



Universidade de Brasília
Departamento de Estatística

Cálculo de entropia como medida de risco para ativos financeiros

Leonardo dos Reis Andrade

Trabalho apresentado para o Departamento de Estatística da Universidade de Brasília como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de Bacharel em Estatística.

Brasília
2025

Cálculo de entropia como medida de risco para ativos financeiros

Orientador(a): Prof. Raul Yukihiro Matushida

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado para o Departamento de Estatística da Universidade de Brasília como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de Bacharel em Estatística.

**Brasília
2025**

Sumário

1 Introdução	4
2 Objetivos	6
3 Entropia	6
3.1 Entropia de Shannon	6
3.2 Entropia Multivariada	7
3.3 Propriedades da Entropia Multivariada	8
3.4 Entropia Condicional	8
3.5 Propriedades da Entropia Condicional	9
3.6 Informação Mútua	9
3.7 Entropia Diferencial	10
3.8 Entropia Diferencial Condicional	11
3.9 Discussão	11
4 Fronteira Eficiente de Markowitz	12
4.1 Definição da Teoria Moderna do Portfólio	12
4.2 O modelo de Markowitz	13
4.3 Índice de Sharpe	14
4.4 Aplicação da Teoria de Markowitz na construção de carteira ótima	15
5 Metodologia	17
6 Resultados	18
6.1 Seleção de Ações do Modelo	18
6.2 Aplicação dos Modelos	28
7 Conclusão	29
7.1 Retornos	29
7.2 Risco	30
7.3 Índice de Sharpe	30
7.4 Considerações Finais	30

1 Introdução

A mensuração de risco é um dos pilares fundamentais na análise e gestão de investimentos financeiros. Avaliar e gerenciar o risco associado a diferentes ativos e estratégias de investimento é essencial para garantir decisões informadas e alcançar objetivos financeiros de forma eficiente (SÁ, 1999). No contexto das finanças modernas, a teoria da carteira eficiente de Markowitz, desenvolvida por Harry Markowitz (MARKOWITZ, 1952), revolucionou a maneira como o risco é compreendido e gerenciado. Ao introduzir o conceito de diversificação como uma ferramenta para otimizar a relação entre risco e retorno, Markowitz estabeleceu que uma carteira eficiente deve oferecer o maior retorno esperado para um dado nível de risco ou, alternativamente, minimizar o risco para um dado retorno esperado.

Na prática, a mensuração do risco nessa teoria é tradicionalmente realizada por meio de métricas como o *desvio padrão*, que mede a variabilidade dos retornos, e o *Value at Risk (VaR)*, que fornece uma estimativa de perda potencial em condições normais de mercado. Embora amplamente utilizadas, essas métricas possuem limitações significativas, especialmente em cenários de mercado altamente voláteis, onde os retornos podem exibir distribuições não normais. Eventos extremos, como crises financeiras, frequentemente escapam às premissas assumidas por essas medidas clássicas, tornando necessária a busca por métodos mais robustos e abrangentes.

Com os avanços nas tecnologias de processamento de dados e no desenvolvimento de metodologias matemáticas, novas abordagens têm surgido para refinar a análise de risco financeiro. Entre essas, o *cálculo de entropia* tem se destacado como uma alternativa promissora, devido à sua capacidade de capturar a incerteza e a complexidade de forma mais completa. A entropia, originalmente derivada da *teoria da informação*, oferece uma métrica que quantifica a incerteza e a aleatoriedade associadas a variáveis ou conjuntos de dados. Esse enfoque permite explorar a imprevisibilidade intrínseca dos retornos financeiros, superando algumas das limitações das métricas tradicionais.

Na área financeira, a entropia é frequentemente utilizada para quantificar a diversificação e a incerteza em carteiras de ativos. Modelos baseados em entropia buscam maximizar a incerteza residual nas alocações, de forma a evitar concentração excessiva em poucos ativos. Esse método é especialmente relevante em cenários onde a informação sobre o mercado é limitada ou incerta.

A aplicação de entropia ao campo das finanças não é completamente nova. Pesquisas como a de (CASSETARI, 2003) destacaram o uso da *entropia de Shannon* como uma ferramenta eficaz para medir a diversificação e a alocação de ativos em carteiras financeiras. Esse estudo demonstrou como a entropia pode ser aplicada para identificar

a eficiência de carteiras ao considerar a variabilidade e a interdependência dos ativos, proporcionando uma análise mais detalhada da relação risco-retorno.

Essa perspectiva abre caminhos para repensar a forma como o risco é mensurado e gerenciado. Ao contrário das métricas tradicionais, que frequentemente assumem distribuições fixas ou ignoram aspectos dinâmicos dos mercados, a entropia é particularmente adequada para capturar os padrões não lineares e a complexidade que caracterizam os mercados financeiros modernos. Sua capacidade de lidar com sistemas caóticos e interdependências sutis torna-a uma ferramenta atrativa para gestores de investimento que buscam decisões mais informadas.

Neste contexto, propomos a introdução da entropia como uma alternativa inovadora para a mensuração de risco financeiro. Essa abordagem tem o potencial de transformar práticas estabelecidas de gestão de risco e otimização de carteiras, fornecendo *insights* mais profundos e fundamentados sobre a natureza do risco e suas implicações. Ao quantificar a incerteza e a imprevisibilidade de forma mais abrangente, a entropia pode complementar ou substituir métricas tradicionais, oferecendo uma nova perspectiva sobre a tomada de decisão em investimentos.

Este estudo se concentra no desenvolvimento de um modelo prático baseado na entropia, projetado para gestores de investimento. O objetivo é avaliar como essa abordagem pode ser implementada na prática, destacando suas vantagens e limitações em comparação com métodos tradicionais. Ao explorar a integração de entropia na análise de risco e na construção de carteiras eficientes, buscamos contribuir para a evolução do campo das finanças e oferecer ferramentas mais robustas para enfrentar os desafios do mercado financeiro moderno.

Este trabalho está estruturado na forma de um artigo científico, dividido em seções que abordam de maneira organizada os objetivos propostos. Na Seção 2, são apresentados os objetivos específicos do estudo, destacando os aspectos metodológicos e comparativos. A Seção 3 explora o conceito de entropia, detalhando suas variações e propriedades, com destaque para sua aplicação no contexto financeiro. Na Seção 4, é discutida a Teoria Moderna do Portfólio, com foco na Fronteira Eficiente de Markowitz e no Índice de Sharpe, oferecendo um contraponto teórico para a análise baseada em entropia. A Seção 5 detalha a metodologia adotada, incluindo a coleta, tratamento e análise dos dados, bem como as estratégias de cálculo de entropia e comparação com métodos tradicionais. Por fim, a Seção 6 apresenta as conclusões obtidas a partir da aplicação dos modelos e discute os resultados, destacando as implicações práticas e as possíveis limitações do estudo.

