os fatores de spinor externo), obtemos

$$V(\mathbf{r}) = e^2 \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}}{\mathbf{q}^2}.$$

A integral é conhecida e resulta em

$$\int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}}{\mathbf{q}^2} = \frac{1}{4\pi r}.$$

Portanto,

$$V(r) = \frac{e^2}{4\pi r}. \quad (6.73)$$

Esse é exatamente o potencial de Coulomb obtido na eletrostática clássica.

O resultado (6.73) mostra que o campo elétrico clássico é uma manifestação do intercâmbio de fótons virtuais entre partículas carregadas. A propagação desses fótons é descrita pelo propagador

$$D_F^{00}(p) = \frac{i}{\mathbf{p}^2}$$

no limite não relativístico, cuja transformada de Fourier gera o comportamento $1/r$ característico do potencial.

Essa correspondência demonstra a consistência entre a QED e o eletromagnetismo de Maxwell: no limite de baixas energias, as amplitudes de espalhamento reproduzem precisamente as forças de Coulomb. A diferença fundamental é conceitual, o campo eletromagnético deixa de ser um meio contínuo e passa a ser entendido como o portador de quanta de interação, os fótons.

A derivação do potencial de Coulomb a partir da QED encerra o ciclo iniciado com a exigência de invariância de gauge local. O próprio princípio de simetria conduz de maneira contínua ao surgimento do campo de gauge A_μ , ao acoplamento minimal entre carga e campo e, por fim, à força de longo alcance que se manifesta entre partículas carregadas. Dessa forma, o eletromagnetismo clássico aparece como o limite natural da dinâmica quântica mediada por fótons virtuais.

A eletrodinâmica quântica, portanto, não apenas explica quantitativamente o fenômeno eletromagnético, como o reconstrói a partir de um princípio de simetria fundamental.

Encerramos, assim, o desenvolvimento iniciado com a estrutura hamiltoniana dos campos e a quantização canônica, que levou naturalmente à introdução de propagadores, regras de Feynman e ao cálculo de amplitudes de espalhamento em teorias de gauge. A derivação do potencial de Coulomb a partir da QED evidencia a consistência entre a formulação quântica e o limite clássico, mostrando como interações de longo alcance emergem da troca de fótons virtuais.

O tratamento apresentado estabelece a base conceitual necessária para estudos mais avançados, como correções radiativas, renormalização e extensões não abelianas, que constituem os elementos fundamentais do Modelo Padrão das partículas elementares.

7 Conclusão

Neste trabalho, percorremos uma jornada sistemática através dos fundamentos da Teoria Quântica de Campos, desde a quantização canônica do campo escalar até a formulação da Eletrodinâmica Quântica. Esta progressão revelou como a união entre mecânica quântica e relatividade especial leva naturalmente a uma estrutura matemática rica e fisicamente profunda.

A quantização do campo escalar estabeleceu os conceitos fundamentais: o espaço de Fock como estrutura para estados de múltiplas partículas, os operadores de criação e aniquilação para manipular excitações quantizadas, e o vácuo quântico como estado fundamental não trivial. A extensão para o campo complexo demonstrou como simetrias globais, através do teorema de Noether, geram números quânticos conservados.

O desenvolvimento dos propagadores e funções de Green forneceu as ferramentas para conectar o formalismo abstrato a quantidades mensuráveis. A fórmula de Lehmann-Symanzik-Zimmermann estabeleceu esta conexão rigorosamente, mostrando como funções de correlação se relacionam a amplitudes de espalhamento. A discussão de causalidade relativística revelou que, embora campos não comutem em pontos tipo-espaço, os observáveis físicos respeitam a estrutura causal do espaço-tempo.

A teoria de perturbação, desenvolvida através do quadro de interação e da série de Dyson, forneceu o método sistemático para calcular correções perturbativas. O teorema de Wick organizou a estrutura combinatória necessária, enquanto os diagramas de Feynman emergiram como representação visual elegante destes cálculos. As aplicações ao cálculo de seções de choque e taxas de decaimento ilustraram como a teoria produz previsões quantitativas testáveis.

A introdução do campo de Dirac ampliou o escopo da teoria para férmions relativísticos. A construção a partir das representações espinoriais do grupo de Lorentz garantiu covariância relativística, enquanto a necessidade de anticomutadores na quantização revelou a conexão profunda entre spin e estatística. A teoria de Yukawa forneceu a primeira aplicação completa das regras de Feynman para processos fermiônicos.

A formulação da Eletrodinâmica Quântica representou a culminação desta progressão. A simetria de gauge $U(1)$ local emergiu da exigência de invariância sob transformações de fase locais, determinando univocamente a forma da interação entre matéria e radiação. As aplicações a processos de espalhamento e a recuperação do potencial de Coulomb demonstraram o poder preditivo e a consistência da teoria.

Os conceitos desenvolvidos neste trabalho constituem a base para desenvolvimentos mais avançados: renormalização, teorias de gauge não-abelianas que descrevem as interações fracas e fortes, e o mecanismo de Higgs. A confrontação das previsões teóricas com experimentos continua a testar e validar a estrutura da teoria quântica de campos em níveis de precisão extraordinários.

Este trabalho apresentou os fundamentos da Teoria Quântica de Campos de forma matematicamente rigorosa, estabelecendo as bases conceituais e técnicas necessárias. A estrutura aqui desenvolvida ilustra como, partindo de princípios simples, emerge uma descrição poderosa das interações fundamentais da natureza.

8 Referências

PESKIN, Michael E.; SCHROEDER, Daniel V. **An Introduction to Quantum Field Theory**. 1st. Boca Raton, FL: CRC Press, 1995. ISBN 978-0201503975.

SCHWARTZ, Matthew D. **Quantum Field Theory and the Standard Model**. Cambridge: Cambridge University Press, 2013. ISBN 9781107034730.

TONG, David. Quantum Field Theory: Lecture Notes. Acesso em: [s. l.], 2024.
Disponível em: <http://www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/qft.html>.