

Universidade de Brasília – UnB
Faculdade UnB Gama – FGA
Engenharia de Energia

**Estudo do modelo de camadas para a
determinação dos números mágicos: A
mecânica quântica aplicada ao núcleo atômico**

Autor: Mariana Mota Gomes
Orientador: Prof. Dr. Ronni Geraldo Gomes de Amorim

Brasília, DF
2024



Mariana Mota Gomes

**Estudo do modelo de camadas para a determinação dos
números mágicos: A mecânica quântica aplicada ao
núcleo atômico**

Monografia submetida ao curso de graduação
em Engenharia de Energia da Universidade
de Brasília, como requisito parcial para ob-
tenção do Título de Bacharel em Engenharia
de Energia.

Universidade de Brasília – UnB

Faculdade UnB Gama – FGA

Orientador: Prof. Dr. Ronni Geraldo Gomes de Amorim

Brasília, DF

2024

Mariana Mota Gomes

Estudo do modelo de camadas para a determinação dos números mágicos: A mecânica quântica aplicada ao núcleo atômico/ Mariana Mota Gomes. – Brasília, DF, 2024-

90 p. : il. (algumas color.) ; 30 cm.

Orientador: Prof. Dr. Ronni Geraldo Gomes de Amorim

Trabalho de Conclusão de Curso – Universidade de Brasília – UnB
Faculdade UnB Gama – FGA , 2024.

1. Modelo de camadas. 2. Números mágicos. I. Prof. Dr. Ronni Geraldo Gomes de Amorim. II. Universidade de Brasília. III. Faculdade UnB Gama. IV. Estudo do modelo de camadas para a determinação dos números mágicos: A mecânica quântica aplicada ao núcleo atômico

CDU 02:141:005.6

Mariana Mota Gomes

Estudo do modelo de camadas para a determinação dos números mágicos: A mecânica quântica aplicada ao núcleo atômico

Monografia submetida ao curso de graduação em Engenharia de Energia da Universidade de Brasília, como requisito parcial para obtenção do Título de Bacharel em Engenharia de Energia.

Trabalho aprovado. Brasília, DF, 9 de setembro de 2024 – Data da aprovação do trabalho:

Prof. Dr. Ronni Geraldo Gomes de Amorim
Orientador

Prof. Dr. Ademir Eugênio de Santana
Convidado 1

Prof. Dr. Rendisley Aristóteles dos Santos Paiva
Convidado 2

Brasília, DF
2024

Agradecimentos

A jornada responsável por me guiar ao desfecho desse ciclo foi desafiadora e empolgante. Fico feliz por não tê-la traçado sozinha e, diante disso, registro os meus agradecimentos àqueles que foram essenciais na minha formação até o momento.

Agradeço aos meus pais, Osária e Daniel, por serem os meus primeiros mentores, amigos e principais referências. O incentivo, a compreensão e o amor incondicionais que me propiciaram durante esta etapa foi imprescindível para que eu atingisse os meus objetivos.

Ao meu irmão, Daniel Filho, por ser um suporte fundamental durante os meus estudos e ideias. Obrigada por me ensinar a não ter medo de errar e a aproveitar as oportunidades que surgem de forma mais leve.

Ao Gilson, por ser meu melhor amigo e companheiro de todos os momentos.

Ao meu orientador, Ronni Amorim, pelo apoio, acolhimento e, principalmente, conhecimentos compartilhados e conselhos. Obrigada por me acompanhar com tanta paciência e dedicação desde o começo do curso e tornar-se uma referência em seu modo de ensinar e fazer ciência.

Aos professores Wytler Santos, Vinícius Rispoli e Leandro Cardoso pelas contribuições no desenvolvimento deste trabalho e do artigo provindo dos conhecimentos construídos acerca do tema.

A todo corpo docente do curso de Engenharia de Energia e do ciclo básico, os quais, ao longo desses anos, contribuíram direta e significativamente para a minha formação acadêmica e profissional.

