



Universidade de Brasília  
Departamento de Estatística

**Modelagem Estocástica dos Preços do Bitcoin: Análise Intradiária e Diária  
com Predições**

**Arthur Rodrigues Pereira Carvalho**

Trabalho de Conclusão de Curso para o  
Departamento de Estatística da Universi-  
dade de Brasília como parte dos requisitos  
necessários para obtenção do grau de Ba-  
charel em Estatística.

**Brasília  
2025**

Arthur Rodrigues Pereira Carvalho

**Modelagem Estocástica dos Preços do Bitcoin: Análise Intradiária e Diária  
com Predições**

Orientador: Prof. Felipe Quintino

Coorientador: Prof. Helton Saulo

Trabalho de Conclusão de Curso para o  
Departamento de Estatística da Universi-  
dade de Brasília como parte dos requisitos  
necessários para obtenção do grau de Ba-  
charel em Estatística.

**Brasília  
2025**

# Sumário

Lista de Figuras . . . . .	4
Lista de Tabelas . . . . .	5
<b>1 Introdução . . . . .</b>	<b>9</b>
<b>2 Metodologia . . . . .</b>	<b>11</b>
2.1 Uma Classe de Modelos de Volatilidade Estocástica . . . . .	11
2.1.1 Movimento Browniano e Processos Derivados . . . . .	11
2.1.2 Escolha do Modelo de Volatilidade Estocástica . . . . .	14
2.1.3 Processo GOU–FE com Ruído Movimento Browniano Fracionário . . . . .	16
2.1.4 Método de Euler-Maruyama . . . . .	17
2.1.5 Estimação dos Parâmetros . . . . .	18
2.1.6 Testes de Diagnóstico e Comparação de Modelos . . . . .	20
2.2 Modelo ACD . . . . .	22
2.2.1 Modelo ACD Exponencial . . . . .	23
2.2.2 Modelo ACD Weibull . . . . .	24
2.2.3 Modelo ACD Gamma Generalizado . . . . .	25
2.2.4 Duração entre Transações . . . . .	26
2.2.5 Ajuste Diurno . . . . .	26
2.3 Conjunto de dados . . . . .	27
<b>3 Resultados . . . . .</b>	<b>29</b>
3.1 Descrição dos Dados . . . . .	29
3.2 Avaliação dos Modelos para Dados Diários (GFBM e GOUFE). . . . .	30
3.2.1 Análise dos resíduos . . . . .	33
3.2.2 Teste de Normalidade e Autocorrelação dos resíduos . . . . .	36
3.3 Resultados do modelo ACD para dados intradiários . . . . .	38
3.3.1 Análise das durações ao longo do tempo . . . . .	40
3.3.2 Análise de Ajuste do Modelos para as durações . . . . .	43
<b>4 Conclusão . . . . .</b>	<b>48</b>

## Lista de Figuras

1	Preços do Bitcoin ao longo do tempo (01/01/2019 - 31/12/2024) . . . . .	29
2	Preços observados x Preditos do Bitcoin ao longo do tempo (01/01/2019 - 31/12/2024) . . . . .	31
3	Gráfico Boxplot dos Resíduos por Modelo . . . . .	33
4	Gráfico de Dispersão dos Resíduos Padronizados por Modelo . . . . .	34
5	Gráfico QQ-Plot dos Resíduos Padronizados por Modelo . . . . .	35
6	Gráfico ACF dos Resíduos por Modelo . . . . .	37
7	Boxplot da duração pela diferença do preço relativo . . . . .	39
8	Evolução das durações ao longo do dia (Brasil) . . . . .	40
9	Padrão diurno das durações estimado pelo método "Super Smoother". . . .	41
10	Histograma das durações ajustadas. . . . .	41
11	QQ plot dos resíduos de Cox-Snell dos Modelos. . . . .	45
12	Gráfico ACF dos Resíduos Cox-Snell por Modelo (lag = 35) . . . . .	46

## Lista de Tabelas

1	Fórmulas para cálculo de volatilidade constante. . . . .	14
2	Modelos de volatilidade estocástica . . . . .	15
3	Descrição e Classificação das variáveis (Dados Diários) . . . . .	27
4	Descrição e Classificação das variáveis (Dados Intradiários) . . . . .	28
5	Estimativa dos Parâmetros do Modelos GOUFE . . . . .	30
6	Estimativa dos Parâmetros do Modelos GFBM . . . . .	30
7	Comparação de RMSE, MAE, MAPE, $R^2$ e Viés dos Modelos . . . . .	31
8	Comparação dos Modelos em relação aos Critérios de Informação (AIC, BIC e EDC) . . . . .	32
9	Estatísticas descritivas dos resíduos por modelo . . . . .	33
10	Déficit Esperado por Modelo a um nível de confiança de 95%. . . . .	36
11	Teste de Shapiro–Wilk nos Resíduos Padronizados por Modelo . . . . .	36
12	Teste de Ljung–Box nos Resíduos Padronizados (lag=60) . . . . .	38
13	Resultados da sensibilidade da diferença de preços relativos . . . . .	39
14	Estatísticas Descritivas das durações Ajustadas . . . . .	42
15	Parâmetros Estimados do Modelo Exponencial ACD(1,1) . . . . .	43
16	Parâmetros Estimados do Modelo Weibull ACD(1,1) . . . . .	43
17	Parâmetros Estimados do Modelo Generalized Gamma ACD(1,1) . . . . .	43
18	Métricas de Ajuste dos Modelos ACD(1,1) . . . . .	44
19	Déficit Esperado por Modelo a um nível de confiança de 95%. . . . .	46
20	Resultados do teste de Ljung–Box para resíduos de Cox–Snell (lag = 35) . . . . .	46

## Agradecimentos

Primeiramente, agradeço com todo o meu carinho à minha família, em especial ao meu pai, Helder, e à minha mãe, Maria Helena, pelo apoio constante e incentivo em cada etapa dessa jornada acadêmica. Sem o suporte de vocês, este trabalho não teria sido possível.

Expresso também minha profunda gratidão à ESTAT (Empresa Júnior de Estatística), que desempenhou um papel essencial na minha trajetória. Foi nessa EJ que tive a oportunidade de enxergar, na prática, a aplicabilidade dos conteúdos vistos em sala de aula e compreender com mais clareza os caminhos e desafios do mercado de trabalho na área de Estatística. A experiência na ESTAT foi decisiva para a minha permanência no curso e para meu crescimento profissional.

Aos meus amigos e colegas Matheus Martinez, Daniel Paranaguá, Davi Esmeraldo, Gabriela Lobo e Lucas Menezes, deixo meu sincero agradecimento pela parceria, amizade e constante disposição em colaborar, escutar e compartilhar aprendizados ao longo de toda a graduação. A presença de vocês foi fundamental não apenas para o meu desenvolvimento acadêmico, mas também pessoal.

Agradeço ainda a todos os professores que contribuíram para minha formação ao longo do curso. De modo especial, agradeço aos meus orientadores, professores Felipe Quintino e Helton Saulo, pela paciência, confiança e disponibilidade durante o processo de orientação deste trabalho. Estendo também meus agradecimentos aos professores Rathie, Tiago Fonseca e Luan Ozelim, cujas contribuições foram valiosas para a construção deste estudo, o qual, além de compor este TCC, resultou na submissão de um artigo científico intitulado *Multiscale Stochastic Models for Bitcoin: Fractional Brownian Motion and Duration-Based*.

A todos que, de alguma forma, fizeram parte dessa caminhada, meu muito obrigado.

## Resumo

Este trabalho propõe e avalia modelos estocásticos para descrever a dinâmica dos preços do Bitcoin em diferentes escalas temporais, utilizando dados diários e intradiários. Na análise diária, introduzem-se modelos dirigidos pelo Movimento Browniano Fracionário (fBm) para capturar memória longa, associados a especificações de volatilidade constante e estocástica via processo de Cox-Ingersoll-Ross. Para dados intraday, aplicam-se modelos de Duração Condicional Autorregressiva (ACD) Exponencial, Weibull e Gamma Generalizado, com ajustes para padrões diurnos, para modelar o tempo entre transações. Os resultados demonstraram a capacidade dos modelos ACD em capturar o agrupamento das durações, com o modelo Gamma Generalizado apresentando melhor ajuste segundo a análise de resíduos de Cox-Snell. Esse estudo contribui ao aplicar e comparar modelos estocásticos em múltiplas escalas temporais para o Bitcoin, confirmando a relevância da memória longa, da volatilidade estocástica e da dinâmica intradiária para a compreensão do ativo.

**Palavras-chave:** Bitcoin. Modelagem estocástica. Movimento Browniano Fracionário. Volatilidade estocástica. Modelos ACD. Equações Diferenciais Estocásticas.

## Abstract

This study proposes and evaluates stochastic models to describe the dynamics of Bitcoin prices across different time scales, using both daily and intraday data. In the daily analysis, models driven by Fractional Brownian Motion (fBm) are introduced to capture long memory, combined with constant and stochastic volatility specifications via the Cox-Ingersoll-Ross process. For intraday data, Exponential, Weibull, and Generalized Gamma Autoregressive Conditional Duration (ACD) models are applied—adjusted for diurnal patterns—to model the time between transactions. The results demonstrated the ability of ACD models to capture the clustering of durations, with the Generalized Gamma model showing the best fit according to the Cox-Snell residual analysis. This study contributes by applying and comparing stochastic models across multiple time scales for Bitcoin, confirming the relevance of long memory, stochastic volatility, and intraday dynamics for understanding the asset.

**Keywords:** Bitcoin; Stochastic modeling; Fractional Brownian Motion; Stochastic volatility; ACD models; Stochastic differential equations.



# 1 Introdução

Nos últimos anos, o Bitcoin tem se destacado no cenário mundial como um dos ativos financeiros mais relevantes. Essa moeda digital foi criada em 2009 por Satoshi Nakamoto (NAKAMOTO, 2008), baseando-se na tecnologia *blockchain*, ou seja, um livro de registro digital onde todas as transações realizadas são armazenadas de maneira segura e transparente. Dessa forma, as transações são feitas de modo descentralizado, isto é, sem meios intermediários, como bancos e governos, permitindo a transferência direta de valores entre os usuários através de carteiras digitais. Essas transações precisam ser confirmadas e registradas no *blockchain*, em um processo denominado mineração, no qual cálculos matemáticos complexos são realizados por computadores para validar as transações e adicionar novos blocos de forma sequencial ao *blockchain*, garantindo a segurança e a integridade dos dados (ANTONPOULOS, 2017).

Diferentemente das moedas tradicionais, o Bitcoin funciona de maneira ininterrupta, 24 horas por dia, sete dias por semana, e possui um limite máximo de 21 milhões de unidades em circulação, o que gera alta liquidez, volatilidade e escassez no mercado. Nesse sentido, sua limitação e a ausência de um ente regulador contribuem para sua elevada volatilidade, tornando-o um ativo que atrai a atenção de investidores e pesquisadores (ANTONPOULOS, 2014).

Assim, o Bitcoin é uma moeda que vai além do mercado financeiro tradicional, uma vez que é influenciada por eventos globais, como crises econômicas ou mudanças regulatórias, sendo utilizada até como alternativa para proteção contra a inflação em países com economias instáveis. Dessa forma, estudos apontam que essa imprevisibilidade nos preços apresenta um padrão complexo que se repete ao longo do tempo, indicando um comportamento chamado de memória longa, isto é, os preços atuais podem ser influenciados por movimentos passados (GARNIER; SOLNA, 2019).

Compreender a volatilidade do Bitcoin é essencial para várias áreas do mercado financeiro, como a precificação de investimentos, análise de gestão de risco e elaboração de estratégias financeiras. No entanto, a previsão de medidas de risco para criptomoedas, como o Valor em Risco (do inglês *Value-at-Risk*) e o Défit Esperado (do inglês *Expected Shortfall*), é particularmente desafiadora devido às suas características inerentes, como alta volatilidade, movimentos extremos de preços e períodos de comportamento turbulento extremo (HOTTA et al., 2025). Para tal, modelos matemáticos vêm sendo utilizados para explicar o comportamento deste ativo e dentre eles destacam-se os modelos oriundos do Movimento Browniano Fracionário (fBm, do inglês *fractional Brownian motion*). Esse modelo permite uma descrição mais realista da variabilidade dos preços, levando em conta o comportamento anterior e a imprevisibilidade futura dessa moeda (ALHAGYAN;

YASSEN, 2023).

Além disso, a análise de dados financeiros de alta frequência, tem se mostrado fundamental para compreender a dinâmica de mercado e formular estratégias de investimento mais efetivas. Nesse sentido, os modelos autorregressivos de duração condicional (ACD), propostos por Engle e Russell (1998), oferecem uma abordagem robusta para modelar o tempo entre transações, sobretudo em dados irregulares, como é o caso das criptomoedas. Embora utilizada no mercados financeiro para avaliar a intensidade das transações e a evolução das durações, esses modelos ainda são pouco explorados no contexto do Bitcoin, apesar de sua relevância para analisar o risco de preço e a microestrutura do mercado (DIMPFL; ODELLI, 2020).

O presente estudo tem como objetivo propor uma nova classe de processos dirigidos por movimento browniano fracionário (fBm), capazes de modelar os preços diários do Bitcoin e sua volatilidade, e aplicar modelos (ACD) para analisar as durações entre transações intradiárias do ativo, visando identificar padrões temporais e sazonais que contribuam para o comportamento de mercado do Bitcoin. Para isso, os seguintes objetivos específicos são formulados:

- Identificar e descrever os padrões de memória longa presentes no histórico de preços diários do Bitcoin.
- Incorporar a volatilidade estocástica nos modelos propostos por (QUINTINO; MEDINO; DOREA, 2023), analisando o seu impacto na precisão das previsões.
- Realizar uma análise comparativa de diferentes modelos estocásticos de preços.
- Realizar uma análise intradiária dos preços do Bitcoin, através do modelo ACD.

## 2 Metodologia

Neste capítulo, será apresentado alguns conceitos básicos que serão utilizados ao longo do trabalho.

### 2.1 Uma Classe de Modelos de Volatilidade Estocástica

#### 2.1.1 Movimento Browniano e Processos Derivados

Um processo estocástico é uma coleção de variáveis aleatórias  $\{S(t); t \in T\}$  definidos num espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , onde  $T$  é um conjunto de tempos, que pode ser enumerável ou não-enumerável. A variável  $S(t)$  depende do tempo  $t$ , mas também contém incerteza (por isso é uma variável aleatória). Segundo (ROSS, 2014), os processos estocásticos são amplamente utilizados para modelar fenômenos dinâmicos que apresentem comportamento incerto. Neste trabalho, consideraremos  $T = [0, \infty)$ . Neste caso, dizemos que  $\{S(t); t \geq 0\}$  é um processo a tempo contínuo.

Ademais, os processos estocásticos podem ser classificados como:

- **Markovianos:** O futuro do processo depende apenas do estado atual, não do passado.
- **Não Markovianos:** O futuro do processo pode depender de toda a história passada, e não apenas do estado presente.

O Movimento Browniano é um processo estocástico amplamente utilizado, especialmente no mercado financeiro, para modelar o comportamento aleatório dos preços de ativos.

