



Universidade de Brasília
Departamento de Estatística

**ANÁLISE E OTIMIZAÇÃO DE PORTFÓLIOS DE AÇÕES NA B3:
APLICAÇÃO DE MODELOS DE VOLATILIDADE DINÂMICA NO
CONTEXTO DA TEORIA DE MARKOWITZ**

João Alberto de Rezende Alvares

Relatório apresentado para o Departamento de Estatística da Universidade de Brasília como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de Bacharel em Estatística.

**Brasília
2025**

João Alberto de Rezende Alvares

**ANÁLISE E OTIMIZAÇÃO DE PORTFÓLIOS DE AÇÕES NA B3:
APLICAÇÃO DE MODELOS DE VOLATILIDADE DINÂMICA NO
CONTEXTO DA TEORIA DE MARKOWITZ**

Orientador: Prof. Dr. José Augusto Fiorucci

Relatório apresentado para o Departamento de Estatística da Universidade de Brasília como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de Bacharel em Estatística.

Brasília
2025

Resumo

Este estudo investiga a aplicação de modelos de volatilidade e correlação dinâmicas na otimização de portfólios de ativos financeiros brasileiros. O objetivo principal é comparar o desempenho de duas estratégias de otimização de carteiras baseadas na teoria de Média-Variância de Markowitz: uma abordagem clássica, que emprega covariâncias históricas, e uma abordagem dinâmica, que incorpora covariâncias condicionais estimadas por um modelo DCC-GARCH. A metodologia incluiu a coleta de retornos diários de nove ativos negociados na B3 e câmbio, seguida pela estimação de modelos GARCH univariados e do modelo DCC-GARCH multivariado para capturar as características estilizadas dos retornos, como agrupamento de volatilidade e caudas pesadas. Posteriormente, carteiras foram simuladas com rebalanceamento mensal para ambas as estratégias, e seus desempenhos avaliados por métricas como Retorno Anualizado, Volatilidade Anualizada e *Sharpe Ratio*, utilizando o IBOVESPA como *benchmark*. Os resultados demonstram a eficácia do modelo DCC-GARCH na captura da dinâmica e persistência das volatilidades e correlações. A Estratégia DCC-GARCH superou consistentemente a abordagem Clássica e o *benchmark* em termos de *Sharpe Ratio*, evidenciando maior eficiência de risco-retorno. A capacidade de adaptar os pesos do portfólio às condições dinâmicas de mercado, estimadas pelo DCC-GARCH, resultou em carteiras mais robustas e com desempenho superior ajustado ao risco. Este estudo, portanto, reforça a relevância da modelagem de risco dinâmico para uma gestão de portfólios mais eficaz no mercado financeiro brasileiro.

Palavras-chave: Otimização de portfólio, DCC-GARCH, Volatilidade condicional, Correlação condicional, Teoria de Markowitz, Gestão de risco.

Lista de Tabelas

1	Ativos Utilizados	31
2	Diferença Entre as Estratégias	34
3	Estatísticas Descritivas dos Retornos Percentuais Diários dos Nove Ativos Durante 1 de janeiro de 2015 e 3 de junho de 2025	39
4	Parâmetros Estimados dos Modelos GARCH(1,1)	41
5	Parâmetros Estimados do Modelo DCC-GARCH(1,1)	42
6	Métricas de Desempenho Anualizadas das Estratégias de Portfólio	45
7	Estatísticas Descritivas dos Resíduos Padronizados	52
8	Resultados do Teste de Ljung-Box para Resíduos Padronizados ao Quadrado	55

Lista de Figuras

1	Valores de fechamento para BB, Vale e Petrobras	13
2	Retornos para Banco do Brasil, Vale e Petrobras	13
3	ACF dos Retornos da Vale	14
4	ACF dos Retornos ao quadrado da Vale	14
5	Estimativa da Volatilidade sobre os Retornos do BB.	22
6	Correlação Condicional dos ativos simulados	26
7	Fronteira Eficiente utilizando os dados deste trabalho	29
8	Preço de fechamento Ajustado para todos os Ativos de forma conjunta . .	37
9	Valores de Fechamento Ajustado dos nove Ativos no período 1 de janeiro de 2015 até 3 de junho de 2025	38
10	Valores de retornos logaritmos diários dos nove Ativos no periodo 1 de janeiro de 2015 até 3 de junho de 2025	39
11	Matriz de correlção Incondicional dos Retornos Diários (Heatmap)	40
12	Volatilidade Condicional Diária dos 9 Ativos	42
13	Relação 2 a 2 entre alguns Ativos	43
14	Desempenho Acumulado das Estratégias de Portfólio e Benchmark	44
15	Evolução dos pesos dos ativos ao longo do tempo para as duas estratégias .	46
16	Heatmap: diferença nos pesos entre as duas abordagens	47
17	Funções de Autocorrelação (ACF) dos Resíduos Padronizados de Ativos Selecionados	53
18	Funções de Autocorrelação (ACF) dos Resíduos Padronizados ao Quadrado	54
19	QQ plots dos residuos padronizados para todos os ativos	55

Sumário

1 Introdução	8
2 Referencial Teórico	11
2.1 Séries Temporais	11
2.2 Características de Dados Financeiros	11
2.2.1 Retornos	12
2.3 Volatilidade	15
2.3.1 <i>Autoregressive Conditionally Heteroskedastic</i> (ARCH)	15
2.3.2 <i>Generalised Autoregressive Conditionally Heteroskedastic</i> (GARCH)	18
2.3.3 O processo GARCH(1,1)	20
2.3.4 Extensão Multivariada	23
2.3.5 O Modelo DCC-GARCH	23
2.4 Teoria de Formação de portfólio	26
2.4.1 O Modelo de Markowitz	27
3 Metodologia	30
3.1 Conjunto de Dados	30
3.2 Modelagem de Volatilidade	31
3.3 Otimização de Portfólio	32
3.4 Otimização Incorporando Volatilidade e Correlação Dinâmicas	33
3.5 Critérios de Avaliação e Comparação	34
3.5.1 Retorno Anualizado (<i>Annualized Returns</i>)	35
3.5.2 Volatilidade Anualizada (<i>Annualized Standard Deviation</i>)	35
3.5.3 <i>Sharpe Ratio</i>	36
4 Resultados	37
4.1 Análise Descritiva dos Dados	37
4.2 Resultados da Modelagem de Volatilidade e Correlação	41
4.3 Desempenho dos Portfólios Otimizados	44

4.4 Análise da Alocação de Pesos	45
5 Conclusão	48
5.1 Revisão dos Objetivos	48
5.2 Principais Resultados	48
5.3 Limitações e Pesquisas Futuras	49
Referências	50
A Análise de Resíduos do Modelo DCC-GARCH	52
A.1 Extração e Características dos Resíduos Padronizados	52
A.2 Análise Gráfica dos Resíduos	53
A.3 Testes Formais de Autocorrelação (Teste de Ljung-Box)	55

1 Introdução

O mercado financeiro constitui um ambiente dinâmico e complexo, repleto de oportunidades e riscos, sendo influenciado por uma multiplicidade de fatores econômicos, políticos e comportamentais. Dentro desse ambiente, destacam-se as ações, títulos emitidos por empresas para captar recursos e que representam uma fração do seu capital social. Essas ações são negociadas nas bolsas de valores, como a B3, e seu preço varia conforme a oferta e demanda do mercado.

Diante desse cenário, a questão central reside na seleção de ativos para a composição de um portfólio – termo que designa uma coleção de investimentos financeiros, como ações, títulos e outros instrumentos, estrategicamente organizados para atingir objetivos específicos do investidor. A seleção adequada dos ativos para o portfólio busca equilibrar risco e retorno esperados, visando maximizar as chances de sucesso financeiro, o que exige considerar a diversificação e a correlação entre os ativos.

Markowitz (1952), em seu seminal trabalho *Portfolio Selection*, propôs que o processo de seleção de ativos pode ser dividido em dois grupos distintos. O primeiro baseia-se em observação e experiência prévia, resultando em uma crença subjetiva sobre o desempenho futuro dos ativos. O segundo grupo, por sua vez, fundamenta-se em análises objetivas sobre o potencial de desempenho futuro dos ativos, empregando dados financeiros e modelos analíticos para embasar a escolha. A ideia central de Markowitz é que, em vez de uma seleção intuitiva, a otimização de portfólios requer um processo estruturado e fundamentado que leve em consideração a relação intrínseca entre risco e retorno dos ativos.

A Teoria Moderna de Portfólio (MPT), proposta por Markowitz (1952), em especial o seu Modelo Média-Variância (MMV), busca identificar uma forma otimizada de alocar recursos em ativos, considerando o nível de risco desejado para maximizar o retorno esperado. No contexto do presente estudo, representa uma abordagem matemática para a seleção de ações em um portfólio.

Apesar da popularidade da MPT na academia e entre os profissionais de finanças, ela apresenta pressupostos e simplificações que nem sempre se mostram adequados na prática, como a suposição de correlação constante entre os ativos. Tal suposição, contudo, não se verifica na realidade, uma vez que a literatura financeira aponta para a natureza dinâmica das correlações ao longo do tempo, ou seja, não apenas não são constantes, mas também evoluem com o passar do tempo.

A correlação, a variância e o retorno médio são aspectos chave no Modelo Média-Variância de Markowitz. Diante disso, surge a questão central deste trabalho: seria possível empregar modelos que ajustem esses parâmetros de forma mais adequada, resultando em seleções de portfólio mais eficientes?

Nesse sentido, a presente pesquisa propõe modelar a variância e a correlação das ações por meio de modelos condicionalmente heterocedásticos, com o intuito de verificar se essa abordagem aprimora a seleção de portfólios de ações no *framework* Média-Variância de Markowitz. Em síntese, o objetivo deste trabalho será, portanto, empregar a extensão multivariada do processo GARCH para estimar a matriz de correlação entre 10 ações listadas na B3 – a principal bolsa de valores do Brasil e uma das maiores do mundo em termos de valor de mercado, volume de negociações e número de empresas listadas.

Séries financeiras possuem características especiais no contexto das séries temporais. Uma delas são os agrupamentos de volatilidade, caracterizado pela persistência de períodos de alta ou baixa volatilidade, onde grandes (pequenas) variações tendem a ser seguidas por grandes (pequenas) variações. Séries de retornos financeiros, por sua vez, são leptocúrticas, ou seja, possuem caudas mais pesadas do que a distribuição normal, o que implica uma maior probabilidade de ocorrência de eventos extremos (raros). Adicionalmente, a distribuição de retornos financeiros frequentemente exibe assimetria (*skewness*), tipicamente à esquerda (valores negativos). Embora os retornos em si geralmente não apresentem autocorrelação linear, seus quadrados são correlacionados, o que justifica a aplicação de modelos de variância condicional.

Em finanças, a volatilidade é definida como a variância ou desvio padrão de um ativo ou portfólio. Existem diversos modelos que modelam a volatilidade, como os modelos GARCH (*Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity*), propostos por Bollerslev (1986). Essa classe de modelos permite modelar variâncias que mudam com o tempo, denominadas “condicionais ao tempo”. Esses modelos são caracterizados por sua natureza *autorregressiva*, na qual a variância condicional corrente depende dos quadrados dos resíduos passados (termos *ARCH*) e das próprias variâncias condicionais passadas (termos GARCH).

Dentro de um portfólio com diversos ativos, faz-se necessária uma extensão multivariada para a modelagem de volatilidade, que considere a correlação entre esses ativos. Tais correlações são cruciais para a definição dos pesos em um portfólio otimizado. Modelos de heterocedasticidade condicional multivariada têm como objetivo modelar a matriz de covariância condicional de múltiplas séries temporais, estendendo a estrutura do GARCH univariado para capturar as dinâmicas complexas da volatilidade e da correlação

entre várias variáveis.

Algumas extensões multivariadas dos modelos GARCH incluem a *Constant Conditional Correlation* (CCC-GARCH), proposta por Bollerslev (1990), que considera a correlação dos ativos invariante no tempo. Contudo, essa suposição não se mostra realista, o que levou Engle (2002) a propor os modelos *Dynamic Conditional Correlation* (DCC-GARCH), que assumem correlação dinâmica ao longo do tempo. Outras extensões incluem os modelos *VEC*, proposto por Engle e Granger (1987), e *BEKK*, proposto por Engle e Kroner (1995), entre outros. Entretanto, o presente trabalho se focará exclusivamente no modelo DCC-GARCH.

Este trabalho está organizado da seguinte forma: O Capítulo 2 apresenta o referencial teórico, abrangendo conceitos fundamentais de séries temporais, características de dados financeiros, modelagem de volatilidade e a Teoria Moderna de Portfólio. O Capítulo 3 descreve a metodologia, incluindo os dados utilizados, o delineamento do estudo e as técnicas empregadas. O Capítulo 4 apresenta os resultados obtidos. Por fim, o Capítulo 5 conclui o trabalho, resumizando as principais descobertas e sugerindo direções para pesquisas futuras.

2 Referencial Teórico

O objetivo deste Capítulo é apresentar o referencial teórico utilizado na elaboração deste trabalho, incluindo uma breve apresentação de séries temporais, as características dos dados financeiros, modelos de volatilidade e finalizando com a Teoria Moderna de Portfólio (MPT).

2.1 Séries Temporais

Uma série temporal é uma sequência de observações coletadas sequencialmente ao longo do tempo. Diversos exemplos podem ser citados, como a quantidade de itens vendidos por dia no mês, o volume diário de precipitação, o preço de fechamento de ações, entre outros. Séries temporais não estão restritas a uma única área da ciência e estão presentes em diversas áreas do conhecimento.

Para fornecer um *framework* estatístico que descreva os elementos de uma série temporal de forma mais adequada, os dados são representados como uma coleção de variáveis aleatórias indexadas de acordo com a ordem em que são obtidos no tempo. Por exemplo, se coletarmos valores diários do preço de um ativo, podemos considerar a série temporal como uma sequência de variáveis aleatórias $x_1, x_2, x_3, \dots$, em que x_1 denota o preço do ativo no dia 1, x_2 o preço do ativo no dia 2, x_3 o preço do ativo no dia 3 e assim por diante.

2.2 Características de Dados Financeiros

Segundo Morettin (2011), não haveria diferenças entre a análise de séries financeiras e séries que ocorrem em outras áreas. De fato, a maioria das técnicas de séries financeiras são aplicáveis em diversas áreas. Contudo, existem algumas características presentes em séries de ativos financeiros que merecem destaque, sendo elas:

- ‘*Volatility clustering*’ - existem períodos de alta e baixa volatilidade. Os retornos absolutos elevados tendem a ser seguidos por retornos absolutos elevados, e os retornos absolutos pequenos tendem a ser seguidos por retornos absolutos pequenos.
- Efeito de leptocurtose - a distribuição dos retornos apresenta caudas muito mais pesadas do que a distribuição normal assume (ou seja, a probabilidade de eventos raros é muito maior).

- Efeito alavancagem - a volatilidade tende a ser maior em quedas de preço do que em altas de preço, mesmo quando a magnitude de ambos é idêntica. Isso representa a influência assimétrica das informações negativas e positivas no nível futuro de volatilidade.
- Assimetria - a distribuição dos retornos apresenta algum grau de assimetria.

Para levar em conta essas características, é necessário recorrer a modelos ditos heteroscedásticos condicionais. Nestes modelos, a variância (volatilidade) de um retorno em um dado instante de tempo depende de retornos passados, de modo que se define uma variância condicional, que, não sendo constante, é diferente da variância global (incondicional) da série observada.

Outra característica marcante de séries financeiras é que elas são, em geral, não serialmente correlacionadas, mas dependentes. Deste modo, modelos lineares como aqueles pertencentes à família dos modelos ARMA podem não ser apropriados para descrever tais séries. Portanto, modelos da família ARCH ou modelos de volatilidade estocástica são mais adequados.

2.2.1 Retornos

Na sessão anterior, foi mencionado no contexto das séries financeiras; portanto, iremos definir agora o que são e discutir suas características.

Segundo Morettin (2011), retorno(R_t) é a variação relativa de preços de um ativo, descrito na forma:

$$R_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} = \frac{\Delta P_t}{P_{t-1}}$$

em que P_t é o preço do ativo no instante t e a variação de preços entre os instantes $t - 1$ é dada por ΔP_t , R_t é também chamado de taxa de retorno.

Denotando $p_t = \log P_t$ definimos o log-retorno como:

$$X_t = \log \frac{P_t}{P_{t-1}} = \log(1 + R_t) = p_t - p_{t-1}$$

Esta definição é a mais comumente utilizada, e muitas vezes, r_t será chamado simplesmente de retorno. “Na prática, é preferível trabalhar com retornos, que são livres de escala, do que com preços, pois os primeiros têm propriedades estatísticas mais interessantes (como estacionariedade e ergodicidade) (MORETTIN, 2011).

Para ilustrar as características mencionadas, a Figura 1 apresenta a série de fechamento para as ações do Banco do Brasil, Vale e Petrobras, desde janeiro de 2000 até janeiro de 2025; já a Figura 2 traz a série de retornos desses ativos para o mesmo período.



Figura 1: Valores de fechamento para BB, Vale e Petrobras

Como podemos observar na Figura 1, temos períodos de baixas e altas nos preços. Dependendo do período, notam-se tendências bem diferentes. Podemos identificar a não estacionariedade também, já que a média e a variância mudam ao longo do tempo.

