

PROJETO DE GRADUAÇÃO 2

**MODELAGEM E CONTROLE DE *RISERS*
EM OPERAÇÕES *OFFSHORE***

Daniel Gomes Albuquerque

Brasília, Agosto de 2012

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
Faculdade de Tecnologia
Departamento de Engenharia Mecânica

PROJETO DE GRADUAÇÃO 2
**MODELAGEM E CONTROLE DE RISERS
EM OPERAÇÕES OFFSHORE**

Daniel Gomes Albuquerque

*Relatório submetido ao Departamento de Engenharia
Mecânica como requisito parcial para obtenção
do grau de Engenheiro Mecânico*

Banca Examinadora

Prof. Eugênio Libório Feitosa, ENM/UnB
Orientador

Gustavo Coelho Abade, ENM/UnB
Examinador Interno

Aline Souza de Paula, ENM/UnB
Examinadora Interna

Dedicatórias

Dedico este trabalho a todos aqueles que estiveram ao meu lado e me apoiaram durante o curso de engenharia mecânica.

Daniel Gomes Albuquerque

A exploração de reservatórios de petróleo em localidades afastadas da área continental é atualmente uma prática comum e que vem recebendo grande quantidade de investimento, pois apresenta grandes desafios tecnológicos. Em operações em alto mar, *risers* possuem um papel fundamental, pois através deles, e somente deles, as embarcações se comunicam com o leito submarino para perfurar, instalar equipamentos e extrair hidrocarbonetos. Neste contexto, o presente trabalho apresenta uma modelagem para o comportamento destes sistemas a fim de propor uma estratégia de controle de trajetória para o seu posicionamento no leito marinho. As equações governantes obtidas a partir das forças que atuam no sistema são simplificadas e obtém-se uma solução que permita relacionar matematicamente o movimento das duas extremidades do riser. Isto permite que se saiba como deve se movimentar a embarcação para movimentar a extremidade inferior da maneira desejada. As soluções obtidas são verificadas através de uma simulação do sistema discretizado pelo método de diferenças finitas. A capacidade de prever o comportamento deste tipo de sistema permite operá-lo com maior rapidez e numa mais ampla gama de condições climáticas.

ABSTRACT

The exploration of oil reservoirs in offshore locations is currently a common practice and demands great amounts of investment due to the technological challenges that come along. Risers play a fundamental role in offshore operations, for they allow communication between the seabed and offshore vessels for drilling, equipment installation and oil extraction operations. In this context, this study presents the development of a model for riser systems in order to propose a trajectory control strategy to its bottom end. The governing equations obtained from the forces present on the system are simplified and we obtain a solution that yields a mathematical relation between top and bottom displacements. This allows one to determine the precise movement of the vessel in order to obtain the desired displacement of the bottom end. The solutions are verified through a numerical simulation of the system with the finite difference method. The ability to predict the behaviour of these systems allows one to operate them more efficiently and in a wider range of weather conditions.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	CONTEXTUALIZAÇÃO E DEFINIÇÃO DO PROBLEMA	1
1.2	APRESENTAÇÃO DO MANUSCRITO	2
2	DESENVOLVIMENTO	3
2.1	MODELO	3
2.1.1	FORÇAS HIDRODINÂMICAS	4
2.2	SOLUÇÕES ANALÍTICAS	5
2.2.1	IÇAMENTO DE EQUIPAMENTOS	5
2.2.2	OPERAÇÕES DE REENTRADA PARA RISERS DE PRODUÇÃO OU PERFURAÇÃO	9
2.3	CONDIÇÕES DE CONTORNO	11
2.4	MÉTODO NUMÉRICO	12
2.4.1	CABO COM TENSÃO CONSTANTE	13
2.4.2	RISER DE TENSÃO VARIÁVEL	16
2.4.3	CÁLCULO NUMÉRICO DE INTEGRAIS IMPRÓPRIAS	17
3	RESULTADOS	20
3.1	INTRODUÇÃO	20
3.2	CONVERGÊNCIA NUMÉRICA	20
3.3	IÇAMENTO DE EQUIPAMENTOS	21
3.4	OPERAÇÃO DE REENTRADA PARA RISERS COM TRAÇÃO VARIÁVEL	24
4	CONCLUSÕES	26
	REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	27

LISTA DE FIGURAS

1.1	Plataforma durante operação de reentrada[2]	2
2.1	Sistema de Coordenadas	3
2.2	Discretização do sistema com uma massa em sua extremidade inferior	14
2.3	Esquema de realimentação para o cômputo das forças dissipativas	15
2.4	Discretização do sistema de tensão variável sem carga suspensa	17
2.5	Integrando da equação 2.46 mapeado nas variáveis x e t	18
2.6	Superfície resultante da mudança de variável	19
3.1	Convergência dos três primeiros harmônicos para seus respectivos valores teóricos	20
3.2	Resposta a uma entrada no formato rampa para um riser flexível com tensão constante	21
3.3	Trajétórias de topo e fundo para diferentes tempos de estabilização - Atrito Linear	22
3.4	Trajétórias de topo e fundo para diferentes tempos de estabilização - Atrito Não-Linear	23
3.5	Resposta a uma entrada no formato rampa para um riser rígido com tensão variável	24
3.6	Trajétórias de topo e fundo para diferentes tempos de estabilização - Atrito Não-Linear	25

LISTA DE TABELAS

3.1	Propriedades do cabo de aço flexível e da carga suspensa.....	21
3.2	Propriedades do riser de aço rígido	24

LISTA DE SÍMBOLOS

Símbolos Latinos

A	Matriz de Estados	
B	Matriz de Entrada	
C	Matriz de Saída	
C_d	Coefficiente de Arrasto	
C_D	Coefficiente de Proporcionalidade para Força de Arrasto	$[Ns^2/m^3]$
C_m	Coefficiente de Massa Adicional	
C_1	Constante Auxiliar	
C_2	Constante Auxiliar	
D	Matriz de Transferência Direta	
D_e	Diâmetro Externo	$[m]$
E	Módulo de Elasticidade	$[Pa]$
F_c	Força Exercida Pelo Riser Sobre Carga Suspensa	$[N]$
F_h	Força Hidrodinâmica por Unidade de Comprimento	$[N/m]$
g	Aceleração da Gravidade	$[m/s^2]$
i	Número Imaginário	
J	Momento de Inércia de Área	$[m^4]$
J_n	Função de Bessel de Primeira Espécie e Ordem n	
k	Constante Auxiliar	
l	Comprimento de um Elemento do Modelo Discretizado	$[m]$
L	Comprimento do Riser	$[m]$
m	Densidade Linear Equivalente	$[kg/m]$
m_c	Massa da Carga Suspensa	$[kg]$
m_F	Massa Adicional de Fluido por Unidade de Comprimento	$[kg/m]$
m_s	Densidade Linear	$[kg/m]$
N	Número de Elementos do Modelo Discretizado	
s	Variável de Laplace	$[s^{-1}]$
t	Tempo	$[s]$
t_e	Tempo de Estabilização de Trajetória	$[s]$
T	Tração	$[N]$
T_0	Tração Média	$[N]$
u_c	Função Degrau Unitário em c	
U	Vetor de Entrada	
v	Velocidade de Propagação de Onda	$[m/s]$
x	Variável de Integração	$[s^{-1}]$
X	Vetor de Estados	
Y	Vetor de Saída	
Y_n	Função de Bessel de Segunda Espécie e Ordem n	
z	Coordenada Espacial na Direção Vertical	$[m]$

Símbolos Gregos

α	Coeficiente de Amortecimento	$[s^{-1}]$
Δ	Varição entre duas grandezas similares	
τ	Variável de Integração	$[s^{-1}]$
Υ	Coordenada Espacial na Direção Horizontal	$[m]$
λ	Tempo de Propagação de Onda em Velocidade Constante	$[s]$
ξ	Tempo de Propagação de Onda com Velocidade Variada	$[s]$
ζ	Variável Auxiliar	
θ	Variável de Integração	
π	Constante Matemática	
γ	Constante Auxiliar	

Sobrescritos

\cdot	Primeira Derivada Temporal
$\ddot{}$	Segunda Derivada Temporal

1 INTRODUÇÃO

1.1 CONTEXTUALIZAÇÃO E DEFINIÇÃO DO PROBLEMA

O petróleo vem sendo utilizado pelo homem como matéria prima há milênios. Há registros que relatam o uso de asfalto na construção das torres da Babilônia, há mais de 4000 anos. Por volta de 347 DC a China já produzia óleo a partir de poços que chegavam a 240 metros de profundidade escavados com brocas rudimentares feitas a partir de uma coluna de bambu e pedras afiadas. Em 1850, o processo de obtenção da querosene a partir do petróleo foi inventado por Ignacy Lukasiewicz e se mostrou uma alternativa barata para o óleo de baleia, na época utilizado para iluminação. Na história mais recente os derivados de petróleo vêm sendo amplamente utilizados como fonte de energia para motores a combustão, que movem quase que a totalidade dos veículos automotivos terrestres bem como os de transporte aéreo e marítimo, e como matéria prima para o asfalto e para diversos tipos de polímeros. Apesar de ser uma fonte de energia não renovável e de sua utilização implicar impactos ambientais, o petróleo continua a ser massivamente utilizado enquanto alternativas sustentáveis estão em desenvolvimento. A demanda crescente por este bem da sociedade moderna motiva a busca por novas reservas e impulsiona o desenvolvimento tecnológico para explorá-las com eficiência técnica e segurança. Em um contexto onde a exploração de óleo e gás em águas profundas é cada vez mais frequente, surge a necessidade de se estudar técnicas de controle para operar uma classe de equipamentos denominada de *risers*. Trata-se de cabos e/ou tubulações que podem chegar a 2000 metros de comprimento e fazem a comunicação entre o leito marinho e as plataformas de petróleo na superfície. É através destes equipamentos que são realizadas as operações de perfuração, instalação de equipamentos submarinos e extração de hidrocarbonetos do subsolo marítimo. A maioria das operações marítimas atuais requer o emprego de embarcações equipadas com sistema de posicionamento dinâmico (DP - Dynamic Positioning). Sua função é fazer que a embarcação possua o controle automático de sua posição e de seu aproamento exclusivamente por meio de propulsores.

A figura 1.1 mostra uma plataforma offshore com um riser suspenso em operação de reentrada, isto é, reconexão com o poço de petróleo. Atualmente estas operações são feitas com o auxílio de um veículo operado remotamente (ROV - *Remotely Operated Vehicle*) através do qual o operador da embarcação de posicionamento dinâmico obtém informação sobre a posição da extremidade inferior do riser a fim de posicioná-la no local desejado. Em águas muito profundas e/ou com condições climáticas desfavoráveis como ondas, vento etc. executar esta operação com rapidez e precisão é uma tarefa árdua e nem sempre realizável. Nestes casos em especial é de grande utilidade ser capaz de prever o comportamento de um sistema como este a fim de tornar a operação de reentrada mais rápida e ampliar a gama de condições climáticas em que ela pode ser executada com eficiência.

