



**Universidade de Brasília  
Departamento de Estatística**

**Projeção da mortalidade no Distrito Federal: aplicação dos modelos de  
Lee-Carter**

**Phillippi Willian Fonseca Alkmin**

Projeto apresentado para o Departamento de Estatística da Universidade de Brasília como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de Bacharel em Estatística.

**Brasília  
2025**

**Phillippi Willian Fonseca Alkmin**

**Projeção da mortalidade no Distrito Federal: aplicação dos modelos de  
Lee-Carter**

Orientador(a): Profa. Ana Maria Nogales Vasconcelos

Projeto apresentado para o Departamento  
de Estatística da Universidade de Brasília  
como parte dos requisitos necessários para  
obtenção do grau de Bacharel em Es-  
tatística.

**Brasília  
2025**

## Agradecimentos

Agradeço, primeiramente, aos meus pais, Robson e Beatriz, por terem me apoiado durante toda a minha trajetória acadêmica, sempre acreditando no meu potencial e me encorajando a participar de todos os projetos, pesquisas e estágios.

Agradeço à minha orientadora, Ana Maria, por ter me acompanhado durante quatro anos da minha graduação. Suas orientações foram fundamentais, não apenas neste trabalho, mas em muitos outros nos quais estivemos juntos. Obrigado por ter me guiado e me ensinado a me tornar um verdadeiro estatístico.

Agradeço à minha família, tanto a de sangue quanto a escolhida. Aos meus irmãos Matheus, Cynthia, Rafael, Luna e Gabriel, por terem me ensinado o verdadeiro significado de companheirismo. Também sou eternamente grato à minha sobrinha Rafaela, por me mostrar que, assim como a Barbie, somos capazes de superar qualquer desafio.

Agradeço à Nicoli e ao Vitor Hugo, meus amigos que me aguentaram durante todos esses anos ouvindo sobre mortalidade e estatística. À Nicoli, por ter me acompanhado desde o ensino médio e por ser uma pesquisadora de referência. Ao Vitor Hugo, por ter sido uma pessoa essencial nesta jornada acadêmica, garantindo minha vitória neste desafio principal, que foi a faculdade.

Agradeço enormemente aos meus amigos estatísticos. Carol e Vêras, por sempre me lembrarem das provas e trabalhos e por todos os cafés depois da aula. Maria e Camila, que me mostraram que a faculdade vai muito além das salas de aula e por todas as partidas de ludo no subsolo do ICC. Amanda e Letícia, por me apoiarem em todos os PIBICs e no TCC, tornando essa caminhada mais leve. Agradeço também à Gabriela, Beatriz e a tantos outros amigos que fiz durante a graduação e que sempre estiveram ao meu lado.

## Resumo

A partir da segunda metade do século XX, melhorias na saúde, saneamento e avanços médicos reduziram as taxas de mortalidade no Brasil, aumentando a expectativa de vida em 21 anos entre 1950 e 2000. A transição demográfica descreve essa mudança, que afeta homens e mulheres de forma distinta, com maiores taxas de mortalidade masculina na juventude devido ao *accident hump*. Projetar esses indicadores é essencial, especialmente para a previdência social. Este estudo projeta as taxas de mortalidade e expectativa de vida no Distrito Federal usando quatro variantes do modelo de Lee-Carter, divididas em modelos independentes e coerentes. Os dados de mortalidade foram obtidos do SIM, e os quantitativos populacionais dos censos de 1980 a 2022 foram interpolados, entre dois censos, para estimar a população. Testes com dados de 1980 a 2005 para projetar até 2022 mostraram que os modelos de Lee-Carter e Lee-Miller tiveram bons resultados para mulheres, mas superestimaram a mortalidade masculina na juventude. O modelo de Renshaw-Haberman superestimou a mortalidade feminina e não convergiu para a masculina. Na projeção em dois estágios com o modelo de Lee, Li e Gerland, os três métodos obtiveram resultados próximos para mulheres, ultrapassando as projeções do IBGE. Para homens, o modelo de Renshaw-Haberman mostrou estagnação inicial, com melhora posterior, e para mulheres, gerou valores próximos aos demais métodos.

Palavras-chaves: Distrito Federal, Lee Carter, Projeção de Mortalidade, Métodos estocásticos de mortalidade, Projeção da expectativa de vida.

## Lista de Figuras

|    |                                                                                                                                                                                           |    |
|----|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 1  | Distribuição da população por sexo e grupos de idade. Distrito Federal. 1980-2022 . . . . .                                                                                               | 21 |
| 2  | Taxa de mortalidade segundo grupos de idade e sexo. Distrito Federal. 1980-2022 . . . . .                                                                                                 | 22 |
| 3  | Taxa de mortalidade segundo método independente de Lee-Carter clássico. Mulheres. 2010 e 2022 . . . . .                                                                                   | 22 |
| 4  | Taxa de mortalidade segundo método independente de Lee-Carter clássico. Homens. 2010 e 2022 . . . . .                                                                                     | 23 |
| 5  | Taxa de mortalidade segundo método independente de Lee-Miller. Mulheres. 2010 e 2022 . . . . .                                                                                            | 23 |
| 6  | Taxa de mortalidade segundo método independente de Lee-Miller. Homens. 2010 e 2022 . . . . .                                                                                              | 24 |
| 7  | Taxa de mortalidade segundo método independente de Renshaw-Haberman. Mulheres. 2010 e 2022 . . . . .                                                                                      | 24 |
| 8  | Taxa de mortalidade segundo método independente de Renshaw-Haberman. Homens. 2010 e 2022 . . . . .                                                                                        | 25 |
| 9  | Taxa de mortalidade projetada segundo grupos de idade e sexo pelo método independente de Lee-Carter. Distrito Federal. 1980-2070 . . . . .                                                | 26 |
| 10 | Taxa de mortalidade projetada segundo grupos de idade e sexo pelo método de Lee, Li e Gerlando usando a projeção em primeiro estágio de Lee-Carter. Distrito Federal. 1980-2070 . . . . . | 26 |
| 11 | Esperança de vida projetada pelo método de Lee, Li e Gerland para o sexo Masculino e Feminino usando a projeção em primeiro estágio de Lee-Carter. Distrito Federal. 1980-2070 . . . . .  | 27 |
| 12 | Taxa de mortalidade projetada segundo grupos de idade e sexo pelo método independente de Lee-Miller. Distrito Federal. 1980-2070 . . . . .                                                | 27 |
| 13 | Taxa de mortalidade projetada segundo grupos de idade e sexo pelo método de Lee, Li e Gerlando usando a projeção em primeiro estágio de Lee-Miller. Distrito Federal. 1980-2070 . . . . . | 28 |
| 14 | Esperança de vida projetada pelo método de Lee, Li e Gerland para o sexo Masculino e Feminino usando a projeção em primeiro estágio de Lee-Miller. Distrito Federal. 1980-2070 . . . . .  | 28 |

|    |                                                                                                                                                                                                 |    |
|----|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 15 | Taxa de mortalidade projetada segundo grupos de idade e sexo pelo método independente de Renshaw-Haberman. Distrito Federal. 1980-2070 . . . . .                                                | 29 |
| 16 | Taxa de mortalidade projetada segundo grupos de idade e sexo pelo método de Lee, Li e Gerlando usando a projeção em primeiro estágio de Renshaw-Haberman. Distrito Federal. 1980-2070 . . . . . | 29 |
| 17 | Esperança de vida projetada pelo método de Lee, Li e Gerland para o sexo Masculino e Feminino usando a projeção em primeiro estágio de Renshaw-Haberman. Distrito Federal. 1980-2070 . . . . .  | 30 |
| 18 | Expectativa de vida ao nascer projetada e calculada segundo método e sexo. Distrito Federal. 1980-2070 . . . . .                                                                                | 31 |

## Sumário

|          |                                                      |           |
|----------|------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>Introdução . . . . .</b>                          | <b>8</b>  |
| <b>2</b> | <b>Objetivos. . . . .</b>                            | <b>10</b> |
| 2.1      | Objetivo Geral . . . . .                             | 10        |
| 2.2      | Objetivos Específicos. . . . .                       | 10        |
| <b>3</b> | <b>Métodos . . . . .</b>                             | <b>11</b> |
| 3.1      | Tábua de Vida de Período Abreviada . . . . .         | 11        |
| 3.2      | Métodos de projeção da taxa de mortalidade . . . . . | 12        |
| 3.2.1    | Métodos Independentes . . . . .                      | 12        |
| 3.2.2    | Lee Carter . . . . .                                 | 12        |
| 3.2.3    | Lee Miller . . . . .                                 | 13        |
| 3.2.4    | Renshaw Haberman . . . . .                           | 14        |
| 3.3      | Métodos Coerentes . . . . .                          | 16        |
| 3.4      | Li e Lee . . . . .                                   | 16        |
| 3.5      | Li, Lee e Gerland. . . . .                           | 16        |
| <b>4</b> | <b>Metodologia. . . . .</b>                          | <b>19</b> |
| 4.1      | Conjunto de dados . . . . .                          | 19        |
| 4.2      | Projeção da taxa de mortalidade . . . . .            | 20        |
| 4.2.1    | Projeções do IBGE . . . . .                          | 20        |

---

|                                                      |    |
|------------------------------------------------------|----|
| <b>5 Resultados</b>                                  | 21 |
| 5.1 Dados Obtidos                                    | 21 |
| 5.2 Simulações                                       | 22 |
| 5.3 Projeção em dois estágios                        | 25 |
| 5.3.1 Lee Carter                                     | 26 |
| 5.3.2 Lee Miller                                     | 27 |
| 5.3.3 Renshaw-Haberman                               | 29 |
| 5.3.4 Comparação entre os métodos e outras projeções | 31 |
| <b>6 Conclusão</b>                                   | 32 |

# 1 Introdução

O Brasil começou a experimentar uma queda acentuada nas taxas de mortalidade a partir da segunda metade do século XX, impulsionada principalmente pela melhoria no acesso a cuidados de saúde, saneamento básico, vacinas e avanços na medicina (VASCONCELOS; GOMES, 2012). A expectativa de vida ao nascer no Brasil aumentou, segundo o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), de 48 anos para 69,8 anos de 1950 para 2000. Essa queda nas taxas de mortalidade, e também na de natalidade, já havia sido observada na Europa e foi chamada de teoria da transição demográfica (THOMPSON, 1945).

Vale ressaltar que o gênero é um fator muito importante para a mortalidade, pois normalmente os homens tendem a apresentar taxas de mortalidade mais altas do que as mulheres, principalmente nas faixas etárias mais jovens e na idade adulta (CRIMMINS et al., 2019). Esta mortalidade masculina nas idades mais jovens está associada a causas de morte externas, caracterizando o *accident hump*.

