



PROJETO DE GRADUAÇÃO

INTRODUÇÃO À HIDRODINÂMICA E REOLOGIA DE FLUIDOS COMPLEXOS

Por,

Adriano Possebon Rosa

Brasília, 30 de Junho de 2012

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
Faculdade de Tecnologia
Departamento de Engenharia Mecânica

PROJETO DE GRADUAÇÃO

**INTRODUÇÃO À HIDRODINÂMICA E REOLOGIA DE
FLUIDOS COMPLEXOS**

POR,
Adriano Possebon Rosa

Relatório submetido como requisito parcial para obtenção
do grau de Engenheiro Mecânico.

Banca Examinadora

Prof. Francisco Ricardo da Cunha, UnB/ENM (Orientador)

Prof. Gustavo Coelho Abade, UnB/ENM

Prof. Rafael Gabler Gontijo, UnB/ENM

Brasília, 30 de Junho de 2012

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
Faculdade de Tecnologia
Departamento de Engenharia Mecânica

PROJETO DE GRADUAÇÃO

**INTRODUÇÃO À HIDRODINÂMICA E REOLOGIA DE
FLUIDOS COMPLEXOS**

POR,
Adriano Possebon Rosa

Relatório submetido como requisito parcial para obtenção
do grau de Engenheiro Mecânico.

Banca Examinadora

Prof. Francisco Ricardo da Cunha, UnB/ENM (Orientador)

Prof. Gustavo Coelho Abade, UnB/ENM

Prof. Rafael Gabler Gontijo, UnB/ENM

Brasília, 30 de Junho de 2012

Agradecimentos

Primeiramente agradeço aos meus pais, José Rosa e Marcia, pelo apoio, compreensão e carinho nesses últimos 22 anos. À minha irmã Laryssa pela amizade e companherismo. Às minhas avós, Sylvia e Excelsa, e a todos os meus familiares.

Aos amigos de longa data, Daniel, Danilo, Fábio, Fádwa, Jéssica, Luis, Morais, Oliver, Tocantins e alguns outros que por acaso eu tenha esquecido de mencionar.

Aos amigos da engenharia, Alvaro, André, Cássia, Edgar, João Artur, Manso, Marcio. Agradeço especialmente aos amigos do VORTEX, Bráulio, Lobo e Nuno, pelo convívio e pela ajuda que me deram.

Agradeço a todos os professores com quem tive aula, particularmente aos professores Gustavo Abade, José Luiz, Roberto Bobenrieth e Yuri Dumaresq.

Por fim, agradeço ao professor Francisco Ricardo da Cunha por toda dedicação e paciência ao me orientar nesse projeto.

RESUMO

No presente trabalho é estudado analítica e numericamente o escoamento de fluidos magnéticos em tubos capilares. As interações entre o campo magnético externo aplicado e a hidrodinâmica do movimento são analisadas, determinando-se as alterações das propriedades reológicas do fluido devido ao campo. É feito também um estudo comparativo entre dois modelos de magnetização de equilíbrio. Na parte experimental, são mostrados resultados obtidos para a viscosidade de fluidos newtonianos e complexos (uma emulsão água/óleo e um polímero).

ABSTRACT

In this work an analytical and numerical investigation of the flow of magnetic fluids through capillary tubes is done. The results show the influence of external magnetic field in the rheological properties of the fluid. A comparison between two equilibrium magnetization models is also developed. In the experimental part of the work, rheometry results are shown for newtonian and complex fluids.

Sumário

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	FERROHIDRODINÂMICA	1
1.2	OBJETIVOS	4
2	CONCEITOS BÁSICOS	6
2.1	FUNDAMENTOS DA REOLOGIA	6
2.1.1	Desenvolvimento Histórico e Definições	6
2.1.2	Equações Governantes	10
2.2	ELETROMAGNETISMO	19
2.2.1	Definições	19
2.2.2	As Equações de Maxwell	26
3	REOMETRIA DE FLUIDOS COMPLEXOS	29
3.1	ESCOAMENTOS REOMÉTRICOS	29
3.1.1	Cannon-Fenske	29
3.1.2	Entre Cilindros Rotativos	32
3.1.3	Entre Disco Rotativo e Placa Plana	34
3.1.4	Em Tubo Capilar	37
3.2	METODOLOGIA E APARATO EXPERIMENTAL	39
3.2.1	Cannon-Fenske	39
3.2.2	Viscosímetro de Cilindros Concêntricos	43
3.2.3	Reômetro	45
3.2.4	Tubo Capilar	48
3.3	RESULTADOS	49
4	MODELOS PARA MAGNETIZAÇÃO DE EQUILÍBRIO	58

5	FORMULAÇÃO TEÓRICA DA HIDRODINÂMICA DE FLUIDOS MAGNÉTICOS	65
5.1	O TENSOR DE MAXWELL	65
5.2	EQUAÇÃO RESULTANTE	67
5.3	EQUAÇÃO DA EVOLUÇÃO DA MAGNETIZAÇÃO	69
5.4	ADIMENSIONALIZAÇÃO	70
5.4.1	Equação da Quantidade de Movimento Adimensionalizada	70
5.4.2	Equação da Magnetização Adimensionalizada	71
6	ESCOAMENTO DE FLUIDOS MAGNÉTICOS EM CAPILARES	73
6.1	SOLUÇÃO ANALÍTICA	73
6.1.1	Sem Acoplamento da Magnetização	74
6.1.2	Com Acoplamento - Método de Perturbação	80
6.2	SOLUÇÃO NUMÉRICA	86
6.2.1	O Método Runge-Kutta	86
6.2.2	Estrutura do Programa	87
7	RESULTADOS E DISCUSSÕES	91
7.1	PREDIÇÃO DA RELAÇÃO ENTRE Re e Re_m	101
7.2	COMPARAÇÃO ENTRE AS SOLUÇÕES	103
8	CONSIDERAÇÕES FINAIS	107
8.1	CONCLUSÕES	107
8.2	SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	108
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	110

Lista de Figuras

1.1	Representação esquemática de partículas magnéticas com surfactantes em um ferrofluido. (Rosensweig, 1985)	2
2.1	Deformação de um sólido que passa do estado ABCD para A'B'C'D'. A deformação γ é igual ao ângulo que resultou da deformação.	7
2.2	Escoamento entre placas paralelas ilustrando o conceito newtoniano de viscosidade. A placa de cima se move com velocidade constante U e a placa de baixo está parada. A distância entre as placas é d , assim o gradiente de velocidade ou taxa de deformação para esse caso é U/d	8
2.3	Definição da massa específica sob o ponto de vista do contínuo.	10
2.4	Dependência da tensão de cisalhamento com a taxa de deformação para fluidos newtonianos, pseudoplásticos, dilatantes e plásticos de Bingham. A inclinação da curva num ponto é a viscosidade aparente do fluido naquele ponto.	16
2.5	Representação do modelo de fluido viscoelástico de Maxwell por meio de um sistema com uma mola e amortecedor.	17
2.6	Representação de um volume contínuo de uma suspensão coloidal magnética. Os momentos das partículas estão aleatoriamente orientados. \mathbf{x} está fixo e representa um ponto na descrição contínua enquanto \mathbf{y} percorre o interior do volume indicando onde há partícula.	23
2.7	Esquema de um gradiente de campo magnético atuando em um pequeno elemento de uma substância magnética polarizada. (Rosensweig, 1985)	25
3.1	Representação do Cannon-Fenske. g representa a aceleração gravitacional local.	30

3.2	Esquema do escoamento entre cilindros. O cilindro maior de raio R_2 permanece fixo enquanto o cilindro menor de raio R_1 gira com velocidade Ω . O fluido ocupa o espaço entre os cilindros δ (aqui exagerado para melhor visualização).	33
3.3	Escoamento entre disco e placa plana. O disco de raio R gira sobre a placa plana. O fluido fica entre os dois. A direção θ , não mostrada na figura, é perpendicular à página.	34
3.4	Representação do escoamento laminar em um tubo capilar. O sentido do escoamento é para a direita e o tubo possui raio R .	37
3.5	Viscosímetros do tipo Cannon-Fenske da marca Induchem Lab Glass CO. (Laboratório do Vortex - ENM - UnB)	40
3.6	Banho térmico CT-200 Cannon, que funciona com uma resistência elétrica. Possui resolução de $0,001^\circ\text{C}$ (Laboratório do Vortex - ENM - UnB)	42
3.7	Densímetro DM38 da marca Anton Paar que funciona baseado no princípio de tubo em U. É necessária uma amostra de 2 ml do fluido. (Laboratório do Vortex - ENM - UnB)	42
3.8	Viscosímetro Brookfield de cilindros concêntricos utilizado nos experimentos. (Laboratório do Vortex - ENM - UnB)	43
3.9	A bancada com o viscosímetro, o banho térmico e o sistema de bombeamento de água do banho para a cavidade do viscosímetro, permitindo assim um controle rígido da temperatura do fluido ensaiado. (Laboratório do Vortex - ENM - UnB)	44
3.10	Componentes do viscosímetro: cilindro externo, cilindro interno e peças para conectar o cilindro interno ao motor, permitindo que aquele gire. (Laboratório do Vortex - ENM - UnB)	45
3.11	Reômetro MCR 301 da marca Anton Paar, que funciona baseado no princípio de escoamento entre disco rotativo e placa plana. (Laboratório do Vortex - ENM - UnB)	46
3.12	Equipamento da marca Lauda responsável pelo controle da temperatura do fluido em estudo. O funcionamento é baseado no efeito Peltier. (Laboratório do Vortex - ENM - UnB)	47

3.13 Filtro da marca Beko Clearpoint responsável pelo tratamento do ar que sai do compressor e vai até o reômetro. (Laboratório do Vortex - ENM - UnB)	47
3.14 Bancada para estudo de escoamentos com taxa de cisalhamento quadrática. Uma bomba acoplada a uma seringa, um tubo capilar, um manômetro digital e um transdutor coletor de dados compõe esse aparato. (Laboratório do Vortex - ENM - UnB)	48
3.15 Viscosidade do óleo de soja em função da taxa de cisalhamento obtida no viscosímetro para temperatura constante de 30°C. ● representa o dado experimental com sua respectiva barra de erro e a — é a média dos dados.	50
3.16 Comparação entre as viscosidades obtidas no cannon-fenske e no viscosímetro para o óleo de soja em função da temperatura. As linhas representam o ajuste da lei de Arrhenius.	51
3.17 Viscosidade do óleo mineral em função da taxa de cisalhamento obtida no viscosímetro para temperatura constante de 30°C. ● representa o dado experimental com sua respectiva barra de erro e a — é a média dos dados.	51
3.18 Comparação entre as viscosidades obtidas no cannon-fenske e no viscosímetro para o óleo mineral em função da temperatura. As linhas representam o ajuste da lei de Arrhenius.	52
3.19 Viscosidade de uma emulsão água/óleo com 70% de água em função do tempo adimensional para uma taxa de cisalhamento constante de 100 s ⁻¹ .	53
3.20 Comportamento de uma emulsão água/óleo com 70% de água em função da taxa de cisalhamento. ○ representa o dado experimental e — representa o ajuste da lei de Potência. No encarte os eixos estão em escala logarítmica.	53
3.21 Viscosidade da solução de poliacrilamida em função da taxa de cisalhamento para várias concentrações. Os eixos estão em escala logarítmica e as curvas representam ajustes da lei de potência para cada concentração.	55

3.22	Viscosidade da solução de poliacrilamida em função da concentração para $\dot{\gamma} = 1,1 s^{-1}$ e $T = 25^{\circ}C$. A curva é um ajuste da equação de Einstein para distribuições polidispersas. No encarte o detalhe para baixas concentrações.	56
3.23	Comportamento da viscosidade de uma solução de poliacrilamida com $\phi' = 0,5$ e $\dot{\gamma} = 10 s^{-1}$ em função da temperatura. A viscosidade é adimensionalizada por $\eta^* = 0,709 cP$ e a temperatura por $T^* = 50^{\circ}C$. A curva é uma exponencial. O eixo das ordenadas é apresentado em escala logarítmica.	57
4.1	Magnetização de equilíbrio em função do parâmetro α para $M_d/H = 0,1$ e $\phi = 0,1$. A curva cheia representa a aproximação ordem ϕ e a tracejada a aproximação ordem ϕ^3 de Ivanov e Kuznetsova (2001). A reta representa o limite paramagnético em que $M/M_s = \alpha/3$. O encarte mostra um detalhe das curvas para $4 \leq \alpha \leq 6$	61
4.2	Magnetização de equilíbrio em função do parâmetro α para $M_d/H = 1$ e $\phi = 0,1$. A curva cheia representa a aproximação ordem ϕ e a tracejada a aproximação ordem ϕ^3 de Ivanov e Kuznetsova (2001).	61
4.3	Magnetização de equilíbrio em função do parâmetro α para $M_d/H = 10$ e $\phi = 0,02$. A curva cheia representa a aproximação ordem ϕ e a tracejada a aproximação ordem ϕ^3 de Ivanov e Kuznetsova (2001).	62
4.4	Magnetização de equilíbrio em função de ϕ para $M_d/H = 1$ e $\alpha = 0,1$. A curva cheia representa a aproximação ordem ϕ e a tracejada a aproximação ordem ϕ^3 de Ivanov e Kuznetsova (2001).	63
4.5	Magnetização de equilíbrio em função de ϕ para $M_d/H = 1$ e $\alpha = 3$. A curva cheia representa a aproximação ordem ϕ e a tracejada a aproximação ordem ϕ^3 de Ivanov e Kuznetsova (2001).	64
4.6	Magnetização de equilíbrio em função de ϕ para $M_d/H = 1$ e $\alpha = 15$. A curva cheia representa a aproximação ordem ϕ e a tracejada a aproximação ordem ϕ^3 de Ivanov e Kuznetsova (2001).	64

6.1	Perfis de velocidade obtidos pela solução analítica sem acoplamento para diferentes Re_m com campo magnético desfavorável. Condições: $\phi = 0,03$, $M_d = 5$, $M_d/H = 5$, $\alpha = 6$, $dH/dz = -0,01$ e $G = 2,2$	77
6.2	Perfis de velocidade obtidos pela solução analítica sem acoplamento para diferentes Re_m com campo magnético favorável. Condições: $\phi = 0,03$, $M_d = 5$, $M_d/H = 5$, $\alpha = 6$, $dH/dz = 0,01$ e $G = 2,2$	78
6.3	Efeito do campo magnético sobre a viscosidade efetiva adimensional ReG , para diferentes valores de G . Solução analítica sem acoplamento. Condições: $\phi = 0,03$, $M_d = 5$, $M_d/H = 5$, $\alpha = 6$ e $dH/dz = -0,01$. . .	79
6.4	Efeito do campo magnético sobre a viscosidade efetiva adimensional ReG , para diferentes valores de G . Solução analítica sem acoplamento. Condições: $\phi = 0,03$, $M_d = 5$, $M_d/H = 5$, $\alpha = 6$ e $dH/dz = 0,01$	79
6.5	Perfis de velocidade obtidos pela solução assintótica com acoplamento magnético e campo desfavorável para diferentes Re_m . ($\phi = 0,03$, $M_d = 5$, $M_d/H = 5$, $\alpha = 6$, $dH/dz = -0,01$ e $G = 2,2$)	84
6.6	Perfis de velocidade obtidos pela solução assintótica com acoplamento magnético e campo desfavorável para diferentes Re_m . ($\phi = 0,03$, $M_d = 5$, $M_d/H = 5$, $\alpha = 6$, $dH/dz = 0,01$ e $G = 2,2$)	85
6.7	Efeito do campo magnético sobre a viscosidade efetiva adimensional ReG , para diferentes valores de G . Solução assintótica com acoplamento. ($\phi = 0,03$, $M_d = 5$, $M_d/H = 5$, $\alpha = 6$ e $dH/dz = -0,01$)	85
6.8	Efeito do campo magnético sobre a viscosidade efetiva adimensional ReG , para diferentes valores de G . Solução assintótica com acoplamento. ($\phi = 0,03$, $M_d = 5$, $M_d/H = 5$, $\alpha = 6$ e $dH/dz = 0,01$)	86
6.9	Estudo da convergência do número de Reynolds em função da tolerância para a vazão. Nota-se que com $tol2 = 10^{-3}$ o valor de Re calculado já é o valor de convergência. Valores de entrada: $\phi = 0,03$, $M_d = 5$, $M_d/H = 5$, $\alpha = 6$, $dH/dz = 0,01$, $G = 2$ e $Re_m = 50$	90
7.1	Perfis obtidos da solução numérica com campo desfavorável. ($\phi = 0,03$, $M_d = 5$, $M_d/H = 5$, $\alpha = 6$, $dH/dz = -0,01$ e $G = 2,2$)	92
7.2	Perfis obtidos da solução numérica com campo favorável. ($\phi = 0,03$, $M_d = 5$, $M_d/H = 5$, $\alpha = 6$, $dH/dz = 0,01$ e $G = 2,2$)	92

7.3	Perfis obtidos da solução numérica para $Re_m = 50$ com campo favorável ($dH/dz = 0,01$) e campo desfavorável ($dH/dz = -0,01$). A linha cheia representa a lei de Poiseuille. ($\phi = 0,03, M_d = 5, M_d/H = 5, \alpha = 6$ e $G = 2, 2$)	93
7.4	Velocidade máxima obtida em função de Re_m para $G = 2,0$ e $G = 0,5$. ($\phi = 0,03, M_d = 5, M_d/H = 5, \alpha = 6$ e $dH/dz = -0,01$)	94
7.5	Velocidade máxima obtida em função de Re_m para $G = 2,0$ e $G = 0,5$. ($\phi = 0,03, M_d = 5, M_d/H = 5, \alpha = 6$ e $dH/dz = 0,01$)	94
7.6	Efeito do campo magnético sobre a viscosidade efetiva adimensional, ReG , para diferentes valores de G . Solução numérica. ($\phi = 0,03, M_d = 5, M_d/H = 5, \alpha = 6$ e $dH/dz = -0,01$)	95
7.7	Efeito do campo magnético sobre a viscosidade efetiva adimensional, ReG , para diferentes valores de G . Solução numérica. ($\phi = 0,03, M_d = 5, M_d/H = 5, \alpha = 6$ e $dH/dz = 0,01$)	96
7.8	Fator de atrito para escoamento em tubo capilar de fluido magnético sob ação de campo magnético desfavorável. ($\phi = 0,03, M_d = 5, M_d/H = 5, \alpha = 6$ e $dH/dz = -0,01$)	97
7.9	Fator de atrito para escoamento em tubo capilar de fluido magnético sob ação de campo magnético favorável. ($\phi = 0,03, M_d = 5, M_d/H = 5, \alpha = 6$ e $dH/dz = 0,01$)	97
7.10	Razão entre a contribuição não-newtoniana e a newtoniana do gradiente de pressão adimensional em função de Re para diferentes valores de Re_m . Campo desfavorável. ($\phi = 0,03, M_d = 5, M_d/H = 5, \alpha = 6$ e $dH/dz = -0,01$)	98
7.11	Razão entre a contribuição não-newtoniana e a newtoniana do gradiente de pressão adimensional em função de Re para diferentes valores de Re_m . Campo favorável. ($\phi = 0,03, M_d = 5, M_d/H = 5, \alpha = 6$ e $dH/dz = 0,01$)	99
7.12	Viscosidade efetiva em função da fração volumétrica de partículas ϕ para diferentes valores de G . ($Re_m = 15, M_d = 5, M_d/H = 5, \alpha = 6$ e $dH/dz = -0,01$)	100

7.13	Viscosidade efetiva adimensional em função da fração volumétrica de partículas ϕ para diferentes valores de G . ($Re_m = 15$, $M_d = 5$, $M_d/H = 5$, $\alpha = 6$ e $dH/dz = 0,01$)	100
7.14	Viscosidade efetiva adimensional em função do parâmetro α para diferentes valores de G . ($Re_m = 60$, $M_d = 5$, $M_d/H = 5$, $\phi = 0,03$ e $dH/dz = -0,01$)	101
7.15	Re em função de Re_m para diferentes gradientes de pressão. Os pontos representam os dados numéricos e as curvas correspondem a equação (7.8). ($\phi = 0,03$, $M_d = 5$, $M_d/H = 5$, $\alpha = 6$ e $dH/dz = -0,01$)	102
7.16	Re em função de Re_m para diferentes gradientes de pressão. Os pontos representam os dados numéricos e as curvas correspondem a equação (7.8). ($\phi = 0,03$, $M_d = 5$, $M_d/H = 5$, $\alpha = 6$ e $dH/dz = 0,01$)	102
7.17	Comparação entre as soluções analítica com acoplamento magnetização-vorticidade (assintótica) e numérica em função do módulo do parâmetro ϵ . ($\phi = 0,03$, $M_d = 5$, $M_d/H = 5$, $\alpha = 6$, $dH/dz = -0,01$, $Re_m = 60$ e $G = 2$.)	103
7.18	Comparação entre as soluções analítica sem acoplamento magnetização-vorticidade, analítica com acoplamento (assintótica) e numérica. Gráfico de Re em função de Re_m . ($\phi = 0,03$, $M_d = 5$, $M_d/H = 5$, $\alpha = 6$ e $dH/dz = -0,01$)	104
7.19	Comparação entre as soluções analítica sem acoplamento magnetização-vorticidade, analítica com acoplamento (assintótica) e numérica. Gráfico da viscosidade efetiva adimensional, ReG , em função de Re_m . ($\phi = 0,03$, $M_d = 5$, $M_d/H = 5$, $\alpha = 6$ e $dH/dz = -0,01$)	105
7.20	Comparação entre as soluções analítica sem acoplamento magnetização-vorticidade, analítica com acoplamento (assintótica) e numérica. Gráfico de Re em função de Re_m . ($\phi = 0,03$, $M_d = 5$, $M_d/H = 5$, $\alpha = 6$ e $dH/dz = 0,01$)	105
7.21	Comparação entre as soluções analítica sem acoplamento magnetização-vorticidade, analítica com acoplamento (assintótica) e numérica. Gráfico da viscosidade efetiva adimensional, ReG , em função de Re_m . ($\phi = 0,03$, $M_d = 5$, $M_d/H = 5$, $\alpha = 6$ e $dH/dz = 0,01$)	106

Lista de Tabelas

3.1	Classificação dos Viscosímetros	41
-----	---	----

Lista de Símbolos

Símbolos Latinos

a	Raio do capilar
\mathbf{B}	Indução magnética
\mathbf{D}	Tensor taxa de deformação
d	Distância
F	Força
g	Aceleração gravitacional local
G	Módulo de Rigidez
\mathbf{H}	Campo magnético
h	Altura
\mathbf{I}	Tensor identidade
m	Massa
n	Coeficiente de fluidos não newtonianos viscosos
P	Pressão
Q	Vazão volumétrica
r	Coordenada radial
R_1	Raio do cilindro interno
R_2	Raio do cilindro externo
t	Variável temporal
T	Temperatura
\mathbf{u}	Campo de velocidade euleriana
U	Velocidade da placa superior
V	Volume
V'	Menor volume dentro do critério de continuidade
x_1, x_2, x_3	Eixos coordenados
\mathbf{W}	Tensor taxa de rotação
z	Coordenada transversal

Símbolos Gregos

γ	Deformação material
$\dot{\gamma}$	Taxa de deformação
δ	Espaço entre o disco e a placa
η	Viscosidade dinâmica aparente
η_0	Viscosidade para baixas taxas de cisalhamento
η_∞	Viscosidade para altas taxas de cisalhamento
θ	Coordenada angular
ν	Viscosidade cinemática
ρ	Massa específica
σ	Tensão (lei de Hooke)
Σ	Tensor das tensões
τ	Tensão (lei de Newton)
ϕ	Fração volumétrica
Ω	Velocidade de rotação do disco
Γ	Tensor de cisalhamento

Grupos Adimensionais

D_e	Número de Deborah
G	Gradiente de pressão
Re	Número de Reynolds
Re_m	Número de Reynolds Magnético

Símbolos Matemáticos

∂	Operador de derivada parcial
∇	Operador gradiente
$\nabla \cdot$	Operador divergente
$\nabla \times$	Operador rotacional
\int	Integral

1 INTRODUÇÃO

1.1 FERROHIDRODINÂMICA

Fluidos magnéticos são suspensões de pequenas partículas magnéticas dispersas em um fluido base. Sob a ação de um campo magnético esses fluidos apresentam mudanças significativas em suas propriedades reológicas, mantendo sua principal característica que é a fluidez. O principal tipo de fluido magnético é o *ferrofluido*. Trata-se de uma suspensão coloidal de partículas ferromagnéticas com dimensões nanométricas em um fluido carreador. Cada partícula é um pequeno ímã que, na ausência de um campo, gira randomicamente devido as forças Brownianas, que são fortes devido ao pequeno tamanho da partícula. Na presença de um campo, no entanto, o fluido se torna anisotrópico, apresentando grande tendência de alinhamento dos momentos magnéticos com o campo aplicado.

Muitos ferrofluidos são superparamagnéticos, i.e., quando o campo é retirado as partículas voltam a se orientar aleatoriamente, não havendo histerese ou memória magnética do fluido. Outra característica do superparamagnetismo é a grande susceptibilidade magnética: campos da ordem de 1 Tesla, que na maioria dos materiais não induz magnetização observável, podem levar a um nível de alinhamento dos momentos magnéticos próximo de 100%.

Para que o ferrofluido seja confiável em aplicações tecnológicas e também em pesquisas científicas, garantindo que os resultados sejam reprodutíveis, é necessário que ele seja estável. Para isso as partículas devem ser suficientemente pequenas de maneira que as oscilações térmicas as mantenham suspensas. Outra condição é que não haja a formação de aglomerados de partículas devido a atrações entre as mesmas, tanto devido a forças atrativas por interações magnéticas quanto a forças de van de Waals, sendo necessária a adição de um terceiro componente ao sistema que será responsável por envolver as partículas e evitar que haja aglomeração. Nos ferrofluidos surfactados

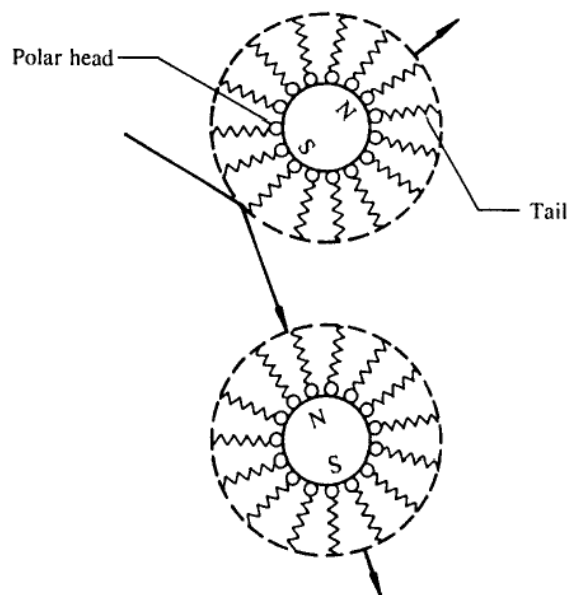


Figura 1.1: Representação esquemática de partículas magnéticas com surfactantes em um ferrofluido. (Rosensweig, 1985)

(ou tensoativos) as partículas são revestidas com cadeias poliméricas apolares com espessura típica de 2-3 nm, como representado na figura (1.1). Já nos ferrofluidos iônicos as partículas são revestidas por uma camada de íons com a mesma polaridade, causando repulsão eletrostática.

Fluidos naturais que exibam respostas apreciáveis a um campo magnético aplicado não são conhecidos atualmente. Por isso o interesse da comunidade científica pela interação entre fluidos e campos magnéticos começou a ser significativa somente a partir da década de 1960, quando os primeiros fluidos magnéticos estáveis foram sintetizados. A NASA (National Aeronautics and Space Administration) objetivava controlar o fluxo de combustível em ambientes com gravidade nula por meio de campos magnéticos. Para isso sintetizou um composto de micropartículas magnéticas em um combustível usado em aeronaves espaciais.

A *ferrohidrodinâmica* tem como objetivo o estudo dessas interações entre o fluido e o campo magnético, ou seja, o modo como um campo externo afeta a mecânica do movimento de um fluido magnético. Esta disciplina está inserida no estudo da interação de campos e fluidos (Rosensweig, 1985), que é composto também pela eletrohidrodinâmica

(forças elétricas) e pela magnetohidrodinâmica (interação de forças magnéticas com fluidos condutores de eletricidade).

Um outro tipo de fluido magnético, as suspensões magneto-reológicas, apresenta partículas micrométricas suspensas no líquido. Essas partículas não estão sob influência do efeito browniano e segregam gradualmente devido à diferença de massa específica com o líquido.

As principais técnicas de preparação de fluidos magnéticos (Blums et al., 1996) são por redução do tamanho, por eletrodeposição, por precipitação química e por evaporação de metal em um líquido. Líquidos normalmente utilizados como carreadores são o querosene, a parafina, a água, o fluorcarbono e óleos, como o naftênico e o mineral. As partículas ferromagnéticas são de materiais como a maguemita, a ferrita, o cobalto e a carbonila. Um fluido típico contém cerca de 10^{23} partículas por metro cúbico e é opaco à luz visível.

Atualmente, com o aperfeiçoamento das técnicas de síntese, se produzem ferrofluidos e suspensões magnéticas com diversas concentrações e características variadas, permitindo a aplicação desses compostos em várias áreas de interesse econômico. No setor industrial esses fluidos magnéticos são comumente usados no desenvolvimento de acelerômetros, impressoras, amortecedores e bombas magnéticas, nos quais não existe intervenção mecânica para a movimentação do fluido. É comum também o uso de partículas magnéticas para a estabilização de leitos fluidizados.

Na medicina, a ferrohídrodinâmica é usada para a aplicação e transporte de drogas (Ramos, 2003). Os Fluidos Magnéticos Biocompatíveis são capazes de transportar medicamentos guiados externamente por campos magnéticos, agindo em lugares específicos sem o uso de técnicas intrusivas ou cirurgias. No tratamento de câncer, as partículas magnéticas se aderem às células do tumor e, com a aplicação de um campo magnético externo alternado, aumentam sua temperatura devido ao efeito Joule, provocando a morte da célula. Fluidos magnéticos são usados também em exames de ressonância magnética nuclear de alta precisão, permitindo o diagnóstico de doenças em estágio inicial.

A separação magnética, em especial a separação de óleo e água, é um método promissor. Sua maior importância está na indústria petrolífera, sendo um método para limpar mais rapidamente áreas nas quais ocorreu vazamento de petróleo durante a produção ou o transporte, evitando assim danos graves à natureza (Cunha e Sobral, 2004).

1.2 OBJETIVOS

O objetivo deste trabalho é o estudo das propriedades reológicas de fluidos magnéticos. Primeiramente são feitos experimentos com fluidos newtonianos e complexos com o objetivo de possibilitar um conhecimento do funcionamento e do manuseio de instrumentos reométricos para um posterior trabalho com fluidos magnéticos em um projeto de pós-graduação. Em seguida é feito um estudo analítico e numérico do escoamento de fluidos magnéticos em capilares com a aplicação de um campo magnético. Através de uma análise adimensional é investigada a influência deste campo sobre o comportamento hidrodinâmico do fluido.

No capítulo 2 são apresentados os conceitos reológicos e eletromagnéticos que formarão a base para o estudo do comportamento do fluido magnético. No capítulo 3 são descritos os instrumentos que serão utilizados na caracterização de fluidos magnéticos posteriormente. São apresentados também resultados experimentais preliminares utilizando fluidos newtonianos e fluidos complexos.

No capítulo 4 são abordados dois modelos de magnetização de equilíbrio: um tradicional ordem ϕ e um mais recente na literatura, ordem ϕ^3 , que será utilizado neste projeto. No capítulo 5 é apresentada a equação que governa o movimento de um fluido magnético em movimento sob a ação de um campo externo. Duas soluções analíticas para o escoamento de fluidos magnéticos em tubo capilar são desenvolvidas no capítulo 6. A primeira solução não leva em conta o acoplamento magnetização-vorticidade. A segunda considera esse acoplamento e é utilizado o método de perturbações regulares.

Ainda no capítulo 6 é descrita a metodologia utilizada na solução numérica da

equação do movimento. Os resultados do estudo numérico são apresentados no capítulo 7, juntamente com comparações entre as soluções analíticas e a numérica.

Por fim, é feita uma conclusão do trabalho no capítulo 8, onde são apresentadas também propostas para trabalhos futuros.

2 CONCEITOS BÁSICOS

Neste capítulo são apresentados os princípios básicos de reologia e eletromagnetismo necessários para o desenvolvimento do projeto.

2.1 FUNDAMENTOS DA REOLOGIA

Nesta seção é feita uma breve revisão bibliográfica da Reologia, sendo apresentados aspectos históricos e definições desta ciência.

2.1.1 Desenvolvimento Histórico e Definições

Em 1678, o inglês Robert Hooke (1635-1703), observando o comportamento de molas, descobriu que as deformações elásticas obedeciam a uma lei simples e postulou o que seria conhecido mais tarde por “Lei de Hooke”: a tensão em um sólido é diretamente proporcional à deformação exercida sobre o mesmo, ou seja,

$$\sigma = G \gamma, \quad (2.1)$$

em que G é o módulo de rigidez do sólido e γ é a deformação sofrida. A figura (2.1) ilustra essa lei. Uma tensão aplicada em um sólido não o deformará continuamente, mas somente até um certo limite a partir do estado de referência, que é o estado com tensão nula.