Aos meus professores do ensino médio, por mostrarem as possibilidades e o universo de oportunidades que o ingresso em uma universidade pública proporciona.

Aos meus familiares, em especial ao meu querido avô Osaél Gomes (*in memoriam*), com quem aprendi muito a valorizar a paciência em meus processos de aprendizagem e amadurecimento, e cujo ânimo em nossos diálogos sobre o curso, fizeram-me acreditar mais no desfecho bem-sucedido dessa jornada.

A todos os amigos que me ajudaram tanto em todos os aspectos que me trouxeram até o presente momento, em especial Hérya, Giovana, Marcos e Aniclelson.

Aos meus supervisores de estágio, Cláudia e Wilson, por todo encorajamento e compreensão durante o meu último ano de graduação.

À Universidade de Brasília, pelas oportunidades oferecidas e materializadas em conhecimentos, experiências e vivências ímpares e imensuravelmente valiosas.

“A beleza de uma coisa viva não são os átomos que estão nela, mas a forma como esses átomos são colocados juntos.” (Carl Sagan, Cosmos: A Personal Voyage, ep. 5, 1980)

Resumo

O núcleo atômico é fundamental para a compreensão da estrutura da matéria e da estabilidade dos elementos químicos (ou simplesmente núcleos). Nesse sentido, este trabalho possui como objetivo o estudo de um dos mais bem-sucedidos modelos nucleares, o modelo de camadas, direcionado a uma de suas mais relevantes explicações: os números mágicos. O trabalho se inicia com um referencial teórico que propõe uma visão geral dos modelos nucleares, abordando conceitos, suposições e propriedades essenciais para a consolidação dos três modelos mais conhecidos, com ênfase no modelo de camadas, seus princípios norteadores e justificativas de utilização para a descrição da estabilidade nuclear. Com isso, por meio de uma abordagem teórica, a pretensão do trabalho se encontra, inicialmente, na obtenção dos primeiros números mágicos de maneira didática, por meio da resolução da equação de Schrödinger aplicada ao núcleo atômico. Para tanto, a metodologia utilizada parte da resolução analítica desta equação, acompanhada pelas suas implicações no que concerne ao desenvolvimento de soluções para equações diferenciais parciais, abarcando a solução angular e a solução radial. Nesta abordagem, as soluções radiais foram aplicadas a um poço potencial infinito e ao modelo oscilador harmônico, com intuito de se obter os primeiros números mágicos. Os resultados obtidos por meio da resolução analítica da equação de Schrödinger para esses potenciais revelaram padrões consistentes relacionados aos números mágicos, corroborando com os valores conhecidos na literatura, contudo não foi possível obter todos os números mágicos. Por fim, diante do referencial e das discussões propostas pelos resultados, aborda-se a integração da interação spin-órbita à solução radial, de modo a se obter todos os números mágicos. Essa abordagem, por sua vez, permitirá uma compreensão mais abrangente e acessível dos números mágicos e sua importância para a estabilidade nuclear, principalmente por estudantes interessados em compreender melhor o modelo de camadas nucleares.

Palavras-chave: Modelo de camadas. Números Mágicos. Equação de Schrödinger.

Abstract

The atomic nucleus is fundamental to understanding the structure of matter and the stability of chemical elements (or simply nuclei). In this sense, this work aims to study one of the most successful nuclear models, the shell model, focusing on one of its most significant explanations: the magic numbers. The work begins with a theoretical framework that provides an overview of nuclear models, addressing essential concepts, assumptions, and properties for the consolidation of the three most well-known models, with an emphasis on the shell model, its guiding principles, and justifications for its use in describing nuclear stability. Thus, through a theoretical approach, the work initially aims to obtain the first magic numbers in a didactic manner by solving the Schrödinger equation applied to the atomic nucleus. For this purpose, the methodology used starts with the analytical solution of this equation, accompanied by its implications concerning the development of solutions for partial differential equations, encompassing the angular solution and the radial solution. In this approach, the radial solutions were applied to an infinite potential well and the harmonic oscillator model to obtain the first magic numbers. The results obtained through the analytical solution of the Schrödinger equation for these potentials revealed consistent patterns related to the magic numbers, corroborating the values known in the literature. However, it was not possible to obtain all the magic numbers. Finally, considering the theoretical framework and the discussions proposed by the results, the integration of the spin-orbit interaction into the radial solution is addressed to obtain all the magic numbers. This approach, in turn, will allow a more comprehensive and accessible understanding of the magic numbers and their importance for nuclear stability, especially for students interested in better understanding the nuclear shell model.