Compreender as tendências futuras de mortalidade é fundamental para a criação de políticas públicas eficientes, pois permite que os gestores planejem com base em cenários demográficos realistas. Caso o envelhecimento populacional seja mais intenso do que o esperado, poderão surgir desafios na proporção entre contribuintes e beneficiários da previdência social. Além disso, uma população mais envelhecida demanda mais do sistema de saúde, tornando essencial a preocupação com o envelhecimento saudável dessa população.

Assim, se torna necessária a criação de boas projeções da taxa de mortalidade, bem como da expectativa de vida. Estas projeções, por sua vez, podem ser determinísticas: baseadas em suposições fixas e premissas específicas; ou probabilísticas: baseadas em distribuições de probabilidade. O uso de projeções probabilísticas se mostra mais adequado por gerar intervalos de confiança, incluindo uma componente de incerteza nos modelos (CASTRO et al., 2019).

O primeiro método de projeção probabilística da taxa de mortalidade foi proposto por Lee e Carter (1992), outros autores revisaram e incrementaram o método original, como Brouhns, Denuit e Vermunt (2002) e Hyndman, Booth e Yasmeen (2013), surgindo assim algumas novas variantes. Estes métodos apresentaram desempenho satisfatório e têm sido utilizados por muitas organizações governamentais, como dos Estados Unidos, Canadá e Dinamarca.

Desta forma, o presente trabalho tem como objetivo estudar as tendências de mortalidade do Distrito Federal, utilizando os dados populacionais e de mortalidade de 1980 a 2022. Para isso, será aplicado o método de Lee e Carter (1992) e suas variantes, comparando os resultados obtidos entre si e também com a projeção publicada pelo

Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística.

## 2 Objetivos

### 2.1 Objetivo Geral

Projetar a taxa de mortalidade e esperança de vida da população do Distrito Federal até o ano de 2070, utilizando variantes do modelo de Lee-Carter e os dados populacionais e de mortalidade de 1980 a 2022.

### 2.2 Objetivos Específicos

- Estudar os dados censitários e de mortalidade do Distrito Federal, buscando compreender suas limitações;
- Obter dados anuais de mortalidade e populacionais de 1980 a 2022 para o DF;
- Estudar o método de Lee Carter e suas variantes;
- Gerar projeções da taxa de mortalidade e esperança de vida, e comparar os resultados dos métodos utilizados;
- Comparar os resultados dos métodos utilizados com a projeção do IBGE.

### 3 Métodos

#### 3.1 Tábua de Vida de Período Abreviada

A tábua de vida de período é um método demográfico que descreve a mortalidade de uma população em um determinado período de tempo. Diferentemente da tábua de vida de coorte, que acompanha uma coorte ao longo do tempo, a tábua de vida de período reflete as condições de mortalidade vigentes em um ano específico.

As tábuas podem ser completas ou abreviadas, dependendo de como as faixas etárias são definidas. As tábuas completas utilizam idades simples, enquanto as abreviadas agrupam as idades em faixas etárias, geralmente em intervalos de cinco anos. As tábuas de vida abreviadas são mais comuns, pois o cálculo das tábuas completas requer dados de alta qualidade e precisão.

Para o cálculo dos indicadores da tábua de vida foram utilizados os cálculos propostos pelo livro Métodos Demográficos - Uma visão desde os países de língua portuguesa (FOZ, 2021).

Inicialmente é calculado as taxas específicas de mortalidade por idade e sexo,  ${}_nM_{x,s}$ , sendo  $x$  a faixa etária e  $s$  o sexo:

$${}_nM_{x,s} = \frac{\text{Número de óbitos ocorridos com idades entre } x \text{ e } x+n \text{ do sexo } s \text{ no período}}{\text{População média com idades entre } x \text{ e } x+n \text{ do sexo } s \text{ no período}}.$$

Para os cálculos da taxa de período considera-se que  ${}_nM_x \equiv {}_nm_x$ . Assim, obtêm-se todas as taxas de mortalidade utilizadas no estudo. Para prosseguir com os cálculos da tábuas, considerou-se que o tempo médio de anos vividos pelas pessoas que morreram entre as idades  $x$  e  $n+x$  ( ${}_na_x$ ) fosse igual a 2,5 anos. Assim, sendo possível calcular a probabilidade de morte do intervalo etário,  ${}_nq_x$ :

$${}_nq_x = \frac{{}_nm_x}{1 + (n - {}_na_x){}_nm_x},$$

$${}_{\infty}q_{80} = 1.$$

O próximo passo é calcular o número de sobreviventes de uma coorte de  $l_0$ , sendo  $l_0 = 1000$ , nascidos vivos depois de  $x$  anos,  $l_x$ :

$$l_x = l_{x-n}(1 - {}_nq_{x-n}).$$

Assim, para calcularmos o número de óbitos esperado entre uma coorte de  $l_0$ ,  ${}_nd_x$ , é fácil ver que será:

$${}_nd_x = {}_nq_x l_x.$$

O número de anos-pessoa vivido pela coorte de  $l_0$  pessoas nascidas vivas e ainda vivas na idade de  $x$  anos,  ${}_nL_x$ , é calculado pela soma dos anos-pessoas vividos pelos sobreviventes e o tempo que não sobreviventes viveram na faixa etária:

$${}_nL_x = {}_nx l_{x+n} + {}_na_x.$$

Prossegue para o cálculo do número de anos-pessoa vivido pela coorte de  $l_0$  pessoas nascidas vivas e ainda vivas na idade de  $x$  anos até a extinção completa da coorte:

$$T_x = \sum_{a=x}^{w-n} {}_nL_a.$$

Desta forma, é possível calcular o último indicador da tábua de vida: o número médio de anos vividos a partir da idade exata  $x$ ,  $e_x$ :

$$e_x = \frac{T_x}{l_x}.$$

## 3.2 Métodos de projeção da taxa de mortalidade

Os métodos de projeção da taxa de mortalidade podem ser divididos em dois grupos: independentes e coerentes. Os métodos de projeção coerentes são aqueles que levam em consideração duas ou mais subpopulações na projeção, enquanto os independentes levam em consideração somente uma população. Os métodos coerentes demonstram um desempenho melhor ao projetar a mortalidade por sexo, por exemplo, já que nos métodos independentes é necessário fazer duas projeções separadas que podem gerar dados divergentes.

### 3.2.1 Métodos Independentes

### 3.2.2 Lee Carter

Seja  $m(x, t)$  a taxa de mortalidade na idade  $x$  e no ano  $t$  para uma população. Lee e Carter (1992) consideram que o logaritmo da taxa de mortalidade pode ser modelado

por:

$$\log m(x, t) = a_x + b_x k_t + \epsilon_{x,t},$$

em que  $a_x$ ,  $b_x$  e  $k_t$  são parâmetros que devem ser estimados e  $\epsilon_{x,t}$  é um erro aleatório com média 0 e variância  $\sigma^2$ . Como o modelo é indeterminado, não possui uma solução única, os autores consideram que  $\sum_x b_x = 1$  e  $\sum_t k_t = 0$ , para que então a equação possa ter só uma solução. Alguns outros autores consideram que  $\sum_x b_x^2 = 1$ , para facilitar alguns cálculos (GIROSI; KING, 2007).

Com essas restrições, fica evidente que  $a_x$  é a média do  $\log$  da taxa de mortalidade. Também, vê-se que o modelo não pode ser ajustado por um modelo de regressão ordinário, já que não há variável regressora, somente parâmetros a serem estimados ( $b_x$  e  $k_t$ ). Para a estimação destes parâmetros é utilizado Decomposição em Valores Singulares (SVD) para achar uma solução de mínimos quadrados para  $\log m(x, t) - \overline{\log m(x, t)}$ , onde  $\overline{\log m(x, t)}$  é a média do  $\log$  da taxa de mortalidade.

Alho (1992) aponta que utilizar SVD para estimar estes parâmetros não é adequado, já que considera-se que os erros são homocedásticos. Isto é irrealístico, já que em idades avançadas a variância será bem maior do que em idades mais jovens. Com a violação do pressuposto, o método já não se torna tão adequado.

Com os parâmetros estimados, ainda se reestima  $k_t$ , usando  $a_x$  e  $b_x$  da primeira estimativa com base no total de mortos. Assim, a ideia é achar um  $k_t$  que gere o mesmo número do total de mortos observado. Utilizando as estimativas, finais é ajustado um modelo de passeio aleatório com *drift* para projetar  $k_t$ , usando a seguinte equação:

$$k_t = k_{t-1} + d + e_t,$$

Onde  $d$  representa o parâmetro de tendência de *drift* e  $e_t$  os erros não correlacionados. Com as projeções prontas do  $k_t$ , basta calcular as taxas específicas de mortalidade e, então, as expectativas de vida.

### 3.2.3 Lee Miller

Lee e Miller (2001) observaram que o método proposto por Lee e Carter não conseguia modelar tão bem a mortalidade, pontuando como as taxas de mortalidade não eram constantes ao longo do tempo, o que viola um pressuposto do método de Lee Carter. Desta forma, os autores propuseram alguns ajustes no método original: começar o período de ajuste no ano de 1950, ajustar  $k_t$  de acordo com a  $e_0$  no último ano base da projeção e utilizar as taxas observadas no último ano do período da projeção. Neste caso, após a

modelagem dos dados, prossegue-se com as técnicas de séries temporais, como Lee Carter.

### 3.2.4 Renshaw Haberman

O modelo de Renshaw e Haberman (2006) se baseia nos Modelos Lineares Generalizados (MLG), assim, é importante saber inicialmente as três componentes principais de qualquer MLG, segundo McCullagh (2019):

1. **Componente Aleatória:** seja  $X_i$  o vetor de covariáveis e  $Y_i$  uma variável aleatória que segue uma distribuição da Família Exponencial;
2. **Componente Estrutural:** componente que relaciona o parâmetro  $\eta_i$  ao vetor de covariáveis  $X_i$ , por meio de uma combinação linear do vetor  $\beta$ . Isto é,  $\eta_i = X_i^T \beta$ ;
3. **Função de ligação:** função que conecta a média da componente aleatória e a componente estrutural, via uma função monótona e diferenciável  $g()$ . Isto é,  $g()$  conecta  $\mu_i$  com o preditor linear  $\eta_i$ , tal que:

$$g(\mu_i) = \eta_i \Rightarrow \mu_i = g^{-1}(\eta_i).$$

Assim, se baseando nos três componentes do MLG's, surgiram os quatro componentes principais de *Generalized Age-Period-Cohort* (GAPC) modelos estocásticos de mortalidade (VILLEGAS; KAISHEV; MILLOSSOVICH, 2018):

1. **Componente Aleatória:** O número de mortos ( $D_{xt}$ ) segue uma distribuição de Poisson ou Binomial, assim:

$$D_{xt} \sim \text{Poisson}(E_{xt}^c \mu_{xt}),$$

$$D_{xt} \sim \text{Binomial}(E_{xt}^0, q_{xt}),$$

Com  $E[D_{xt}/E_{xt}^c] = \mu_{xt}$  e  $E[D_{xt}/E_{xt}^0] = \mu_{xt}$ , respectivamente.