Apenas 9 anos após a descoberta da “Lei de Hooke”, foi publicado o que seria o livro de ciências naturais mais influente da história, cujo autor era o também inglês Isaac Newton (1643-1727). Em “Princípios Matemáticos da Filosofia Natural”, Newton tratou, dentre outros temas, do escoamento simples permanente de líquido entre placas paralelas postulando o que seria a “Lei da Viscosidade de Newton”: a tensão exercida

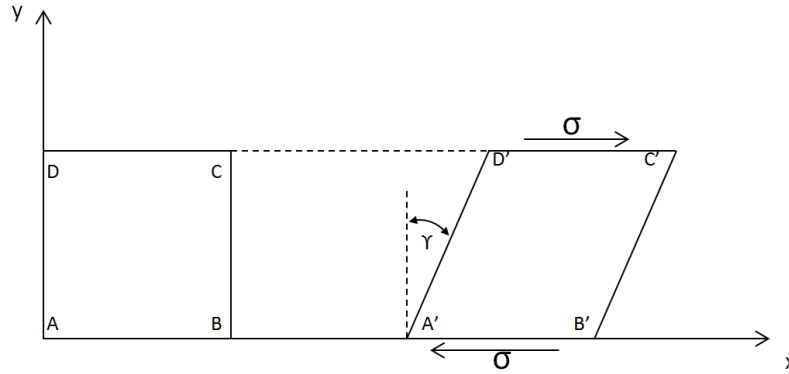


Figura 2.1: Deformação de um sólido que passa do estado ABCD para A'B'C'D'. A deformação γ é igual ao ângulo que resultou da deformação.

sobre o líquido é proporcional à velocidade com que as partes do líquido se deslocam umas em relação às outras. A figura (2.2) mostra o que pode ser expresso como:

$$\tau = \eta \dot{\gamma}, \quad (2.2)$$

em que η é o coeficiente de viscosidade do líquido e $\dot{\gamma}$ é taxa de cisalhamento ou gradiente de velocidade do escoamento, neste caso dada por U/d . O coeficiente de viscosidade é uma medida da resistência do líquido ao escoamento, como um “atrito interno”. Do ponto de vista microscópico, a viscosidade está associada com a transferência líquida de quantidade de movimento por flutuações moleculares. Diferentemente do que foi observado por Hooke para os sólidos, os líquidos se deformam continuamente quando submetidos a uma tensão ou força, não existindo um estado de referência para eles.

As teorias tratam na verdade de dois extremos teóricos que não existem: de um lado o sólido ideal de Hooke e do outro o líquido perfeito de Newton. Na natureza são encontrados materiais entre esses dois extremos, às vezes próximos o bastante para podermos considerá-los em uma ou outra categoria. O grupo adimensional Deborah, cujo nome é uma referência a um capítulo do antigo testamento, foi criado por Markus Reiner (1886-1976) para posicionar o comportamento de um material entre os dois extremos teóricos,

$$D_e = \frac{\tau}{T}, \quad (2.3)$$

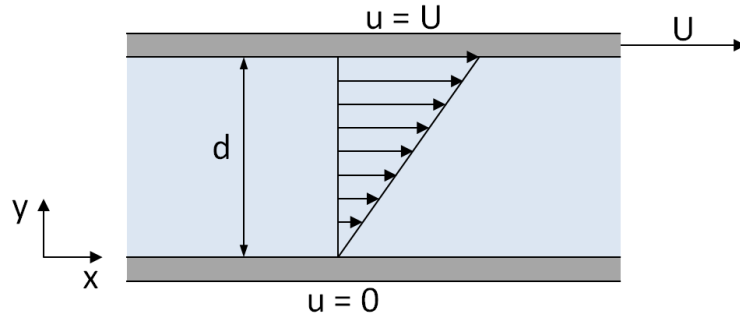


Figura 2.2: Escoamento entre placas paralelas ilustrando o conceito newtoniano de viscosidade. A placa de cima se move com velocidade constante U e a placa de baixo está parada. A distância entre as placas é d , assim o gradiente de velocidade ou taxa de deformação para esse caso é U/d .

em que τ é um tempo característico do material e T é um tempo característico do processo de deformação sendo observado. D_e é infinito para um sólido de Hooke e zero para um fluido de Newton. A água no estado líquido, por exemplo, possui um τ de aproximadamente 10^{-12} s. Vale ressaltar que o mesmo material pode apresentar números de Deborah bem distintos para diferentes processos de deformação sofridos.

Por quase 200 anos esses dois modelos atenderam bem às necessidades dos engenheiros e físicos, cada material sendo considerado ou sólido ou líquido. Foi somente em 1835 que o físico alemão Wilhelm Weber (1804-1891) percebeu algumas anomalias comportamentais estudando fios de seda. Weber percebeu que o material parecia um sólido, mas não obedecia à Lei de Hooke. O comportamento do material analisado por Weber seria mais tarde chamado de viscoelástico, ou seja, apresenta características viscosas e elásticas simultaneamente.

Além de Weber outros pesquisadores também perceberam comportamentos não esperados em diversos materiais. E foi assim que, em 1920, Eugene Cook Bingham (1878-1945) deu nome a uma nova área de estudos inserida na mecânica dos meios contínuos, a Reologia. A palavra significa, literalmente, estudo de fluxos, mas Reologia pode ser assim definida: estudo das mudanças na forma e no fluxo de um material em um escoamento, enfatizando variáveis como a viscosidade, a plasticidade e a elasticidade

deste material, ou seja, é o estudo das interações que ocorrem entre o material e o escoamento.

A reologia tem como foco os materiais que exibem um número de Deborah que não seja nem muito próximo de zero nem infinitamente grande. A água e o óleo de soja, por exemplo, são líquidos que podem ser aproximados pelo modelo de viscosidade proposto por Newton, ou seja, são líquidos newtonianos. No entanto diversos materiais apresentam viscosidade variável com a taxa de cisalhamento, como o sangue, o silicone e o “ketchup”. Estes são denominados líquidos não-newtonianos e não podem ser descritos pela equação da viscosidade de Newton.

Em 1929 surgiu a Sociedade Americana de Reologia, formada por químicos, físicos, matemáticos e engenheiros. Mas foi somente durante a Segunda Grande Guerra que a reologia passou a ter a merecida atenção. As indústrias precisavam dominar o comportamento de materiais usados diretamente nas armas, além de controlar perfeitamente o uso de detergentes sintéticos, óleos e adesivos de contato. As indústrias alimentícia e farmacêutica também se desenvolveram bastante nessa época, contribuindo para um avanço rápido da reologia.

A reologia pode ser dividida ainda em três categorias (ver Barnes et. al., 1989): (i) a reometria, que investiga as propriedades dos materiais sob escoamentos simples e permanentes; (ii) equações constitutivas, que são equações reológicas de estado relacionando a tensão com variáveis de deformação; (iii) investigação do comportamento do material em escoamentos complexos, na maioria das vezes com o auxílio da mecânica dos fluidos computacional.

A reologia é um ramo da mecânica dos meios contínuos. O interesse está focado nas propriedades médias estatísticas e no comportamento de um grande número de moléculas e não nas propriedades e comportamentos individuais dessas moléculas (ver Pao, 1967). Assume-se que as propriedades macroscópicas, como viscosidade, massa específica, pressão, temperatura e velocidade, dentre outras, variam continuamente com a posição no meio e com o tempo. Assim, por exemplo, a massa específica ρ em um “ponto” $P(x_1, x_2, x_3, t)$ é definida como:

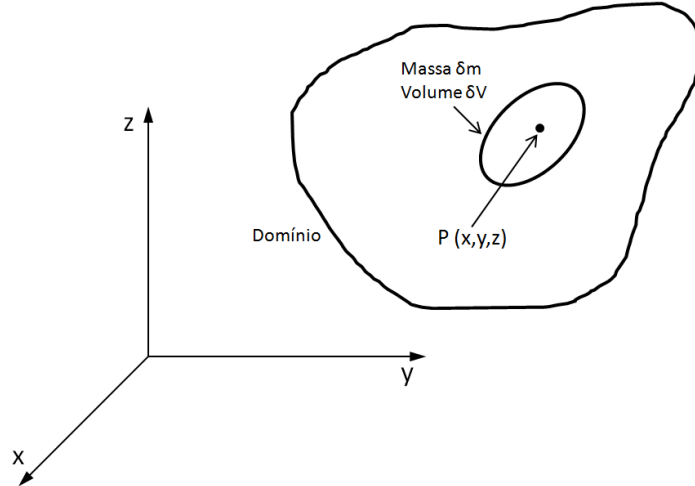


Figura 2.3: Definição da massa específica sob o ponto de vista do contínuo.

$$\rho \equiv \lim_{\delta V \rightarrow \delta V'} \frac{\delta m}{\delta V}, \quad (2.4)$$

em que δm é a massa do material em um volume δV , volume este que tende assintoticamente para o menor volume possível dentro do critério de continuidade, $\delta V'$. A figura (2.3) ilustra esse conceito. Obtém-se, então, o campo representativo para a massa específica ρ :

$$\rho = \rho(x_1, x_2, x_3, t). \quad (2.5)$$

Essa definição é válida também para campos vetoriais e tensoriais.

2.1.2 Equações Governantes

Duas equações formam a base da reologia: a equação da conservação de massa, ou equação da continuidade, e a equação do balanço de momento linear. A equação da continuidade

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (2.6)$$

pode ser simplificada para

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2.7)$$

já que a variação da massa específica dos materiais estudados neste trabalho é desprezível. Nas equações (2.6) e (2.7) e ao longo deste trabalho, \mathbf{u} representa o campo de velocidade euleriano e ρ a massa específica, constante. A equação do balanço de momento linear para um meio contínuo é dada pela equação de Cauchy:

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = \nabla \cdot \boldsymbol{\Sigma} + \rho \mathbf{b}, \quad (2.8)$$

em que $\boldsymbol{\Sigma}$ denota o tensor de tensões do fluido e \mathbf{b} forças de campo por unidade de massa. O tensor de tensões determina a distribuição de tensões e esforços internos no meio contínuo, enquanto forças de campo são forças que agem à distância, como a gravitacional e a magnética. O tensor de tensões é dado por:

$$\boldsymbol{\Sigma} = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\Gamma}, \quad (2.9)$$

em que p é a pressão mecânica, \mathbf{I} é o tensor identidade e $\boldsymbol{\Gamma}$ é o tensor relacionado com as forças de cisalhamento do escoamento.

Todo tensor de segunda ordem pode ser escrito como a soma de uma parte isotrópica com uma contribuição de traço nulo ou deviatórico (ver Cunha, 2010):

$$\mathbf{A} = \frac{1}{3} \text{tr}(\mathbf{A})\mathbf{I} + \mathbf{A}^d \quad (2.10)$$

ou

$$\mathbf{A}^d = \mathbf{A} - \frac{1}{3} \text{tr}(\mathbf{A})\mathbf{I}, \quad (2.11)$$

em que \mathbf{A} é um tensor de segunda ordem qualquer e \mathbf{A}^d é a parte deviatórica de \mathbf{A} . Nota-se que o traço de \mathbf{A}^d é nulo. Assim, da equação (2.9):

$$p = \frac{-\text{tr}(\boldsymbol{\Sigma})}{3} \quad e \quad \text{tr}(\boldsymbol{\Gamma}) = 0. \quad (2.12)$$

As equações de balanço apresentadas acima são válidas em qualquer ponto e em qualquer instante de tempo em um meio contínuo. No entanto, elas são insuficientes para determinar a resposta do fluido. São necessárias equações adicionais, obtidas por observações experimentais ou por hipóteses, para caracterizar particularmente o material, definindo o tensor de tensões. Essas equações são denominadas equações constitutivas.

Um dos objetivos da reologia é determinar a equação constitutiva do fluido, i.e., o tensor de tensões como função das variáveis de deformação do escoamento:

$$\mathbf{\Gamma} = F(\nabla \mathbf{u})_{t^* \leq t}, \quad (2.13)$$

em que F representa o funcional, $\nabla \mathbf{u}$ é o gradiente de velocidade, t é o tempo no qual se deseja determinar o tensor e t^* é todo o tempo anterior ao escoamento. Para fluidos com memória é necessário o conhecimento de todo o espectro de acontecimentos anterior ao estado atual. Já para fluidos instantâneos basta conhecer o estado atual para a determinação do tensor.

Qualquer tensor de segunda ordem pode ser escrito como a soma de um tensor simétrico (tensor que é igual ao seu transposto) com um tensor anti-simétrico (tensor que é igual ao negativo do seu transposto). Assim, o tensor gradiente de velocidade pode ser escrito como:

$$\nabla \mathbf{u} = \mathbf{D} + \mathbf{W}, \quad (2.14)$$

com

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T) \quad e \quad \mathbf{W} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} - (\nabla \mathbf{u})^T). \quad (2.15)$$

O tensor \mathbf{D} é simétrico e é denominado tensor taxa de deformação. O tensor \mathbf{W} representa a parte anti-simétrica e é denominado tensor vorticidade.

As equações constitutivas devem satisfazer os seguintes princípios formais (ver Truesdell e Toupin, 1960):

- *Princípio da Consistência:* qualquer equação constitutiva deve ser compatível com as equações de balanço de massa, momentum e energia;
- *Princípio da Causalidade:* o tensor de tensões Γ deve depender mais da história recente do movimento do fluido;
- *Princípio da Invariância de Coordenadas:* a equação constitutiva deve manter a sua forma em qualquer sistema de coordenadas inercial, já que a escolha do sistema de coordenada é arbitrário;
- *Princípio da Indiferença Material do Referencial:* o campo instantâneo de tensões deve independe do movimento do observador.

Nas próximas seções são apresentadas três categorias distintas de fluidos, cada uma com sua equação constitutiva própria para F :

1. Fluidos Newtonianos
2. Fluidos Não-Newtonianos Viscosos
3. Fluidos Viscoelásticos

2.1.2.1 Fluidos Newtonianos

Fluidos newtonianos, como já mencionado anteriormente, são aqueles que apresentam viscosidade constante para uma dada temperatura e pressão, ou seja, a viscosidade não varia nem com a taxa nem com o tempo de cisalhamento. Além disso, a tensão no líquido se torna nula imediatamente após o término do cisalhamento (ver Barnes et. al., 1989), não existindo memória para essa classe de fluidos. A equação que define o tensor de tensões para um fluido newtoniano é:

$$\mathbf{\Gamma} = \eta \left[\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T \right] = 2\eta \mathbf{D}. \quad (2.16)$$

Logo, a função F para um fluido newtoniano é o produto entre uma constante, a viscosidade do fluido, e a parte simétrica do gradiente da velocidade. Substituindo a

equação (2.16) na equação do balanço do momento linear de Cauchy, equação (2.8), tem-se:

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \eta \nabla^2 \mathbf{u} + \rho \mathbf{g}. \quad (2.17)$$

A equação (2.17) é a conhecida equação de Navier-Stokes para fluidos incompressíveis.

Apesar de a viscosidade de fluidos newtonianos não variar significativamente com a pressão, a diminuição daquela com a temperatura é notável, e aproximada pela relação de Arrhenius:

$$\eta = Ae^{B/T}, \quad (2.18)$$

em que T é a temperatura absoluta e A e B são constantes do fluido, com B negativo. Em geral quanto maior a viscosidade do material, maior a dependência com a temperatura.

2.1.2.2 Fluidos Não-Newtonianos Viscosos

Fluidos não-newtonianos viscosos são materiais que apresentam uma viscosidade dependente da taxa de cisalhamento, ou seja, são fluidos que interagem com o escoamento. Porém, a viscosidade permanece constante com o tempo de escoamento para uma taxa de cisalhamento constante. Assim, para esses fluidos devemos ter:

$$\tau = \eta(\dot{\gamma})\dot{\gamma}, \quad (2.19)$$

em que $\dot{\gamma}$ é a taxa de cisalhamento e η agora é função do escoamento. Para este caso η é denominada *viscosidade aparente* do fluido, já que é a razão entre a tensão de cisalhamento e a taxa de cisalhamento. Por outro lado, a *viscosidade efetiva* de um fluido é medida através da vazão deste através de um capilar.

Um dos modelos mais conhecidos que relaciona viscosidade com taxa de cisalhamento é o modelo de Cross:

$$\frac{\eta_o - \eta}{\eta - \eta_\infty} = (K\dot{\gamma})^m, \quad (2.20)$$

em que η_o é o valor da viscosidade para taxas de cisalhamento baixas, η_∞ é o valor da viscosidade para taxas altas, e K e m são constantes.

Para os casos em que $\eta \ll \eta_o$ e $\eta \gg \eta_\infty$, o modelo de Cross se reduz a:

$$\eta = C\dot{\gamma}^{n-1}. \quad (2.21)$$

Substituindo a equação (2.21) na equação (2.19), obtém-se o modelo de lei de potência, ou “*power-law*”:

$$\tau = C\dot{\gamma}^n. \quad (2.22)$$

Considerando $n = 1$ na equação (2.22) temos o caso de comportamento newtoniano recuperado. Quando $n < 1$, o material é classificado com pseudoplástico, e apresenta viscosidade aparente decrescente com a taxa de cisalhamento, ou “*shear-thinning*”. A grande maioria das dispersões, emulsões e soluções poliméricas apresenta esse comportamento. No caso em que $n > 1$, ou seja, a viscosidade apresenta um aumento com o aumento da taxa de cisalhamento, temos os fluidos dilatantes. Esse comportamento de “*shear-thickening*” é encontrado por exemplo em soluções de amido e areia em suspensão.

Inseridos na classificação de fluidos não newtonianos viscosos existem ainda os “plásticos de Bingham”: apresentam uma relação linear entre tensão e taxa de cisalhamento mas com uma tensão de escoamento τ_e que deve ser atingida para que o escoamento inicie. Assim, para esse grupo:

$$\tau = \tau_e + \eta \dot{\gamma}^n, \quad (2.23)$$

em que η é a “viscosidade plástica do fluido”. Pastas de dente, tintas a óleo e lama de perfuração de poços são alguns exemplos de materiais classificados como plásticos de Bingham (ver Vieira, 1971). A figura (2.4) mostra uma comparação entre os distintos comportamentos dos fluidos não-newtonianos viscosos.

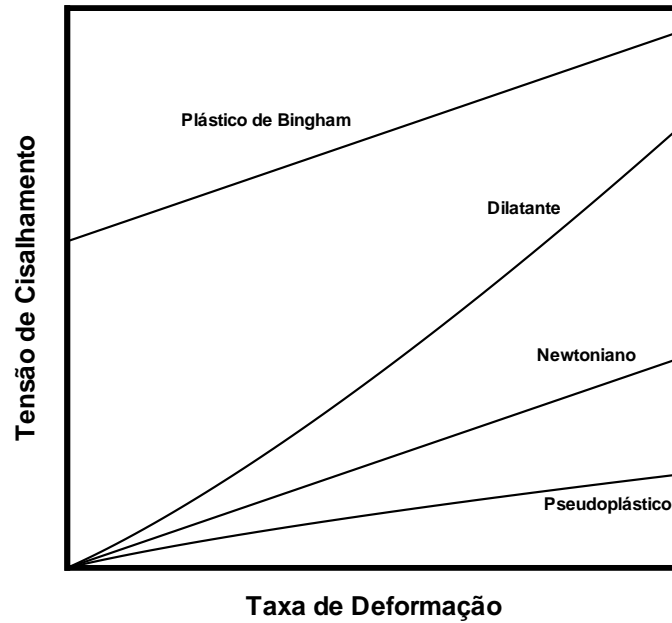


Figura 2.4: Dependência da tensão de cisalhamento com a taxa de deformação para fluidos newtonianos, pseudoplásticos, dilatantes e plásticos de Bingham. A inclinação da curva num ponto é a viscosidade aparente do fluido naquele ponto.

2.1.2.3 Fluidos Viscoelásticos Lineares

Materiais viscoelásticos apresentam comportamento viscoso e elástico simultaneamente. Como exposto anteriormente neste capítulo, nenhum material é um sólido perfeito de Hooke ou um fluido newtoniano perfeito, sendo dependentes do tempo característico do processo a que estão sujeitos. Ou seja, em todo material real existem características viscosas e elásticas (Barnes et. al., 1989).

Os modelos viscoelásticos combinam as leis da viscosidade de Newton e do sólido de Hooke. Um modelo linear simples, proposto por Maxwell em 1867, pode ser caracterizado como um sistema massa-mola com uma mola e um amortecedor em série, mostrado na figura (2.5).

A mola representa a contribuição elástica e o amortecedor a parte viscosa. As taxas de deformação são dadas por:

$$\dot{\gamma}_v = \frac{\tau_v}{\eta} \quad e \quad \dot{\gamma}_e = \frac{\dot{\tau}_e}{G}, \quad (2.24)$$

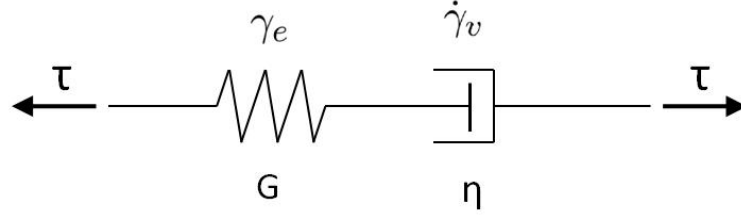


Figura 2.5: Representação do modelo de fluido viscoelástico de Maxwell por meio de um sistema com uma mola e amortecedor.

em que o subíndice v é relativo à parte viscosa e o subíndice e é relativo à parte elástica. A taxa de deformação para a parte elástica é obtida a partir da derivação com relação ao tempo da relação entre tensão e deformação para um sólido. As tensões aplicadas em cada componente são idênticas, iguais a $\tau(t)$, e a taxa de deformação total $\dot{\gamma}$ é dada pela soma das taxas de deformação, ou seja,

$$\dot{\gamma} = \dot{\gamma}_e + \dot{\gamma}_v = \frac{\dot{\tau}}{G} + \frac{\tau}{\eta}. \quad (2.25)$$

Rearranjando:

$$\dot{\tau} + \frac{G}{\eta}\tau = G\dot{\gamma}. \quad (2.26)$$

A razão η/G é denominada tempo de relaxação do fluido elástico, representada aqui por α . Desta maneira, a equação (2.26) é reescrita como:

$$\dot{\tau} + \frac{1}{\alpha}\tau = \frac{\eta}{\alpha}\dot{\gamma}. \quad (2.27)$$

Nota-se que a equação acima tende à equação de Hooke quando $\alpha \gg 1$ e à equação de Newton quando $\alpha \ll 1$, como esperado. A equação (2.27) é uma equação diferencial ordinária linear de ordem 1, podendo ser resolvida pela multiplicação por um fator integrante ψ da seguinte maneira:

$$\psi \dot{\tau} + \psi \frac{1}{\alpha}\tau = \psi \frac{\eta}{\alpha}\dot{\gamma}. \quad (2.28)$$

Fazendo

$$\frac{d}{dt}[\psi\tau] = \psi \dot{\tau} + \psi \frac{1}{\alpha}\tau, \quad (2.29)$$

devemos ter

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{1}{\alpha}\psi \quad \Leftrightarrow \quad \psi = e^{t/\alpha}. \quad (2.30)$$

A substituição de (2.29) em (2.28) leva a

$$\frac{d}{dt}[\psi\tau] = \psi \frac{\eta}{\alpha}\dot{\gamma}. \quad (2.31)$$

Por integração direta tem-se:

$$\tau(t) = e^{-t/\alpha} \int_{-\infty}^t e^{t'/\alpha} \left(\frac{\eta}{\alpha}\right) \dot{\gamma}(t') dt' + C e^{-t/\alpha}, \quad (2.32)$$

em que C é uma constante. Como tensão deve ser finita em $t = -\infty$, essa constante deve ser nula. Com uma mudança de variável na integral pode-se escrever a equação (2.32) como:

$$\tau = \int_{-\infty}^t \left[e^{-\frac{(t-t')}{\alpha}} \right] \left(\frac{\eta}{\alpha}\right) \dot{\gamma}(t') dt'. \quad (2.33)$$

Na equação (2.33) o limite inferior da integral remete ao começo do processo que o fluido está sofrendo. Essa equação mostra que a tensão em um determinado tempo t depende da taxa de deformação nesse instante bem como da taxa de deformação em tempos anteriores a t . Essa dependência com o passado é ponderada com um fator que decai exponencialmente a medida que se caminha para trás no tempo. Isso significa que os fatos recentes são bem mais significativos na determinação do estado do fluido do que os fatos antigos. Esse comportamento é denominado *fading memory* (Cunha, 2009). Portanto, diferentemente do que acontece com fluidos newtonianos e não-newtonianos viscosos, é necessário conhecer a história do fluido para determinar seu estado atual.

Uma generalização do modelo de Maxwell para o caso tridimensional é dada por:

$$\mathbf{\Gamma} + \alpha \dot{\mathbf{\Gamma}} = 2\eta_o \mathbf{D} \quad (2.34)$$

O modelo de Maxwell para fluido viscoelástico é válido apenas para deformações infinitesimais, já que o modelo de Hooke é válido somente nessas condições. Outro modelo linear é o proposto por Kelvin, que difere do modelo de Maxwell ao considerar a mola e o amortecedor em paralelo na representação como sistema massa-mola. Modelos mais complexos consideram a combinação de várias molas e vários amortecedores em diferentes posições.

2.2 ELETROMAGNETISMO

A data do início da observação do magnetismo não é certa, porém o nascimento dessa ciência se deu no século XIX com a clássica experiência do físico dinamarquês Hans Oersted (1771-1851) (Halliday et al, 1980). Ele verificou, em 1820, que ocorre um desvio na agulha de uma bússola quando um fio por onde passa corrente elétrica é posicionado próximo. Assim, Oersted uniu a eletricidade e o magnetismo, criando o eletromagnetismo. A referida ciência engloba os campos elétricos, os campos magnéticos e as ondas eletromagnéticas, além da eletricidade e do magnetismo já citados. Houve, então, um grande desenvolvimento desta disciplina nos anos que se seguiram, com Ampère (1775-1836), que construiu o primeiro eletroímã, Faraday (1791-1867), que descobriu a indução eletromagnética, Lenz (1804-1865) e Gauss (1777-1855) (ver Thidé, 1997). Vale mencionar que as leis físicas do eletromagnetismo levam os nomes desses pioneiros entre outros mais contemporâneos.

O responsável pela unificação das teorias que surgiram e pela criação da base do eletromagnetismo foi Maxwell (1831-1879). Em seu *Tratado sobre Eletricidade e Magnetismo*, Maxwell (1873), desenvolve as quatro equações que posteriormente seriam denominadas *equações de Maxwell*.

2.2.1 Definições

Seja uma partícula com carga q se deslocando no espaço livre com uma velocidade \mathbf{v} . A *indução magnética* \mathbf{B} existente nessa região faz com que atue uma força dada por:

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}. \quad (2.35)$$

A unidade no SI para \mathbf{B} é Ns/Cm , denominada tesla (T). A indução magnética presente em um ponto é resultado da soma de duas contribuições magnéticas, uma devido ao *campo magnético* \mathbf{H} e outra como resultado da *magnetização* \mathbf{M} do material. Assim:

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) , \quad (2.36)$$

em que μ_0 é a constante de permeabilidade no vácuo ou espaço livre com valor de $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} H/m$, e \mathbf{H} e \mathbf{M} têm unidade A/m . Uma unidade convencionalmente utilizada para indução magnética é o gauss (G) e é igual a 10^{-4} T. O campo magnético médio da Terra é de aproximadamente 0.7 G de magnitude (Rosensweig, 1985). Nos laboratórios de magnetismo o que geralmente se mede, com um instrumento chamado *gaussmeter*, é a magnitude do vetor indução. Desta forma, conhecendo-se a magnetização do material, determina-se o campo magnético com a relação

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}. \quad (2.37)$$

A equação (2.36) pode ser reescrita em termos da susceptibilidade χ ou da permeabilidade relativa K_m do fluido, definidas como:

$$K_m = \frac{\mu}{\mu_0} = 1 + \chi, \quad (2.38)$$

em que μ é a permeabilidade do fluido magnético. Assim:

$$\mathbf{M} = (K_m - 1)\mathbf{H} = \chi\mathbf{H} \quad (2.39)$$

e

$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}. \quad (2.40)$$

Para o vácuo $K_m = 1$ e $\chi = 0$, já que não existem dipolos magnéticos para serem alinhados ao campo, o que leva a $\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{H}$. Para materiais paramagnéticos a permeabilidade relativa é ligeiramente maior que 1, enquanto que para materiais diamagnéticos é pouco menor que 1. Para materiais ferromagnéticos a relação entre \mathbf{B} e \mathbf{H} não é linear. Além disso, para determinar a magnetização do material é necessário conhecer

a história magnética do fluido, ou seja, o fluido apresenta memória magnética devido à histerese em sua curva de magnetização. Para fluidos superparamagnéticos diluídos, que são os estudados neste trabalho, não há histerese na curva de magnetização, o que significa que não há memória magnética. No entanto a relação entre os vetores \mathbf{B} e \mathbf{H} é linear apenas para baixos campos magnéticos aplicados, sendo não-linear para campos mais intensos devido ao alinhamento de um número cada vez maior de partículas até que condição de saturação, que é o alinhamento de todas as partículas com o campo, seja alcançada.

No magnetismo, diferentemente do que ocorre na eletricidade, não existe uma carga isolada, ou monopolo magnético, apesar de muitas aplicações serem baseadas nesse conceito abstrato. O conceito fundamental é o *dipolo magnético*. Todo ímã ou material magnético tem dois pólos, o sul e o norte, ou o positivo e o negativo, que não podem ser separados. Se, por exemplo, uma barra magnetizada for cortada ao meio, teremos dois ímãs. Se essas duas barras forem novamente divididas ao meio teremos quatro ímãs, e assim sucessivamente. Mesmo que essas barras continuassem sendo divididas até que fossem alcançadas dimensões atômicas e restassem barras compostas de um único átomo, estas ainda teriam um pólo norte e um pólo sul, cada uma (Kraus e Carver, 1973).

A definição de campo magnético pode ser feita usando a lei de Coulomb. Sejam dois pólos pontuais de intensidades p_s e p'_s separados no vácuo por uma distância \mathbf{r} . A força magnética existente entre eles é dada por:

$$\mathbf{F} = \frac{p_s p'_s \hat{\mathbf{r}}}{4\pi\mu_0 r^2}, \quad (2.41)$$

podendo ser reescrita como:

$$\mathbf{F} = p'_s \mathbf{H}, \quad (2.42)$$

com

$$\mathbf{H} = \frac{p_s \hat{\mathbf{r}}}{4\pi\mu_0 r^2}. \quad (2.43)$$

O campo magnético \mathbf{H} representa a força por unidade de pólo em torno de um pólo teste p_s . A noção de campo simplifica a descrição das condições externas que influenciam o comportamento das estruturas estudadas (Rosensweig, 1985).

A caracterização do dipolo magnético é feita pela grandeza vetorial \mathbf{m} (com unidade Am^2 , no SI), definida como *momento de dipolo magnético*. É importante mencionar que enquanto o momento de dipolo é uma característica de uma partícula em uma suspensão coloidal magnética (i.e. fluido magnético), a magnetização pode ser vista como uma propriedade magnética global ou contínua de um fluido magnético. Seja uma suspensão coloidal magnética estatisticamente homogênea tal que o uso da média volumétrica se justifique pela ergodicidade. Define-se a média volumétrica dos momentos de dipolo como:

$$\langle \mathbf{m} \rangle (\mathbf{x}, t) = \frac{1}{V} \int_V \mathbf{m}(\mathbf{y}, t) dV, \quad (2.44)$$

em que \mathbf{x} é a posição do ponto no contexto do contínuo e \mathbf{y} percorre o interior do volume infinitesimal, no limite do contínuo, em torno deste ponto (ver figura 2.6). V é o volume total de material nesta região e é a soma do volume de fluido base V_f e do volume de partículas magnéticas V_p , resultando em:

$$\langle \mathbf{m} \rangle (\mathbf{x}, t) = \frac{1}{V} \left[\int_{V_f} \mathbf{m}(\mathbf{y}, t) dV_f + \int_{V_p} \mathbf{m}(\mathbf{y}, t) dV_p \right]. \quad (2.45)$$

A contribuição da integral no volume de fluido base se anula já que $\mathbf{m}(\mathbf{y}, t) = \mathbf{0}$ quando \mathbf{y} não está sobre uma partícula. Então resulta:

$$\langle \mathbf{m} \rangle (\mathbf{x}, t) = \frac{1}{V} \int_{V_p} \mathbf{m}(\mathbf{y}, t) dV_p. \quad (2.46)$$

O volume total de partículas V_p é dado por:

$$V_p = \sum_{\alpha=1}^N v^\alpha, \quad (2.47)$$

em que N é o número de partículas e v^α é o volume da partícula α . Seja \mathbf{m}^α o momento de dipolo da partícula α , a integral da equação (2.46) pode ser interpretada em termos discretos como sendo:

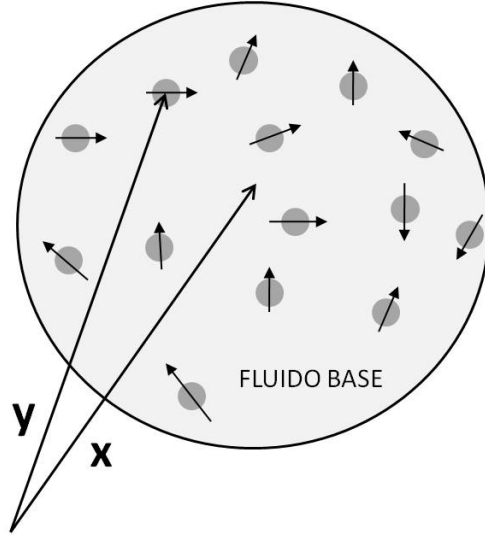


Figura 2.6: Representação de um volume contínuo de uma suspensão coloidal magnética. Os momentos das partículas estão aleatoriamente orientados. \mathbf{x} está fixo e representa um ponto na descrição contínua enquanto \mathbf{y} percorre o interior do volume indicando onde há partícula.

$$\int_{V_p} \mathbf{m}(\mathbf{y}, t) dV_p = \sum_{\alpha=1}^N \mathbf{m}^\alpha v^\alpha. \quad (2.48)$$

Considera-se por simplicidade que o volume de todas as partículas é igual a v . Portanto, a equação (2.46) pode ser reescrita como:

$$\langle \mathbf{m} \rangle (\mathbf{x}, t) = \left(\frac{1}{V} \right) v \sum_{\alpha=1}^N \mathbf{m}^\alpha = v \left(\frac{N}{V} \right) \left(\frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N \mathbf{m}^\alpha \right). \quad (2.49)$$

Mas

$$\bar{\mathbf{m}} = \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N \mathbf{m}^\alpha \quad (2.50)$$

é a média dos momentos de dipolo na direção do campo e

$$n = \frac{N}{V} \quad (2.51)$$

é a concentração de partículas. Assim:

$$\langle \mathbf{m} \rangle = n v \bar{\mathbf{m}} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\langle \mathbf{m} \rangle}{v} = n \bar{\mathbf{m}}. \quad (2.52)$$

Seja definir

$$\mathbf{M} = \frac{\langle \mathbf{m} \rangle}{v}, \quad (2.53)$$

conclui-se, então, que:

$$\mathbf{M} = n\bar{\mathbf{m}}. \quad (2.54)$$

O que demonstra que a magnetização é momento de dipolo magnético por unidade de volume. Fisicamente, \mathbf{M} denota o efeito do estado de polarização do material na presença de um campo magnético (Cunha e Sobral, 2004). Para fluidos magnéticos, em que cada partícula pode ser interpretada como um nanoímã, em primeira análise, a magnetização \mathbf{M} representa o grau de alinhamento dos dipolos com o campo aplicado.