Com este trabalho, objetiva-se compreender e descrever o comportamento de risers rígidos e flexíveis no contexto de operações em alto-mar com aplicação direta em operações de manipulação de equipamentos submarinos, bem como de risers de produção e de perfuração. Para atingir este objetivo, parte-se em busca de equações e modelos físicos que modelem o sistema. A partir destas, pretende-se obter soluções que forneçam uma relação matemática entre as trajetórias das duas extremidades de um riser. De posse deste conhecimento, pode-se determinar precisamente como deve se movimentar a plataforma de modo a

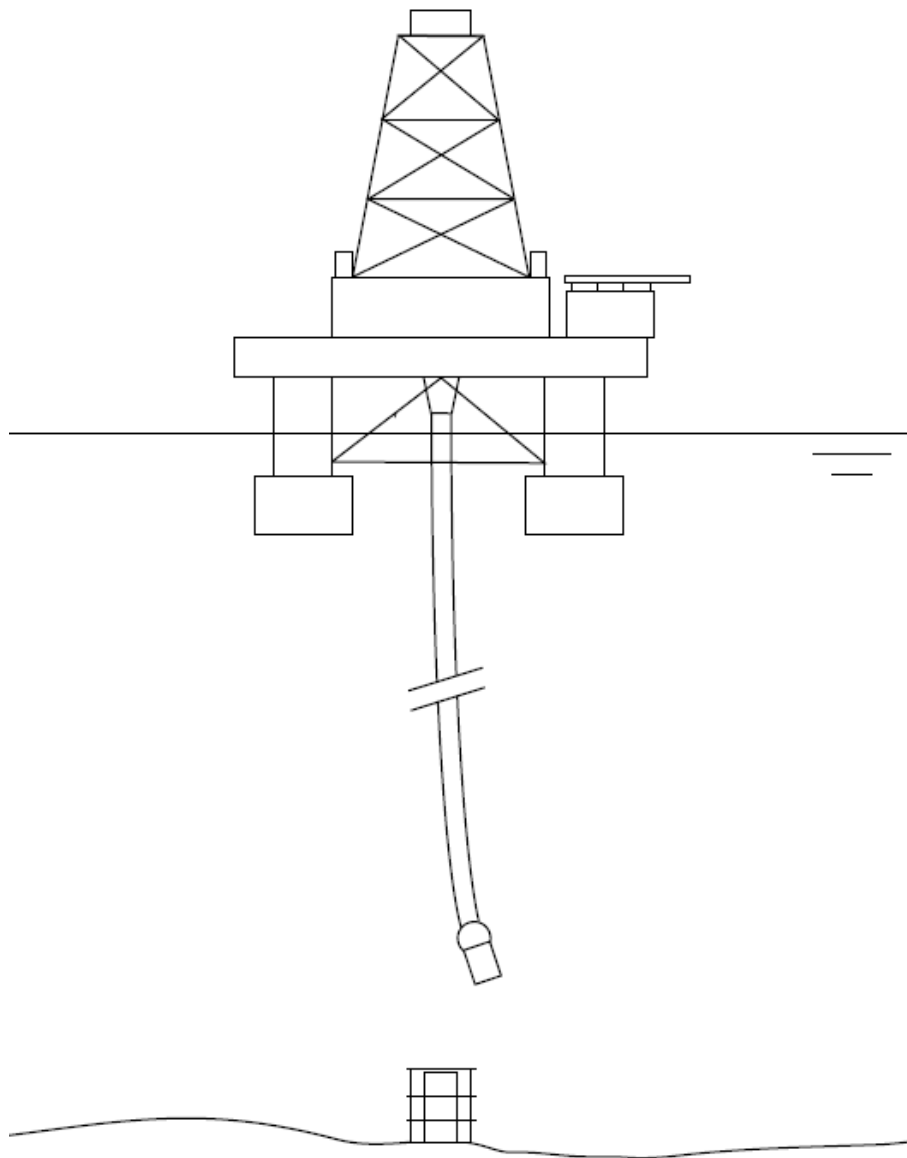


Figura 1.1: Plataforma durante operação de reentrada[2]

posicionar a extremidade inferior do riser de maneira ágil e eficiente.

1.2 APRESENTAÇÃO DO MANUSCRITO

O capítulo 2 descreve o desenvolvimento matemático bem como as hipóteses simplificadoras utilizadas para se obter um modelo controlável do sistema. Simulações numéricas são utilizadas para verificar as soluções obtidas e observar como comportamento do sistema é influenciado pelas simplificações adotadas. Estes resultados são apresentados e discutidos no capítulo 3, seguidos das conclusões no capítulo 4.

2 DESENVOLVIMENTO

2.1 MODELO

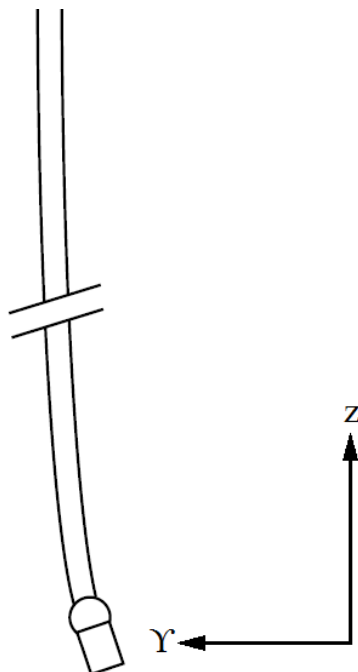


Figura 2.1: Sistema de Coordenadas

Em plataformas de posicionamento dinâmico, move-se a plataforma à qual o riser é conectado por uma de suas extremidades com a intenção de que sua outra ponta atinja uma posição especificada. Portanto, mais do que descrever o comportamento deste sistema ponto a ponto, deseja-se conhecer a respeito da relação entre as extremidades do riser. Isto é, denotando por $\Upsilon(z, t)$ o deslocamento lateral de um ponto z do sistema em um dado instante t , procura-se uma solução que forneça o movimento necessário $\Upsilon(L, t)$ da plataforma para dada uma trajetória $\Upsilon(0, t)$ desejada, onde $z = L$ corresponde ao topo do riser. Estudos anteriores[1] mostram que o planejamento de trajetória é possível para cabos sem amortecimento com ou sem carga suspensa. No contexto de operações marítimas, no entanto, não se pode negligenciar as forças hidrodinâmicas que atuam no sistema.

Para se controlar o sistema em questão, é necessário conhecer a equação que governa o movimento de um riser. Trata-se de uma longa tubulação, com comprimento da ordem de 2000 m, suspensa na direção vertical e imersa em um fluido. Para modelar este sistema, utiliza-se a equação 2.1(ver Fortaleza, Eugênio[2]), que deriva da aplicação da segunda lei de Newton a uma seção de comprimento infinitesimal do riser.

$$m_s \frac{\partial^2 \Upsilon}{\partial t^2} = -EJ \frac{\partial^4 \Upsilon}{\partial z^4} + \frac{\partial}{\partial z} \left(T(z) \frac{\partial \Upsilon}{\partial z} \right) + F_h(z, t) \quad (2.1)$$

Nesta equação, E é o módulo de elasticidade do riser e J o momento de inércia de área de sua seção

transversal. $T(z)$ é a função que descreve a tensão normal de tração ao longo do comprimento do cabo e F_h representa as forças externas que atuam no cabo, que neste caso são forças de arrasto hidrodinâmicas. A equação 2.1 é válida para pequenos ângulos. Condição facilmente atendida, dado o comprimento do riser está três ordens de grandeza acima de seu deslocamento lateral.

2.1.1 Forças Hidrodinâmicas

Há duas principais forças hidrodinâmicas a serem consideradas neste problema. São elas o arrasto de massa virtual e o arrasto dissipativo. Estas duas forças são funções diretas da geometria do corpo, da direção do escoamento e de seu número de Reynolds característico. Enquanto o arrasto dissipativo se manifesta num corpo que se move em velocidade constante, o arrasto de massa virtual se manifesta apenas em movimentos acelerados. O fato é que ao movimentar-se um corpo imerso em um fluido, não se atribui energia cinética somente a ele, mas também a uma massa de fluido em sua vizinhança. Uma vez que o corpo possui aceleração, há uma taxa de variação da energia cinética no domínio fluido, o que só pode ocorrer através da ação de uma força. Para efeitos práticos, é como se houvesse uma massa adicional a ser considerada como parte integrante do sistema. Na equação 2.2 tem-se a equação de Morison por unidade de comprimento, onde o coeficiente m_F representa a massa de água a ser adicionada à do cabo por unidade de comprimento. A segunda componente do arrasto hidrodinâmico é proporcional ao quadrado da velocidade do corpo submerso, o que ocorre em escoamentos com número de Reynolds moderado a alto, onde as forças inerciais dominam a dinâmica fluidica. C_D é o coeficiente de proporcionalidade do arrasto não-linear. Tanto m_F como C_D são funções da geometria do corpo imerso e podem ser calculados através de métodos experimentais, numéricos ou mesmo analiticamente a depender da geometria e do número de Reynolds. $F_h(z, t)$ não inclui forças laterais oscilatórias provenientes do desprendimento de vórtices em um escoamento ao redor de um cilindro.

$$F_h(z, t) = -m_F \frac{\partial^2 \Upsilon}{\partial t^2} - C_D \frac{\partial \Upsilon}{\partial t} \left| \frac{\partial \Upsilon}{\partial t} \right| \quad (2.2)$$

A massa adicional de fluido por unidade de comprimento e o coeficiente de arrasto (também por unidade de comprimento) são dados pelas seguintes expressões:

$$\begin{aligned} m_F &= \rho C_m A \\ C_D &= \frac{1}{2} \rho C_d D_e \end{aligned} \quad (2.3)$$

Em que A é a área da seção transversal do riser, D_e o seu diâmetro externo e ρ a densidade do fluido em que encontra imerso. Para o caso de um cilindro circular reto, $C_m = 2$ e $C_d = 1.2$.

Substituindo a equação 2.2 na equação do movimento do cabo, obtém-se a equação 2.4, em que $m = m_s + m_F$ é a massa linear equivalente do cabo, onde já se contabiliza a massa adicional de fluido.

$$m \frac{\partial^2 \Upsilon}{\partial t^2} = -EJ \frac{\partial^4 \Upsilon}{\partial z^4} + \frac{\partial}{\partial z} \left(T(z) \frac{\partial \Upsilon}{\partial z} \right) - C_D \frac{\partial \Upsilon}{\partial t} \left| \frac{\partial \Upsilon}{\partial t} \right| \quad (2.4)$$

Frequentemente, risers consistem de tubos de aço rígidos, porém o extenso comprimento destes equipa-

mentos, em comparação ao diâmetro torna o efeito de resistência à flexão negligível. Pode-se então considerar que, para efeitos práticos, esta estrutura apresenta comportamento semelhante ao de um cabo delgado. Adicionalmente, é interessante do ponto de vista matemático tornar linear o termo dissipativo de arrasto, substituindo $\frac{C_D}{m} \left| \frac{\partial \Upsilon}{\partial t} \right|$ por uma constante 2α , calculada a partir da velocidade média da estrutura para uma dada trajetória. Assim, o comportamento do sistema pode ser simplificado representado pela equação 2.5.

$$\frac{\partial^2 \Upsilon}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{T(z)}{m} \frac{\partial \Upsilon}{\partial z} \right) - 2\alpha \frac{\partial \Upsilon}{\partial t} \quad (2.5)$$

2.2 SOLUÇÕES ANALÍTICAS

Nesta seção busca-se soluções analíticas para a equação 2.5 para diferentes condições de tração no riser, isto é, diferentes funções $T(z)$. No primeiro caso a ser tratado considera-se que o esforço de tração ao longo da direção z é constante em todo comprimento da estrutura. Esta aproximação é adequada para operações de manipulação de equipamentos submarinos, onde utilizam-se extensos cabos de aço. A massa do cabo, comparada à massa suspensa em sua extremidade inferior, é considerada pequena. No segundo caso abordado neste trabalho, obtém-se a solução para a equação 2.5 quando a tração no riser deve-se unicamente ao peso próprio da estrutura e, portanto, varia com a altura z .