2. **Componente estrutural:** o efeito da faixa-etária  $x$ , tempo calendário  $t$  e ano de nascimento (coorte)  $c = t - x$  são capturados por meio do preditor  $\eta_i$ , dado por:

$$\eta_{xt} = x + \sum_{i=1}^N \beta_x^{(i)} k_t^{(i)} + \beta_x^{(0)} g_{t-x}$$

3. **Função de Ligação:** a função de ligação  $g(.)$  associa o componente aleatório com o estrutural a partir de:

$$g(E(D_{xt}/E_{xt})) = \eta_{xt}.$$

Por mais que existam várias funções de ligações, é conveniente usar a ligação canônica associada a distribuição usada. Assim, usa-se ligação *log* para Poisson e *logit* para Binomial.

4. **Parâmetro de restrição:** a maioria dos modelos estocásticos de mortalidade só são identificados por uma transformação, e isso requer um parâmetro que restrinja e assegure a unicidade dos parâmetros estimados. Assim, tem-se:

$$\theta := (a_x, \beta_x^{(1)}, \dots, \beta_x^{(N)}, k_t^{(1)}, \dots, k_t^{(N)}, \beta_x^{(0)}, g_{t-x}).$$

A grande maioria dos modelos estocásticos de mortalidade se encaixam no GAPC, inclusive o modelo clássico. Brouhns, Denuit e Vermunt (2002), ajustou o modelo de Lee-Carter assumindo que o número de mortos segue uma distribuição Poisson e usou a função logarítmica como ligação em respeito à força de mortalidade  $\mu_{xt}$  (o valor populacional para a taxa de mortalidade), e substituindo o SVD por um modelo de Poisson log-bilinear.

Mais tarde, Renshaw e Heberman propõem um modelo que levasse em conta o efeito de coorte, neste caso, adicionando dois termos a equação do modelo:  $\beta^{(0)}g_{t-x}$ , onde o  $t - x$  representaria a coorte. Usando a mesma lógica do Brohns, o modelo de Renshaw-Heberman assume que o número de mortos segue uma distribuição de Poisson e utiliza a função logarítmica para ligar a  $\mu_{xt}$ . Os pesquisadores também notaram que haveria um problema em ajustar a distribuição de Poisson, visto que esta tem o pressuposto de que a média e a variância são iguais. Assim, estes pesquisadores também sugeriram a utilização de um termo de graduação Gompertz-Makeham, em combinação com um termo de ajuste de tendência por idade  $x$  dentro da Poisson para acomodar a superdispersão dos dados. Assim, o primeiro modelo proposto seria da seguinte forma:

$$\log(m_{x,t}) = a_x + b_x k_t + \beta^{(0)} g_{t-x}.$$

Os autores, entretanto, propõem o uso deste modelo considerando  $\beta^{(0)} = 1$ , visto que é uma estrutura mais simples e que resolve a maior parte dos problemas de instabilidade do modelo clássico.

Agora, não é projetado somente um termo e sim dois:  $k_t$  e  $g_{t-x}$ . Segue-se projetando o parâmetro da mesma forma como os modelos passados, como no modelo clássico de Lee-Carter, só que considerando que os dois parâmetros não possuem nenhuma interação, sendo independentes.

### 3.3 Métodos Coerentes

### 3.4 Li e Lee

Uma forma de contornar o problema de divergência entre a projeção de duas sub-populações é fixando o mesmo  $k_t$  e  $b_x$  para ambas. Assim, Li e Lee (2005) propuseram calcular os parâmetros para a população completa usando o método de Lee Carter. Estes parâmetros são denominados, agora,  $B_x$  e  $K_t$ . Além do mais, ajusta-se o  $K_t$  à expectativa de vida média da população em geral, e prossegue-se com a projeção de  $K_t$  como um passeio aleatório com *drift*.

Como o  $k_t$  e  $b_x$  são comuns para as projeções, o que se diferencia é o  $a_x$ , que deve ser estimado para cada sub-população. Assim, o  $a_x$  deve ser escolhido de tal forma que minimize os mínimos quadrados ordinários, chegando na seguinte estimativa:

$$a_{x,i} = \frac{\sum_{t=0}^T \log(m_{x,t,i})}{T+1},$$

sendo o índice  $i$  a subpopulação em estudo. Assim,  $a_{x+1} + B_x K_t$  é fator comum do modelo para a  $i$ -ésima população e  $B_x K_t$  que descreve a mudança na mortalidade em relação ao tempo. Os autores ainda propuseram uma medida  $R_C$  para mensurar a eficácia do fator comum do modelo para a  $i$ -ésima população,

$$R_{C,i} = 1 = \frac{\sum_{t=0}^T \sum_{x=0}^W [\log(m_{x,t,i}) - a_{x,i} - B_x K_t]^2}{\sum_{t=0}^T \sum_{x=0}^W [\log(m_{x,t,i}) - a_{x,i}]^2}.$$

Se o  $K_t$  não for ajustado,  $R_{C,i}$  não poderá ser maior do que a razão de explicação da aplicação do LC de forma separada, para a  $i$ -ésima subpopulação.

Os autores, então, aplicaram SVD para modelar a função  $\log(m_{x,t,i}) - a_{x,i} - B_x K_t$ .

### 3.5 Li, Lee e Gerland

Por conta de um problema enfrentado pela Divisão de Populações da Nações Unidas, para os anos em que se têm dados de mortalidade, há um declínio acelerado das taxas de mortalidade nas idades mais jovens, especialmente nas primeiras idades. Assim, se esse padrão permanecer, as taxas projetadas serão extremamente baixas. Isto pode fazer com que em algumas projeções a mortalidade infantil seja menor do que em outras fases da infância, mudando o padrão etário da mortalidade infantil sem ter certeza de que este é o padrão esperado para o futuro.

Estudos mais recentes têm mostrado que os padrões etários das taxas de declínio da mortalidade têm mudado. O declínio da mortalidade nas idades mais jovens tem desacelerado, enquanto o declínio da mortalidade nas idades mais avançadas tem aumentado. Como no modelo de Lee-Carter clássico o parâmetro que representa a mudança nas taxas de mortalidade é o  $b_x$ , diz-se que há uma rotação do vetor deste parâmetro.

Li, Lee e Gerland (2013) concluem que o padrão etário da mortalidade deve permanecer o mesmo: uma mortalidade infantil relativamente alta, atingindo um valor mínimo na adolescência e aumentando da mortalidade a partir daí. Assim, eles propõem que o coeficiente  $b_x$  converge para um valor constante para as idades de 0 a 65. Para as idades acima de 65 anos os coeficientes diminuem com a idade.

Para contornar o problema de divergência das projeções por sexo, os autores utilizam a metodologia proposta por Li e Lee (2005).

Os autores, então, propõem como primeiro passo mudar o formato das curvas de  $b_x$ , suavizando seus valores nas idades de 15 a 65 anos, igualando-os ao valor médio desta faixa etária, e reduzir este valor médio nas idades de 0 a 14 anos. Como  $\sum_x b_x = 1$ , para que o modelo tenha solução única, reduzir os valores nas idades mais jovens fará com que os valores aumentem nas idades mais avançadas, causando a rotação. Assim, mantém-se a razão  $m(0)/m(15 - 19)$  constante, entretanto, nota-se que a tendência desta razão é diminuir. O segundo passo, então, é suavizar a rotação de  $b_x$  gradualmente.

Denota-se a projeção da expectativa de vida para ambos os sexos no tempo  $t$  utilizando o método clássico de Lee Carter como  $e_o(t)$ , e o parâmetro de padrão etário de declínio de mortalidade associado a esse modelo  $b_o(x)$ . Define-se o padrão etário de declínio de mortalidade final como  $b_u(x)$ , e a expectativa de vida na qual essa rotação finaliza como  $e_o^u$ . Assim, o padrão etário de declínio de mortalidade no ano  $t$  será  $B(x, t)$ , e, por fim, define-se a função linear de pesos e a função de pesos suavizados, respectivamente, como:

$$w(t) = \frac{[e_o(t) - 80]}{(e_o^u - 80)},$$

$$w_s(t) = \{0, 5[1 + \sin[\frac{\pi}{2}(2w(t) - 1)]]\}^p$$

Assim,  $B(x, t)$  será:

$$B(x, t) = \begin{cases} b_o(x), & e_o(t) < 80, \\ (1 - w_s(t))b_o(x) + w_s(t)b_u(x), & 80 \leq e_o(t) < e_o^u, \\ b_u(x), & e_o^u \leq e_o(t) \end{cases}$$

Na equação de  $w(t)$  os valores variam de 0 a 1, mas a derivada não existe nestes mesmos valores, levando a mudanças não contínuas na taxa de declínio da mortalidade no início e fim da rotação. Assim, a função  $w_s(t)$  faz a mudança nas taxas ao longo da projeção. O valor de  $p$  que define a velocidade da rotação, sendo tomado como 0,5.

Por fim, os autores sugerem que a expectativa de vida seja projetada por meio do método clássico de Lee Carter, para que se achem os valores ajustados de  $K_t$  de modo a se ajustar a expectativa de vida projetada usando a rotação  $B(x, t)$ . Conhecendo os valores de  $b_u(x)$ ,  $e_o^u$ , e  $B(x, t)$ , a expectativa de vida projetada  $e_0(t)$  por sexo pode ser ajustada encontrando um valor de  $K(t)$ , que diferirá daquele de  $k_t$  no modelo Lee-Carter. Assim, o método Lee-Carter é estendido para:

$$\log[m_s(x, t)] = a_s(x) + B(x, t)K_s(t),$$

sendo que  $s$  representa as duas subpopulações: masculina e feminina.

## 4 Metodologia

Para confecção das projeções dos indicadores demográficos é necessário obter as séries históricas da taxa de mortalidade do Distrito Federal. Quanto maior o horizonte e mais fidedignos os dados, melhor será a projeção. Para calcular as taxas de mortalidade é imprescindível contar com as informações sobre a quantidade de óbitos por sexo e idade, bem como a população exposta ao risco de morte, referente ao dia 7 de junho do ano de referência. O Distrito Federal, por natureza, não possui um horizonte tão grande de dados, visto que sua inauguração foi em 1960. Além do mais, o período de 1960 a 1970 é marcado por uma grande migração de pessoas, entre o censo de 1960 e 1970 a população na capital quase quadruplicou de tamanho. Desta forma, para o estudo será utilizado o período de 1980 a 2022 para as projeções.