Para calcular a força magnética em um corpo magnetizado, considere a figura (2.7). Nela está representado um pequeno elemento cilíndrico de uma substância magnética polarizada cujo eixo geométrico \mathbf{d} está alinhado com o vetor magnetização \mathbf{M} . Sobre esse elemento atua um campo magnético \mathbf{H}_0 , e pólos de densidade $\rho_s = \mu_0 M$ surgem nas áreas representadas por a_d , com polaridade invertida. Como o campo magnético aplicado pode ser interpretado como força magnética por pólo magnético, a força que atua sobre o elemento é dada por:

$$\mathbf{f}_m = -\mathbf{H}_0 \rho_s a_d + (\mathbf{H}_0 + \delta\mathbf{H}_0) \rho_s a_d = \delta\mathbf{H}_0 \rho_s a_d, \quad (2.55)$$

em que $\delta\mathbf{H}_0$ é a variação de \mathbf{H}_0 na direção de \mathbf{d} . Assim, uma aproximação de primeira ordem para $\delta\mathbf{H}_0$ usando série de Taylor resulta em:

$$\delta\mathbf{H}_0 = \mathbf{H}_0(\mathbf{x} + \mathbf{d}) - \mathbf{H}_0(\mathbf{x}) = (\mathbf{d} \cdot \nabla)\mathbf{H}_0. \quad (2.56)$$

Como \mathbf{d} e \mathbf{M} estão alinhados,

$$\delta\mathbf{H}_0 = \frac{d}{M}(\mathbf{M} \cdot \nabla)\mathbf{H}_0. \quad (2.57)$$

A densidade de força é dada então por:

$$\frac{\mathbf{f}_m}{\delta V} = \frac{\delta\mathbf{H}_0 \rho_s a_d}{da_d} = \frac{\rho_s}{M}(\mathbf{M} \cdot \nabla)\mathbf{H}_0. \quad (2.58)$$

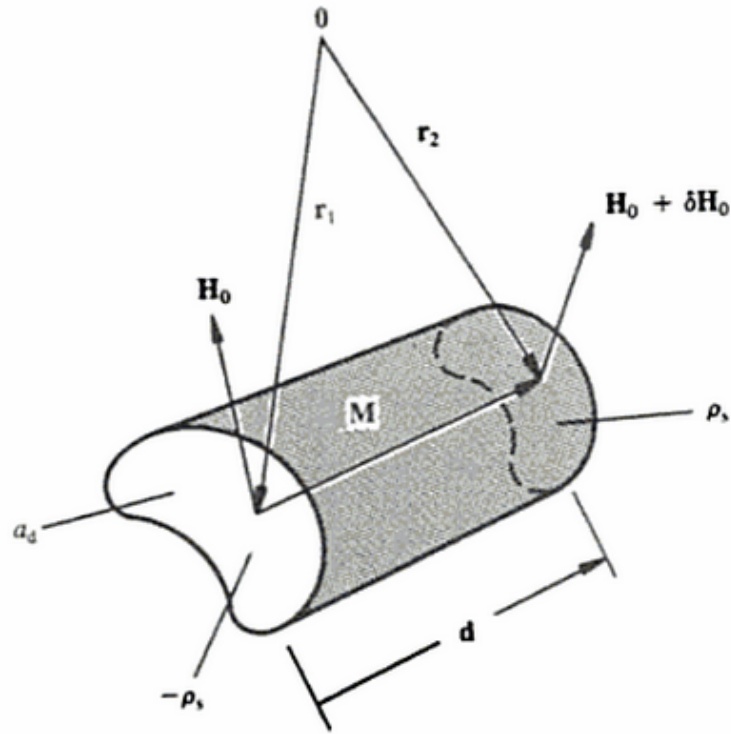


Figura 2.7: Esquema de um gradiente de campo magnético atuando em um pequeno elemento de uma substância magnética polarizada. (Rosensweig, 1985)

Mas $\rho_s/M = \mu_0$, o que leva a:

$$\frac{\mathbf{f}_m}{\delta V} = \mu_0(\mathbf{M} \cdot \nabla)\mathbf{H}_0. \quad (2.59)$$

O torque atuando em um pequeno volume de matéria polarizada magneticamente também pode ser deduzido a partir da figura (2.7). Considerando que não há variações do campo aplicado no espaço, i.e., $\delta\mathbf{H}_0 = \mathbf{0}$, a soma dos momentos em torno da origem é:

$$\delta\mathbf{T} = \rho_s a_d (-\mathbf{r}_1 \times \mathbf{H}_0 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{H}_0), \quad (2.60)$$

em que \mathbf{r}_1 e \mathbf{r}_2 são os vetores posição das faces com relação à origem. Assim:

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 + \mathbf{d} \quad \leftrightarrow \quad \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = \mathbf{d}. \quad (2.61)$$

Substituindo (2.61) em (2.60) e dividindo pelo volume do elemento tem-se a densidade de torque:

$$\frac{\delta \mathbf{T}}{\delta V} = \mu_0 \mathbf{M} \times \mathbf{H}_0. \quad (2.62)$$

Uma consequência dessa última relação é que o torque magnético é nulo para materiais em que a magnetização encontra-se alinhada com o campo aplicado, como ocorre com fluidos superparamagnéticos.

2.2.2 As Equações de Maxwell

São apresentadas e descritas aqui as quatro equações que formam as bases do eletromagnetismo, em suas formas integrais.

2.2.2.1 Lei de Gauss da Eletricidade

A lei de Gauss da eletricidade é formulada como:

$$\iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = q/\epsilon_0, \quad (2.63)$$

em que \mathbf{E} é o campo elétrico, \mathbf{A} é o vetor ortogonal à superfície S , q é a soma de todas as cargas positivas e negativas que estão no interior de S , e ϵ_0 é a constante de permissividade do vácuo, que vale $8,85 \times 10^{-12} C^2/Nm^2$. A superfície S deve ser *gaussiana*, i.e., fechada de maneira que os pontos que estão em seu interior, em sua superfície e em seu exterior sejam claramente distinguidos. A equação (2.63) afirma que a taxa líquida de campo elétrico \mathbf{E} através de S é igual, a menos de uma constante, à soma das cargas que estão no interior dessa superfície.

2.2.2.2 Lei de Gauss do Magnetismo

Esta lei é consequência direta do fato de não haver uma carga magnética isolada, afirmando que o fluxo de indução magnética \mathbf{B} que atravessa uma superfície fechada é nulo, ou seja,

$$\iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = 0, \quad (2.64)$$

que, pelo teorema da divergência, pode ser escrita como

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2.65)$$

mostrando que a indução magnética é um campo solenoidal.

2.2.2.3 Lei de Faraday

Também conhecida como Lei da Indução Eletromagnética, postula que há o surgimento de uma campo elétrico quando há uma variação temporal da taxa de indução magnética, ou seja,

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} \right), \quad (2.66)$$

em que C é qualquer caminho fechado, com vetor tangente \mathbf{s} , que possa ser traçado num campo magnético, e S , que é a superfície delimitada por C , não precisa ser fechada nesse caso.

2.2.2.4 Lei de Ampère-Maxwell

A lei de Ampère-Maxwell é escrita como:

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} \right) + \mu_0 I, \quad (2.67)$$

estabelecendo que o valor da integral de linha de \mathbf{B} é função da variação temporal da taxa de campo elétrico e da corrente que atravessa a curva C na qual a integral de linha é calculada. Essa lei foi primeiramente proposta por Ampère, mas sem o termo de variação temporal, que mais tarde foi introduzido por Maxwell.

A partir da equação (2.67) pode-se encontrar a expressão para o vetor campo magnético (Farias, 2011), apresentada anteriormente na equação (2.36). Considere que a variação temporal da taxa de campo elétrico seja nula (i.e., regime eletrostático

permanente). Quando há a presença de um material ferromagnético com uma magnetização \mathbf{M} , um termo deve ser acrescentado à equação (2.67), assim:

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 I + \oint_C \mu_0 \mathbf{M} \cdot d\mathbf{s} \quad (2.68)$$

que pode ser escrita como:

$$\oint_C \left(\frac{\mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{M}}{\mu_0} \right) \cdot d\mathbf{s} = I. \quad (2.69)$$

Portanto, a lei de Ampère pode ser reescrita para ser incluída a presença de materiais com magnetização da seguinte forma:

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = I. \quad (2.70)$$

Finalmente, utilizando o Teorema de Stokes, tem-se:

$$\iint_S (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{A} = I. \quad (2.71)$$

2.2.2.5 LIMITE MAGNETOSTÁTICO

O foco da ferrohodinâmica é estudar o efeito de um campo magnético sobre um fluido polar. Assim, na ausência de corrente elétrica, considerando-se o campo elétrico em regime permanente e desprezando-se a variação do campo magnético com o tempo, as equações de Maxwell se reduzem a

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad e \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{0}. \quad (2.72)$$

As relações na equação (2.72) definem o *limite magnetostático de Maxwell*. As condições de contorno para esses campos impõe que as componentes normal de \mathbf{B} e tangencial de \mathbf{H} são contínuas ao longo da interface que separa materiais magnéticos com propriedades diferentes.

3 REOMETRIA DE FLUIDOS COMPLEXOS

Neste capítulo são apresentadas as atividades experimentais em reometria realizadas pelo aluno. Esse treinamento com fluidos newtonianos e não-newtonianos possibilitou uma formação inicial do aluno na área de reometria, para que posteriormente sejam feitas análises e medições de fluidos magnéticos em um programa de pós-graduação.

3.1 ESCOAMENTOS REOMÉTRICOS

Nesta seção são apresentados alguns escoamentos cisalhantes que são usados como princípio de funcionamento de instrumentos de medição da viscosidade utilizados neste trabalho.

3.1.1 Cannon-Fenske

O Cannon-Fenske é basicamente um tubo em U disposto na vertical, como mostra a figura (3.1).

De um lado é formado por um tubo capilar e do outro é composto por um tubo de maior diâmetro. A medição da viscosidade é possível a partir do escoamento do fluido pelo tubo capilar entre as marcas 1 e 2 (ver figura 3.1). Esse escoamento ocorre devido à diferença de pressão causada pela altura da coluna de fluido. Assim o ΔP é proporcional à altura da coluna e à aceleração da gravidade:

$$\Delta P = \rho g \Delta h. \quad (3.1)$$

Essa diferença de pressão é igual a soma das pressões perdidas pelo fluido devido a aceleração na entrada do tubo até ser atingido o perfil parabólico e as perdas por atrito ao longo do capilar, desconsiderando as perdas ao longo da parte superior e

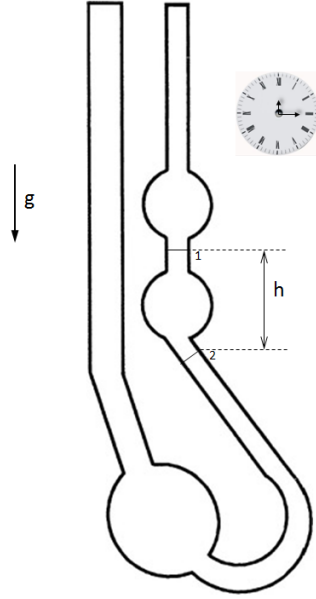


Figura 3.1: Representação do Cannon-Fenske. g representa a aceleração gravitacional local.

considerando regime permanente. A perda por aceleração está associada à variação da energia cinética, assim:

$$\Delta P_1 = \rho U^2, \quad (3.2)$$

em que U é a velocidade média do fluido. Mas:

$$U = \frac{Q}{A} = \frac{4Q}{\pi d^2}, \quad (3.3)$$

em que Q é a vazão volumétrica pela área circular transversal A com diâmetro d . Assim:

$$\Delta P_1 = \rho \frac{16Q^2}{\pi^2 d^4}. \quad (3.4)$$

Considerando-se que Q é medida através do tempo Δt e do volume conhecido V , sendo em regime permanente, tem-se:

$$Q = \frac{V}{\Delta t}, \quad (3.5)$$

resultando em:

$$\Delta P_1 = \frac{V^2}{\Delta t^2} \frac{16\rho}{\pi^2 d^4} \quad (3.6)$$

A outra perda, a por atrito ao longo do tubo, pode ser obtida partindo da equação de Navier-Stokes, equação (2.17). Desmembrando-a em coordenadas cilíndricas, temos:

componente r:

$$\rho \left(u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta^2}{r} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_r}{\partial t} \right) = \rho g_r$$

$$-\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r u_r \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} \right] \quad (3.7)$$

componente θ :

$$\rho \left(u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r u_\theta}{r} + u_z \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{\partial u_\theta}{\partial t} \right) = \rho g_\theta$$

$$-\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r u_\theta \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} \right] \quad (3.8)$$

componente z:

$$\rho \left(u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial t} \right) = \rho g_z$$

$$-\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right]. \quad (3.9)$$

Considerando laminar, axisimétrico e permanente o escoamento dentro do tubo capilar e arranjando o sistema de coordenadas de modo que o eixo do tubo coincida com o eixo z , temos $u_r = u_\theta = 0$ e $u_z = u_z(r)$. Assim as componentes r e θ se anulam e a equação para a componente z se torna:

$$0 = -\frac{\partial P_2}{\partial z} + \mu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \quad (3.10)$$

Desenvolvendo a equação (3.10) obtém-se a equação de Hagen-Poiseuille:

$$Q = \frac{\pi \Delta P_2 D^4}{128 \mu L}. \quad (3.11)$$

Isolando ΔP_2 :

$$\Delta P_2 = Q \frac{128\mu L}{\pi d^4} = \frac{V}{\Delta t} \frac{128\mu L}{\pi d^4}. \quad (3.12)$$

Igualando as pressões, tem-se então:

$$\begin{aligned} \Delta P = \rho g \Delta h &= \Delta P_1 + \Delta P_2 \\ &= \frac{V^2}{\Delta t^2} \frac{16\rho}{\pi^2 d^4} + \frac{V}{\Delta t} \frac{128\mu L}{\pi d^4}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Finalmente, isolando a viscosidade cinemática na Eq. (3.13), temos:

$$\nu = \left(\frac{\pi g \Delta h d^4}{128 L V} \right) \Delta t - \left(\frac{V}{8\pi L} \right) \frac{1}{\Delta t} \quad (3.14)$$

Os termos entre parênteses na Eq. (3.14) são padronizados, dependendo apenas das características geométricas do viscosímetro utilizado. Assim, a Eq. (3.14) pode ser reescrita como:

$$\nu = A \Delta t - \frac{B}{\Delta t}, \quad (3.15)$$

com A e B constantes.

Sendo o experimento executado em um tempo longo ($\Delta t \gg 1$), nessas condições o termo proporcional ao inverso do tempo pode ser desprezado, pois $1/\Delta t$ tende a zero. Assim, a viscosidade cinemática de um fluido newtoniano é encontrada apenas medindo-se o tempo que o fluido leva para escoar em um tubo, a partir da equação:

$$\nu = K \Delta t \quad \text{com} \quad K = \left(\frac{\pi g \Delta h d^4}{128 L V} \right). \quad (3.16)$$

Na equação (3.16) K é uma constante fornecida pelo fabricante do instrumento.

3.1.2 Entre Cilindros Rotativos

Uma maneira de medir a viscosidade de um fluido é utilizar escoamento rotativo do tipo Couette, ou seja, escoamento laminar e unidirecional entre dois cilindros. Trata-se de um esquema como mostrado na figura (3.2). O cilindro externo, de raio R_2 ,

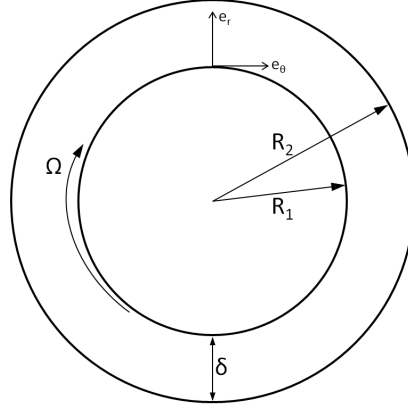


Figura 3.2: Esquema do escoamento entre cilindros. O cilindro maior de raio R_2 permanece fixo enquanto o cilindro menor de raio R_1 gira com velocidade Ω . O fluido ocupa o espaço entre os cilindros δ (aqui exagerado para melhor visualização).

é estacionário enquanto o cilindro interno, de raio R_1 , gira. O fluido ocupa o volume entre os dois cilindros. A diferença entre os raios $\delta = R_2 - R_1$ é desprezível em relação a R_1 . A equação que governa o escoamento entre os cilindros é a já apresentada equação de Navier-Stokes, equação (2.17). As componentes em coordenadas cilíndricas são as equações (3.7), (3.8) e (3.9). Com as condições:

$$u_z = u_r = 0 \quad u_\theta = u_\theta(r) \quad p = p(r) \quad , \quad (3.17)$$

a componente na direção θ é dada por:

$$\frac{d^2 u_\theta}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du_\theta}{dr} - \frac{u_\theta}{r^2} = 0. \quad (3.18)$$

Com as condições de contorno $u(R_1) = \Omega R_1$ e $u(R_2) = 0$, devido à condição de não escorregamento, a solução para a equação (3.18) é:

$$u_\theta(r) = \frac{\Omega R_1^2 R_2^2}{r (R_2^2 - R_1^2)} - \frac{\Omega R_1^2 r}{R_2^2 - R_1^2}. \quad (3.19)$$

A tensão que atua na parede do cilindro interno é dada por:

$$\sigma_{r\theta}(R_1) = \eta \left(\frac{du_\theta}{dr}(R_1) - \frac{u_\theta(R_1)}{r} \right). \quad (3.20)$$

Substituindo a equação (3.19) na equação (3.20) temos:

$$\sigma_{r\theta}(R_1) = -\frac{2\eta\Omega R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}. \quad (3.21)$$

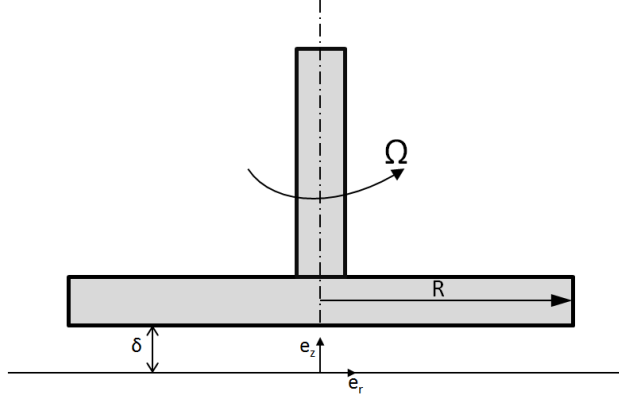


Figura 3.3: Escoamento entre disco e placa plana. O disco de raio R gira sobre a placa plana. O fluido fica entre os dois. A direção θ , não mostrada na figura, é perpendicular à página.

Considerando que o cilindro possui um comprimento L na direção z , a força tangencial exercida pelo fluido no cilindro interno é dada por:

$$F_{\theta} = -\frac{4\eta\pi\Omega LR_1 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \quad (3.22)$$

Com $L = F_{\theta} R_1$, em que L é o torque exercido, e frisando que $\delta \ll 1$, tem-se:

$$L = \frac{2\eta\pi\Omega LR_1^3}{\delta} = C\Omega\eta \quad (3.23)$$

em que $C = \frac{2\pi LR_1^3}{\delta}$ é uma constante que depende somente de fatores geométricos. Assim, para uma dada rotação Ω é medido o torque L , ou seja, a viscosidade é determinada indiretamente pela medição do torque exercido. Mesmo que o fluido estudado não seja newtoniano, pode-se determinar a viscosidade aparente, que é a razão entre a tensão de cisalhamento e a taxa de cisalhamento quando essa razão depende da taxa, desse fluido por esse método, a partir da medição do torque.

3.1.3 Entre Disco Rotativo e Placa Plana

O esquema desse tipo de escoamento é mostrado pela figura (3.3). O cisalhamento da lâmina fluida que está entre o disco e a placa, no espaço δ , ocorre em regime permanente e é causado pela rotação com velocidade Ω do disco. Este possui raio R e seu plano é perpendicular à direção z , que é a direção da aceleração gravitacional local.

Para descrição do escoamento serão utilizadas também coordenadas cilíndricas, como nos casos anteriores. O escoamento é unidirecional, na direção θ , porém agora depende de r e z , ou seja:

$$\mathbf{u} = u_\theta(r, z)\mathbf{e}_\theta. \quad (3.24)$$

Substituindo a equação 3.24 nas equações das componentes cilíndricas da equação de Navier-Stokes, temos:

componente r :

$$-\frac{\rho u_\theta^2}{r} = -\frac{\partial p}{\partial r} \quad (3.25)$$

componente θ :

$$0 = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \eta \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} \quad (3.26)$$

componente z :

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g. \quad (3.27)$$

Integrando a equação 3.25 em relação a r :

$$p = \int \rho \frac{u_\theta^2(r, z)}{r} dr + h(\theta, z) \quad (3.28)$$

e substituindo na equação 3.26, temos:

$$\frac{\partial h}{\partial \theta} = r\eta \left(\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} \right). \quad (3.29)$$

Mas devido a simetria do escoamento, h deve depender apenas de z , o que leva a:

$$\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} = 0. \quad (3.30)$$

As condições de contorno da equação 3.30) são:

$$u_\theta(r, 0) = 0 \quad e \quad u_\theta(r, \delta) = \Omega r, \quad (3.31)$$

devido à condição de não escorregamento. O perfil de velocidade é dado então por:

$$u_\theta(r, z) = \frac{\Omega r z}{\delta}. \quad (3.32)$$

A tensão de cisalhamento no plano perpendicular a \mathbf{e}_z na direção θ é dada por:

$$\sigma_{z\theta}(r, z) = \eta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right). \quad (3.33)$$

Substituindo a equação 3.32 na equação 3.33, obtém-se a expressão para a tensão de cisalhamento na superfície do disco rotativo:

$$\sigma_{z\theta}(r, \delta) = \eta \frac{\Omega r}{\delta}. \quad (3.34)$$

A força exercida no disco é dada pelo produto da tensão de cisalhamento que ali atua pela área do disco, ou seja:

$$dF_\theta = \sigma_{z\theta}(r, \delta) \cdot dA = \eta \frac{\Omega r}{\delta} \cdot 2\pi r dr. \quad (3.35)$$

Como a força varia ao longo de r , a obtenção do torque L sobre o disco é feita por integração ao longo do raio:

$$L = \int_0^R r \cdot dF_\theta \quad (3.36)$$

Substituindo a equação (3.35) em (3.36), temos:

$$L = \int_0^R r \cdot \eta \frac{\Omega r}{\delta} \cdot 2\pi r dr, \quad (3.37)$$

o que resulta em:

$$L = \frac{\eta \pi \Omega R^4}{2\delta} \quad (3.38)$$

A expressão dada pela equação (3.38) ilustra como a viscosidade de um fluido pode ser obtida pela medição do torque atuando em um disco. Apesar de ter sido desenvolvida para fluido newtoniano, é possível medir a viscosidade aparente de qualquer fluido utilizando um instrumento que funcione de acordo com esta configuração. Uma vantagem importante que o escoamento entre disco e placa plana possui é a possibilidade de controle do tamanho do espaço δ , sendo mais uma maneira de se garantir a unidirecionalidade do escoamento.

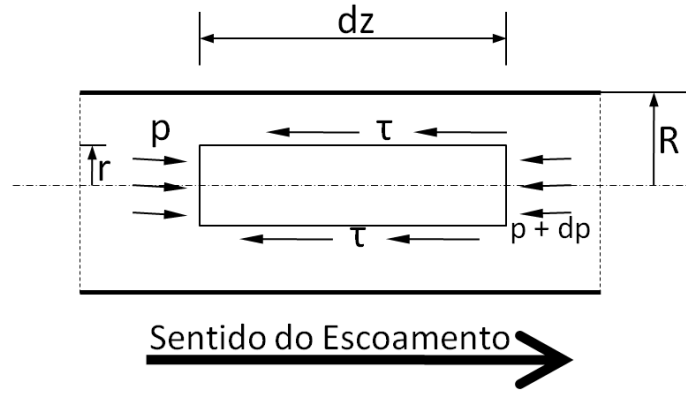


Figura 3.4: Representação do escoamento laminar em um tubo capilar. O sentido do escoamento é para a direita e o tubo possui raio R .

3.1.4 Em Tubo Capilar

Nesta seção é descrito o escoamento laminar em tubos retilíneos de área transversal circular. O fluido escoar em um tubo de raio R , como mostra a figura (3.4). Considerando um balanceamento de forças para um elemento cilíndrico de comprimento dz e raio r , resulta:

$$(2\pi r)\tau dz = -(\pi r^2)dp \quad (3.39)$$

ou:

$$\tau = -\frac{r}{2} \frac{dp}{dz}. \quad (3.40)$$

Na parede do cilindro, com $r = R$, a tensão τ_p é dada por:

$$\tau_p = -\frac{R}{2} \frac{dp}{dz}. \quad (3.41)$$

Assim:

$$\tau = \tau_p \frac{r}{R} \quad (3.42)$$

Para esse escoamento a taxa de cisalhamento é igual à derivada da velocidade na direção radial, ou:

$$\dot{\gamma} = -\frac{du_z}{dr} \quad (3.43)$$

A integral da equação (3.43) resulta:

$$u_z = \int_r^R \dot{\gamma} dr \quad (3.44)$$

A vazão é dada por:

$$\begin{aligned} Q &= \int_0^R (2\pi r) u_z dr = \pi \int_0^R u_z d(r^2) = \\ &\pi \left[u_z r^2 - \int_0^R r^2 du_z \right]_0^R = \pi \int_0^R r^2 \dot{\gamma} dr. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Já que $u_z(r = R) = 0$ devido à condição de não escorregamento. Da equação (3.42),

$$r = \frac{R\tau}{\tau_p} \quad (3.46)$$

e substituindo em (3.45):

$$Q = \frac{\pi R^3}{\tau_p^3} \int_0^{-\tau_p} \tau^2 \dot{\gamma} d\tau. \quad (3.47)$$

Para fluido newtoniano:

$$\dot{\gamma} = \frac{\tau}{\eta}, \quad (3.48)$$

que resulta em:

$$Q = \frac{\pi R^3}{\tau_p^3} \int_0^{-\tau_p} \tau^3 d\tau = \frac{\pi R^4}{8\eta} \frac{dp}{dz}, \quad (3.49)$$

que é a lei de Hagen-Poiseuille, como esperado. Para um fluido não-newtoniano viscoso, a partir da equação (2.22), temos:

$$\dot{\gamma} = \left(\frac{\tau}{C} \right)^{\frac{1}{n}}. \quad (3.50)$$

Substituindo em (3.47):

$$Q = \frac{\pi R^3}{\tau_p^3} \int_0^{-\tau_p} \tau^2 \left(\frac{\tau}{C} \right)^{\frac{1}{n}} d\tau. \quad (3.51)$$

Resolvendo e substituindo τ_p , resulta:

$$Q = \frac{\pi R^3}{C^{1/n}} \left(\frac{n}{3n+1} \right) \left(\frac{\tau_p^n}{\tau_p^3} \right). \quad (3.52)$$

Assim, a vazão para um fluido não-newtoniano viscoso em escoamento laminar em um tubo é dada por:

$$Q = \frac{\pi n R^3}{3n+1} \left(\frac{R}{2C} \frac{dp}{dz} \right)^{\frac{1}{n}}. \quad (3.53)$$

Portanto, conhecendo-se o gradiente de pressão e a vazão determina-se as constantes do fluido. Para fluidos não-newtonianos generalizados, em que a relação entre τ e $\dot{\gamma}$ é geralmente desconhecida, deriva-se a equação (3.47):

$$\dot{\gamma}_p = \frac{1}{\tau_p^2} \frac{d}{d\tau_p} \left(\frac{\tau_p^3 Q}{\pi R^3} \right). \quad (3.54)$$

Finalmente, substituindo a relação obtida para τ_p na equação (3.41), tem-se:

$$\dot{\gamma}_p = \frac{Q}{\pi R^3} \left(3 + \frac{d \ln |Q|}{d \ln |\Delta P|} \right). \quad (3.55)$$

em que ΔP é a variação de pressão. Com a equação (3.55) e a relação

$$\eta_p = \frac{\tau_p}{\dot{\gamma}_p} \quad (3.56)$$

determina-se a viscosidade na parede do fluido em escoamento.

3.2 METODOLOGIA E APARATO EXPERIMENTAL

Nesta seção são apresentados e descritos os instrumentos reométricos utilizados.

3.2.1 Cannon-Fenske

Os viscosímetros do tipo cannon-fenske utilizados são da marca Induchem Lab Glass CO (figura 3.5), adquiridos pelo Laboratório de Microhidrodinâmica e Reologia do



Figura 3.5: Viscosímetros do tipo Cannon-Fenske da marca Induchem Lab Glass CO. (Laboratório do Vortex - ENM - UnB)

VORTEX (Grupo de Mecânica dos Fluidos de Escoamentos Complexos do Departamento de Engenharia Mecânica da Universidade de Brasília). A classificação dos viscosímetros varia de 25 a 600, cada um contendo uma constante K (ver equação 3.16) específica e um intervalo onde deve estar contida a viscosidade cinemática do fluido em questão. A tabela 3.1 explicita esses valores.

Para medir a viscosidade em diferentes temperaturas, o cannon-fenske é mergulhado em um banho térmico, modelo CT-2000 da marca Cannon (figura 3.6). Esse banho, tem como princípio de funcionamento o efeito joule e possui resolução de temperatura de $0,001^{\circ}\text{C}$ permitindo temperaturas de até 60°C (com água). Antes de cada experimento é feita a calibração do equipamento a partir de um termômetro de mercúrio previamente calibrado que fica imerso na água do banho. Já a temperatura ambiente, externa ao banho, é controlada rigorosamente por meio de um aparelho ar condicionado da marca Komeco. A temperatura é mantida em 25°C , confirmada por termômetros digitais distribuídos pelo laboratório.

Como o cannon-fenske fornece a viscosidade cinemática, é necessário o conhecimento da massa específica do fluido para determinar sua viscosidade dinâmica. Isso é feito utilizando o densímetro DM38 da marca Anton Paar (figura 3.7), que tem

Tabela 3.1: Classificação dos Viscosímetros

Número	Constante K (centistokes/segundo)	Variação da Viscosidade (centistokes)
25	0.002	0.5 a 2
50	0.004	0.8 a 4
75	0.008	1.6 a 8
100	0.015	3 a 15
150	0.035	7 a 35
200	0.1	20 a 100
300	0.25	50 a 250
350	0.5	100 a 500
400	1.2	240 a 1200
450	2.5	500 a 2500
500	8	1600 a 8000
600	20	4000 a 20000

como princípio de funcionamento o tubo em U na horizontal. São necessários apenas 2 ml de amostra do fluido para obter sua massa específica. Este aparelho possui resolução de 0,001 g/cm³. Para medir o tempo que o fluido leva para escoar é utilizado um cronômetro modelo SW2018 da marca Cronobio com resolução de centésimo de segundo.