**Definição 1** Dizemos que um processo  $\{B(t); t \geq 0\}$  é um Movimento Browniano se satisfaz:

1.  $B(0) = 0$ , quase certamente (q.c.).
2.  $B$  possui incrementos independentes, i.e., dados  $0 < t_0 < t_1 < \dots < t_n$ , as variáveis aleatórias

$$B(t_1) - B(t_0), B(t_2) - B(t_1), \dots, B(t_n) - B(t_{n-1})$$

são independentes.

3. Para  $\forall t, s > 0$ ,

$$B(t) - B(s) \sim N(0, |t - s|)$$

4.  $B$  possui trajetórias contínuas q.c.

Pode-se mostrar que um movimento Browniano:

1. É um processo Gaussiano e Markoviano.
2. Não é diferenciável em nenhum ponto (q.c.).

(BACHELIER, 1900) foi um dos primeiros estudiosos a utilizar o movimento Browniano para prever preços de ativos financeiros. Na era moderna, (ROSS, 2002) também utilizou diretamente o movimento Browniano para modelar o preço de ações. No entanto, essa aplicação direta do movimento Browniano enfrentou muitas críticas, pois esse processo permite que o preço seja negativo, assumindo que os preços das ações seguem uma variável aleatória normal.

Para lidar com essa situação, uma variação não-negativa do movimento Browniano, chamada de movimento Browniano geométrico (GBM, do inglês *Geometric Brownian Motion*), foi empregada para superar as limitações do movimento Browniano em aplicações financeiras. O GBM demonstrou que pode descrever melhor a situação real. Por isso, foi amplamente utilizado em muitas aplicações da matemática financeira, como o preço de índices, seguro de hipotecas, o modelo de Black-Scholes (HULL, 2009), precificação de opções e taxas de câmbio (OKSENDAL, 2002; ROSS, 2014). Vale ressaltar que, o trabalho proposto por (ARAÚJO, 2020) também aborda a aplicação do GBM para simulação de preços de ações.

**Definição 2** Um processo estocástico  $\{S(t); t \geq 0\}$  segue um GBM se satisfaz a seguinte equação diferencial estocástica:

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dB(t), \quad t \geq 0, \quad (2.1.1)$$

em que  $\{B(t); t \geq 0\}$  é um movimento Browniano,  $\mu$  é a taxa média de crescimento do processo ao longo do tempo (*drift*), enquanto  $\sigma$  é a *volatilidade*, a qual quantifica a intensidade das flutuações aleatórias em torno dessa tendência média. A Equação (2.1.1) representa a seguinte equação integral:

$$S(t) = S_0 + \int_0^t \mu(S(u), u) du + \int_0^t \sigma(S(u), u) dB(u), \quad (2.1.2)$$

em que a segunda integral é chamada de *integral de Itô* (para maiores detalhes, ver (KLEBANER, 2012). Nesse sentido, a solução da Eq. (2.1.1) é de forma:

$$S(t) = S_0 \exp \left\{ \left( \mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) t + \sigma B(t) \right\}, \quad (2.1.3)$$

em que  $S_0$  representa um valor inicial.

Apesar da evolução dessa abordagem, (AiT-SAHALIA; LO, 1998) observou o surgimento de memória nos dados de séries temporais, que é controlada pela estrutura dinâmica de (2.1.1). Isso implica o próximo passo: propor um modelo gBm que possa incorporar as propriedades de memória longa. O Movimento Browniano Fracionário (fBm) é um dos modelos que podem ser utilizados para lidar com essa questão. Dessa forma, surge o Movimento Browniano Fracionário Geométrico (gfBm).

Nesse sentido, para compreender o gfBm, é fundamental entender o funcionamento do fBm. Para isso, adotou-se a representação de Riemann–Liouville como definição do Movimento Browniano Fracionário (BIAGINI et al., 2008).

**Definição 3** *Seja  $H \in (0, 1)$  o parâmetro de Hurst e  $\{B(t); t \geq 0\}$  um movimento browniano padrão em  $\mathbb{R}$ . O Movimento Browniano Fracionário  $\{B_H(t); t \geq 0\}$  via representação de Riemann–Liouville é definida por:*

$$B_H(t) = \frac{1}{\Gamma(H + \frac{1}{2})} \int_0^t (t-s)^{H-\frac{1}{2}} dB(s), \quad t \geq 0. \quad (2.1.4)$$

Esta representação define o fBm como uma integral ponderada do movimento browniano, com um núcleo  $(t-s)^{H-1/2}$  que introduz a dependência de longo alcance característica do fBm.

Portanto, o parâmetro de Hurst é utilizado para capturar a dinâmica de correlação dos dados e, conseqüentemente, gerar melhores resultados em previsões (HURST, 1951). Desse modo, existem três tipos diferentes de dependência de memória detectados de acordo com o valor de  $H$  (MANDELBROT, 1983):

- Se  $0.5 < H < 1$ , existe uma dependência de memória longa;
- Se  $0 < H < 0.5$ , existe uma dependência de memória curta;
- Quando  $H = 0.5$ , não há dependência de memória. Note que nesse caso, o fBm coincide com o Movimento Browniano.

**Definição 4** *Um processo estocástico  $\{S(t); t \geq 0\}$  segue um gfBm se a seguinte equação diferencial estocástica for satisfeita:*

$$dS(t) = \mu S(t) dt + \sigma S(t) dB_H(t), \quad (2.1.5)$$

em que  $\{B_H(t); t \geq 0\}$  representa um fBm, e  $\mu$  e  $\sigma$  representam, respectivamente, a média

(drift) e a volatilidade. A solução da Eq. (2.1.5) é da forma:

$$S(t) = S_0 \exp \left[ \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 t^{2H-1} \right) t + \sigma B_H(t) \right], \quad (2.1.6)$$

em que,  $S_0$  representa um valor inicial arbitrário.

**Definição 5** Um processo estocástico  $\{S(t); t \geq 0\}$  diz-se seguir um *gfBm perturbado por volatilidade estocástica* se satisfizer a seguinte equação diferencial estocástica:

$$dS(t) = \mu S(t) dt + \sigma(Y(t)) S(t) dB_{H_1}(t), \quad (2.1.7)$$

em que:

- $\{Y(t); t \geq 0\}$  é um processo estocástico;
- $\mu$  é o parâmetro de drift (média);
- $\{B_{H_1}(t); t \geq 0\}$  é um movimento browniano fracionário (fBm) com índice de Hurst  $H_1$ ;
- $\sigma(\cdot)$  é uma função determinística.

### 2.1.2 Escolha do Modelo de Volatilidade Estocástica

A volatilidade ( $\sigma$ ) pode ser calculada por funções constantes ou estocásticas. Algumas fórmulas para estimar a volatilidade constante são apresentadas na Tabela 1. Para maiores detalhes, veja (ALHAGYAN; YASSEN, 2023).

Tabela 1: Fórmulas para cálculo de volatilidade constante.

Método	Fórmula
Volatilidade Simples	$\sigma = \sqrt{\frac{1}{(n-1)\Delta t} \sum_{i=1}^n (R_i - \bar{R})^2}$
Volatilidade Logarítmica	$\sigma = \sqrt{\frac{1}{(n-1)\Delta t} \sum_{i=1}^n (\log(S_i) - \log(S_{i-1}))^2}$
Volatilidade High-Low-Close	$\sigma = \sqrt{\frac{1}{(n-1)\Delta t} \left[ \sum 0.5(\log(H_i) - \log(L_i))^2 - 0.3(\log(S_i) - \log(S_{i-1}))^2 \right]}$

Para descrever melhor as condições reais do mercado, a volatilidade estocástica ( $\sigma(Y(t))$ ) pode ser introduzida no gfBm. Algumas funções determinísticas utilizadas são mostradas na Tabela 2.

Tabela 2: Modelos de volatilidade estocástica

Nome	Modelo
Log-normal	$dY(t) = \alpha Y(t)dt + \beta Y(t)dB(t)^2$
Cox-Ingersoll-Ross	$dY(t) = \theta(\omega - Y(t))dt + \xi \sqrt{Y(t)}dB(t)^2$
Ornstein-Uhlenbeck	$dY(t) = \alpha(m - Y(t))dt + \beta dB(t)^2$
Sem reversão à média	$dY(t) = \alpha Y(t)dB^2(t)$
Ornstein-Uhlenbeck Fracionário	$dY(t) = \alpha(m - Y(t))dt + \beta dB_H^2(t)$

Para o estudo em questão, adotou-se o processo Cox–Ingersoll–Ross (CIR), conforme proposto originalmente por Cox, Ingersoll e Ross (1985). Este processo é caracterizado pela seguinte Equação Diferencial Estocástica (EDE):

$$dY(t) = \kappa (\omega - Y(t)) dt + \xi \sqrt{Y(t)} dB(t), \quad t \geq 0, \quad (2.1.8)$$

em que:

- $\kappa > 0$  é a velocidade de reversão
- $\omega > 0$  é o nível de longo prazo;
- $\xi > 0$  é a volatilidade;
- $B(t)$  é um Movimento Browniano padrão.

Uma propriedade fundamental do processo CIR, para aplicação em tempo discreto, é a existência de uma distribuição condicional exata para  $Y(t + \Delta t)$  dado o valor  $Y(t) = y_0$  em um intervalo de tempo  $\Delta t$ . Conforme demonstrado por Cox, Ingersoll e Ross (1985), essa distribuição condicional segue uma distribuição qui-quadrado não-central ( $\chi'^2$ ) escalonada:

$$Y(t + \Delta t) | Y(t) = y_0 \sim c_0 \chi'^2(df, \lambda), \quad (2.1.9)$$

em que o fator de escala  $c_0$ , os graus de liberdade  $df$  e o parâmetro de não-centralidade  $\lambda$  são definidos em função dos parâmetros do modelo CIR e do valor inicial  $y_0$ :

$$c_0 = \frac{\xi^2(1 - e^{-\kappa \Delta t})}{4 \kappa}, \quad df = \frac{4 \kappa \omega}{\xi^2}, \quad \lambda = \frac{4 \kappa y_0 e^{-\kappa \Delta t}}{\xi^2(1 - e^{-\kappa \Delta t})}. \quad (2.1.10)$$

A utilização desta distribuição exata é vantajosa, pois garante a não-negatividade do processo ( $Y(t) \geq 0$ ), sendo fundamental em muitas aplicações financeiras, e evita vieses que poderiam surgir de métodos de discretização aproximados. Sendo assim, a função

de densidade de probabilidade  $p(Y(t + \Delta t) | Y(t; \kappa, \omega, \xi))$ , calculável a partir da Equação (2.1.9), é essencial para a estimação dos parâmetros do modelo por métodos como máxima verossimilhança ou inferência Bayesiana, como discutido também por (GLASSERMAN, 2004).

### 2.1.3 Processo GOU–FE com Ruído Movimento Browniano Fracionário

Estamos interessados em estimar o vetor de parâmetros  $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)$  de um processo GOU–FE (*Generalized Ornstein-Uhlenbeck of Fluctuating Exponential type*) de três parâmetros com ruído multiplicativo fBm. Tal processo foi introduzido em (QUINTINO; MEDINO; DOREA, 2023) para um ruído Lévy.

O processo  $\{X(t); t \geq 0\}$  é definido como solução da seguinte equação de Langevin generalizada (GLE):

$$dX(t) = \left( -\theta_1(1-\theta_3) X(t) - \int_0^t X(s) \Gamma_\theta(t-s) ds \right) dt + \sigma(X(t)) dB^H(t), \quad t \geq 0, \quad (2.1.11)$$

com condição inicial  $X(0) = X_0$  independente do ruído.

O kernel de memória  $\Gamma_\theta(t)$  estabelece a forma de autodependência do processo e é dado por:

$$\Gamma_\theta(t) = e^{-\frac{\theta_1 \theta_3}{2} t} \begin{cases} \kappa_1 \cos(\nu t) + \kappa_{2,1} \sin(\nu t), & \nu > 0, \\ \kappa_1 \cosh(\nu t) + \kappa_{2,-1} \sinh(\nu t), & \nu < 0, \\ \kappa_1 + \kappa_{2,0} t, & \nu = 0, \end{cases} \quad (2.1.12)$$

em que as constantes são:

$$\begin{aligned} \nu_0 &= \frac{\theta_1 \theta_3}{2}, \\ \nu &= -\nu_0^2 + \theta_2^2 (1 - \theta_3), \\ \kappa_1 &= \theta_2^2 \theta_3 - 2 \theta_1 (1 - \theta_3) \nu_0, \\ \kappa_{2,1} &= \frac{1}{\nu} \left( \theta_1 \theta_2^2 - \nu_0 (\theta_2^2 \theta_3 - 2 \theta_1 (1 - \theta_3) 2 \nu_0) - \theta_1 (1 - \theta_3) (\nu_0^2 + \nu) \right), \\ \kappa_{2,-1} &= \frac{1}{\nu} \left( \theta_1 \theta_2^2 - \nu_0 (\theta_2^2 \theta_3 - 2 \theta_1 (1 - \theta_3) 2 \nu_0) - \theta_1 (1 - \theta_3) (\nu_0^2 - \nu) \right), \\ \kappa_{2,0} &= \theta_1 \theta_2^2 - \nu_0 (\theta_2^2 \theta_3 - 2 \theta_1 (1 - \theta_3) 2 \nu_0) - \theta_1 (1 - \theta_3) \nu_0^2. \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

O espaço de parâmetros de drift pode ser definido como  $\Theta = (0, \infty)^2 \times [0, 1]$ .



### 2.1.4 Método de Euler-Maruyama

O método de Euler-Maruyama é uma extensão do método de Euler clássico, utilizado para aproximar soluções de equações diferenciais ordinárias, para o contexto de equações EDEs. Essas equações são fundamentais para modelar sistemas dinâmicos sujeitos à aleatoriedade, como o comportamento dos preços de ativos financeiros (KLOEDEN; PLATEN, 1992).

Uma EDE pode ser escrita na forma:

$$dX(t) = \mu(X(t), t)dt + \sigma(X(t), t)dB(t), \quad (2.1.13)$$

em que:

- $X(t)$  é o estado do sistema no tempo  $t$ ;
- $\mu(X(t), t)$  representa o drift (tendência média);
- $\sigma(X(t), t)$  é a volatilidade;
- $B(t)$  é um movimento Browniano padrão.

Para resolver numericamente essa equação, o método de Euler-Maruyama aproxima a solução pela fórmula:

$$X(t + \Delta t) \approx X(t) + \mu(X(t), t)\Delta t + \sigma(X(t), t)\Delta B(t), \quad (2.1.14)$$

em que  $\Delta B(t) \sim \mathcal{N}(0, \Delta t)$  é um incremento do movimento Browniano (KLOEDEN; PLATEN, 1992).