### 4.1 Conjunto de dados

O Sistema de Informação sobre Mortalidade (SIM) foi implantado em 1975 no Brasil pelo Ministério da Saúde, a fim de padronizar a coleta e disponibilização dos dados sobre óbitos. O Departamento de Informação e Informática do Sistema Único de Saúde (DATASUS) disponibiliza as declarações de óbitos, documento básico do SIM e padronizado nacionalmente, desde o ano de 1979 para todos os estados do Brasil e o Distrito Federal. O SIM se mostra confiável, a Organização Mundial de Saúde (OMS) o classificou como um sistema de qualidade intermediária, assim como os sistemas da Bélgica, Alemanha e França. Além do mais, o Ministério da Saúde avalia o SIM com uma cobertura suficiente e adequada para o Distrito Federal para os anos de 2006 e 2011, respectivamente. Desta forma, o SIM é uma fonte confiável para obter o quantitativo de óbitos segundo sexo e idade simples para cada ano de 1980 a 2022.

Os dados populacionais, denominador da taxa de mortalidade, foram obtidos a partir dos censos demográficos. Foram utilizados os censos de 1970, 1980, 1991, 2000, 2010 e 2022. Foram feitas algumas correções nestes resultados, visto que realizar o censo em um país continental é um grande desafio e está sujeito a alguns erros. Os principais erros que podem ser cometidos são: erro de cobertura e de declaração de idade.

O primeiro erro está relacionado à impossibilidade de aplicar o questionário censitário em toda a população em um país de dimensão continental, além do mais também ocorre, de forma mais rara, a contagem duplicada de indivíduos. Os erros por declaração de idade podem ocorrer por dígitos preferenciais, ou até mesmo por questões sociais, onde parecer mais novo ou mais velho coloca a pessoa em um status maior.

Assim, para resolver essas questões envolvendo a declaração de idade, foram agru-

padas as idades em grupos quinquenais, de 5 em 5 anos. Para a confecção das taxas de mortalidade, é necessária a população ano a ano; assim, foi utilizada interpolação log-linear entre dois censos consecutivos para obter a população de 1980 a 2022. Já para o quantitativo de óbitos foram obtidas as declarações de óbitos do Distrito Federal de 1980 a 2022 por meio do SIM.

## 4.2 Projeção da taxa de mortalidade

Com as taxas de mortalidade específicas ano a ano de 1980 a 2022, foram aplicados os métodos de projeção de mortalidade. Foi utilizado o *Software R* para o cálculo das projeções, utilizando três pacotes para a aplicação de todos os métodos necessários: *demography*, *StMoMo* e *mortcast*. Antes de realizar a projeção com toda a série histórica, foi feito um teste para entender o desempenho dos métodos utilizados. Assim, projetou-se as taxas de mortalidade para o ano censitário de 2022, usando a série histórica de 1980 até 2005. Desta forma, comparou-se os resultados obtidos com os resultados observados nos anos de 2010 e 2022. Após isso, prosseguiu-se com as projeções utilizando todo o horizonte de dados disponível.

### 4.2.1 Projeções do IBGE

Como um dos objetivos é comparar os resultados obtidos com as projeções do IBGE. Para isso, é fundamental compreender as diferenças metodológicas entre as projeções realizadas neste estudo e aquelas publicadas pelo instituto. O IBGE produz projeções populacionais, bem como estimativas dos indicadores da tábua de vida, para as 27 Unidades Federativas (UFs) e para o Brasil, no período de 2000 a 2070.

Uma das hipóteses adotadas pelo IBGE é a convergência dos níveis de mortalidade entre todas as UFs. Assim, a expectativa de vida ao nascer utilizada nas tábuas limite é de 85 anos para homens e 88 anos para mulheres, com base no conjunto de Tábuas Modelo Oeste das Nações Unidas.

Nesta projeção, foi utilizado um ajuste logístico para projetar a expectativa de vida ao nascer no período de 2023 a 2100. Com esse padrão etário de mortalidade, aplicou-se uma função linear para calcular as taxas de mortalidade.

## 5 Resultados

### 5.1 Dados Obtidos

Inicialmente, foram coletados os dados populacionais dos Censos Demográficos realizados pelo IBGE de 1980 a 2022. Os dados foram agrupados em idades quinquenais, usando o grupo aberto na idade de 80 anos. Prosseguindo com a interpolação log-linear entre dois anos censitários para obter as estimativas populacionais ano a ano.

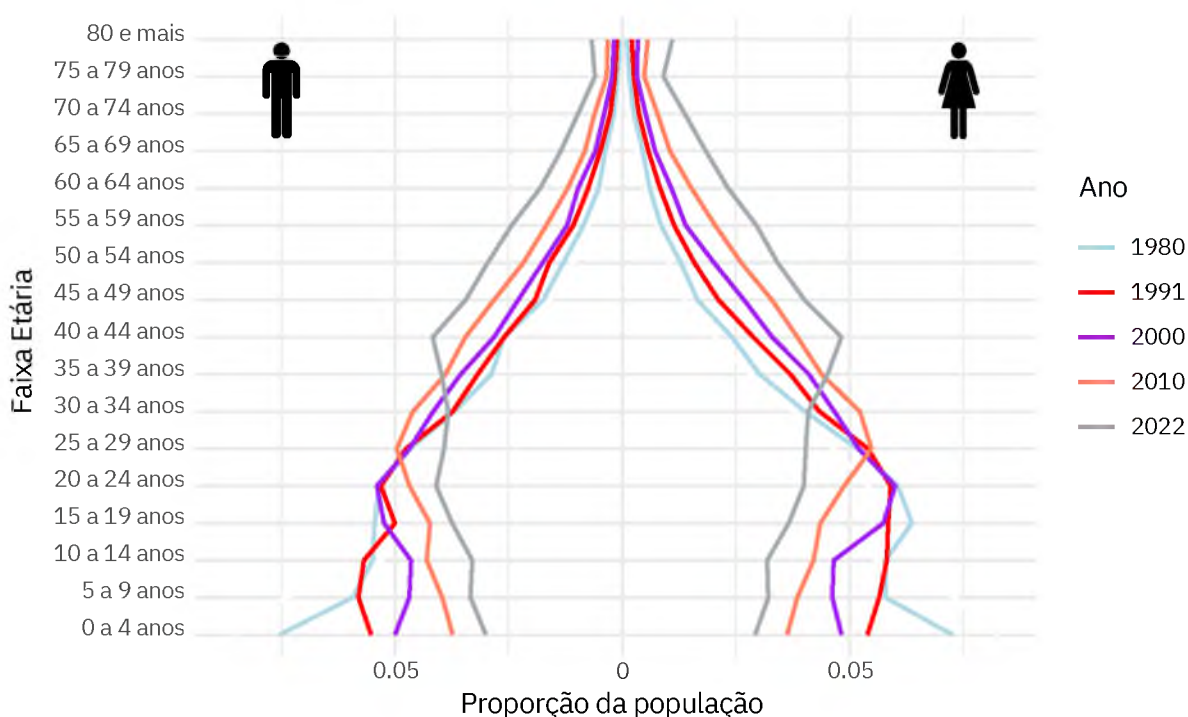


Figura 1: Distribuição da população por sexo e grupos de idade. Distrito Federal. 1980-2022

Fonte: Elaboração própria, Dados dos Censos Demográficos de 1980, 1991, 2000, 2010 e 2022

Pela Figura 1 é possível observar uma mudança significativa na estrutura etária da população ao longo dos anos. Nota-se uma redução nas primeiras faixas de idade, enquanto as faixas etárias mais avançadas crescem, destacando o envelhecimento populacional. A diminuição na faixa etária de "0 a 4 anos" indica uma possível queda nas taxas de natalidade. É importante ressaltar que, no censo de 1980 a faixa de idade com maior proporção era a de "0 a 4 anos", enquanto, no censo de 2022 a faixa etária mais frequente é a de "40 a 44 anos".

Após a coleta dos dados populacionais, foram coletados os quantitativos de óbitos por meio do DATASUS. Com todos os dados coletados, foi possível calcular as taxas de

mortalidade de 1980 a 2022.

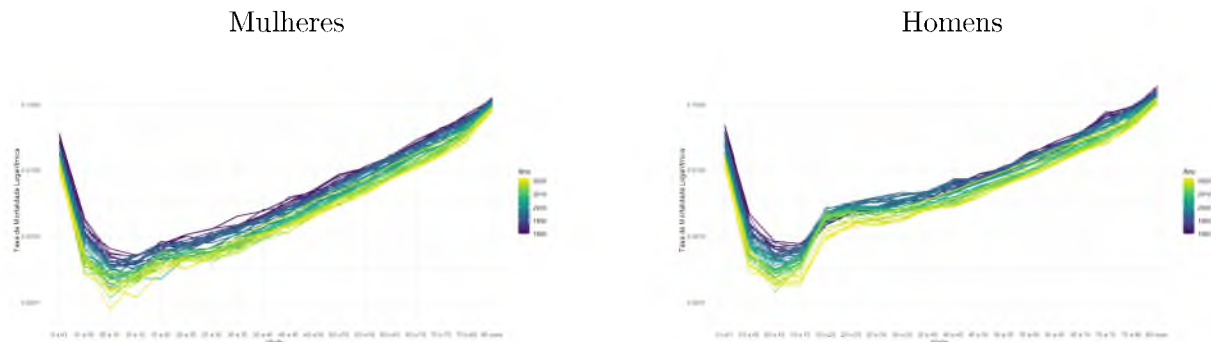


Figura 2: Taxa de mortalidade segundo grupos de idade e sexo. Distrito Federal. 1980-2022

Fonte: Elaboração própria, Dados dos Censos Demográficos de 1980 a 2022 e dados do SIM de 1980 a 2022

Pelas figuras acima é possível ver as taxas de mortalidade calculadas por sexo. Observa-se que há uma diminuição nas taxas com o passar do tempo, exceto nos anos pandêmicos de 2020 e 2021, em que houve um aumento nas taxas. Vê-se, também, que a população feminina possui valores mais baixos do que a masculina, além do *accident hump* que acomete os homens em todos os anos de estudo.

## 5.2 Simulações

Para compreender a confiabilidade das projeções, foi feita primeiramente uma simulação com as três metodologias independentes escolhidas: Lee e Carter, Lee e Miller e Renshaw e Heberman. Para fazer o primeiro estágio da projeção, foi utilizado o período de 1980 a 2005 para projetar as taxas até 2022 e comparar com os dados observados.