2 Objetivos

O trabalho busca desenvolver um modelo matemático que utiliza o cálculo de entropia para mensurar o risco de ativos financeiros, avaliando sua eficácia em comparação com métricas tradicionais de risco, para o caso de carteiras eficientes. O estudo consiste em:

- Revisar a literatura existente sobre o uso de entropia de Shannon, entropia multivariada, entropia condicional, informação mútua e entropia diferencial.
- Desenvolver um modelo teórico aplicando conceitos de entropia para medir o risco dos diferentes ativos financeiros que compõem o índice Ibovespa.
- Implementar o modelo no *software* R e utilizar o pacote **Entropy** para calcular a entropia do conjunto de dados históricos desses ativos.
- Comparar os resultados obtidos com a entropia às métricas tradicionais de risco, como o desvio padrão e a teoria de carteira eficiente de Markowitz. Analisar a eficácia do cálculo de entropia como medida de risco em diferentes cenários de mercado.
- Propor melhorias ou adaptações no modelo para aprimorar sua aplicação prática em gestão de risco financeiro.

3 Entropia

3.1 Entropia de Shannon

A entropia de Shannon, proposta por Claude E. Shannon em 1948, é definida como uma medida de incerteza ou imprevisibilidade associada a uma fonte de informação. Esse é o conceito central da teoria da informação, pois fornece uma maneira quantitativa de medir a quantidade de informação contida em uma mensagem e a eficiência com que ela pode ser transmitida (SHANNON, 1948).

A entropia $H(X)$ de uma variável aleatória X , que assume valores $x_1, x_2, \dots, x_n$ com probabilidades correspondentes $p(x_1), p(x_2), \dots, p(x_n)$, é definida como:

$$H(X) = - \sum_{i=1}^n p(x_i) \log p(x_i). \quad (3.1.1)$$

A entropia de Shannon representa a quantidade média de informação ou incerteza associada a uma distribuição de probabilidade. Ou seja, quando uma variável aleatória tem alta entropia, suas saídas são mais imprevisíveis. Por outro lado, uma variável com baixa entropia apresenta saídas mais previsíveis.

Entre suas propriedades, destacam-se as seguintes:

- **Não-negatividade:** $H(X) \geq 0$, com $H(X) = 0$ se e somente se X possui uma distribuição determinística.
- **Máximo:** A entropia atinge seu valor máximo quando todos os valores possíveis de X têm a mesma probabilidade, ou seja, $p(x_i) = 1/n$ para todos i .
- **Aditividade:** A entropia conjunta de variáveis independentes X e Y é a soma de suas entropias individuais: $H(X, Y) = H(X) + H(Y)$.
- **Concavidade:** A entropia é uma função côncava das probabilidades, o que reflete sua natureza de maximizar a incerteza em distribuições uniformes.

3.2 Entropia Multivariada

A entropia de Shannon, abordada anteriormente, é uma medida de incerteza associada a uma variável aleatória. Quando buscamos lidar com múltiplas variáveis aleatórias, é importante entender não apenas a incerteza individual de cada variável isoladamente, mas também como essas incertezas combinadas interagem. Para isso, a entropia multivariada oferece uma maneira formal de quantificar a incerteza conjunta de um conjunto de variáveis aleatórias (SHANNON, 1948).

Considere um vetor de variáveis aleatórias $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$. A entropia conjunta $H(\mathbf{X})$ é uma medida da incerteza associada ao vetor $\mathbf{X}$ e é definida como:

$$H(X_1, X_2, \dots, X_n) = - \sum_{x_1, x_2, \dots, x_n} p(x_1, x_2, \dots, x_n) \log p(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (3.2.1)$$

assumindo que o somatório varia sobre todos os possíveis valores $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ que o vetor $\mathbf{X}$ pode assumir e $p(x_1, x_2, \dots, x_n)$ é a função de probabilidade conjunta desses valores.

3.3 Propriedades da Entropia Multivariada

A entropia multivariada $H(X_1, X_2, \dots, X_n)$ possui várias propriedades importantes:

- **Não-negatividade:** $H(X_1, X_2, \dots, X_n) \geq 0$. A entropia multivariada é sempre não-negativa.
- **Simetria:** a entropia multivariada é simétrica em relação às variáveis. Isto é, $H(X_1, X_2, \dots, X_n) = H(X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}, \dots, X_{\sigma(n)})$ para qualquer permutação σ dos índices.
- **Subaditividade:** a entropia multivariada de um conjunto de variáveis aleatórias é menor ou igual à soma das entropias individuais: $H(X_1, X_2, \dots, X_n) \leq \sum_{i=1}^n H(X_i)$.
- **Aditividade para Variáveis Independentes:** se $X_1, X_2, \dots, X_n$ são variáveis independentes, então $H(X_1, X_2, \dots, X_n) = \sum_{i=1}^n H(X_i)$.

3.4 Entropia Condicional

A entropia condicional quantifica a incerteza de uma variável aleatória Y dado que o valor de outra variável aleatória X é conhecido. Em outras palavras, ela mede a quantidade de incerteza restante sobre Y após observar X . A entropia condicional $H(Y|X)$ pode ser definida como:

$$H(Y|X) = - \sum_{x,y} p(x,y) \log p(y|x), \quad (3.4.1)$$

no qual $p(x,y)$ é a probabilidade conjunta de X e Y , e $p(y|x)$ é a probabilidade condicional de Y dado X .

Intuitivamente, a entropia condicional pode ser entendida como a média ponderada das entropias de Y para cada possível valor de X . Se X não fornecer nenhuma informação sobre Y , a entropia condicional $H(Y|X)$ será igual à entropia $H(Y)$. Se X determinar completamente Y , então $H(Y|X) = 0$.

A entropia conjunta e a entropia condicional estão relacionadas pela fórmula:

$$H(X,Y) = H(X) + H(Y|X) = H(Y) + H(X|Y), \quad (3.4.2)$$

no qual $H(X,Y)$ é a entropia conjunta de X e Y , $H(X)$ e $H(Y)$ são as entropias marginais de X e Y , respectivamente.