Os viscosímetros são colocados no banho térmico a base de água. Então é escolhida a temperatura do banho e são aguardados 15 minutos para que o fluido no interior do viscosímetro atinja o equilíbrio térmico com a água do banho. É cronometrado o tempo que o fluido leva para escoar pelo tubo capilar. Esse tempo, em segundos, é então multiplicado pela constante K . O valor obtido é a viscosidade cinemática do fluido que, multiplicada pela massa específica do mesmo, resulta na viscosidade dinâmica.



Figura 3.6: Banho térmico CT-200 Cannon, que funciona com uma resistência elétrica. Possui resolução de $0,001^{\circ}\text{C}$ (Laboratório do Vortex - ENM - UnB)



Figura 3.7: Densímetro DM38 da marca Anton Paar que funciona baseado no princípio de tubo em U. É necessária uma amostra de 2 ml do fluido. (Laboratório do Vortex - ENM - UnB)

3.2.2 Viscosímetro de Cilindros Concêntricos

Este instrumento (referido apenas como viscosímetro ao longo do texto), modelo Programmable DV-II + Viscosimeter da marca Brookfield, tem como princípio de funcionamento o escoamento rotativo de Couette entre cilindros concêntricos, descrito na seção 2.2. O cilindro interno, com raio $R_1 = 17,48mm$, gira a uma velocidade angular Ω constante e o externo, com raio $R_2 = 19mm$, permanece fixo. A viscosidade é obtida através da medição do torque resistivo T . O viscosímetro pode ser visto na figura (3.8).



Figura 3.8: Viscosímetro Brookfield de cilindros concêntricos utilizado nos experimentos. (Laboratório do Vortex - ENM - UnB)

A programação do experimento e a aquisição dos dados é realizada por meio de um computador conectado ao viscosímetro. O programa DvDLoader é usado para informar ao viscosímetro as características do experimento a ser realizado, como velocidade angular, duração e intervalo entre as medições desejado. O WinGather é o programa responsável pela aquisição dos dados, registrando-os em um arquivo texto de saída, com a rotação (rpm), porcentagem de torque máximo, a viscosidade (cP), a tensão de cisalhamento na parede do cilindro rotativo (Pa), a taxa de cisalhamento (s^{-1}) e o intervalo de tempo entre as tomadas de dados (s).

O erro instrumental associado à medição da viscosidade por esse viscosímetro é dado pelo “Spindle Factor”, definido como $SP = 30/n$, em que n é a rotação em rpm



Figura 3.9: A bancada com o viscosímetro, o banho térmico e o sistema de bombeamento de água do banho para a cavidade do viscosímetro, permitindo assim um controle rígido da temperatura do fluido ensaiado. (Laboratório do Vortex - ENM - UnB)

do cilindro interno. Mas esse erro é garantido pela fabricante Brookfield desde que o fluido ensaiado apresente uma viscosidade dentro da faixa de $10SP < \eta < 100SP$. Com esse cuidado garante-se que o fluido ensaiado não ultrapasse o limite de $100SP$, o que poderia causar danos ao transdutor do torque do equipamento.

Para medir a viscosidade em diferentes temperaturas foi usado o banho térmico descrito na seção anterior. O cilindro externo está acoplado a uma cavidade externa dentro da qual circula a água, com temperatura controlada, vinda do banho por um sistema de bombeamento projetado no laboratório. É garantido assim que a temperatura da cavidade externa e, conseqüentemente, a temperatura do fluido estejam o mais próximo possível da temperatura desejada. Como a bomba utilizada por esse sistema produz uma vibração, o viscosímetro opera sobre uma bancada separada feita de um material absorvedor de vibrações (uma espuma de alta densidade). A figura (3.9) mostra a configuração de toda a estrutura do viscosímetro e a figura (3.10) mostra em detalhe os cilindros interno e externo.

Para todos os experimentos foi utilizado um volume de 7,5 ml do fluido a ser estudado, já que a recomendação do fabricante é de que esse volume seja de 7 a 8 ml. Antes de cada experimento é feita a zeragem do spindle, para garantir a precisão da medição, e é aguardado um tempo de 15 minutos para que o fluido entre em equilíbrio térmico com a cavidade externa. Além disso, um tempo de espera é necessário após

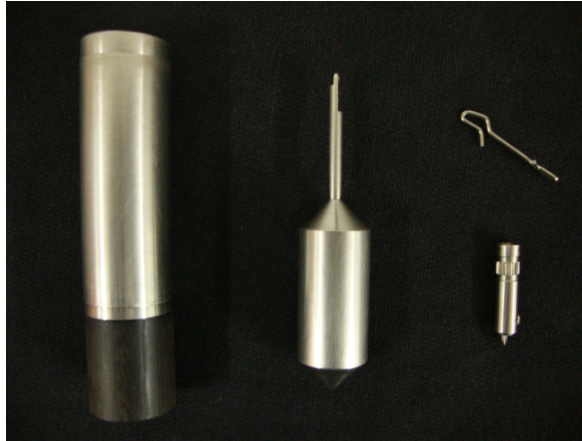


Figura 3.10: Componentes do viscosímetro: cilindro externo, cilindro interno e peças para conectar o cilindro interno ao motor, permitindo que aquele gire. (Laboratório do Vortex - ENM - UnB)

o início do experimento para garantir que o escoamento entre em regime permanente, tempo esse que varia de acordo com o fluido e com a rotação.

3.2.3 Reômetro

O reômetro modelo MCR 301 da marca Anton Paar, recentemente adquirido pelo VORTEX (ver figura 3.11), tem como princípio de funcionamento o escoamento entre disco rotativo (com diâmetro de 50 mm) e placa plana, decrito na seção (3.3). Um equipamento moderno que possibilita uma precisa caracterização reológica de uma ampla gama de fluidos complexos, inclusive fluidos com fortes características viscoelásticas. O torque máximo permitido é de 200 mNm, e ainda é possível realizar cisalhamento oscilatório e medições da variação da tensão normal.

Para seu funcionamento o reômetro necessita de ar comprimido para realizar a lubrificação em seu mecanismo de rotação, tornando desprezível o atrito entre o mancal e o eixo do motor. O sistema de compressão é composto por um compressor médico odontológico modelo MSV 6 da marca Shulz. Esse compressor fornece ar a uma pressão média de 6 bar ao reômetro. Para garantir que a pureza e a umidade do ar fornecido estejam de acordo com o exigido pelo fabricante é utilizado um conjunto de filtros da marca Beko Clearpoint.



Figura 3.11: Reômetro MCR 301 da marca Anton Paar, que funciona baseado no princípio de escoamento entre disco rotativo e placa plana. (Laboratório do Vortex - ENM - UnB)

O controle da temperatura do fluido na medição é feito deixando toda a placa com a temperatura desejada, por meio de um sistema Peltier em conjunto a um banho térmico da marca Lauda. A programação do experimento é feita pelo *software* Rheoplus, que permite a escolha prévia de variáveis como o tamanho do espaço δ e a rotação, além de poder escolher entre escoamento a taxa de cisalhamento constante, variável, oscilatória, dentre outras. O reômetro também é apoiado sobre bancada rígida, para evitar que vibrações indesejadas afetem os resultados. As figuras (3.12) e (3.13) mostram os componentes auxiliares do reômetro.

Para medir a viscosidade no reômetro com a influência de campos magnéticos é acoplado ao mesmo um dispositivo magnetoreológico, também da marca Anton Paar, modelo MRD 70/1T. Esse equipamento gera campos induzidos da ordem de 1 *tesla*. Um outro disco rotativo, com 20 *mm* de diâmetro, deve ser acoplado no lugar do original, de 50 *mm*. A cavidade onde se encontra a amostra é isolada por uma cápsula de blindagem magnética, para que a temperatura seja mantida homogênea.



Figura 3.12: Equipamento da marca Lauda responsável pelo controle da temperatura do fluido em estudo. O funcionamento é baseado no efeito Peltier. (Laboratório do Vortex - ENM - UnB)



Figura 3.13: Filtro da marca Beko Clearpoint responsável pelo tratamento do ar que sai do compressor e vai até o reômetro. (Laboratório do Vortex - ENM - UnB)

A programação do experimento com campo magnético também é feita pelo Rheo-plus, impondo como variáveis de entrada o tempo de experimento, o tempo entre as tomadas de dados, a taxa de cisalhamento e a intensidade do campo magnético gerado, dentre outras. Após cada uso do equipamento com campo magnético atuando deve ser feita uma desmagnetização do aparato, para evitar que haja interferência em experimentos posteriores.

3.2.4 Tubo Capilar

A bancada de estudos de escoamentos quadráticos é apresentada na figura (3.14), constituída por um tubo capilar, uma seringa acoplada a uma bomba, um manômetro digital e um transdutor. O fluido é colocado na seringa que é impelida pela bomba, fazendo com que o fluido escoe pelo capilar. Esses capilares possuem comprimento de 15 *cm* e diâmetro externo de 3 *mm*. Os diâmetros internos disponíveis no laboratório variam entre 5 μm e 1 *mm*, possibilitando uma ampla gama de experimentos. O controle da vazão é feito na bomba, sendo a vazão máxima de 36 *ml/min* e a mínima de 1,426 $\mu\text{l/h}$.

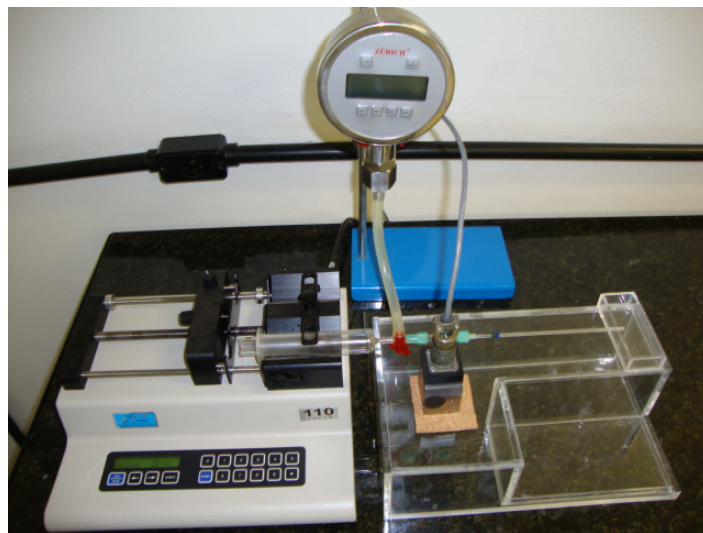


Figura 3.14: Bancada para estudo de escoamentos com taxa de cisalhamento quadrática. Uma bomba acoplada a uma seringa, um tubo capilar, um manômetro digital e um transdutor coletor de dados compõe esse aparato. (Laboratório do Vortex - ENM - UnB)

A aquisição de dados é feita por um transdutor de pressão ligado a uma placa conectada diretamente a um computador. Esse transdutor possui uma membrana

elástica que responde a variações de pressão. Assim é possível obter a pressão em função da vazão para um escoamento, podendo comparar essa dependência com a lei de Poiseuille. Mas antes de obter resultados válidos é necessária uma calibração do transdutor, que é feita com a comparação dos resultados fornecidos por este com os fornecidos por um manômetro digital. Feita a calibração, os resultados encontrados são lidos e armazenados por um *software*.

3.3 RESULTADOS

Nesta seção são apresentados e discutidos os resultados obtidos com medições experimentais de reometria.

O comportamento da viscosidade de um óleo de soja comercial (com massa específica de $0,918 \pm 0,001 \text{ g/cm}^3$, a 25°C) é mostrado nas figuras (3.15) e (3.16). A (3.15) mostra a viscosidade em função da taxa de cisalhamento obtida no viscosímetro. A viscosidade é adimensionalizada por $\eta^* = 42,3 \text{ cP}$ e a taxa de cisalhamento por $\dot{\gamma}^* = 66 \text{ s}^{-1}$. O erro apresentado é o erro instrumental indicado pelo fabricante, já que este foi maior que o erro experimental obtido pelas medições. O erro instrumental diminui com o aumento da taxa de cisalhamento porque aumenta também a rotação n em *rpm*. Como o erro instrumental dado pelo fabricante é de $30/n$, conforme explicado na seção *Viscosímetro de Cilindros Concêntricos*, o erro diminui com o aumento da velocidade de rotação. A (3.16) mostra a viscosidade desse óleo em função da temperatura. São apresentados os resultados obtidos utilizando o cannon-fenske e o viscosímetro. As curvas traçadas são ajustes da Lei de Arrhenius (seção 2.2.1), que adimensionalizada se torna:

$$\frac{\eta}{\eta^*} = C_1 e^{C_2/\tilde{T}}, \quad (3.57)$$

em que C_1 e C_2 são constantes e \tilde{T} é a razão adimensional T/T^* . Na figura (3.16), $\eta^* = 42,4 \text{ cP}$ e $T^* = 50^\circ\text{C}$. Para o cannon-fenske as constantes encontradas foram $C_1 = 0,14$ e $C_2 = 1,21$. Para o viscosímetro $C_1 = 0,19$ e $C_2 = 0,98$. O erro associado à medição com o viscosímetro é instrumental. O óleo de soja apresentou um

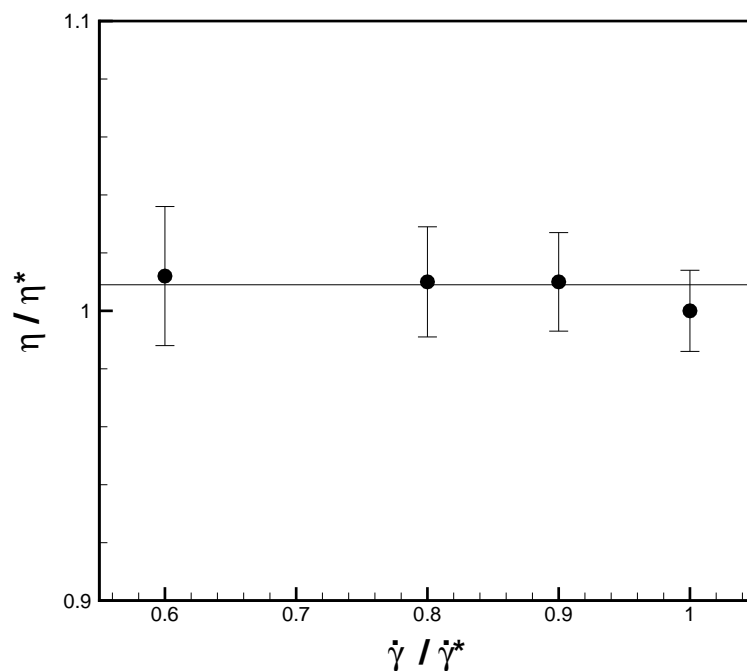


Figura 3.15: Viscosidade do óleo de soja em função da taxa de cisalhamento obtida no viscosímetro para temperatura constante de 30°C. • representa o dado experimental com sua respectiva barra de erro e a — é a média dos dados.

comportamento puramente newtoniano, como mostram as figuras, não apresentando variação da viscosidade com a taxa de cisalhamento e obedecendo à lei de Arrhenius.

Foi analisado também o comportamento de um óleo mineral (vaselina líquida) em função da taxa de cisalhamento e da temperatura. Esse óleo, que apresentou uma massa específica de $0,868 \pm 0,001 \text{ g/cm}^3$ a 25°C, tem sua viscosidade mostrada nas figuras (3.17) e (3.18). Na figura (3.17) a viscosidade, medida no viscosímetro, é adimensionalizada por $\eta^* = 95,5 \text{ cP}$ e a taxa de cisalhamento por $\dot{\gamma}^* = 33 \text{ s}^{-1}$. A figura (3.18) mostra a dependência com a temperatura. Nessa figura $\eta^* = 95,5 \text{ cP}$ e $T^* = 50^\circ\text{C}$. As curvas são ajustes adimensionais da lei de Arrhenius dos dados obtidos com cada instrumento. Para o cannon-fenske $C_1 = 0,14$ e $C_2 = 1,32$ e para o viscosímetro $C_1 = 0,11$ e $C_2 = 1,39$, de acordo com a equação (3.57). O comportamento desse óleo também é newtoniano, apresentando uma viscosidade dinâmica de 95,5 cP a 25°C.

Em seguida foi investigado o comportamento de uma emulsão água/óleo com 70% de água. Essa emulsão, produzida no próprio laboratório pelo aluno de doutorado Nuno Dias, possui gotas de água em óleo. A figura (3.19) mostra a viscosidade dessa

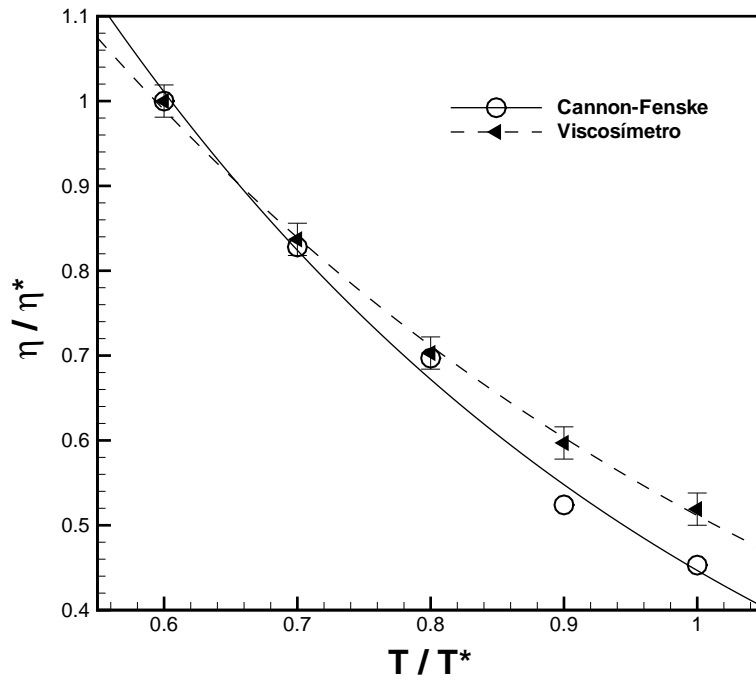


Figura 3.16: Comparação entre as viscosidades obtidas no cannon-fenske e no viscosímetro para o óleo de soja em função da temperatura. As linhas representam o ajuste da lei de Arrhenius.

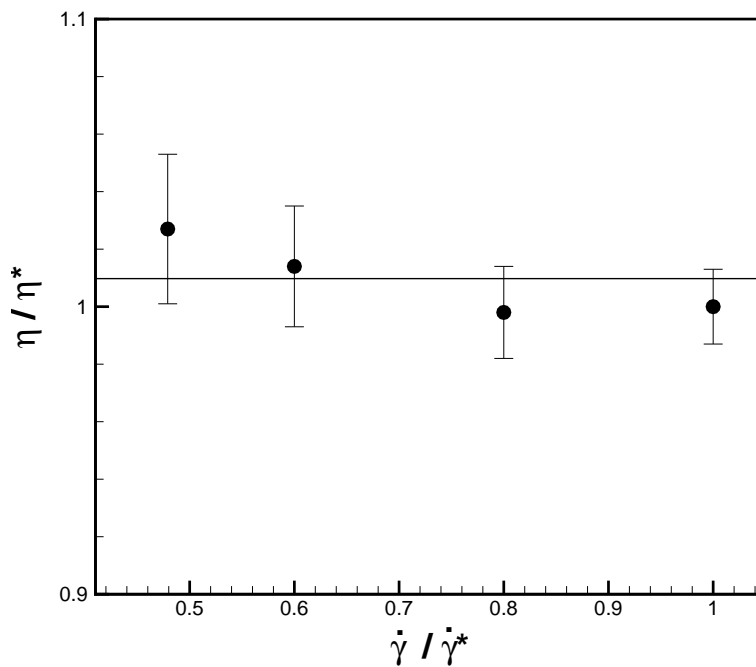


Figura 3.17: Viscosidade do óleo mineral em função da taxa de cisalhamento obtida no viscosímetro para temperatura constante de 30°C. • representa o dado experimental com sua respectiva barra de erro e a — é a média dos dados.

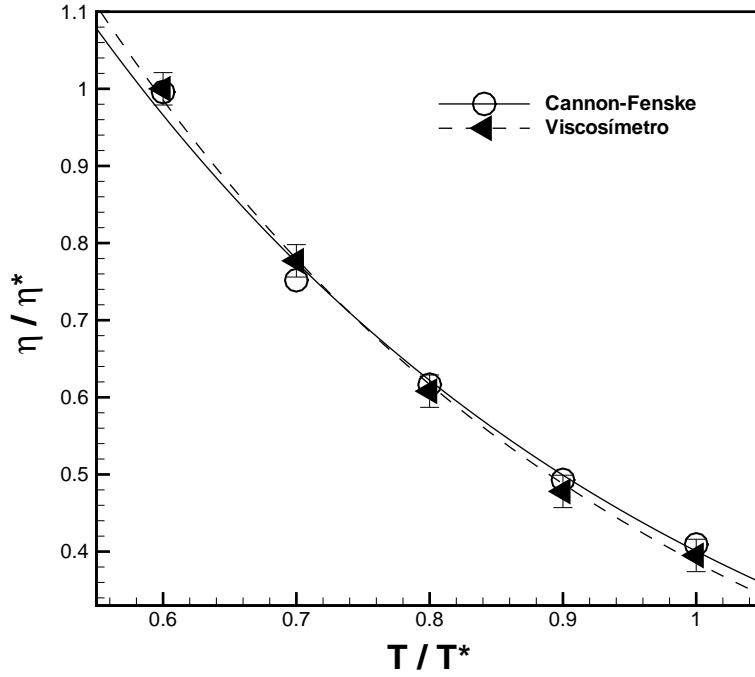


Figura 3.18: Comparação entre as viscosidades obtidas no cannon-fenske e no viscosímetro para o óleo mineral em função da temperatura. As linhas representam o ajuste da lei de Arrhenius.

emulsão em função do tempo para uma taxa de cisalhamento constante de 100 s^{-1} . Nessa figura, $\eta^* = 0,709 \text{ Pa.s}$ e $t^* = 250 \text{ s}$. A figura (3.20) mostra a viscosidade dessa emulsão em função da taxa de cisalhamento, em que $\eta^* = 1,12 \text{ Pa.s}$ e $\dot{\gamma}^* = 7,18 \text{ s}^{-1}$. A curva mostrada é um ajuste da lei de potência para fluido não newtoniano viscoso (ver seção 2.2.2), que adimensionalizada se torna:

$$\frac{\eta}{\eta^*} = C_1 \left(\frac{\dot{\gamma}}{\dot{\gamma}^*} \right)^{C_2}, \quad (3.58)$$

em que $C_1 = 5,96 \cdot 10^{-2}$ e $C_2 = -0,708$, para esse caso. O encarte apresenta os mesmos dados em um gráfico com as coordenadas em escala logarítmica. Esses resultados mostram que a emulsão não apresentou tixotropia e que sua viscosidade se comporta de acordo com a lei de potência da equação (2.21). O valor da constante “n” encontrado é de 0,292, mostrando que esse fluido apresenta viscosidade decrescente com a taxa de cisalhamento, ou “shear-thinning”.

As figuras (3.21), (3.22) e (3.23) mostram o comportamento de uma solução de poliacrilamida. Trata-se de um polímero de acrilamida ($\text{CH}_2\text{CHCONH}_2^-$) diluído em água. Foi utilizada uma solução com fração volumétrica desconhecida ϕ_i de macro-

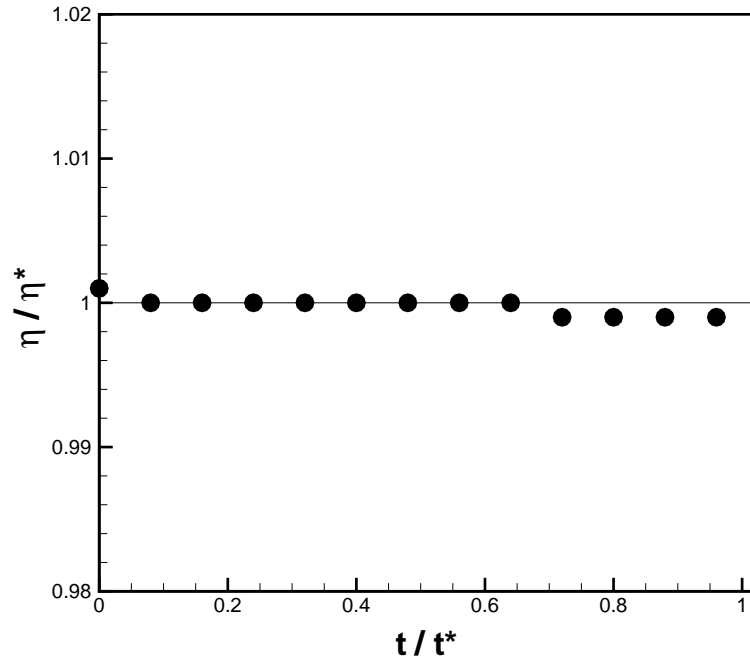


Figura 3.19: Viscosidade de uma emulsão água/óleo com 70% de água em função do tempo adimensional para uma taxa de cisalhamento constante de 100 s^{-1} .

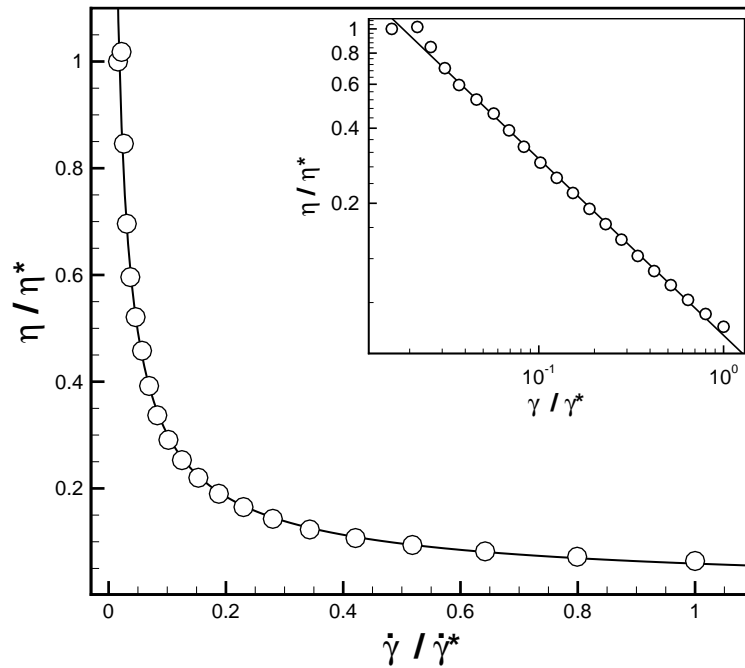


Figura 3.20: Comportamento de uma emulsão água/óleo com 70% de água em função da taxa de cisalhamento. \circ representa o dado experimental e — representa o ajuste da lei de Potência. No encarte os eixos estão em escala logarítmica.

moléculas, com:

$$\phi_i = \frac{V_p}{V_s}, \quad (3.59)$$

em que V_p é o volume ocupado pelas moléculas de poliacrilamida e V_s é o volume da solução. Essa solução foi diluída em água. A razão entre o volume dessa solução e volume total de água e solução ϕ' é conhecida e dada por:

$$\phi' = \frac{V_s}{V_T}, \quad (3.60)$$

em que V_T é o volume total (solução mais água). O que interessa é a fração volumétrica absoluta ϕ , que é dada por:

$$\phi = \frac{V_p}{V_T} = \frac{\phi_i V_s}{V_s} \phi' = \phi' \phi_i. \quad (3.61)$$

A fração volumétrica medida ϕ' é então uma razão entre a fração volumétrica absoluta ϕ e a inicial da solução ϕ_i , e é no máximo igual à unidade. A figura (3.21) apresenta a viscosidade dessa solução em função da taxa de cisalhamento, que varia de 1 s^{-1} a 100 s^{-1} , para vários ϕ' , sendo os dados superiores com $\phi' = 1$, os inferiores com $\phi' = 0,02$ e os intermediários com ϕ' de $0,05$, $0,1$ e $0,5$. O gráfico da figura é apresentado com os eixos em escala logarítmica. As curvas são ajustes da lei de potência, dada na equação (2.21). Para $\phi' = 0,02$ a equação de ajuste é:

$$\eta = 0,08\dot{\gamma}^{-0,56} \quad (3.62)$$

e para $\phi' = 1$, a equação ajustada é:

$$\eta = 8,93\dot{\gamma}^{-0,7} \quad (3.63)$$

Assim, o coeficiente n não varia muito, apesar de ϕ' ser 50 vezes maior para o segundo caso. Esse fluido apresenta também um comportamento evidente de “shear-thinning”.

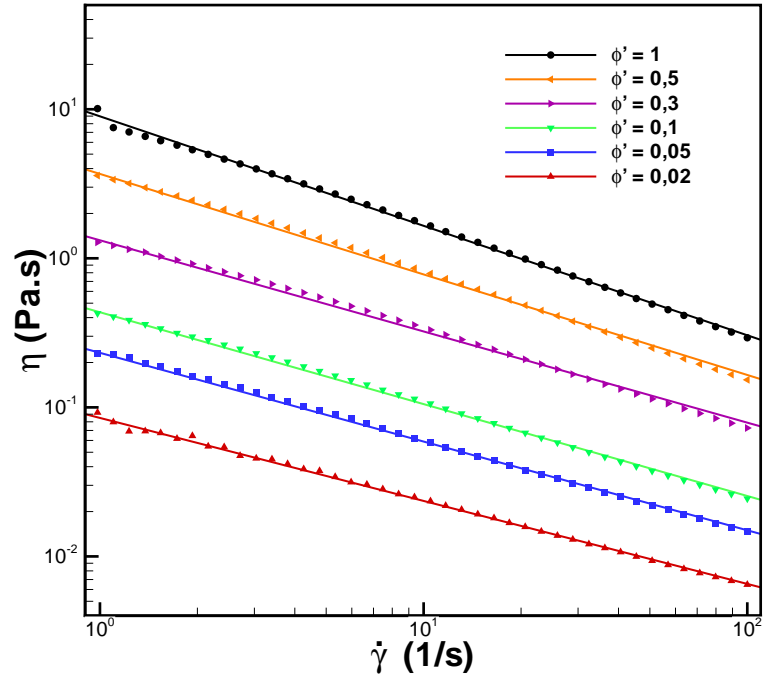


Figura 3.21: Viscosidade da solução de poliacrilamida em função da taxa de cisalhamento para várias concentrações. Os eixos estão em escala logarítmica e as curvas representam ajustes da lei de potência para cada concentração.

A figura (3.22) mostra a variação da viscosidade da solução para várias concentrações com uma taxa de cisalhamento de $1,1 \text{ s}^{-1}$, em que $\eta^* = 7,53 \text{ Pa.s}$. Com $\phi' = 0$ a solução é apenas água destilada, com viscosidade de $0,998 \pm 0,001 \text{ cP}$, ou $0,001 \text{ Pa.s}$, aproximadamente. A curva é um ajuste da lei deduzida por Einstein para distribuições polidispersas de partículas rígidas homogeneamente distribuídas em um fluido base Newtoniano e o encarte mostra o detalhe para baixas concentrações. Segundo essa lei a viscosidade efetiva da solução é função linear da concentração volumétrica de partículas, ou seja:

$$\frac{\eta}{\eta^*} = 1 + C\phi' . \quad (3.64)$$

No presente caso, ϕ é substituído pela razão ϕ/ϕ_i , que é ϕ' , e os valores das constantes η^* e C são $0,001 \text{ Pa.s}$ e 545 , respectivamente. A solução de poliacrilamida, apesar de não ser composta por partículas rígidas, obedeceu essa lei em concentrações baixas pois as moléculas não haviam ainda sido estiradas, já que estavam submetidas a uma taxa de cisalhamento baixa ($1,1 \text{ s}^{-1}$). Em concentrações maiores a lei não condiz com os dados experimentais pois aparecem interações entre as moléculas, sendo necessária a adição de termos de ordem ϕ^2 e/ou maiores para uma descrição física do problema.

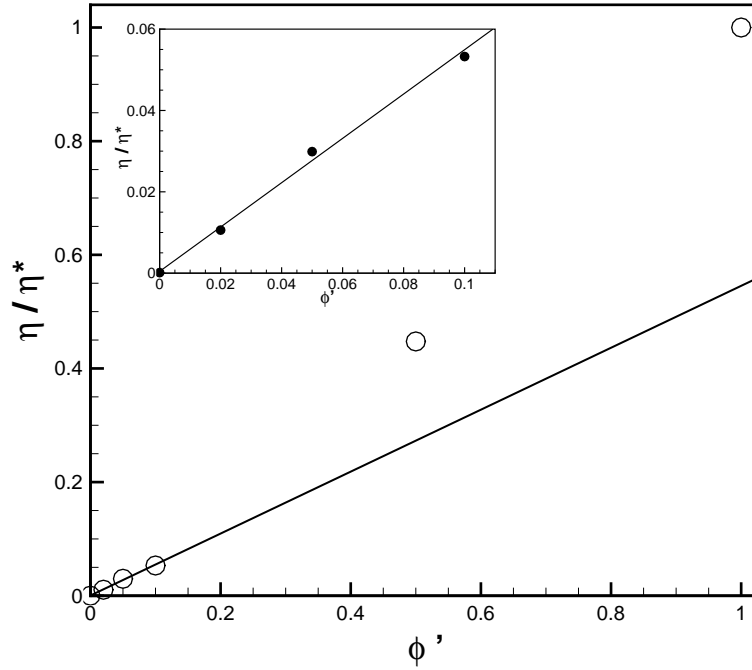


Figura 3.22: Viscosidade da solução de poliacrilamida em função da concentração para $\dot{\gamma} = 1,1 \text{ s}^{-1}$ e $T = 25^\circ\text{C}$. A curva é um ajuste da equação de Einstein para distribuições polidispersas. No encarte o detalhe para baixas concentrações.