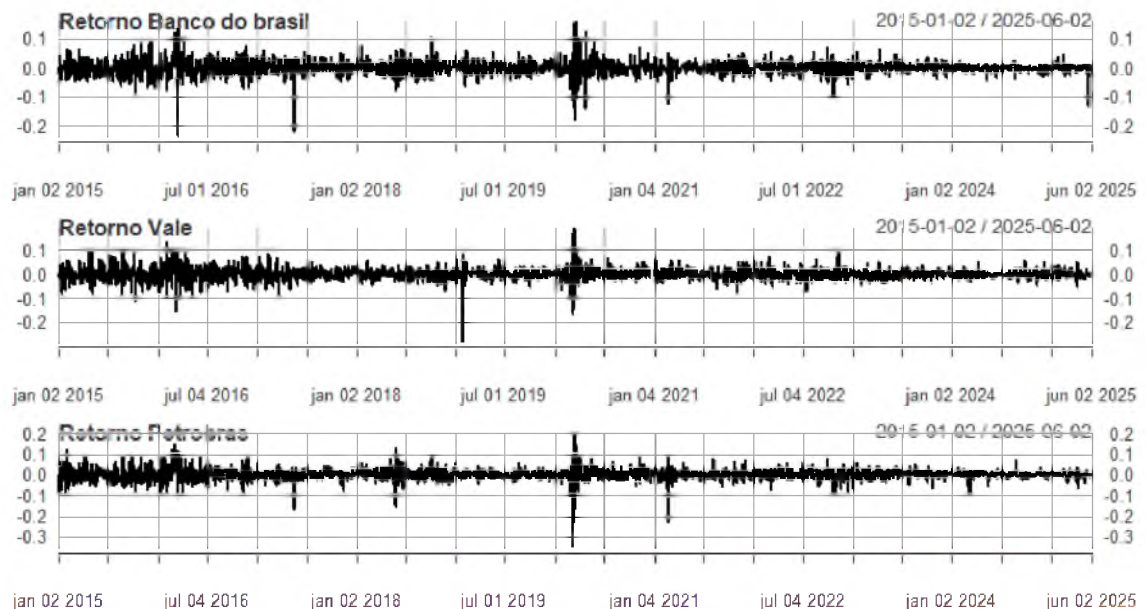


Figura 2: Retornos para Banco do Brasil, Vale e Petrobras

Já na Figura 2, conseguimos perceber os agrupamentos de volatilidade que ocorrem em alguns períodos. Também podemos observar a característica de heterocedasticidade.

dade, já que a variabilidade dos retornos não é constante ao longo do tempo.

Outra característica importante que pode ser abordada para os retornos é a sua autocorrelação. A Figura 3 mostra o gráfico ACF para os retornos da Vale e sugere que os retornos possuem pouca correlação serial.

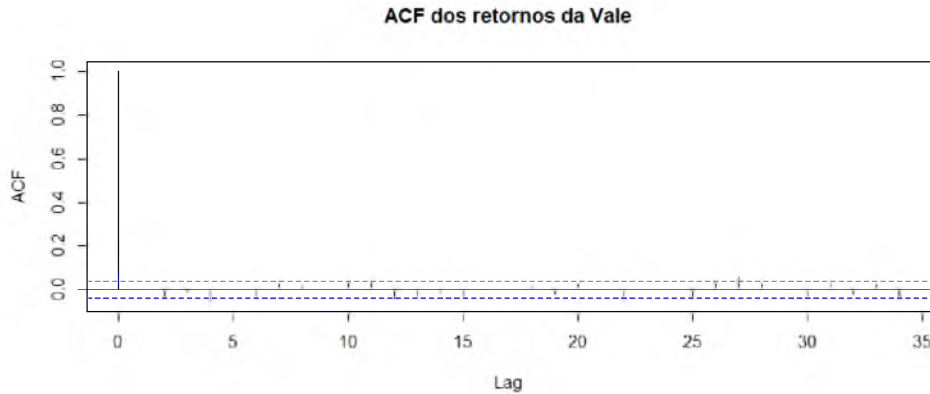


Figura 3: ACF dos Retornos da Vale

Contudo, os agrupamentos de volatilidade observados na Figura 2 fornecem pistas de que os dados não são totalmente independentes; caso contrário, a variância seria constante no tempo. Então, mesmo que os valores dos retornos não sejam correlacionados linearmente, ainda existe uma estrutura de dependência dentro dos dados, já que correlação linear é apenas uma medida de dependência. Logo, ordens maiores de dependência serial podem ser exploradas, como, por exemplo, os retornos ao quadrado, visto que, se os retornos fossem totalmente independentes, uma transformação não linear como essa preservaria a independência dos dados.

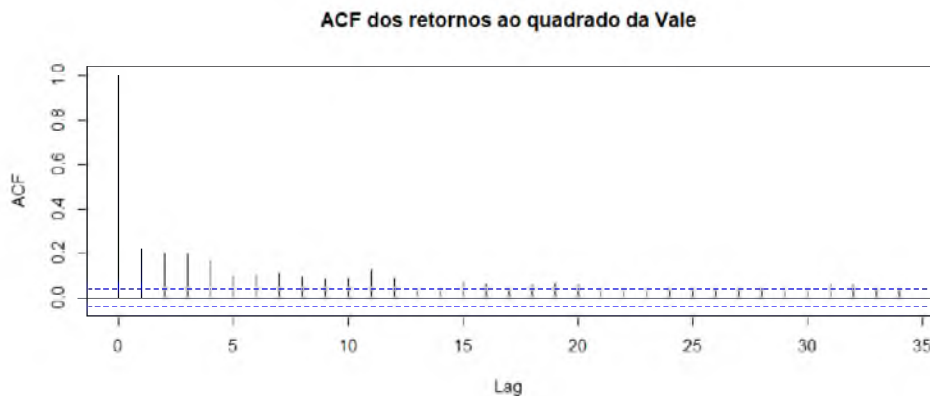


Figura 4: ACF dos Retornos ao quadrado da Vale

Na Figura 4 está o gráfico ACF para os retornos ao quadrado. Podemos ver que

existe uma estrutura de correlação serial para esta transformação, ou seja, uma estrutura de dependência de maior ordem, o que vai de encontro com a literatura de que retornos ao quadrado são geralmente fortemente correlacionados, o que abre espaço para aplicações dos modelos de heterocedasticidade condicional.

2.3 Volatilidade

A volatilidade é um dos principais conceitos na análise de séries temporais financeiras e desempenha um papel fundamental na precificação de ativos, gestão de risco e tomada de decisões econômicas. De modo geral, a volatilidade representa a intensidade das flutuações dos preços ao longo do tempo, sendo frequentemente utilizada como uma medida do risco associado a um determinado ativo ou mercado.

Dada a complexidade da volatilidade nos mercados financeiros, diversas abordagens foram desenvolvidas para modelá-la de forma eficiente. Modelos econométricos como os modelos *Autoregressive Conditional Heteroscedasticity* (ARCH), introduzidos por Engle (1982), e sua generalização, os Modelos *Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity* (GARCH), sugeridos por Bollerslev (1986) e suas extensões, permitem capturar a natureza dinâmica da volatilidade e prever seus padrões futuros. Essas metodologias são amplamente utilizadas por acadêmicos, analistas financeiros e gestores de risco para entender a dinâmica da incerteza e suas implicações nas decisões financeiras.

Na próxima seção, serão apresentados os Modelos *Autoregressive Conditional Heteroskedasticity* (ARCH), sua generalização *Generalised Autoregressive Conditionally Heteroskedastic* (GARCH) e sua extensão multivariada *Dynamic Conditional Correlation - Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity* (DCC-GARCH), proposta por Engle (2002), que são a base utilizada para a modelagem de volatilidade neste trabalho. Modelos de heteroscedasticidade condicional são extensos na literatura e a apresentação formal dessa área não faz parte do escopo deste documento; portanto, uma cobertura mais completa pode ser encontrada em artigos como Bollerslev, Chou e Kroner (1992), Bollerslev, Engle e Nelson (1994), Li et al. (2018), e em livros dedicados à modelagem de volatilidade como Francq e Zakoian (2019) e Xekalaki e Degiannakis (2010).

2.3.1 *Autoregressive Conditionally Heteroskedastic* (ARCH)

Engle (1982) propôs o modelo ARCH como uma forma de modelar a variância condicional de uma série temporal, permitindo que esta varie ao longo do tempo em

resposta a choques passados. A ideia central é que, embora a média condicional da série seja constante (ou modelada por um processo AR), a variância condicional muda com o tempo. Ou seja, mesmo o retorno sendo não correlacionado serialmente, a volatilidade (variância condicional) depende de retornos passados por meio de uma função não linear, conforme comentado na seção anterior deste documento.

Como o objetivo é modelar a volatilidade de um retorno, usaremos a notação estabelecida na seção anterior. Considere, então, uma série de retornos

$$X_t = \log \frac{P_t}{P_{t-1}} = \log(1 + R_t) = p_t - p_{t-1}$$

e sejam

$$\mu_t = E(r_t | \mathcal{F}_{\sqcup-\infty}), \quad h_t = \text{Var}(r_t | \mathcal{F}_{\sqcup-\infty}),$$

a média e variância condicional de r_t , em que $\mathcal{F}_{\sqcup}$ é a informação até o instante t , que consideraremos ser $(r_t, r_{t-1}, \dots, r_1)$.

Um modelo ARCH(r) é definido por

$$\begin{aligned} X_t &= \sqrt{h_t} \epsilon_t \\ h_t &= \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2 + \dots + \alpha_r X_{t-r}^2 \end{aligned}$$

em que ϵ_t i.i.d $(0,1)$, $\alpha_0 > 0, \alpha_i \geq 0, i > 0$.

A variância condicional dos retornos depende de r defasagens dos retornos ao quadrado, é comum supormos que $\epsilon_t \sim \mathcal{N}(0,1)$ ou $\epsilon_t \sim \sqcup_\nu$, mas é possível utilizar outras distribuições que possam descrever melhor as características particulares de séries financeiras. Esse modelo permite a modelagem de variâncias que mudam com o tempo, infelizmente existem algumas limitações e pressupostos, quando se trata de séries financeiras o valor de r tende a ser grande e os coeficientes α_i devem satisfazer certas condições que dependem do tipo de imposição que colocarmos sobre o processo X_t , como por exemplo, não negatividade que fará com que a variância seja positiva e a restrição da aditividade dos coeficientes $\sum_{i=1}^r \alpha_i < 1$ que assegura que X_t tem covariância estacionária com variância incondicional finita σ_X^2 .

Algumas propriedades dos modelos ARCH

Para estabelecer tais propriedades, vamos analisar o modelo ARCH(1) no qual definimos

da seguinte forma

$$\begin{aligned} X_t &= \sqrt{h_t} \epsilon_t, \\ h_t &= \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2 \end{aligned}$$

com $\alpha_0 > 0, \alpha_1 \geq 0$ calcularemos a média e variância incondicionais da série

$$\begin{aligned} E(X_t) &= E[E(X_t | \mathcal{F}_{t-\infty})] = 0 \\ Var(X_t) &= E(X_t^2) = E[E(X_t^2 | \mathcal{F}_{t-\infty})] \\ &= \alpha_0 + \alpha_1 E(X_{t-1}^2) \end{aligned}$$

Se o processo $[X_t]$ for estacionário de segunda ordem, então, para todo t , $E(X_t^2) = E(X_{t-1}^2) = Var(X_t)$, logo a variância incondicional existe e será dada pela forma

$$Var(X_t) = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1}$$

como $Var(X_t) > 0$, temos $0 \leq \alpha_1 < 1$

A variância condicional de X_t será maior que a variância incondicional quando X_{t-1}^2 for maior que a variância incondicional σ_X^2 , a demonstração pode ser encontrada em Wilson (2016, pag. 363)

Estimação

Os estimadores dos parâmetros do modelo são obtidos pelo método de máxima verossimilhança condicional, a função de verossimilhança é dada por

$$L(x_1, \dots, x_T | \boldsymbol{\alpha}) = f(x_T | \mathcal{F}_{T-1}) f(x_{T-1} | \mathcal{F}_{T-2}) \dots f(x_{r+1} | \mathcal{F}_r) f(x_1, \dots, x_r | \boldsymbol{\alpha})$$

e supondo normalidade dos ϵ_t podemos escrever

$$L(x_1, \dots, x_T | \boldsymbol{\alpha}) = \prod_{t=r+1}^T (\sigma_t \sqrt{2\pi})^{-1} \exp \left\{ \frac{-x_t^2}{2\sigma_t^2} \right\} f(x_1, \dots, x_r | \boldsymbol{\alpha})$$

Para T grande, $f(x_1, \dots, x_r | \boldsymbol{\alpha})$ pode ser desprezado. Veja Engle (1982) para detalhes. Então precisamos maximizar a função de verossimilhança condicional abaixo

$$L(x_{r+1}, \dots, x_T | \boldsymbol{\alpha}, x_1, \dots, x_r) = \prod_{t=r+1}^T (\sigma_t \sqrt{2\pi})^{-1} \exp \left[\frac{-x_t^2}{2\sigma_t^2} \right]$$

em que a volatilidade $\sigma_t^2 = h_t$ é obtida recursivamente, sendo α o conjunto de parâmetros do modelo e $f(x_T|\mathcal{F}_{T-1})$ a densidade condicional de x_t dado o histórico de dados até o tempo $t-1$. É possível assumir uma distribuição t de Student padronizada para $\epsilon_t \sim t_\nu$ (t de Student(0,1) com ν graus de liberdade) e a verossimilhança poderá ser escrita explicitamente também, em ambos os casos é necessário algum procedimento de otimização numérica para a resolução, a demonstração completa pode ser encontrada em Morettin (2011, pag. 154).

2.3.2 Generalised Autoregressive Conditionally Heteroskedastic (GARCH)

Introduzido por Bollerslev (1986), em seu artigo, *Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity*, o modelo GARCH é uma generalização natural do modelo ARCH (ENGLE, 1982), que permite que variâncias condicionais passadas sejam usadas como um parâmetro de flexibilidade. Como o próprio Bollerslev (1986) afirma, a estrutura de uma generalização GARCH lembra muito a extensão ARMA para o processo AR, o que permite uma descrição muito mais parcimoniosa do processo em várias situações.

Nesses problemas estamos preocupados em modelar o retorno de uma série, normalmente para séries financeiras o retorno tem uma média condicional $\mu_t = 0$, mas não tem uma variância condicional constante. Como dito anteriormente, o modelo GARCH é um modelo ‘autoregressivo’ logo, a volatilidade h_t irá depender dos valores dos retornos passados e das variâncias condicionais passadas. Dessa forma, um modelo GARCH(p,q) é definido por

$$X_t = \sqrt{h_t}\epsilon_t$$

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i X_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j h_{t-j}$$

sendo

$$p \geq 0, \quad q > 0$$

$$\alpha_0 > 0, \quad \alpha_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, p$$

$$\beta_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, q$$

em que ϵ_t é independente e identicamente distribuído (i.i.d), α e β são os coeficientes do modelo e h_t é a variância condicional dos retornos (volatilidade). Para $q = 0$, o processo se reduz ao processo ARCH(p), e para $p = q = 0$, ϵ_t é simplesmente um ruído branco.

Coeficientes positivos dão uma condição suficiente, mas não necessária, para que $h_t > 0$. Como no caso de modelos ARCH, usualmente supomos que os ϵ_t são normais ou

seguem alguma distribuição com cauda pesada e centrada na média, como a distribuição t de Student.

Como Bollerslev (1986) diz em seu artigo, “No processo ARCH(p), a variância condicional é especificada como uma função linear apenas das variâncias amostrais passadas, enquanto o processo GARCH(p,q) permite que variâncias condicionais defasadas também entrem na equação. Isso corresponde a algum tipo de mecanismo de aprendizado adaptativo”.

Por definição, os resíduos do processo X_t^2 se dão por $\nu_t = X_t^2 - h_t$. Substituindo na equação h_t do processo GARCH, temos a representação

$$X_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^r (\alpha_i + \beta_i) X_{t-i}^2 + \nu_t - \sum_{j=1}^q \beta_j \nu_{t-j}$$

em que $r = \max(q, p)$. Essa equação tem uma estrutura linear de um modelo ARMA, permitindo uma facilidade computacional dos preditores lineares, ou seja, um modelo ARMA(r,q) para X_t^2 , mas ν_t não é, em geral, um processo i.i.d.

Consideração 2.1 Foi estabelecido neste documento que uma das características de séries financeiras é a de que retornos ao quadrado são autocorrelacionados, enquanto retornos não. A representação acima mostra que processos GARCH conseguem captar esse fato empírico. Se o quarto momento de X_t é finito, a sequência de ordem-h das autocorrelações de X_t^2 é a solução de uma equação recursiva que é uma característica de um modelo ARMA. Mais a respeito pode ser encontrado em Francq e Zakoian (2019).

Consideração 2.2 temos que

$$E(\nu_t) = E(X_t^2 - h_t) = E(h_t \epsilon_t^2 - h_t) = E(h_t)(E(\epsilon_t^2) - 1) = 0$$

para todo t

$$E(\nu | \mathcal{F}_{1-\infty}) = E(X_t^2 | \mathcal{F}_{1-\infty}) - E(h_t | \mathcal{F}_{1-\infty}) = h_t - h_t = 0$$

Segue, em particular, que

$$E(X_t^2) = \frac{\alpha_0}{1 - \sum_{i=1}^r (\alpha_i + \beta_i)}$$

A longo prazo, a volatilidade convergirá para esta média.

Consideração 2.3 Ao contrário dos modelos padrões de séries temporais (ARMA),

a estrutura GARCH permite que a magnitude do erro ϵ_t seja uma função dos seus próprios valores passados. Logo, períodos de alta volatilidade (correspondentes a valores altos de ϵ_{t-1}^2) serão seguidos por períodos nos quais as flutuações possuem uma amplitude menor.