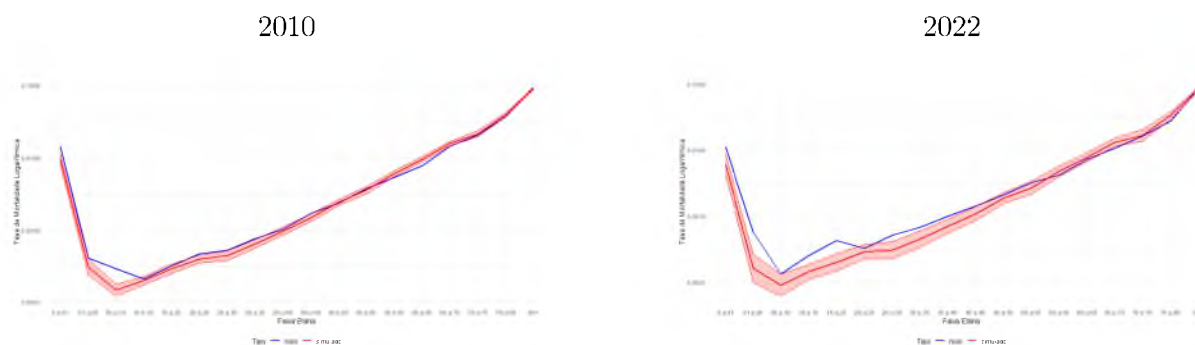


Figura 3: Taxa de mortalidade segundo método independente de Lee-Carter clássico. Mulheres. 2010 e 2022

Fonte: Elaboração própria, Dados dos Censos Demográficos de 1980 a 2022 e dados do SIM de 1980 a 2022

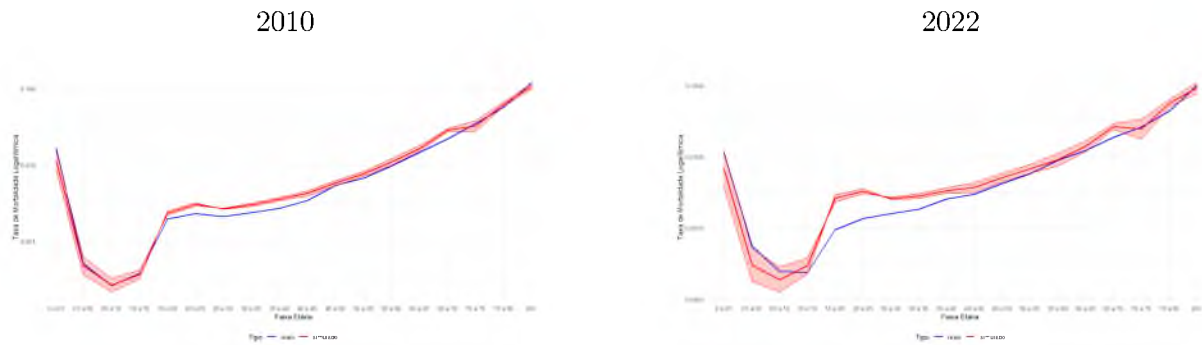


Figura 4: Taxa de mortalidade segundo método independente de Lee-Carter clássico. Homens. 2010 e 2022

Fonte: Elaboração própria, Dados dos Censos Demográficos de 1980 a 2022 e dados do SIM de 1980 a 2022

Observa-se que, em 2010, para as mulheres, grande parte das faixas etárias está dentro do intervalo de confiança ou muito próxima dele. Para os homens, verifica-se que, entre as idades de 15 a 45 anos, nenhuma está dentro do intervalo de confiança, embora estejam próximas, enquanto as demais faixas etárias estão incluídas. Ao analisar o ano de 2022, nota-se que o modelo subestima as taxas femininas nas idades iniciais, enquanto, para os homens, há uma superestimação das taxas no *accident hump*. Sendo assim, observa-se um declínio na qualidade do modelo à medida que o horizonte temporal se amplia.

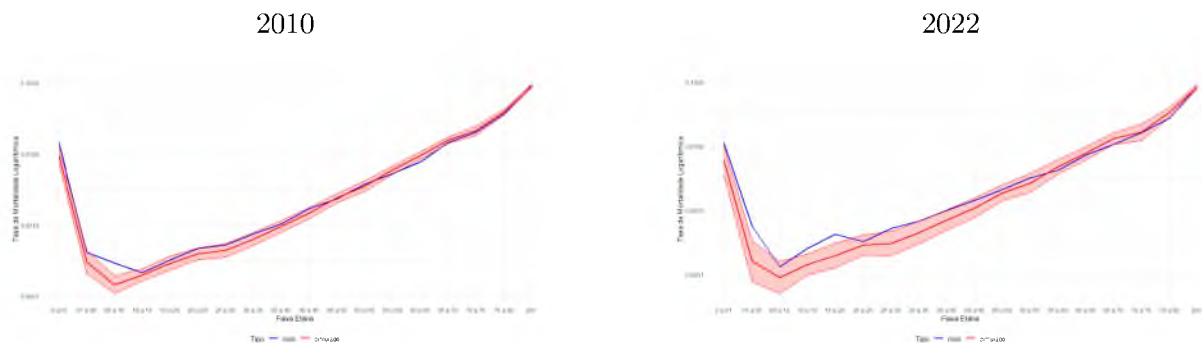


Figura 5: Taxa de mortalidade segundo método independente de Lee-Miller. Mulheres. 2010 e 2022

Fonte: Elaboração própria, Dados dos Censos Demográficos de 1980 a 2022 e dados do SIM de 1980 a 2022

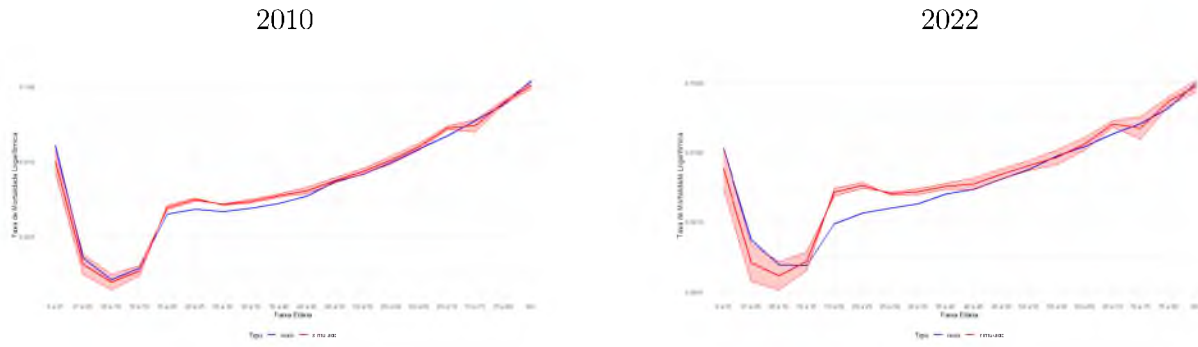


Figura 6: Taxa de mortalidade segundo método independente de Lee-Miller. Homens. 2010 e 2022

Fonte: Elaboração própria, Dados dos Censos Demográficos de 1980 a 2022 e dados do SIM de 1980 a 2022

Como o método de Lee-Miller é bem parecido com o de Lee-Carter, apenas apresentando um ajuste do parâmetro  $k_t$  de acordo com a  $e_0$ , ambos os métodos apresentaram resultados bem parecidos. Em 2010, a maioria das faixas etárias está dentro ou próxima do intervalo de confiança, enquanto, em 2022, o modelo subestima as taxas femininas nas idades iniciais e superestima as masculinas no *accident hump*, indicando uma perda de qualidade com o aumento do horizonte temporal. O que se diferencia entre os dois métodos é que há um aumento no intervalo de confiança, sobretudo em 2022.

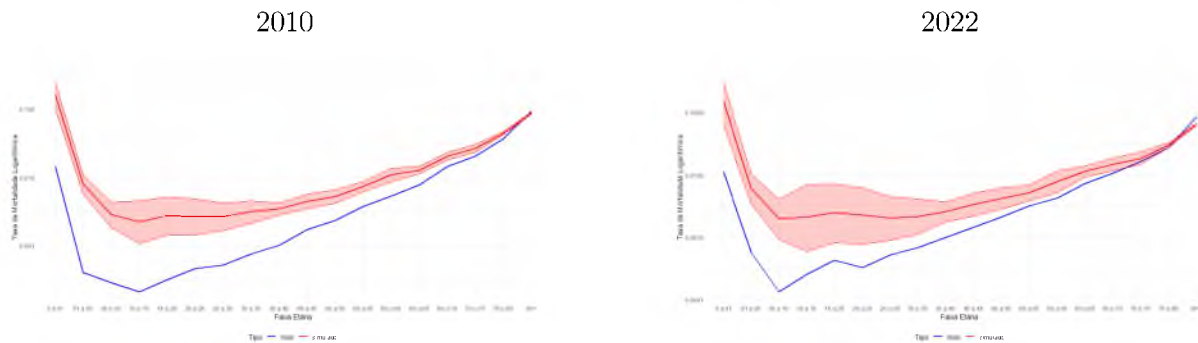


Figura 7: Taxa de mortalidade segundo método independente de Renshaw-Haberman. Mulheres. 2010 e 2022

Fonte: Elaboração própria, Dados dos Censos Demográficos de 1980 a 2022 e dados do SIM de 1980 a 2022

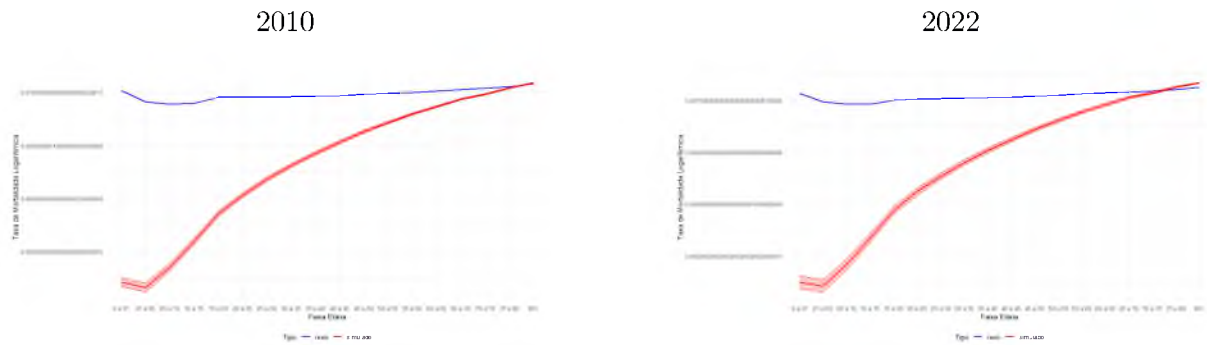


Figura 8: Taxa de mortalidade segundo método independente de Renshaw-Haberman. Homens. 2010 e 2022

Fonte: Elaboração própria, Dados dos Censos Demográficos de 1980 a 2022 e dados do SIM de 1980 a 2022

A análise dos gráficos mostra que, em 2010 e 2022, o modelo de Renshaw-Haberman superestima a mortalidade em quase todas as idades para a população feminina e que poucas idades entram no intervalo de confiança, por mais que estejam próximas; enquanto para os homens há uma subestimação da mortalidade em todos os anos. O baixo ajuste do modelo para a população masculina acontece pela divergência das interações do cálculo da verossimilhança para o modelo não-linear utilizado. O baixo desempenho pode ter ocorrido pelo curto horizonte de dados utilizados na simulação, 25 anos.