3.5 Propriedades da Entropia Condicional

A entropia condicional possui várias propriedades importantes:

- **Não-negatividade:** $H(Y|X) \geq 0$. A entropia condicional é sempre não-negativa.
- **Redução de Incerteza:** $H(Y|X) \leq H(Y)$. Conhecer X nunca aumenta a incerteza sobre Y .
- **Igualdade em Independência:** se X e Y são independentes, então $H(Y|X) = H(Y)$.

3.6 Informação Mútua

A informação mútua $I(X; Y)$ entre duas variáveis aleatórias X e Y mede a quantidade de informação que X contém sobre Y e vice-versa, podendo se assemelhar a covariância entre duas variáveis. Ela é definida como:

$$I(X; Y) = H(X) + H(Y) - H(X, Y). \quad (3.6.1)$$

Ela pode também ser expressa em termos de entropia condicional, conforme segue abaixo:

$$I(X; Y) = H(X) - H(X|Y) = H(Y) - H(Y|X). \quad (3.6.2)$$

Podemos inferir com esta fórmula que a informação mútua é a redução na incerteza de X devido ao conhecimento de Y , ou vice-versa. A informação mútua possui simetria entre ela, o que pode ser traduzido como: $I(X; Y) = I(Y; X)$. Assim, se $I(X; Y) = 0$, isso indica que as variáveis X e Y são independentes e não compartilham informação. Se $I(X; Y)$ for alta, isso revela uma forte dependência entre as variáveis. Essa relação é importante para que a informação mútua desempenhe um papel crucial em problemas de minimização, especialmente na seleção de características.

Na seleção de características, o objetivo é escolher um subconjunto de características que sejam mais informativas sobre a variável alvo. A informação mútua é frequentemente usada para esse propósito porque mede a quantidade de informação compartilhada entre as características e a variável alvo. Como características temos:

- **Maximização da Informação:** ao selecionar características que têm alta informação mútua com a variável alvo, podemos maximizar a quantidade de informação útil capturada pelo modelo.

- **Redução de Redundância:** a informação mútua também ajuda a identificar características redundantes. Se duas características compartilham uma alta informação mútua entre si, uma delas pode ser removida para simplificar o modelo sem perder informação significativa.

Em problemas de otimização, como o caso aplicado desse trabalho, a informação mútua pode ser usada como um critério para guiar a busca por soluções ótimas. Ao maximizar a informação mútua entre as variáveis de decisão e o objetivo, podemos encontrar soluções que são mais informativas e potencialmente mais eficazes.

3.7 Entropia Diferencial

No caso de entropias diferenciais, podemos considerar uma variável aleatória contínua X com função densidade de probabilidade $f(x)$. A entropia diferencial $h(X)$ é definida como:

$$h(X) = - \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \log f(x) dx. \quad (3.7.1)$$

Assim como a entropia de Shannon, a entropia diferencial $h(X)$ procura quantificar a incerteza associada a uma variável aleatória. Ela possui algumas propriedades similares às apresentadas no caso discreto como:

- **Dependência Contínua:** a entropia diferencial depende da forma da função densidade de probabilidade $f(x)$.
- **Translação Invariância:** se $Y = X + c$ em que c é uma constante, então $h(Y) = h(X)$.
- **Escala:** se $Y = aX$ sendo que a é uma constante, então $h(Y) = h(X) + \log |a|$.
- **Aditividade para Variáveis Independentes:** para duas variáveis independentes X e Y , a entropia conjunta é a soma das entropias diferenciais individuais: $h(X, Y) = h(X) + h(Y)$.

Embora a entropia de Shannon e a entropia diferencial compartilhem conceitos semelhantes, existem algumas diferenças importantes:

- **Unidades:** a entropia de Shannon é medida em bits (quando a base do logaritmo é 2), enquanto a entropia diferencial pode ser medida em nats (quando a base do logaritmo é natural).

- **Valor Absoluto:** a entropia diferencial pode assumir valores negativos, ao contrário da entropia de Shannon que é sempre não-negativa.
- **Interpretação:** a entropia de Shannon mede a incerteza com base em distribuições de probabilidade discreta, enquanto a entropia diferencial mede a incerteza em termos de densidades de probabilidade contínuas.

3.8 Entropia Diferencial Condicional

A entropia diferencial condicional quantifica a incerteza de uma variável contínua Y dado que outra variável contínua X é conhecida. Sua definição é dada por:

$$h(Y|X) = - \int \int f(x, y) \log f(y|x) dy dx, \quad (3.8.1)$$

em que $f(x, y)$ é a densidade conjunta de X e Y , e $f(y|x)$ é a densidade condicional de Y dado X .

3.9 Discussão

No cálculo da entropia aplicado aos dados financeiros, especialmente no contexto dos retornos, os dados geralmente são contínuos por natureza. Idealmente, a entropia diferencial seria a ferramenta mais apropriada para capturar a incerteza em variáveis contínuas, uma vez que considera diretamente as densidades de probabilidade.

No entanto, neste trabalho, optou-se por utilizar histogramas como método de aproximação para a estimativa da entropia de Shannon. Essa escolha foi motivada por fatores práticos e metodológicos visando à simplicidade computacional, como será tratado na seção Metodologia.

O uso de histogramas simplifica o processo de estimativa de probabilidades ao converter dados contínuos em categorias discretas. Essa abordagem permite calcular a entropia utilizando a fórmula tradicional de Shannon, amplamente conhecida e implementada em pacotes de software, como o **Entropy** do **R**. Por outro lado, a estimativa da entropia diferencial requer a utilização de técnicas mais complexas, como estimadores baseados em kernels ou k -vizinhos mais próximos, que são computacionalmente mais exigentes e sensíveis a parâmetros adicionais, como largura de banda ou número de vizinhos. Desse modo, os dados utilizados neste trabalho serão agrupados para facilitar a análise das carteiras ao longo do tempo.

Contudo, o uso de histogramas não se alinha naturalmente ao formato dos dados, pois o agrupamento dos retornos para as estimativas de probabilidade não produz as

mesmas entropias diferenciais que seriam obtidas caso os dados fossem modelados como distribuições contínuas.