Ao aplicar o método de Euler-Maruyama ao GBM, a aproximação numérica do preço do ativo é dada por:

$$S(t + \Delta t) \approx S(t) (1 + \mu\Delta t + \sigma\Delta B(t)). \quad (2.1.15)$$

Essa abordagem é particularmente útil para simulações de preços de ativos, precificação de opções financeiras e análise de risco. Métodos como Monte Carlo utilizam essa técnica para gerar trajetórias simuladas dos preços dos ativos, permitindo a avaliação de derivativos e estratégias de hedge (GLASSERMAN, 2003). Adaptações desse método podem ser utilizadas na simulação de EDEs dirigidas por outras classes de ruídos

### 2.1.5 Estimação dos Parâmetros

Para a estimação dos parâmetros e dos estados latentes em modelos de espaço de estados não lineares e não gaussianos, como o proposto neste trabalho, empregou-se o método Sequencial de Monte Carlo (SMC), conhecido como Filtro de Partículas. Este método permite aproximar, de forma recorrente, a distribuição à posteriori dos estados latentes  $Y(t)$  condicionada às observações  $X(1), X(2), X(3), \dots, X(t)$ , sendo particularmente adequado para lidar com as não linearidades e distribuições não gaussianas inerentes ao modelo (DOUCET; FREITAS; GORDON, 2001).

A implementação do filtro de partículas baseia-se na representação da distribuição de interesse por um conjunto de amostras ponderadas (partículas)  $\{Y(t)^{(i)}, w(t)^{(i)}\}_{i=1}^N$ , em que  $Y(t)^{(i)}$  são os estados das partículas e  $w_t^{(i)}$  seus respectivos pesos normalizados ( $\sum_i w(t)^{(i)} = 1$ ). O processo iterativo do filtro, conforme descrito por Gordon, Salmond e Smith (1993) e Arulampalam et al. (2002), envolve três etapas principais: propagação, ponderação e reamostragem.

Primeiramente, o modelo dinâmico estocástico é formulado no espaço de estados, definindo a equação de transição para o estado latente  $X(t)$  e a equação de observação para os dados  $Y(t)$  (preços):

$$\begin{cases} X(t) = f_{\theta}(X(t-1)) + \varepsilon_t, & \text{(Equação de Estado)} \\ Y(t) = g_{\theta}(X(t)) + \eta_t, & \text{(Equação de Observação)} \end{cases}$$

em que  $\theta$  representa o vetor de parâmetros a serem estimados, e  $\varepsilon_t$  e  $\eta_t$  são os termos de ruído do processo e da observação, respectivamente.

O algoritmo do filtro de partículas padrão (Bootstrap Filter) pode ser sumarizado conforme o Algoritmo 1. Portanto, a etapa de inicialização consiste em gerar  $N$  partículas  $\{X(0)^{(i)}\}_{i=1}^N$  a partir da distribuição a priori  $p(X(0))$  e atribuir pesos uniformes  $w(0)^{(i)} = 1/N$ .

Subsequentemente, para cada instante de tempo  $t = 1, \dots, T$ , as etapas de propagação e ponderação são executadas. Desse modo, na propagação, cada partícula é avançada no tempo de acordo com a dinâmica do modelo,  $X(t)^{(i)} \sim p_{\theta}(X(t) | X(t-1)^{(i)})$ . Para o caso do modelo CIR, essa transição pode ser amostrada exatamente (COX; INGERSOLL; ROSS, 1985).

Na ponderação, os pesos são atualizados proporcionalmente à verossimilhança da observação  $Y_t$  dada a partícula propagada,  $w(t)^{(i)} \propto w(t-1)^{(i)} p_{\theta}(Y(t) | X(t)^{(i)})$ , e então normalizados.

**Algoritmo 1** Filtro de Partículas (Bootstrap Filter)

---

```

1: Inicialização ( $t = 0$ )
2: for  $i = 1, \dots, N$ 
3:   Amostrar  $X(0)^{(i)} \sim p(X(0))$ 
4:   Definir  $w(0)^{(i)} \leftarrow 1/N$ 
5: end for
6: for  $t = 1, \dots, T$ 
7:   Propagação e Ponderação
8:   for  $i = 1, \dots, N$ 
9:     Propagação: Amostrar  $\tilde{X}(t)^{(i)} \sim p_{\theta}(X(t) | X(t-1)^{(i)})$ 
10:    Ponderação:  $\tilde{w}(t)^{(i)} \leftarrow w(t-1)^{(i)} \times p_{\theta}(Y(t) | \tilde{X}(t)^{(i)})$ 
11:   end for
12:   Normalização
13:   Calcular  $W(t) \leftarrow \sum_{j=1}^N \tilde{w}(t)^{(j)}$ 
14:   for  $i = 1, \dots, N$ 
15:     Definir  $w(t)^{(i)} \leftarrow \tilde{w}(t)^{(i)} / W(t)$ 
16:   end for
17:   Reamostragem
18:   Calcular  $ESS \leftarrow 1 / \sum_{i=1}^N (w(t)^{(i)})^2$ 
19:   if  $ESS < N_{\text{limiar}}$  then
20:     Reamostrar  $\{X(t)^{(i)}, w(t)^{(i)}\}_{i=1}^N$  a partir de  $\{\tilde{X}(t)^{(i)}, w(t)^{(i)}\}_{i=1}^N$ 
21:     Definir  $w(t)^{(i)} \leftarrow 1/N \quad \forall i$ 
22:   else
23:     Para todo  $i$ :  $X(t)^{(i)} \leftarrow \tilde{X}(t)^{(i)}$ 
24:   end if
25: end for

```

---

No contexto deste algoritmo, a reamostragem é empregada com o propósito de mitigar o fenômeno da degenerescência dos pesos. Este fenômeno ocorre quando uma parcela reduzida das partículas concentra a maior parte da massa de probabilidade, comprometendo a representatividade da distribuição. Para identificar a ocorrência da degenerescência, utiliza-se o Número Efetivo de Partículas (ESS), calculado pela expressão  $ESS = 1 / \sum_{i=1}^N (w(t)^{(i)})^2$ , em que cai abaixo de um limiar pré-definido, como, por exemplo  $N/2$ . Após a execução do processo de reamostragem, as partículas selecionadas são reatribuídas com pesos uniformes, equivalentes a  $1/N$ .

O filtro de partículas fornece uma aproximação da função de verossimilhança marginal  $p(Y(1), Y(2), Y(3), \dots, Y(T)) | \theta$ , essencial para a estimação dos parâmetros  $\theta$ .

Desse modo, a verossimilhança pode ser calculada iterativamente e sua aproximação no instante  $T$  é dada por:

$$\hat{L}(\boldsymbol{\theta}) = p(Y_1) \prod_{t=2}^T p(Y(t) | Y(1), Y(2), Y(3), \dots, Y(t-1)) \approx \prod_{t=1}^T \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N p_{\boldsymbol{\theta}}(Y(t) | X(t)^{(i)}) \right), \quad (2.1.16)$$

em que a aproximação mais comum utilizada na prática é:

$$\hat{L}(\boldsymbol{\theta}) \approx \prod_{t=1}^T \left( \sum_{i=1}^N w(t-1)^{(i)} p_{\boldsymbol{\theta}}(Y(t) | \tilde{X}(t)^{(i)}) \right). \quad (2.1.17)$$

Esta aproximação da verossimilhança é então utilizada em um procedimento de otimização numérica para encontrar a estimativa de máxima verossimilhança (MLE) dos parâmetros,  $\hat{\boldsymbol{\theta}} = \arg \max_{\boldsymbol{\theta}} \log \hat{L}(\boldsymbol{\theta})$ .

Neste trabalho, utilizou-se o método L-BFGS-B para a otimização, uma abordagem quasi-Newton eficiente para problemas com restrições nos parâmetros (LIU; WEST, 2001) e também o método Nelder-Mead (NELDER; MEAD, 1965).

As principais vantagens do filtro de partículas incluem sua flexibilidade para acomodar modelos complexos, não lineares e não gaussianos, e sua convergência assintótica (quando  $N \rightarrow \infty$ ) para a distribuição ótima. A complexidade computacional é da ordem de  $O(N)$  por passo de tempo.

### 2.1.6 Testes de Diagnóstico e Comparação de Modelos

Após a estimação dos modelos propostos, é fundamental realizar testes estatísticos para avaliar a adequação do ajuste aos dados e comparar o desempenho preditivo entre modelos concorrentes. Nesta seção, descrevem-se os testes utilizados para diagnóstico dos resíduos e comparação da acurácia das previsões.

O teste de Ljung-Box (LJUNG; BOX, 1978) verifica a presença de autocorrelação serial nos resíduos de um modelo de séries temporais. A ausência de autocorrelação garante que o modelo capturou adequadamente a dependência temporal dos dados originais.

Sejam  $\{e_t\}_{t=1}^n$  os resíduos padronizados de um modelo ajustado. Defina-se a autocorrelação amostral no lag  $h$  como

$$\hat{\rho}_h = \frac{\sum_{t=h+1}^n e_t e_{t-h}}{\sum_{t=1}^n e_t^2}, \quad h = 1, 2, \dots, k,$$

em que  $k$  é o número máximo de defasagens a testar. A estatística de Ljung-Box é dada

por:

$$Q = n(n+2) \sum_{h=1}^k \frac{\hat{\rho}_h^2}{n-h},$$

em que  $n$  é o tamanho da amostra.

As hipóteses do teste são formuladas como:

$$\begin{cases} H_0 : \hat{\rho}_1 = \hat{\rho}_2 = \dots = \hat{\rho}_k = 0 & (\text{resíduos são ruído branco}), \\ H_1 : \text{Existe pelo menos uma autocorrelação não nula em algum lag } h \leq k. \end{cases}$$

Sob  $H_0$ , a estatística  $Q$  segue assintoticamente uma distribuição  $\chi^2$  com  $k$  graus de liberdade. Rejeita-se  $H_0$  ao nível de significância  $\alpha$  se

$$Q > \chi_{\alpha, k}^2,$$

ou, equivalentemente, se o valor-p for inferior a  $\alpha$ .

O teste de Shapiro–Wilk (SHAPIRO; WILK, 1965) verifica a hipótese de que uma amostra  $\{z_i\}_{i=1}^n$  foi extraída de uma população normalmente distribuída. Ordene a amostra em ordem crescente, de modo que  $z_{(1)} \leq z_{(2)} \leq \dots \leq z_{(n)}$ . Definem-se os coeficientes

$$a_i = \frac{m_i}{\sqrt{\sum_{j=1}^n m_j^2}}, \quad i = 1, 2, \dots, \lfloor n/2 \rfloor,$$

em que  $\{m_i\}$  são esperanças dos  $n$  estatísticos de ordem de uma distribuição normal padrão. A estatística de Shapiro–Wilk é dada por

$$W = \frac{(\sum_{i=1}^n a_i z_{(i)})^2}{\sum_{i=1}^n (z_i - \bar{z})^2}, \quad \bar{z} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_i.$$

As hipóteses do teste são:

$$\begin{cases} H_0 : \{z_i\} \text{ segue distribuição } \mathcal{N}(\mu, \sigma^2), \\ H_1 : \{z_i\} \text{ não segue distribuição normal.} \end{cases}$$

Valores de  $W$  próximos de 1 indicam normalidade. Rejeita-se  $H_0$  se o valor-p associado for menor que o nível de significância  $\alpha$ .

Para avaliar o risco associado às previsões dos modelos em cenários de perdas extremas, utiliza-se a medida de risco Expected Shortfall (ES), também conhecida como Valor Condicional de Risco (CVaR) ou Déficit Esperado. O ES quantifica a perda média esperada nos piores  $(1 - \alpha) \times 100\%$  cenários, em que  $\alpha$  é o nível de confiança.

Formalmente, para uma variável aleatória  $X$  representando a perda (ou o negativo do retorno) de um ativo ou portfólio, o Value at Risk (VaR) ao nível de confiança  $\alpha$  ( $\text{VaR}_\alpha(X)$ ) é o quantil  $(1 - \alpha)$  da distribuição de  $X$ . O Expected Shortfall ao nível  $\alpha$ ,  $\text{ES}_\alpha(X)$ , é definido como a expectativa condicional da perda, dado que a perda excede o  $\text{VaR}_\alpha(X)$ :

$$\text{ES}_\alpha(X) = E[X \mid X \geq \text{VaR}_\alpha(X)] \quad (2.1.18)$$

Alternativamente, para distribuições contínuas, o ES pode ser calculado como:

$$\text{ES}_\alpha(X) = \frac{1}{1 - \alpha} \int_\alpha^1 \text{VaR}_u(X) du \quad (2.1.19)$$

O ES é considerado uma medida de risco superior ao VaR por diversas razões. Primeiramente, ele informa sobre a magnitude esperada das perdas nos cenários de cauda, enquanto o VaR apenas indica o limiar da perda. Além disso, o ES satisfaz as propriedades de uma medida de risco coerente (monotonicidade, invariância por translação, homogeneidade positiva e subaditividade), conforme definido por Artzner et al. (1999), o que nem sempre ocorre com o VaR. A coerência, especialmente a subaditividade ( $\text{ES}(X + Y) \leq \text{ES}(X) + \text{ES}(Y)$ ), garante que a diversificação não aumenta o risco medido, uma propriedade desejável em gestão de portfólios (ACERBI; TASCHE, 2002).

Neste trabalho, o ES será calculado para os preços diários previstos pelos diferentes modelos a um nível de confiança de  $\alpha = 95\%$ .

## 2.2 Modelo ACD

Para modelar as durações (tempo decorrido entre duas transações financeiras consecutivas) da negociação intradiária, Engle e Russell (1998) usam uma ideia semelhante à dos modelos autoregressivos de heterocedasticidade condicional generalizados (GARCH) para propor um modelo ACD. Dessa forma, temos a seguinte definição:

**Definição 6** A duração  $X_t$  é o intervalo de tempo entre a  $(t - 1)$ -ésima e a  $t$ -ésima transação:

$$X_t = T_t - T_{t-1}, \quad \text{para } t = 1, 2, \dots, N, \quad (2.2.1)$$

em que:

- $T_t$ : instante da  $t$ -ésima transação;
- $N$ : número total de transações no período.

Diante disso, o modelo ACD (ENGLE; RUSSELL, 1998) assume que:

$$X_t = \psi_t \varepsilon_t, \quad (2.2.2)$$

em que  $\varepsilon_i$  é uma variável aleatória positiva com esperança unitária, e  $\psi_i$  e  $\varepsilon_i$  são estocasticamente independentes, o que implica que:

$$\mathbb{E}[X_i] = \mathbb{E}[\Psi_i] \cdot \mathbb{E}[\varepsilon_i]. \quad (2.2.3)$$

Essa especificação é naturalmente motivada ao se considerar um processo de Poisson com dinâmica GARCH para a média condicional das durações, na qual apenas a média está disponível. Além disso,  $\psi_t$  satisfaz:

$$\psi_t = \alpha_0 + \sum_{j=1}^p \alpha_j X_{t-j} + \sum_{v=1}^q \beta_v \psi_{t-v}. \quad (2.2.4)$$

Nesta especificação, conhecida como ACD(p,q),  $\alpha_0 > 0$  é um termo constante,  $\alpha_j \geq 0$  são os coeficientes associados às durações passadas (termos autorregressivos), e  $\beta_v \geq 0$  são os coeficientes associados às durações esperadas passadas (termos de média condicional).

As ordens  $p$  e  $q$  determinam quantas defasagens de  $X_t$  e  $\psi_t$  influenciam a duração esperada atual. As restrições de não negatividade nos coeficientes garantem que  $\psi_t$  permaneça positivo.