2.2.1 Içamento de Equipamentos

No içamento de equipamentos pesados, a tensão no cabo pode ser considerada aproximadamente constante. Considerando $T(z) = T_0$ e dividindo a equação por m temos a equação 2.6, em que $v = \sqrt{T_0/m}$ é a velocidade de propagação de uma onda mecânica no riser.

$$\frac{\partial^2 \Upsilon}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \Upsilon}{\partial z^2} - 2\alpha \frac{\partial \Upsilon}{\partial t} \quad (2.6)$$

A equação 2.6 descreve a vibração de uma corda com amortecimento linear. Considerando-se que o sistema encontra-se inicialmente em repouso, aplica-se uma transformada de Laplace com respeito à variável t e obtém-se uma equação diferencial ordinária com derivadas em relação a z . Isto permite que ela seja resolvida analiticamente para cada valor de s .

$$s^2 \hat{\Upsilon} = v^2 \frac{\partial^2 \hat{\Upsilon}}{\partial z^2} - 2\alpha s \hat{\Upsilon} \quad (2.7)$$

Reorganizando a equação 2.7, obtém-se 2.8.

$$\frac{\partial^2 \hat{\Upsilon}}{\partial z^2} - \left[\frac{(s^2 + 2\alpha s)}{v^2} \right] \hat{\Upsilon} = 0 \quad (2.8)$$

E fazendo $k^2 = \frac{(s^2 + 2\alpha s)}{v^2}$ tem-se a equação 2.9,

$$\frac{\partial^2 \hat{\Upsilon}}{\partial z^2} - k^2 \hat{\Upsilon} = 0 \quad (2.9)$$

cuja solução é uma combinação linear de funções na forma $e^{r_n z}$ em que r_n são as raízes do polinômio característico $r^2 - k^2 = 0$. Aqui, tem-se $r_1 = k$ e $r_2 = -k$. Portanto, a solução com respeito a z para o deslocamento lateral é da forma:

$$\hat{\Upsilon}(z, s) = \hat{C}_1(s)e^{kz} + \hat{C}_2(s)e^{-kz} \quad (2.10)$$

Com funções $\hat{C}_1(s)$ e $\hat{C}_2(s)$ a serem determinadas pelas condições de contorno do problema. A solução mostrada em 2.10 pode ser escrita alternativamente como uma composição de $\cosh(kz)$ e $\sinh(kz)$, como na equação 2.11, uma vez que estas funções também são combinações lineares de e^{kz} e e^{-kz} .

$$\hat{\Upsilon}(z, s) = \hat{C}_1(s) \cosh(kz) + \hat{C}_2(s) \sinh(kz) \quad (2.11)$$

Onde, da mesma forma, $\hat{C}_1(s)$ e $\hat{C}_2(s)$ são funções a serem determinadas pelas condições de contorno. Substituindo k por sua respectiva expressão em função de s , tem-se:

$$\hat{\Upsilon}(z, s) = \hat{C}_1(s) \cosh\left(\frac{z}{v} \sqrt{s^2 + 2\alpha s}\right) + \hat{C}_2(s) \sinh\left(\frac{z}{v} \sqrt{s^2 + 2\alpha s}\right) \quad (2.12)$$

Pode-se ainda fazer $\lambda = z/v$. Deste modo, λ é um tempo característico associado a cada ponto da estrutura e indica o tempo de propagação de uma perturbação que parte da origem em direção ao ponto de coordenada z .

$$\hat{\Upsilon}(\lambda, s) = \hat{C}_1(s) \cosh\left(\lambda \sqrt{s^2 + 2\alpha s}\right) + \hat{C}_2(s) \sinh\left(\lambda \sqrt{s^2 + 2\alpha s}\right) \quad (2.13)$$

O problema agora se reduz a encontrar a transformada de Laplace inversa da função $\hat{\Upsilon}(\lambda, s)$ para que se possa voltar ao domínio do tempo, bem como determinar quais são as funções $C_1(t)$ e $C_2(t)$ que fazem com que $\Upsilon(\lambda, t)$ satisfaça as condições de contorno do problema. Ao fazer $\lambda = 0$ (Posição correspondente à extremidade inferior do cabo) na equação 2.13, obtém-se imediatamente que $\hat{C}_1(s) = \hat{\Upsilon}(0, s)$. Assim, a aplicação da transformada inversa de Laplace resulta em $C_1(t) = \Upsilon(0, t)$. Em outras palavras, a função $C_1(t)$ é própria posição da extremidade inferior do riser, a qual se deseja controlar. Contudo, ainda resta um outro grau de liberdade, a função $C_2(t)$. Derivando a equação 2.12 com respeito à coordenada z , segue que:

$$\frac{\partial \hat{\Upsilon}}{\partial z}(z, s) = \hat{C}_1(s) \frac{\sqrt{s^2 + 2\alpha s}}{v} \sinh\left(\frac{z}{v} \sqrt{s^2 + 2\alpha s}\right) + \hat{C}_2(s) \frac{\sqrt{s^2 + 2\alpha s}}{v} \cosh\left(\frac{z}{v} \sqrt{s^2 + 2\alpha s}\right) \quad (2.14)$$

Considerando a equação 2.14 em $z = 0$ obtém-se $\hat{C}_2(s) = \frac{v}{\sqrt{s^2 + 2\alpha s}} \frac{\partial \hat{\Upsilon}}{\partial z}(0, s)$. Pode-se determinar a transformada inversa do produto entre duas funções através da equação 2.15. Este resultado é o teorema da convolução para transformadas de Laplace.

$$\hat{f}(s)\hat{g}(s) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau \quad (2.15)$$

É importante observar que a aplicação da equação 2.15 requer que se conheça as transformadas inversas $f(t)$ e $g(t)$. Logo, para determinar $C_2(t)$, é necessário saber que:

$$\frac{1}{\sqrt{s^2 + as}} = \left\{ e^{-\frac{at}{2}} J_0\left(\frac{iat}{2}\right) \right\} \quad (2.16)$$

E tem-se então que a função procurada é dada por:

$$C_2(t) = v \int_0^t e^{-\alpha\tau} J_0(i\alpha\tau) \frac{\partial \Upsilon}{\partial z}(0, t-\tau) d\tau \quad (2.17)$$

Ambas $C_1(t)$ e $C_2(t)$ foram aqui equacionadas em função das condições de contorno $\Upsilon(0, t)$ e $\frac{\partial \Upsilon}{\partial z}(0, t)$. Estas condições serão especificadas em seção posterior. Resta ainda trazer ao domínio temporal a função de deslocamento lateral do riser. A transformada de Laplace é definida formalmente através de uma integral e é, portanto, uma operação linear. Dito isto, a equação 2.18 (ver Mikusinsky, Jan[3]) é suficiente para levar a equação 2.13 ao domínio temporal, observado que as funções seno e cosseno hiperbólicos são combinações lineares de funções exponenciais. Na equação 2.18, $\{f(t)\}$ é equivalente a $\hat{f}(s)$ e $J_1(t)$ é a função de Bessel de primeira espécie e ordem um.

$$\exp(-\lambda\sqrt{s^2 + 2\alpha s}) = e^{-\alpha\lambda}e^{-\lambda s} - \left\{ \frac{\lambda}{\sqrt{t^2 + 2\lambda t}} e^{-\alpha(\lambda+t)} i\alpha J_1(i\alpha\sqrt{t^2 + 2\lambda t}) \right\} e^{-\lambda s} \quad (2.18)$$

Para compactar a notação, define-se:

$$f_1(t) = \frac{\lambda}{\sqrt{t^2 + 2\lambda t}} e^{-\alpha(\lambda+t)} i\alpha J_1(i\alpha\sqrt{t^2 + 2\lambda t}) \quad (2.19)$$

Assim, a equação 2.18 torna-se:

$$\exp(-\lambda\sqrt{s^2 + 2\alpha s}) = e^{-\alpha\lambda}e^{-\lambda s} - \hat{f}_1(s)e^{-\lambda s} \quad (2.20)$$

Da mesma forma, pode-se substituir λ por $-\lambda$ na equação 2.18 e obter:

$$\exp(\lambda\sqrt{s^2 + 2\alpha s}) = e^{\alpha\lambda}e^{\lambda s} - \left\{ \frac{-\lambda}{\sqrt{t^2 - 2\lambda t}} e^{-\alpha(-\lambda+t)} i\alpha J_1(i\alpha\sqrt{t^2 - 2\lambda t}) \right\} e^{\lambda s} \quad (2.21)$$

Define-se então a seguinte função:

$$f_2(t) = \frac{-\lambda}{\sqrt{t^2 - 2\lambda t}} e^{-\alpha(-\lambda+t)} i\alpha J_1(i\alpha\sqrt{t^2 - 2\lambda t}) \quad (2.22)$$

O que permite que a equação 2.21 seja escrita da seguinte forma:

$$\exp(\lambda\sqrt{s^2 + 2\alpha s}) = e^{\alpha\lambda}e^{\lambda s} - \hat{f}_2(s)e^{\lambda s} \quad (2.23)$$

Da definição do cosseno hiperbólico, tem-se:

$$\cosh(\lambda\sqrt{s^2 + 2\alpha s}) = \frac{\exp(\lambda\sqrt{s^2 + 2\alpha s}) + \exp(-\lambda\sqrt{s^2 + 2\alpha s})}{2} \quad (2.24)$$

Substituindo-se as equações 2.20 e 2.23 e multiplicando-se a equação 2.24 por $\hat{C}_1(s)$ segue que:

$$\hat{C}_1(s) \cosh(\lambda\sqrt{s^2 + 2\alpha s}) = \frac{1}{2} \left(e^{-\alpha\lambda} \hat{C}_1(s) e^{-\lambda s} - \hat{g}_1(s) e^{-\lambda s} + e^{\alpha\lambda} \hat{C}_1(s) e^{\lambda s} - \hat{g}_2(s) e^{\lambda s} \right) \quad (2.25)$$

Onde $\hat{g}_k(s) = \hat{f}_k(s) \hat{C}_1(s)$. Fazendo uso do fato de que $e^{-as} \hat{f}(s) = \{f(t-a)u_a(t)\}$ onde $u_a(t)$ é a função degrau, dada por

$$u_a(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < a, \\ 1 & \text{se } t \geq a. \end{cases}$$

a equação 2.25 torna-se:

$$\hat{C}_1(s) \cosh(\lambda\sqrt{s^2 + 2\alpha s}) = \frac{1}{2} \left\{ e^{-\alpha\lambda} C_1(t-\lambda) u_\lambda(t) - g_1(t-\lambda) u_\lambda(t) + e^{\alpha\lambda} C_1(t+\lambda) u_{-\lambda}(t) - g_2(t+\lambda) u_{-\lambda}(t) \right\} \quad (2.26)$$

O teorema da convolução permite que se determine $g_1(t)$ através da seguinte integral:

$$g_1(t) = \int_0^t f_1(\tau) C_1(t-\tau) d\tau \quad (2.27)$$

De onde segue que

$$u_\lambda(t) g_1(t-\lambda) = u_\lambda(t) \int_0^{t-\lambda} f_1(\tau) C_1(t-\lambda-\tau) d\tau \quad (2.28)$$

E fazendo-se uma translação simples na variável de integração τ , define-se $\tau' = \tau + \lambda$ e a equação 2.28 se torna

$$u_\lambda(t) g_1(t-\lambda) = -u_\lambda(t) \int_t^\lambda f_1(\tau' - \lambda) C_1(t - \tau') d\tau' \quad (2.29)$$