Além disso, a utilização de histogramas introduz um vício arbitrário sobre a granularidade da análise, já que os resultados dependem da escolha da amplitude dos intervalos de classe. Diferentes configurações de intervalos podem levar a variações na estimativa da entropia. Essa limitação não pode ser completamente mitigada, uma vez que as propriedades da entropia de Shannon e da entropia diferencial são distintas. Mesmo assim, os histogramas são amplamente utilizados e intuitivos, facilitando a interpretação das distribuições de frequência e a comunicação dos resultados, especialmente para públicos não especializados em métodos avançados de cálculo de entropia diferencial.

Embora o uso de histogramas apresente vantagens práticas, é importante ressaltar que a aproximação discreta da distribuição pode levar a estimativas enviesadas ou menos precisas da entropia, particularmente em distribuições altamente assimétricas ou com dados escassos em determinadas regiões do espaço amostral. Portanto, os resultados obtidos neste trabalho devem ser interpretados à luz dessa limitação, reconhecendo que a granularidade dos intervalos influencia a estimativa da incerteza.

Para estudos futuros, recomenda-se explorar técnicas de estimativa contínua da entropia diferencial, utilizando métodos baseados em densidade de probabilidade, como o *kernel density estimation* (KDE). Isso permitiria uma comparação direta dos resultados com as métricas baseadas em histogramas e a avaliação dos impactos da escolha metodológica na mensuração do risco financeiro.

4 Fronteira Eficiente de Markowitz

4.1 Definição da Teoria Moderna do Portfólio

A Teoria Moderna do Portfólio, introduzida por Harry Markowitz em 1952, foi um marco temporal de como os investidores analisam a dualidade entre risco e retorno para a alocação de seus investimentos. Um conceito central dessa teoria é a Fronteira Eficiente, que descreve o conjunto de portfólios otimizados para maximizar o retorno esperado para um dado nível de risco ou minimizar o risco para um dado retorno esperado.

A Fronteira Eficiente parte de uma premissa econômica básica: os investidores buscam maximizar sua utilidade ao selecionar portfólios, levando em consideração a relação de risco-retorno. O risco é caracterizado pela variância ou desvio padrão dos retornos, enquanto o retorno é medido pela sua média esperada. A inovação proposta pela teoria de Markowitz reside na formalização matemática da diversificação, buscando reduzir o risco do portfólio ao considerar as correlações entre os ativos em determinado

período de tempo.

4.2 O modelo de Markowitz

O modelo apresentado por Markowitz assume que o retorno de cada ativo tem as características de uma variável aleatória e que os investidores têm acesso às estimativas do retorno esperado, variância e covariância dos ativos, por meio de um mercado eficiente. Com base nessas informações, a composição ótima do portfólio pode ser desenvolvida a partir da resolução do problema de otimização quadrática, definido por:

$$\text{Maximizar: } \mu_p = \sum_{i=1}^n w_i \mu_i,$$

com as seguintes restrições:

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1 \quad \text{e} \quad \sigma_p^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \sigma_{ij},$$

em que μ_p é o retorno esperado do portfólio; w_i representa o peso do ativo i ; μ_i é o retorno esperado do ativo i ; σ_{ij} é a covariância entre os ativos i e j ; e σ_p^2 é a variância do portfólio.

A primeira restrição, $\sum w_i = 1$, garante que a alocação de recursos no portfólio é completa, enquanto a segunda descreve como o risco do portfólio é determinado pelas variâncias e covariâncias dos ativos.

A diversificação desempenha um papel fundamental na redução do risco não sistemático do portfólio, ou o risco diversificável. Esse efeito pode ser ilustrado examinando a variância do portfólio:

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^n w_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i}^n w_i w_j \sigma_{ij}.$$

O primeiro termo representa a soma ponderada das variâncias dos ativos, enquanto o segundo termo reflete o efeito das correlações entre os ativos. Quanto menor a correlação total entre os ativos, maior será a redução do risco total.

A solução do problema de otimização leva à identificação de portfólios eficientes, que são aqueles que, para um dado nível de risco, oferecem o maior retorno esperado. Esses portfólios formam a curva da Fronteira Eficiente, que é representada graficamente em um plano risco-retorno:

$$\min_w \quad \frac{1}{2}w^\top \Sigma w - \lambda(w^\top \mu - \mu_0),$$

no qual Σ é a matriz de covariância dos ativos; w é o vetor de pesos; λ é o multiplicador de Lagrange; e μ_0 é o retorno esperado desejado.

A solução desse sistema gera os pesos ótimos para os ativos selecionados que compõem os portfólios na Fronteira Eficiente. Em termos computacionais, a matriz de covariância desempenha um papel crítico. Por meio dela, define-se como os ativos irão interagir na determinação do risco total.

Para portfólios que incluem um ativo sem risco (por exemplo, um título do Tesouro indexado à taxa Selic), a linha do portfólio eficiente se torna uma reta, chamada Linha do Mercado de Capitais. O ponto de tangência entre a linha e a Fronteira Eficiente representa o portfólio de mercado, considerado o mais eficiente em termos de risco e retorno ajustado.

A Fronteira Eficiente de Markowitz fornece um arcabouço matemático para a construção de portfólios otimizados, equilibrando risco e retorno. Apesar de suas limitações — como a suposição de distribuições normais dos retornos e a necessidade de estimativas precisas de parâmetros.

A matemática por trás da Fronteira Eficiente não apenas contribui para a compreensão dos princípios da diversificação, mas também oferece ferramentas práticas para investidores tomarem decisões informadas. Com o avanço da computação, a aplicação de algoritmos de otimização tornou-se mais acessível, permitindo que a teoria de Markowitz continue relevante nas finanças modernas. A moderna teoria do portfólio, tem sido amplamente estudada e aplicada ao mercado financeiro brasileiro, evoluindo a otimização da relação entre risco e retorno. Estudos recentes, como o de Henrique e Colares (HENRIQUE; COLARES, 2023), demonstram que a alocação eficiente de ativos, conforme proposta pelo modelo de fronteira eficiente, pode ser ajustada para a realidade da Bolsa de Valores do Brasil (B3).

4.3 Índice de Sharpe

O **Índice de Sharpe**, desenvolvido por William F. Sharpe (SHARPE, 1966), é uma métrica amplamente utilizada na teoria moderna de portfólios para avaliar o desempenho ajustado ao risco de um investimento ou portfólio. Ele é calculado como a razão entre o prêmio de risco do ativo (ou portfólio) e seu desvio padrão, representando o retorno excedente por unidade de risco assumida.