### 2.2.1 Modelo ACD Exponencial

O modelo ACD Exponencial (EACD) é a versão mais simples dos modelos ACD, tendo uma distribuição exponencial padrão com função de risco 1. Nesse sentido, a equação do modelo é dada por (ENGLE; RUSSELL, 1998):

$$X_t = \psi_t \varepsilon_t, \quad \psi_t = \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1} + \beta_1 \psi_{t-1}, \quad \alpha_0 > 0, \quad \alpha_1, \beta_1 \geq 0. \quad (2.2.5)$$

A função de log-verossimilhança condicional para uma amostra  $\{x_1, \dots, x_n\}$  é dada por:

$$\ell(\theta|x_1, \dots, x_n) = - \sum_{t=1}^n \left[ \log(\psi_t) + \frac{x_t}{\psi_t} \right]. \quad (2.2.6)$$

Desse modo, o modelo EACD é atrativo devido à sua simplicidade matemática e

facilidade de estimação. Entretanto, uma limitação fundamental do modelo exponencial é que ele assume uma função de risco constante, o que pode ser irrealista para aplicações financeiras, em que frequentemente é possível observar clusters de volatilidade e padrões de duração mais complexos.

### 2.2.2 Modelo ACD Weibull

O Modelo ACD com distribuição Weibull, proposto por (ENGLE; RUSSELL, 1998) é uma extensão do modelo ACD exponencial, que permite maior flexibilidade na modelagem da forma da distribuição das durações. A densidade de probabilidade de uma variável aleatória Weibull, com parâmetro de forma  $\theta$  e parâmetro de escala  $\sigma$ , é dada por:

$$f(x) = \frac{\theta}{\sigma} \left(\frac{x}{\sigma}\right)^{\theta-1} \exp\left(-\left(\frac{x}{\sigma}\right)^{\theta}\right), \quad x > 0, \sigma > 0, \theta > 0. \quad (2.2.7)$$

Para garantir que a variável de duração condicional tenha média unitária, uma transformação é aplicada. A média de uma variável aleatória Weibull( $\theta, \sigma$ ) é  $\mathbb{E}[X] = \sigma\Gamma(1 + \theta^{-1})$ .

Assim, para obter uma PDF Weibull de média unitária, realiza-se a mudança de variável  $\epsilon_t = X_t/\sigma\Gamma(1 + \theta^{-1})$ . Dessa forma, a densidade de  $\epsilon_t$  é obtida utilizando a fórmula da transformação de variáveis:

$$f_{\epsilon_t}(\epsilon_t) = f_{X_t}(x_t) \left| \frac{dx_t}{d\epsilon_t} \right|, \quad (2.2.8)$$

onde  $\left| \frac{dx_t}{d\epsilon_t} \right| = \sigma\Gamma(1 + \theta^{-1})$  é o determinante do jacobiano da transformação. Após a substituição e simplificação, a densidade de  $\epsilon_t$  é:

$$f_{\epsilon_t}(\epsilon_t) = \frac{\theta}{\Gamma(1 + \theta^{-1})} \left(\frac{\epsilon_t}{\Gamma(1 + \theta^{-1})}\right)^{\theta-1} \exp\left(-\left(\frac{\epsilon_t}{\Gamma(1 + \theta^{-1})}\right)^{\theta}\right). \quad (2.2.9)$$

Em seguida, para obter uma distribuição de  $X_t$  parametrizada em termos da média condicional  $\psi_t$ , aplica-se a transformação  $\epsilon_t = X_t/\psi_t$ . A densidade de  $X_t$  condicionada a  $\psi_t$  é então expressa como:

$$f_{X_t|\psi_t}(x_t|\psi_t) = \frac{\theta}{\psi_t\Gamma(1 + \theta^{-1})} \left(\frac{x_t}{\psi_t\Gamma(1 + \theta^{-1})}\right)^{\theta-1} \exp\left(-\left(\frac{x_t}{\psi_t\Gamma(1 + \theta^{-1})}\right)^{\theta}\right). \quad (2.2.10)$$



Este modelo permite uma maior flexibilidade na modelagem das durações, uma vez que o parâmetro de forma  $\theta$  pode assumir valores diferentes de 1, ao contrário do modelo exponencial onde  $\theta = 1$  é fixo.

### 2.2.3 Modelo ACD Gamma Generalizado

O modelo ACD Gamma Generalizado (GG) permite maior flexibilidade na captura da distribuição das durations. Dessa forma, a densidade da distribuição Gamma Generalizado é definida como (ZHANG; RUSSELL; TSAY, 2001):

$$f(x) = \frac{\theta}{\sigma \Gamma(\kappa)} \left(\frac{x}{\sigma}\right)^{\kappa\theta-1} \exp\left(-\left(\frac{x}{\sigma}\right)^\theta\right), \quad x > 0, \kappa, \sigma, \theta > 0, \quad (2.2.11)$$

em que:

- $\kappa$  é o parâmetro de forma.
- $\sigma$  é o parâmetro de escala.
- $\theta$  controla a taxa de decaimento da cauda.

Além disso ela inclui alguns casos particulares:

- A distribuição exponencial ( $\theta = \kappa = 1$ ),
- A distribuição Weibull ( $\kappa = 1$ ),
- A distribuição Gamma ( $\theta = 1$ ).

Desse modo, seguindo os passos de transformação usuais para ACD, obtemos a função de densidade condicional (ZHANG; RUSSELL; TSAY, 2001):

$$f_{X_t|\psi_t}(x_t|\psi_t) = \frac{\theta}{\varphi(\kappa, \theta)\psi_t \Gamma(\kappa)} \left(\frac{x_t}{\varphi(\kappa, \theta)\psi_t}\right)^{\kappa\theta-1} \exp\left(-\left(\frac{x_t}{\varphi(\kappa, \theta)\psi_t}\right)^\theta\right), \quad (2.2.12)$$

em que a transformação  $\varphi(\kappa, \theta) = \frac{\Gamma(\kappa)}{\Gamma(\kappa+\theta-1)}$  garante que a duração média condicional seja  $\psi_t$ . O modelo ACD-GG pode ser estimado por máxima verossimilhança, maximizando a seguinte função de log-verossimilhança condicional:

$$\ell(\theta|x_1, \dots, x_n) = \sum_{t=1}^n [\log f_{X_t|\psi_t}(x_t|\psi_t)]. \quad (2.2.13)$$

A presença dos parâmetros adicionais  $\kappa$  e  $\theta$  confere maior flexibilidade ao modelo, sendo uma alternativa mais robusta ao modelo ACD Exponencial.

#### 2.2.4 Duração entre Transações

**Definição 7** *Define-se a duração  $X_t$  como o intervalo de tempo decorrido entre a ocorrência do  $(t - 1)$ -ésimo e do  $t$ -ésimo evento (neste caso, transações):*

$$X_t = T_t - T_{t-1}, \quad \text{para } t = 1, 2, \dots, N, \quad (2.2.14)$$

em que:

- $T_t$  é o instante de tempo exato em que a  $t$ -ésima transação ocorre;
- $N$  é o número total de transações no período.

Em intervalos de tempo mais curtos (durações menores) entre transações sucessivas geralmente indicam períodos de alta atividade e liquidez, possivelmente associados à chegada de novas informações relevantes ou a um maior volume de ordens. Por outro lado, durações mais longas sugerem períodos de menor atividade ou inatividade no mercado. A modelagem da sequência de durações  $\{X_t\}$  permite capturar padrões como o agrupamento de volatilidade observado também na frequência das negociações (PACURAR, 2008).

#### 2.2.5 Ajuste Diurno

Em dados financeiros de alta frequência, como as durações entre transações, são frequentes os padrões sazonais intradiários. Dessa forma, é comum observar que a maior atividade de negociação (durações menores) ocorrem no início e no final do dia, e menor atividade (durações maiores) em outros horários. Para estudar a dinâmica real dessas durações sem que esses efeitos previsíveis do horário interfiram, aplica-se um procedimento chamado ajuste diurno (ENGLE; RUSSELL, 1998).

Nesse sentido, o ajuste diurno visa dessazonalizar a série de durações observadas  $X_t$ . Para isso, uma abordagem comum consiste em estimar o componente sazonal esperado da duração,  $\phi(T_t)$ , como uma função suave da hora do dia  $T_t$  em que a transação  $t$  ocorre. A série de durações ajustadas,  $X_t^*$ , é então obtida pela razão entre a duração observada e o componente sazonal estimado:

$$X_t^* = \frac{X_t}{\phi(T_t)}. \quad (2.2.15)$$

Para estimar a função sazonal  $\phi(T_t)$ , utiliza-se uma técnica que suaviza a relação entre as durações brutas  $X_t$  e o horário  $T_t$ . Neste trabalho, adota-se o método “Super Smoother” (supsmu), proposto por Friedman (1984), conhecido por sua capacidade adaptativa na escolha da largura de banda de suavização local.

Dessa forma, a série ajustada  $X_t^*$  não contém mais o efeito previsível do horário, servindo como base para estimar os modelos ACD. Em outras palavras, ao eliminar a sazonalidade intradiária, a análise posterior foca exclusivamente na dinâmica autorregressiva condicional das durações (BHO GAL; THEKKE, 2019).

## 2.3 Conjunto de dados

Para o estudo em questão, foram utilizados, para os preços diários, dados do site CoinMarketCap, através do pacote `crypto2` do software R que realiza uma extração automática (scraping) do histórico de vários ativos financeiros, incluindo o Bitcoin, foco desta pesquisa. O período analisado é datado do dia 1 de janeiro de 2019 a 31 de dezembro de 2024.

A seguir, apresenta-se as variáveis utilizadas na pesquisa e a série histórica dos preços do Bitcoin durante esse período:

Tabela 3: Descrição e Classificação das variáveis (Dados Diários)

Variáveis	Descrição	Classificação
<code>time_open</code>	Data e hora de abertura	Quantitativa discreta
<code>time_close</code>	Data e hora de fechamento	Quantitativa discreta
<code>time_high</code>	Data e hora de alta	Quantitativa discreta
<code>time_low</code>	Data e hora de baixa	Quantitativa discreta
<code>open</code>	Valor mais baixo registrado durante o dia	Quantitativa contínua
<code>high</code>	Maior preço do dia	Quantitativa contínua
<code>low</code>	Menor preço do dia	Quantitativa contínua
<code>close</code>	Preço de fechamento do dia	Quantitativa contínua
<code>volume</code>	Volume de transação em 24 horas	Quantitativa contínua
<code>market_cap</code>	Valor Total de Mercado	Quantitativa contínua

Fonte: CoinMarketCap (<https://coinmarketcap.com>).

Para a análise intradiária dos preços do Bitcoin foram utilizados dados do site da Dukascopy, correspondendo ao dia 20 de janeiro de 2025. A seguir, apresenta-se as variáveis utilizadas no estudo:

Tabela 4: Descrição e Classificação das variáveis (Dados Intradiários)

Variáveis	Descrição	Classificação
Local Time	Data e hora da transação	Qualitativa ordinal
Ask	Preço de venda	Quantitativa contínua
Bid	Preço de compra	Quantitativa contínua
Ask Volume	Volume de ativos disponíveis para venda	Quantitativa discreta
Bid Volume	Volume de ativos disponíveis par compra	Quantitativa discreta

Fonte: Dukascopy (<https://www.dukascopy.com/>).

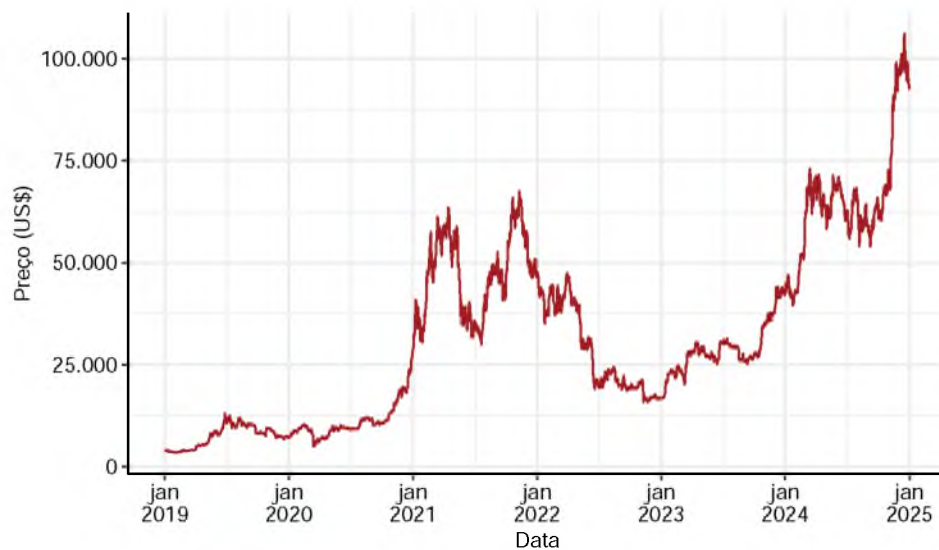
### 3 Resultados

Nesta seção, são apresentadas as modelagens dos dados diários e intradiários, conforme os modelos detalhados na Seção 4. Os resultados foram obtidos utilizando o software R, versão 4.4.1. Para garantir a replicabilidade, os códigos-fonte estão disponíveis publicamente no repositório GitHub, acessível em: <https://github.com/Arthur-RPC/TCC---Arthur-Rodrigues.git>.

#### 3.1 Descrição dos Dados

É fundamental compreender a dinâmica dos preços do Bitcoin ao longo do tempo para ter um embasamento adequado antes de aplicar a modelagem estatística. Diante disso, a Figura abaixo, demonstra a trajetória dessa criptomoeda no período de 1 de janeiro de 2019 a 31 de dezembro de 2024.

Figura 1: Preços do Bitcoin ao longo do tempo (01/01/2019 - 31/12/2024)



Conforme mostra a Figura 1, o período analisado engloba diferentes condições de mercado. Entre janeiro de 2019 e o início de 2020, os preços do Bitcoin mantiveram-se relativamente estáveis, situando-se abaixo de US\$ 15 000. Em 2021, observou-se uma forte alta no primeiro semestre, seguida de uma correção acentuada. Esse movimento de valorização coincidiu em parte com a pandemia de COVID-19, quando muitos investidores passaram a ver o Bitcoin como uma possível proteção contra a instabilidade econômica global (GOODELL; GOUTTE, 2021).

No intervalo entre 2023 e 2024, o Bitcoin voltou a se valorizar de forma significativa, impulsionado por fatores macroeconômicos e eventos específicos do mercado de

criptomoedas. Esse período culminou em um novo recorde de preços, acima de US\$ 98 000 em novembro de 2024, possivelmente influenciado por acontecimentos políticos, como as eleições nos Estados Unidos (BRASIL, 2024).

A presença dessas diferentes fases — da relativa calma à alta volatilidade, passando por fortes tendências de alta e correções bruscas — torna o intervalo 2019–2024 ideal para testar os modelos estocásticos selecionados. Assim, podemos avaliar se esses modelos se adaptam bem às mudanças drásticas na dispersão dos preços. Além disso, a ocorrência de tendências persistentes e reversões abruptas cria um cenário adequado para verificar a capacidade dos modelos baseados em Movimento Browniano Fracionário de capturar dependência temporal.