Em um procedimento algébrico análogo, obtém-se a equação abaixo. Notar que $f_1(t-\lambda) = -f_2(t+\lambda)$

$$u_{-\lambda}(t) g_2(t+\lambda) = -u_{-\lambda}(t) \int_{-\lambda}^t f_1(\tau' - \lambda) C_1(t - \tau') d\tau' \quad (2.30)$$

Vale ressaltar que a função $C_1(t)$, que representa o movimento da extremidade inferior do riser, é a resposta a um estímulo realizado no topo do cabo. O sistema em questão apresenta um atraso entre estímulo e resposta que é intrínseco de sua natureza e decorre do tempo de propagação de uma perturbação no sistema. Desta maneira, se a entrada do sistema for iniciada em $t = 0$, não haverá alteração da posição do extremo inferior até que se tenha $t = L/v$, que corresponde ao valor máximo para λ . Desta forma, a função $g_1(t - \lambda)$ só assume valores diferentes não-nulos para $t \geq \lambda$ e a função degrau que a multiplica pode ser omitida. Assim, as funções descritas nas equações 2.29 e 2.30 podem ser expressas em uma mesma integral. Por fim, tem-se da equação 2.26 o seguinte resultado:

$$\hat{C}_1(s) \cosh(\lambda \sqrt{s^2 + 2\alpha s}) = \frac{1}{2} \left\{ e^{-\alpha\lambda} C_1(t - \lambda) u_\lambda(t) + e^{\alpha\lambda} C_1(t + \lambda) u_{-\lambda}(t) + \int_{-\lambda}^{\lambda} \frac{\lambda}{\sqrt{\tau^2 - \lambda^2}} e^{-\alpha\tau} i\alpha J_1(i\alpha \sqrt{\tau^2 - \lambda^2}) C_1(t - \tau) d\tau \right\} \quad (2.31)$$

De forma análoga, tem-se para o seno hiperpólico a seguinte expressão:

$$\hat{C}_2(s) \sinh(\lambda \sqrt{s^2 + 2\alpha s}) = \frac{1}{2} \left\{ e^{\alpha\lambda} C_2(t + \lambda) u_{-\lambda}(t) - e^{-\alpha\lambda} C_2(t - \lambda) u_\lambda(t) + u_\lambda(t) \int_{\lambda}^t \frac{\lambda}{\sqrt{\tau^2 - \lambda^2}} e^{-\alpha\tau} i\alpha J_1(i\alpha \sqrt{\tau^2 - \lambda^2}) C_2(t - \tau) d\tau + u_{-\lambda}(t) \int_{-\lambda}^t \frac{\lambda}{\sqrt{\tau^2 - \lambda^2}} e^{-\alpha\tau} i\alpha J_1(i\alpha \sqrt{\tau^2 - \lambda^2}) C_2(t - \tau) d\tau \right\} \quad (2.32)$$

A equação que descreve o movimento lateral do cabo em função de λ e t é a soma das equações 2.31 e 2.32.

2.2.2 Operações de Reentrada para Risers de Produção ou Perfuração

No caso de risers de produção ou de perfuração em operação de reentrada no poço, tem-se um sistema com tensão variável. Em situações como esta, a tração ao longo do sistema deve-se exclusivamente ao peso próprio da estrutura, sendo nula na extremidade inferior e, na extremidade superior, equivalente ao peso da estrutura subtraído do empuxo de arquimedes correspondente. Esta variação afeta diretamente a propagação de uma perturbação ao longo do sistema, que agora não mais se dá a velocidade constante, mas sim em movimento retardado em direção à extremidade livre. Pode-se escrever a tração ao longo do sistema como $T(z) = (m_s - \rho A)gz$, em que ρ é a densidade do fluido no qual o riser se encontra submerso, A é a área de seção transversal e g a aceleração da gravidade local. Esta função leva em conta a atenuação do esforço de tração devida à presença da força de empuxo. Desta forma, pode-se reescrever a equação 2.5 substituindo $T(z)$ por sua forma explícita.

$$\frac{\partial^2 \Upsilon}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\left[\frac{m_s - \rho A}{m} \right] gz \frac{\partial \Upsilon}{\partial z} \right) - 2\alpha \frac{\partial \Upsilon}{\partial t} \quad (2.33)$$

Notar que o termo $\frac{m_s - \rho A}{m}$ é adimensional e constante. Para tornar a equação mais simples e compacta, define-se $g' = \left[\frac{m_s - \rho A}{m} \right] g$. Assim, tem-se:

$$\frac{\partial^2 \Upsilon}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial z} \left(g' z \frac{\partial \Upsilon}{\partial z} \right) - 2\alpha \frac{\partial \Upsilon}{\partial t} \quad (2.34)$$

Seguindo o que foi proposto por Fortaleza[2], o próximo passo é executar uma mudança de variável. Define-se $\xi = 2\sqrt{z/g'}$. Isto fornece $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{2}{g'\xi} \frac{\partial}{\partial \xi}$. De maneira semelhante ao que ocorre no caso de tração constante, a variável ξ corresponde ao tempo de propagação de uma perturbação entre a origem do sistema de coordenadas e o ponto de coordenada z . Executando a mudança de variável na equação 2.34 e multiplicando-a por ξ , obtém-se uma equação que independe de g' .

$$\xi \frac{\partial^2 \Upsilon}{\partial t^2}(\xi, t) = \frac{\partial \Upsilon}{\partial \xi}(\xi, t) + \xi \frac{\partial^2 \Upsilon}{\partial \xi^2}(\xi, t) - 2\alpha \xi \frac{\partial \Upsilon}{\partial t}(\xi, t) \quad (2.35)$$

Novamente, considerando-se o sistema inicialmente em repouso, aplica-se a transformada de Laplace para se obter uma equação diferencial ordinária com respeito a z .

$$-(s^2 + 2\alpha s)\xi \hat{\Upsilon}(\xi, s) + \frac{\partial \hat{\Upsilon}}{\partial \xi}(\xi, s) + \xi \frac{\partial^2 \hat{\Upsilon}}{\partial \xi^2}(\xi, s) = 0 \quad (2.36)$$

Fazendo agora uma nova mudança de variável, define-se $\zeta = i\xi\sqrt{s^2 + 2\alpha s}$. Esta transformação leva a equação 2.36 à equação de Bessel de ordem zero.

$$\zeta^2 \hat{\Upsilon}(\zeta, s) + \zeta \frac{\partial \hat{\Upsilon}}{\partial \zeta}(\zeta, s) + \zeta^2 \frac{\partial^2 \hat{\Upsilon}}{\partial \zeta^2}(\zeta, s) = 0 \quad (2.37)$$

A função $\hat{\Upsilon}(\zeta, s)$ que satisfaz a equação 2.37 é uma combinação linear das funções de Bessel J_0 e Y_0 .

$$\hat{\Upsilon}(\zeta, s) = \hat{c}_1(s)J_0(\zeta) + \hat{c}_2(s)Y_0(\zeta) \quad (2.38)$$

A observar, os comportamentos das funções J_0 e Y_0 nas vizinhanças de $\zeta = 0$ são muito distintos. A função $Y_0(\zeta)$ decresce arbitrariamente à medida que $\zeta \rightarrow 0$. Uma vez que se deseja obter uma solução limitada em $\zeta = 0$, obrigatoriamente tem-se $\hat{c}_2(s) \equiv 0$. Por outro lado, $J_0(0) = 1$, o que fornece $\hat{c}_1(s) \equiv \hat{\Upsilon}(0, s)$. Voltando à variável ξ , tem-se:

$$\hat{\Upsilon}(\xi, s) = \hat{\Upsilon}(0, s)J_0\left(i\xi\sqrt{s^2 + 2\alpha s}\right) \quad (2.39)$$

Para obter $\Upsilon(\xi, t)$ é conveniente escrever J_0 em sua representação integral[4]. Em sua forma mais geral, a função de Bessel de primeira espécie e ordem n é definida como:

$$J_n(z) = \frac{i^{-n}}{\pi} \int_0^\pi e^{iz\cos\theta} \cos(n\theta) d\theta \quad (2.40)$$

Donde para ordem zero tem-se:

$$J_0(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{iz \cos \theta} d\theta \quad (2.41)$$

Substituir a equação 2.41 em 2.39, resulta em:

$$\hat{\Upsilon}(\xi, s) = \hat{\Upsilon}(0, s) \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{-\xi \sqrt{s^2 + 2\alpha s} \cos \theta} d\theta \quad (2.42)$$

Uma vez que $\hat{\Upsilon}(0, s)$ é função somente de s , pode-se agrupá-la ao integrando. Definindo-se $x = \xi \cos \theta$ tem-se:

$$\hat{\Upsilon}(\xi, s) = \frac{1}{\pi} \int_{-\xi}^{\xi} \hat{\Upsilon}(0, s) \frac{e^{-x \sqrt{s^2 + 2\alpha s}}}{\sqrt{\xi^2 - x^2}} dx \quad (2.43)$$

Esta representação será conveniente para posterior cálculo numérico. Pode-se agora fazer uso da identidade 2.18 para escrever:

$$\hat{\Upsilon}(\xi, s) = \frac{1}{\pi} \int_{-\xi}^{\xi} \hat{\Upsilon}(0, s) \left(e^{-\alpha x} - \hat{f}(x, s) \right) e^{-xs} \frac{dx}{\sqrt{\xi^2 - x^2}} \quad (2.44)$$

$$f(x, t) = \frac{x}{\sqrt{t^2 + 2xt}} e^{-\alpha(t+x)} i\alpha J_1 \left(i\alpha \sqrt{t^2 + 2xt} \right) \quad (2.45)$$

E por fim, voltando ao domínio do tempo, tem-se a solução procurada:

$$\Upsilon(\xi, t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\xi}^{\xi} u_x(t) \left(e^{-\alpha x} \Upsilon(0, t-x) - g(x, t-x) \right) \frac{dx}{\sqrt{\xi^2 - x^2}} \quad (2.46)$$

$$g(x, t) = \int_0^t \frac{x}{\sqrt{\tau^2 + 2x\tau}} e^{-\alpha(\tau+x)} i\alpha J_1 \left(i\alpha \sqrt{\tau^2 + 2x\tau} \right) \Upsilon(0, t-\tau) d\tau \quad (2.47)$$

2.3 CONDIÇÕES DE CONTORNO

As soluções apresentadas na seção anterior ainda encontram-se em aberto, pois não ainda foram especificadas as condições de contorno. Esta seção trata destas funções para cada caso abordado.