A fórmula do Índice de Sharpe é dada por:

$$S = \frac{E[R_p] - R_f}{\sigma_p},$$

em que

- S é o Índice de Sharpe;
- $E[R_p]$ é o retorno esperado do portfólio;
- R_f é a taxa livre de risco (geralmente representada por títulos do governo);
- σ_p é o desvio padrão dos retornos do portfólio, representando o risco.

O Índice de Sharpe fornece uma maneira padronizada de comparar diferentes investimentos em termos de retorno ajustado ao risco. Quanto maior o índice, melhor o desempenho ajustado ao risco do portfólio ou ativo. Um valor positivo indica que o retorno do portfólio excede o retorno da taxa livre de risco por unidade de risco, enquanto valores negativos indicam desempenho inferior à taxa livre de risco.

4.4 Aplicação da Teoria de Markowitz na construção de carteira ótima

Para ilustrar o funcionamento da teoria de Markowitz na construção de uma carteira ótima, apresentamos o exemplo prático que segue. Suponha que três ações foram selecionadas, cada uma com retornos esperados, desvios padrão e correlações previamente estimados. Considera-se, ainda, a atribuição de pesos iniciais a cada ativo conforme apresentado na Tabela 1.

Tabela 1: Dados hipotéticos das ações.

Ação	Retorno Esperado (%)	Desvio Padrão (%)	Correlação com outras ações	Peso na Carteira (%)
Ação 1	16	15	$\rho_{12} = 0.3, \rho_{13} = 0.5$	40
Ação 2	24	20	$\rho_{23} = 0.4$	35
Ação 3	20	18	-	25

O retorno esperado da carteira é dado por:

$$E[R_p] = \sum_{i=1}^{n=3} w_i E[R_i].$$

Substituindo os valores dos pesos ($w_1 = 0.4, w_2 = 0.35, w_3 = 0.25$) e dos retornos

esperados ($E[R_1] = 16\%$, $E[R_2] = 24\%$, $E[R_3] = 20\%$):

$$E[R_p] = (0.4 \cdot 16) + (0.35 \cdot 24) + (0.25 \cdot 20)$$

$$E[R_p] = 6.4 + 8.4 + 5 = 19.8\%$$

O risco da carteira é definido por:

$$\sigma_p = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \sigma_i \sigma_j \rho_{ij}}.$$

Substituindo os pesos ($w_1 = 0.4$, $w_2 = 0.35$, $w_3 = 0.25$), os desvios padrão ($\sigma_1 = 15\%$, $\sigma_2 = 20\%$, $\sigma_3 = 18\%$), as correlações ($\rho_{12} = 0.3$, $\rho_{13} = 0.5$, $\rho_{23} = 0.4$):

$$\begin{aligned} \sigma_p^2 &= (0.4^2 \cdot 15^2) + (0.35^2 \cdot 20^2) + (0.25^2 \cdot 18^2) \\ &\quad + 2 \cdot 0.4 \cdot 0.35 \cdot 15 \cdot 20 \cdot 0.3 \\ &\quad + 2 \cdot 0.4 \cdot 0.25 \cdot 15 \cdot 18 \cdot 0.5 \\ &\quad + 2 \cdot 0.35 \cdot 0.25 \cdot 20 \cdot 18 \cdot 0.4. \end{aligned} \tag{4.4.1}$$

Calculando os termos:

$$\sigma_p^2 = 36 + 49 + 20.25 + 25.2 + 27 + 25.2 = 182.65$$

$$\sigma_p = \sqrt{182.65} \approx 14.1\%.$$

O coeficiente de Sharpe é dado por:

$$S = \frac{E[R_p] - R_f}{\sigma_p}.$$

Substituímos o retorno esperado da carteira ($E[R_p] = 19.8\%$), a taxa livre de risco ($R_f = 11.75\%$) e o risco da carteira ($\sigma_p = 14.1\%$):

$$S = \frac{19.8 - 11.75}{14.1}$$

$$S = \frac{8.05}{14.1} \approx 0.57.$$

5 Metodologia

O trabalho compara o resultado da carteira ótima de Markowitz com uma carteira que utilizará a entropia conjunta no lugar da covariância apresentada na formulação básica da carteira ótima, empregando o pacote **Entropy** do software **R** (LINDKVIST, 2013) para modelar o cálculo de entropia como medida de risco para ativos financeiros. Serão analisados os dados históricos das ações pertencentes ao índice Ibovespa no período de 1º de julho de 2023 a 30 de junho de 2024. Esses dados serão agrupados bimestralmente para avaliar as carteiras construídas por ambas as abordagens.

A coleta dos dados históricos de preços de fechamento diário refere-se aos ativos que compõem o índice Ibovespa, formado pelas ações mais negociadas na B3. Sua composição é revisada trimestralmente para refletir as condições atuais do mercado. Os critérios de inclusão no índice são baseados em liquidez, participação e frequência de negociação. Para serem elegíveis, as ações devem estar entre as mais negociadas em termos de volume financeiro, a empresa deve estar listada na B3 há pelo menos 12 meses, e as ações devem ter sido negociadas em pelo menos 95% dos pregões dos últimos 12 meses (B3, 2024).

Cada ação no Ibovespa possui um peso proporcional à sua liquidez e volume de negociação, o que significa que as ações com maior volume e liquidez exercem maior influência sobre o desempenho do índice. A coleta de dados será realizada na plataforma da B3, garantindo a integridade das informações. Após essa etapa, os dados serão tratados para corrigir valores faltantes e ajustar eventos como *split's* (fracionamento de uma ação em duas ou mais) e *inplit's* (agrupamento de duas ou mais ações em uma única), assegurando a consistência das informações para análises subsequentes. Os preços serão apresentados em retornos diários com o valor de fechamento do mercado, constituindo a base para o cálculo da entropia.

Com os dados agrupados, utilizamos o pacote **Entropy** no software **R** (LINDKVIST, 2013). para calcular a entropia dos retornos diários dos ativos financeiros. O cálculo foi realizado tanto para cada ativo individualmente quanto para a carteira como um todo. A entropia será usada como forma de quantificar a incerteza e a volatilidade dos retornos, oferecendo uma abordagem alternativa para avaliar o risco dos ativos.

Ademais, aplicamos a teoria da carteira eficiente de Markowitz, incorporando a entropia como medida de risco. Utilizamos um modelo de otimização de carteira para gerar carteiras eficientes, comparando aquelas construídas com base na entropia e na covariância. A avaliação do desempenho dessas carteiras foi realizada em termos de retorno e risco ajustado para o bimestre subsequente à sua criação. A comparação dos resultados permitiram avaliar as vantagens e limitações da entropia em relação à métrica tradicional,

destacando sua eficácia e aplicabilidade na construção de portfólios.