Portanto, a escolha desse período não busca evitar a influência de fatores externos ou a instabilidade de preços, mas utilizá-los como um teste de estresse para os modelos. A capacidade de um modelo estocástico descrever e prever o comportamento do Bitcoin em um intervalo tão heterogêneo — que inclui tanto fases de calmaria quanto de grandes turbulências — atesta sua robustez e relevância. Nesse contexto, a aleatoriedade e a memória longa, características intrínsecas aos modelos estudados, serão avaliadas diante de um histórico de preços rico e desafiador.

### 3.2 Avaliação dos Modelos para Dados Diários (GFBM e GOUFE)

Para avaliar qual dos modelos (GOUFE-CIR, GOUFE-CONST, GFBM-CIR e GFBM-CONST) teve o melhor ajuste, foram estimados os parâmetros desses modelos. Dessa forma, os resultados são apresentados nas Tabelas 5 e 6.

Tabela 5: Estimativa dos Parâmetros do Modelos GOUFE

Modelo	Log-verossimilhança	$\theta_1$	$\theta_2$	$\theta_3$	$\kappa$	$\omega$	$\xi$	H
GOUFE-CIR	20.888,66	0,0149634	0,005039290	0,9051001	2,790833	0,1454547	0,4370782	0,5511263
GOUFE-CONST	31.871,26	0,0100000	0,001028255	0,8999774	–	–	0,3624386	0,5461502

Tabela 6: Estimativa dos Parâmetros do Modelos GFBM

Modelo	Log-verossimilhança	$\mu$	$\kappa$	$\omega$	$\xi$	H
GFBM-CIR	21.170,86	0,0009889554	2,785846	0,1000000	0,3624460	0,5461402
GFBM-CONST	25.599,41	0,0035963469	–	–	0.7000000	0,5413182

A partir das Tabelas 5 e 6, observa-se que os modelos com volatilidade constante (GOUFE-CONST e GFBM-CONST) apresentam log-verossimilhanças mais elevadas do que suas respectivas versões com volatilidade do tipo CIR. Essa análise

inicial insinua que, para os preços diários do Bitcoin, a complexidade adicional introduzida pela modelagem da volatilidade via processo CIR pode não ser justificada, e uma suposição de volatilidade constante proporciona um ajuste mais eficiente aos dados. Entre todos os modelos analisados, o GOUFE-CONST se destaca com a maior log-verossimilhança (31.871,26), indicando o melhor ajuste geral.

Além disso, o expoente de Hurst ( $H$ ) estimado em todos os modelos permanece consistentemente na faixa de 0,54 a 0,55, trazendo à tona a ideia de que os preços diários do Bitcoin exibem uma memória longa.

Após a avaliação dos parâmetros estimados, foram analisados a capacidade preditiva por meio de métricas de erro que quantificam o desvio entre os valores observados e os valores previstos pelos modelos. Dessa forma, a Figura 2 apresenta a comparação entre os preços diários observados do Bitcoin e as previsões geradas pelos quatro modelos ao longo do período de análise, enquanto a Tabela 7 demonstra essa comparação na perspectiva dos erros.

Figura 2: Preços observados x Preditos do Bitcoin ao longo do tempo (01/01/2019 - 31/12/2024)

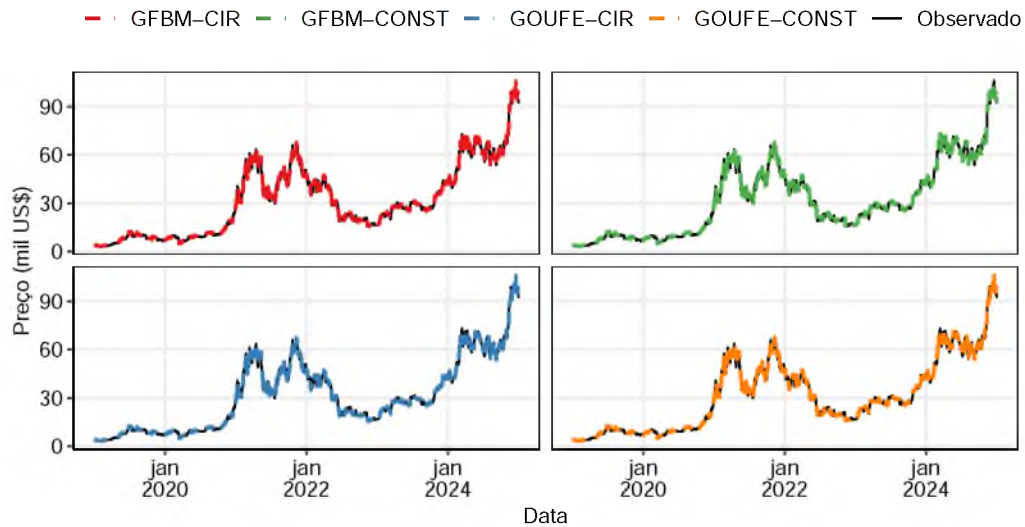


Tabela 7: Comparação de RMSE, MAE, MAPE,  $R^2$  e Viés dos Modelos

Modelo	RMSE	MAE	MAPE	$R^2$	Viés
GFBM-CIR	1.201,802	716,3009	0,0225726	0,9969002	9,7625
GOUFE-CONST	1.213,196	716,2269	0,0225984	0,9969822	34,0668
GFBM-CONST	1.217,385	722,6033	0,0227552	0,9967674	-72,3004
GOUFE-CIR	1.235,990	742,0912	0,0236312	0,9968740	215,2351

Ao analisar a Figura 2, observa-se, que todos os modelos conseguem acompanhar

a trajetória geral dos preços observados, capturando as principais tendências e movimentos do mercado. Porém, na Tabela 7, fica evidente que na perspectiva dos erros e do coeficiente de determinação, o modelo GFBM-CIR teve o melhor desempenho, tendo o menor RMSE (US\$ 1.201,802 e o menor MAPE 2,25%, enquanto o GOUFE-CONST apresentou o menor MAE (US\$ 716,2269).

Além disso, o modelo GOUFE-CONST também obteve o maior  $R^2$  (0,9969822), indicando que explica aproximadamente 99,70% da variabilidade dos preços observados, apesar dos demais modelos apresentarem valores muito próximos. Em relação ao viés, o modelo GFBM-CIR demonstrou o menor valor absoluto (US\$ 9,7625), sugerindo uma tendência muito pequena de superestimação, enquanto o GOUFE-CIR apresentou o maior viés (US\$ 215,2351).

De modo geral, as métricas de erro, sugerem que, em termos de precisão, os modelos GFBM-CIR e GOUFE-CONST tiveram melhor desempenho, apesar dos outros modelos estarem bem próximos. Vale ressaltar que, no modelo GOUFE, a adoção da volatilidade estocástica (CIR) não trouxe ganho significativo na precisão, apesar do acréscimo de parâmetros. Já no modelo GFBM, com a volatilidade CIR houve um ganho significativo, visto que o modelo teve um viés de apenas US\$ 9,7625 enquanto que com volatilidade constante o viés foi de US\$ -72,3004.

Entretanto, para ter uma assertividade melhor em qual modelo está mais preciso em termos de desempenho é preciso analisar outros fatores e dentre eles está os Critérios de Informação (AIC, BIC e EDC), onde os menores valores indicam melhor ajuste, penalizando a complexidade do modelo.

Tabela 8: Comparação dos Modelos em relação aos Critérios de Informação (AIC, BIC e EDC)

Modelo	AIC	BIC	EDC
GOUFE-CIR	46.161,33	58.638,44	46.249,44
GFBM-CIR	46.725,71	59.202,82	46.813,82
GFBM-CONST	55.582,82	68.059,94	55.670,93
GOUFE-CONST	68.126,51	80.603,62	68.214,62

De acordo com os resultados da Tabela 8, o modelo GOUFE-CIR apresentou os menores valores para os três critérios, indicando ser o modelo com melhor ajuste aos dados, considerando o equilíbrio entre complexidade e verossimilhança, enquanto que o modelo GFBM-CIR aparece como o segundo melhor.

Ademais, os modelos com volatilidade constante (GFBM-CONST e GOUFE-CONST) apresentaram valores de AIC, BIC e EDC mais altos, sugerindo que a incorporação da volatilidade estocástica via processo CIR (Cox-Ingersoll-Ross) trouxe um ga-



nho de ajuste que compensou o aumento no número de parâmetros para os modelos GOUFE e GFBM, contrastando com os resultados das tabelas 5 e 6.

Ao comparar esses resultados com as métricas de erro (Tabela 7), nota-se uma divergência entre os modelos, visto que os modelos GFBM-CIR e GOUFE-CONST mostraram um melhor desempenho em termo dos erros, enquanto o GOUFE-CIR demonstrou o melhor ajuste geral segundo AIC, BIC e EDC.

### 3.2.1 Análise dos resíduos

Para avaliar a adequação dos modelos, procedeu-se à análise de resíduos, onde é possível visualizar a distribuição dos resíduos, incluindo mediana, quartis e outliers, conforme apresentado na Figura 3 e Tabela 9.

Figura 3: Gráfico Boxplot dos Resíduos por Modelo

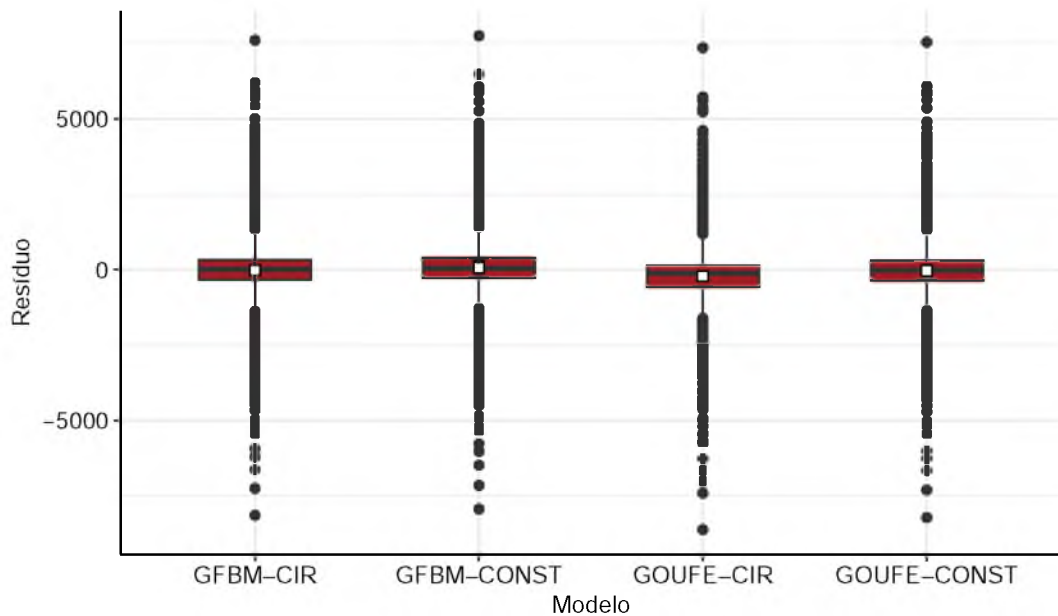


Tabela 9: Estatísticas descritivas dos resíduos por modelo

Modelo	Mín	Q1	Med	Q3	Máx	DP
GOUFE-CONST	-8.223,34	-355,14	-5,84	311,58	7.544,64	1.212,72
GFBM-CIR	-8.147,72	-341,43	2,81	325,76	7.610,12	1.212,76
GFBM-CONST	-7.937,89	-273,95	42,36	397,36	7.757,97	1.215,24
GOUFE-CIR	-8.620,95	-558,77	-116,96	139,57	7.359,55	1.271,11

A partir da Figura 3 e da Tabela 9, conclui-se que os modelos GFBM-CIR e

GOUFE-CONST apresentam baixo viés na previsão da tendência central dos preços do Bitcoin, visto que apresentaram medianas muito próximas de zero 2,81 e -5,84, respectivamente.

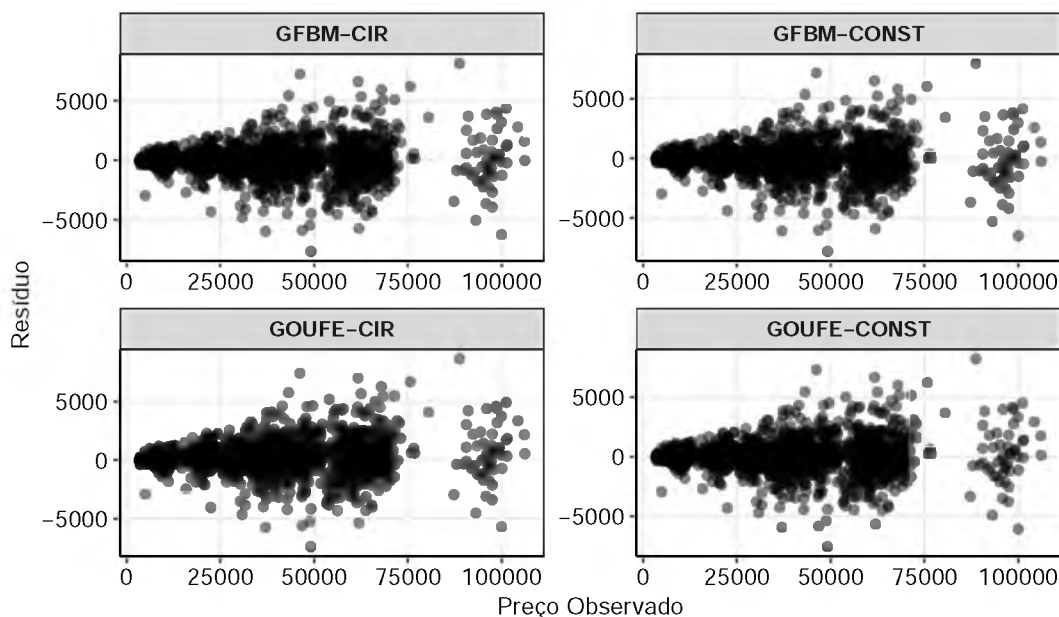
Em relação à dispersão dos resíduos, o Intervalo Interquartil ( $IQR = Q3 - Q1$ ), são bem semelhantes entre os modelos, variando de 666,72 (GOUFE-CONST) a 698,34 (GOUFE-CIR). Nesse aspecto, o modelo GOUFE-CIR apresenta o maior IQR e também o maior Desvio Padrão ( $DP = 1.271,11$ ), indicando a maior variabilidade nos seus resíduos. Já os modelos GFBM-CIR ( $DP = 1.212,76$ ) e GOUFE-CONST ( $DP = 1.212,72$ ) apresentam os menores desvios padrão, tendo uma menor dispersão.

A respeito da simetria da distribuição dos resíduos o modelo GFBM-CIR aparenta ser o mais simétrico em torno da sua mediana, com distâncias semelhantes entre a mediana e os quartis ( $Med - Q1 \approx 344,24$ ;  $Q3 - Med \approx 322,95$ ). Já o modelo GFBM-CONST demonstra uma leve assimetria à direita, enquanto o modelo GOUFE-CIR exibe uma assimetria à esquerda mais acentuada, consistente com sua mediana negativa.

Um aspecto comum em todos os quatro modelos é o grande presença de numerosos outliers, ocasionando que erros de previsão. A amplitude total dos resíduos ( $Máx - Mín$ ) é bem semelhante entre os modelos, variando de aproximadamente 15.694 (GFBM-CONST) a 15.979 (GOUFE-CIR).