A figura (3.23) mostra a viscosidade em função da temperatura para a solução de poliacrilamida com concentração e taxa de cisalhamento constantes, de $0,5$ e 10 s^{-1} , respectivamente. O eixo das ordenadas está em escala logarítmica e a curva apresentada é uma exponencial com equação:

$$\frac{\eta}{\eta^*} = 1,24 e^{-0,42 T/T^*}, \quad (3.65)$$

em que $T^* = 50^\circ\text{C}$ e $\eta^* = 0,709 \text{ Pa.s}$. Assim, a solução de poliacrilamida apresenta uma redução da viscosidade com o aumento da temperatura, como ocorre em fluidos newtonianos, no entanto esse decaimento não obedece à lei de Arrhenius.

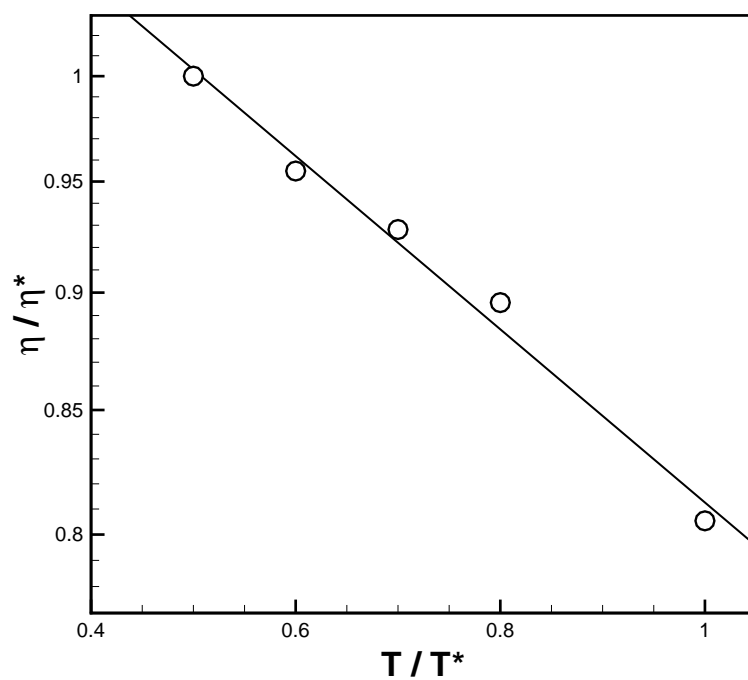


Figura 3.23: Comportamento da viscosidade de uma solução de poliacrilamida com $\phi' = 0,5$ e $\dot{\gamma} = 10 \text{ s}^{-1}$ em função da temperatura. A viscosidade é adimensionalizada por $\eta^* = 0,709 \text{ cP}$ e a temperatura por $T^* = 50^\circ\text{C}$. A curva é uma exponencial. O eixo das ordenadas é apresentado em escala logarítmica.

4 MODELOS PARA MAGNETIZAÇÃO DE EQUILÍBRIO

A magnetização é uma medida do grau de alinhamento das partículas magnéticas presentes no fluido com o campo aplicado. A intensidade dessa grandeza magnética está diretamente ligada à força magnética que atua no fluido. Para um fluido com fração volumétrica ϕ de partículas magnéticas, a magnetização de saturação M_s é:

$$M_s = \phi M_d , \quad (4.1)$$

em que M_d é a magnetização das próprias partículas, i.e., do sólido do qual as mesmas são feitas. A magnetização de saturação, configuração na qual todas as partículas se encontram alinhadas com o campo, representa a máxima magnetização que esse fluido pode atingir. Para calcular a magnetização de equilíbrio em função da fração volumétrica de partículas e do parâmetro magnético são utilizadas nesse trabalho uma abordagem clássica ordem ϕ e uma abordagem ordem ϕ^3 .

O modelo de magnetização de ordem ϕ é escrito como (Rosensweig, 1985):

$$M_L(\alpha, \phi) = L(\alpha)\phi M_d = L(\alpha)M_s \quad (4.2)$$

com o parâmetro adimensional α sendo

$$\alpha = \frac{mH}{kT} \quad (4.3)$$

e

$$L(\alpha) = \coth(\alpha) - 1/\alpha. \quad (4.4)$$

O parâmetro α é uma razão entre as forças magnéticas e *brownianas* que atuam nas partículas magnéticas. Para $\alpha \ll 1$ as forças *brownianas* dominam completamente o movimento das partículas, randomizando seus respectivos momentos magnéticos, o que significa magnetização nula em termos médios. Por outro lado no limite $\alpha \gg 1$ as

partículas magnéticas respondem rapidamente ao campo magnético, tendendo a formar estruturas anisotrópicas do tipo cadeias orientadas na direção do campo. α pode ser interpretado também como uma adimensionalização do campo H :

$$\alpha = \frac{H}{kTm}. \quad (4.5)$$

k é a constante de Boltzmann, igual a $1,38 \times 10^{-23} NmK^{-1}$ e T é temperatura absoluta em *Kelvin*. Já $L(\alpha)$ representa a função *Langevin*, explicitada na equação (4.4). Esse modelo não leva em consideração as interações entre as partículas magnéticas, sendo aplicável para baixas concentrações ($\phi \sim 1\%$). Uma aproximação assintótica da função Langevin para baixos valores de α é feita através de uma expansão em séries de Taylor:

$$L(\alpha) = \frac{\alpha}{3}, \quad \text{para } \alpha \rightarrow 0. \quad (4.6)$$

Na equação (4.6) conclui-se que para baixos campos magnéticos aplicados a magnetização é linear, o que representa o limite paramagnético do fluido.

A abordagem teórica com aproximação ordem ϕ^3 aqui utilizada foi proposta por Ivanov e Kuznetsova (2001). Essa abordagem leva em conta interações entre até três partículas e por isso pode ser aplicada a fluidos magnéticos para maiores frações volumétricas, em torno de 10%. A equação resultante da referida teoria foi:

$$M(\alpha, \phi) = M_L \left[1 + \frac{4\pi}{3} \frac{dM_L}{dH} + \frac{1}{2} \left(\frac{4\pi}{3} \right)^2 M_L \frac{d^2 M_L}{dH^2} + \frac{(4\pi)^2}{144} \left(\frac{dM_L}{dH} \right)^2 \right], \quad (4.7)$$

em que $M_L = M_L(\alpha, \phi)$ é a magnetização ordem ϕ (i.e. primeira ordem) apresentada na equação (4.2). Substituindo, então, a equação (4.2) em (4.7) e procedendo com algumas manipulações algébricas envolvendo as derivadas dM_L/dH , chega-se a seguinte expressão:

$$\frac{M}{M_d}(\alpha, \phi) = \phi L(\alpha) + \phi^2 \left[\frac{4\pi}{3} g(\alpha) \right] \left(\alpha \frac{M_d}{H} \right) + \phi^3 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{4\pi}{3} \right)^2 h(\alpha) + \frac{(4\pi)^2}{144} z(\alpha) \right] \left(\frac{\alpha M_d}{H} \right)^2, \quad (4.8)$$

com

$$g(\alpha) = L(\alpha) \left(\frac{1}{\alpha^2} - \text{cosech}^2(\alpha) \right), \quad (4.9)$$

$$h(\alpha) = L^2(\alpha) \left(2\text{coth}(\alpha)\text{cosech}^2(\alpha) - \frac{2}{\alpha^3} \right) \quad e \quad (4.10)$$

$$z(\alpha) = g^2(\alpha)/L(\alpha) . \quad (4.11)$$

Na equação (4.8), diferente de (4.7), a dependência de M com ϕ e ordens superiores (ϕ^2 e ϕ^3) aparece explicitamente. A forma (4.8) será utilizada no presente trabalho. O termo adimensional M_d/H , que é a razão entre a magnetização do sólido do qual são feitas as partículas e o campo magnético aplicado, é um parâmetro que influencia na importância dos termos de ordem ϕ^2 e ϕ^3 com relação ao termo de ordem ϕ . M_d/H pode ser interpretado também como a susceptibilidade magnética do sólido. Assim, α , ϕ e a razão M_d/H são as variáveis que influem na magnetização. Uma análise dessa dependência é feita a seguir.

A figura (4.1) apresenta uma comparação entre os dois modelos de magnetização para $M_d/H = 0, 1$ e $\phi = 0, 1$ em função de α . A reta representa o limite paramagnético. No encarte uma região ampliada dos dois modelos é mostrada, para $4 \leq \alpha \leq 6$. Há grande convergência entre os modelos nesse caso, sendo a maior diferença de 1,5% com $\alpha = 2$. Na figura (4.2) o valor de M_d/H é unitário. Nota-se que há maior divergência nesse caso. Para $\alpha = 2$ a diferença é de 11%. A figura (4.3) apresenta os resultados para $M_d/H = 10$. A diferença entre as previsões dos modelos é de 18,5% para $\alpha = 2$ nessas condições. Neste último caso a concentração utilizada foi $\phi = 0,02$ porque o modelo entra em colapso com altos valores de M_d/H e concentrações altas. Isso pode ser explicado fisicamente observando que um fluido magnético com alta magnetização do sólido e alta fração volumétrica de partículas não seria estável, havendo a formação de agregados irreversíveis na suspensão que precipitam após algum tempo sob ação da gravidade.

Para $\alpha < 1$ o campo não é suficientemente grande, resultando em partículas com magnetização insuficiente para fazê-las interagirem entre si e as contribuições ordem superior a ϕ são insignificantes. Quando $\alpha > 10$ o campo aplicado é intenso o suficiente para que as interações magnéticas entre as partículas sejam irrelevantes, havendo interação apenas entre as partículas e o campo, com alinhamento quase total das partículas com a direção do campo. Já para $1 < \alpha < 10$ o campo magnetiza o fluido mas não de maneira a manter as partículas totalmente alinhadas, já que o movimento browniano para esses valores de α ainda produz um efeito de randomizar as

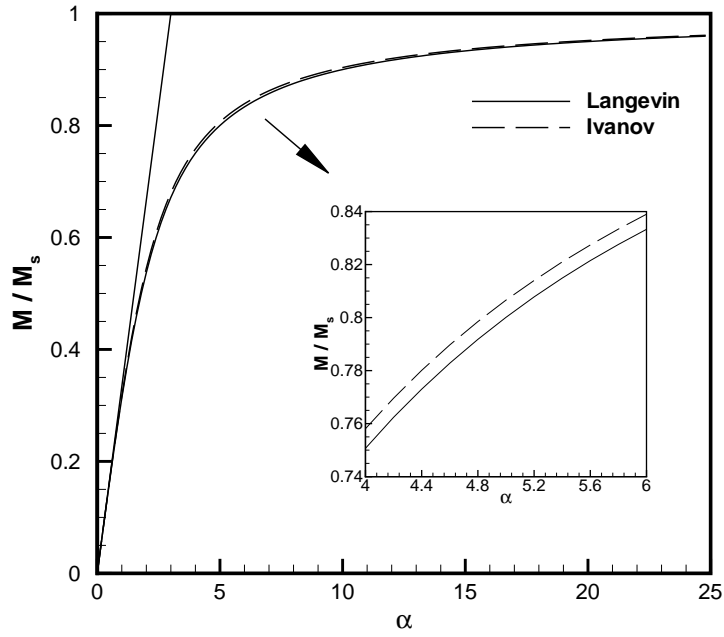


Figura 4.1: Magnetização de equilíbrio em função do parâmetro α para $M_d/H = 0,1$ e $\phi = 0,1$. A curva cheia representa a aproximação ordem ϕ e a tracejada a aproximação ordem ϕ^3 de Ivanov e Kuznetsova (2001). A reta representa o limite paramagnético em que $M/M_s = \alpha/3$. O encarte mostra um detalhe das curvas para $4 \leq \alpha \leq 6$.

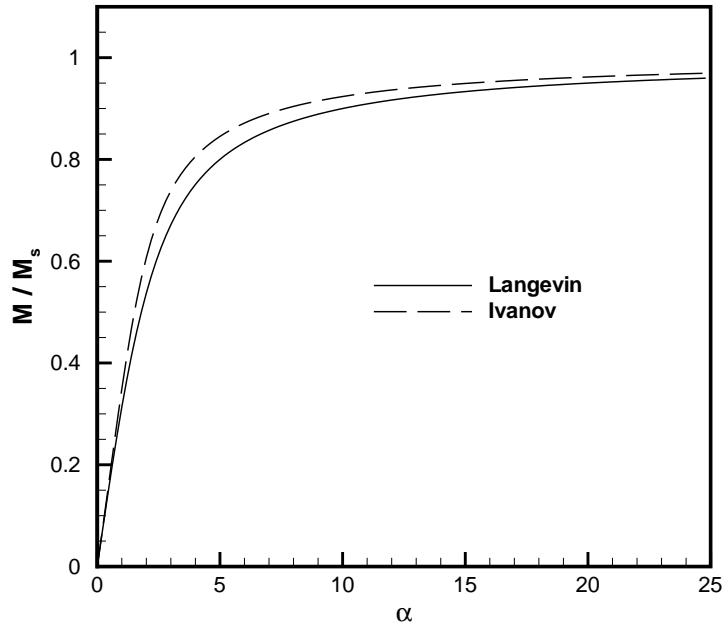


Figura 4.2: Magnetização de equilíbrio em função do parâmetro α para $M_d/H = 1$ e $\phi = 0,1$. A curva cheia representa a aproximação ordem ϕ e a tracejada a aproximação ordem ϕ^3 de Ivanov e Kuznetsova (2001).

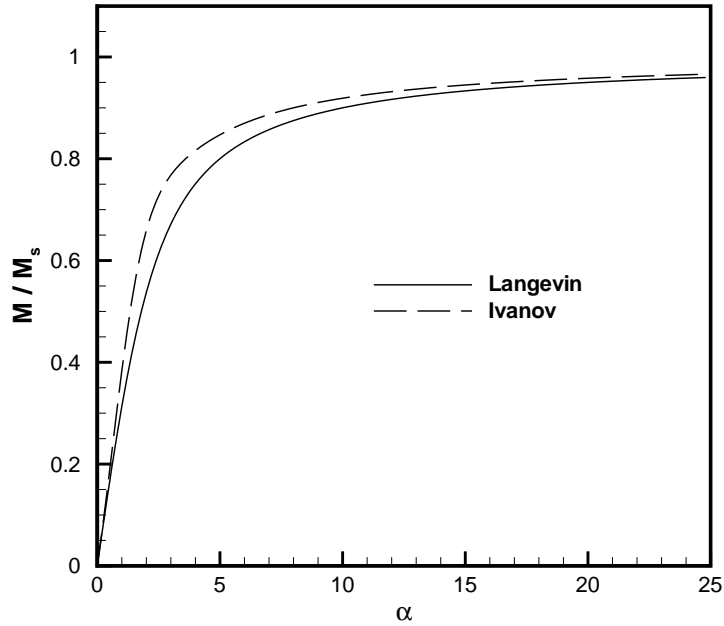


Figura 4.3: Magnetização de equilíbrio em função do parâmetro α para $M_d/H = 10$ e $\phi = 0,02$. A curva cheia representa a aproximação ordem ϕ e a tracejada a aproximação ordem ϕ^3 de Ivanov e Kuznetsova (2001).

orientações dos momentos magnéticos das partículas. Assim as interações magnéticas entre as partículas são significativas e contribuem, juntamente com as interações campo-partícula, para um aumento da magnetização, competindo com os efeitos do movimento browniano. O modelo de Ivanov e Kuznetsova (2001) leva em consideração a interação entre até 3 partículas, explicando a divergência com o modelo ordem ϕ , que não contabiliza interações entre partículas, nessa faixa de valores de α .

Nas figuras (4.4),(4.5) e (4.6) é analisada a dependência da magnetização de equilíbrio com a fração volumétrica das partículas magnéticas para um valor unitário da susceptibilidade magnética do sólido ($M_d/H = 1$). Na (4.4), em que $\alpha = 0,1$, as interações partícula-partícula são desprezíveis, mesmo para $\phi = 20\%$. Para $\phi = 0,05$, que representa um fluido magnético diluído, a diferença entre os modelos é menor que $0,2\%$. Observa-se que os valores de magnetização são baixos nessa condição já que $kT \gg mH$, i.e., o efeito do movimento browniano é dominante. Na figura (4.5), com $\alpha = 3$, os valores da magnetização são cerca de 10 vezes maiores que os obtidos para $\alpha = 0,1$ com as mesmas frações volumétricas. Para $\phi = 0,05$ a diferença entre os

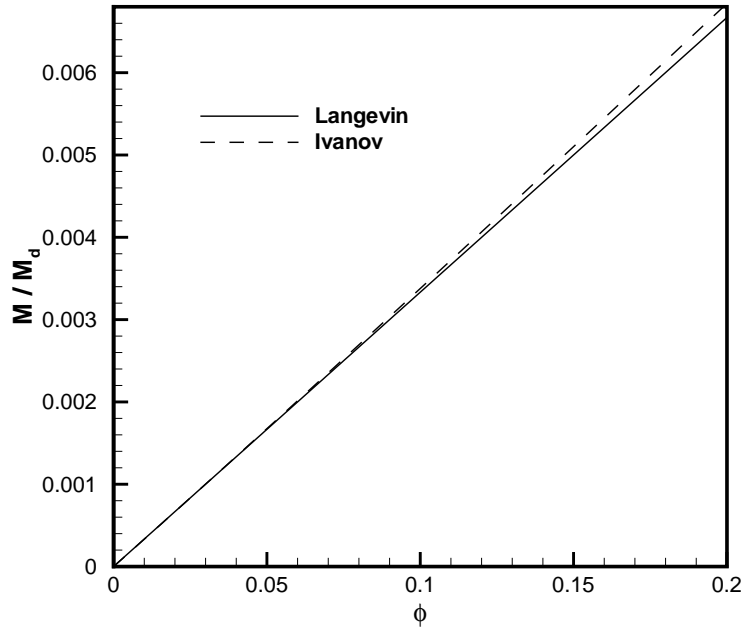


Figura 4.4: Magnetização de equilíbrio em função de ϕ para $M_d/H = 1$ e $\alpha = 0,1$. A curva cheia representa a aproximação ordem ϕ e a tracejada a aproximação ordem ϕ^3 de Ivanov e Kuznetsova (2001).

modelos é de 5,5%. Nota-se que os modelos apresentam diferenças significativas para $\phi > 0,1$, chegando a 12,5% em $\phi = 0,2$. A condição em que $\alpha = 15$ é representada na figura (4.6). Neste caso a magnetização de equilíbrio do fluido $M(\alpha, \phi)$ é completamente dominada pelo mecanismo de interação campo-partícula e a influência das vizinhas (interações magnéticas partícula-partícula) mesmo em frações volumétricas altas para um fluido típico, como 20%, é praticamente imperceptível, ficando a diferença em torno de 1%. Em outras palavras pode-se dizer que a partícula responde rapidamente ao efeito do campo em comparação ao tempo em que as vizinhas produzem um efeito apreciável na partícula.

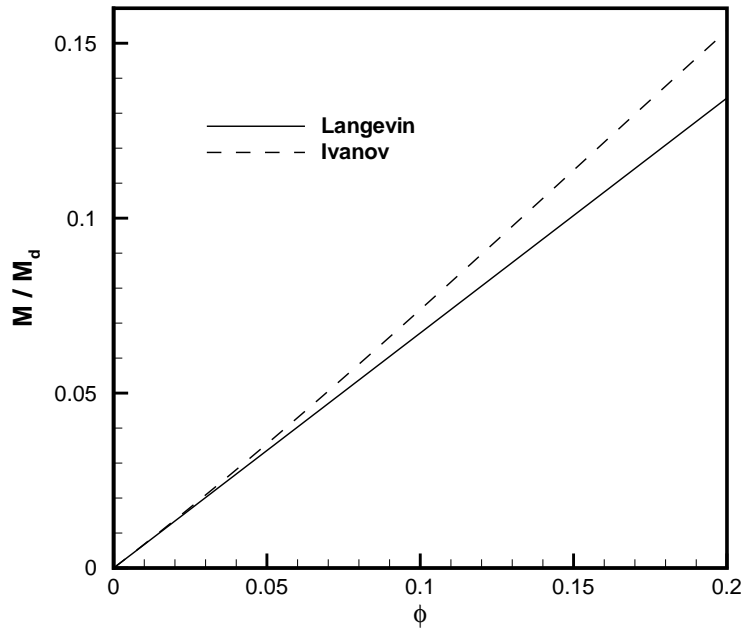


Figura 4.5: Magnetização de equilíbrio em função de ϕ para $M_d/H = 1$ e $\alpha = 3$. A curva cheia representa a aproximação ordem ϕ e a tracejada a aproximação ordem ϕ^3 de Ivanov e Kuznetsova (2001).

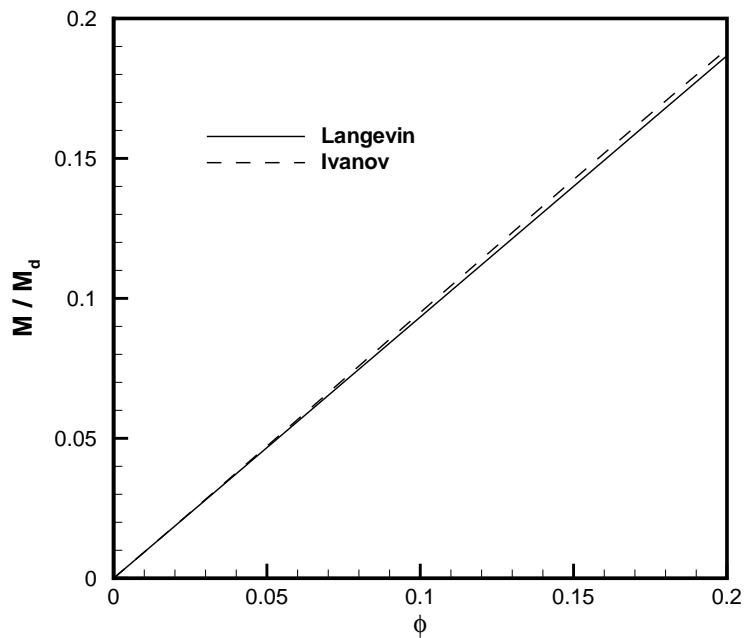


Figura 4.6: Magnetização de equilíbrio em função de ϕ para $M_d/H = 1$ e $\alpha = 15$. A curva cheia representa a aproximação ordem ϕ e a tracejada a aproximação ordem ϕ^3 de Ivanov e Kuznetsova (2001).

5 FORMULAÇÃO TEÓRICA DA HIDRODINÂMICA DE FLUIDOS MAGNÉTICOS

Neste capítulo é apresentada a formulação das equações de balanço e constitutiva que governam o escoamento de um fluido magnético.

5.1 O TENSOR DE MAXWELL

Para somar os efeitos magnéticos às contribuições hidrodinâmicas sobre um fluido magnético é necessário determinar um tensor de tensões a partir da definição de força magnética. Considere, portanto, um ponto no espaço cercado de pequenos dipolos. O campo magnético \mathbf{H} produzido no referido ponto representa a força magnética por unidade de pólo. A densidade de força magnética local \mathbf{f}_m , equivalente a um vetor de tensões magnéticas, é dada por (Rosensweig, 1985):

$$\mathbf{f}_m = \rho_v \mathbf{H} , \quad (5.1)$$

em que ρ_v é o número de pólos por unidade de volume. Da Lei de Gauss equivalente para o magnetismo, tem-se:

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = \frac{\rho_v}{\mu_0} \quad (5.2)$$

e conseqüentemente resulta na seguinte relação para densidade de pólo:

$$\rho_v = \mu_0 \nabla \cdot \mathbf{H}. \quad (5.3)$$

Então a equação (5.1) pode ser escrita como:

$$\mathbf{f}_m = \mu_0 \mathbf{H} (\nabla \cdot \mathbf{H}) . \quad (5.4)$$

A seguir a força \mathbf{f}_m será escrita em termos do divergente de um tensor de segunda ordem, mais especificamente o tensor de tensões. Da identidade vetorial do cálculo tem-se:

$$\nabla \cdot (\mathbf{H}\mathbf{H}) = \mathbf{H}(\nabla \cdot \mathbf{H}) + \mathbf{H} \cdot \nabla \mathbf{H}. \quad (5.5)$$

Usando também a seguinte identidade:

$$\mathbf{H} \cdot \nabla \mathbf{H} = \nabla \left(\frac{1}{2} H^2 \right) - \mathbf{H} \times (\nabla \times \mathbf{H}), \quad (5.6)$$

podemos reescrever \mathbf{f}_m como:

$$\mathbf{f}_m = \nabla \cdot \left(\mu_0 \mathbf{H}\mathbf{H} - \frac{1}{2} \mu_0 H^2 \mathbf{I} \right), \quad (5.7)$$

já que, na condição do limite magnetostático de Maxwell, $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{0}$. A quantidade entre parênteses na equação (5.7) é denominada *tensor de Maxwell* e é fundamental para o acoplamento dos efeitos magnéticos e hidrodinâmicos no movimento de um fluido magnético.

Da relação (5.7) verifica-se que o tensor de tensões associado à densidade de força magnética para o caso do vácuo em que $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ pode ser expressa na forma:

$$\Sigma_m = -\frac{1}{2} \mu_0 H^2 \mathbf{I} + \mathbf{B}\mathbf{H}. \quad (5.8)$$

A parcela isotrópica será associada a uma pressão magnética sobre o elemento fluido e a parcela deviatória representa as tensões magnéticas de orientação das partículas na direção do campo aplicado. Nota-se que nessa condição particular em que $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ (vácuo) o tensor de tensões é simétrico e o torque magnético $\mathbf{T} = \mu_0 \mathbf{M} \times \mathbf{H}$ é nulo.

Num contexto mais geral de caracterização constitutiva de um fluido magnético com permeabilidade $\mu = \mu_0(1 + \chi)$ e relação de $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$, a equação (5.8) pode ser reescrita na forma:

$$\Sigma_m = -\frac{1}{2} \mu_0 H^2 \mathbf{I} + \mu \mathbf{H}\mathbf{H}. \quad (5.9)$$

Mesmo para este caso mais geral de superparamagnetismo o tensor de tensões dado por (5.9) é simétrico pela inexistência de torques internos na partícula já que \mathbf{M} e \mathbf{H} são paralelos (fluido magnético sem memória).

No caso em que a relação $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ não é válida (i.e. condição ferromagnética) o tensor de tensões pode ser escrito apenas na forma da equação (5.8) com o termo $\mathbf{B}\mathbf{H}$. Assim \mathbf{M} não é necessariamente paralelo ao campo \mathbf{H} e torques magnéticos não podem ser desprezados requerendo o balanço explícito de torques (i.e. equação da conservação do momento angular das partículas).

5.2 EQUAÇÃO RESULTANTE

As equações que governam o movimento de um fluido são as equações da continuidade e do balanço de forças, conforme apresentado anteriormente. Considerando o fluido incompressível, a equação da continuidade se reduz a:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 , \quad (5.10)$$

estabelecendo que no presente texto \mathbf{u} é também um campo solenoidal como \mathbf{B} . A equação do balanço do momento linear é dada pela equação de Cauchy:

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = \nabla \cdot \boldsymbol{\Sigma} + \rho \mathbf{g} , \quad (5.11)$$

em que \mathbf{g} é a aceleração gravitacional e $\boldsymbol{\Sigma}$ é o tensor de tensões. No caso de fluidos magnéticos esse tensor é uma soma do tensor relativo às forças hidrodinâmicas ($\boldsymbol{\Sigma}_h$) com o tensor relativo às forças magnéticas ($\boldsymbol{\Sigma}_m$), ou seja:

$$\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Sigma}_h + \boldsymbol{\Sigma}_m . \quad (5.12)$$

A equação constitutiva para o tensor de tensões hidrodinâmico é a de fluidos newtonianos incompressíveis, dada por:

$$\boldsymbol{\Sigma}_h = -p_h \mathbf{I} + 2\eta \mathbf{D} , \quad (5.13)$$

em que \mathbf{D} é o tensor taxa de deformação e é dado por:

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T) . \quad (5.14)$$

O tensor de tensões magnético é dado pela equação (5.8) e pode ser escrito como:

$$\Sigma_m = -p_m \mathbf{I} + \mathbf{B} \mathbf{H} , \quad (5.15)$$

em que $p_m = \frac{1}{2} \mu_0 H^2$ denota a pressão magnética. Substituindo (5.13) e (5.15) em (5.12) temos a expressão para o tensor de tensões geral. É mais conveniente escrever esse tensor como a soma de uma parte isotrópica $P \mathbf{I}$ e uma parte deviatória Σ^d . Assim:

$$\Sigma = -P \mathbf{I} + \Sigma^d , \quad (5.16)$$

com

$$P = p_h + p_m - \frac{1}{3} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} \quad (5.17)$$

e

$$\Sigma^d = 2\eta \mathbf{D} + \mathbf{B} \mathbf{H} - \frac{1}{3} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} , \quad (5.18)$$

em que P é a pressão mecânica total do escoamento e é dada por $P = -tr(\Sigma/3)$. Finalmente, a substituição do divergente de Σ na equação de Cauchy tem como resultado:

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \eta \nabla^2 \mathbf{u} + \mu_0 \mathbf{M} \cdot \nabla \mathbf{H} . \quad (5.19)$$

Na equação (5.19) $p = P - \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{x}$ é a pressão modificada, que inclui o efeito hidrostático. A equação (5.19) é a equação do balanço de forças por unidade de volume para um fluido magnético. A diferença da equação (5.19) para a equação de Navier-Stokes padrão é o último termo à direita diretamente proporcional ao gradiente do campo magnético e a magnetização local do fluido. É importante notar que o termo $\mathbf{B} \mathbf{H}$ satisfaz a lei de transformação de tensores de segunda ordem:

$$B'_i H'_j = Q_{ip} Q_{jq} B_p H_q , \quad (5.20)$$

em que $B'_i H'_j$ denota as componentes do tensor no sistema de coordenadas \mathbf{x}' e Q_{ip} e Q_{jq} denotam as componentes do tensor ortogonal \mathbf{Q} que representa a transformação linear de rotação de eixo de $\{\mathbf{x}\}$ para $\{\mathbf{x}'\}$.

Uma observação importante é que o tensor deviatório Σ^d apresentado na equação (5.18) é simétrico se não existem torques magnéticos internos, i.e., $\mathbf{M} \times \mathbf{H} = \mathbf{0}$. Nessa condição a magnetização das partículas está sempre alinhada com o campo magnético, não havendo histerese ou memória magnética. Materiais que apresentam esse comportamento são denominados fluidos superparamagnéticos e serão o foco do presente trabalho. Nos referidos fluidos $\mathbf{M} = \chi(H)\mathbf{H}$, e conseqüentemente $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$, conforme descrito em mais detalhes na seção de eletromagnetismo. Assim, o último termo da equação constitutiva (5.15) se torna

$$\mathbf{B}\mathbf{H} = \mu\mathbf{H}\mathbf{H} , \quad (5.21)$$

ou, em termos de componentes:

$$B_i H_j = \mu H_i H_j , \quad (5.22)$$

o que leva a uma simetria do tensor de tensões. Com \mathbf{M} e \mathbf{H} colineares, o termo $\mu_0 \mathbf{M} \cdot \nabla \mathbf{H}$ da equação (5.19) pode ser escrito como $M \nabla H$, em que M e H são os módulos dos vetores magnetização e campo magnético. Assim, a equação final do balanço da quantidade de movimento para um fluido magnético é dada por:

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \eta \nabla^2 \mathbf{u} + \mu_0 M \nabla H . \quad (5.23)$$

5.3 EQUAÇÃO DA EVOLUÇÃO DA MAGNETIZAÇÃO

Para resolver a equação (5.19), que governa o movimento de um fluido magnético, é necessário determinar o valor da magnetização local \mathbf{M} . Neste trabalho é utilizada a equação evolutiva proposta por Cunha e Sobral (2004) para a condição de fluido magnético simétrico:

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{M} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{M} - \frac{1}{\tau_s} (\mathbf{M} - \mathbf{M}^0), \quad (5.24)$$

em que $\boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{u}$, \mathbf{M}^0 é a magnetização de equilíbrio e τ_s é o tempo associado à relaxação magnética das partículas. Note que para um tempo de relaxação magnético $\tau_s \rightarrow 0$, ou muito menor que uma escala de tempo convectiva do escoamento a equação (5.24) reduz-se a $\mathbf{M} = \mathbf{M}^0$.

A equação (5.24) acopla na escala contínua a magnetização \mathbf{M} e o campo de velocidade hidrodinâmico \mathbf{u} . O lado esquerdo da equação é a derivada material translacional do vetor magnetização e representa a taxa de variação da magnetização vista por um observador *lagrangiano*, i.e., um observador que se desloca com o fluido. O primeiro termo do lado direito representa a variação na magnetização da partícula devido à vorticidade local do fluido, enquanto o segundo termo está associado com o desvio da magnetização com relação a magnetização de equilíbrio. Para quantificar a magnetização de equilíbrio é utilizado o modelo de Ivanov e Kuznetsova (2001), apresentado no capítulo anterior.