Estimação

Os coeficientes GARCH são estimados pela maximização numérica da verossimilhança de $\tilde{X}_{p+1}, \dots, \tilde{X}_n$ condicional nos valores conhecidos $\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_r$ e com valores iguais a 0 para cada $\tilde{X}_t, t \leq 0$ e assumindo $\hat{\sigma}^2$ para cada $h_t, t \leq 0$, em que $\hat{\sigma}^2$ é a variância amostral de $(\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_n)$, em outras palavras, assumindo distribuição Normal para ϵ_t , maximizamos a log-verossimilhança, condicional às primeiras r observações, dada pela forma:

$$l(x_{r+1}, \dots, x_T | \alpha, \beta, x_1, \dots, x_r) \propto -\frac{1}{2} \sum_{t=r+1}^T \ln(h_t) - \frac{1}{2} \sum_{t=r+1}^T \frac{x_t^2}{h_t} \quad (2.3.1)$$

Note que a otimização é restringida em $\hat{\alpha}_1 + \dots + \hat{\alpha}_p + \dots + \hat{\beta}_1 + \dots + \hat{\beta}_q < 1$. Essa condição é necessária e suficiente para garantir a existência da variância incondicional.

2.3.3 O processo GARCH(1,1)

O mais simples e amplamente utilizado (inclusive na elaboração deste trabalho) dos processos GARCH é o de ordem (1,1), dado pela notação GARCH(1,1). Quando temos $p = q = 1$, o modelo tem a forma:

$$X_t = \sqrt{h_t} \epsilon_t \quad (2.3.2)$$

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1} \quad (2.3.3)$$

em que $\alpha_0 \geq 0$, $\alpha_1 \geq 0$, $\beta_1 \geq 0$ e ϵ_t i.i.d.(0,1)

Teorema 2.1 (estacionariedade estrita do processo GARCH(1,1)) se

$$E [\log(\alpha_1 \epsilon_t^2 + \beta)] < 0, \quad (2.3.4)$$

temos um processo $GARCH(1,1)$ estritamente estacionário. Foi abordado neste trabalho sobre a restrição $\alpha + \beta < 1$ que garante variância incondicional finita. Em um contexto GARCH(1,1), o processo pode ser classificado como fracamente estacionário, pois implica $E[X_t^2] < \infty$. No entanto, a estacionariedade estrita é uma condição mais geral que a estacionariedade fraca e pode ser satisfeita mesmo quando $\alpha + \beta \geq 1$, desde que a Equação

2.3.4 seja satisfeita. Ou seja, a estacionariedade estrita garante que o processo não explode assintoticamente, mesmo que os momentos de segunda ordem não existam.

Estacionariedade fraca implica variância incondicional finita (pois exige $Var(X_t) < \infty$), mas o inverso nem sempre é verdadeiro. Um processo pode ter variância finita sem ser estacionário (por exemplo, um processo com média não constante, mas variância constante).

Em geral, para um processo ser fracamente estacionário, é necessário que a variância incondicional seja finita, mas a existência da variância sozinha não garante todas as condições da estacionariedade fraca (como invariância temporal da média e autocovariâncias). No entanto, no contexto GARCH(1,1), se $\alpha + \beta < 1$ o processo é tanto fracamente estacionário quanto possui variância incondicional finita.

Para uma discussão detalhada sobre essas condições e suas implicações, assim como a prova completa do teorema 2.1, podem ser encontradas em Francq e Zakoian (2019, pag. 24).

Teorema 2.2 (estacionariedade de segunda ordem do processo GARCH(1,1))

Seja $\alpha > 0$. Então:

- Se $\alpha + \beta \geq 1$, não existe uma solução não antecipativa (em que $\sqrt{h_t}$ depende apenas de $\epsilon_{t-1}, \epsilon_{t-2}, \dots$) e estacionária de segunda ordem para o modelo GARCH(1,1).
- O processo X_t admite uma solução estacionária não-antecipativa com $E[X_t] = 0$ e $Var(X_t) = E[X_t^2] < \infty$, se e somente se, $\alpha + \beta < 1$. Nesse caso a variância incondicional é constante e dada por:

$$Var(X_t) = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha - \beta}$$

e o processo X_t é fracamente estacionário

- Além disso, não existe nenhuma outra solução que seja ao mesmo tempo não antecipativa e estacionária de segunda ordem.

A prova completa do teorema 2.2 pode ser encontrada em Francq e Zakoian (2019) ou Bollerslev (1986).

A diferença entre estacionariedade estrita e estacionariedade de segunda ordem é que para estacionariedade estrita precisamos apenas que $E[\log(\alpha_1 \epsilon_t^2 + \beta)] < 0$. Pode existir mesmo que $\alpha + \beta \geq 1$ mas a variância condicional é infinita. Já para estacionariedade de segunda ordem é exigido $\alpha + \beta < 1$ garantindo variância finita e estacionariedade

fraca.

O teorema 2.1 mostra que a condição $\alpha + \beta < 1$ é necessária e suficiente para existência de uma solução estacionária não-antecipativa com variância finita e estacionariedade fraca. Essa condição é central para a aplicação prática do GARCH(1,1) em finanças, pois garante que as previsões de volatilidade não divergem no longo prazo.

A extensão para o caso geral das características citadas aqui para o processo GARCH(1,1) podem ser encontradas em Francq e Zakoian (2019).

A Figura 5 ilustra a estimativa da volatilidade por um modelo GARCH(1,1) sobre os retornos dos preços de fechamento das ações do Banco do Brasil de janeiro de 2000 até janeiro de 2025.

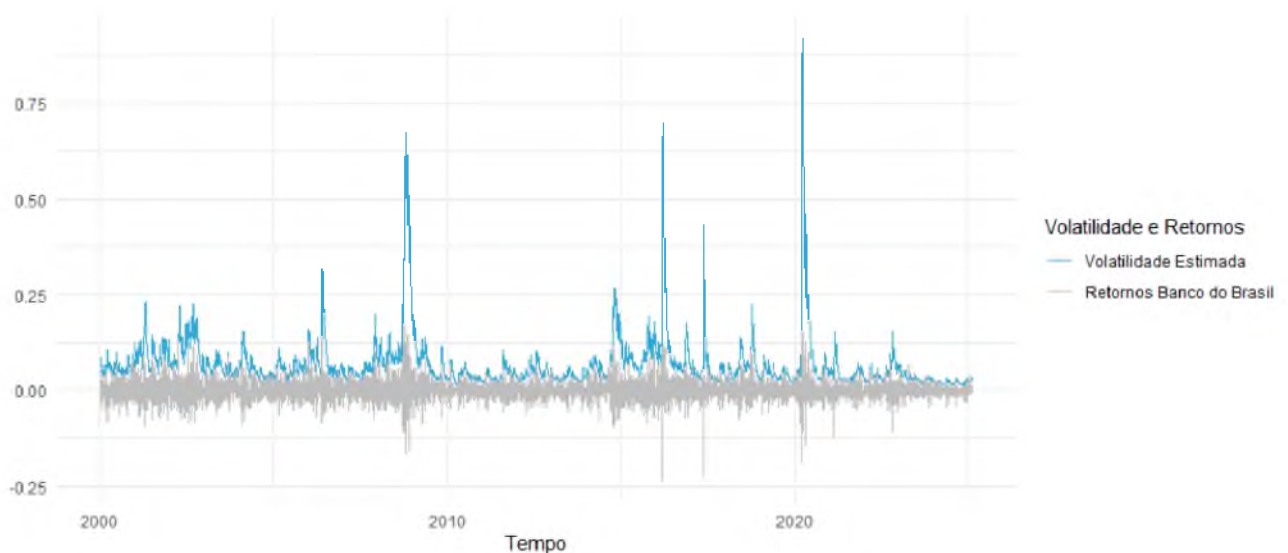


Figura 5: Estimativa da Volatilidade sobre os Retornos do BB.

Como podemos observar pela Figura 5, a estimativa consegue captar bem a flutuação da volatilidade dos retornos juntamente com a característica conhecida como *Volatility clusters*.

Como dito em Morettin (2011) “a identificação da ordem de um modelo GARCH a ser ajustado a uma série real usualmente é difícil. Recomenda-se o uso de modelos de ordem baixa, como (1,1), (1,2), (2,1) ou (2,2).” A escolha do modelo pode ser feita com base em alguma métrica de critério de seleção como AIC ou BIC.

2.3.4 Extensão Multivariada

O modelo GARCH tradicional foi desenvolvido para séries temporais univariadas. No entanto, em contextos financeiros, é comum a necessidade de modelar vários ativos simultaneamente, considerando não apenas a volatilidade de cada um individualmente, mas também as correlações dinâmicas entre eles. Isso motivou o desenvolvimento de modelos GARCH multivariados.

Assim como no caso univariado, podemos definir o primeiro e segundo momento condicional para um modelo MGARCH (GARCH Multivariado) de ordem $\mathbb{R}^m$, ou seja, a esperança condicional e a variância condicional, digamos que temos um processo MGARCH (ϵ_t) , sendo $\epsilon_t = (\epsilon_{1t}, \dots, \epsilon_{mt})$ então para todo $t \in \mathbb{Z}$ temos,

$$E(\epsilon_t \mid \epsilon_u, u < t) = 0, \quad Var(\epsilon_t \mid \epsilon_u, u < t) = E(\epsilon_t \epsilon_t' \mid \epsilon_u, u < t) = \mathbf{H}_t \quad (2.3.5)$$

A extensão Multivariada do processo GARCH é baseada na equação com forma

$$\epsilon_t = \mathbf{H}_t^{1/2} \mathbf{z}_t \quad (2.3.6)$$

em que, ϵ_t é o vetor de resíduos das séries de retornos, $\mathbf{z}_t$ é uma sequência de ordem $\mathbb{R}^m$ com média zero e matriz identidade para covariância na forma $\mathbf{z}_t \sim N(0, I_m)$ ou alguma distribuição centrada na média com cauda pesada como a t de student de forma geral $\mathbf{z}_t \sim \text{i.i.d.}(0, I_m)$, e $\mathbf{H}_t$ é a matriz de covariância condicional de ϵ_t sendo simétrica e positiva definida

2.3.5 O Modelo DCC-GARCH

Proposto por Engle (2002), o modelo DCC-GARCH é uma versão generalizada do modelo CCC-GARCH proposto por Bollerslev (1990). Esse modelo pode ser visto como uma combinação não linear de modelos GARCH univariados, ou seja, permite que as correlações variem ao longo do tempo, enquanto as variâncias são modeladas separadamente por GARCHs univariados.

Como o próprio Engle (2002) afirma em seu trabalho, DCC - A Simple Class of Multivariate Garch Models, a alocação de ativos (pilar central deste documento) depende, geralmente, de um grande número de estimativas de correlações, já que construir um portfólio requer uma previsão da matriz de covariância dos retornos. Conjuntamente, o risco do portfólio requer a matriz de covariância de todos os ativos do portfólio; essas

funções requerem então a estimação de muitas matrizes de covariância. Ainda mais, ele aponta que na literatura econométrica existe um vasto trabalho em estimação de correlações com vários métodos MGARCH bastante complexos e utilizados por praticantes sofisticados.

Em Engle (2002), os modelos DCC-GARCH possuem a flexibilidade de modelos GARCH univariados, mas não a complexidade de modelos MGARCH convencionais. O processo é dividido em duas etapas: a primeira é a estimação de vários modelos GARCH univariados, e a segunda é a estimação da correlação. Isso faz com que os modelos DCC-GARCH tenham uma vantagem computacional sobre os modelos MGARCH no sentido de que o número de parâmetros a serem estimados no processo de correlação será independente do número de séries a serem correlacionadas, permitindo a estimação de um número alto de matrizes de correlação.

O modelo DCC-GARCH é definido da seguinte forma:

$$\mathbf{H}_t = D_t R_t D_t, \quad (2.3.7)$$

Em que, $D_t = \text{diag}(\sqrt{h_{1t}}, \dots, \sqrt{h_{kt}})$ é uma matriz diagonal com as volatilidades univariadas, h_{iit} pode ser qualquer modelo GARCH univariado, R_t é a matriz de correlações condicionais dinâmicas, no modelo CCC-GARCH essa matriz é constante sendo esse o maior diferencial para o modelo DCC-GARCH.

A matriz R_t é dada por:

$$R_t = \text{diag}(Q_t)^{-1/2} Q_t (\text{diag}(Q_t))^{-1/2} \quad (2.3.8)$$

Em que Q_t é uma sequência de matrizes de covariância, simétrica e positiva definida, dada pela forma:

$$Q_t = (1 - a - b)\bar{Q} + a\mathbf{z}_{t-1}\mathbf{z}_{t-1}' + bQ_{t-1} \quad (2.3.9)$$

Em que $\mathbf{z}_t$ são os resíduos padronizados, ou seja, $\epsilon_{it}/\sqrt{h_{iit}}$, e a e b são os parâmetros não negativos, com $a + b < 1$ garantindo estacionariedade.

Estimação

A estimação é realizada em dois estágios via *Máxima Verossimilhança* (MV):

Estágio 1: Estimação GARCH Univariado Para cada ativo i , estima-se um modelo GARCH(p,q) individual, obtendo:

- Parâmetros $\hat{\alpha}_{0i}$, $\hat{\alpha}_i$, $\hat{\beta}_i$,

- Volatilidades condicionais $\hat{h}_{i,t}$,
- Resíduos padronizados $\hat{\mathbf{z}}_{i,t} = \epsilon_{i,t}/\hat{h}_{i,t}$.

Estágio 2: Estimação dos Parâmetros DCC Maximiza-se a verossimilhança condicional dos resíduos padronizados $\hat{\mathbf{z}}_t$:

$$\log L(\alpha, \beta) = -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T (m \log(2\pi) + 2 \log |D_t| + \log |R_t| + \hat{\mathbf{z}}_t' R_t^{-1} \hat{\mathbf{z}}_t) . \quad (2.3.10)$$

sendo que:

- Os parâmetros a e b são comuns a todos os pares de ativos.
- A verossimilhança assume normalidade dos resíduos, mas pode ser adaptada para distribuições mais pesadas (ex.: t-Student).

Simulação

Com o objetivo de ilustrar o funcionamento do modelo DCC-GARCH, foi realizada uma simulação de duas séries temporais com correlação dinâmica. A primeira série foi gerada como um ruído branco padrão, enquanto a segunda foi construída a partir de uma dependência linear da primeira série, criando assim uma estrutura correlacionada.

Inicialmente, as séries individuais foram modeladas por meio de processos GARCH(1,1) univariados, conforme a estrutura proposta por Bollerslev (1986). Em seguida, foi aplicada a especificação multivariada DCC-GARCH, conforme o modelo proposto por Engle (2002), permitindo a estimação da matriz de correlações condicionais dinâmicas entre os ativos simulados.

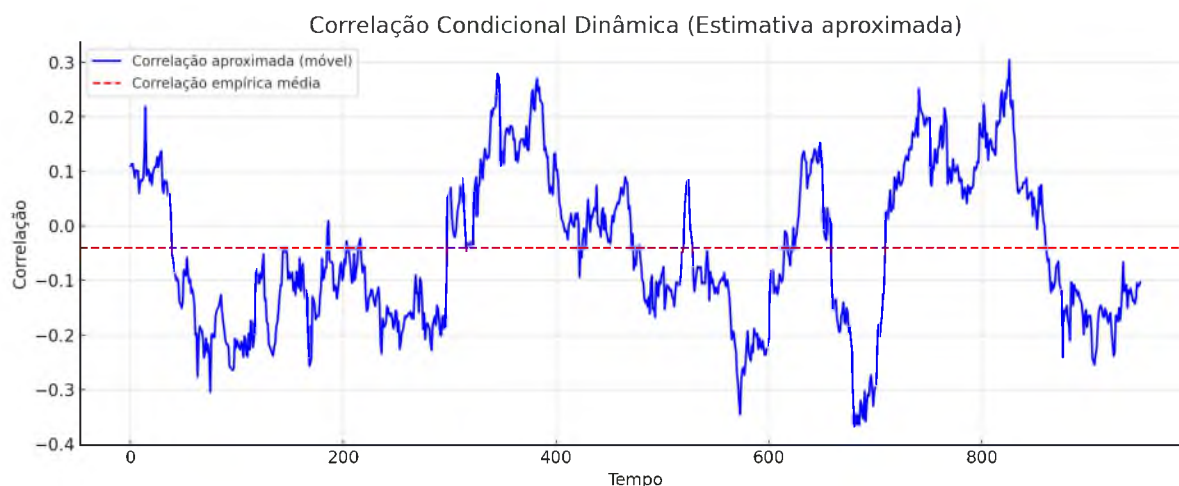


Figura 6: Correlação Condicional dos ativos simulados

A Figura 6 mostra a evolução da correlação entre as duas séries simuladas ao longo do tempo. A linha azul representa a estimativa da correlação condicional dinâmica. A linha vermelha tracejada indica a correlação empírica média, que permanece constante ao longo do período.

Observa-se que a correlação dinâmica flutua significativamente ao longo do tempo, o que indica que a dependência entre os ativos simulados é instável e sujeita a variações. Esse comportamento é comum em séries financeiras reais, como retornos de ações ou taxas de câmbio, em que choques de mercado, eventos macroeconômicos ou mudanças estruturais afetam a interação entre os ativos.

Engle (2002) compara diversos métodos de estimação de correlação. Seus dados simulados foram descritos como dois modelos GARCH e seis funções de correlação diferentes, usando oito diferentes modelos para a estimação de correlação e utilizou três medidas de comparação diferentes. De forma geral e resumidamente, os modelos DCC-GARCH estão entre os melhores, senão o melhor.