A seguir, apresenta-se os gráficos de dispersão dos resíduos em relação aos preços observados do Bitcoin para os quatro modelos ajustados aos dados diários: GFBM-CIR, GFBM-CONST, GOUFE-CIR e GOUFE-CONST.

Figura 4: Gráfico de Dispersão dos Resíduos Padronizados por Modelo

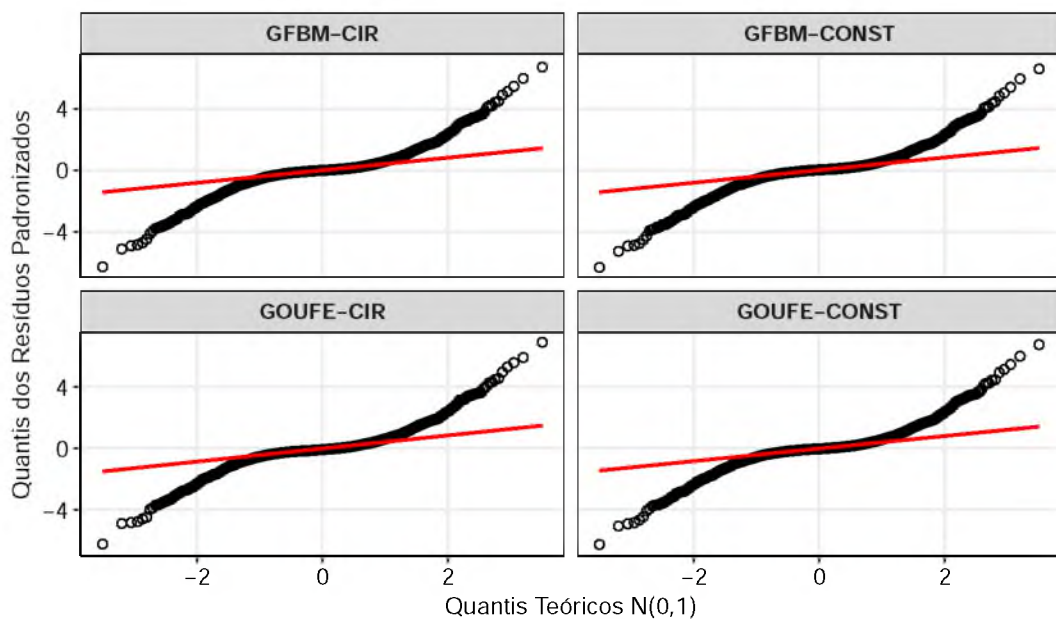


De acordo com a Figura 4, observa-se que nos quatro modelos a dispersão dos resíduos não é constante ao longo da faixa de preços observados. Assim, para preços mais baixos (aproximadamente abaixo de US\$ 25.000), os resíduos concentram-se mais próximos de zero, indicando erros menores. Contudo, à medida que o preço aumenta, a variabilidade dos resíduos também cresce consideravelmente, formando um padrão que se assemelha a um cone ou leque.

Este comportamento evidencia a presença de heterocedasticidade, ou seja, a variância dos erros do modelo não é homogênea, sendo maior para níveis de preço mais elevados. Dessa forma, os erros de previsão dos modelos tende a aumentar conforme o preço do Bitcoin se eleva.

Para uma visão ainda mais clara acerca da distribuição dos resíduos, dispõem-se os gráficos QQ-Plot dos resíduos, comparando os quantis da distribuição dos resíduos com os quantis de uma distribuição normal padrão  $N(0, 1)$ .

Figura 5: Gráfico QQ-Plot dos Resíduos Padronizados por Modelo



De acordo com a Figura 5, os quatro modelos possuem desvios significativos da linha de referência, com uma grande quantidade de outliers e caudas pesadas, sugerindo que os resíduos não seguem distribuição normal.

Esse comportamento de caudas pesadas significa que, em certos momentos, os erros de previsão podem ser muito maiores do que indicam medidas como RMSE ou MAE, que se baseiam em valores médios. Para medir melhor o risco associado a esses eventos utiliza-se o Expected Shortfall (ES), também chamado de Déficit Esperado. O  $ES_{1-\alpha}$  mensura a perda média esperada nos piores  $\alpha\%$  dos cenários.

A Tabela a seguir exibe os valores do Déficit Esperado calculados a um nível de confiança de 95% ( $ES_{95}$ ) para cada modelo ajustado.

Tabela 10: Déficit Esperado por Modelo a um nível de confiança de 95%.

Modelo	Déficit Esperado ( $ES_{95}$ )
GOUFE-CIR	-2.764,197
GOUFE-CONST	-3.020,207
GFBM-CIR	-3.070,517
GFBM-CONST	-3.212,101

Analisando os resultados da Tabela 10, conclui-se que o modelo GOUFE-CIR apresentou o menor déficit esperado (US\$-2.764,197), considerando as perdas médias nos 5% piores cenários. Em seguida, aparecem os modelos GOUFE-CONST (US\$-3.020,207) e GFBM-CIR (US\$-3.070,517), com valores bem semelhantes.

Além disso, o modelo GFBM-CONST registrou o maior déficit esperado (US\$-3.212,101), sendo o modelo menos conservador.

### 3.2.2 Teste de Normalidade e Autocorrelação dos resíduos

Para confirmar formalmente a hipótese de normalidade sugerida na análise da Figura 5, aplicou-se o teste de Shapiro Wilk, cuja hipóteses nula ( $H_0$ ) é de que os dados seguem uma distribuição normal.

Tabela 11: Teste de Shapiro-Wilk nos Resíduos Padronizados por Modelo

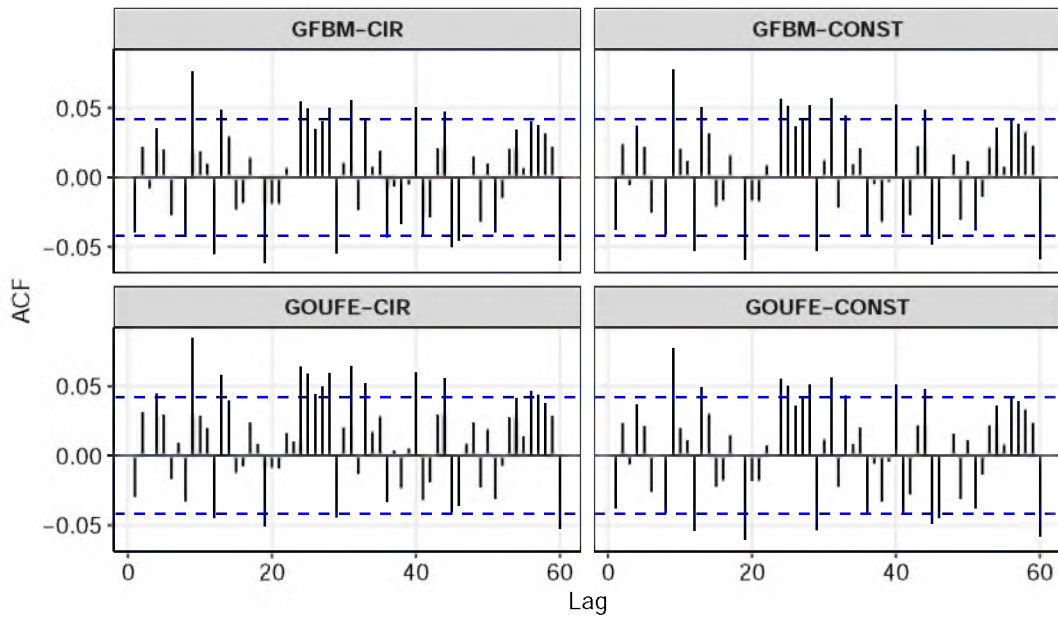
Modelo	W	p-valor
GFBM-CONST	0,8615	$2,86 \times 10^{-40}$
GOUFE-CIR	0,8605	$2,24 \times 10^{-40}$
GFBM-CIR	0,8597	$1,87 \times 10^{-40}$
GOUFE-CONST	0,8593	$1,70 \times 10^{-40}$

Conforme a Tabela 11, os p-valores obtidos nos quatro modelos são extremamente baixos, levando à rejeição da hipótese nula de normalidade em todos os casos, ou seja, a qualquer nível de significância usual.

Para avaliar se há presença de autocorrelação nos resíduos dos modelos ajustados, apresenta-se o gráfico da Função de Autocorrelação (ACF) que exibe as autocorrelações estimadas dos resíduos para diferentes defasagens (lags), para cada um dos quatro mo-

delos. Nesse sentido, as linhas tracejadas azuis representam os limites de significância aproximados (geralmente  $1.96/N$ , onde  $N$  é o número de observações). Dessa forma, as barras que ultrapassam esses limites indicam autocorrelações estatisticamente significativas naquela defasagem específica.

Figura 6: Gráfico ACF dos Resíduos por Modelo



Na Figura 6, é notório que para todos os quatro modelos existem algumas barras que excedem os limites de significância. Isso sugere, preliminarmente, que pode haver alguma estrutura de autocorrelação não capturada pelos modelos nos resíduos.

Para uma avaliação formal e global da presença de autocorrelação, utiliza-se o teste de Ljung-Box, cuja hipótese nula ( $H_0$ ) é de que as autocorrelações dos resíduos até uma determinada defasagem são conjuntamente iguais a zero, ou seja, os resíduos são independentes.

Nesse sentido, de acordo com Burns (2002) a escolha da defasagem não deve exceder 5% do tamanho da amostra. Dessa forma, para o estudo em questão, foi utilizado uma defasagem de 60 dias, que está dentro do limite máximo estabelecido (109). Diante disso, a tabela a seguir mostra os valores da estatística de teste e os p-valores correspondentes para cada modelo.

Tabela 12: Teste de Ljung–Box nos Resíduos Padronizados (lag=60)

Modelo	Estatística	DF	p-valor
GFBM-CIR	160,651	60	$4,65 \times 10^{-11}$
GFBM-CONST	160,8942	60	$3,67 \times 10^{-11}$
GOUFE-CONST	161,2322	60	$3,29 \times 10^{-11}$
GOUFE-CIR	175,6447	60	$2,80 \times 10^{-13}$

Portanto, fica evidente na Tabela 12 que em todos os quatros modelos a hipótese nula ( $H_0$ ) foi fortemente rejeitada, pois os p-valores são significativamente inferiores a qualquer nível de significância convencional. Desse modo, há dependência dos resíduos para uma defasagem de 60 dias, o que confirma a suspeita inicial de que esses modelos possuem dependência temporal de longo prazo.

### 3.3 Resultados do modelo ACD para dados intradiários

A escolha do parâmetro de diferença de preços no modelo ACD é fundamental para determinar quais variações de preço devem ser consideradas significativas para a geração das durações (intervalos entre mudanças significativas no preço). Nesse sentido, se o limite for muito pequeno, o modelo pode capturar muitos ruídos, aumentando excessivamente o número de durações. Por outro lado, se for muito grande, pode acabar ignorando movimentos importantes do mercado.

Assim, foram realizados testes variando o preço entre 0,05% , 0,075%, 0,10% e 0,15% do preço médio do Bitcoin no dia 20/01/2025 para avaliar o impacto na distribuição das durações. Nesse contexto, a Figura e a Tabela a seguir, apresentam os resultados obtidos.

Figura 7: Boxplot da duração pela diferença do preço relativo

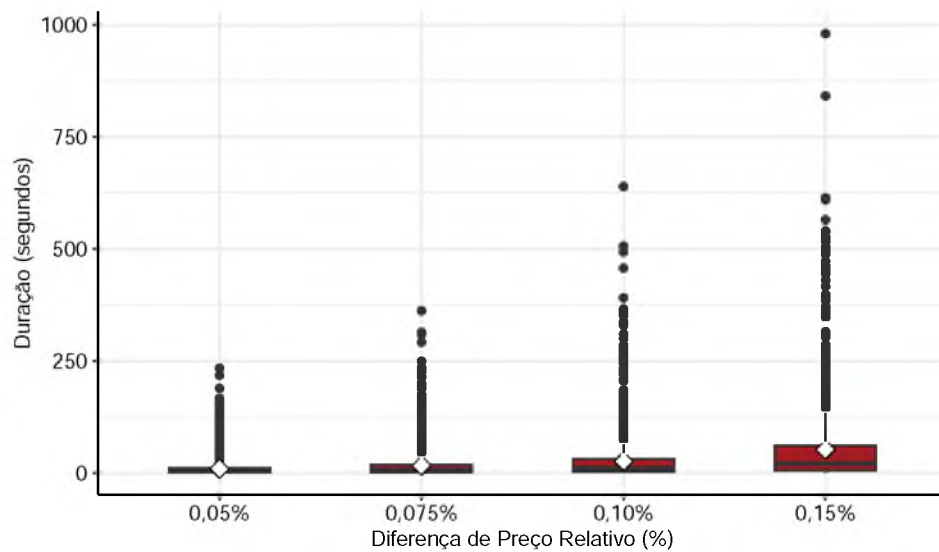


Tabela 13: Resultados da sensibilidade da diferença de preços relativos

Estatística	0,05%	0,075%	0,10%	0,15%
Nº de Durações	8.893	4.983	3.114	1.579
Mínimo	1	1	1	1
1º Quartil (Q1)	1	2	3	6
Mediana	4	7	10	21
Média	9,31	16,61	26,58	52,44
3º Quartil (Q3)	11	19	31	61
Máximo	234	362	639	980
Desvio Padrão	14,52	26,54	45,04	86,94

De acordo com a Figura 7 e a Tabela 13, para uma diferença de preços de 0,05% obteve-se 8.893 durações, uma mediana de 4 segundos e primeiro quartil igual a 1 segundo, sendo sensível a pequenas oscilações de preço.

Por outro lado, aumentar o limite para 0,15% reduziu drasticamente o número de durações (1.579), aumentando a mediana para 21 segundos e o terceiro quartil para 61 segundos. Além disso, o limite de 0,10% possui uma boa quantidade de durações (3.114), tendo uma mediana de 10 segundos, evitando um excesso de eventos curtos e uma perda de movimentos relevantes.

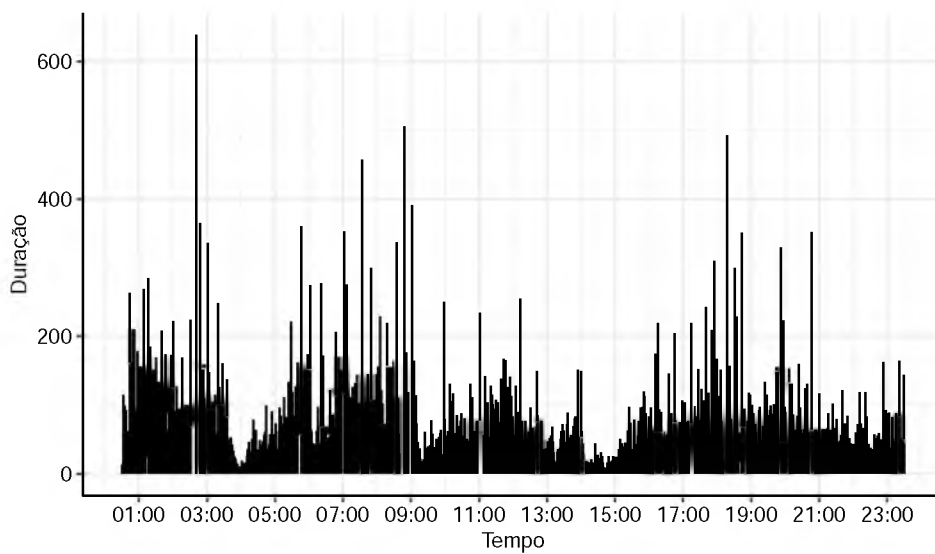
Com base nesses resultados, foram adotados para o restante do estudo, um limite de 0,10% que representa transações em torno de US\$ 104,74 dólares.