5.4 ADIMENSIONALIZAÇÃO

Nesta seção serão apresentadas as equações (5.23) e (5.24) em termos adimensionais. Nessa formulação é possível identificar explicitamente os parâmetros físicos que ditam o comportamento da dinâmica do fluido magnético em movimento.

5.4.1 Equação da Quantidade de Movimento Adimensionalizada

A adimensionalização é feita utilizando-se de escalas características do escoamento. Para a velocidade é utilizada a velocidade média do fluido U . Para o comprimento é utilizado como escala característica o próprio raio do tubo a . Para o tempo surge naturalmente a escala a/U e a pressão será adimensionalizada por $8\rho U^2$ (a razão do fator 8 será explicada no próximo capítulo). Para as grandezas magnéticas \mathbf{M} e \mathbf{H} será

utilizada a intensidade do campo magnético externo imposto H_0 . Assim as variáveis adimensionais são:

$$\tilde{u} = \frac{u}{U} \quad \tilde{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{x}}{a} \quad \tilde{t} = \frac{t}{a/U} \quad \tilde{p} = \frac{p}{8\rho U^2} \quad (5.25)$$

$$\tilde{\nabla} = a\nabla \quad \tilde{M} = \frac{M}{H_0} \quad \tilde{H} = \frac{H}{H_0} . \quad (5.26)$$

A substituição dessas variáveis na equação (5.23) resulta em:

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\nabla} \tilde{\mathbf{u}} = -8\tilde{\nabla} \tilde{p} + \frac{1}{Re} \tilde{\nabla}^2 \tilde{\mathbf{u}} + \left(\frac{Re_m}{Re} \right)^2 \tilde{M} \tilde{\nabla} \tilde{H} , \quad (5.27)$$

em que:

$$Re = \frac{\rho U a}{\eta} \quad e \quad Re_m = \frac{\rho U_m a}{\eta} , \quad (5.28)$$

com

$$U_m = \sqrt{\frac{\mu_0 H_0^2}{\rho}} . \quad (5.29)$$

Na equação (5.27), Re é o número de Reynolds, homenagem ao físico irlandês Osborne Reynolds (1842-1912), que representa a razão entre forças de inércia e forças viscosas do escoamento. O novo parâmetro Re_m é definido neste trabalho como sendo o número de *Reynolds Magnético*, e U_m é a velocidade magnética. O termo que acompanha a parte magnética da equação, $(Re_m/Re)^2$, é uma razão entre as pressões magnética e dinâmica do escoamento. Note que quando $Re_m = 0$ a equação se reduz à equação padrão de Navier-Stokes para fluidos newtonianos incompressíveis. Com números de Reynolds muito altos ($Re \gg 1$), percebe-se também que a influência do termo magnético é reduzida, fato que será analisado no capítulo seguinte.

5.4.2 Equação da Magnetização Adimensionalizada

Para adimensionalizar a equação (5.24) são usadas as variáveis adimensionais apresentadas nas equações (5.25) e (5.26), além de:

$$\tilde{\Omega} = \frac{\Omega}{U/a} . \quad (5.30)$$

Após algumas manipulações algébricas, a equação adimensional da evolução da magnetização é dada por:

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{M}}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\nabla} \tilde{\mathbf{M}} = \tilde{\Omega} \times \tilde{\mathbf{M}} - \frac{1}{\hat{\omega}} (\tilde{\mathbf{M}} - \tilde{\mathbf{M}}^0) , \quad (5.31)$$

em que $\hat{\omega} = U\tau_s/a$ é o tempo de relaxação magnética adimensional, definido como a razão entre o tempo de relaxação magnética e o tempo característico do escoamento.

No presente trabalho considera-se um regime permanente da magnetização tal que $\partial \tilde{\mathbf{M}}/\partial \tilde{t} = \mathbf{0}$ e que

$$|\tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\nabla} \tilde{\mathbf{M}}| \ll |\tilde{\Omega} \times \tilde{\mathbf{M}}| , \quad (5.32)$$

de modo que o efeito da rotação do escoamento domine o efeito de translação convectivo. Isto pode ser razoável quando admite-se $|\tilde{\nabla} \tilde{\mathbf{M}}|$ pequeno, sendo a magnetização aproximadamente homogênea no domínio do escoamento. Portanto, as mudanças na magnetização das partículas do fluido irão ocorrer, principalmente, devido a ação da vorticidade do escoamento. Nessas condições a equação da evolução da magnetização pode ser simplificada para:

$$\hat{\omega} \tilde{\Omega} \times \tilde{\mathbf{M}} = \tilde{\mathbf{M}} - \tilde{\mathbf{M}}^0 . \quad (5.33)$$

Para escoamentos em que o tempo de relaxação magnética $\hat{\omega} \ll 1$ o acoplamento vorticidade-magnetização pode ser desprezado e a equação (5.33) pode ainda ser simplificada para $\tilde{\mathbf{M}} = \tilde{\mathbf{M}}^0$. Nessa condição a magnetização de cada partícula é a magnetização de equilíbrio, ou seja, não há interferência do escoamento na magnetização. No próximo capítulo serão utilizadas essas simplificações para obter o comportamento de fluidos magnéticos escoando sob a ação de um campo magnético externo.

6 ESCOAMENTO DE FLUIDOS MAGNÉTICOS EM CAPILARES

Neste capítulo é resolvido o problema do escoamento de fluidos magnéticos em capilares a partir do desenvolvimento feito no capítulo anterior.

6.1 SOLUÇÃO ANALÍTICA

Nesta seção será examinado analiticamente o problema de escoamento. Conforme descrito no capítulo anterior, deve-se determinar \tilde{M} na equação (5.27) por meio da equação (5.31). Por conveniência de nomenclatura, deste ponto em diante do trabalho os “ \sim ” das quantidades adimensionais serão suprimidos.

A equação de evolução da magnetização adimensional, dada pela equação (5.31), é:

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{M} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{M} - \frac{1}{\hat{\omega}} (\mathbf{M} - \mathbf{M}^0). \quad (6.1)$$

São assumidas algumas simplificações para a solução da equação acima.

Neste trabalho é resolvido o problema do escoamento laminar de um fluido magnético diluído em um tubo capilar com razão de aspecto $\ell/a = 100$, sendo ℓ o comprimento do tubo e a o seu raio. O campo magnético é aplicado na direção axial, sendo o mesmo estacionário apresentando um decaimento linear. Este campo pode ser “favorável” ($dH/dz > 0$), como um ímã permanente colocado no final do tubo, por exemplo, ou “desfavorável” ($dH/dz < 0$) ao escoamento. O gradiente de pressão atuando no escoamento é constante e igual a $\Delta p/\ell$.

6.1.1 Sem Acoplamento da Magnetização

A primeira solução apresentada é uma solução analítica em que não há acoplamento entre a magnetização do fluido e a vorticidade, isto é, no limite assintótico em que $\omega \rightarrow 0$. Nesta condição limite a magnetização do fluido é determinada pela magnetização de equilíbrio, com \mathbf{M}^0 calculado pela teoria de Ivanov e Kuznetsova (2001), conforme a equação (4.8). Portanto,

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}^0. \quad (6.2)$$

Nessa simplificação τ_s é muito pequeno quando comparado ao tempo característico do escoamento L/U , fazendo com que $\hat{\omega} \ll 1$, ou seja, as partículas estão sempre orientadas com o campo externo, na direção z (axial).

Considerando o escoamento unidirecional axissimétrico, condição garantida com $Re(a/\ell)^2 \ll 1$, a velocidade é dada por $\mathbf{u} = u(r)\mathbf{e}_z$. Assim, a equação (5.27) se reduz, em coordenadas cilíndricas, a:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{du}{dr} \right) + \left(\frac{Re_m^2}{Re} \right) M \frac{dH}{dz} = -8ReG, \quad (6.3)$$

em que G é o gradiente de pressão adimensional dado por:

$$G = -\frac{\Delta P}{\ell} \frac{a}{8\rho U^2}. \quad (6.4)$$

Com M e dH/dz constantes, a equação (6.3) pode ser resolvida por integração direta, resultando em:

$$u(r) = \left(2ReG + \frac{Re_m^2}{4Re} M \frac{dH}{dz} \right) (1 - r^2). \quad (6.5)$$

A equação (6.5), juntamente com as condições de contorno de não-escorregamento (i.e., $u(a) = 0$) e de simetria ($du/dr = 0$ em $r = 0$), não define um problema bem posto, já que Re e G são variáveis interdependentes, ambas sendo função da velocidade média. Para resolver esse problema considera-se a condição em que a vazão adimensionalizada tem sempre um valor unitário, independente do fluido que está escoando. Para fluidos newtonianos, a vazão, dimensional, é dada pela lei de Poiseuille (Pao, 1967):

$$Q = -\frac{\pi a^4 \Delta P}{8\mu l} . \quad (6.6)$$

Adimensionalizando a vazão por $\pi U a^2$, temos um valor igual à unidade no lado esquerdo da equação acima, já que a vazão é adimensionalizada usando a velocidade média do escoamento. A equação, agora adimensional, da vazão para fluidos newtonianos é então:

$$Q = 1 = ReG . \quad (6.7)$$

A pressão foi adimensionalizada por $8\rho U^2$ para normalizar o produto ReG , para fluidos newtonianos como sendo a unidade. Por isso a validade da equação (6.7). No caso de fluidos não newtonianos, a vazão adimensionalizada continua sendo unitária, mas o produto ReG apresentará um desvio da unidade dependendo do quão não-linear seja o fluido em escoamento.

Integrando a equação (6.5) do perfil de velocidade define-se a vazão adimensional conforme descrito abaixo:

$$Q = 2 \int_0^1 u(r)rdr = ReG + \frac{1}{8} \frac{Re_m^2}{Re} M \frac{dH}{dz} . \quad (6.8)$$

Mas $Q = 1$, então:

$$G = \frac{1}{Re} \left(1 - \frac{1}{8} \frac{Re_m^2}{Re} M \frac{dH}{dz} \right) = \frac{1}{Re} (1 + C_{NN}) . \quad (6.9)$$

Assim, agora G é dado por $1/Re$, que é a parte newtoniana, adicionada de uma contribuição não newtoniana C_{NN} . Substituindo o valor de G encontrado no perfil de velocidade, temos que

$$u(r) = 2(1 - r^2) \quad (6.10)$$

para qualquer valor de campo magnético imposto, ou seja, o perfil de velocidade parabólico é mantido invariante quando não se leva em conta o acoplamento da magnetização com a hidrodinâmica. Esse resultado é esperado pois a vazão adimensional é unitária por definição.

Considerando mais uma vez a lei de Poiseuille, a viscosidade efetiva η_{ef} de um fluido é dada por (equação dimensional):

$$\eta_{ef} = -\frac{\pi a^4 \Delta P}{8Q l} . \quad (6.11)$$

Adimensionalizando a equação (6.11) como feito anteriormente e utilizando a viscosidade efetiva do fluido sem campo aplicado η_o para adimensionalizar η_{ef} , obtém-se:

$$\frac{\eta_{ef}}{\eta_o} = ReG . \quad (6.12)$$

Sem campo magnético aplicado, a equação (6.12) leva a $ReG = 1$, ou seja, comportamento newtoniano. Nessa equação, η_o é a viscosidade efetiva do fluido magnético sem campo aplicado. Logo, por exemplo, se um fluido com 5% de fração volumétrica de partículas magnéticas é utilizado, η_o é a viscosidade efetiva desse fluido na ausência de campo. A presença de partículas no fluido leva a um aumento na energia necessária para deformá-lo. Com a presença de um campo magnético, é acrescentado a esse efeito uma variação na energia devido à anisotropia produzida pela orientação das partículas com o campo. Assim ReG é uma medida da alteração “líquida” da viscosidade efetiva, levando em conta apenas efeitos magnéticos, eliminando os efeitos provocados pela própria presença das partículas. Um valor positivo de ReG significa que o campo é desfavorável e o aumento do gradiente de pressão necessário para manter a vazão constante é interpretado como um aumento de viscosidade. Para um ReG negativo o oposto é válido.

O gradiente de pressão adimensional G é sempre positivo pela própria definição. Portanto, da equação (6.9), tem-se que:

$$\left(1 - \frac{1}{8} \frac{Re_m^2}{Re} M \frac{dH}{dz} \right) > 0 . \quad (6.13)$$

Isto significa que para campos favoráveis, com a magnetização e o gradiente de campo impostos, há um limite para a relação entre Re e Re_m dado por:

$$\frac{Re_m^2}{Re} < \frac{8}{M} \frac{1}{dH/dz} . \quad (6.14)$$

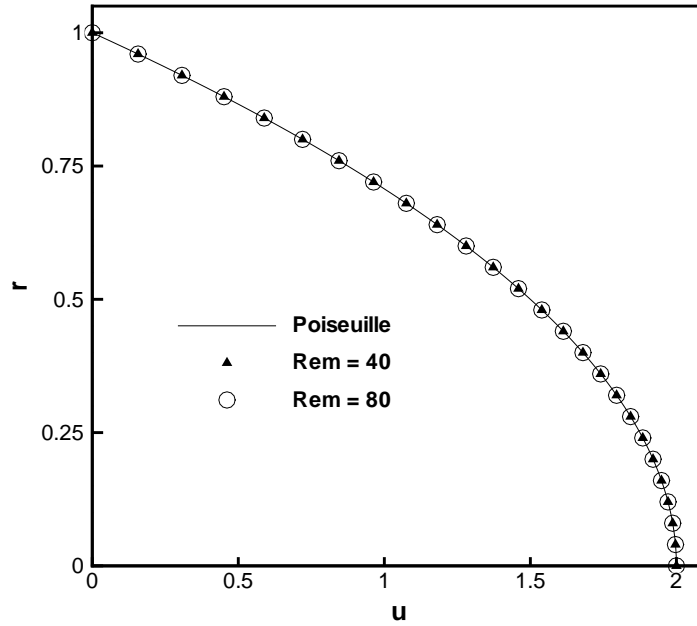


Figura 6.1: Perfis de velocidade obtidos pela solução analítica sem acoplamento para diferentes Re_m com campo magnético desfavorável. Condições: $\phi = 0,03$, $M_d = 5$, $M_d/H = 5$, $\alpha = 6$, $dH/dz = -0,01$ e $G = 2,2$.

Para campos magnéticos desfavoráveis não ocorre essa limitação, no caso sem acoplamento.

A figura (6.1) mostra os perfis de velocidade obtidos para diferentes Re_m e campo magnético desfavorável $dH/dz = -0,01$. Foi considerado um fluido com fração volumétrica de partículas magnéticas $\phi = 0,03$, $M_d = 5$, $\alpha = 6$, $M_d/H = 5$, $G = 2,2$ e $w^2/8 = 0,1$. Com essas condições de α , M_d e M_d/H , a magnetização de equilíbrio é $M^0 = 0,1313$, próxima à de saturação $M_s = 0,15$. Nota-se que o perfil de velocidade é o mesmo para diferentes Re_m , como já mencionado anteriormente. Na figura (6.2) são apresentados os perfis de velocidade para a condição de campo magnético favorável $dH/dz = 0,01$. Com as condições impostas acima, o Re_m magnético máximo é pouco maior que 25 para que o G continue sendo sempre positivo.

As figuras (6.3) e (6.4) mostram a viscosidade efetiva adimensional, ReG , em função do número de Reynolds magnético na condição de campo desfavorável para a primeira e favorável para a segunda. São considerados diferentes gradientes de pressão

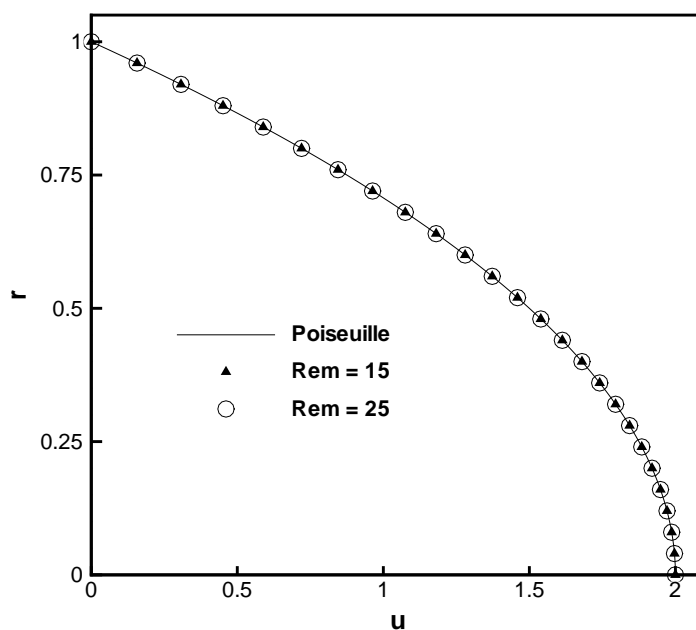


Figura 6.2: Perfis de velocidade obtidos pela solução analítica sem acoplamento para diferentes Re_m com campo magnético favorável. Condições: $\phi = 0,03$, $M_d = 5$, $M_d/H = 5$, $\alpha = 6$, $dH/dz = 0,01$ e $G = 2, 2$.

G . A medida em que $G \rightarrow 0$ as curvas tendem para o limite de Poiseuille em que $ReG = 1$. Para $G = 0,5$, Re é maior, e portanto o termo da magnetização exerce menos influencia do que quando $G = 2$, para o qual Re é menor. Na figura (6.3) a diferença entre as viscosidades para $G = 0,5$ e $G = 1$ com $Re_m = 40$ é de aproximadamente 15%. Com o campo magnético desfavorável, é necessário um gradiente de pressão maior para obter as mesmas condições de vazão que seriam obtidas com campo nulo, o que se traduz como um aumento da viscosidade efetiva do fluido magnético. Esse aumento chega a ser maior que 70% nessas condições. Já na situação de campo favorável é observada uma diminuição na viscosidade de mais de 30% para o caso mais crítico, o que corresponde a uma redução do arrasto do escoamento em análise. Nota-se ainda que as derivadas das curvas aumentam com valores maiores de G para um mesmo Re_m , mostrando que o efeito não-linear causado pelo campo cresce para valores menores de Re .

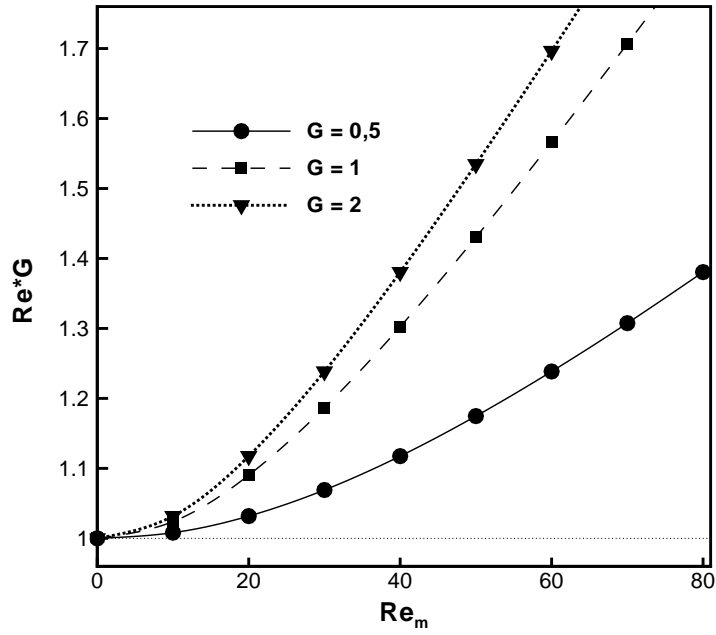


Figura 6.3: Efeito do campo magnético sobre a viscosidade efetiva adimensional ReG , para diferentes valores de G . Solução analítica sem acoplamento. Condições: $\phi = 0,03$, $M_d = 5$, $M_d/H = 5$, $\alpha = 6$ e $dH/dz = -0,01$.

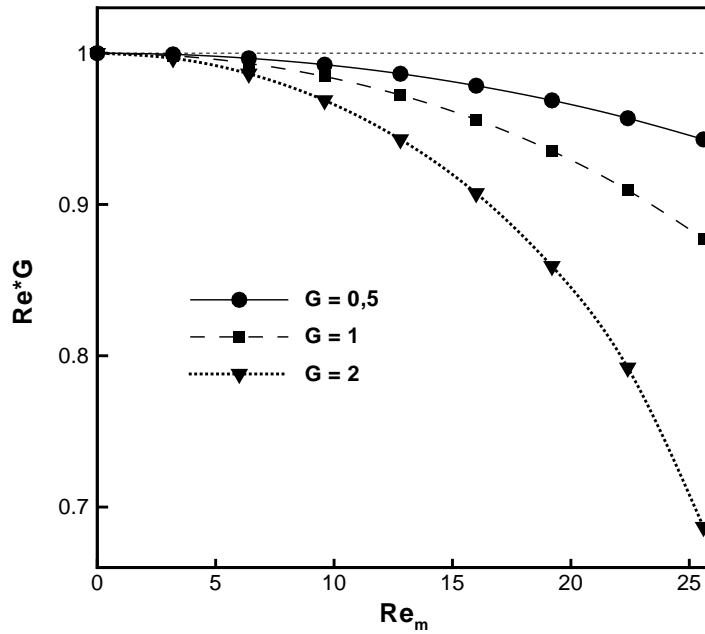


Figura 6.4: Efeito do campo magnético sobre a viscosidade efetiva adimensional ReG , para diferentes valores de G . Solução analítica sem acoplamento. Condições: $\phi = 0,03$, $M_d = 5$, $M_d/H = 5$, $\alpha = 6$ e $dH/dz = 0,01$.

6.1.2 Com Acoplamento - Método de Perturbação

Nesta parte do trabalho é resolvido o problema com acoplamento magnetização-vorticidade utilizando-se o método de perturbação regular descrito a seguir.

6.1.2.1 Método de Perturbação Regular

Equações obtidas a partir de modelos matemáticos geralmente não podem ser resolvidas de forma exata, necessitando a implementação de métodos numéricos ou aproximações. Uma técnica comum de aproximação é o método de perturbação regular. Esse método é utilizado quando a equação possui um termo que é pequeno quando comparado aos outros termos da equação, podendo ser aplicado a equações diferenciais (ordinárias e parciais), equações algébricas, equações integrais e várias outras (Logan, 2006).

Quando um parâmetro ϵ , por exemplo, aparece explicitamente e determina a ordem de grandeza de um termo em uma equação diferencial, esta equação pode ser escrita como:

$$F(t, y, y', y'', \epsilon) = 0, \quad (6.15)$$

em que t é a variável independente e y é a variável dependente. O método de perturbação regular consiste em assumir a solução da equação (6.15) como uma série de potências de ϵ , da forma:

$$y(t) = y_0(t) + \epsilon y_1(t) + \epsilon^2 y_2(t) + \epsilon^3 y_3(t) + \dots \quad (6.16)$$

Substituindo $y(t)$ dado pela equação (6.16) na equação (6.15) e separando os termos que estão multiplicados por $1, \epsilon, \epsilon^2, \dots$, obtém-se um sistema que será resolvido com sucesso se a aproximação é uniforme, i.e., se a diferença entre a solução aproximada pelo método e a solução exata se torna mínima a medida que $\epsilon \rightarrow 0$. Quando $\epsilon = 0$ o problema é denominado não perturbado. Existe um valor máximo de ϵ para o qual essa aproximação é válida, a partir do qual outros métodos devem ser utilizados.

6.1.2.2 Solução do Problema

Para o acoplamento magnetização-vorticidade é utilizada a equação (5.33):

$$\hat{\omega}\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{M} = \mathbf{M} - \mathbf{M}^o, \quad (6.17)$$

em que estão presentes o mecanismo associado com o desvio de \mathbf{M} em relação à magnetização de equilíbrio \mathbf{M}^o e o mecanismo de rotação das partículas associado ao escoamento com relação ao alinhamento dos dipolos com o campo. Dessa forma existe um acoplamento da hidrodinâmica com a magnetização, ou seja, a orientação dos momentos magnéticos das partículas é afetada pela vorticidade do escoamento. Como a vorticidade no escoamento em um tubo capilar é maior próxima à parede do tubo, é nessa região que o efeito de acoplamento deve ser maximizado.

A equação (6.17) leva ao seguinte sistema de equações:

$$M_z \frac{du}{dr} = -\frac{2}{\hat{\omega}} (M_r - M_r^o) \quad (6.18)$$

$$M_r \frac{du}{dr} = \frac{2}{\hat{\omega}} (M_z - M_z^o), \quad (6.19)$$

em que M_r e M_z representam a magnetização na direção radial e na direção axial, respectivamente, e M_r^o e M_z^o representam a magnetização de equilíbrio em cada direção. Considerando que a magnetização de equilíbrio inicial esteja alinhada com o campo, i.e., $M_r^o = 0$, tem-se:

$$M_r = -\frac{1}{2}\hat{\omega}M_z \frac{du}{dr} \quad (6.20)$$

$$M_z = M_z^o \left[\frac{1}{4}\hat{\omega}^2 \left(\frac{du}{dr} \right)^2 + 1 \right]^{-1}. \quad (6.21)$$

A magnitude da magnetização é dada por:

$$M = \sqrt{M_z^2 + M_r^2} = M_z^o \left[\frac{1}{4}\hat{\omega}^2 \left(\frac{du}{dr} \right)^2 + 1 \right]^{-\frac{1}{2}}. \quad (6.22)$$

Usando uma expansão em série binomial, a equação para a magnetização se torna:

$$M \sim \left[1 - \frac{1}{8} \hat{\omega}^2 \left(\frac{du}{dr} \right)^2 \right]. \quad (6.23)$$

Ao substituir a expressão (6.23) de M em (6.3) é obtida a equação de escoamento do fluido magnético em tubo capilar com acoplamento vorticidade-magnetização:

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{1}{8} \hat{\omega}^2 \beta \left(\frac{du}{dr} \right)^2 = -\gamma, \quad (6.24)$$

com

$$\gamma = 8ReG + \frac{Re_m^2}{Re} M_z^0 \frac{dH}{dz} \quad e \quad \beta = \frac{Re_m^2}{Re} M_z^0 \frac{dH}{dz}. \quad (6.25)$$

O termo $(du/dr)^2$ na equação (6.24) a torna não linear, impossibilitando sua resolução com uma simples integração, como feito na condição sem acoplamento. Assumindo que $\epsilon = \hat{\omega}^2 \beta / 8$ seja pequeno, a equação se torna fracamente não linear e pode ser resolvida pelo método de perturbação regular apresentado anteriormente. Expandindo $u(r)$ e considerando apenas até os termos de ordem ϵ^2 , obtém-se:

$$u(r) = u_o(r) + \epsilon u_1(r) + \epsilon^2 u_2(r), \quad (6.26)$$

que ao ser substituída na equação (6.24), resulta em

$$\left[\frac{d^2 u_o}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du_o}{dr} + \gamma \right] + \epsilon \left[\frac{d^2 u_1}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du_1}{dr} - \left(\frac{du_o}{dr} \right)^2 \right] + \epsilon^2 \left[\frac{d^2 u_2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du_2}{dr} - 2 \frac{du_o}{dr} \frac{du_1}{dr} \right] = 0. \quad (6.27)$$

Logo, o sistema a ser resolvido é:

$$\frac{d^2 u_o}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du_o}{dr} = -\gamma \quad (6.28)$$

$$\frac{d^2 u_1}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du_1}{dr} = \left(\frac{du_o}{dr} \right)^2 \quad (6.29)$$

$$\frac{d^2 u_2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du_2}{dr} = 2 \frac{du_o}{dr} \frac{du_1}{dr}, \quad (6.30)$$

com as condições de não escorregamento na parede do tubo e de simetria, i.e.,

$$u_i(1) = 0 \quad i = 0, 1, 2. \quad (6.31)$$

$$\frac{du_i(0)}{dr} = 0 \quad i = 0, 1, 2. \quad (6.32)$$

As soluções encontradas são:

$$u_o = -\frac{\gamma}{4}r^2 + \frac{\gamma}{4} \quad (6.33)$$

$$u_1 = \frac{\gamma^2}{64}r^4 - \frac{\gamma^2}{64} \quad (6.34)$$

$$u_2 = -\frac{\gamma^3}{576}r^6 + \frac{\gamma^3}{576} . \quad (6.35)$$

Finalmente, o perfil de velocidade é dado por:

$$u(r) = \frac{\gamma}{4} (1 - r^2) - \frac{\gamma^2}{64}\epsilon (1 - r^4) + \frac{\gamma^3}{576}\epsilon^2 (1 - r^6) . \quad (6.36)$$

A expressão (6.36) obtida pelo método de perturbação regular não representa um perfil parabólico quando há campo magnético aplicado. O regime newtoniano é observado quando o campo magnético é nulo. Com o mesmo método apresentado na seção anterior, em que a vazão adimensional é unitária, determina-se os parâmetros Re e G . Calculando a vazão através do perfil de velocidade, resulta:

$$Q = 2 \int_0^1 u(r)rdr = \frac{\gamma}{8} - \epsilon \frac{\gamma^2}{96} + \epsilon^2 \frac{\gamma^3}{768} . \quad (6.37)$$

Mas $Q = 1$ por definição. Então:

$$1 = ReG \left[1 + \frac{1}{8} \left(\frac{Re_m}{Re} \right)^2 \frac{M_z^\circ}{G} \frac{dH}{dz} - \frac{\epsilon}{96ReG} \gamma^2 + \frac{\epsilon^2}{768ReG} \gamma^3 \right] . \quad (6.38)$$

A equação (6.38) mostra que sob a influência de um campo magnético o produto ReG desvia-se da unidade, podendo ser reescrito como:

$$ReG = 1 + C_{NN} , \quad (6.39)$$

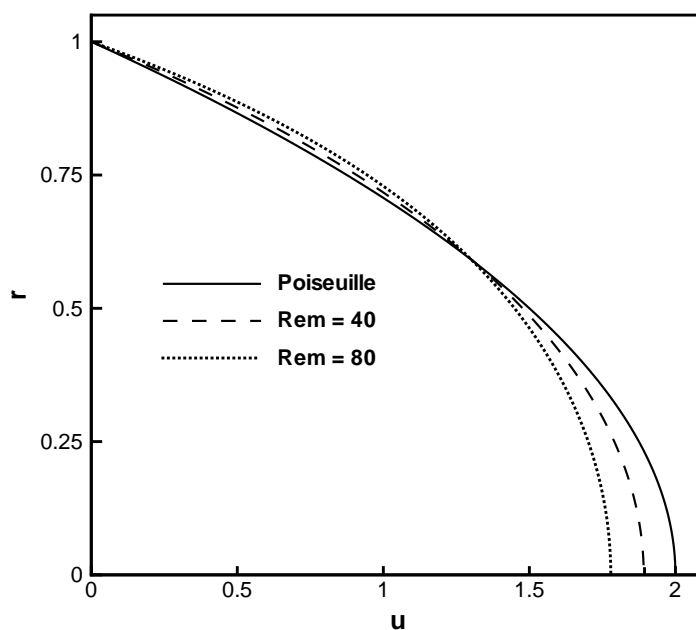


Figura 6.5: Perfis de velocidade obtidos pela solução assintótica com acoplamento magnético e campo desfavorável para diferentes Re_m . ($\phi = 0,03$, $M_d = 5$, $M_d/H = 5$, $\alpha = 6$, $dH/dz = -0,01$ e $G = 2,2$)

em que C_{NN} é a contribuição não newtoniana.

As figuras (6.5) e (6.6) mostram perfis de velocidade obtidos por essa solução para diferentes valores de Re_m com um campo magnético desfavorável e favorável, respectivamente. O fluido possui concentração $\phi = 0,03$, $M_d = 5$, $\alpha = 6$, $M_d/H = 5$, $G = 2,2$ e $\hat{\omega}^2/8 = 0,1$. Para $Re_m = 40$ a redução da velocidade máxima é de 5% e para $Re_m = 80$ a redução é de aproximadamente 10%. Observa-se um aumento na velocidade de 5% para $Re_m = 30$.

Na figura (6.7) mostra-se a variação da viscosidade efetiva ReG com o campo magnético na condição desfavorável, enquanto na figura (6.8) a condição é de campo favorável. Esses resultados indicam diferença significativa com relação ao resultado com campo magnético não acoplado. Neste último não é levado em conta o fato de o escoamento alterar a orientação das partículas devido ao efeito de vorticidade, modificando a magnetização.