Para o sistema com tração constante, a função $C_1(t)$, presente na equação 2.31, representa a série temporal de posições que se deseja obter para a extremidade inferior do riser. Esta função é, portanto, arbitrariamente definida de acordo com o movimento que se deseja executar. Neste projeto, define-se a trajetória da extremidade inferior do riser através de uma função polinomial que migra suavemente da posição zero para um valor final especificado Υ_f em um tempo t_e também especificado. $C_1(t)$ é então definido segundo a equação:

$$C_1(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \leq \lambda_L \\ P(t - \lambda_L) & \text{se } \lambda_L < t \leq \lambda_L + t_e \\ \Upsilon_f & \text{se } t > \lambda_L + t_e \end{cases} \quad (2.48)$$

Onde λ_L é o tempo necessário para que uma perturbação se propague por todo o comprimento do riser. $P(t)$ é um polinômio determinado de modo que $C_1(t)$ seja contínua. Adicionalmente, é importante que $C_1(t)$ tenha ao menos as duas primeiras derivadas contínuas para que não haja uma descontinuidade na força aplicada à carga suspensa em nenhum momento da trajetória. A segunda condição de contorno, $C_2(t)$ é determinada a partir da derivada $\frac{\partial \Upsilon}{\partial z}$ avaliada em $z = 0$. A força $F_c(t)$ exercida pelo cabo sobre a carga é diretamente proporcional a $\frac{\partial \Upsilon}{\partial z}$ de acordo com a equação:

$$F_c(t) = T_0 \frac{\partial \Upsilon}{\partial z}(0, t) \quad (2.49)$$

Da Segunda Lei de Newton aplicada à massa na extremidade inferior, segue que:

$$m_c \frac{\partial^2 \Upsilon}{\partial t^2} = F_c(t) - C'_D \frac{\partial \Upsilon}{\partial t} \left| \frac{\partial \Upsilon}{\partial t} \right| \quad (2.50)$$

Onde m_c é a massa da carga adicionada de sua respectiva massa virtual e C'_D o seu respectivo coeficiente de arrasto. Portanto, a inclinação do cabo em sua extremidade é dada pela seguinte expressão avaliada em $z = 0$:

$$\frac{\partial \Upsilon}{\partial z} = \frac{1}{T_0} \left(m_c \frac{\partial^2 \Upsilon}{\partial t^2} + C'_D \frac{\partial \Upsilon}{\partial t} \left| \frac{\partial \Upsilon}{\partial t} \right| \right) \quad (2.51)$$

Para o caso com tração variável, a única função a ser determinada é a trajetória de fundo do riser. Esta é determinada com a mesma função $C_1(t)$ definida acima.

2.4 MÉTODO NUMÉRICO

A fim de avaliar as soluções analíticas desenvolvidas, faz-se simulações numéricas do sistema através de sua discretização no espaço. Nestas simulações, a trajetória da plataforma, obtida através da solução da equação governante, é utilizada como entrada do sistema. Observa-se então como o sistema se comporta em relação à trajetória desejada.

No método de diferenças finitas, aproxima-se a derivada de uma função $f(x)$ em um ponto x_0 avaliando-se os valores que esta função assume nas vizinhanças de x_0 . Isto permite que a equação diferencial parcial que descreve o sistema seja convertida em um sistema de equações diferenciais ordinárias acopladas. Partindo da expansão em série de Taylor para uma função em torno de um ponto x_0 :

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \frac{1}{1!} \frac{df(x_0)}{dx} (\Delta x) + \frac{1}{2!} \frac{d^2 f(x_0)}{dx^2} (\Delta x)^2 + \dots + \frac{1}{n!} \frac{d^n f(x_0)}{dx^n} (\Delta x)^n + R_n(x) \quad (2.52)$$

Em que $R_n(x)$ denota a diferença entre a função original e a expansão polinomial com n termos. Truncando a equação (2.52) após o termo de primeira ordem, obtém-se:

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \frac{df(x_0)}{dx}(\Delta x) + R_1(x) \quad (2.53)$$

Isolando a primeira derivada de f com respeito a x :

$$\frac{df(x_0)}{dx} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} - \frac{R_1(x)}{\Delta x} \quad (2.54)$$

Se $R_1(x)$ for suficientemente pequeno, pode-se escrever

$$\frac{df(x_0)}{dx} \approx \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad (2.55)$$

A equação 2.55 é uma aproximação para a derivada de f pela chamada *forward difference*. Um desenvolvimento análogo pode ser feito para obter-se a aproximação por *backward difference*. Ao computar-se uma média aritmética destas duas aproximações para um mesmo ponto, obtém-se a expressão para a *central difference*, expressa na equação 2.56.

$$\frac{df(x_0)}{dx} \approx \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0 - \Delta x)}{2\Delta x} \quad (2.56)$$

Esta aproximação é preferível, pois leva em conta o comportamento da função à esquerda e à direita de x_0 . Para derivadas de segunda ordem, pode-se obter uma aproximação por diferenças finitas aplicando-se duas vezes a expressão da diferença central, como mostram as equações abaixo.

$$\frac{d^2 f(x_0)}{dx^2} \approx \frac{\frac{d}{dx} f(x_0 + \frac{\Delta x}{2}) - \frac{d}{dx} f(x_0 - \frac{\Delta x}{2})}{\Delta x} \quad (2.57)$$

$$\frac{d^2 f(x_0)}{dx^2} \approx \frac{f(x_0 + \Delta x) - 2f(x_0) + f(x_0 - \Delta x)}{\Delta x^2} \quad (2.58)$$

E de maneira análoga, tem-se a equação para a derivada de quarta ordem de acordo com a equação 2.59

$$\frac{d^4 f}{dx^4} \approx \frac{f(x_0 - 2\Delta x) - 4f(x_0 - \Delta x) + 6f(x_0) - 4f(x_0 + \Delta x) + f(x_0 + 2\Delta x)}{\Delta x^4} \quad (2.59)$$

2.4.1 Cabo com Tensão Constante

Para o caso de içamento de cargas, o sistema é discretizado em N elementos, onde o último elemento representa a carga suspensa, como mostra a figura 2.2.

Ao aplicar-se as equações 2.56, 2.58 e 2.59 à equação governante 2.6, obtém-se o seguinte sistema:

$$\ddot{\Upsilon}_k = v^2 \frac{(\Upsilon_{k-1} - 2\Upsilon_k + \Upsilon_{k+1})}{l^2} - 2\alpha \dot{\Upsilon}_k \quad (2.60)$$

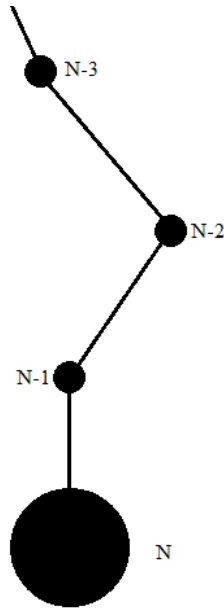


Figura 2.2: Discretização do sistema com uma massa em sua extremidade inferior

Com $k = 1, 2, \dots, N$, em que l é o comprimento de cada seção do riser. Nesta equação, $\dot{\Upsilon}_k$ e $\ddot{\Upsilon}_k$ representam respectivamente a primeira e segunda derivadas de Υ_k com respeito ao tempo. A equação 2.60 apresenta o termo de amortecimento linearizado. A solução numérica permite que se resolva o sistema com amortecimento não linear. Para isto, basta resolver o sistema de equações representado em 2.61

$$\ddot{\Upsilon}_k = v^2 \frac{(\Upsilon_{k-1} - 2\Upsilon_k + \Upsilon_{k+1})}{l^2} - \frac{C_D}{m} \dot{\Upsilon}_k |\dot{\Upsilon}_k| \quad (2.61)$$

Para a aplicação das condições de contorno, deve-se observar as equações referentes ao primeiro ao último elemento do sistema discreto. No topo da estrutura, tem-se $\Upsilon(L, t) = U(t)$, onde $U(t)$ corresponde ao movimento executado pela embarcação de posicionamento dinâmico. Tem-se então que para o primeiro elemento a equação 2.61 torna-se:

$$\ddot{\Upsilon}_1 = \frac{v^2}{l^2} (U - 2\Upsilon_1 + \Upsilon_2) - \frac{C_D}{m} \dot{\Upsilon}_1 |\dot{\Upsilon}_1| \quad (2.62)$$

Já na extremidade inferior, tem-se a equação 2.50 do movimento da massa, em que a força exercida pelo cabo sobre esta é dada pela equação 2.49.

$$\ddot{\Upsilon}_N = \frac{T_0}{m_c} \frac{(\Upsilon_{N-1} - \Upsilon_N)}{l} - \frac{C'_D}{m_c} \dot{\Upsilon}_N |\dot{\Upsilon}_N| \quad (2.63)$$

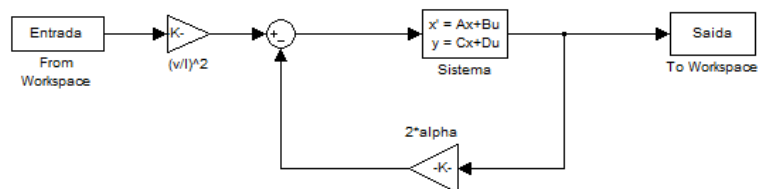
Para simular o sistema discretizado, os sistema de equações 2.60 e 2.61 são representados em um espaço de estados pelas seguintes equações matriciais:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{X}} &= \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}U \\ \mathbf{Y} &= \mathbf{C}\mathbf{X} + \mathbf{D}U \end{aligned} \quad (2.64)$$

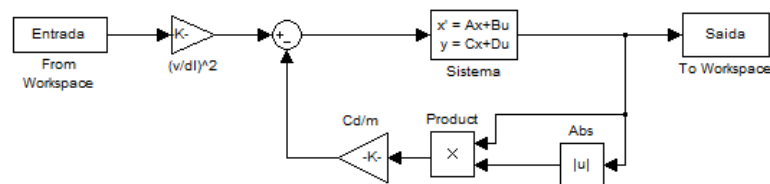
A matriz A é chamada Matriz de Estados e descreve o comportamento do sistema. É a equivalente matricial da equação governante para o sistema discreto, incluindo também informações sobre as condições de contorno. A matriz B informa como o sistema interage com a entrada U , por isto é chamada de Matriz de Entrada. A matriz C é chamada Matriz de Saída. Ela determina quais elementos do vetor de estados serão utilizados e como estes serão linearmente combinados para compor a saída do sistema. Por fim, a matriz D é chamada Matriz de Transferência Direta e relaciona a saída do sistema, Y , diretamente com a entrada. Para o sistema em questão, D terá sempre elementos nulos. Nas equações 2.64, X é o vetor de estados, composto da seguinte maneira:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \Upsilon_1 \\ \Upsilon_2 \\ \vdots \\ \Upsilon_N \\ \dot{\Upsilon}_1 \\ \dot{\Upsilon}_2 \\ \vdots \\ \dot{\Upsilon}_N \end{pmatrix}_{2N \times 1} \quad (2.65)$$

As equações 2.64 representam um sistema linear. Por este motivo, a matriz de estados do sistema descrito em 2.64 não inclui os termos de amortecimento. Estes serão introduzidos na simulação por meio de uma realimentação, como ilustrado na figura 2.3. Esta configuração torna fácil a inserção de uma força de amortecimento não linear, bem como possibilita a simulação do sistema linearizado.



(a) Amortecimento Linear



(b) Amortecimento Quadrático

Figura 2.3: Esquema de realimentação para o cômputo das forças dissipativas

A matriz de estados é, portanto, da seguinte forma:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & I \\ A' & 0 \end{pmatrix}_{2N \times 2N} \quad (2.66)$$

$$A' = \begin{pmatrix} \frac{-2v^2}{l} & \frac{v^2}{l} & 0 & 0 \\ \frac{v^2}{l} & \frac{-2v^2}{l} & \frac{v^2}{l} & 0 \\ 0 & \frac{v^2}{l} & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{T_0}{m_c l} & \frac{-T_0}{m_c l} \end{pmatrix}_{N \times N} \quad (2.67)$$

Uma vez que o amortecimento será contabilizado na entrada do sistema, a matriz B terá a forma descrita pela equação 2.68, onde B' é uma matriz identidade com o ultimo elemento modificado para que a força de arrasto na extremidade inferior seja computada com o coeficiente de arrasto da carga e não o do cabo. O vetor de entrada U será um vetor coluna de $2N$ elementos, onde todos são nulos, exceto pelo elemento de posição $N + 1$, que vale $U(t)$. E por fim, para que se possa recuperar todas as informações do vetor de estados, bem como obter a velocidade de cada ponto do cabo e reintroduzi-las no sistema, a matriz C será a matriz identidade de ordem $2N$.