2.4 Teoria de Formação de portfólio

A formação de portfólio é uma questão central para investidores que buscam equilibrar risco e retorno em suas alocações de ativos. Antes da contribuição seminal de Harry Markowitz em 1952, a formação de portfólio era baseada principalmente em princípios intuitivos e regras empíricas, sem um embasamento matemático rigoroso.

Uma das ideias mais difundidas na época era a regra do “não colocar todos os ovos na mesma cesta”, uma noção básica de diversificação que sugeria distribuir investi-

mentos entre diferentes ativos para reduzir riscos. Muitos investidores seguiam a chamada estratégia de igualdade simples “1/N heuristic” (BENARTZI; THALER, 2001), na qual dividiam seus recursos igualmente entre os ativos disponíveis, sem uma avaliação quantitativa do risco envolvido.

Além disso, abordagens baseadas na análise fundamentalista, como descritas em *The Intelligent Investor* (GRAHAM, 1949), focavam na seleção de ações subvalorizadas, mas sem um modelo formal que equilibrasse risco e retorno. Algumas tentativas de entender a relação entre risco e retorno surgiram antes de Markowitz, mas eram limitadas. Abordagens como *The Theory of Investment Value* (WILLIAMS, 1938), *The Theory of Interest* (FISHER, 1930) e o estudo empírico da relação entre diversificação e retornos de ações (3RD; JONES, 1937), também trouxeram contribuições importantes ao estudo do investimento.

Apesar dessas contribuições, ainda faltava um modelo matematicamente estruturado para analisar como diferentes ativos interagiam dentro de um portfólio. Foi nesse contexto que Markowitz (1952) apresentou sua Teoria Moderna do Portfólio (*Modern Portfolio Theory* - MPT), revolucionando a forma como os investidores passaram a compreender e gerenciar o risco e o retorno de suas carteiras.

2.4.1 O Modelo de Markowitz

Markowitz (1952), em seu artigo *Portfolio Selection*, propôs a teoria de seleção de portfólio que é conhecida na literatura como análise média-variância. Markowitz demonstrou que, ao combinar diferentes ativos em um portfólio, é possível reduzir o risco total sem sacrificar o retorno esperado. Isso ocorre porque os ativos podem reagir de maneira diferente às mesmas condições de mercado.

O modelo média-variância possui dois pilares centrais: o retorno esperado e a variância (ou desvio padrão) como medida de risco do ativo ou do portfólio. Investidores racionais buscam maximizar o retorno para um dado nível de risco ou minimizar o risco para um retorno desejado, ou seja, existe um *trade-off* entre retorno e risco. Geralmente, quanto maior o retorno esperado, maior será o risco.

O retorno esperado de um portfólio $E(R_p)$ com n ativos pode ser calculado como uma média ponderada dos retornos esperados dos ativos (MARKOWITZ, 1952):

$$E(R_p) = \sum_{i=1}^n w_i E(R_i)$$

e a variância do portfólio σ_p^2 é dada pela forma:

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^n w_i^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{t=1}^n \sum_{j>i}^n w_i w_j \sigma_i \sigma_j \rho_{ij}$$

em que w_i é o peso do ativo i (parte relativa do recurso investido) dentro do portfólio, $E(R_i)$ é o retorno esperado do ativo i , σ_i^2 é a variância do ativo i , σ_{ij} é a covariância entre os ativos i e j e ρ_{ij} é a correlação dos ativos i e j .

A análise clássica do modelo média-variância de Markowitz possui duas metodologias principais: a minimização de risco e a maximização do retorno esperado. O objetivo então é encontrar pesos w_i que minimizam o risco do portfólio σ_p^2 , garantindo um retorno esperado $E(R_p)$ específico. Isso é um problema de otimização quadrática, resolvido pelo método numérico de programação quadrática, formulado como:

$$\min_w \sigma_p^2 = \sum_{i=1}^n w_i^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{t=1}^n \sum_{j>i}^n w_i w_j \sigma_i \sigma_j \rho_{ij}$$

tendo a restrição:

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1$$

Os resultados nos fornecem os pesos otimizados para os ativos, ou seja, a melhor forma de distribuir nosso recurso para minimizar o risco dado um retorno esperado.

Esse modelo de otimização permite encontrar a melhor combinação de ativos, resultando no que Markowitz chamou de “fronteira eficiente”, que é definida como sendo o conjunto de portfólios que oferecem o maior retorno esperado para cada nível de risco mínimo possível. A Figura 7 ilustra a fronteira eficiente, sendo os ativos do portfólio os dados utilizados neste trabalho.

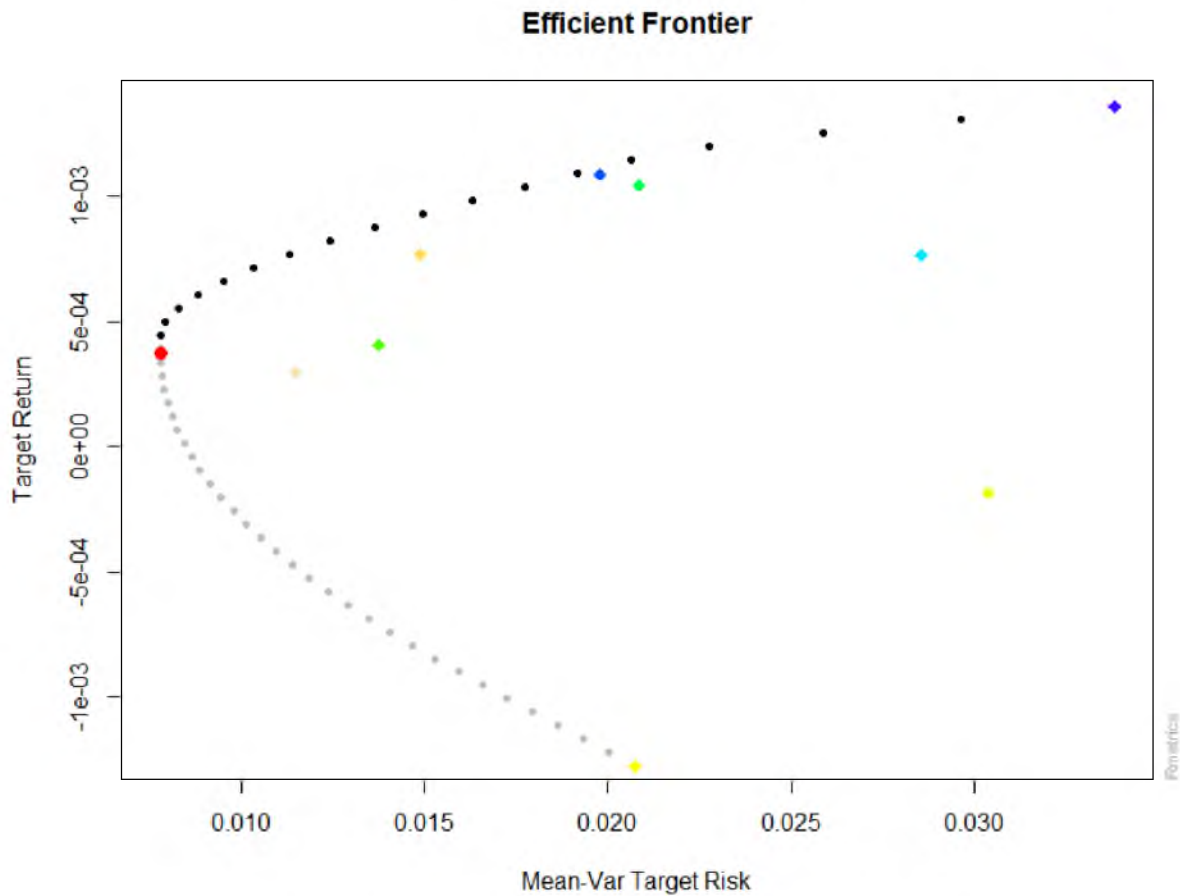


Figura 7: Fronteira Eficiente utilizando os dados deste trabalho

O ponto vermelho representa o portfólio com menor risco possível, os pontos coloridos são os próprios ativos que formam o portfólio, e os pontos pretos delimitam a fronteira eficiente. Portfólios abaixo da fronteira são subótimos, pois existe uma forma melhor de combinar os ativos. Investidores avessos ao risco escolherão um ponto mais à esquerda (menor risco), enquanto investidores tolerantes ao risco podem buscar retornos maiores aceitando mais risco.

3 Metodologia

Este trabalho investiga estratégias de alocação ótima de ativos para o mercado brasileiro, combinando modelos de volatilidade condicional dinâmica (DCC-GARCH) com técnicas de otimização de portfólio. O objetivo principal é avaliar se a incorporação de correlações dinâmicas entre ativos melhora o desempenho de carteiras quando comparada a abordagens tradicionais, como o modelo de média-variância de Markowitz.

O estudo foca em três aspectos principais: a dinâmica temporal das correlações entre ativos brasileiros, o impacto da volatilidade condicional na construção de portfólios e a performance comparativa de diferentes estratégias de otimização. Ao final deste trabalho, temos o objetivo de responder à pergunta principal: portfólios construídos com matrizes de covariância dinâmicas (DCC-GARCH) apresentam melhor desempenho do que aqueles baseados em covariâncias históricas?

De forma geral, a metodologia deste trabalho segue um fluxo de quatro estágios, que serão apresentados nesta seção, sendo eles:

- **Coleta e Preparação de Dados:** Seleção de ativos e cálculo de retornos.
- **Modelagem de Volatilidade:** Estimação dos modelos DCC-GARCH.
- **Otimização de Portfólio:** Implementação do modelo clássico de média-variância, adaptação com matrizes de covariância dinâmicas.
- **Avaliação e Comparação de Desempenho:** Métricas e benchmarks utilizados.

3.1 Conjunto de Dados

A fonte de dados utilizada neste estudo é o *Yahoo Finance*, obtidos através do pacote `quantmod` no ambiente *R*. Dados diários de preços ajustados para 9 ativos brasileiros foram coletados desde 1º de janeiro de 2015 até 3 de junho de 2025. A justificativa para o período utilizado se baseia em alguns motivos: **suficiência estatística:** são necessários vários anos para uma modelagem de volatilidade adequada; **representatividade econômica:** o período abrange diferentes regimes de mercado, como recessão (2015-2016), recuperação (2017-2019), pandemia (2020) e pós-pandemia (2021-2025), permitindo analisar o comportamento dos ativos em diversas condições.

Neste estudo, foram utilizadas as ações brasileiras mais negociadas da B3 em 2015: Petrobras, Itaú, Vale, Bradesco, Ambev, Cogna (Kroton) e BRF. Também foram

incluídos o *ETF* (*Exchange Traded Fund*) BOVA11 (que replica o Índice Bovespa) e a taxa de câmbio Real/Dólar ($BRL=X$). A Tabela 1 descreve os ativos juntamente com seu código representativo na bolsa de valores brasileira (B3) e sua área de atuação.

Tabela 1: Ativos Utilizados

Ativo	Código	Setor
Petrobras	PETR4	Energia
Vale	VALE3	Mineração
Itaú Unibanco	ITUB4	Financeiro
Bradesco	BBDC4	Financeiro
Ambev	ABEV3	Consumo
Kroton	COGN3	Educação
BRF	BRFS3	Alimento
BOVA11	BOVA11	Índice
Real/Dolar	BRL=X	Câmbio

3.2 Modelagem de Volatilidade

Para a estimação da volatilidade e covariância dinâmicas dos retornos dos ativos que compõem o portfólio, foram empregados os modelos GARCH, que permitem capturar as características estilizadas de séries financeiras, como o *volatility clustering* e caudas pesadas, já discutidas neste documento. Uma discussão aprofundada sobre a teoria e os fundamentos dos modelos GARCH e DCC-GARCH encontra-se no Capítulo 2.

Para a modelagem da volatilidade individual de cada ativo, foi utilizado o modelo GARCH(1,1) com distribuição t-Student para os resíduos padronizados. Esta escolha é justificada pela sua parcimônia e pela capacidade da distribuição t-Student de modelar adequadamente as caudas pesadas observadas nos retornos de ativos financeiros.

A estimação dos parâmetros dos modelos GARCH univariados foi realizada utilizando-se o pacote **rugarch** na linguagem *R*. A especificação do modelo foi dada da seguinte forma: os parâmetros de ordem de GARCH como (1,1) e ARCH definidos como (0,0) (sem componentes ARMA na média) e a distribuição dos erros como t-Student. Após a estimação, os resíduos padronizados de cada série foram avaliados quanto à ausência de autocorrelação e heterocedasticidade remanescente, conforme descrito no Apêndice 5.3.

Para a estimação das matrizes de covariância condicionais do portfólio, que são cruciais para a otimização de carteiras dinâmicas, optou-se pelo modelo DCC-GARCH(1,1) proposto por Engle (2002), discutido neste documento no capítulo 2. Este modelo permite que as correlações entre os ativos variem no tempo, superando a limitação de modelos que

assumem correlações constantes.

As especificações univariadas GARCH(1,1) com distribuição t-Student, previamente estimadas na parte univariada, foram incorporadas como a primeira etapa do modelo DCC-GARCH, conforme sua estrutura de duas etapas discutidas no Capítulo 2. A distribuição t-multivariada (extensão multivariada da distribuição t-Student) foi empregada para os resíduos padronizados do modelo DCC, reforçando a capacidade de modelar a característica de cauda pesada entre os ativos.

A implementação e estimação do modelo DCC-GARCH foram realizadas utilizando o pacote `rmgarch` na linguagem R. A função `dccspec()` foi utilizada para a especificação do modelo, onde as especificações univariadas (`uspec`) foram replicadas para cada ativo, e a ordem do DCC foi definida como (1,1).

A estimação foi executada com a função `dccfit()`. As matrizes de covariância condicionais dinâmicas, essenciais para as otimizações de portfólio, foram extraídas da saída do modelo através da função `rcov()` para cada período de rebalanceamento.

A validade do modelo DCC-GARCH foi verificada através da análise dos resíduos padronizados multivariados, incluindo testes de Box-Ljung para autocorrelação e inspeção de gráficos de autocorrelação cruzada, conforme descritos no Apêndice 5.3.

3.3 Otimização de Portfólio

Esta seção detalha a metodologia empregada para a construção e otimização dos portfólios, incluindo a formulação do problema de otimização, as restrições aplicadas e o processo de rebalanceamento. Duas abordagens principais de otimização são comparadas: a otimização clássica baseada em covariância histórica e uma otimização que incorpora as covariâncias dinâmicas estimadas pelo modelo DCC-GARCH.

As matrizes de covariância condicionais estimadas pelo modelo DCC-GARCH foram utilizadas como *input* principal na otimização dos portfólios, substituindo as matrizes de covariância históricas estáticas. Esta abordagem permite que a alocação de pesos reflita as condições de volatilidade e correlação de mercado em cada ponto do rebalanceamento, diferentemente da otimização clássica baseada em dados históricos agregados.

A base teórica para a otimização de portfólios neste estudo é o modelo de Média-Variância de Markowitz (1952), que busca encontrar alocações de ativos que maximizem o retorno esperado para um dado nível de risco (variância) ou minimizem o risco para um dado retorno esperado. A formalização matemática do problema de otimização de

Markowitz é amplamente discutida no Capítulo 2.

O problema de otimização foi formulado para minimizar o risco do portfólio (medido pelo desvio padrão), enquanto se buscava o maior retorno esperado; essa combinação é típica da otimização de Média-Variância de Markowitz.

Para a otimização de portfólios, foi utilizado o pacote `PortfolioAnalytics` na linguagem *R*, que fornece um *framework* flexível para a definição de objetivos e restrições.

A especificação do portfólio foi definida com a função `portfolio.spec()`, e as restrições foram adicionadas utilizando `add.constraint()`. Os objetivos de risco (`risk`, `StdDev`) e retorno (`return`, `mean`) foram configurados com `add.objective()`.

O método de otimização empregado para a solução do problema foi o *ROI* (*R Optimization Infrastructure*), que utiliza *solvers* de otimização linear e quadrática, permitindo a solução de problemas de programação quadrática (*QP*), adequados para problemas de Média-Variância.

Para o portfólio clássico, a matriz de covariância utilizada na otimização foi calculada a partir dos retornos históricos observados na janela de treinamento.

Para simular um cenário de investimento mais realista e avaliar a performance das estratégias ao longo do tempo, foi implementado um processo de rebalanceamento do portfólio. O rebalanceamento foi realizado mensalmente, no último dia útil de cada mês, refletindo uma prática comum na gestão de carteiras.

Para cada rebalanceamento, a otimização utilizou uma janela de dados passados de 1 mês para estimar os parâmetros de retorno e risco. No caso da otimização clássica, a covariância histórica foi calculada com base nos dados desta janela.

A função `optimize.portfolio.rebalancing()` do pacote `PortfolioAnalytics` foi empregada para automatizar o processo de rebalanceamento, utilizando o algoritmo *DEoptim* para solucionar o problema de otimização em cada período. Os retornos do portfólio rebalanceado foram calculados usando a função `Return.portfolio()` do pacote `PerformanceAnalytics` com os pesos resultantes de cada otimização.

3.4 Otimização Incorporando Volatilidade e Correlação Dinâmicas

Em contraste com a abordagem clássica, uma segunda estratégia de otimização foi desenvolvida para incorporar a dinâmica da volatilidade e correlação entre os ativos, conforme estimada pelo modelo DCC-GARCH descrito no Capítulo 3.

Para cada período de rebalanceamento, a matriz de covariância condicional estimada pelo modelo DCC-GARCH para aquele ponto no tempo foi utilizada como o *input* para a função objetivo de risco da otimização de portfólio. Isso permite que a alocação de pesos responda às mudanças nas condições de risco de mercado.