Para ambas as abordagens, foi necessário definir um parâmetro de regularização para evitar problemas numéricos, como matrizes singulares. Foram removidos ativos cuja variância dos retornos apresentou valores muito baixos ($\epsilon < 0,0001$). Em seguida, adicionou-se uma matriz diagonal de valor ϵ para garantir a estabilidade das matrizes de covariância e de entropia conjunta.

No caso da abordagem com entropia, inicializou-se uma matriz quadrada de zeros, onde cada dimensão corresponde a um ativo. Calculou-se a entropia de Shannon individual para compor os elementos diagonais de forma análoga à variância do ativo. Posteriormente, foi calculada a entropia conjunta entre pares de ativos para preencher os elementos fora da diagonal principal. Em ambas as abordagens, foi realizada a resolução do problema de otimização, resultando na definição da carteira ótima. Esse processo teve como objetivo identificar a alocação de ativos que maximiza o desempenho.

Ao final do processo, as carteiras geradas foram avaliadas quanto ao seu desempenho no bimestre subsequente, com base em testes de resultados realizados nesse período. A análise abrangeu os indicadores de retorno, risco e índice de Sharpe das carteiras. Foi utilizado como ativo livre de risco a taxa DI do período, permitindo uma avaliação detalhada de sua eficiência. Os valores obtidos foram devidamente anualizados para possibilitar uma comparação consistente e alinhada às práticas convencionais de análise financeira.

Esse procedimento teve como objetivo validar a eficácia das alocações realizadas. A anualização dos resultados foi efetuada para ajustar os valores a uma base temporal uniforme, garantindo maior precisão na interpretação e comparação com benchmarks de mercado.

6 Resultados

6.1 Seleção de Ações do Modelo

Com base nos dados bimestrais utilizados nos dois modelos, as carteiras ótimas foram:

Tabela 2: Resultados do Período 01/01/2023 – 28/02/2023

Markowitz	Peso (%)	Entropia	Peso (%)
WEGE3	5,770	RDOR3	13,22000
VALE3	5,320	ITUB4	18,71000
TIMS3	6,900	NTCO3	25,65000
TAAE11	9,060	ENEV3	2,10000
SUZB3	4,220	CMIN3	4,56000
SLCE3	13,330	COGN3	12,51000
SBSP3	1,030	BPAC11	23,25000
RADL3	5,540		
KLBN11	14,690		
HYPE3	3,190		
EGIE3	2,970		
EMBR3	14,860		
CCRO3	1,390		
BBDC3	0,710		
BBSE3	4,540		
ABEV3	6,150		

Tabela 3: Resultados do Período 01/03/2023 – 30/04/2023

Markowitz	Peso (%)	Entropia	Peso (%)
WEGE3	1,220	YDUQ3	6,270000
VALE3	8,400	USIM5	28,330000
UGPA3	6,110	RDOR3	11,550000
TIMS3	8,570	LREN3	3,980000
VIVT3	4,120	RENT3	11,390000
TAAE11	13,600	CSAN3	5,220000
SLCE3	0,270	COGN3	6,350000
PETR4	4,930	BPAC11	2,560000
PETR3	2,000	BRFS3	6,440000
BEEF3	0,820	AZUL4	11,340000
KLBN11	4,730	ABEV3	6,570000
NTCO3	0,110		
EGIE3	14,780		
EMBR3	9,980		
CMIG4	5,130		
CCRO3	5,040		
BRKM5	0,340		
BBSE3	9,860		

Tabela 4: Resultados do Período 01/05/2023 – 30/06/2023

Markowitz	Peso (%)	Entropia	Peso (%)
WEGE3	10,750	YDUQ3	1,50
VALE3	0,460	UGPA3	8,78
UGPA3	6,590	RAIL3	2,06
TIMS3	1,970	PETZ3	23,18
TAE11	2,210	MRVE3	25,24
SUZB3	6,790	RENT3	6,14
CSNA3	3,130	NTCO3	10,58
RDOR3	1,260	CSAN3	6,95
RAIZ4	14,270	BRKM5	6,28
PETZ3	3,800	B3SA3	8,86
PRIO3	2,850	AZUL4	0,43
PETR3	2,520		
RENT3	6,710		
KLBN11	2,320		
JBSS3	4,450		
ITUB4	1,340		
HYPE3	0,150		
EZTC3	6,160		
ENEV3	6,120		
COGN3	0,250		
BRFS3	3,070		
BBDC4	12,840		

Tabela 5: Resultados do Período 01/07/2023 – 31/08/2023

Markowitz	Peso (%)	Entropia	Peso (%)
WEGE3	4,300	VBBR3	4,460
VALE3	1,450	CSNA3	23,940
USIM5	5,670	SANB11	0,600
UGPA3	2,390	RDOR3	2,030
TIMS3	2,150	RADL3	2,000
VIVT3	1,140	MRFG3	12,150
TAE11	10,650	ITUB4	10,500
SUZB3	5,020	ENEV3	4,810
CSNA3	1,770	CVCB3	1,850
SMT03	0,920	CRFB3	24,100
SANB11	3,590	BPAC11	6,890
RDOR3	2,600	BRFS3	4,320
RAIZ4	2,050	B3SA3	2,350
PRIO3	3,210		
MULT3	2,630		
MRVE3	2,460		
LWSA3	1,910		
RENT3	4,990		
KLBN11	0,040		
IGTI11	8,120		
NTCO3	0,310		
CYRE3	4,410		
CMIN3	9,690		
CPFE3	3,550		
CCRO3	0,540		
CRFB3	0,790		
BRKM5	4,620		
BBDC4	1,400		
BBDC3	7,640		

Tabela 6: Resultados do Período 01/09/2023 – 31/10/2023

Markowitz	Peso (%)	Entropia	Peso (%)
USIM5	14,71000	MGLU3	3,2800
TIMS3	8,02000	JBSS3	1,8400
VIVT3	5,00000	EZTC3	23,0500
TAAE11	8,12000	CVCB3	28,3400
PRI03	6,59000	CSAN3	12,4800
PETR4	3,31000	COGN3	3,3500
BEEF3	2,88000	BPAC11	0,4400
RENT3	6,64000	BBAS3	0,7600
KLBN11	6,68000	AZUL4	22,0400
JBSS3	2,41000	ALPA4	4,4200
NTCO3	5,54000		
GOAU4	4,22000		
EQTL3	4,65000		
CMIN3	2,49000		
BPAC11	7,66000		
BRFS3	6,15000		
BRKM5	0,44000		
AZUL4	3,02000		
ASAI3	1,46000		