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B' \end{pmatrix}_{2N \times 2N} \quad (2.68)$$

$$B' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{C'_D/m_c}{C_D/m} \end{pmatrix}_{N \times N}$$

2.4.2 Riser de Tensão Variável

Para simular um riser rígido com tensão variável, discretiza-se a equação 2.4 em N com $N + 1$ segmentos, como mostrado na figura 2.4 O resultado desta discretização é o sistema de equações representado por 2.69.

$$\ddot{\Upsilon}_k = -\frac{EJ}{m} \frac{(\Upsilon_{k-2} - 4\Upsilon_{k-1} + 6\Upsilon_k - 4\Upsilon_{k+1} + \Upsilon_{k+2})}{l^4} + \quad (2.69)$$

$$g' z_k \frac{\Upsilon_{k-1} - 2\Upsilon_k + \Upsilon_{k+1}}{l^2} + g' \frac{\Upsilon_{k-1} - \Upsilon_{k+1}}{2l} - \frac{C_D}{m} \dot{\Upsilon}_k |\dot{\Upsilon}_k|$$

Uma vez que o sentido positivo do sistema de coordenadas está definido como oposto ao da indexação dos elementos, tem-se $z_k = (N - k + 1)l$. Assim, pode-se reescrever a equação 2.69 como se segue:

$$\ddot{\Upsilon}_k = -\frac{EJ}{m} \frac{(\Upsilon_{k-2} - 4\Upsilon_{k-1} + 6\Upsilon_k - 4\Upsilon_{k+1} + \Upsilon_{k+2})}{l^4} + \quad (2.70)$$

$$g'(N - k + 1) \frac{(\Upsilon_{k-1} - 2\Upsilon_k + \Upsilon_{k+1})}{l} + g' \frac{(\Upsilon_{k-1} - \Upsilon_{k+1})}{2l} - \frac{C_D}{m} \dot{\Upsilon}_k |\dot{\Upsilon}_k|$$

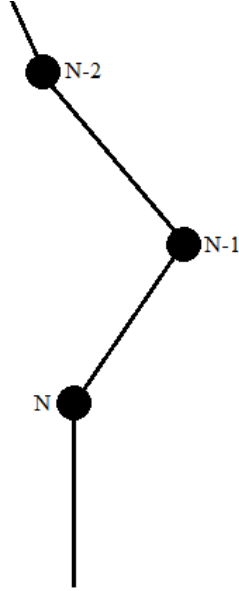


Figura 2.4: Discretização do sistema de tensão variável sem carga suspensa

A condição de contorno do riser rígido em seu topo é de engastamento. Isto é, $\Upsilon(L, t) = U(t)$ e $\frac{\partial \Upsilon}{\partial z}(L, t) = 0$. Em consequência disto, a equação para o primeiro elemento é:

$$\ddot{\Upsilon}_1 = -\frac{EJ}{m} \frac{(-3U + 6\Upsilon_1 - 4\Upsilon_2 + \Upsilon_3)}{l^4} + \quad (2.71)$$

$$g'N \frac{(U - 2\Upsilon_1 + \Upsilon_2)}{l} + g' \frac{(U - \Upsilon_2)}{2l} - \frac{C_D}{m} \dot{\Upsilon}_1 |\dot{\Upsilon}_1|$$

Já a condição na extremidade livre é $\frac{\partial^2 \Upsilon}{\partial z^2}(0, t) = 0$, pois o momento fletor é nulo. Sendo assim, a equação para o último elemento é:

$$\ddot{\Upsilon}_N = -\frac{EJ}{m} \frac{(\Upsilon_{N-2} - 2\Upsilon_{N-1} + \Upsilon_N)}{l^4} + \quad (2.72)$$

$$g' \frac{(\Upsilon_{N-1} - \Upsilon_N)}{l} + g' \frac{(\Upsilon_{N-1} - \Upsilon_N)}{2l} - \frac{C_D}{m} \dot{\Upsilon}_N |\dot{\Upsilon}_N|$$

Para implementação da simulação, as equações para o sistema com tensão variável também são representados nos moldes da equação 2.64.

2.4.3 Cálculo Numérico de Integrais Impróprias

Para utilizar como entrada do sistema as funções obtidas na seção 2.2 faz-se uso da regra do trapézio para integração numérica. As integrais representadas em 2.31, 2.32, 2.46 e 2.47 são impróprias. Isto é, seus integrandos apresentam singularidades no intervalo de integração. Por este motivo, mesmo que o resultado

da operação seja finito, encontra-se um impasse no cálculo numérico deste valor, pois a função não está definida nos pontos de singularidade. No entanto, para o caso das equações 2.31 e 2.32 e 2.47 o limite dos integrandos quando seus denominadores tendem a zero é finito, como mostrado nas equações 2.73 e 2.74.

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow -\lambda} \frac{\lambda}{\sqrt{t^2 - \lambda^2}} e^{-\alpha t} i\alpha J_1(i\alpha \sqrt{t^2 - \lambda^2}) &= -\frac{\alpha^2 \lambda}{2} e^{\alpha \lambda} \\ \lim_{t \rightarrow \lambda} \frac{\lambda}{\sqrt{t^2 - \lambda^2}} e^{-\alpha t} i\alpha J_1(i\alpha \sqrt{t^2 - \lambda^2}) &= -\frac{\alpha^2 \lambda}{2} e^{-\alpha \lambda} \end{aligned} \quad (2.73)$$

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\lambda}{\sqrt{t^2 + 2xt}} e^{-\alpha(t+x)} i\alpha J_1(i\alpha \sqrt{t^2 + 2xt}) &= -\frac{\alpha^2 x}{2} e^{-\alpha x} \\ \lim_{t \rightarrow -2x} \frac{\lambda}{\sqrt{t^2 + 2xt}} e^{-\alpha(t+x)} i\alpha J_1(i\alpha \sqrt{t^2 + 2xt}) &= -\frac{\alpha^2 x}{2} e^{\alpha x} \end{aligned} \quad (2.74)$$

Para integrar numericamente estas funções, basta definir seus valores nos pontos de singularidade como seus limites algébricos. Entretanto, para integral representada em 2.46, o integrando diverge nos extremos do intervalo de integração, como mostra a figura 2.5.

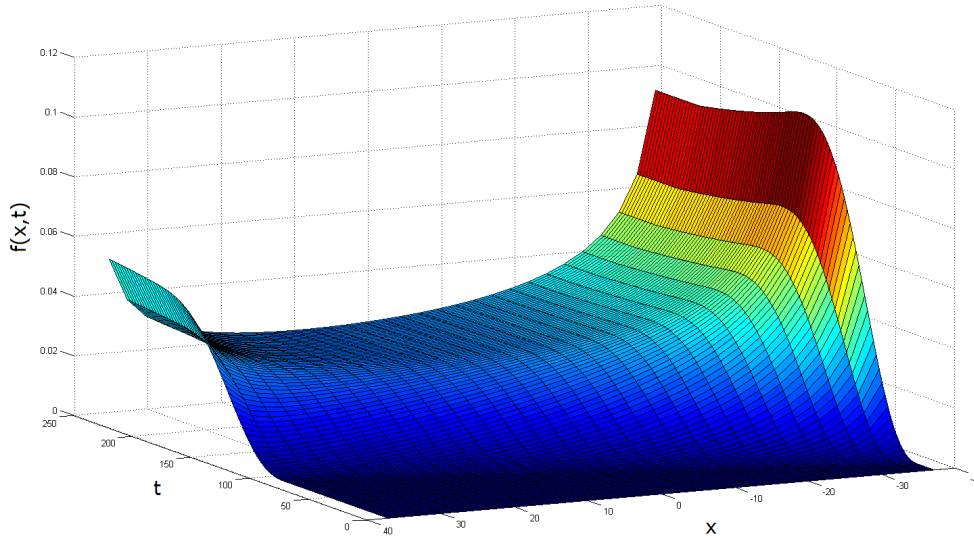


Figura 2.5: Integrando da equação 2.46 mapeado nas variáveis x e t

Para obter $\Upsilon(\xi, t)$ é preciso integrar a função ilustrada na figura 2.5 ao longo de x para cada valor de t . Uma vez que função diverge nos extremos do intervalo em $x = -\xi$ e $x = \xi$, obter um resultado preciso para esta operação demandaria um custo computacional extremamente elevado. Para solucionar este problema, faz-se uso de mudanças de variável[5]. Se uma função $f(x)$ diverge tão rápido quanto $(x - a)^{-\gamma}$ para $0 < \gamma \leq 1$, as mudanças de variável ilustradas nas equações 2.75 e 2.76 eliminam a singularidade do integrando. Ambas são válidas para $b > a$. A primeira é utilizada quando o integrando apresenta singularidade em $x = a$ e a segunda quando a singularidade se encontrar em $x = b$.

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{1-\gamma} \int_0^{(b-a)^{1-\gamma}} t^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} f\left(t^{\frac{1}{1-\gamma}} + a\right) dt \quad (2.75)$$

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{1-\gamma} \int_0^{(b-a)^{1-\gamma}} t^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} f\left(b - t^{\frac{1}{1-\gamma}}\right) dt \quad (2.76)$$

Para aplicar as mudanças de variável acima à equação 2.46, precisamos dividi-la em duas partes. Tem-se então:

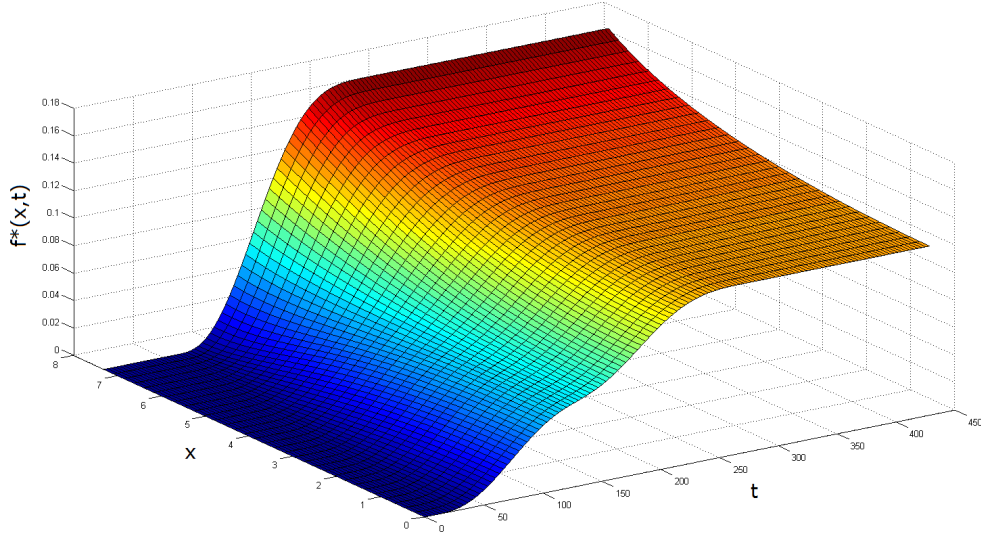


Figura 2.6: Superfície resultante da mudança de variável

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_{-\xi}^0 u_x(t) \left(e^{-\alpha x} \Upsilon(0, t-x) - g(x, t-x) \right) \frac{dx}{\sqrt{\xi^2 - x^2}} = \\ & \frac{2}{\pi} \int_0^{\sqrt{\xi}} u_{(t-k^2+\xi)}(t) \left(e^{-\alpha(t+k^2-\xi)} \Upsilon(0, t-k^2+\xi) - g(k^2-\xi, t-k^2+\xi) \right) \frac{dk}{\sqrt{2\xi - k^2}} \end{aligned} \quad (2.77)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_0^{\xi} u_x(t) \left(e^{-\alpha x} \Upsilon(0, t-x) - g(x, t-x) \right) \frac{dx}{\sqrt{\xi^2 - x^2}} = \\ & \frac{2}{\pi} \int_0^{\sqrt{\xi}} u_{(t+k^2-\xi)}(t) \left(e^{-\alpha(t-k^2+\xi)} \Upsilon(0, t+k^2-\xi) - g(-k^2+\xi, t+k^2-\xi) \right) \frac{dk}{\sqrt{2\xi - k^2}} \end{aligned} \quad (2.78)$$

As integrais expressas em 2.77 e 2.78 podem ser facilmente calculadas numericamente, pois seus integrandos são bem definidos em todo o intervalo. De fato, calcular estas integrais é equivalente a integrar a superfície mostrada na figura 2.6 ao longo de x para cada valor de t .