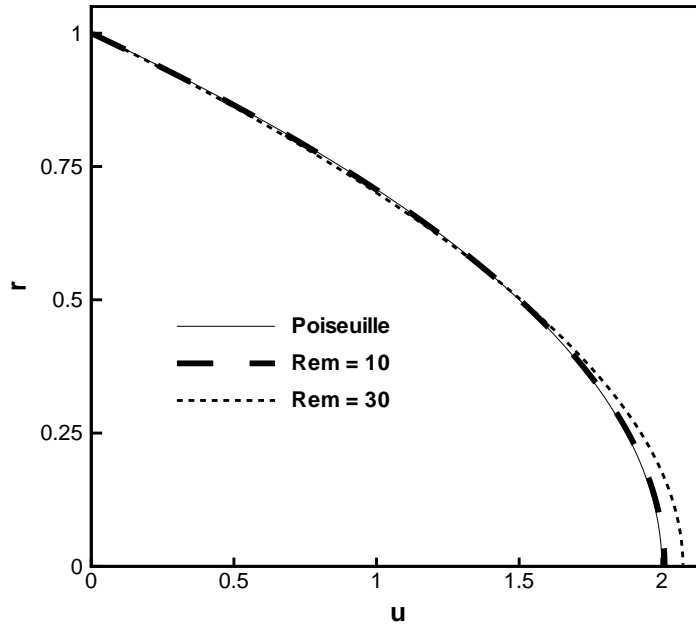


Figura 6.6: Perfis de velocidade obtidos pela solução assintótica com acoplamento magnético e campo desfavorável para diferentes Re_m . ($\phi = 0,03$, $M_d = 5$, $M_d/H = 5$, $\alpha = 6$, $dH/dz = 0,01$ e $G = 2,2$)

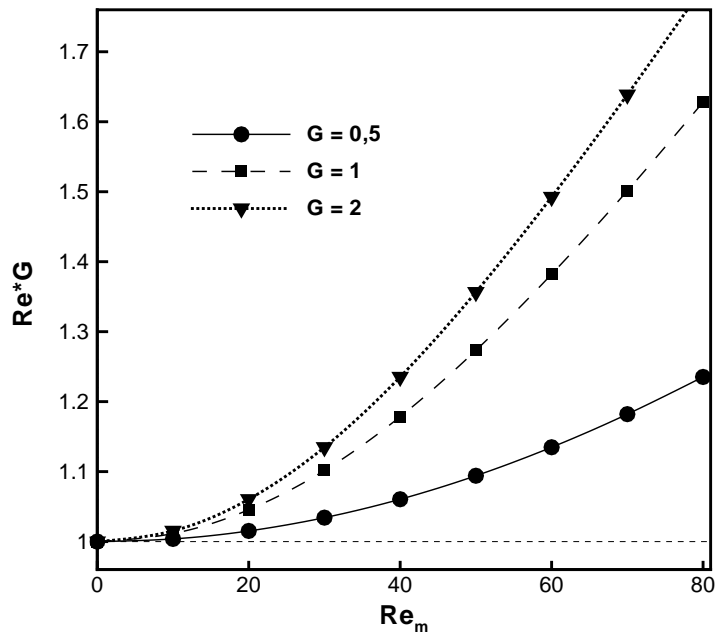


Figura 6.7: Efeito do campo magnético sobre a viscosidade efetiva adimensional Re^*G , para diferentes valores de G . Solução assintótica com acoplamento. ($\phi = 0,03$, $M_d = 5$, $M_d/H = 5$, $\alpha = 6$ e $dH/dz = -0,01$)

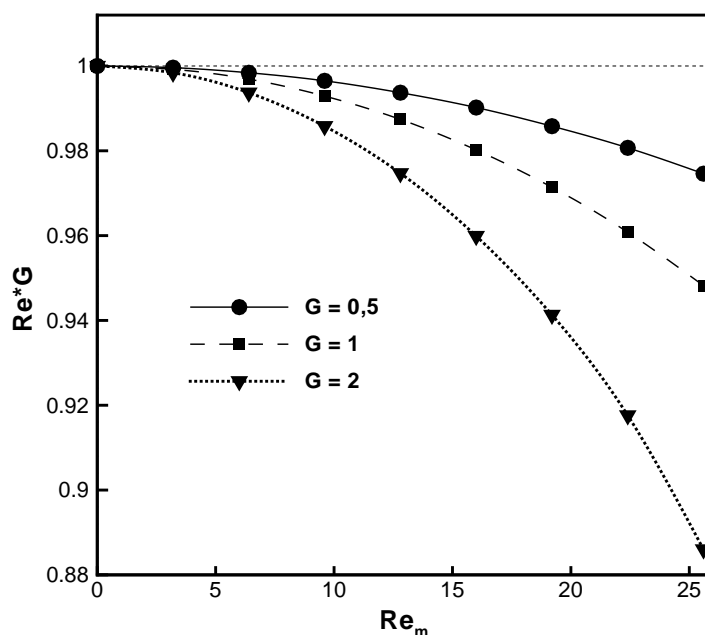


Figura 6.8: Efeito do campo magnético sobre a viscosidade efetiva adimensional ReG , para diferentes valores de G . Solução assintótica com acoplamento. ($\phi = 0,03$, $M_d = 5$, $M_d/H = 5$, $\alpha = 6$ e $dH/dz = 0,01$)

6.2 SOLUÇÃO NUMÉRICA

Nesta seção é descrita a metodologia numérica utilizada para resolver o problema de escoamento de um fluido magnético diluído em tubo capilar.

6.2.1 O Método Runge-Kutta

Para resolver numericamente a equação (6.24) foi utilizado o método de integração de Runge-Kutta. Para integrar a equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (6.40)$$

o método utiliza o valor de y_i para obter uma aproximação para y_{i+1} (ver Bence et al., 2006), fazendo uso apenas da função f . O princípio utilizado é simular uma série de Taylor para $y(x_i + h)$, em que h é o passo, a partir de uma combinação particular dos valores da primeira derivada de y em determinados pontos, em vez de utilizar derivadas

de ordem maior. A equação (6.24) é decomposta em duas equações de primeira ordem, formando o sistema:

$$\frac{dy_1}{dr} = y_2 \quad (6.41)$$

$$\frac{dy_2}{dr} = -\frac{1}{r}y_2 + \frac{1}{8}\hat{\omega}^2\beta y_2^2 - \gamma \quad (6.42)$$

com

$$y_1 = u \quad e \quad y_2 = \frac{du}{dr} . \quad (6.43)$$

Então, para resolver esse sistema foi utilizado o método de Runge-Kutta de quarta ordem vetorial, que é expresso como:

$$\mathbf{y}_{i+1} = \mathbf{y}_i + \frac{\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4}{6}, \quad (6.44)$$

em que

$$\mathbf{k}_1 = hf(\mathbf{y}_i, \mathbf{r}_i), \quad (6.45)$$

$$\mathbf{k}_2 = hf\left(\mathbf{y}_i + \frac{h}{2}\mathbf{k}_1, \mathbf{r}_i + \frac{h}{2}\right), \quad (6.46)$$

$$\mathbf{k}_3 = hf\left(\mathbf{y}_i + \frac{h}{2}\mathbf{k}_2, \mathbf{r}_i + \frac{h}{2}\right) e \quad (6.47)$$

$$\mathbf{k}_4 = hf(\mathbf{y}_i + h\mathbf{k}_3, \mathbf{r}_i + h). \quad (6.48)$$

6.2.2 Estrutura do Programa

O passo h é o incremento na direção radial e determina em que pontos a velocidade será calculada ao longo do raio a do tubo. Esse parâmetro é determinado de maneira que a solução seja precisa mas que não gere um gasto computacional excessivo. Como primeira aproximação para o passo h sabe-se que $h/a \ll 1$. Do ponto de vista numérico pode-se propor $h/a = 0,01$. Por análise de escala é possível obter um limitante para o valor mínimo do passo h . Aqui consideramos um regime em que as forças viscosas do

escoamento estão em balanço com as forças magnéticas, por se tratar de escoamento unidirecional livre de inércia. Esta condição é garantida desde que $Re(a/\ell)^2 \ll 1$, o que faz com que o escoamento seja sempre perpendicular ao seu gradiente (i.e. $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = \mathbf{0}$). Então:

$$F_\eta \sim F_M \quad \Longleftrightarrow \quad \eta h U \sim \mu_o M_d H_o h^2 \quad (6.49)$$

o que leva a:

$$\frac{h}{a} \sim \left[\left(\frac{H_o}{M_d} \right) \frac{1}{Re_m^2} Re \right]. \quad (6.50)$$

E assim determina-se a condição

$$\frac{h}{a} = \min \left(10^{-2}, 10^{-2} \left(\frac{H_o}{M_d} \right) \frac{1}{Re_m^2} Re \right). \quad (6.51)$$

Esse passo de tempo foi testado em diversas simulações e apresentou resultados estáveis mesmo para uma ampla faixa de Reynolds Magnético.

Para resolver as E.D.Os (equações diferenciais ordinárias) (6.41) e (6.42) os parâmetros de entrada são G , Re_m , dH/dz , ϕ , M_d e α , para um determinado fluido. Com isso é determinado o perfil de velocidade e o valor de Re para essas condições. Dois problemas são encontrados. Primeiramente, para determinar se o valor de Re encontrado leva a uma vazão unitária, é necessário integrar o perfil de velocidade u ao longo do raio. No entanto, para encontrar o perfil de velocidade é necessário conhecer o valor de Re do escoamento. Trata-se, então, de um problema iterativo entre Re e a integral do perfil de velocidade encontrado. O segundo problema é com relação à solução do sistema de E.D.Os pelo método de Runge-Kutta. São necessárias duas condições de contorno em $r = 0$ ou $r = a$ para que o problema de valor de contorno governado por uma E.D.O de 2ª ordem possa evoluir como um problema tipo P.V.I. (problema de valor inicial) e um método padrão de Runge-Kutta de 4ª ordem possa ser utilizado. Porém, a condição de contorno para u é dada na parede do tubo e a condição de contorno para du/dr é fornecida no centro do tubo (condição de simetria).

Essas dificuldades foram solucionadas conforme descrito a seguir. Primeiro, dadas

as condições de entrada, um valor de Re é assumido. Estima-se também o valor de u no centro do tubo. Agora, com o valor de u especificado em $r = 0$ e com o Re estimado, além da condição de simetria, o P.V.I. é resolvido e obtém-se um perfil de velocidade aproximado. O perfil calculado deve, então, obedecer à condição de não deslizamento na parede (i.e. $u = 0$ em $r = 0$). Se isso não ocorrer, uma nova velocidade em $r = 0$ é estimada, até que se obtenha velocidade nula na parede. Quando o perfil obtido obdecer essas condições, é calculada sua integral para obter a vazão. Como visto na seção anterior, essa vazão por definição deve ser sempre unitária. Caso não seja, um novo Re deve ser estimado e o processo é repetido até que a vazão seja igual a 1 dentro de tolerâncias especificadas. O Re imposto tal que a vazão seja 1 é o Re para essas condições de contorno.

O algoritmo a seguir resume o procedimento numérico descrito no parágrafo anterior:

Algoritmo Numérico

- 1 Entrar com $Re_m, G, dH/dz, \phi, M_d$ e α
- 2 $Re \leftarrow 1/G$
- 3 $u(r=0) \leftarrow 2$
- 4 se $|u(r = a)| < tol1$ então \rightarrow passo 8
- 5 $u_+(r = 0) \leftarrow u(r = 0) + \Delta u$
- 6 $u(r = 0) \leftarrow u(r = 0) - \frac{(\Delta u)u(r=a)}{u_+(r=a)-u(r=a)}$
- 7 Voltar ao passo 4
- 8 $\Theta(Re) \leftarrow Q(Re) - 1$
- 9 se $\Theta(Re) < tol2$ então \rightarrow FIM
- 10 $\Theta(Re + \Delta Re) = Q(Re + \Delta Re) - 1$
- 11 $Re \leftarrow Re - \frac{\Delta Re \Theta(Re)}{\Theta(Re + \Delta Re) - \Theta(Re)}$
- 12 Voltar ao passo 8

em que $Q(Re)$ é a vazão encontrada para o número de Reynolds imposto. Para calcular os valores seguintes de $u(r = 0)$ e de Re foi utilizado o procedimento de Newton-Raphson, sendo os incrementos $\Delta u = u/100$ e $\Delta Re = Re/100$, respectivamente. Como critério de parada das iterações utiliza-se dois valores de tolerância. O parâmetro $tol1$ é

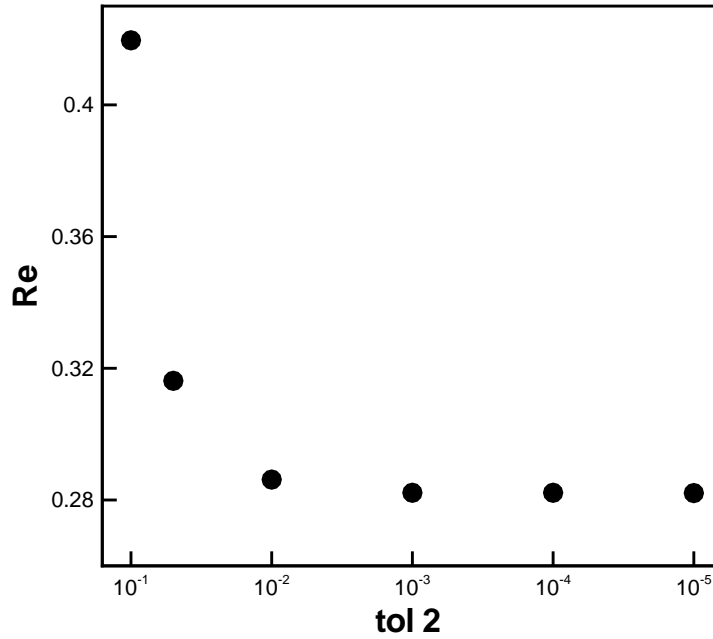


Figura 6.9: Estudo da convergência do número de Reynolds em função da tolerância para a vazão. Nota-se que com $tol2 = 10^{-3}$ o valor de Re calculado já é o valor de convergência. Valores de entrada: $\phi = 0,03$, $M_d = 5$, $M_d/H = 5$, $\alpha = 6$, $dH/dz = 0,01$, $G = 2$ e $Re_m = 50$.

a tolerância para a condição de não escorregamento na parede e $tol2$ é a tolerância para a condição de vazão adimensional unitária. Os valores utilizados para essas tolerâncias foram de 10^{-3} e 10^{-4} , respectivamente. A figura (6.9) mostra um estudo de convergência de Re em função de $tol2$. Nota-se que com um valor de $tol2 = 10^{-3}$ já existe uma convergência para a solução correta, assim com o valor utilizado garante-se o resultado convergido. Já para o caso da velocidade a convergência é linear, i.e., a relação entre o valor assumido inicialmente e o valor encontrado da velocidade na parede é linear. Como é utilizado o método de Newton-Raphson para determinar o próximo valor, a convergência é alcançada já no segundo passo, de modo que a tolerância utilizada garante que esteja próximo de zero. No problema Newtoniano a convergência é rápida, sendo necessária apenas uma iteração para que $ReG = 1$. Por outro lado, para problemas não-lineares o número de iterações foi em média de 4, tendo um valor máximo de 7 nas condições de G pequenos e altos Re_m .

Com essa metodologia foi resolvido o problema e os resultados são apresentados no capítulo seguinte.

7 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Neste capítulo são apresentados os resultados da resolução numérica, descrita no capítulo anterior, do problema proposto de escoamento de fluido magnético em um tubo capilar com campo magnético axial de decaimento linear. As condições do fluido, quando não explicitado nada no texto, são as mesmas consideradas no capítulo da solução analítica: $\phi = 0,03$, com $M_d = 5$, $\alpha = 6$, $M_d/H = 5$, $G = 2,2$ e $w^2/8 = 0,1$. Para o campo magnético favorável $dH/dz = 0,01$, enquanto para o desfavorável $dH/dz = -0,01$. O tubo capilar no qual o fluido escoar possui razão de aspecto $\ell/a = 100$.

Na figura (7.1) são mostrados os perfis de velocidade para diferentes Re_m , com um gradiente de pressão $G = 2,2$, na condição de campo desfavorável. Para $Re_m = 80$, a velocidade máxima teve uma redução de 15% e nota-se claramente o desvio do perfil com relação ao perfil parabólico. Já a figura (7.2) apresenta os perfis obtidos para campo favorável ao escoamento.

Na figura (7.3) são plotados os perfis obtidos com campos de mesma intensidade, mas um favorável e outro desfavorável. Os perfis são comparados ao perfil parabólico. Para o caso de campo desfavorável nota-se que o perfil de velocidade é mais uniforme, semelhante ao perfil de velocidade de um escoamento turbulento. As figuras (7.4) e (7.5) apresentam os valores máximos de velocidade obtidos pela solução numérica em função de Re_m . A diminuição da velocidade máxima com o campo é consequência direta do aumento de viscosidade que a princípio pode ser interpretado como uma intensificação do mecanismo de transferência de quantidade de movimento no fluido.

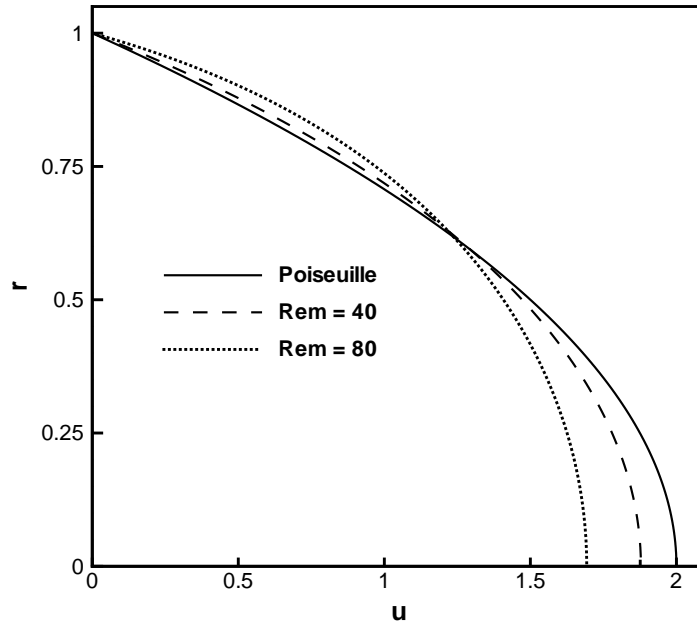


Figura 7.1: Perfis obtidos da solução numérica com campo desfavorável. ($\phi = 0,03$, $M_d = 5$, $M_d/H = 5$, $\alpha = 6$, $dH/dz = -0,01$ e $G = 2,2$)

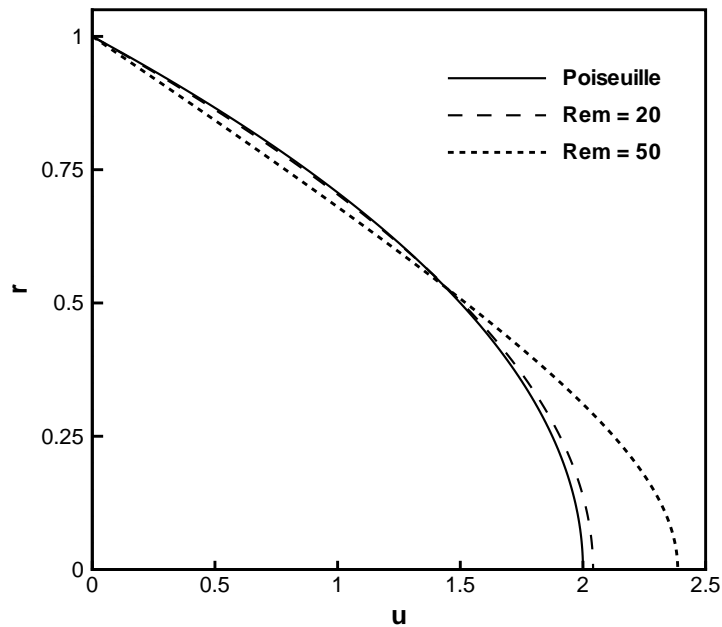


Figura 7.2: Perfis obtidos da solução numérica com campo favorável. ($\phi = 0,03$, $M_d = 5$, $M_d/H = 5$, $\alpha = 6$, $dH/dz = 0,01$ e $G = 2,2$)

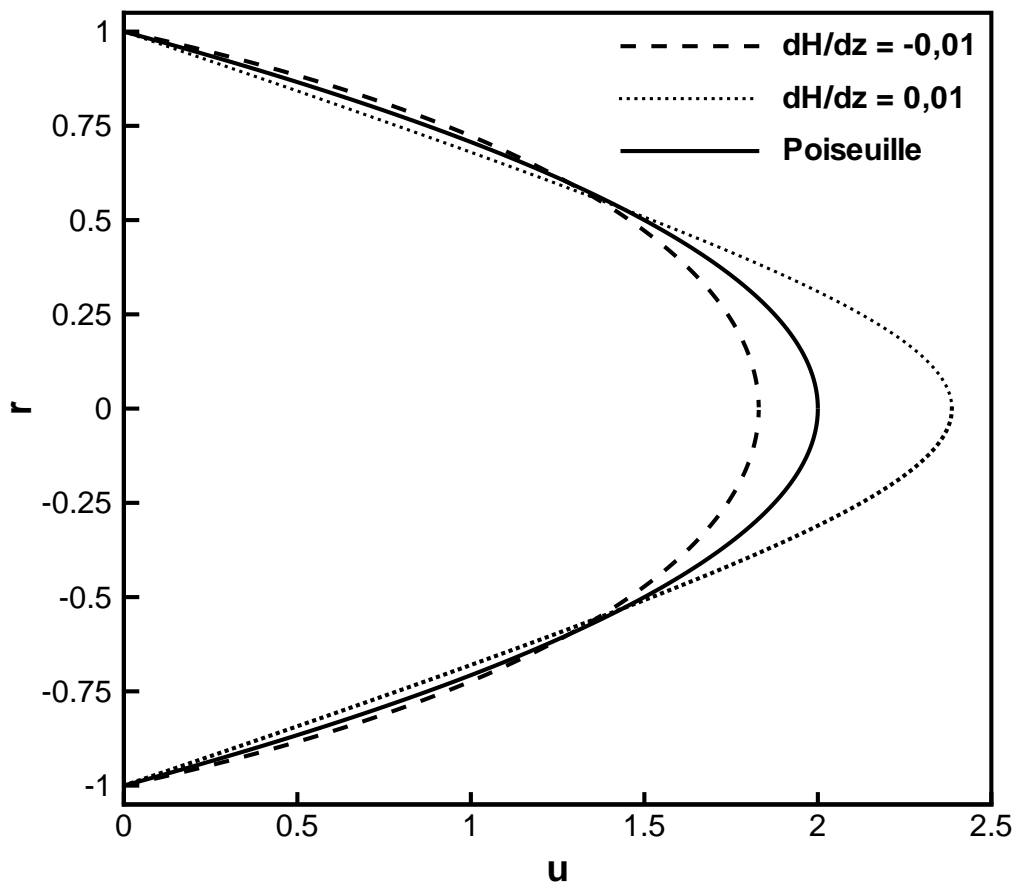


Figura 7.3: Perfis obtidos da solução numérica para $Re_m = 50$ com campo favorável ($dH/dz = 0,01$) e campo desfavorável ($dH/dz = -0,01$). A linha cheia representa a lei de Poiseuille. ($\phi = 0.03$, $M_d = 5$, $M_d/H = 5$, $\alpha = 6$ e $G = 2,2$)

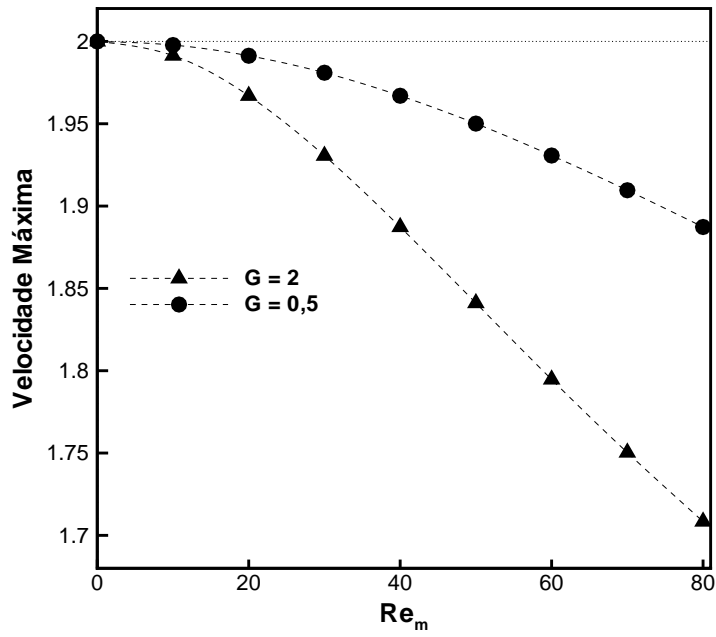


Figura 7.4: Velocidade máxima obtida em função de Re_m para $G = 2,0$ e $G = 0,5$. ($\phi = 0,03$, $M_d = 5$, $M_d/H = 5$, $\alpha = 6$ e $dH/dz = -0,01$)

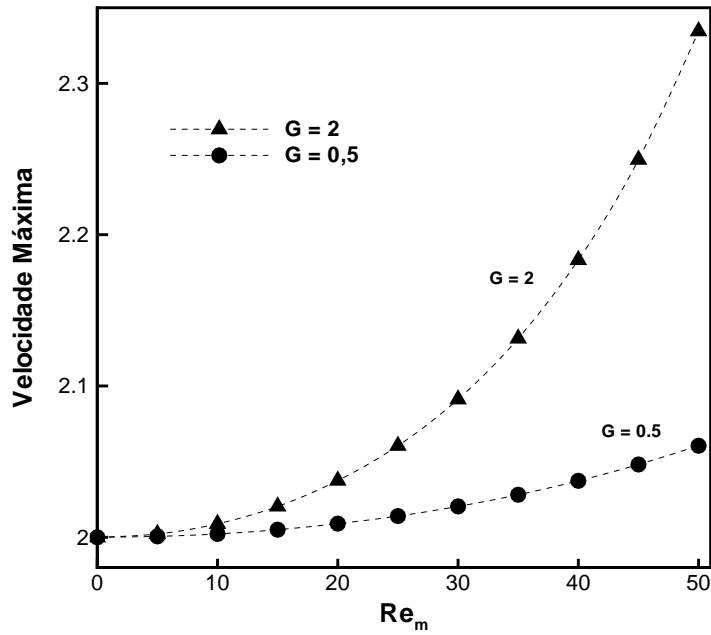


Figura 7.5: Velocidade máxima obtida em função de Re_m para $G = 2,0$ e $G = 0,5$. ($\phi = 0,03$, $M_d = 5$, $M_d/H = 5$, $\alpha = 6$ e $dH/dz = 0,01$)

O efeito do campo magnético sobre a viscosidade efetiva adimensional é exibido nas figuras (7.6) e (7.7) para diferentes valores de G . Com campo desfavorável e $Re_m = 80$ o aumento na viscosidade devido a efeitos magnéticos apenas é de aproximadamente 80%. Já com um campo favorável a diminuição máxima da viscosidade obtida foi em torno de 40% para $Re_m = 50$. Essa diminuição da viscosidade pela aplicação de um gradiente de campo favorável a $-\nabla p$ produz em termos práticos uma diminuição do arrasto de fricção do escoamento no interior de tubos mesmo em regimes de escoamentos laminares, em contraste com a redução de arrasto padrão usando polímero, no qual o escoamento é necessariamente turbulento.

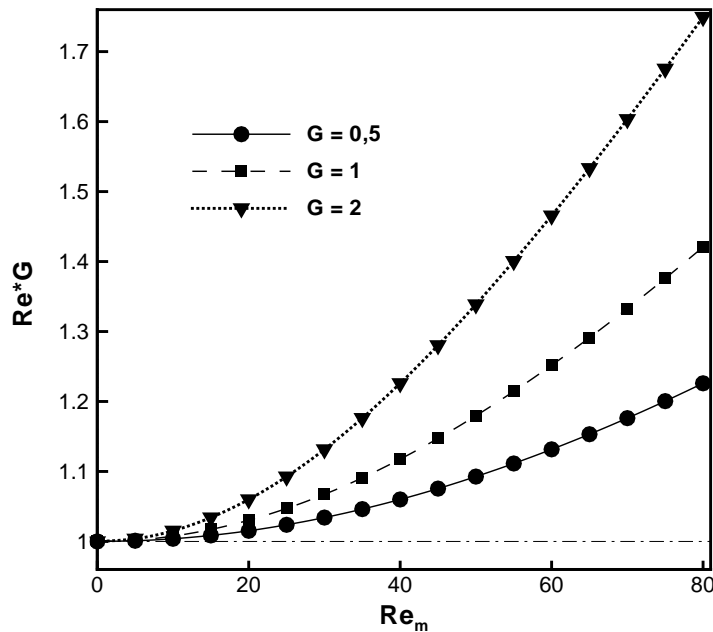


Figura 7.6: Efeito do campo magnético sobre a viscosidade efetiva adimensional, ReG , para diferentes valores de G . Solução numérica. ($\phi = 0,03$, $M_d = 5$, $M_d/H = 5$, $\alpha = 6$ e $dH/dz = -0,01$)

Nas figuras (7.8) e (7.9) são mostrados os fatores de atrito para esse escoamento. Com campo nulo é observado um comportamento newtoniano, pois é desprezado o efeito das partículas no escoamento. Com campo aplicado observa-se um desvio desse comportamento. Com campo desfavorável nota-se que é necessário um gradiente de pressão maior para uma mesma condição de Re . Isso significa que é necessário impor um maior gradiente de pressão ao escoamento, já que há uma força magnética se opondo ao mesmo. Já com campo favorável o contrário ocorre: para uma mesma condição de

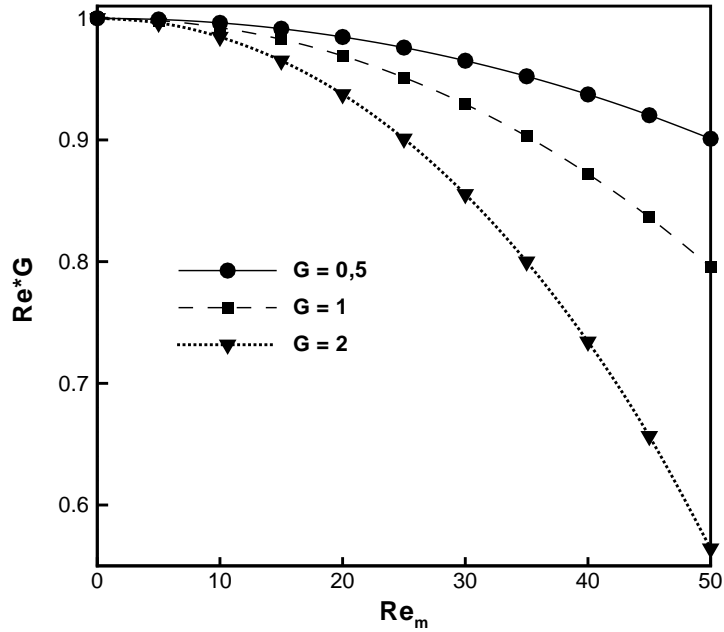


Figura 7.7: Efeito do campo magnético sobre a viscosidade efetiva adimensional, ReG , para diferentes valores de G . Solução numérica. ($\phi = 0,03$, $M_d = 5$, $M_d/H = 5$, $\alpha = 6$ e $dH/dz = 0,01$)

Re é necessário um G menor devido a uma redução do arrasto do escoamento, o que significa menor diferença de pressão imposta ao escoamento para obter a mesma vazão. A implicação prática é que essa menor diferença de pressão leva a uma diminuição na potência de bombeamento exigida no sistema e conseqüentemente a uma economia de energia, conforme já citado por Cunha e Sobral (2004). De acordo com a figura (7.9), com $Re_m = 50$ pode-se obter uma redução do arrasto em torno de 30%. Para valores cada vez maiores de Re os efeitos magnéticos das partículas são minimizados pelos efeitos inerciais do escoamento, o que explica a convergência assintótica das curvas na figura. Isso mostra que com altos valores de Re os efeitos magnéticos são pouco percebidos pelo escoamento.