### 5.3 Projeção em dois estágios

Como as duas metodologias mostraram ter desempenhos razoáveis nas simulações, e o modelo de Renshaw-Haberman poderia ter um desempenho melhor com o aumento do horizonte de dados, decidiu-se prosseguir com a projeção em duas etapas para os 3 modelos.

### 5.3.1 Lee Carter

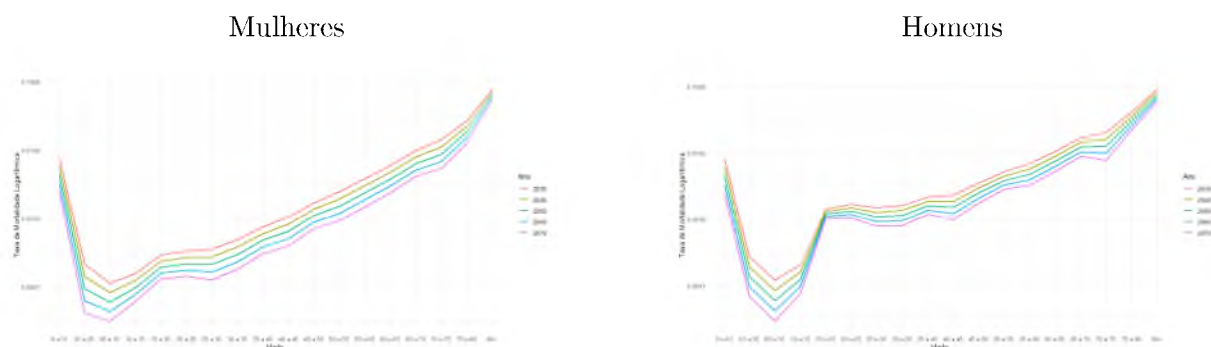


Figura 9: Taxa de mortalidade projetada segundo grupos de idade e sexo pelo método independente de Lee-Carter. Distrito Federal. 1980-2070

Fonte: Elaboração própria, Dados dos Censos Demográficos de 1980 a 2022 e dados do SIM de 1980 a 2022

Os gráficos apresentados, Figura 16 e Figura 17, mostram a projeção da taxa de mortalidade feminina e masculina, utilizando o método independente de Lee-Carter. Ambos indicam uma tendência decrescente nas taxas de mortalidade ao longo do tempo, sendo mais expressiva na população feminina. Observa-se, também, que a faixa etária de 15 a 20 anos masculina foi a que apresentou a menor queda nas taxas. A partir dessas taxas foi possível projetar a taxa de mortalidade com o método de Lee, Li Gerland.

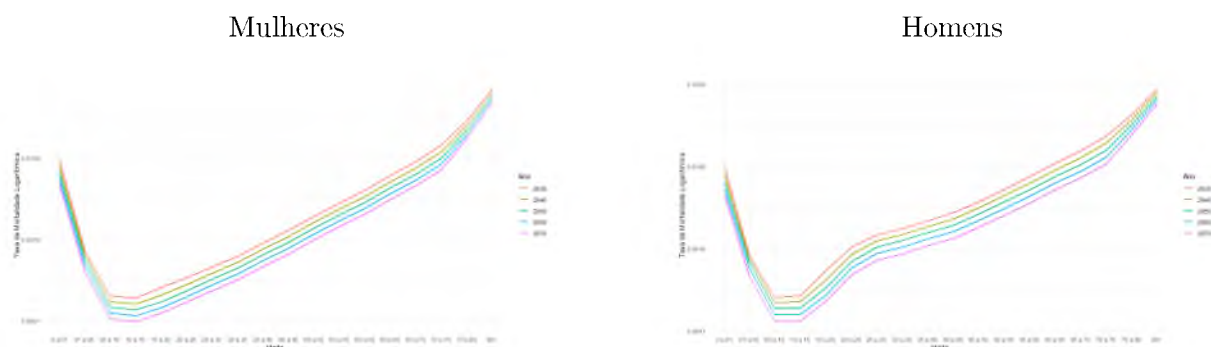


Figura 10: Taxa de mortalidade projetada segundo grupos de idade e sexo pelo método de Lee, Li e Gerlando usando a projeção em primeiro estágio de Lee-Carter. Distrito Federal. 1980-2070

Fonte: Elaboração própria, Dados dos Censos Demográficos de 1980 a 2022 e dados do SIM de 1980 a 2022

O segundo estágio de projeção apresenta taxas menores do que as calculadas pelo método de Lee Carter. Observa-se, também, que as curvas para ambos os sexos estão muito mais suaves.

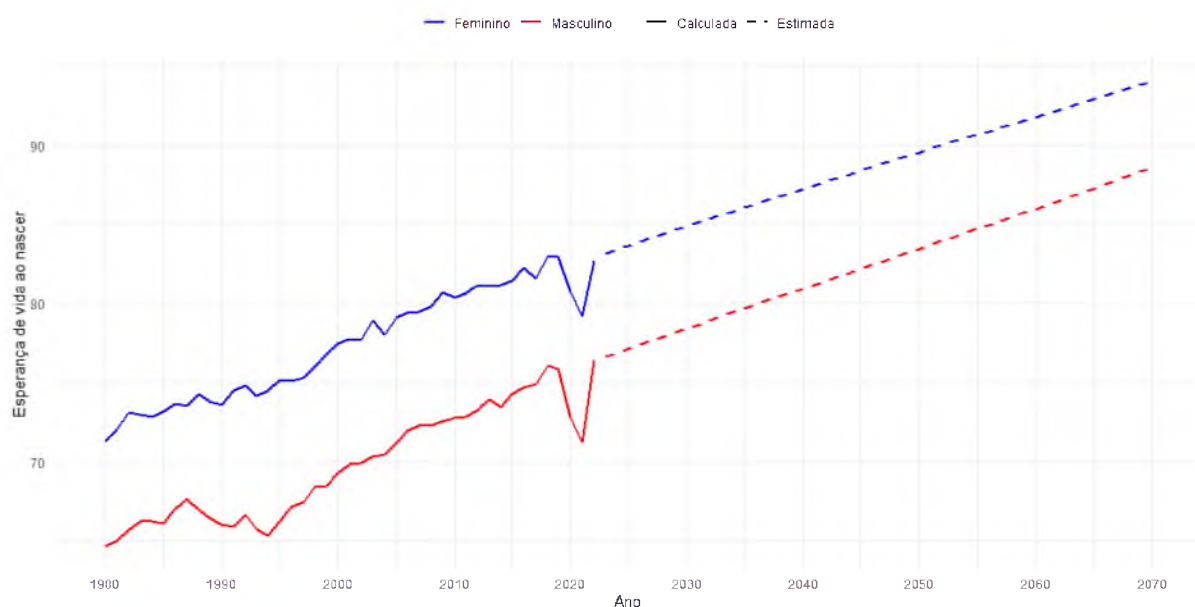


Figura 11: Esperança de vida projetada pelo método de Lee, Li e Gerland para o sexo Masculino e Feminino usando a projeção em primeiro estágio de Lee-Carter. Distrito Federal. 1980-2070

Fonte: Elaboração própria, Dados dos Censos Demográficos de 1980 a 2022 e dados do SIM de 1980

O gráfico apresenta a expectativa de vida ao nascer projetada pelo método de Lee, Li e Gerland. É visto uma tendência crescente na expectativa de vida ao longo do tempo, com uma queda na expectativa nos anos pandêmicos, 2020 a 2022. A projeção, representada pela linha pontilhada, indica ainda um crescimento na expectativa para entre os anos de 2023 e 2030.

### 5.3.2 Lee Miller

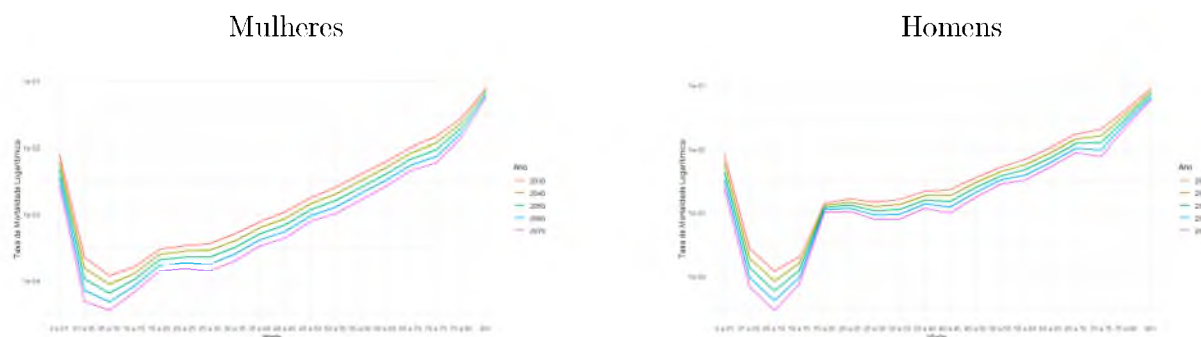


Figura 12: Taxa de mortalidade projetada segundo grupos de idade e sexo pelo método independente de Lee-Miller. Distrito Federal. 1980-2070

Fonte: Elaboração própria, Dados dos Censos Demográficos de 1980 a 2022 e dados do SIM de 1980 a 2022

As Figuras 23 e 24 mostram a projeção das taxas de mortalidade para a população feminina e masculina, utilizando o método independente de Lee-Miller. Os resultados indicam uma tendência de redução das taxas ao longo do tempo, com um declínio mais acentuado entre as mulheres. Além disso, as projeções são bastante semelhantes às obtidas pelo método de Lee-Carter, assim como observado nas simulações anteriores.