A otimização com covariâncias DCC-GARCH foi realizada utilizando o pacote `parma` na linguagem R. A especificação da otimização com a função `parmaspec()` recebeu diretamente a matriz de covariância DCC-GARCH (através do argumento `S`), os retornos esperados (utilizando a média histórica dos retornos na janela de treinamento) e as mesmas restrições de pesos que a abordagem clássica. O problema foi resolvido utilizando a função `parmasolve()`, que calcula os pesos ótimos para o portfólio.

Similarmente à estratégia clássica, um rebalanceamento mensal foi aplicado. Contudo, em cada período de rebalanceamento, uma nova estimação do modelo DCC-GARCH foi realizada na janela de treinamento para obter a matriz de covariância mais recente, que por sua vez foi utilizada na otimização do portfólio. Os retornos do portfólio foram calculados a partir dos pesos obtidos em cada rebalanceamento e os retornos reais dos ativos.

A Tabela 2 resume as diferenças entre as estratégias que definem este trabalho.

Tabela 2: Diferença Entre as Estratégias

Característica	Estratégia Clássica (Markowitz)	Estratégia Dinâmica (DCC-GARCH)
Matriz de Covariância	Histórica (estática na janela de treino)	Dinâmica (estimada por DCC-GARCH)
Retornos Esperados	Média histórica dos retornos (janela de treino)	Média histórica dos retornos (janela de treino)
Considera Volat. Clustering?	Não	Sim
Considera Correlação Dinâmica?	Não	Sim
Principal Vantagem	Simplicidade, benchmark comum	Maior realismo, adaptação às condições de mercado
Principal Desvantagem	Pode subestimar risco, alocações subótimas	Complexidade computacional, dependência do modelo GARCH

3.5 Critérios de Avaliação e Comparação

Para a avaliação comparativa da performance das estratégias de otimização de portfólio propostas, é essencial a utilização de métricas que quantifiquem tanto o retorno quanto o risco, permitindo uma análise da eficiência das alocações. As métricas selecionadas para este estudo foram o Retorno Anualizado, a Volatilidade Anualizada e o *Sharpe Ratio*.

3.5.1 Retorno Anualizado (*Annualized Returns*)

O retorno anualizado representa a taxa de retorno que um investimento teria gerado se o período de investimento fosse de um ano. É uma medida padrão utilizada para comparar o desempenho de investimentos com diferentes horizontes temporais, normalizando-os para uma base anual.

Para retornos diários, o retorno anualizado contínuo (logarítmico) é calculado como a soma dos retornos logarítmicos diários multiplicada pelo número de dias úteis em um ano. Para retornos simples, a anualização envolve a capitalização dos retornos diários.

Para retornos simples diários (R_t), o retorno anualizado pode ser calculado como:

$$(1 + R_{\text{anual}}) = \prod_{t=1}^{T_{\text{dias}}} (1 + R_t)^{\frac{D}{T_{\text{dias}}}} \quad (3.5.1)$$

Neste estudo, o Retorno Anualizado foi calculado para cada estratégia de portfólio (Clássica e DCC-GARCH) e para o *benchmark* (IBOVESPA) a partir dos retornos diários. A função `Return.annualized()` do pacote `PerformanceAnalytics` foi utilizada para este cálculo, considerando 252 dias úteis no ano.

3.5.2 Volatilidade Anualizada (*Annualized Standard Deviation*)

A volatilidade anualizada é uma medida do risco de um ativo ou portfólio, representando a dispersão dos retornos esperados ao longo de um ano. É comumente expressa como o desvio padrão anualizado dos retornos. Uma volatilidade maior indica um maior grau de incerteza ou flutuação nos retornos e, consequentemente, um risco mais elevado.

A anualização do desvio padrão diário é realizada multiplicando-o pela raiz quadrada do número de períodos (dias úteis) em um ano, sob a suposição de que os retornos são independentes e identicamente distribuídos.

$$\sigma_{\text{anual}} = \sigma_{\text{diária}} \times \sqrt{D} \quad (3.5.2)$$

A Volatilidade Anualizada foi calculada para todas as estratégias e para o *benchmark* utilizando-se a função `StdDev.annualized()` (ou `table.AnnualizedReturns()`) do pacote `PerformanceAnalytics` a partir dos retornos diários.

3.5.3 *Sharpe Ratio*

O *Sharpe Ratio*, desenvolvido por Sharpe (1965), é uma das métricas mais importantes na avaliação de *performance* de portfólios ajustada ao risco. Ele mede o excesso de retorno de um investimento em relação a uma taxa livre de risco, por unidade de desvio padrão (risco total).

Um *Sharpe Ratio* mais alto indica que o portfólio está gerando mais retorno por unidade de risco assumida, sendo, portanto, mais eficiente.

A ideia central é que o investidor deve ser compensado não apenas pelo risco de mercado, mas também pelo risco específico do ativo ou portfólio. O excesso de retorno sobre a taxa livre de risco é a medida da compensação.

A fórmula do Sharpe Ratio é dada por:

$$\text{Sharpe Ratio} = \frac{E[R_p] - R_f}{\sigma_p} \quad (3.5.3)$$

Onde:

- $E[R_p]$ é o retorno esperado do portfólio.
- R_f é a taxa de retorno livre de risco.
- σ_p é o desvio padrão (volatilidade) do portfólio.

Para o cálculo do *Sharpe Ratio*, foi necessária a definição de uma taxa livre de risco. Para este estudo, a taxa livre de risco foi assumida como sendo igual a zero, já que não foi incluído nenhum ativo livre de risco. A função `SharpeRatio.annualized()` do pacote `PerformanceAnalytics` foi utilizada para calcular este índice para cada estratégia e o *benchmark*, permitindo uma comparação direta da eficiência ajustada ao risco.

4 Resultados

Este Capítulo apresenta os resultados da aplicação da metodologia descrita no Capítulo 3, com foco na comparação de desempenho entre as estratégias de otimização de portfólio baseadas na teoria de Média-Variância (Markowitz) com covariância histórica (Estratégia Clássica) e na incorporação de covariâncias dinâmicas via modelos DCC-GARCH (Estratégia DCC-GARCH). Os resultados da modelagem de volatilidade e correlação também são apresentados, fornecendo *insights* sobre a dinâmica de risco dos ativos. Para fins de *benchmark*, o desempenho do IBOVESPA, para o mesmo período de tempo, é incluído na análise.

4.1 Análise Descritiva dos Dados

Nesta seção, serão calculadas algumas métricas descritivas e expostas as séries temporais dos ativos e seus retornos.

Inicialmente, serão apresentados os valores de fechamento para sete ações da bolsa de valores brasileira IBOVESPA: Petrobras (PETR4), Itaú (ITUB4), Vale (VALE3), Bradesco (BBDC3), Ambev (ABEV3), Cogna (COGN3) e BRF (BRFS3). Além das ações, foi coletado o preço ajustado do ETF BOVA11 e a taxa de câmbio Dólar/Real (BRL=X). A Figura 8 mostra o preço de fechamento conjunto para todos os ativos.

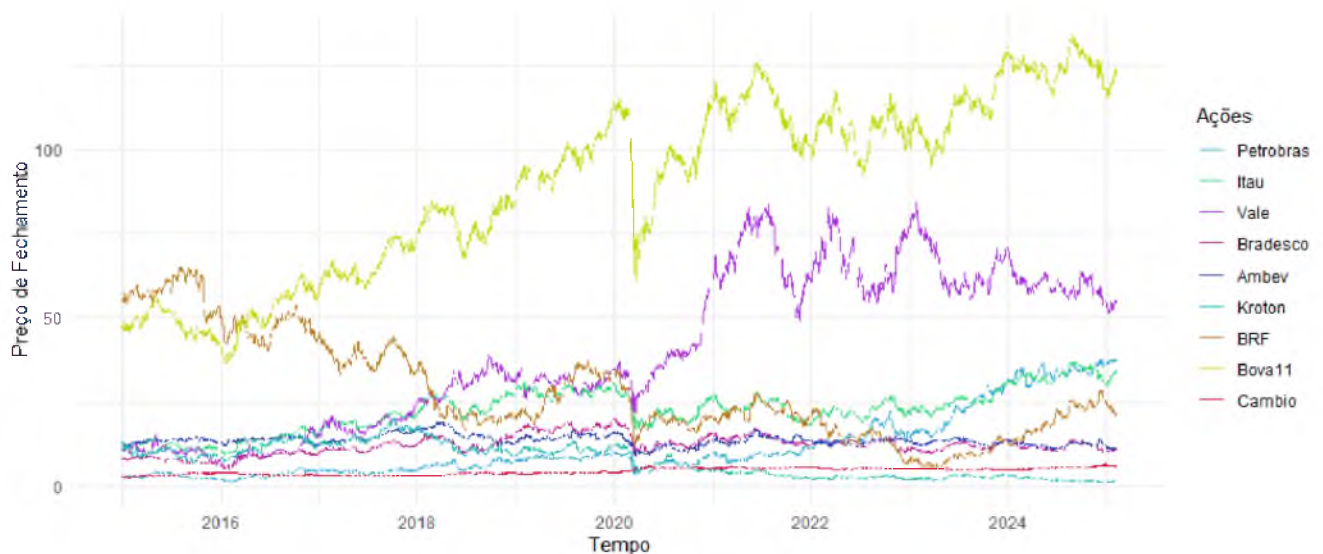


Figura 8: Preço de fechamento Ajustado para todos os Ativos de forma conjunta

Na Figura 9, temos os valores de fechamento individuais para todos os ativos.

Podemos observar que o comportamento dos ativos é bem diferente entre si. Já na Figura 10, apresentamos todos os retornos, com o primeiro ano da pandemia de *COVID-19* (2020) destacado em vermelho, sendo o ponto tracejado o dia oficial reconhecido pela *OMS* como o início da pandemia. Esse evento ilustra bem a característica de *volatility clustering* para todos os ativos presentes neste estudo.

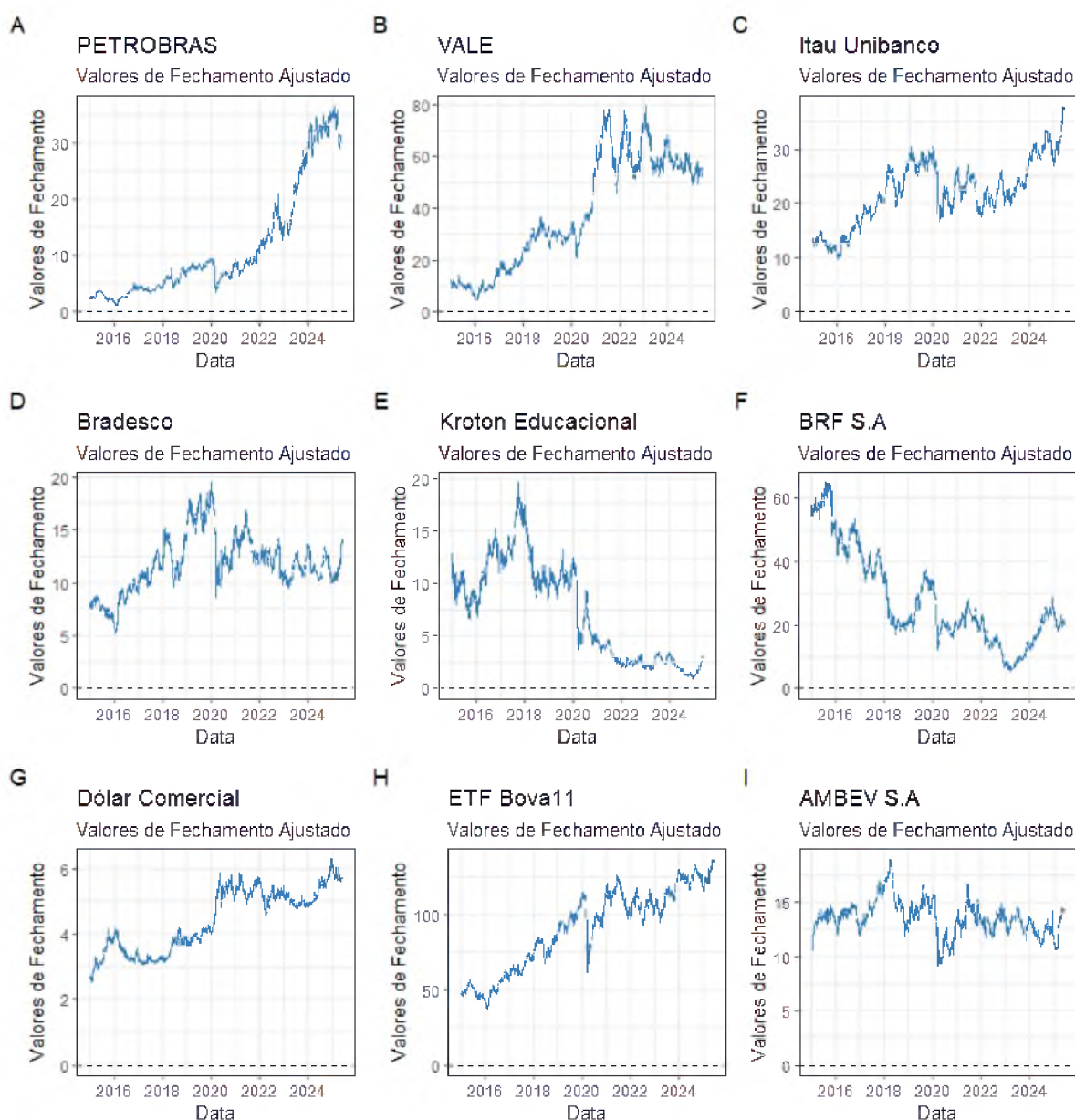


Figura 9: Valores de Fechamento Ajustado dos nove Ativos no período 1 de janeiro de 2015 até 3 de junho de 2025

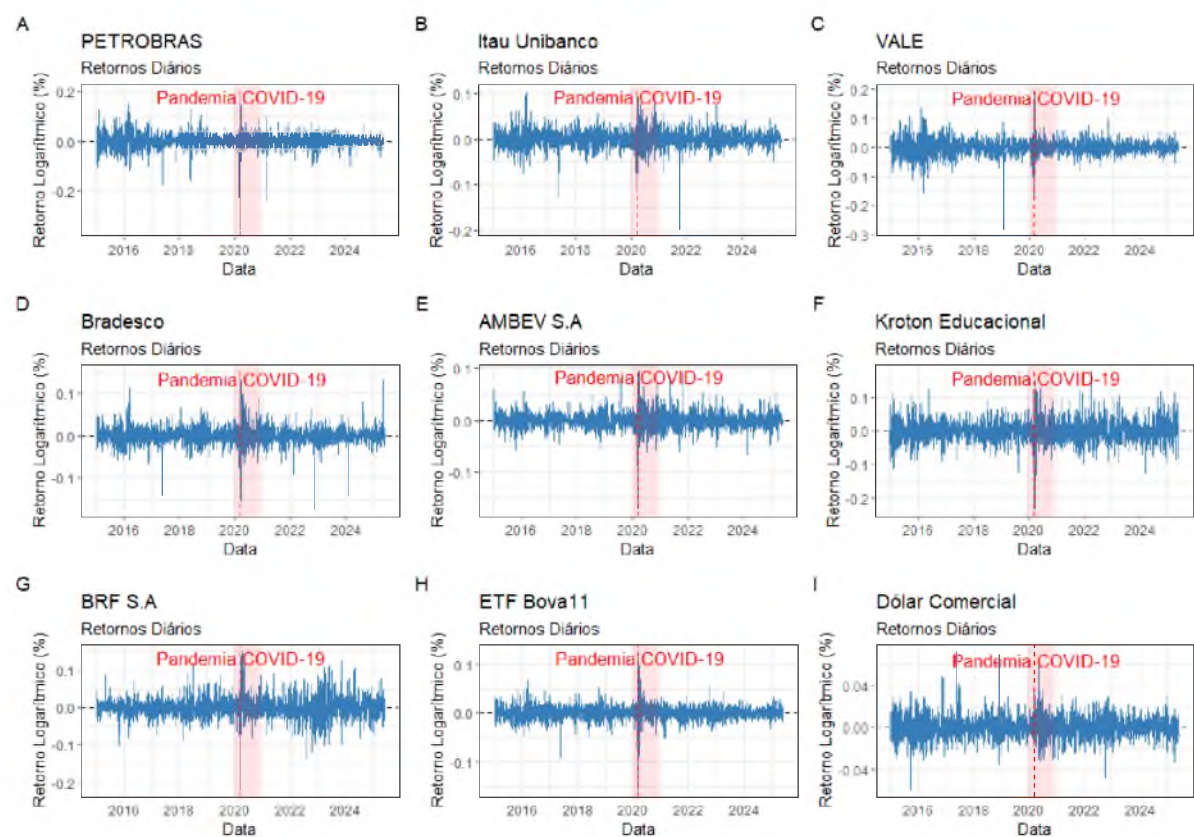


Figura 10: Valores de retornos logaritmos diários dos nove Ativos no periodo 1 de janeiro de 2015 até 3 de junho de 2025

Já na Tabela 3, temos as medidas descritivas para os Retornos Percentuais Diários dos Nove Ativos.