Tabela 7: Resultados do Período 01/09/2023 – 31/10/2023

Markowitz	Peso (%)	Entropia	Peso (%)
USIM5	14,71000	MGLU3	3,2800
TIMS3	8,02000	JBSS3	1,8400
VIVT3	5,00000	EZTC3	23,0500
TAAE11	8,12000	CVCB3	28,3400
PRI03	6,59000	CSAN3	12,4800
PETR4	3,31000	COGN3	3,3500
BEEF3	2,88000	BPAC11	0,4400
RENT3	6,64000	BBAS3	0,7600
KLBN11	6,68000	AZUL4	22,0400
JBSS3	2,41000	ALPA4	4,4200
NTCO3	5,54000		
GOAU4	4,22000		
EQTL3	4,65000		
CMIN3	2,49000		
BPAC11	7,66000		
BRFS3	6,15000		
BRKM5	0,44000		
AZUL4	3,02000		
ASAI3	1,46000		

Tabela 8: Resultados do Período 01/09/2023 – 31/10/2023

Markowitz	Peso (%)	Entropia	Peso (%)
WEGE3	6,600	USIM5	5,9500
VALE3	5,210	CSNA3	2,2300
USIM5	0,060	SANB11	2,6000
TIMS3	15,470	RDOR3	0,8900
VIVT3	13,260	PETZ3	2,1800
TAAE11	9,010	MULT3	1,6800
SMT03	5,920	MRVE3	5,9900
SANB11	5,590	MGLU3	5,7900
RAIL3	1,600	RENT3	22,5400
PETZ3	5,660	ITUB4	2,9900
PRI03	8,060	ITSA4	7,5300
PETR4	0,810	IGTI11	2,6200
RENT3	4,130	HAPV3	3,5100
JBSS3	0,950	CSAN3	6,1900
GOAU4	6,550	BPAC11	0,0100
EZTC3	2,330	BBDC4	11,6000
EQTL3	3,180	BBDC3	6,0500
CYRE3	2,630	ASAI3	9,6800
CMIG4	1,290		
CCRO3	1,680		

Tabela 9: Resultados do Período 01/01/2024 – 28/02/2024

Markowitz	Peso (%)	Entropia	Peso (%)
WEGE3	6,7600	VALE3	25,0500
VALE3	2,2800	VIVT3	3,1000
UGPA3	1,3900	RDOR3	0,8000
TIMS3	6,2200	PETZ3	17,9200
VIVT3	4,4800	FLRY3	10,9200
SUZB3	4,6600	DXCO3	14,3700
SANB11	8,7700	BRKM5	7,0600
SBSP3	1,3200	BRAP4	18,9500
RAIZ4	6,0600	AZUL4	1,8300
PETZ3	1,9400		
PRIO3	5,0300		
PETR4	3,5000		
JBSS3	2,8300		
ENGI11	15,0100		
CVCB3	2,4600		
CMIN3	5,3900		
CSAN3	1,3100		
COGN3	1,1500		
CRFB3	0,9600		
BRKM5	2,2200		
BBAS3	5,4600		
BBDC4	1,0600		
BBDC3	9,0800		
AZUL4	0,6400		

Tabela 10: Resultados do Período 01/03/2024 – 30/04/2024

Markowitz	Peso (%)	Entropia	Peso (%)
WEGE3	7,490	PETZ3	37,6700
VBBR3	2,950	MGLU3	6,8300
VALE3	6,430	HYPE3	5,2100
TOTS3	3,280	CVCB3	1,7600
TIMS3	1,170	BPAC11	13,5800
VIVT3	7,720	BRKM5	18,6000
TAEE11	13,520	B3SA3	16,3500
SUZB3	2,120		
SMT03	0,110		
SANB11	3,170		
PETZ3	8,210		
PRI03	4,820		
PETR4	2,490		
MRVE3	0,880		
KLBN11	3,650		
JBSS3	2,610		
ITUB4	2,190		
GOAU4	6,350		
EZTC3	2,560		
EQTL3	1,070		
ENGI11	1,580		
EMBR3	0,010		
CMIN3	5,200		
COGN3	5,170		
BPAC11	0,860		
BBAS3	4,180		
BRAP4	0,230		

Tabela 11: Resultados do Período 01/04/2024 – 30/06/2024

Markowitz	Peso (%)	Entropia	Peso (%)
USIM5	0,450	YDUQ3	7,250
UGPA3	3,320	RAIZ4	2,040
TOTS3	2,590	MULT3	18,960
VIVT3	6,560	HAPV3	15,460
TAE11	1,050	GOAU4	8,980
SUZB3	3,850	EQTL3	25,700
SLCE3	8,120	ENGI11	10,050
CSNA3	2,920	COGN3	2,600
RAIZ4	3,200	CCRO3	0,230
RADL3	4,950	AZUL4	8,740
PETZ3	7,150		
LREN3	5,820		
LWSA3	3,310		
RENT3	3,360		
GOAU4	8,160		
EZTC3	3,310		
EQTL3	6,200		
CPFE3	1,460		
CSAN3	1,890		
CCRO3	0,570		
BPAC11	4,320		
BRFS3	4,990		
BBDC4	7,500		
BBDC3	4,960		

6.2 Aplicação dos Modelos

Embora a abordagem de entropia priorize a seleção de ativos que reduzam a incerteza, observamos que ela realizou a concentração em menos ativos do que a abordagem clássica. Essa concentração pode ser prejudicial ao risco global do portfólio. A ausência de diversificação deixa a carteira mais vulnerável a choques idiossincráticos e sistêmicos, reduzindo sua resiliência em diferentes condições de mercado. Como consequência, o nível de risco aumentou, o que foi evidenciado ao testar os modelos para o bimestre subsequente e anualizar os resultados apresentados.