3 RESULTADOS

3.1 INTRODUÇÃO

Este capítulo apresenta os resultados obtidos através de simulações numéricas do sistemas estudados no capítulo 2. O objetivo é validar as soluções analíticas obtidas e observar o comportamento do sistema quando se consideram forças não-lineares e o efeito de resistência à flexão.

3.2 CONVERGÊNCIA NUMÉRICA

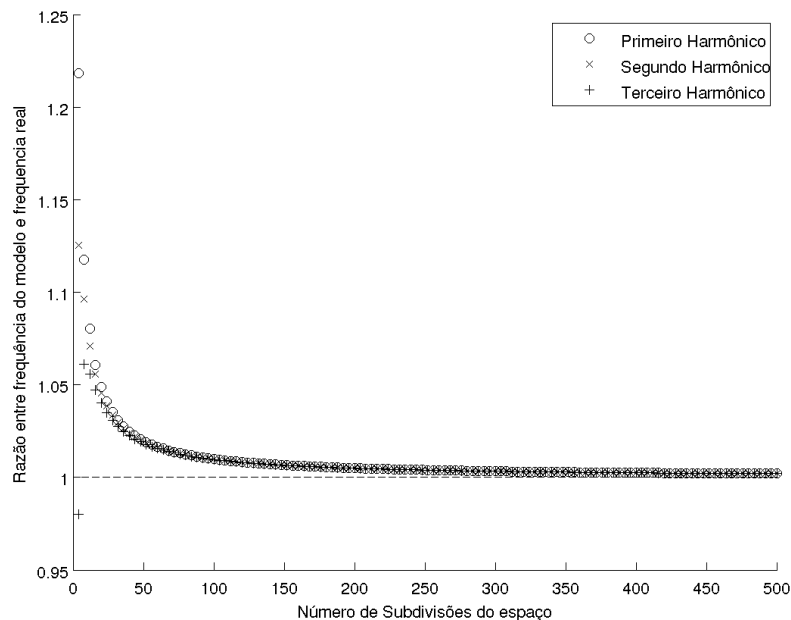


Figura 3.1: Convergência dos três primeiros harmônicos para seus respectivos valores teóricos

O gráfico mostrado na figura 3.1 mostra a convergência do modelo discreto na direção das propriedades do sistema contínuo que ele representa. Nele estão representadas as três primeiras frequências naturais do sistema discreto normalizadas por seus respectivos valores teóricos. Estas frequências são obtidas através de auto-valores da matriz de estados sem amortecimento e com condição de contorno de engaste nas duas extremidades. As frequências de ondas estacionárias em uma corda bi-engastada são previstas em teoria pela seguinte expressão:

$$f_n = n \frac{V}{2L} \quad (3.1)$$

Em que f_n corresponde à frequência do n -ésimo harmônico ou modo de vibração do sistema.

O resultado mostrado na figura 3.1 levou à escolha da quantidade de 300 pontos para descrever o sis-

tema simulado. Esta quantidade é suficiente para representar o sistema em baixas frequências sem demandar excessivo tempo de cálculo.

3.3 IÇAMENTO DE EQUIPAMENTOS

Os resultados mostrados nesta seção são referentes à simulação de um sistema com as seguintes propriedades:

Cabo	
Densidade Linear	3kg/m
Diâmetro	30mm
Comprimento	2000m
Coefficiente de Massa Adicional(C_m)	2
Coefficiente de Arrasto(C_d)	1.2
Carga Suspensa(Esférica)	
Massa	50ton
Diâmetro	3m
Coefficiente de Massa Adicional(C_m)	0.5
Coefficiente de Arrasto(C_d)	0.4

Tabela 3.1: Propriedades do cabo de aço flexível e da carga suspensa

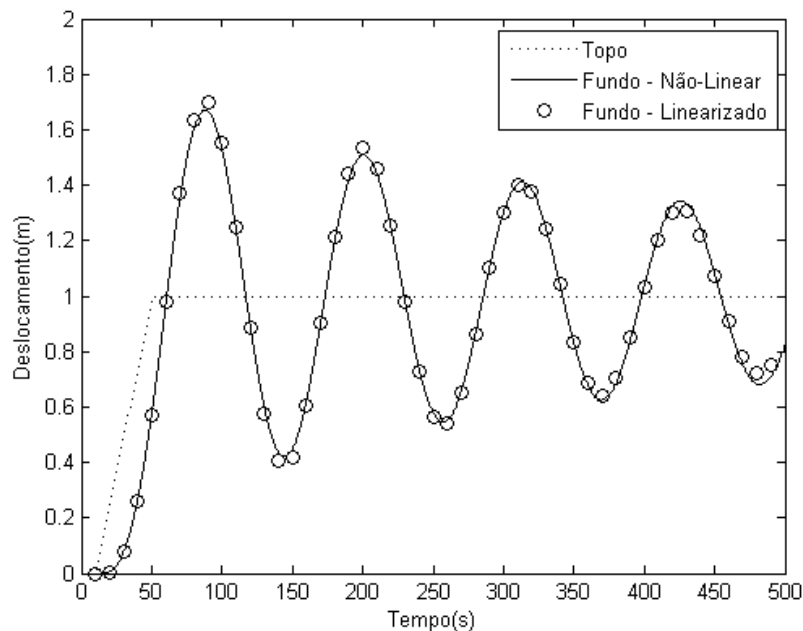
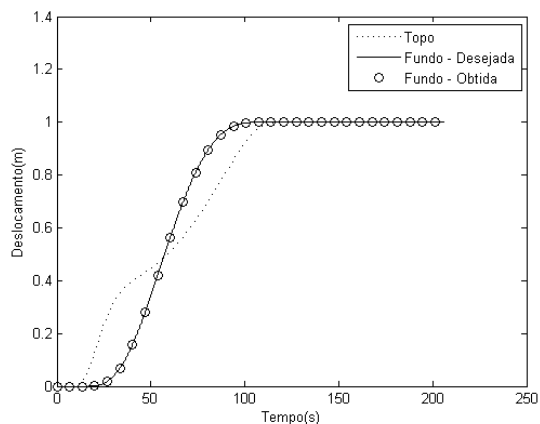


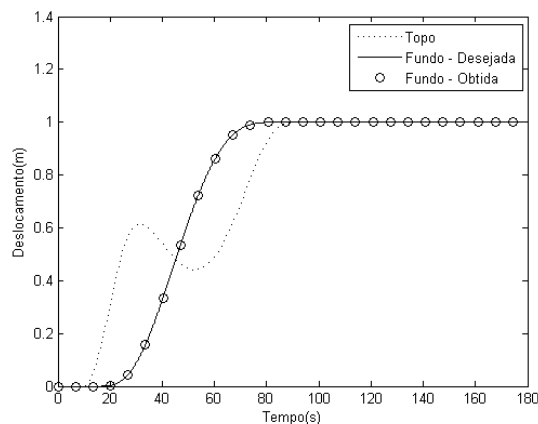
Figura 3.2: Resposta a uma entrada no formato rampa para um riser flexível com tensão constante

A figura 3.2 mostra a resposta do sistema a uma entrada do tipo "rampa". A extremidade inferior do riser, onde se encontra suspensa a carga, oscila suavemente, com amplitude decrescente. Este comportamento pendular deve-se à grande inércia da carga, quando comparada com o restante do sistema. Já na figura 3.3,

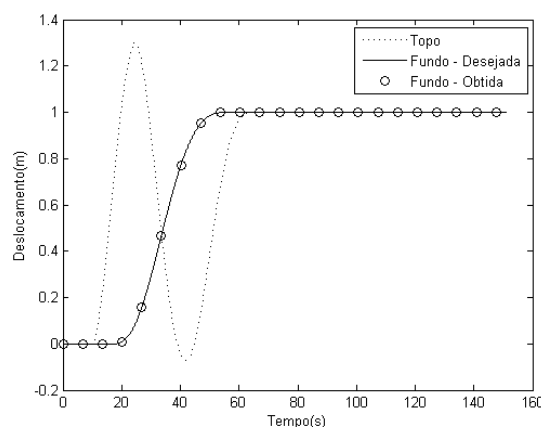
onde se utiliza a função de entrada calculada com base na solução da equação governante do sistema, o movimento obtido é precisamente o desejado, o que valida a solução encontrada. Estas simulações foram feitas considerando-se amortecimento quadrático para a carga suspensa e linear ao longo do cabo. Não há diferença entre o resultado obtido e o esperado, pois o sistema simulado não fere nenhuma hipótese da solução analítica.



(a) Fator de Estabilização 14



(b) Fator de Estabilização 10



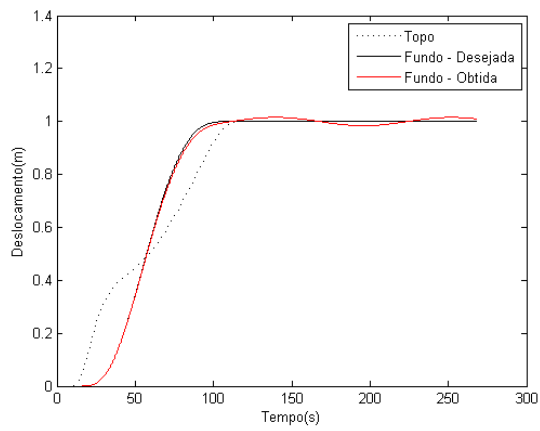
(c) Fator de Estabilização 6

Figura 3.3: Trajetórias de topo e fundo para diferentes tempos de estabilização - Atrito Linear

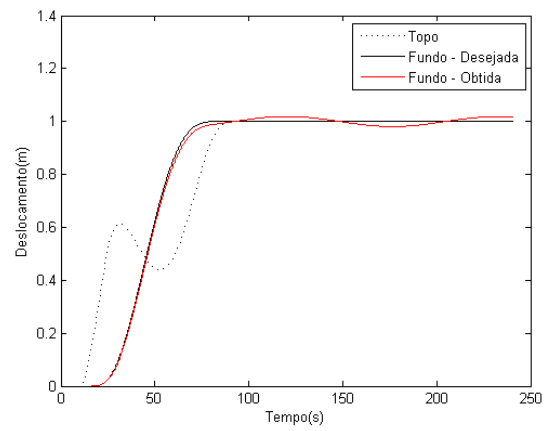
Por outro lado é importante notar o comportamento do topo (embarcação) à medida que o tempo de estabilização é reduzido. O fator de estabilização é um parâmetro da trajetória calculado como t_e/λ_L , ou seja, a razão entre o tempo de estabilização e o tempo de propagação da onda mecânica através de todo o riser. Para estabilizar rapidamente a grande massa suspensa na extremidade inferior do cabo, a plataforma adquire velocidade no sentido contrário ao do movimento da carga, no intuito de executar a frenagem desta. Tempos de estabilização da carga menores demandam aceleração, velocidade e amplitude de oscilação cada vez maiores no topo. Uma vez que a embarcação de posicionamento dinâmico possui limitações quanto à performance em função de sua grande inércia e limitada potência de seus propulsores, deve-se buscar uma trajetória de topo que seja compatível com estas limitações.