Tabela 3: Estatísticas Descritivas dos Retornos Percentuais Diários dos Nove Ativos Durante 1 de janeiro de 2015 e 3 de junho de 2025

Ativo	Média	Mediana	Mínimo	Máximo	Desvio Padrão	Curtose	Assimetria
Petrobras	0.11	0.14	-35.24	20.07	3.01	17.89	-1.15
Itaú Unibanco	0.05	0.03	-19.8	10.49	1.98	10.5	-0.45
Vale	0.08	0.01	-28.18	19.36	2.75	11.96	-0.29
Bradesco	0.04	0.05	-17.45	15.12	2.15	11.71	-0.29
Ambev	0.04	0	-17.18	9.41	1.67	12.93	-0.36
Kroton	-0.05	-0.22	-23.51	17.8	3.43	7.79	-0.25
BRF	-0.04	-0.09	-21.88	14.72	2.78	8.48	-0.18
BOVA11	0.05	0.09	-15.75	12.57	1.55	18.11	-0.98
Dólar	0.03	0.01	-5.97	7.25	1.07	6.22	0.35

Podemos observar na Tabela 3 as características comuns de dados financeiros, como caudas pesadas (valores de curtose maiores do que 3). Temos também assimetria à esquerda, indicando que perdas são mais significativas do que ganhos, com exceção do câmbio (Dólar). Os valores mínimos e máximos representam as maiores perdas/ganhos diários, respectivamente. A média nos informa o retorno médio diário(%).

É interessante também mostrar a correlação incondicional entre ativos, já que assim podemos entender a estrutura de dependência linear média entre eles. Dessa forma, podemos identificar algumas características interessantes, como redundâncias e oportunidades de diversificação, pois correlações positivas elevadas > 0.7 indicam que ativos tendem a se mover conjuntamente, reduzindo os benefícios da diversificação. Por outro lado, correlações negativas podem sinalizar oportunidades de proteção contra oscilações de mercado.

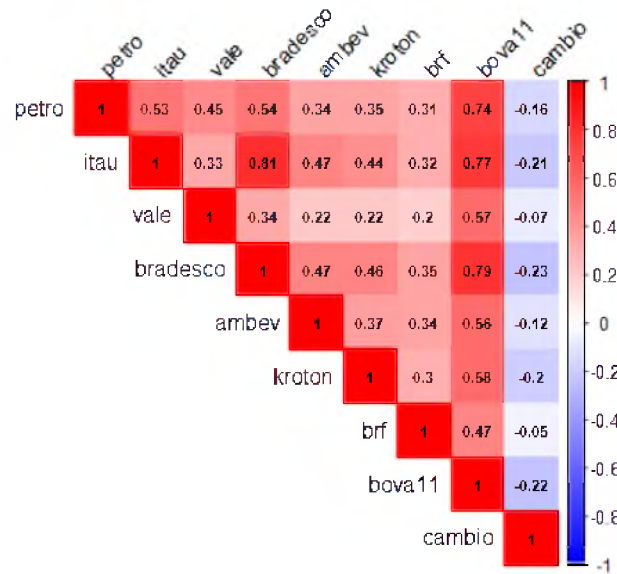


Figura 11: Matriz de correlação Incondicional dos Retornos Diários (Heatmap)

Posteriormente, compararemos esses resultados com os modelos dinâmicos, pois a correlação incondicional pode servir como *benchmark* para avaliar se as correlações condicionais (DCC-GARCH) diferem significativamente das relações de longo prazo. Por exemplo, durante crises, é comum que correlações incondicionais subestimem a dependência real entre ativos.

Como dito anteriormente, identificar correlações incondicionais em um primeiro momento pode ajudar na seleção inicial de ativos, já que correlações persistentemente baixas ou negativas justificam a inclusão de certos ativos no portfólio, enquanto altas correlações sugerem redundância de exposições.

A matriz caracterizada pela Figura 11 sintetiza essas relações, permitindo uma análise visual imediata da estrutura de dependência do portfólio. Posteriormente, contrastaremos esses resultados com as correlações condicionais estimadas pelo modelo DCC-GARCH.

Vale a pena ressaltar que na Figura 11 o câmbio possui correlação negativa com

todos os outros ativos, o que vai de encontro com a literatura em finanças de que a exposição em Dólar é uma proteção natural contra as oscilações da economia brasileira.

4.2 Resultados da Modelagem de Volatilidade e Correlação

Esta seção apresenta os resultados da estimação dos modelos de volatilidade e correlação. Serão detalhados os parâmetros dos modelos GARCH univariados ajustados a cada ativo e, posteriormente, os resultados do modelo DCC-GARCH, evidenciando a dinâmica das volatilidades individuais e das correlações condicionais entre os pares de ativos. Tais resultados são cruciais, pois as estimativas de covariância geradas por este modelo serão o principal insumo para a otimização dinâmica dos portfólios.

Vamos começar apresentando a Tabela 4 de Parâmetros Estimados dos Modelos GARCH(1,1) Univariados

Tabela 4: Parâmetros Estimados dos Modelos GARCH(1,1)

Ativo	α_0	α_1	β_1	Shape (ν)
Petrobrás	0,000015	0,098216	0,88774	4,825239
Itau	0,000007	0,054853	0,924273	6,249457
Vale	0,000008	0,076539	0,913218	6,16576
Bradesco	0,000009	0,048039	0,931264	4,900768
Ambev	0,000005	0,069619	0,916884	4,643128
Kroton	0,000027	0,052906	0,922698	6,325646
BRF	0,000009	0,062306	0,931111	4,288833
BOVA11	0,000005	0,071524	0,903362	7,949476
Câmbio	0,000002	0,046903	0,937265	7,37462

A Tabela 4 apresenta os parâmetros estimados para os modelos GARCH(1,1) univariados ajustados a cada série de retorno. Observa-se que a soma dos coeficientes α_1 e β_1 é consistentemente próxima de 1 para todos os ativos, indicando uma forte persistência da volatilidade. O parâmetro de forma (ν) da distribuição t-Student mostra valores baixos, confirmando a presença de caudas mais pesadas do que o esperado sob a premissa de normalidade, o que justifica a escolha desta distribuição para os resíduos.

Vamos representar graficamente as volatilidades condicionais estimadas pelos modelos GARCH(1,1) univariados para cada série.

A Figura 12 representa a volatilidade condicional diária dos 9 ativos selecionados neste trabalho. Podemos identificar que no período da pandemia de *COVID-19* todos os ativos mostraram um “pico” de volatilidade, mostrando o quão significativo foi esse período para diversos setores da economia. Outro aspecto importante é que existem

ativos com poucas flutuações de volatilidade, como a Ambev, e existem ativos que, em alguns períodos, apresentaram grandes flutuações de volatilidade, como o Câmbio.

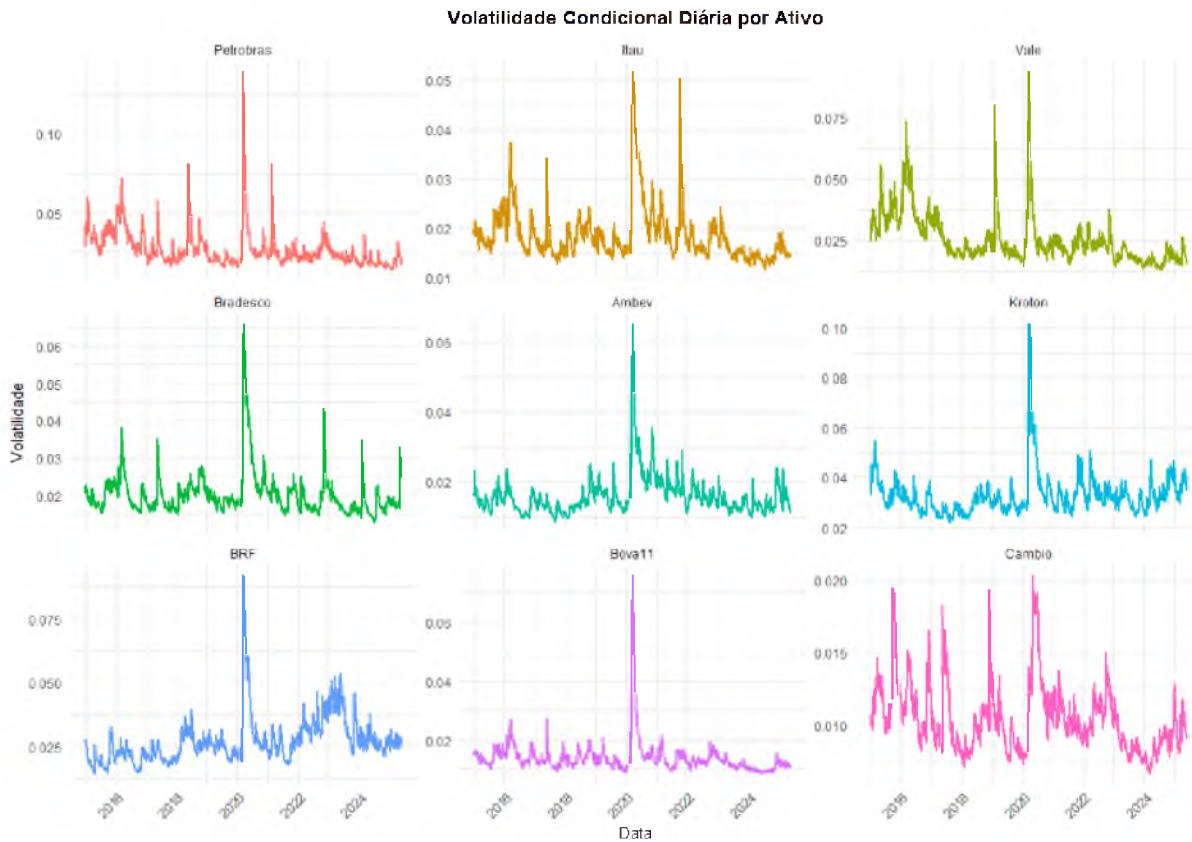


Figura 12: Volatilidade Condicional Diária dos 9 Ativos

De forma sequencial e logica, vamos analisar os resultados da extensão dos modelos GARCH(1,1) univariados e apresentar os resultados do modelo DCC-GARCH(1,1).

A Tabela 5 exhibe os parâmetros estimados para o modelo DCC-GARCH(1,1). Os coeficientes α_1 e β_1 do DCC são estatisticamente significativos, e sua soma, próxima de um, demonstra a alta persistência das correlações condicionais entre os ativos, indicando que estas não retornam rapidamente à média, validando a abordagem de modelar suas dinâmicas.

Tabela 5: Parâmetros Estimados do Modelo DCC-GARCH(1,1)

Parâmetro	Valor Estimado	Estat. do Teste	P-Valor
DCC- α_1	0.015788	8.441263	0.0
DCC- β_1	0.953639	147.64336	0.0
mShape	7.982364	21.583376	0.0

A fim de mostrar de forma mais visual a estimativa das correlações condicionais estimadas pelo modelo DCC-GARCH(1,1) vamos utilizar alguns gráficos.

A Figura 13 mostra a volatilidade condicional conjunta e a correlação condicional entre ativos. Como uma combinação 2 a 2 de 9 ativos diferentes com 2 gráficos diferentes para cada combinação ficaria excessivo, foi decidido pegar pares de ativos que são interessantes dentro de uma abordagem diversificada (correlação teórica negativa, alta correlação teórica e setores diferentes), já que a ideia desta parte é apenas ilustrar os modelos utilizados na elaboração deste trabalho.

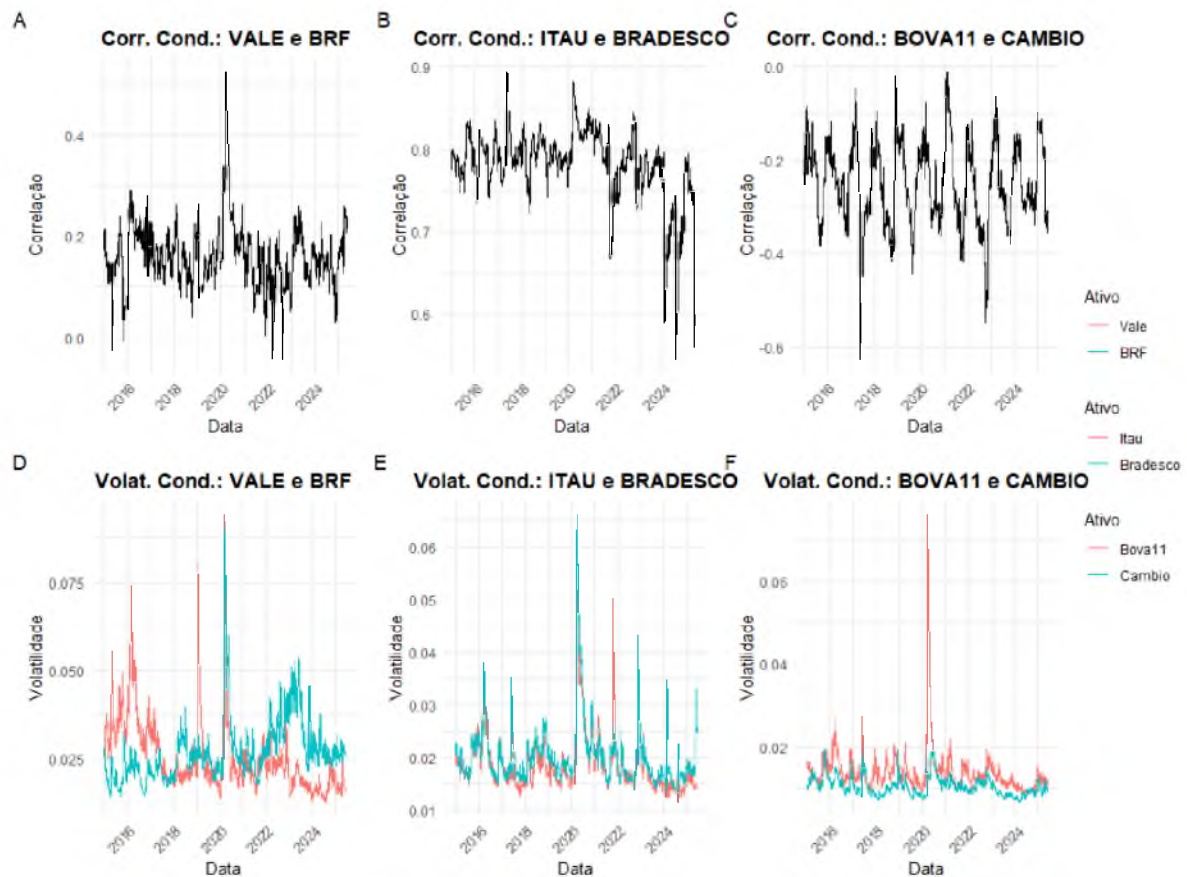


Figura 13: Relação 2 a 2 entre alguns Ativos

Como podemos observar na Figura 13, as correlações não são constantes, revelando a natureza correlacional dinâmica entre os ativos. É bom destacar que Itaú e Bradesco possuem uma correlação muito forte (ambos do setor bancário), logo suas volatilidades condicionais foram muito parecidas (a Figura 13 sobrepõe as duas), o que é um argumento que fortalece a ideia já descrita aqui de redundância, e talvez fosse melhor não ter esses dois ativos na carteira levando em conta uma visão de controle de riscos. Por outro lado, correlações mais baixas, como as da Vale e BRF, demonstraram volatilidades condicionais quase que uma ideia de contrabalanço, tendo em vista que em períodos de alta volatilidade de um ativo o outro apresentava baixa volatilidade, fortalecendo a ideia

de que a presença desses dois ativos é uma boa ideia dentro de um portfólio.

4.3 Desempenho dos Portfólios Otimizados

Nesta seção, o foco é na avaliação comparativa do desempenho das estratégias de portfólio otimizadas. Serão apresentados o desempenho acumulado de cada carteira ao longo do período de análise e as principais métricas de retorno e risco anualizadas, conforme detalhado na Seção 3. A comparação será realizada entre a Estratégia Clássica (baseada em covariância histórica), a Estratégia DCC-GARCH (incorporando covariâncias dinâmicas) e o *benchmark* IBOVESPA, buscando identificar qual abordagem proporcionou a melhor relação risco-retorno.