Tabela 12: Resultados Comparativos entre as Abordagens de Markowitz e Entropia por Período

Período	Abordagem	Retorno (%)	Risco (%)	Sharpe
01/01/2023 – 28/02/2023	Markowitz	8,78	12,72	-0,19
	Entropia	-4,25	34,46	-0,45
01/03/2023 – 30/04/2023	Markowitz	34,78	11,66	2,03
	Entropia	192,10	26,10	6,93
01/05/2023 – 30/06/2023	Markowitz	-3,94	15,37	-0,98
	Entropia	-45,64	24,37	-2,30
01/07/2023 – 31/08/2023	Markowitz	-41,82	16,56	-3,20
	Entropia	-58,25	22,18	-3,13
01/09/2023 – 31/10/2023	Markowitz	-28,24	12,45	-3,16
	Entropia	155,59	41,93	3,44
01/11/2023 – 31/12/2023	Markowitz	0,84	13,42	-0,77
	Entropia	-28,57	20,52	-1,94
01/01/2024 – 28/02/2024	Markowitz	-25,79	13,25	-2,79
	Entropia	5,11	28,37	-0,21
01/03/2024 – 30/04/2024	Markowitz	-29,44	13,75	-2,95
	Entropia	-111,34	28,32	-4,32
01/05/2024 – 30/06/2024	Markowitz	68,39	18,01	2,90
	Entropia	28,06	26,82	0,44

A análise comparativa entre as abordagens de Markowitz e Entropia na otimização de carteiras revelou diferenças significativas em termos de retorno, risco e índice de Sharpe ao longo dos períodos avaliados. Com base nos resultados obtidos, algumas observações importantes podem ser destacadas.

7 Conclusão

7.1 Retornos

A abordagem de Entropia apresentou o maior retorno em três dos nove períodos analisados (33,3%), com destaque para o período de **01/03/2023 – 30/04/2023**, onde alcançou um retorno anualizado de **192,10%**, superando consideravelmente os **34,78%** da abordagem de Markowitz. Por outro lado, Markowitz obteve desempenho superior em seis períodos (66,6%), sendo o melhor no intervalo de **01/05/2024 – 30/06/2024**, com um retorno de **68,39%** frente aos **28,06%** da Entropia.

7.2 Risco

Em termos de risco, a abordagem de Markowitz apresentou menores valores em todos os períodos (100%), indicando maior estabilidade na alocação das carteiras. Por exemplo, no período de **01/05/2023 – 30/06/2023**, Markowitz obteve um risco de **15,37%**, enquanto a Entropia apresentou **24,37%**. No entanto, grande parte dessa diferença pode ser explicada pela maior concentração de ativos da entropia. Em estudos posteriores, pode-se diminuir os intervalos de captura para avaliar se a concentração de ativos diminui em relação ao apresentado e a quantidade de ações que compõe a carteira se aproxima do modelo clássico.

7.3 Índice de Sharpe

Ao analisar o índice de Sharpe, que mede o retorno ajustado ao risco, Markowitz apresentou melhores resultados em cinco períodos (55,6%), enquanto a Entropia superou em quatro períodos (44,4%). O período de maior destaque para Markowitz foi **01/05/2024 – 30/06/2024**, com um índice de Sharpe de **2,90**, em contraste com os **0,44** da Entropia. Por outro lado, Entropia obteve o melhor índice de Sharpe no intervalo de **01/03/2023 – 30/04/2023**, com **6,93**, superando os **2,03** de Markowitz.

A análise sugere que a escolha entre as abordagens de Markowitz e Entropia deve considerar o contexto e os objetivos do investidor. A abordagem de Markowitz demonstrou maior consistência em termos de risco e índices de Sharpe, destacando-se por sua estabilidade e eficiência na relação entre retorno e risco. Já a Entropia, embora mais volátil, mostrou-se capaz de capturar retornos significativamente superiores em determinados períodos, especialmente em cenários de maior incerteza.

Dessa forma, as duas metodologias apresentam forças complementares. Enquanto Markowitz pode ser mais indicada para investidores avessos ao risco, a Entropia surge como uma alternativa para aqueles dispostos a assumir maiores riscos em busca de retornos mais elevados. A análise demonstra, portanto, que ambas as abordagens têm potencial de aplicação, dependendo do perfil e dos objetivos estratégicos do investidor.

7.4 Considerações Finais

Apesar dos avanços alcançados com a aplicação da entropia como medida de risco financeiro, os resultados destacam algumas limitações que podem ser exploradas em trabalhos futuros. A abordagem baseada em entropia de Shannon mostrou-se promissora em cenários de maior incerteza, proporcionando retornos elevados em determinados

períodos. No entanto, apresentou maior volatilidade e menor consistência quando comparada ao modelo tradicional de Markowitz. Além disso, a concentração excessiva de ativos nas carteiras otimizadas pela entropia de Shannon expôs uma vulnerabilidade a choques específicos, apontando para a necessidade de métodos que considerem uma maior diversificação.

Assim, para estudos futuros, recomenda-se a análise de técnicas que combinem a entropia diferencial contínua com ajustes nos parâmetros de regularização, buscando reduzir a sensibilidade do modelo ao agrupamento dos dados. Dessa forma, será possível aprimorar a robustez e a aplicabilidade prática da entropia como ferramenta de gestão de risco financeiro.

O código R desenvolvido neste trabalho se encontra disponível em https://figshare.com/articles/software/TCC-_C_lculo_de_entropia_como_medida_de_risco_para_ativos_financeiros/28306274.

Referências

B3. *Brasil, Bolsa, Balcão*. 2024. Acesso em: 30 junho, 2024. Disponível em: <https://www.b3.com.br>.

CASSETARI, A. O princípio da máxima entropia e a moderna teoria das carteiras. *Brazilian Review of Finance*, 2003. Disponível em: <https://periodicos.fgv.br/rbfin/article/download/1131/295>.

HENRIQUE, M. R.; COLARES, R. P. Análise de risco: Uma aplicação no mercado de ações brasileiro. *Revista Controladoria e Gestão*, 2023. Disponível em: <https://ufs.emnuvens.com.br/rcg/article/download/18731/14043>.

LINDKVIST, K. H. *entropy: Estimation of Entropy, Mutual Information and Related Quantities*. [S.l.], 2013. Disponível em: <https://cran.r-project.org/package=entropy>.

MARKOWITZ, H. Portfolio selection. *The Journal of Finance*, vol. VII, n. 1, 1952.

SHANNON, C. E. A mathematical theory of communication. *Bell System Technical Journal*, SciELO, v. 27, p. 379–423, 1948.

SHARPE, W. F. Mutual fund performance. *Journal of Business*, v. 39, n. 1, p. 119–138, 1966.

SÁ, G. T. d. *Administração de investimentos, teoria de carteiras e gerenciamento do risco*. [S.l.]: Rio de Janeiro: Qualitymark, 1999.