Considerando que o gradiente de pressão adimensional seja uma soma das contribuições newtoniana e não-newtoniana, ou seja,

$$G = G_N + G_{NN}, \quad (7.1)$$

pode-se escrever:

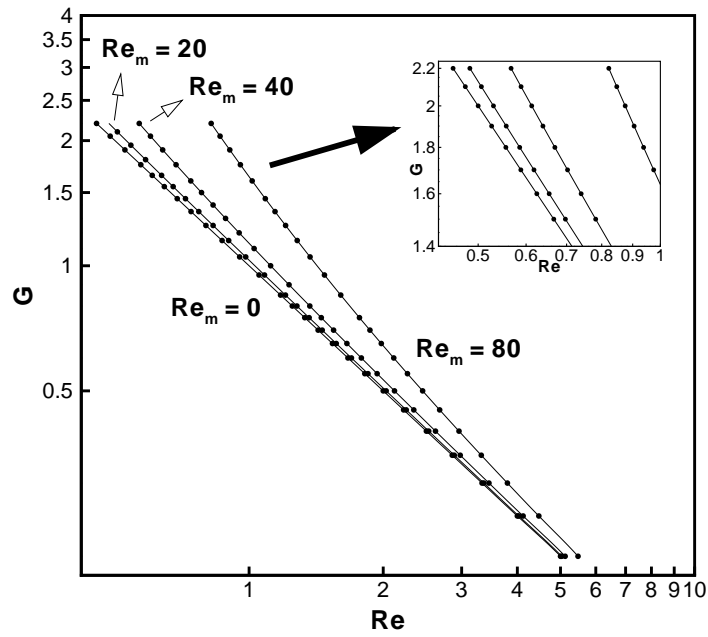


Figura 7.8: Fator de atrito para escoamento em tubo capilar de fluido magnético sob ação de campo magnético desfavorável. ($\phi = 0,03$, $M_d = 5$, $M_d/H = 5$, $\alpha = 6$ e $dH/dz = -0,01$)

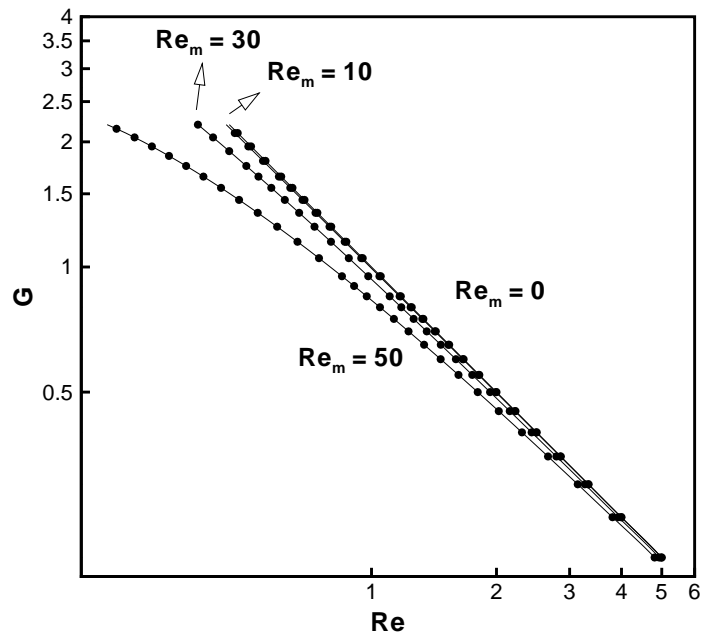


Figura 7.9: Fator de atrito para escoamento em tubo capilar de fluido magnético sob ação de campo magnético favorável. ($\phi = 0,03$, $M_d = 5$, $M_d/H = 5$, $\alpha = 6$ e $dH/dz = 0,01$)

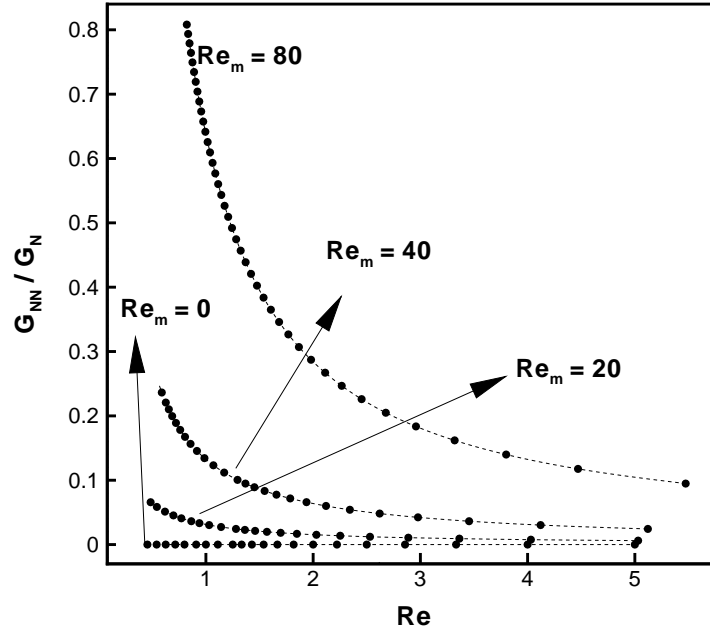


Figura 7.10: Razão entre a contribuição não-newtoniana e a newtoniana do gradiente de pressão adimensional em função de Re para diferentes valores de Re_m . Campo desfavorável. ($\phi = 0,03$, $M_d = 5$, $M_d/H = 5$, $\alpha = 6$ e $dH/dz = -0,01$)

$$\frac{G - G_N}{G_N} = \frac{G_{NN}}{G_N} \quad (7.2)$$

A contribuição newtoniana é dada por $G_N = 1/Re$. Assim é possível determinar a contribuição apenas do campo magnético aplicado sobre G . As figuras (7.10) e (7.11) mostram esse resultado. Na ausência de campo magnético, o valor de G_{NN} é nulo, como já esperado. Para campos favoráveis o efeito não-newtoniano é uma contribuição negativa, ou seja, com o campo aplicado há uma diminuição do gradiente de pressão com relação ao caso newtoniano.

Nas figuras (7.12) e (7.13) é realizada uma análise da dependência da viscosidade efetiva do fluido magnético em função da fração volumétrica de partículas ϕ . Esse resultado é comparado com o teoria proposta por Shliomis (1972) e adaptada por Cunha e Sobral (2004):

$$\eta = \eta_o (1 + [k_1 + k_2 G(\alpha)] \phi), \quad (7.3)$$

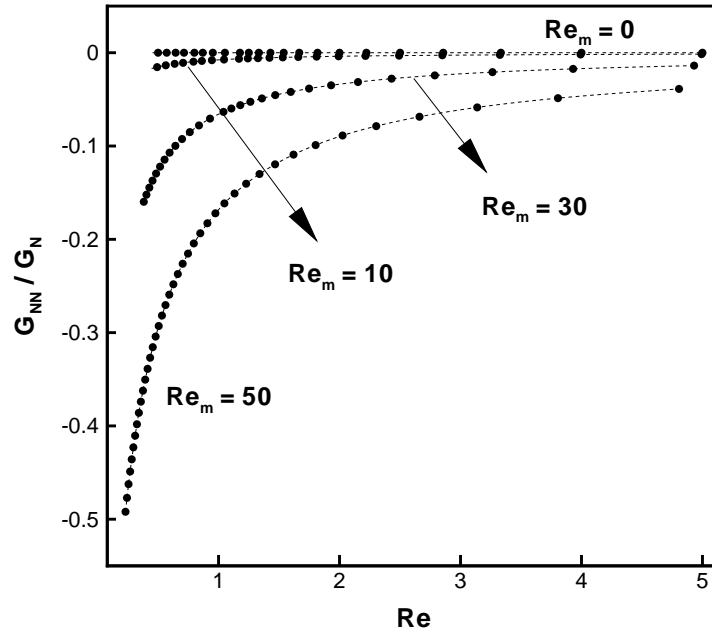


Figura 7.11: Razão entre a contribuição não-newtoniana e a newtoniana do gradiente de pressão adimensional em função de Re para diferentes valores de Re_m . Campo favorável. ($\phi = 0,03$, $M_d = 5$, $M_d/H = 5$, $\alpha = 6$ e $dH/dz = 0,01$)

com

$$G(\alpha) = \frac{\alpha L(\alpha)}{4 + 2\alpha L(\alpha)}. \quad (7.4)$$

A viscosidade do líquido base é η_o e k_1 e k_2 são constantes. Reescrevendo a equação (7.3) como

$$\frac{\eta}{\eta_o} - k_1\phi = ReG = k_2G(\alpha)\phi, \quad (7.5)$$

isola-se a alteração causada na viscosidade apenas por efeitos magnéticos, que é dada por ReG , como definido anteriormente. Assim, as figuras mostram uma comparação entre o resultado do estudo numérico e a teoria para o efeito causado pelo campo na viscosidade efetiva em função de ϕ . A figura (7.14) mostra uma comparação da equação (7.5) com os resultados numéricos para a variação de ReG com o parâmetro α . A maior divergência está na região onde existem interações magnéticas entre as partículas, já que a teoria acima não considera essas interações. Nota-se na figura que o efeito do campo é maior quanto maior o valor de G , isso porque o valor de Re é menor.

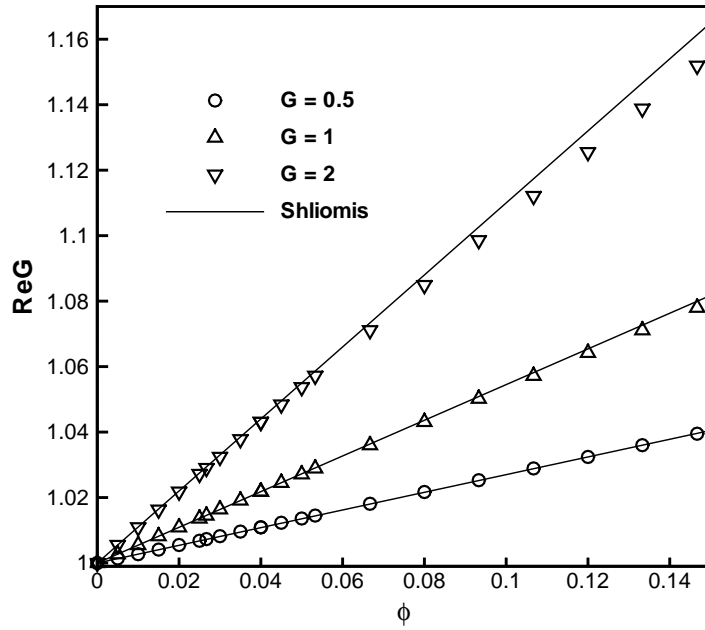


Figura 7.12: Viscosidade efetiva em função da fração volumétrica de partículas ϕ para diferentes valores de G . ($Re_m = 15$, $M_d = 5$, $M_d H = 5$, $\alpha = 6$ e $dH/dz = -0,01$)

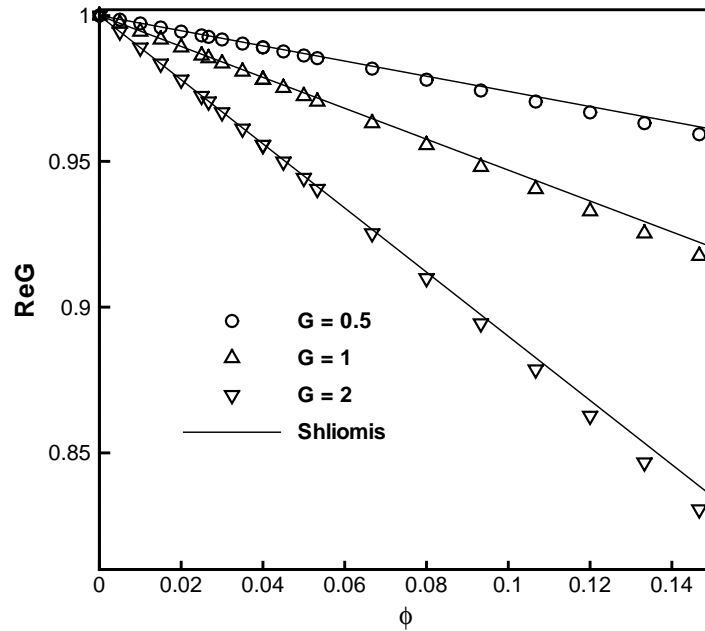


Figura 7.13: Viscosidade efetiva adimensional em função da fração volumétrica de partículas ϕ para diferentes valores de G . ($Re_m = 15$, $M_d = 5$, $M_d/H = 5$, $\alpha = 6$ e $dH/dz = 0,01$)

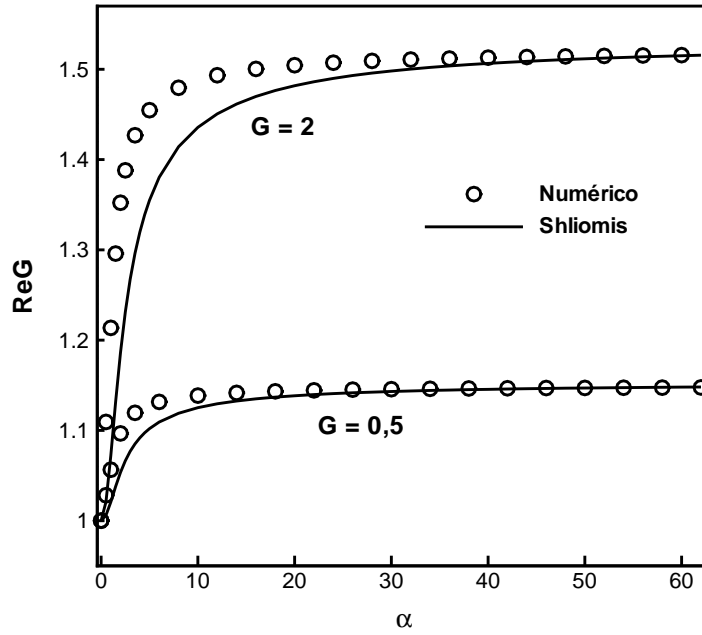


Figura 7.14: Viscosidade efetiva adimensional em função do parâmetro α para diferentes valores de G . ($Re_m = 60$, $M_d = 5$, $M_d/H = 5$, $\phi = 0,03$ e $dH/dz = -0,01$)

7.1 PREDIÇÃO DA RELAÇÃO ENTRE Re e Re_m

A partir de uma análise de escala, considerando que as forças magnéticas escalam com as forças viscosas, tem-se:

$$F_\eta \sim F_M \quad e, \quad \text{portanto,} \quad \eta U a \sim \mu_o M_d \frac{H_o}{l} a^3. \quad (7.6)$$

Com algumas manipulações algébricas, mostra-se que:

$$Re \sim \left(\sqrt{\frac{\mu_o H_o^2}{\rho}} \right) \frac{\rho^2 a^2}{\eta^2} \left(\frac{a}{l} \right). \quad (7.7)$$

Finalmente:

$$Re \sim Re_m^2 \left(\frac{a}{l} \right). \quad (7.8)$$

Portanto, para escoamentos livres de efeitos inerciais Re deve ser proporcional ao quadrado de Re_m . As figuras (7.15) e (7.16) mostram esse comportamento. As linhas cheias são parábolas. Observa-se boa concordância para valores moderados de Re_m tanto para o caso favorável quanto para o caso desfavorável. Com a relação dada pela

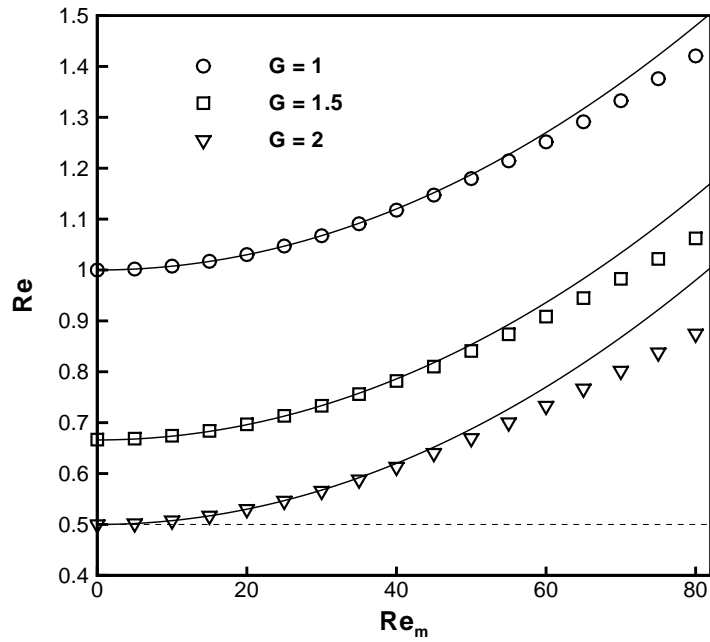


Figura 7.15: Re em função de Re_m para diferentes gradientes de pressão. Os pontos representam os dados numéricos e as curvas correspondem a equação (7.8). ($\phi = 0,03$, $M_d = 5$, $M_d/H = 5$, $\alpha = 6$ e $dH/dz = -0,01$)

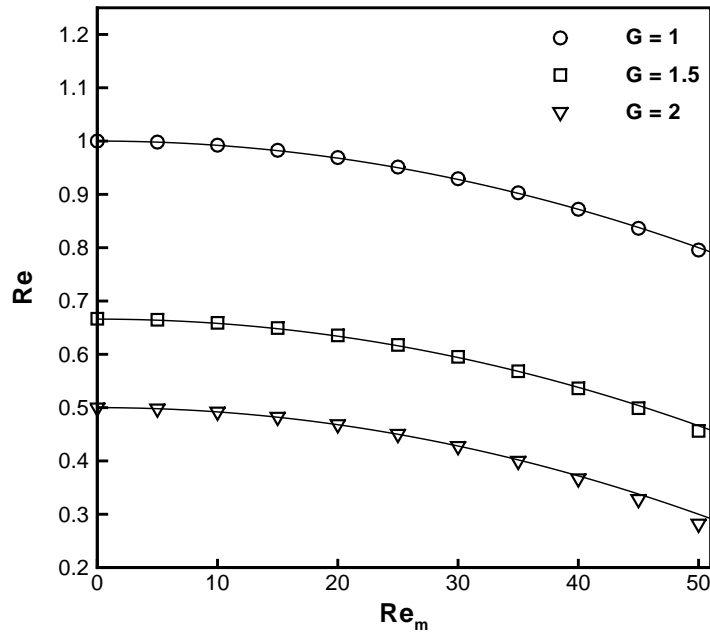


Figura 7.16: Re em função de Re_m para diferentes gradientes de pressão. Os pontos representam os dados numéricos e as curvas correspondem a equação (7.8). ($\phi = 0,03$, $M_d = 5$, $M_d/H = 5$, $\alpha = 6$ e $dH/dz = 0,01$)

equação (7.8) é possível assumir um Re inicial no programa numérico próximo ao resultado correto, mesmo para valores mais altos de Re_m .

7.2 COMPARAÇÃO ENTRE AS SOLUÇÕES

Na figura (7.17) mostra uma comparação entre a solução analítica com acoplamento magnetização-vorticidade e a solução numérica em função do módulo do parâmetro ϵ . Nota-se que as soluções apresentam valores divergentes para $|\epsilon| > 0,3$. No caso em que $|\epsilon| = 0,8$ a diferença entre os valores obtidos é de cerca de 5%.

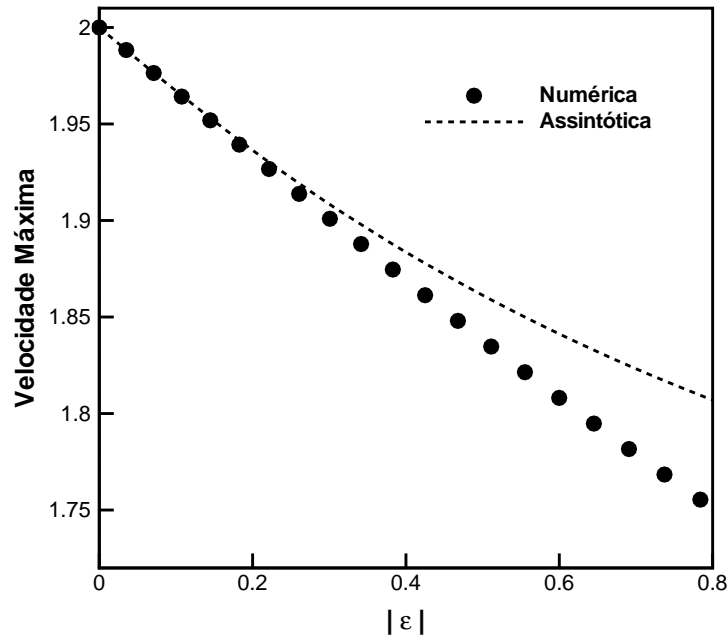


Figura 7.17: Comparação entre as soluções analítica com acoplamento magnetização-vorticidade (assintótica) e numérica em função do módulo do parâmetro ϵ . ($\phi = 0,03$, $M_d = 5$, $M_d/H = 5$, $\alpha = 6$, $dH/dz = -0,01$, $Re_m = 60$ e $G = 2$.)

Nas figuras (7.18) e (7.19) é feita uma comparação entre as soluções sem e com acoplamento magnetização-vorticidade para campo desfavorável. A figura (7.18) mostra a dependência de Re com Re_m para $G = 1$ e $G = 2$, enquanto a figura (7.19) apresenta a variação de ReG com Re_m . A solução analítica sem acoplamento magnetização-vorticidade apresenta bons resultados apenas para baixos valores de Re_m , superestimando o valor da viscosidade pois não leva em consideração o efeito do escoamento

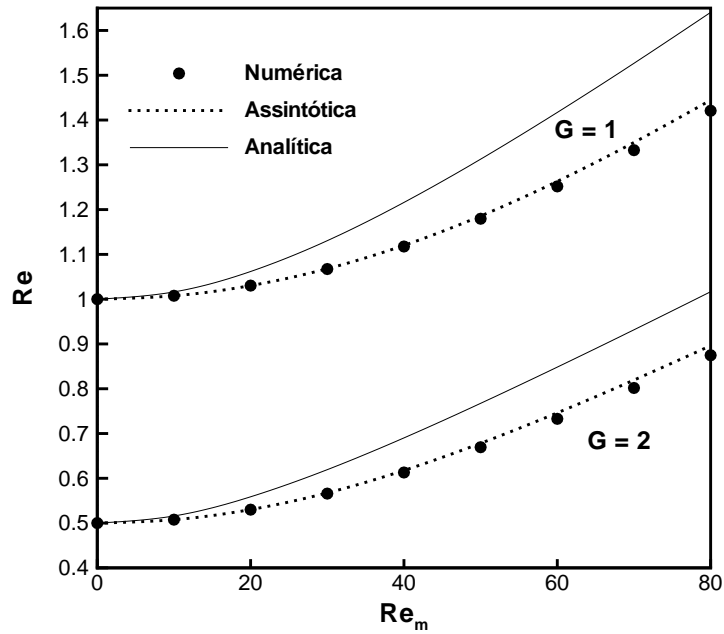


Figura 7.18: Comparação entre as soluções analítica sem acoplamento magnetização-vorticidade, analítica com acoplamento (assintótica) e numérica. Gráfico de Re em função de Re_m . ($\phi = 0,03$, $M_d = 5$, $M_d/H = 5$, $\alpha = 6$ e $dH/dz = -0,01$)

sobre a orientação das partículas. A solução assintótica pelo método de perturbação regular mostra-se em excelente concordância com a solução numérica, apresentando desvios apenas para Re_m maiores que 40. Para $Re_m = 80$ e $G = 0,5$, por exemplo, a diferença entre o resultado numérico e o assintótico para o valor de ReG foi de aproximadamente 5%.

Nas figuras (7.20) e (7.21) são feitas as mesmas comparações das figuras citadas no parágrafo anterior, mas no caso em que há um campo aplicado que favorece o escoamento do fluido magnético. Como mencionado no parágrafo anterior a solução sem acoplamento não apresenta bons resultados para valores de Re_m altos.

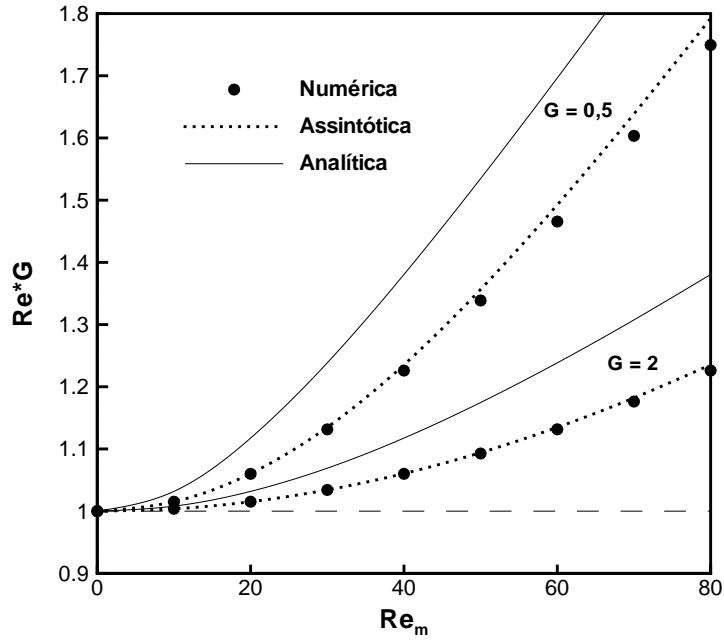


Figura 7.19: Comparação entre as soluções analítica sem acoplamento magnetização-vorticidade, analítica com acoplamento (assintótica) e numérica. Gráfico da viscosidade efetiva adimensional, $Re*G$, em função de Re_m . ($\phi = 0,03$, $M_d = 5$, $M_d/H = 5$, $\alpha = 6$ e $dH/dz = -0,01$)

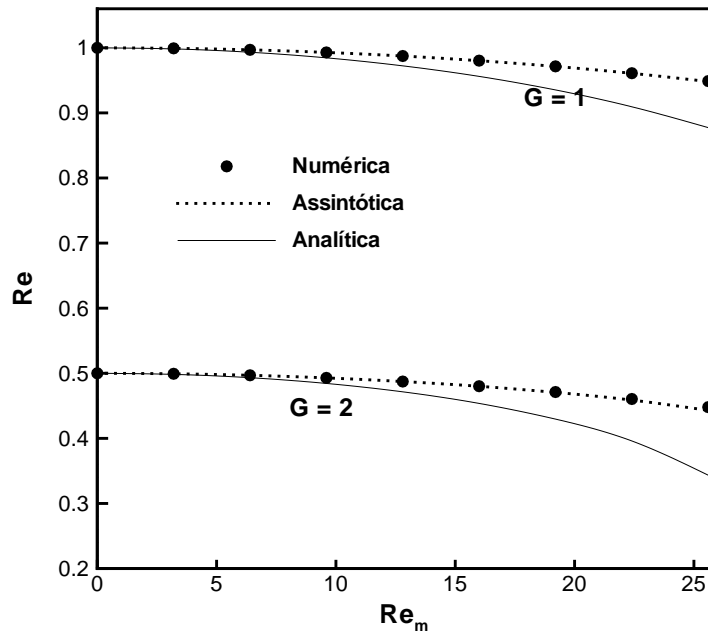


Figura 7.20: Comparação entre as soluções analítica sem acoplamento magnetização-vorticidade, analítica com acoplamento (assintótica) e numérica. Gráfico de Re em função de Re_m . ($\phi = 0,03$, $M_d = 5$, $M_d/H = 5$, $\alpha = 6$ e $dH/dz = 0,01$)

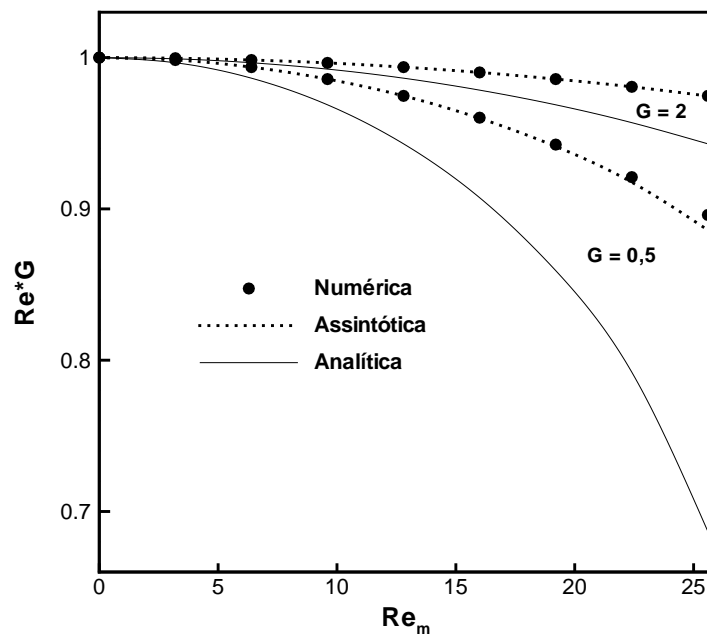


Figura 7.21: Comparação entre as soluções analítica sem acoplamento magnetização-vorticidade, analítica com acoplamento (assintótica) e numérica. Gráfico da viscosidade efetiva adimensional, ReG , em função de Re_m . ($\phi = 0,03$, $M_d = 5$, $M_d/H = 5$, $\alpha = 6$ e $dH/dz = 0,01$)

8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

8.1 CONCLUSÕES

Neste trabalho o aluno familiarizou-se com instrumentos de medição reológica utilizados no Laboratório de Microhidrodinâmica e Reologia do VORTEX (Grupo de Mecânica dos Fluidos de Escoamentos Complexos do Departamento de Engenharia Mecânica da Universidade de Brasília). O aluno trabalhou na caracterização de fluidos newtonianos e de fluidos complexos, como uma emulsão água-óleo produzida no próprio laboratório pelo doutorando Nuno Dias.

Houve também um envolvimento do aluno com a teoria relacionada a fluidos magnéticos. Foi investigado o comportamento em escoamento laminar em tubos capilares a partir do modelo proposto por Cunha e Sobral (2004). Primeiramente foi resolvido o problema em que não há acoplamento entre a vorticidade e a magnetização do fluido. Depois foi resolvida por método de perturbação regular e numericamente a situação em que há acoplamento.

Pelos resultados percebe-se que as características reológicas dos fluidos magnéticos são significativamente alteradas quando há a presença de um campo magnético. Alterações da ordem de 70% foram encontradas para a viscosidade efetiva do fluido. Comparações entre as soluções analíticas e a numérica mostram que há convergência quando $Re_m \rightarrow 0$, como era esperado. Na condição sem campo magnético as soluções apresentaram o comportamento de um fluido newtoniano escoando.

Foi analisado um modelo de magnetização de equilíbrio que contabiliza a interação entre as partículas no fluido magnético. Este modelo, de ordem ϕ^3 foi comparado ao modelo tradicional de Langevin, de ordem ϕ . Observou-se que para $\alpha \sim 5$ a diferença entre os dois modelos é significativa.

Com esse embasamento teórico e com a experiência na utilização de instrumentos

adquiridos, é possível direcionar melhor os esforços para que resultados com relevância científica sejam alcançados.

Este projeto foi de fundamental importância na formação do aluno como engenheiro mecânico. O convívio em um ambiente científico proporcionou um grande crescimento e amadurecimento acadêmico. Vale ressaltar que este trabalho está diretamente ligado ao trabalho de outros alunos do grupo, levando a uma rica troca de informações e de conhecimentos.

8.2 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Algumas sugestões para dar continuidade a este trabalho:

- Caracterizar reologicamente fluidos magnéticos no reômetro com célula magnética, obtendo a viscosidade em função do campo magnético aplicado;
- Determinar a viscosidade em função da fração volumétrica do fluido para um campo constante;
- Validar a teoria proposta para escoamento de fluido magnético em tubo a partir de experimentos em capilares com bomba de seringa;
- Incluir o efeito da presença das partículas no escoamento, mesmo no caso sem campo aplicado;
- Determinar numericamente a resposta do fluido magnético em escoamento em tubo a um campo magnético oscilatório;
- Caracterizar reologicamente outros fluidos complexos (emulsões e sangue) em escoamentos simples e quadráticos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Barnes, H. A., Hutton, J. F., Walters K., 1989, “An Introduction to Rheology”, 1. ed - Elsevier Science.
- Blums, E., Cebers, A., Maiorov, M. M., 1996, “Magnetic Fluids”, 1. ed - Walter de Gruyter.
- Bence, K. F., Hobson, M. P, Riley, K. F., 2006, “Mathematical Methods for Physics and Engineering”, 1. ed - Cambridge University Press.
- Cengel, Y. A., Cimbala, J. M., 2007, “Mecânica dos Fluidos - Fundamentos e Aplicações”, 1 ed. - Editora McGrawHill.
- Cunha, F. R., Sobral, Y.D., 2003, “Characterization of the physical parameters in a process of magnetic separation and pressure driven flows of magnetic fluid in a cylindrical tube.” *Physica A*, 343, 36-64, 2004.
- Cunha, F. R., 2009, “Notas de aula do curso de Dinâmica de Fluidos Não-Newtonianos”, Universidade de Brasília, Departamento de Engenharia Mecânica.
- Cunha, F. R., 2010, “Notas de aula do curso de Mecânica dos Fluidos 2”, Universidade de Brasília, Departamento de Engenharia Mecânica.
- Farias, M. F. P., “Investigação Microestrutural e Reológica de Fluidos Magnéticos”, Projeto de Graduação em Engenharia Mecânica, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 90p.
- Halliday, D., Resnick, R., Walter, J., 1996, “Fundamentos de Física 3”, 4 ed. - Livros Técnicos e Científicos.
- Ivanov, A. o., Kuznetsova, O. B., 2000, “Magnetic properties of dense ferrofluids: An influence of interparticle correlations”, *Physical Review E*, Vol. 64.
- Kraus, J. D., Carver, K. R., 1978, “Eletromagnetismo”, 2 ed. - Guanabara Dois.

- Larson, R. G., 1999, "The structure and rheology of complex fluids", 1 ed. - Oxford University Press.
- Logan, J. D., 2006, "Applied Mathematics", 3 ed. - Jhon Wiley & Sons, Inc.
- Maxwell, J. C., 1873, "A Treatise on Electricity and Magnetism", Clarendon Press.
- Pao, R. H. F., 1967, "Fluid Dynamics", 1 ed. - Purdue University Press.
- Ramos, D. M., 2003, "Modelagem e Simulação Numérica da Hidrodinâmica de Fluidos Magnéticos em Movimento", Dissertação de Mestrado em Ciências Mecânicas, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 153p.
- Rosensweig, R. E., 1985, "Ferrohydrodynamics", 1 ed. - Cambridge University Press.
- Shliomis, M. I., 1972, "Effective viscosity of magnetic suspensions", Soviet Phys, JEPT 34 (6), 1291-4.
- Thidé, B., 1997, "Electromagnetic Field Theory", 1 ed. - Upsilon Books.
- Truesdell, C., Toupin, R. A., 1960, "The Classical Field Theories, Encyclopedia of Physics (Springer-Verlag, Berlin-Heildeberg-New York, 1960), ed. by S. Flügge, Vol. III/1.
- Vieira, R. C. C., 1971, "Atlas de Mecânica dos Fluidos - Fluidodinâmica", 1 ed. - Editora Edgard Blucher.