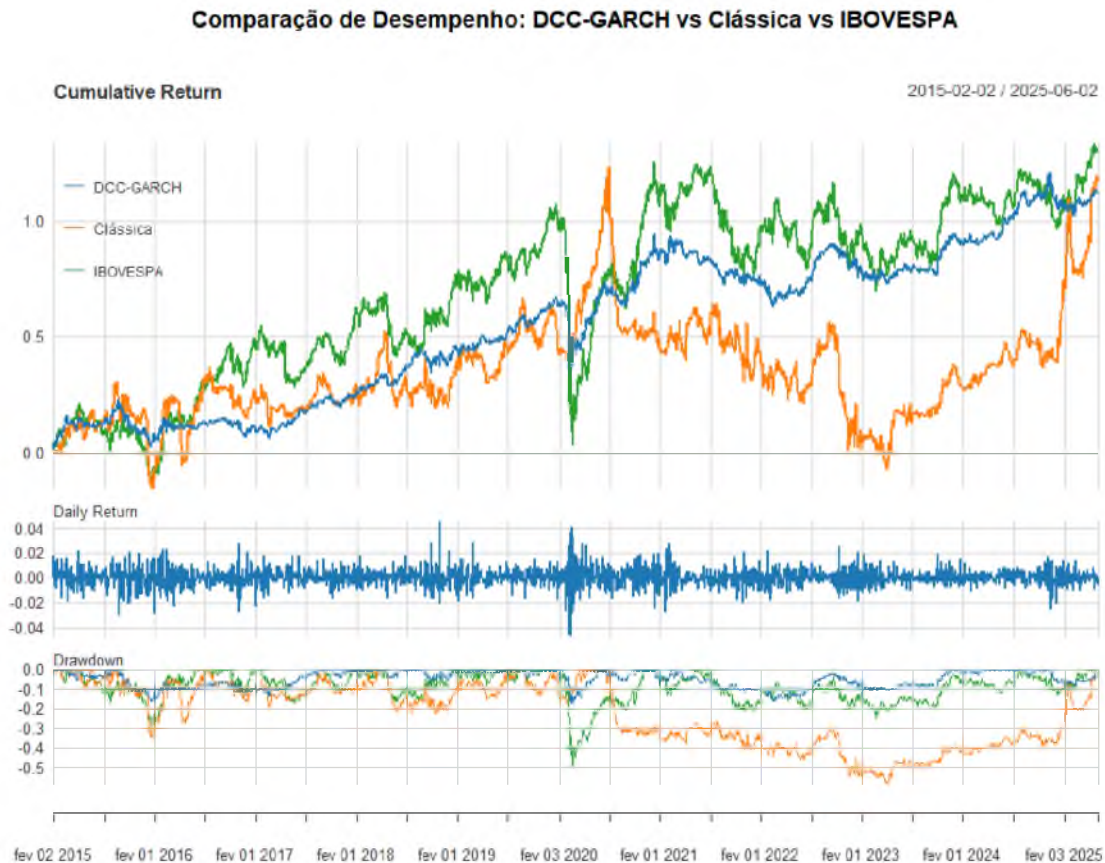


Figura 14: Desempenho Acumulado das Estratégias de Portfólio e Benchmark

A Figura 14 ilustra o desempenho acumulado das estratégias de portfólio (clássica e DCC-GARCH) e do *benchmark* IBOVESPA, sendo a estratégia clássica em laranja, a estratégia DCC-GARCH em azul e o *benchmark* IBOVESPA em verde. Visualmente, a Estratégia DCC-GARCH se manteve mais próxima ao IBOVESPA, já a estratégia

clássica se desviou bastante do *benchmark*. Um ponto importante que vale ressaltar é que em períodos de estresse de mercado, ou seja, em períodos de grande volatilidade ou *drawdowns* de mercado, a estratégia DCC-GARCH foi bastante resiliente, superando muitas vezes o *benchmark* e resistindo melhor em vários períodos de queda. Já a estratégia clássica em períodos de *drawdowns* não teve a mesma resiliência.

Tabela 6: Métricas de Desempenho Anualizadas das Estratégias de Portfólio

Estratégia	Retorno Anualizado	Risco Anualizado	Sharpe Ratio	Pior Drawdown
DCC-GARCH	0.0878000	0.1242000	0.7070000	0.1772652
Clássica	0.0923000	0.2784000	0.3315000	0.5858566
IBOVESPA	0.0981000	0.2461000	0.3986000	0.5016849

A Tabela 6 consolida as métricas de desempenho anualizadas para as estratégias e o *benchmark*. Destaca-se que a Estratégia DCC-GARCH apresentou um *Sharpe Ratio* de 0,707, superior ao da Estratégia Clássica (0,331) e do BOVA11 (0,398), indicando uma maior eficiência em termos de retorno ajustado ao risco. Apesar de ter menor retorno absoluto, seu desempenho em relação à volatilidade foi superior (menor risco). De forma geral, a estratégia DCC-GARCH gerou mais retorno por unidade de risco e, como indicado pela Figura 14, apresentou o menor *drawdown* entre a estratégia clássica e o *benchmark*, confirmando o que esperávamos pela visualização do gráfico de que essa estratégia se mostrou a mais resiliente a grandes quedas de mercado.

4.4 Análise da Alocação de Pesos

Complementando a análise de desempenho, esta seção investiga as alocações de pesos resultantes das otimizações das estratégias Clássica e DCC-GARCH. Serão examinadas a evolução temporal dos pesos de cada ativo na carteira e a magnitude das mudanças nas alocações. O objetivo é compreender como as diferentes abordagens de estimação de risco e rebalanceamento influenciaram na composição dos portfólios.

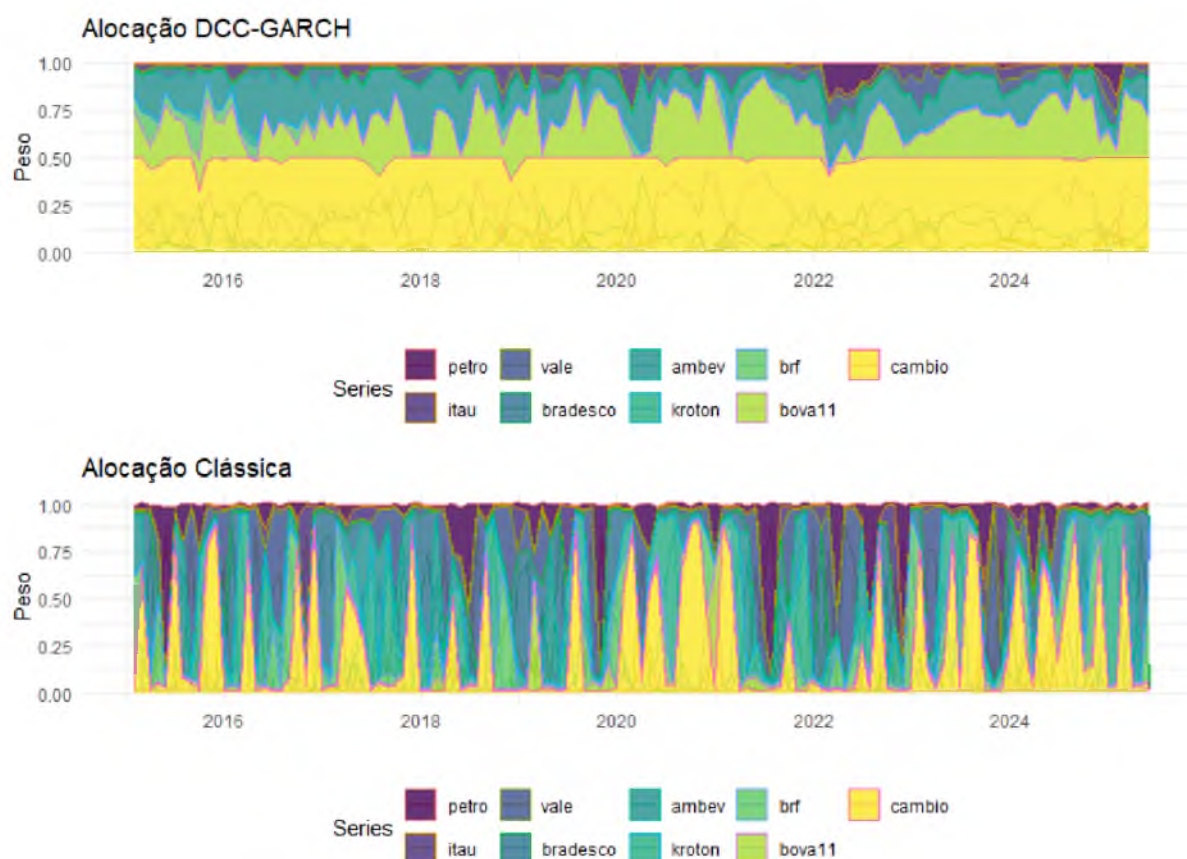


Figura 15: Evolução dos pesos dos ativos ao longo do tempo para as duas estratégias

A Figura 15 compara a evolução dos pesos dos ativos ao longo do tempo para as duas estratégias usando gráficos de área, mostrando como a alocação difere. Podemos ver também que o câmbio foi um ativo extremamente relevante usando a estratégia DCC-GARCH, diferentemente da estratégia clássica.

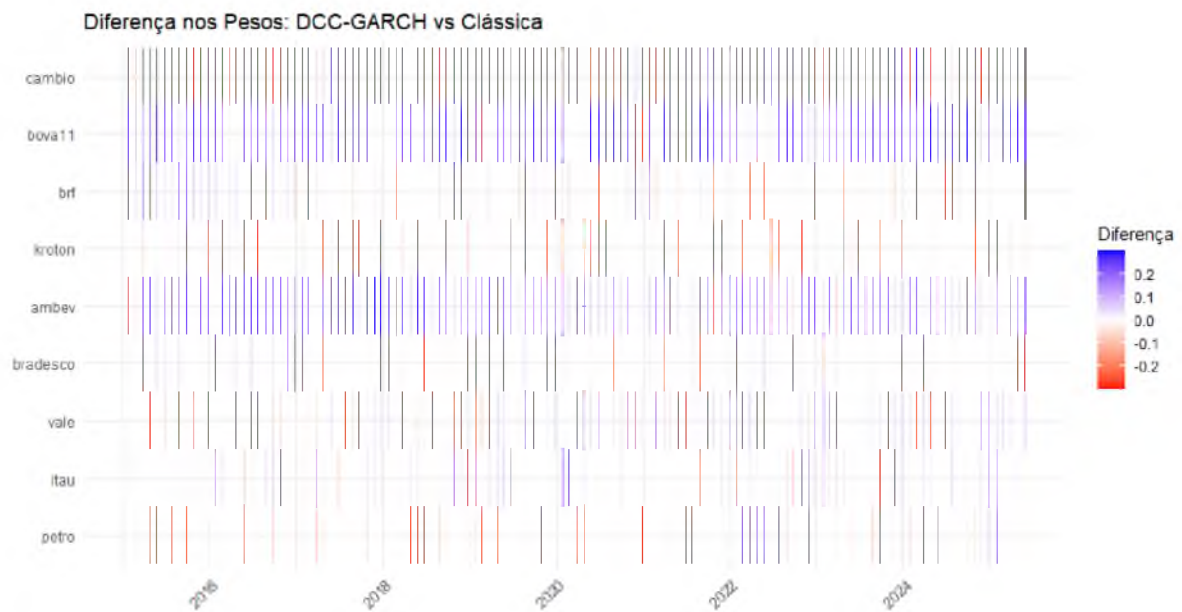


Figura 16: Heatmap: diferença nos pesos entre as duas abordagens

A Figura 16 mostra a diferença nos pesos entre as duas abordagens através de um *heatmap*, destacando onde as alocações divergem mais. Podemos ver que o câmbio foi o ativo que mais divergiu entre as duas estratégias, tendo em vista que durante praticamente todo o período de análise existiu uma diferença alta revelada pelo *heatmap*. Isso vai de encontro com o que a Figura 15 mostrou: o câmbio tendo grande peso na estratégia DCC-GARCH e pouco peso na estratégia clássica durante o período de análise.

5 Conclusão

Este Capítulo final recapitula os principais objetivos e a metodologia empregada, sintetiza os resultados mais relevantes obtidos e discute as implicações das descobertas. Por fim, são apresentadas sugestões para futuras pesquisas que possam expandir e aprofundar os temas abordados.

5.1 Revisão dos Objetivos

O presente trabalho de conclusão de curso teve como objetivo principal investigar a potencial melhoria na performance de portfólios otimizados por meio da incorporação de modelos de volatilidade e correlação condicional. Para tanto, foram comparadas duas estratégias de otimização de carteira baseadas na Teoria de Média-Variância de Markowitz: uma abordagem clássica, que utiliza matrizes de covariância históricas, e uma abordagem dinâmica, que integra as covariâncias condicionais estimadas por um modelo DCC-GARCH. A metodologia empregada envolveu a coleta de dados históricos de retornos de diversos ativos negociados na B3 e câmbio, a aplicação de modelos GARCH univariados e multivariados para capturar a dinâmica do risco, e a simulação do desempenho dos portfólios em um cenário de rebalanceamento mensal, avaliando-os por meio de métricas como Retorno Anualizado, Volatilidade Anualizada e *Sharpe Ratio*.

5.2 Principais Resultados

Os resultados obtidos confirmaram que os retornos dos ativos financeiros exibem características estilizadas de caudas pesadas e agrupamento de volatilidade, as quais foram eficientemente modeladas pelos modelos GARCH univariados com distribuição t-Student. A estimação do modelo DCC-GARCH demonstrou a natureza dinâmica e persistente das correlações condicionais entre os ativos, revelando que estas tendem a aumentar em períodos de maior incerteza ou estresse de mercado.

No que tange à otimização de portfólios, a comparação entre as estratégias clássica e DCC-GARCH revelou achados significativos. A Estratégia DCC-GARCH, que incorpora as covariâncias dinâmicas, apresentou um desempenho superior em termos de retorno ajustado ao risco, evidenciado por um *Sharpe Ratio* consideravelmente maior em comparação com a estratégia clássica e o *benchmark* IBOVESPA. Isso indica que a capacidade de ajustar as alocações com base nas estimativas de risco e correlação em tempo real

permitiu uma alocação de capital mais eficiente e resiliente às flutuações de mercado. Adicionalmente, observou-se que, embora a Estratégia DCC-GARCH tenha apresentado um retorno anualizado absoluto ligeiramente menor do que as outras estratégias, sua gestão de risco adaptativa resultou em um *drawdown* máximo inferior.

A principal questão de pesquisa deste estudo era verificar se uma modelagem de volatilidade aprimorada (DCC-GARCH) melhoraria a performance de uma carteira Markowitz. Os resultados demonstram que a Estratégia DCC-GARCH obteve um menor retorno anualizado em conjunto com uma menor volatilidade, culminando em um *Sharpe Ratio* superior ao da Estratégia Clássica e do *benchmark*. Este achado sugere que a modelagem DCC-GARCH é benéfica para a performance ajustada ao risco no período analisado.

5.3 Limitações e Pesquisas Futuras

É importante reconhecer as limitações deste estudo. A análise foi conduzida sobre dados históricos de um período específico (2015-2025). Os modelos GARCH, embora robustos, são baseados em certas premissas que podem não capturar todas as complexidades dos mercados. Adicionalmente, custos de transação e liquidez não foram considerados no processo de otimização, o que poderia impactar a performance real das estratégias.

Para pesquisas futuras, diversas extensões deste trabalho podem ser consideradas. Primeiramente, a aplicação de outros modelos de volatilidade multivariada, como o BEKK (ENGLE; KRONER, 1995) ou COPULA-DCC (JONDEAU; ROCKINGER, 2006), poderia ser explorada para verificar a robustez dos resultados e identificar se diferentes parametrizações dos modelos de risco resultam em desempenhos de portfólio ainda mais otimizados. Em segundo lugar, a incorporação explícita de custos de transação e restrições de liquidez no processo de otimização seria fundamental para uma avaliação ainda mais realista da aplicabilidade das estratégias em cenários práticos. Adicionalmente, a análise pode ser expandida para outros mercados financeiros, incluindo ativos internacionais ou de diferentes classes, como *commodities* e derivativos, para testar a generalização das descobertas. Por fim, a exploração de metodologias baseadas em *machine learning*, como feito em Pérez-Rodríguez, Fernández-Navarro e Ashley (2023), para a previsão de parâmetros de risco ou para a otimização de portfólios poderia oferecer novas perspectivas e aprimoramentos para a gestão de carteiras de investimentos.

Referências

- 3RD, A. C.; JONES, H. E. Some a posteriori probabilities in stock market action. *Econometrica*, [Wiley, Econometric Society], v. 5, n. 3, p. 280–294, 1937. ISSN 00129682, 14680262. Disponível em: <<http://www.jstor.org/stable/1905515>>.
- BENARTZI, S.; THALER, R. H. Naive diversification strategies in defined contribution saving plans. *American Economic Review*, v. 91, n. 1, p. 79–98, March 2001. Disponível em: <<https://www.aeaweb.org/articles?id=10.1257/aer.91.1.79>>.
- BOLLERSLEV, T. Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, v. 31, n. 3, p. 307–327, 1986. ISSN 0304-4076. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0304407686900631>>.
- BOLLERSLEV, T. Modelling the Coherence in Short-run Nominal Exchange Rates: A Multivariate Generalized ARCH Model. *The Review of Economics and Statistics*, v. 72, n. 3, p. 498–505, August 1990. Disponível em: <<https://ideas.repec.org/a/tpr/restat/v72y1990i3p498-505.html>>.
- BOLLERSLEV, T.; CHOU, R. Y.; KRONER, K. F. Arch modeling in finance: A review of the theory and empirical evidence. *Journal of Econometrics*, v. 52, n. 1, p. 5–59, 1992. ISSN 0304-4076. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/030440769290064X>>.
- BOLLERSLEV, T.; ENGLE, R. F.; NELSON, D. B. Arch models. *Handbook of econometrics*, Elsevier, v. 4, p. 2959–3038, 1994.
- ENGLE, R. Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of united kingdom inflation. *Econometrica*, v. 50, n. 4, p. 987–1007, 1982. Disponível em: <<https://EconPapers.repec.org/RePEc:ecm:emetrp:v:50:y:1982:i:4:p:987-1007>>.
- ENGLE, R. Dynamic conditional correlation: A simple class of multivariate generalized autoregressive conditional heteroskedasticity models. *Journal of business & economic statistics*, Taylor & Francis, v. 20, n. 3, p. 339–350, 2002.
- ENGLE, R.; KRONER, K. F. Multivariate simultaneous generalized arch. *Econometric Theory*, v. 11, n. 1, p. 122–150, 1995. Disponível em: <https://EconPapers.repec.org/RePEc:cup:etheor:v:11:y:1995:i:01:p:122-150_00>.
- ENGLE, R. F.; GRANGER, C. W. Co-integration and error correction: representation, estimation, and testing. *Econometrica: journal of the Econometric Society*, JSTOR, p. 251–276, 1987.
- FISHER, I. *The Theory of Interest*. Macmillan, 1930. ISBN 9781851962259. Disponível em: <https://preserver.beic.it/delivery/DeliveryManagerServlet?dps_pid=IE6136003>.
- FRANCQ, C.; ZAKOIAN, J. *GARCH Models: Structure, Statistical Inference and Financial Applications*. Wiley, 2019. ISBN 9781119313571. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=FW6MDwAAQBAJ>>.
- GRAHAM, B. *The Intelligent Investor*. [S.l.]: Harper and Brothers, 1949.