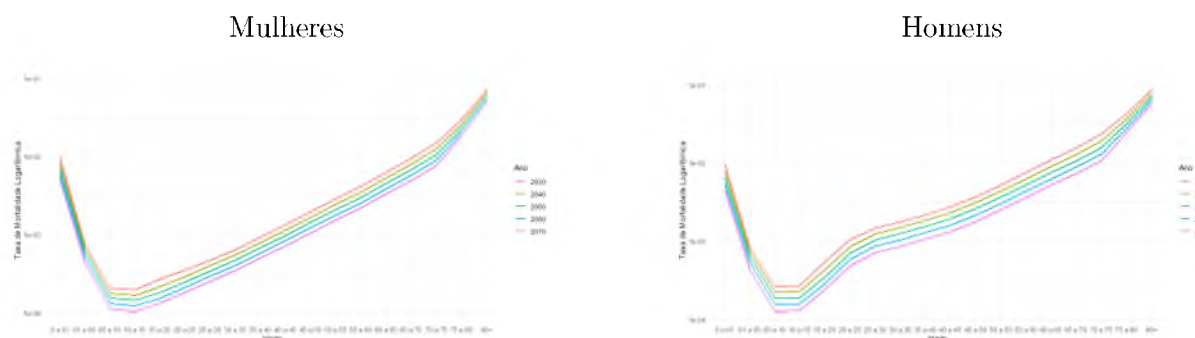


Figura 13: Taxa de mortalidade projetada segundo grupos de idade e sexo pelo método de Lee, Li e Gerlando usando a projeção em primeiro estágio de Lee-Miller. Distrito Federal. 1980-2070

Fonte: Elaboração própria, Dados dos Censos Demográficos de 1980 a 2022 e dados do SIM de 1980 a 2022

O segundo estágio de projeção apresenta taxas menores do que as calculadas pelo método de Lee Miller e mais suavizados.

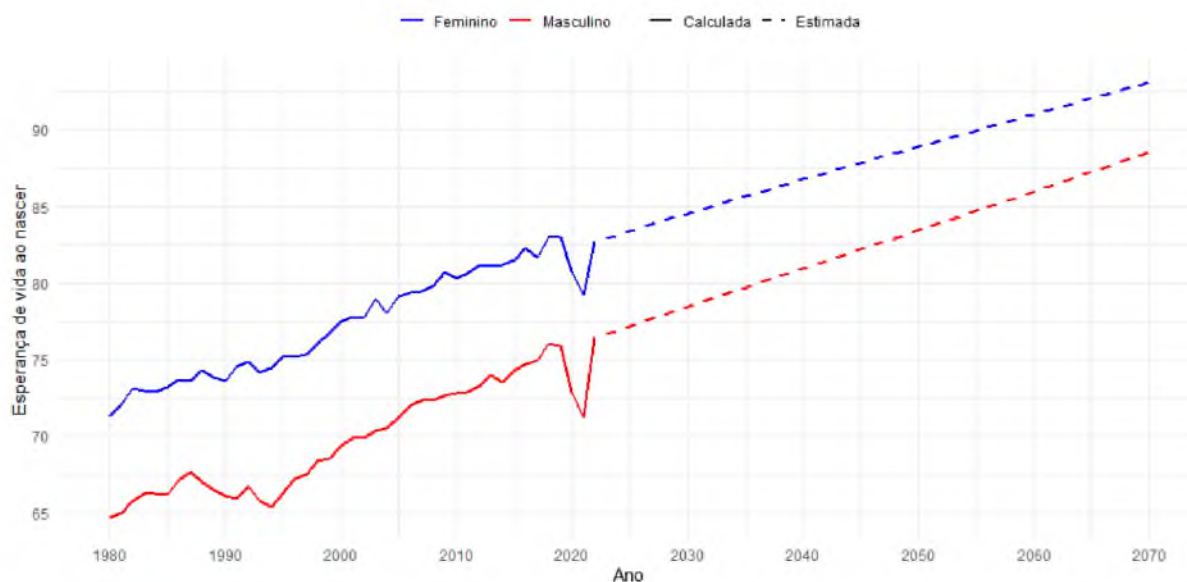


Figura 14: Esperança de vida projetada pelo método de Lee, Li e Gerland para o sexo Masculino e Feminino usando a projeção em primeiro estágio de Lee-Miller. Distrito Federal. 1980-2070

Fonte: Elaboração própria, Dados dos Censos Demográficos de 1980 a 2022 e dados do SIM de 1980

O gráfico exibe a projeção da expectativa de vida ao nascer utilizando o método de Lee-Li. Observa-se uma tendência de crescimento ao longo do tempo, interrompida por uma queda nos anos de pandemia, entre 2020 e 2022. A projeção, representada pela linha pontilhada, sugere uma retomada do aumento na expectativa de vida entre 2023 e 2030.

### 5.3.3 Renshaw-Haberman

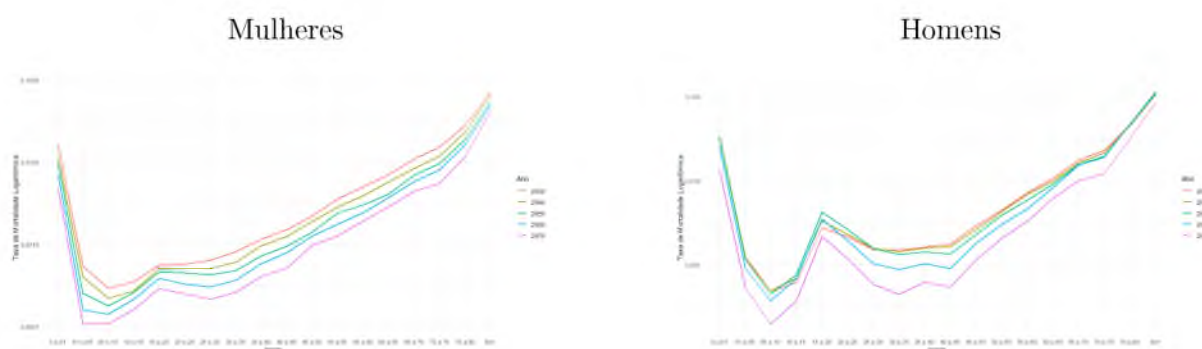


Figura 15: Taxa de mortalidade projetada segundo grupos de idade e sexo pelo método independente de Renshaw-Haberman. Distrito Federal. 1980-2070

Fonte: Elaboração própria, Dados dos Censos Demográficos de 1980 a 2022 e dados do SIM de 1980 a 2022

Nas figuras acima, é possível observar os resultados da projeção pelo método de Renshaw-Haberman. Com o aumento do horizonte da projeção, o cálculo das interações da verossimilhança passou a convergir para o sexo masculino. No entanto, o comportamento da curva ainda apresenta algumas inconsistências, especialmente na faixa etária de 15 a 20 anos. Já para a população feminina, os dados parecem mais consistentes.

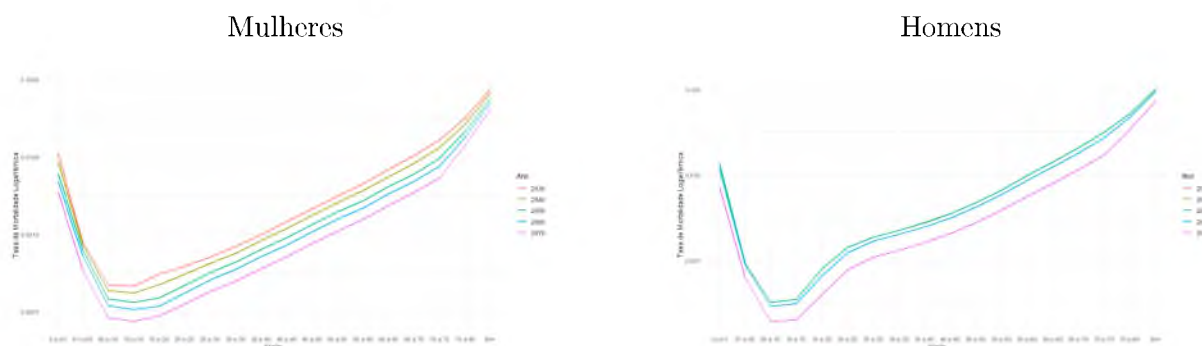


Figura 16: Taxa de mortalidade projetada segundo grupos de idade e sexo pelo método de Lee, Li e Gerlando usando a projeção em primeiro estágio de Renshaw-Haberman. Distrito Federal. 1980-2070

Fonte: Elaboração própria, Dados dos Censos Demográficos de 1980 a 2022 e dados do SIM de 1980 a 2022

O segundo estágio de projeção apresenta taxas mais baixas e suavizadas para ambos os sexos. No caso do sexo masculino, observa-se que, nas três primeiras décadas (2023 a 2050), os valores são extremamente próximos, resultando na sobreposição das linhas correspondentes no gráfico.

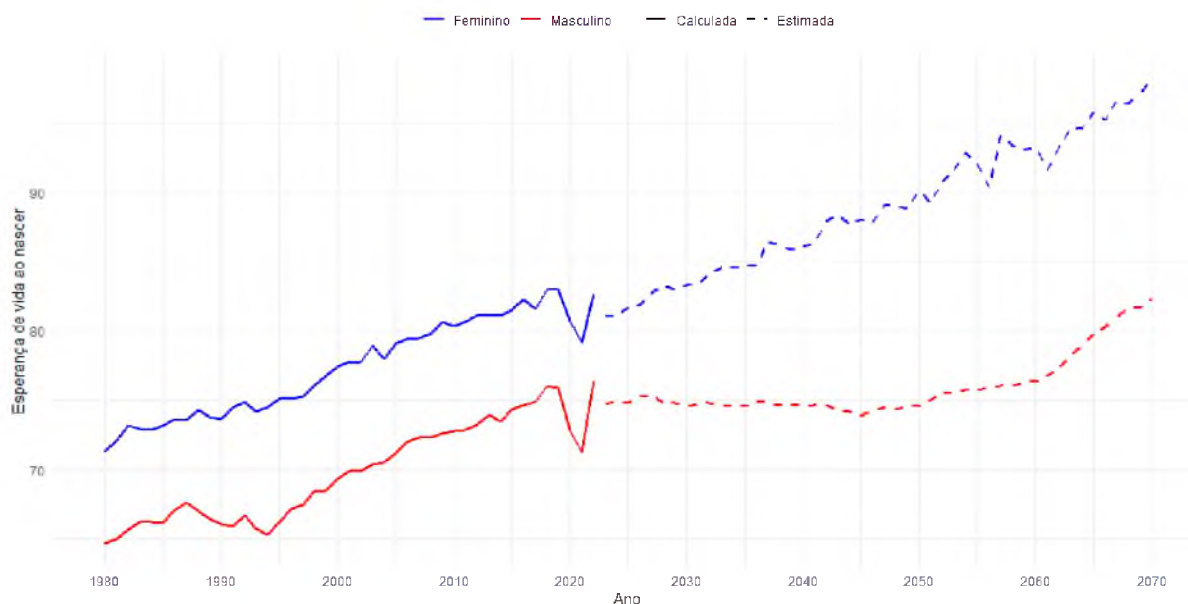


Figura 17: Esperança de vida projetada pelo método de Lee, Li e Gerland para o sexo Masculino e Feminino usando a projeção em primeiro estágio de Renshaw-Haberman. Distrito Federal. 1980-2070

Fonte: Elaboração própria, Dados dos Censos Demográficos de 1980 a 2022 e dados do SIM de 1980

Observa-se que as projeções indicam um aumento na expectativa de vida feminina, seguindo um padrão de crescimento linear. Já para a população masculina, a expectativa de vida permanece estagnada até 2055, quando passa a apresentar um crescimento no indicador.