Os resultados mostrados na figura 3.4 mostram a divergência entre o resultado esperado e o obtido quando consideram-se forças dissipativas proporcionais ao quadrado da velocidade. As diferenças são

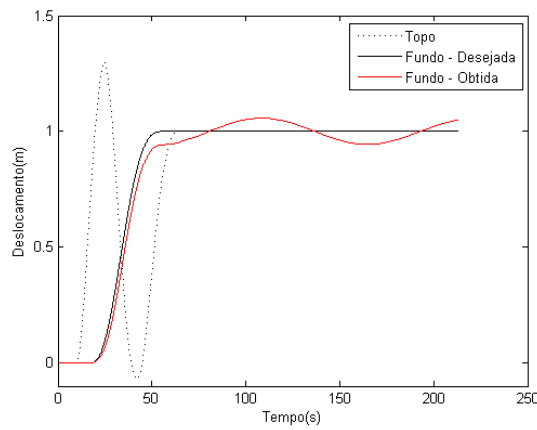
mais acentuadas em trajetórias mais rápidas, com sobre-sinal máximo de 6% para o último caso(fator de estabilização 6). Ainda assim obtém-se uma oscilação muito menor do que a observada na resposta à rampa, onde o sobre-sinal chega a 70% do deslocamento da trajetória para o mesmo fator de estabilização.



(a) Fator de Estabilização 14



(b) Fator de Estabilização 10



(c) Fator de Estabilização 6

Figura 3.4: Trajetórias de topo e fundo para diferentes tempos de estabilização - Atrito Não-Linear

3.4 OPERAÇÃO DE REENTRADA PARA RISERS COM TRAÇÃO VARIÁVEL

As simulações a seguir representam o comportamento dinâmico de um tubo de aço rígido com as seguintes propriedades:

Propriedade	Valor
Comprimento	2000m
Diâmetro Externo	550mm
Diâmetro Interno	500mm
Coefficiente de Massa Adicional(C_m)	2
Coefficiente de Arrasto(C_d)	1.2
Densidade do Aço	7860kg/m ³
Módulo de Elasticidade do Aço	210GPa

Tabela 3.2: Propriedades do riser de aço rígido

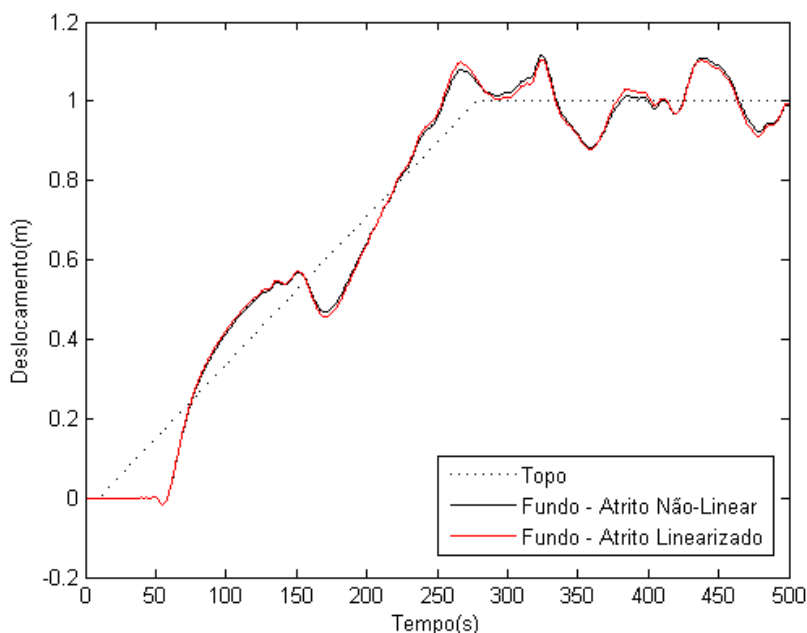
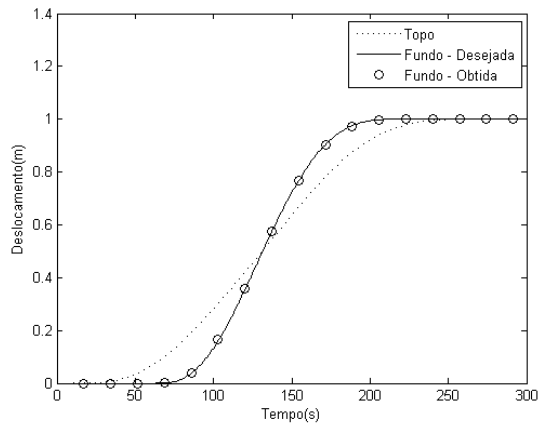
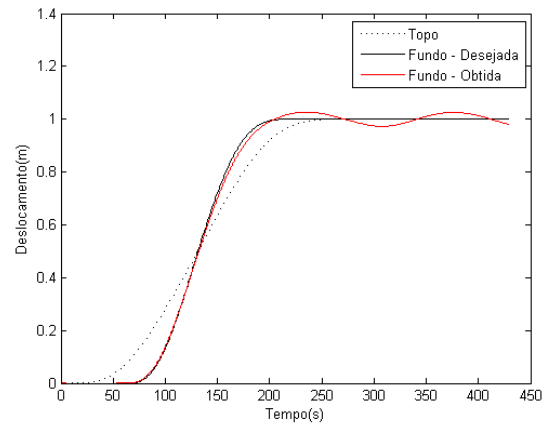


Figura 3.5: Resposta a uma entrada no formato rampa para um riser rígido com tensão variável

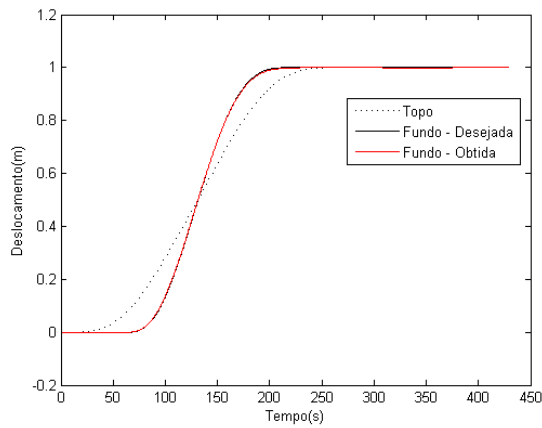
A figura 3.5 mostra a resposta do riser rígido a um estímulo do tipo "rampa". Neste caso observa-se uma oscilação menos comportada. Na ausência de uma grande quantidade de massa presa à extremidade inferior, as ondas em diversas frequências que percorrem o sistema exercem grande influência no movimento da extremidade inferior do riser. O sistema com atrito linearizado apresenta boa aproximação para o comportamento do sistema real. Na figura 3.6 tem-se a resposta obtida em comparação com a desejada, onde pode-se observar a influência do termo de viga e do atrito não-linear no comportamento do sistema. Em particular na figura 3.6 (a) o sistema se comporta exatamente como o esperado, pois sua equação governante é exatamente a mesma utilizada para se obter a função de entrada. Pode-se observar da figura 3.6 (c) que a influência da rigidez no sistema é mínima. O sistema com rigidez e atrito não-linear apresenta resposta próxima à trajetória esperada.



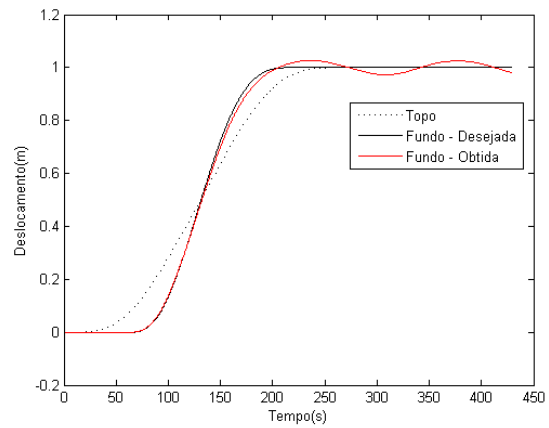
(a) Riser Flexível com Atrito Linear



(b) Riser Flexível com Atrito Quadrático



(c) Riser Rígido com Atrito Linear



(d) Riser Rígido com Atrito Quadrático

Figura 3.6: Trajetórias de topo e fundo para diferentes tempos de estabilização - Atrito Não-Linear

Ao comparar os resultados das simulações com atrito quadrático dos dois casos abordados neste trabalho, observa-se que no caso do riser livre, a resposta do sistema se afasta mais da trajetória desejada. Isto ocorre pois no caso do içamento de cargas, a não-linearidade do arrasto da carga é levada em conta na geração da trajetória de topo, pois é imposta como condição de contorno. Já o atrito não-linear ao longo do cabo é aproximado por um termo linear.

4 CONCLUSÕES

O desenvolvimento matemático feito neste trabalho possibilitou definir, dada uma trajetória desejada para a extremidade inferior, a trajetória de topo a ser executada pela embarcação. Cabe observar que no projeto de graduação 1 foi apresentada uma solução semelhante, porém através de uma expansão em série de Taylor em torno de $\alpha = 0$. Isto implica num erro de truncamento que aumenta à medida que o amortecimento aumenta. Neste ponto, as soluções aqui desenvolvidas apresentam vantagem, pois são válidas para qualquer valor de α . Adicionalmente, a expansão em série de Taylor resulta em uma função de transferência instável para a determinação da função $C_2(t)$, coeficiente do seno hiperbólico na solução para o sistema de tensão constante. Isto não mais é um problema.

As simulações numéricas não só validaram as soluções analíticas encontradas, como mostraram que a linearização do amortecimento e a negligência do termo de resistência à flexão são plausíveis para o sistema em questão. O conhecimento do comportamento dinâmico deste sistema é útil em especial para operações em águas profundas e/ou condições de mar menos favoráveis, onde torna-se mais difícil a execução manual da operação de reentrada. Certamente a implementação deste algoritmo em um sistema real requer também um sistema de controle com realimentação para evitar que perturbações como correntes marítimas gerem erro estático, isto é, deslocamento da posição de equilíbrio do riser para uma diferente daquela da embarcação. Os resultados aqui apresentados podem ser implementados em duas direções perpendiculares, de modo a gerar trajetórias em um plano cartesiano. Tal configuração permite a execução de tarefas mais complexas como desvio de obstáculos.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] PETIT, N.; ROUCHON, P. Flatness of heavy chain systems. *Conference on Decisions and Control, Las Vegas, Nevada, USA*, December 2002.
- [2] FORALEZA, E. *Active Control Applied to Offshore Structures: Positioning and Attenuation of Vortex Induced Vibrations*. Tese (Doutorado) — ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DES MINES DE PARIS, 2009.
- [3] MIKUSINSKI, J. *Operational Calculus*. 5th. ed. [S.l.]: Pergamon Press, 1959.
- [4] ABRAMOWITZ, M.; STEGUN, I. A. *Handbook of Mathematical Functions (3rd Edition)*. [S.l.]: Dover, 1972.
- [5] PRESS, W. H. et al. *Numerical Recipes in Fortran 77: The Art of Scientific Computing*. 2nd. ed. [S.l.]: Cambridge University Press, 1992.