- JONDEAU, E.; ROCKINGER, M. The copula-garch model of conditional dependencies: An international stock market application. *Journal of International Money and Finance*, v. 25, n. 5, p. 827–853, 2006. ISSN 0261-5606. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0261560606000350>.
- LI, D. et al. The zd-garch model: A new way to study heteroscedasticity. *Journal of Econometrics*, v. 202, n. 1, p. 1–17, 2018. ISSN 0304-4076. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0304407617301926>.
- MARKOWITZ, H. Portfolio selection. *The Journal of Finance*, [American Finance Association, Wiley], v. 7, n. 1, p. 77–91, 1952. ISSN 00221082, 15406261. Disponível em: <http://www.jstor.org/stable/2975974>.
- MORETTIN, P. A. *Econometria financeira: um curso em séries temporais financeiras*. [S.l.]: Edgard Blücher, 2011.
- PÉREZ-RODRÍGUEZ, J.; FERNÁNDEZ-NAVARRO, F.; ASHLEY, T. Estimating ensemble weights for bagging regressors based on the mean–variance portfolio framework. *Expert Systems with Applications*, v. 229, p. 120462, 2023. ISSN 0957-4174. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0957417423009648>.
- SHARPE, W. Mutual fund performance. *The Journal of Business*, v. 39, 1965. Disponível em: <https://EconPapers.repec.org/RePEc:ucp:jnlbus:v:39:y:1965:p:119>.
- WILLIAMS, J. *The Theory of Investment Value*. Harvard University Press, 1938. (Investment value). ISBN 9780678080504. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=1BR0twAACAAJ>.
- WILSON, G. T. Time Series Analysis: Forecasting and Control, 5th Edition , by George E. P. Box , Gwilym M. Jenkins , Gregory C. Reinsel and Greta M. Ljung , 2015 . Published by John Wiley and Sons Inc. , Hoboken, N. *Journal of Time Series Analysis*, v. 37, n. 5, p. 709–711, September 2016. Disponível em: <https://ideas.repec.org/a/bla/jtsera/v37y2016i5p709-711.html>.
- XEKALAKI, E.; DEGIANNAKIS, S. *ARCH models for financial applications*. [S.l.]: Wiley, 2010. ISBN 9780470066300.

A Análise de Resíduos do Modelo DCC-GARCH

Este Apêndice detalha a análise dos resíduos padronizados e dos resíduos padronizados ao quadrado do modelo DCC-GARCH(1,1) ajustado aos retornos dos ativos financeiros. O objetivo primário desta análise é validar a adequação do modelo, verificando se a estrutura da média e, crucialmente, da variância condicional foram corretamente especificadas. Um modelo bem ajustado deve gerar resíduos padronizados que exibam características de ruído branco, ou seja, sem autocorrelação significativa, especialmente em seus quadrados, o que indicaria que a volatilidade foi efetivamente capturada.

A.1 Extração e Características dos Resíduos Padronizados

Os resíduos padronizados $\hat{\epsilon}_t$ de um modelo GARCH representam a parcela não explicada do retorno, após a remoção da média condicional e a padronização pela volatilidade condicional. Idealmente, para um modelo bem especificado, esses resíduos devem apresentar média próxima de zero e variância próxima de um, comportando-se como um ruído branco. A Tabela 7 detalha as estatísticas descritivas (média, desvio padrão, assimetria e curtose) dos resíduos padronizados para cada ativo.

Tabela 7: Estatísticas Descritivas dos Resíduos Padronizados

Ativo	mean	sd	skew	kurtosis
Petrobras	-0,0212	1,0061	-0,4937	4,8775
Itau	-0,0027	1,0260	-1,5770	28,0665
Vale	0,0130	1,0327	-1,3557	22,9254
Bradesco	0,0031	1,0420	-1,0219	30,0538
Ambev	0,0071	1,0097	0,5573	7,2168
Kroton	0,0159	1,0032	0,2802	2,0977
BRF	0,0028	0,9774	0,2790	3,6299
Bova11	-0,0327	0,9819	-0,0654	3,2176
Cambio	0,0195	1,0073	0,2492	1,9416

Conforme esperado, a média dos resíduos padronizados para todos os ativos se mantém próxima de zero e o desvio padrão próximo de um, confirmando a padronização adequada. Embora a assimetria e a curtose estejam geralmente mais próximas da normalidade do que os retornos originais, a persistência de caudas pesadas ou assimetria remanescente é um achado comum, mesmo em modelos bem ajustados.

A.2 Análise Gráfica dos Resíduos

A análise visual dos resíduos será realizada por meio das Funções de Autocorrelação (ACF)

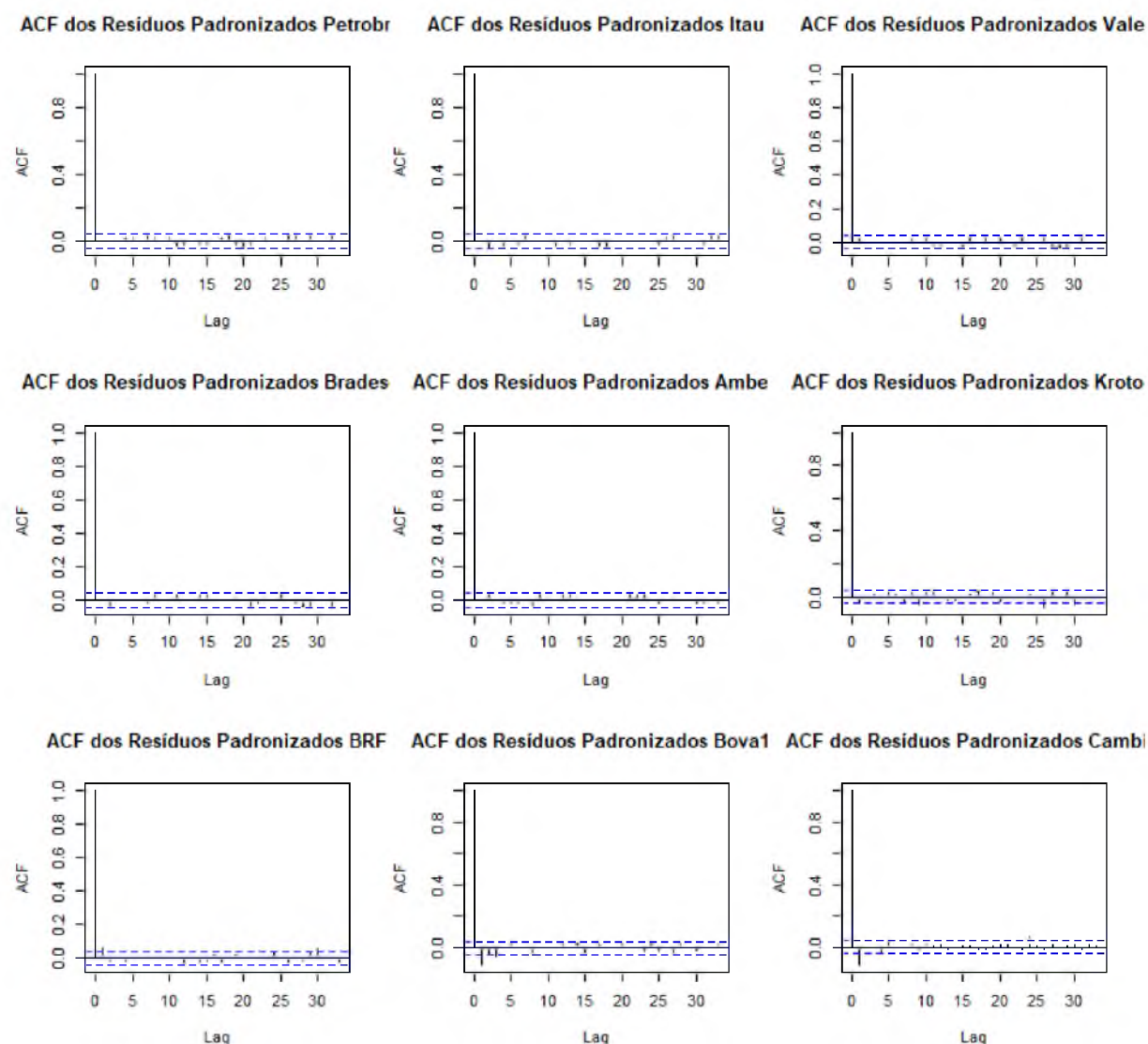


Figura 17: Funções de Autocorrelação (ACF) dos Resíduos Padronizados de Ativos Selecionados

As Funções de Autocorrelação (ACF) dos resíduos padronizados, ilustradas na Figura 17, indicam que todos os coeficientes de autocorrelação permanecem dentro dos limites de confiança, não apresentando dependência linear significativa. Este resultado corrobora a adequação da especificação de ausência de autocorrelação nos retornos padronizados (ARMA(0,0)).

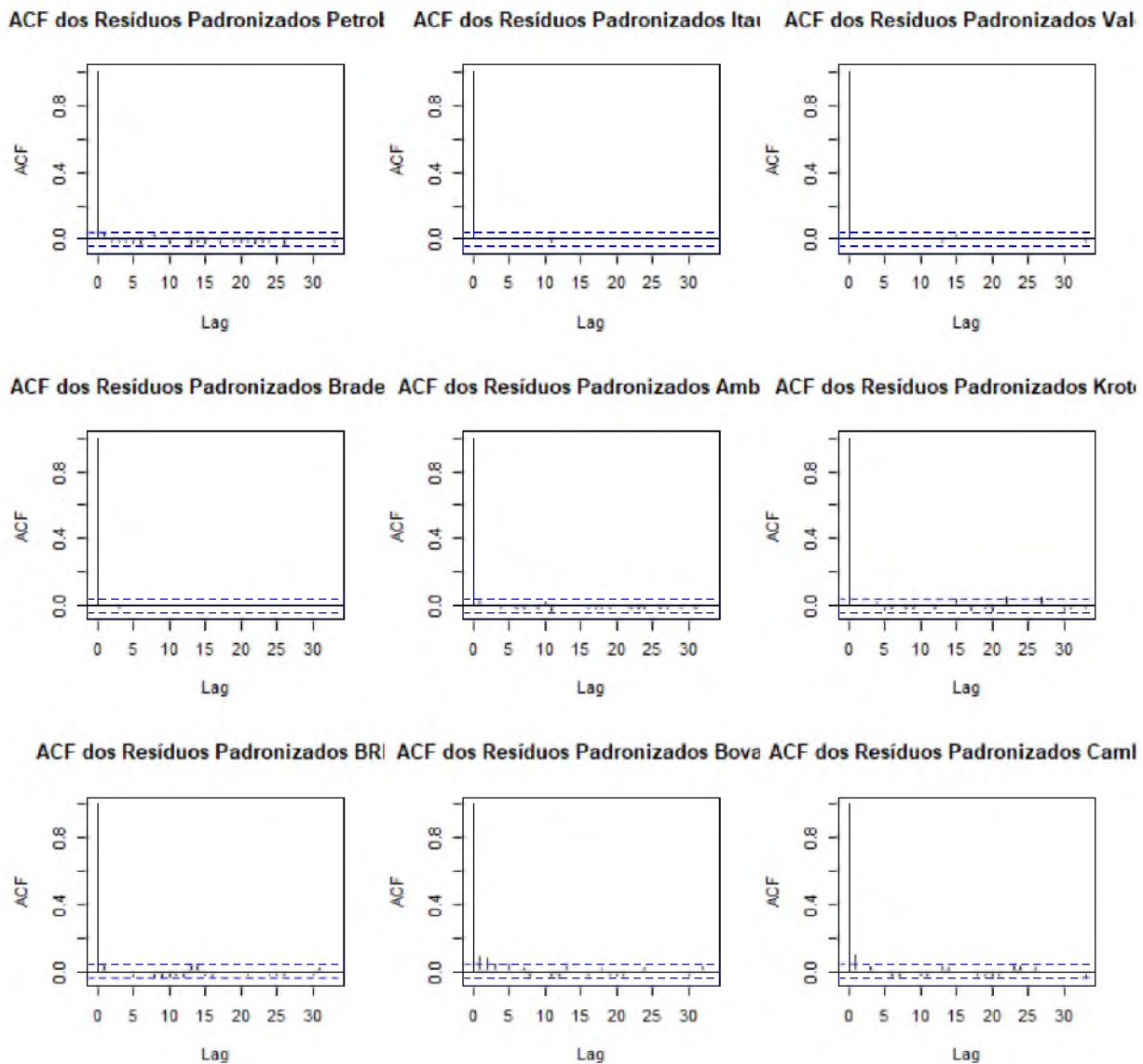


Figura 18: Funções de Autocorrelação (ACF) dos Resíduos Padronizados ao Quadrado

As Funções de Autocorrelação (ACF) dos resíduos padronizados ao quadrado (Figura 18) constituem o principal indicador da adequação da equação da variância do modelo DCC-GARCH. A ausência de autocorrelação significativa nestes resíduos (observada pela maioria dos picos dentro dos limites de confiança) demonstra que a estrutura de volatilidade condicional foi efetivamente capturada pelo modelo.

A seguir, serão empregados os **QQ-plots**. Pontos próximos à linha central indicam aderência à distribuição especificada, enquanto desvios nas extremidades sinalizam a presença de caudas pesadas.

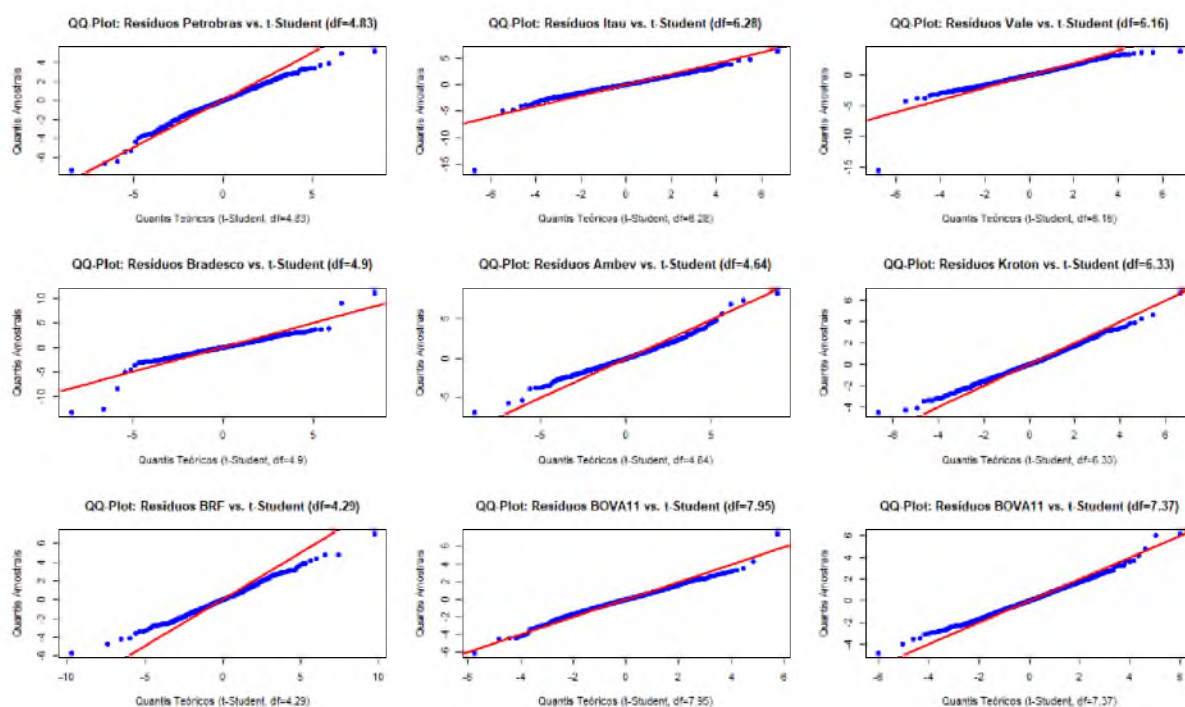


Figura 19: QQ plots dos resíduos padronizados para todos os ativos

Na Figura 19, os pontos se alinham de forma satisfatória à linha, evidenciando aderência à distribuição especificada (t-Student) e confirmando a presença de caudas pesadas por meio dos desvios observados nas extremidades.

A.3 Testes Formais de Autocorrelação (Teste de Ljung-Box)

Para complementar a análise gráfica, o Teste de Ljung-Box foi aplicado aos resíduos padronizados ao quadrado, com um total de 10 *lags*. A hipótese nula deste teste estabelece a ausência de autocorrelação.

Tabela 8: Resultados do Teste de Ljung-Box para Resíduos Padronizados ao Quadrado

Ativo	χ^2	P-Valor
Petrobras	12.047	0.2819
Itau	0.59974	1
Vale	1.0049	0.9998
Bradesco	1.7903	0.9977
Ambev	5.3083	0.8697
Kroton	4.2875	0.9334
BRF	9.2217	0.5112
BOVA11	43.915	3.409e-06
Câmbio	27.696	0.002019

A Tabela 8 apresenta os p-valores do Teste de Ljung-Box para os resíduos padronizados ao quadrado. A maioria dos p-valores é superior a 0,05 (com exceção de BOVA11 e Câmbio, que exibem um indício de autocorrelação remanescente), indicando, de forma geral, a ausência de evidência de autocorrelação significativa nos resíduos quadráticos. Este resultado comprova que o modelo DCC-GARCH(1,1) conseguiu capturar eficientemente a heterocedasticidade e a estrutura de dependência da volatilidade nos dados. A ausência de autocorrelação remanescente nos quadrados dos resíduos é uma forte indicação de que o modelo está bem ajustado e que a volatilidade foi corretamente modelada para a maioria dos ativos analisados.