### 3.3.1 Análise das durações ao longo do tempo

Para entender a variação da frequência dos eventos ao longo do dia foram feitas as análises das durações. Dessa forma, em modelos ACD, as durações mais curtas indicam períodos de maior atividade de mercado, enquanto durações mais longas podem sinalizar momentos de menor liquidez ou de baixa volatilidade.

Com base nisso, a Figura abaixo apresenta a evolução das durações durante o dia, destacando os períodos de maior e menor intensidade das variações de preço.

Figura 8: Evolução das durações ao longo do dia (Brasil)

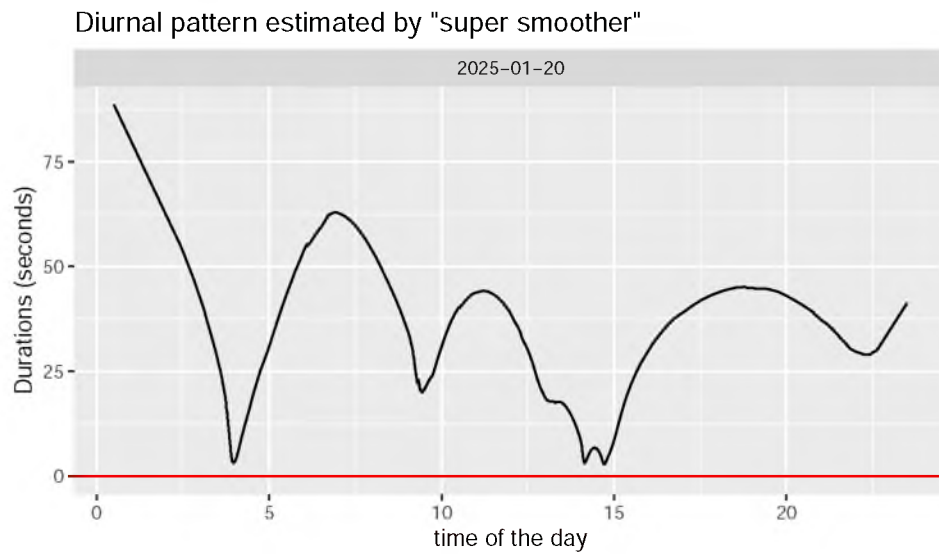


A partir da Figura 8, conclui-se que há uma variação significativa nas durações ao longo do tempo, onde os picos mais elevados de durações ocorrem em horários como 3h, 7h, 9h e 19h, indicando que nesses horários o preço ficou estável por um período de mais de 6 minutos.

Para capturar os padrões diurnos das durações, aplicamos um método de suavização conhecido como **Super Smoother** proposto por Friedman (1984). Esse método permite identificar tendências de longo prazo na variação das durações ao longo do dia. Nesse sentido, apresenta a Figura abaixo:



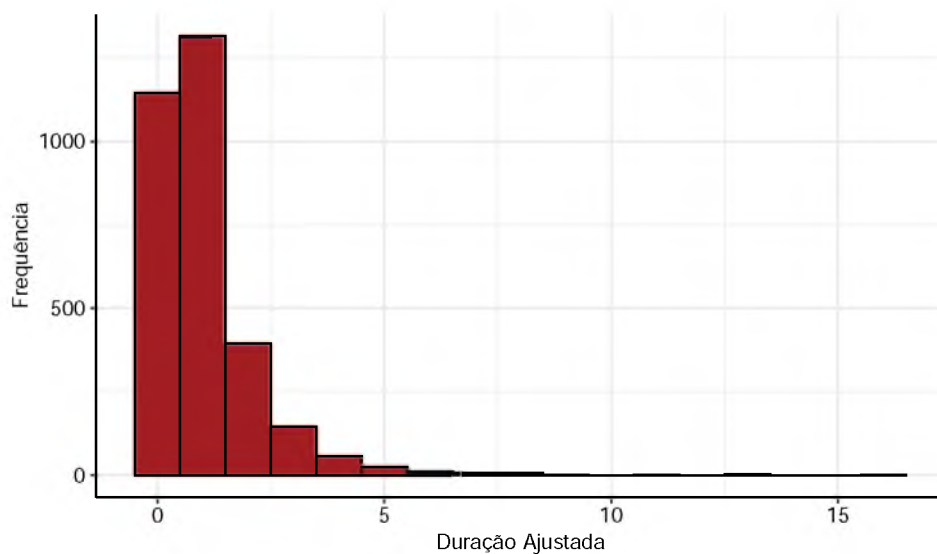
Figura 9: Padrão diurno das durações estimado pelo método "Super Smoother".



A partir da Figura 9, nota-se padrão intradiário cíclico nas durações entre eventos, com oscilações que refletem variações na atividade do mercado. Inicialmente, observa-se durações elevadas, seguidas de uma queda acentuada por volta de 5h, sugerindo um aumento na frequência dos eventos com o início da sessão de negociação.

Além disso, entre as 5h e 15h há sucessivos picos e vales, indicando períodos de alta e baixa volatilidade, possivelmente influenciados por janelas de liquidez e sobreposição de mercados. Já no final do dia (após as 15h) as durações voltam a subir, propondo uma redução na atividade do mercado.

Figura 10: Histograma das durações ajustadas.



Analisando a Figura 10, fica evidente que a maioria das durações ajustadas  $X_t^*$

está concentrada em valores próximos de zero, indicando que a maioria das transações ocorre em intervalos muito curtos. A frequência diminui gradualmente conforme as durações aumentam até aproximadamente 2, mas existe uma pequena parcela de observações que se distribui em valores superiores a 5, com registros isolados acima de 15.

Essa distribuição assimétrica, com uma cauda longa à direita, revela que, mesmo após remover o efeito do horário do dia, persistem intervalos esporádicos maiores entre transações.

A Tabela a seguir fornece informações sobre a centralidade, dispersão e forma da distribuição, auxiliando na modelagem do processo subjacente e na escolha dos parâmetros do modelo ACD.

Tabela 14: Estatísticas Descritivas das durações Ajustadas

<b>Estatística</b>	<b>Valor</b>
Mínimo	0,012
Mediana	0,704
Média	1,055
Máximo	15,506
Desvio Padrão	1,168
Coefficiente de Variação (%)	110,618
Coefficiente de Assimetria (Skewness)	3,877
Coefficiente de Curtose (Kurtosis)	26,698
Amplitude	15,494

Os resultados da Tabela 14 indicam que a distribuição das durações ajustadas apresenta uma forte assimetria à direita (3.877), o que significa que há uma maior concentração de durações curtas, mas com a presença de algumas durações longas. Além disso, o alto valor do coeficiente de curtose (26,698) sugere que a distribuição possui caudas longas, indicando a presença de valores extremos mais frequentes do que em uma distribuição normal.

Ademais, a média das durações ajustadas é 1,055 segundos, enquanto a mediana é 0,704 segundos, evidenciando que a maioria das durações tende a ser menor que a média, devido à assimetria da distribuição. O coeficiente de variação, de aproximadamente 110,62%, demonstra uma grande dispersão relativa dos dados em relação à média.

### 3.3.2 Análise de Ajuste do Modelos para as durações

Para avaliar qual dos modelos (Exponencial, Weibull e Gamma Generalizado) teve o melhor ajuste, foram estimados os parâmetros do ACD(1,1). Dessa forma, os resultados são apresentados nas Tabelas a seguir.

Tabela 15: Parâmetros Estimados do Modelo Exponencial ACD(1,1)

Parâmetro	Estimativa	Erro Padrão	P-valor
$\omega$	0,0405	0,00519	0,000
$\alpha_1$	0,1063	0,01184	0,000
$\beta_1$	0,9626	0,01004	0,000

Tabela 16: Parâmetros Estimados do Modelo Weibull ACD(1,1)

Parâmetro	Estimativa	Erro Padrão	P-valor
$\omega$	0,0402	0,00440	0,000
$\alpha_1$	0,1035	0,00989	0,000
$\beta_1$	0,9655	0,00821	0,000
$\gamma$	1,1722	0,01528	0,000

Tabela 17: Parâmetros Estimados do Modelo Generalized Gamma ACD(1,1)

Parâmetro	Estimativa	Erro Padrão	P-valor
$\omega$	0,0469	0,00557	0,000
$\alpha_1$	0,1226	0,01194	0,000
$\beta_1$	0,9473	0,01107	0,000
$\kappa$	20,7112	8,20236	0,016
$\gamma$	0,2464	0,04950	0,000

De acordo com as Tabelas 15, 16 e 17, observa-se que, nos três modelos, os parâmetros  $\alpha_1$  e  $\beta_1$  são estatisticamente significativos (valor-p = 0,000), o que indica uma forte influência das durações passadas na duração atual e uma alta persistência temporal da volatilidade das durações.

No modelo Exponencial, os parâmetros estimados  $\beta_1 = 0,9626$  e  $\omega = 0,0405$  evidenciam que a componente autorregressiva condicional explica a maior parte da variabilidade das durações, refletindo a persistência observada nos dados. A soma de  $\alpha_1$  e  $\beta_1$

próxima de 1 ( $0,1063 + 0,9626 = 1,0689$ ) sugere uma persistência elevada.

O modelo Weibull, por sua vez, apresenta estimativas de  $\alpha_1 = 0,1035$  e  $\beta_1 = 0,9655$ , que também demonstram a significativa dependência temporal e persistência. A inclusão do parâmetro de forma  $\gamma = 1,1722$ , que é altamente significativo (valor-p = 0,000), permite ao modelo Weibull capturar assimetrias e curtoses nas durações que o modelo Exponencial, com seu parâmetro de forma fixo em 1, não consegue. Um valor de  $\gamma > 1$  indica que a distribuição das durações é mais concentrada em torno da média e possui caudas mais pesadas do que a distribuição exponencial.

Já no modelo Gamma Generalizado, os parâmetros  $\alpha_1 = 0,1226$  e  $\beta_1 = 0,9473$  mantêm a dependência temporal e a persistência. Além disso, a inclusão dos parâmetros  $\kappa = 20,7112$  e  $\gamma = 0,2464$  (ambos significativos) permitem ajustar assimetria e curtose adicionais nas durações.

Nesse sentido, para ter uma análise mais precisa acerca do ajuste dos modelos, dispõe-se a tabela a seguir.

Tabela 18: Métricas de Ajuste dos Modelos ACD(1,1)

Modelo	Log-verossimilhança	AIC	BIC	MSE
Exponencial	-3.102,44	6.210,88	6.229,01	1,2376
Weibull	-3.034,89	6.077,78	6.101,95	1,2377
Gamma Generalizado	-2.885,06	5.780,13	5.810,35	1,2381

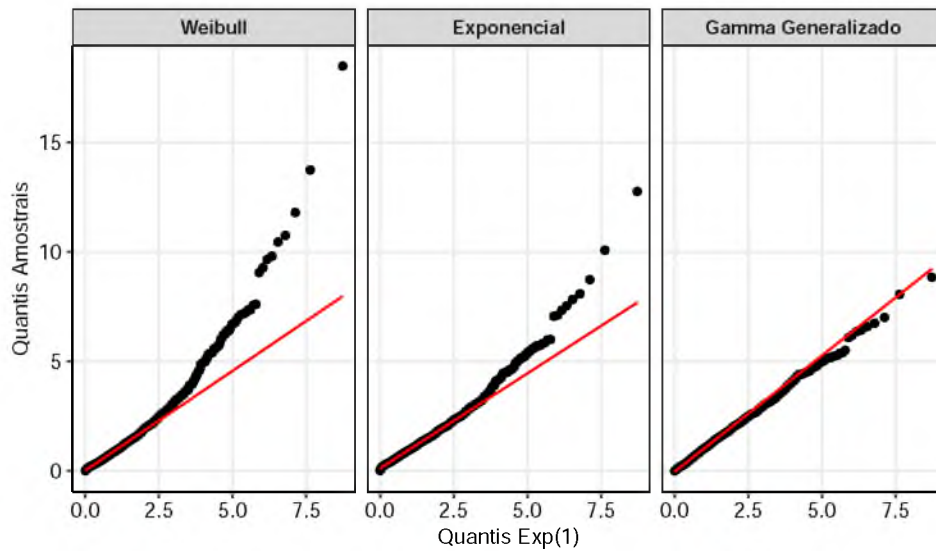
A partir dos resultados da Tabela 18, conclui-se que em termos de log-verossimilhança, o modelo Gamma Generalizado (-2.885,06) apresenta o maior valor, superando tanto o modelo Weibull (-3.034,89) quanto o Exponencial (-3.102,44). Isso sugere que o modelo Gamma Generalizado é o que melhor captura a distribuição das durações observadas. Essa análise é corroborada pelos critérios de informação de Akaike (AIC) e Bayesiano (BIC), onde o modelo Gamma Generalizado apresenta penalizações mais baixas (AIC e BIC inferiores), o que sugere maior eficiência no equilíbrio entre qualidade do ajuste e complexidade do modelo.

No que tange ao Erro Quadrático Médio (MSE), observa-se que todos os modelos apresentam valores muito próximos. Essa pequena variação entre eles indica que, apesar das diferenças no ajuste (conforme log-verossimilhança, AIC e BIC), a capacidade preditiva dos modelos é similar. Desse modo, a maior flexibilidade e o melhor ajuste alcançados por modelos como o Gamma Generalizado não implicam em uma redução significativa do erro de previsão, mantendo a performance preditiva em patamares similares.

Por fim, para verificar se os resíduos dos modelos (Exponencial, Weibull e Gamma

Generalizado) ACD(1,1) seguem uma distribuição exponencial padrão  $\text{Exp}(1)$ , apresenta-se o gráfico a seguir.

Figura 11: QQ plot dos resíduos de Cox-Snell dos Modelos.



Analisando a Figura 11, constata-se que, no modelo Exponencial, observa-se um desvio significativo dos pontos em relação à reta de referência, especialmente nos quantis superiores. Esse comportamento indica que o modelo Exponencial subestima as durações extremas, falhando em capturar adequadamente a cauda da distribuição dos dados.

O modelo Weibull, por sua vez, também apresenta um desvio maior na reta de referência, especialmente nos quantis superiores, se comparado ao modelo Exponencial. Isso sugere que, apesar de sua flexibilidade adicional, o modelo Weibull ainda não consegue capturar de forma satisfatória a distribuição das durações extremas, indicando que a distribuição exponencial se ajusta melhor que a Weibull.