### 5.3.4 Comparação entre os métodos e outras projeções

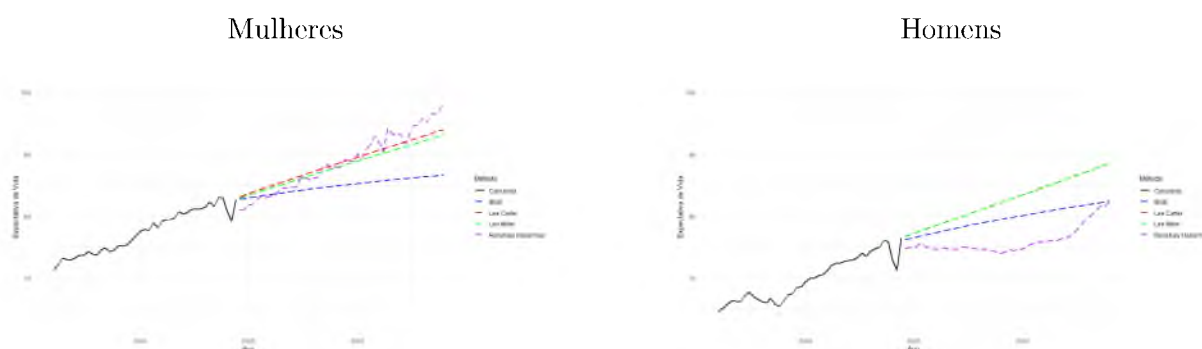


Figura 18: Expectativa de vida ao nascer projetada e calculada segundo método e sexo. Distrito Federal. 1980-2070

Fonte: Elaboração própria, Dados dos Censos Demográficos de 1980 a 2022, SIM de 1980 a 2022 e projeção 2000-2070 do IBGE

É possível observar pelo gráfico que os métodos de Lee-Carter e Lee-Miller resultaram em valores bastante próximos. Para os homens, as estimativas são praticamente idênticas, enquanto para as mulheres, o método de Lee-Carter gerou valores ligeiramente superiores aos de Lee-Miller. O método de Renshaw-Haberman também apresentou resultados próximos a essas duas metodologias para a população feminina, diferenciando-se apenas no final da série, quando projeta valores mais altos. No entanto, para a população masculina, o método de Renshaw-Haberman projetou valores significativamente mais baixos em comparação com os demais, permanecendo quase estagnado, com um leve aumento na expectativa de vida apenas no final da série.

Ao comparar os dados projetados com a projeção do IBGE, percebe-se que, para a população feminina, todos os métodos baseados em Lee-Carter apresentaram valores próximos entre si, enquanto a projeção do IBGE gerou valores consideravelmente menores. Para todos os métodos de Lee-Carter, a expectativa de vida feminina em 2070 ultrapassa os 90 anos, enquanto a projeção do IBGE indica 86 anos neste mesmo ano. No caso da população masculina, observa-se um padrão semelhante nos métodos Lee-Carter e Lee-Miller, enquanto o método de Renshaw-Haberman gera valores significativamente inferiores aos do IBGE.

## 6 Conclusão

Os modelos de Lee-Carter, embora apresentem resultados satisfatórios e sejam amplamente utilizados por muitos países para projeções oficiais de mortalidade, requerem uma base de dados extensa e, sobretudo, confiável. Além disso, esses modelos foram originalmente desenvolvidos para países desenvolvidos, como Lee-Carter, Lee-Miller e Lee-Li, que foram aplicados aos Estados Unidos, enquanto o método de Renshaw-Haberman foi baseado em dados do Reino Unido, especificamente do País de Gales.

O Distrito Federal já possui, intrinsecamente, uma série histórica reduzida devido à sua fundação em 1960. Além disso, o grande fluxo migratório ocorrido entre sua criação e 1980 também impacta as taxas a serem utilizadas no modelo. Outro fator relevante é que o Distrito Federal não apresenta a mesma experiência de mortalidade dos países nos quais os modelos foram originalmente desenvolvidos, pois o Brasil, sendo um país em desenvolvimento, ainda enfrenta índices de mortalidade elevados, sobretudo a população masculina.

Por meio dos censos demográficos, é possível observar que a estrutura etária do Distrito Federal tem passado por mudanças. Nota-se um crescimento da população idosa ao longo do tempo, refletindo a melhoria na expectativa de vida. A análise das taxas de mortalidade revela uma tendência de redução, embora os homens entre 15 e 30 anos ainda apresentem índices mais elevados. No entanto, essa diferença tem diminuído progressivamente ao longo dos anos.

As simulações das projeções dos métodos de Lee-Carter e Lee-Miller, mesmo com um horizonte de dados de 25 anos, produziram resultados satisfatórios para as taxas de mortalidade feminina. Para a população masculina, as simulações foram adequadas nas faixas etárias mais jovens e mais idosas, porém, entre 15 e 45 anos, as projeções superestimaram as taxas de mortalidade. Já as simulações utilizando o método de Renshaw-Haberman apresentaram divergências em relação aos dados observados para a população feminina e, no caso da população masculina, os cálculos não convergiram.

O método de Lee, Li e Gerland, quando aplicado às três projeções independentes, resultou em uma suavização das curvas de mortalidade. Assim como nas simulações anteriores, os métodos de Lee-Carter e Lee-Miller apresentaram valores bastante semelhantes. Ao analisar a expectativa de vida ao nascer, observa-se que, para a população masculina, as projeções são praticamente idênticas, enquanto, para a feminina, o método de Lee-Carter gera valores ligeiramente superiores. Além do mais, quando comparado com os resultados da projeção de 2000 a 2070 do IBGE, estes dois métodos produziram valores bem mais altos para a expectativa de vida, ultrapassando a marca de 90 anos de expectativa de vida ao nascer para as mulheres.

O método de Renshaw-Haberman, quando aplicado à população feminina após a utilização do método de Lee, Li e Guerland, gerou valores próximos aos de Lee-Carter e Lee-Miller. A expectativa de vida ao nascer projetada para as mulheres, segundo o método de Renshaw-Haberman, inicia-se ligeiramente abaixo dos demais métodos, mas, ao final da série, ultrapassa suas projeções.

Para a população masculina, o método de Renshaw-Haberman apresenta valores mais elevados para a taxa de mortalidade, o que resulta em uma expectativa de vida menor. Como a projeção da taxa de mortalidade se mantém próxima nas três primeiras décadas (2023-2050), a expectativa de vida inicialmente se mantém estagnada, apresentando um aumento apenas no final da série. Quando comparada à projeção do IBGE, observa-se que a expectativa de vida masculina estimada pelo método de Renshaw-Haberman é significativamente inferior à prevista pelo instituto.

De modo geral, o melhor método seria o de Lee, Li e Gerland, utilizando o método de Lee-Miller no primeiro estágio da projeção. Isso porque o método de Lee-Miller apresentou os melhores resultados entre os três métodos analisados, além de se destacar do método de Lee-Carter por ajustar o  $k_t$  com base na expectativa de vida.

## Referências

- ALHO, J. M. Modeling and forecasting us mortality: Comment. *Journal of the American Statistical Association*, JSTOR, v. 87, n. 419, p. 673–674, 1992.
- BROUHNS, N.; DENUIT, M.; VERMUNT, J. K. A poisson log-bilinear regression approach to the construction of projected lifetables. *Insurance: Mathematics and economics*, Elsevier, v. 31, n. 3, p. 373–393, 2002.
- CASTRO, L. G. de et al. Projeções dos níveis e padrões da mortalidade no brasil e grandes regiões 1950-2010-2110 pelo método coerente lee-carter estendido e outros: a tábua br-geracional e o risco de longevidade nas instituições previdenciárias do país. Universidade Federal de Minas Gerais, 2019.
- CRIMMINS, E. M. et al. Differences between men and women in mortality and the health dimensions of the morbidity process. *Clinical chemistry*, Oxford University Press, v. 65, n. 1, p. 135–145, 2019.
- FOZ, G. de. *Métodos demográficos: uma visão desde os países de língua portuguesa*. [S.l.]: Blucher Open Access, 2021.
- GIROSI, F.; KING, G. Understanding the lee-carter mortality forecasting method. *Gking. Harvard. Edu*, 2007.
- HYNDMAN, R. J.; BOOTH, H.; YASMEEN, F. Coherent mortality forecasting: the product-ratio method with functional time series models. *Demography*, Duke University Press, v. 50, n. 1, p. 261–283, 2013.
- LEE, R.; MILLER, T. Evaluating the performance of the lee-carter method for forecasting mortality. *Demography*, Springer, v. 38, n. 4, p. 537–549, 2001.
- LEE, R. D.; CARTER, L. R. Modeling and forecasting u. s. mortality. *Journal of the American Statistical Association*, [American Statistical Association, Taylor Francis, Ltd.], v. 87, n. 419, p. 659–671, 1992. ISSN 01621459. Disponível em: <http://www.jstor.org/stable/2290201>.
- LI, N.; LEE, R. Coherent mortality forecasts for a group of populations: An extension of the lee-carter method. *Demography*, Springer, v. 42, p. 575–594, 2005.
- LI, N.; LEE, R.; GERLAND, P. Extending the lee-carter method to model the rotation of age patterns of mortality decline for long-term projections. *Demography*, Duke University Press, v. 50, n. 6, p. 2037–2051, 2013.
- MCCULLAGH, P. *Generalized linear models*. [S.l.]: Routledge, 2019.
- RENSHAW, A. E.; HABERMAN, S. A cohort-based extension to the lee-carter model for mortality reduction factors. *Insurance: Mathematics and economics*, Elsevier, v. 38, n. 3, p. 556–570, 2006.
- THOMPSON, W. S. Population studies. *American Journal of Sociology*, University of Chicago Press, v. 50, n. 6, p. 436–442, 1945.

VASCONCELOS, A. M. N.; GOMES, M. M. F. Transição demográfica: a experiência brasileira. Secretaria de Vigilância em Saúde, Ministério da Saúde, 2012.

VILLEGAS, A. M.; KAISHEV, V. K.; MILLOSSOVICH, P. Stmomo: An r package for stochastic mortality modeling. *Journal of Statistical Software*, v. 84, p. 1–38, 2018.