Por fim, o modelo Gamma Generalizado exhibe os pontos mais próximos à reta de referência em toda a extensão do gráfico. Essa proximidade indica uma excelente conformidade dos resíduos padronizados com a distribuição  $\text{Exp}(1)$ , sinalizando que o modelo Gamma Generalizado é o que melhor captura a heterocedasticidade, a assimetria e a curtose presentes nas durações ajustadas. Portanto, em termos de ajuste dos resíduos, o modelo Gamma Generalizado se destaca como o mais adequado, seguido pelo modelo Exponencial e, por último, pelo modelo Weibull.

A Tabela a seguir exibe os valores do Expected Shortfall (ES) ou Déficit Esperado, calculados a um nível de confiança de 95% ( $\text{ES}_{95}$ ), que corresponde à média dos 5 % maiores resíduos normalizados (cauda da distribuição) para cada modelo ajustado.

Tabela 19: Déficit Esperado por Modelo a um nível de confiança de 95%.

Modelo	Déficit Esperado ( $ES_{95}$ )
Gamma Generalizado	3,975315
Exponencial	4,075854
Weibull	4,881840

Conforme Tabela 19, observa-se que o modelo Gamma Generalizado obteve  $ES_{95\%}$  igual a 3,9753, valor inferior ao  $ES_{95\%}$  do modelo Exponencial (4,0759) e do modelo Weibull (4,882). Esse resultado indica que o ajuste do modelo Gamma Generalizado é mais aderente ao comportamento esperado de uma  $Exp(1)$ .

Para verificar se há de autocorrelação nos resíduos de Cox–Snell obtidos pelos modelos ACD, dispõe-se a Figura 12 e teste de Ljung-Box (Tabela 20), onde a hipótese nula ( $H_0$ ) assume que não há autocorrelação até a defasagem  $k$ .

Figura 12: Gráfico ACF dos Resíduos Cox–Snell por Modelo (lag = 35)

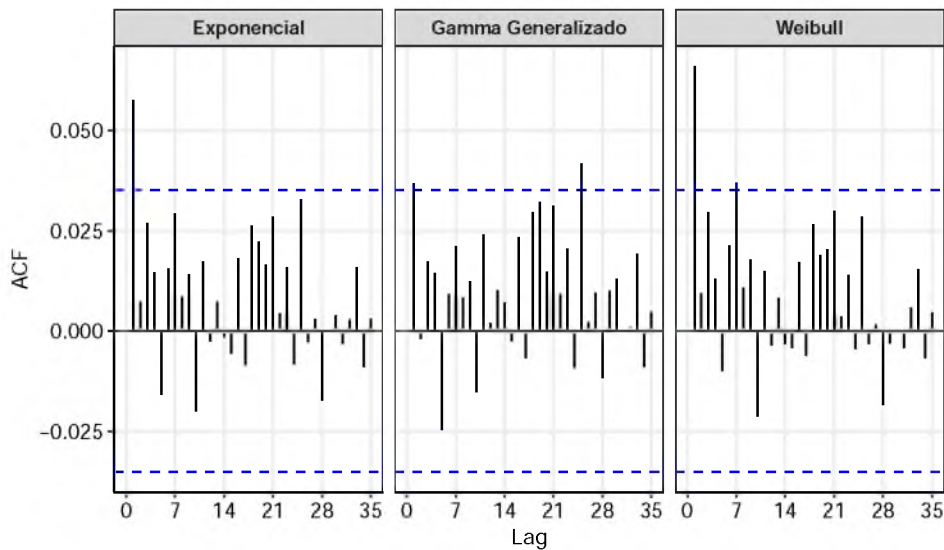


Tabela 20: Resultados do teste de Ljung–Box para resíduos de Cox–Snell (lag = 35)

Modelo	Estatística	DF	P-valor
Gamma Generalizado	35,16990	33	0,3657253
Exponencial	36,02138	33	0,3289920
Weibull	41,00386	33	0,1596591

Analisando a Tabela 20, conclui-se que para um nível de significância de 5%,

a hipótese nula de que os resíduos são ruído branco não é rejeitada para nenhum dos modelos, uma vez que todos os p-valores são superiores a 0,05. Dessa forma, os três modelos conseguem capturar a dependência temporal presente nas durações, resultando em resíduos que se comportam como ruído branco, ou seja, os resíduos são independentes.

A Figura 12 corrobora com essa análise, visto que a maioria dos coeficientes de autocorrelação se encontra dentro das bandas de confiança (linhas tracejadas azuis), indicando a ausência de autocorrelação significativa em qualquer defasagem para os três modelos. Embora existam alguns poucos picos que ultrapassam as bandas em defasagens específicas, o teste de Ljung-Box, que considera a autocorrelação conjunta, indica que esses desvios pontuais não são estatisticamente significativos para rejeitar a hipótese de ruído branco.

## 4 Conclusão

Este trabalho dedicou-se à modelagem estocástica dos preços do Bitcoin, abordando tanto a dinâmica diária quanto a intradiária, com o objetivo de capturar características complexas como memória longa, volatilidade estocástica e padrões de duração entre transações. Buscou-se propor e avaliar modelos baseados em EDEs dirigidas pelo fBm para os dados diários, e modelos ACD para a análise intradiária.

Na análise diária, foram comparados modelos GFBM e GOUFE, com especificações de volatilidade constante e estocástica (CIR). A avaliação, baseada em métricas de erro (Tabela 7), critérios de informação (Tabela 8) e análise de risco (Tabela 10), indicaram que os modelos com volatilidade estocástica (GOUFE-CIR e GFBM-CIR) apresentaram melhor ajuste segundo os critérios AIC e BIC, sugerindo que a incorporação da dinâmica da volatilidade é relevante. Em termos de erro de previsão (RMSE, MAE, MAPE), os resultados foram muito próximos entre os quatro modelos, tendo o modelo GFBM-CIR como o melhor. Contudo, sob a perspectiva dos critérios de informação, o modelo GOUFE-CIR apresentou o melhor equilíbrio entre ajuste e complexidade, sendo o mais eficiente em termos de parcimônia. Além disso, o modelo GOUFE-CIR também teve o menor déficit esperado (US\$-2.764,197) (Tabela 10).

A análise dos resíduos (Figuras 3-6, Tabelas 7, 9, 10), no entanto, revelou a presença de heterocedasticidade (variância crescente com o preço, Figura 4) e forte rejeição da hipótese de normalidade (Teste de Shapiro-Wilk, Tabela 11) para todos os modelos. Embora a autocorrelação tenha sido mitigada (Teste de Ljung-Box, Tabela 12), esses resultados sugerem que, apesar dos avanços, os modelos ainda não capturam completamente toda a complexidade da distribuição dos retornos diários do Bitcoin.

Já análise intradiária, os modelos ACD Exponencial, Weibull e Gamma Generalizado foram aplicados às durações entre transações, após ajuste para padrões diurnos (Figuras 8-10). Nesse sentido, os resultados (Tabelas 13-17) demonstraram a capacidade dos modelos ACD em capturar o agrupamento das durações. Diante disso, a análise dos resíduos de Cox-Snell (Figura 11 e Tabela 19) indicaram um melhor ajuste do modelo Gamma Generalizado e menor déficit esperado, em comparação aos modelo Exponencial e Weibull.

As principais contribuições deste trabalho residem na aplicação e comparação de modelos estocásticos avançados (GFBM, GOUFE com volatilidade estocástica) à série de preços diários do Bitcoin, e na exploração dos modelos ACD para a dinâmica intradiária deste ativo. A análise conjunta em diferentes escalas temporais oferece uma perspectiva mais completa sobre o comportamento complexo do Bitcoin, confirmando a presença de memória longa e a relevância da volatilidade estocástica na escala diária, e o agrupamento



---

de durações na escala intradiária.

## Referências

- ACERBI, C.; TASCHE, D. On the coherence of expected shortfall. *Journal of Banking & Finance*, v. 26, n. 7, p. 1487–1503, 2002.
- ALHAGYAN, M.; YASSEN, M. F. Incorporating stochastic volatility and long memory into geometric brownian motion model to forecast performance of standard and poor's 500 index. *AIMS Mathematics*, v. 8, n. 8, p. 18581–18595, 2023. Disponível em: <https://www.aimspress.com/article/doi/10.3934/math.2023945>.
- ANTONOPOULOS, A. M. *Mastering Bitcoin: Unlocking Digital Cryptocurrencies*. 1st. ed. [S.l.]: O'Reilly Media, 2014. 89–101 p.
- ANTONOPOULOS, A. M. *Mastering Bitcoin: Programming the Open Blockchain*. 2nd. ed. [S.l.]: O'Reilly Media, 2017. 115–130 p.
- ARAÚJO, M. V. d. S. Aplicação do movimento browniano geométrico para simulação de preços de ações do Índice brasileiro de small caps. *arXiv preprint arXiv:2011.08128*, 2020.
- ARTZNER, P. et al. Coherent measures of risk. *Mathematical Finance*, v. 9, n. 3, p. 203–228, 1999.
- ARULAMPALAM, M. S. et al. A tutorial on particle filters for online nonlinear/non-gaussian bayesian tracking. *IEEE Transactions on Signal Processing*, v. 50, n. 2, p. 174–188, 2002. Disponível em: <https://www.irisa.fr/aspi/legland/ensta/ref/arulampalam02a.pdf>.
- AÏT-SAHALIA, Y.; LO, A. Nonparametric estimation of state-price densities implicit in financial asset prices. *J. Financ.*, v. 53, p. 499–547, 1998. Disponível em: <https://www.princeton.edu/~yacine/aslo.pdf>.
- BACHELIER, L. *Théorie de la speculation*. [S.l.]: Elsevier, 1900. v. 17. 21–86 p.
- BHOGAL, S. K.; THEKKE, R. V. Conditional duration models for high-frequency data: A review on recent developments. *Journal of Economic Surveys*, Wiley Online Library, v. 33, n. 1, p. 252–273, 2019.
- BIAGINI, F. et al. *Stochastic Calculus for Fractional Brownian Motion and Applications*. London: Springer, 2008. ISBN 978-1-84800-008-1.
- BRASIL, C. *Bitcoin renova recorde e ultrapassa US\$ 98 mil com efeito Trump*. 2024. Publicado em: 21 de nov. 2024. Disponível em: <https://www.cnnbrasil.com.br/economia/mercado/bitcoin-renova-recorde-e-ultrapassa-us-98-mil-com-efeito-trump/>.
- BURNS, P. Robustness of the ljung-box test and its rank equivalent. *SSRN Electronic Journal*, 2002. Working Paper. Disponível em: <https://ssrn.com/abstract=443560>.
- COX, J. C.; INGERSOLL, J. E.; ROSS, S. A. A theory of the term structure of interest rates. *Econometrica*, v. 53, n. 2, p. 385–407, 1985. Disponível em: <https://doi.org/10.2307/1911249>.

- DIMPFL, T.; ODELLI, S. Bitcoin price risk—a durations perspective. *Journal of Risk and Financial Management*, MDPI, v. 13, n. 7, p. 157, 2020. Disponível em: <https://www.mdpi.com/1911-8074/13/7/157>.
- DOUCET, A.; FREITAS, N. de; GORDON, N. J. (Ed.). *Sequential Monte Carlo Methods in Practice*. Springer, 2001. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/978-1-4757-3437-9>.
- ENGLE, R.; RUSSELL, J. Autoregressive conditional duration: A new method for irregularly spaced transaction data. *Econometrica*, Wiley Online Library, v. 66, n. 5, p. 1127–1162, 1998.
- FRIEDMAN, J. H. *A Variable Span Smoother*. [S.l.], 1984.
- GARNIER, J.; SOLNA, K. Chaos and order in the bitcoin market. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, v. 524, p. 708–721, 2019. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.physa.2019.04.164>.
- GLASSERMAN, P. *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*. New York: Springer, 2003. v. 53. 60–72 p. (Applications of Mathematics, v. 53).
- GLASSERMAN, P. *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*. Springer, 2004. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/978-0-387-21617-1>.
- GOODELL, J. W.; GOUTTE, S. Co-movement of covid-19 and bitcoin: Evidence from wavelet coherence analysis. *Finance Research Letters*, v. 38, p. 101625, 2021. ISSN 1544-6123. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1544612320306978>.
- GORDON, N. J.; SALMOND, D. J.; SMITH, A. F. M. Novel approach to nonlinear/non-gaussian bayesian state estimation. *IEE Proceedings F (Radar and Signal Processing)*, v. 140, n. 2, p. 107–113, 1993. Disponível em: <https://www3.nd.edu/~lemmon/courses/ee67033/pubs/GordonSalmondSmith93.pdf>.
- HOTTA, L. K. et al. Forecasting bitcoin and ethereum risk measures through msgarch models: Does the specification matter? *Brazilian Review of Finance*, Sociedade Brasileira de Finanças, v. 23, n. 1, p. e202503, 2025.
- HULL, J. C. *Options, Futures, and Other Derivatives*. 7. ed. [S.l.: s.n.], 2009.
- HURST, H. E. Long-term storage capacity of reservoirs. *Transactions of the American Society of Civil Engineers*, v. 116, p. 770–808, 1951.
- KLEBANER, F. C. *Introduction to Stochastic Calculus with Applications*. 3rd. ed. [S.l.]: World Scientific Publishing, 2012. 85-110 p.
- KLOEDEN, P. E.; PLATEN, E. *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*. Berlin: Springer, 1992. v. 23. 10–16 p. (Stochastic Modelling and Applied Probability, v. 23).
- LIU, J. S.; WEST, M. Combined parameter and state estimation in simulation-based filtering. Springer, New York, p. 197–223, 2001.
- LJUNG, G. M.; BOX, G. E. P. On a measure of lack of fit in time series models. *Biometrika*, v. 65, n. 2, p. 297–303, 1978.

- MANDELBROT, B. B. *The Fractal Geometry of Nature*. New York: W. H. Freeman, 1983.
- NAKAMOTO, S. Bitcoin: A peer-to-peer electronic cash system. 2008. Disponível em: <https://bitcoin.org/bitcoin.pdf>.
- NELDER, J. A.; MEAD, R. A simplex method for function minimization. *The Computer Journal*, v. 7, n. 4, p. 308–313, 1965.
- OKSENDAL, B. K. *Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications*. [S.l.]: Springer, 2002.
- PACURAR, M. Autoregressive conditional durations models in finance: A survey of the theoretical and empirical literature. *Journal of Economic Surveys*, Wiley Online Library, v. 22, n. 4, p. 711–751, 2008.
- QUINTINO, F. S.; MEDINO, A. V.; DOREA, C. C. Y. Drift estimation for a class of generalized ornstein-uhlenbeck process with fluctuating exponential trend. *Communications in Statistics - Simulation and Computation*, Taylor Francis, v. 0, n. 0, p. 1–14, 2023.
- ROSS, S. M. *An introduction to mathematical finance: Options and other topics*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2002.
- ROSS, S. M. *Introduction to Probability Models*. 11th. ed. [S.l.]: Academic Press, 2014.
- SHAPIRO, S. S.; WILK, M. B. An analysis of variance test for normality (complete samples). *Biometrika*, v. 52, n. 3/4, p. 591–611, 1965.
- ZHANG, M. Y.; RUSSELL, J. R.; TSAY, R. S. A nonlinear autoregressive conditional duration model with applications to financial transaction data. *Journal of Econometrics*, v. 104, p. 179–207, 2001.