Keywords: Shell model. Magic numbers. Schrödinger equation.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Repartição da Oferta de Energia Interna, adaptado de (EPE, 2024b).	21
Figura 2 – Resumo das três classes gerais de modelos nucleares, adaptado de Cook (2010)	29
Figura 3 – Evolução cronológica dos modelos nucleares, adaptada de Cook (2010).	30
Figura 4 – Energia de ligação por total de núcleons (COTTINGHAM; GREENWOOD, 2001).	34
Figura 5 – Contribuições à energia de ligação por núcleon devido aos principais termos da fórmula semiempírica da massa (EISBERG; RESNICK, 1979)	37
Figura 6 – Potenciais dos núcleons no modelo do gás de Fermi (MARTIN; SHAW, 2019).	38
Figura 7 – Algumas provas da existência dos números mágicos: (a) Diferença entre valores experimentais e teóricos de E_B do último nêutron (EISBERG; RESNICK, 1979); (b) Seção de choque para captura em função de N (KRANE, 1991); (c) Diferença entre as energias de separação de dois nêutrons medidas e as previstas pela fórmula semiempírica em relação ao número de nêutrons (LILLEY, 2013).	46
Figura 8 – Formação de potenciais no modelo de partículas independente (TIPLER, 1994).	49
Figura 9 – Camadas de energia de uma partícula em um poço nuclear, incluindo o desdobramento spin-órbita (TIPLER, 1994).	53
Figura 10 – Ilustração esquemática de uma partícula em $V(\vec{r})$ (HEYDE, 2020).	61
Figura 11 – Gráficos de $j_l(x)$ para $l = 0$ (vermelho), $l = 1$ (azul) e $l = 2$ (verde) (BOWMAN, 1958).	65
Figura 12 – Estrutura de camadas obtida com poço infinito (KRANE, 1991).	67
Figura 13 – Esquema ilustrativo de potenciais de interação nuclear simples e central, adaptado de Fényes (2011).	71
Figura 14 – Níveis de energia (camadas fechadas) obtidas com o potencial intermediário sem a interação spin-órbita (esquerda) e considerando-a (direita) (KRANE, 1991).	72
Figura 15 – Modelo de camadas para o ${}^{39}_{19}\text{K}$	83

Lista de tabelas

Tabela 1 – Números e núcleos mágicos, traduzido de Mayer (1964).	44
Tabela 2 – Polinômios associados de Legendre (ARFKEN; WEBER, 2005).	63
Tabela 3 – Raízes de $j_l(x)$ e quantidade de núcleons por estado.	66
Tabela 4 – Modelo nuclear obtido com oscilador harmônico simples tridimensional	70
Tabela 5 – Valores de energia do desdobramento spin-órbita e as respectivas ca- madas espectroscópicas.	80
Tabela 6 – Predição dos números mágicos no modelo de camadas. O valor de D é o número de núcleons em cada nível N'	84

Lista de abreviaturas e siglas

UHE	Usina Hidrelétrica
UTE	Usina Térmica
GEE	Gases do Efeito Estufa
SMR	<i>Small Modular Reactor</i>

Lista de símbolos

R_M	Raio médio nuclear
R_0	Raio do núcleo atômico
A	Número total de núcleons ou massa atômica
N	Número de nêutrons
Z	Número de prótons ou número atômico
\propto	Proporcional a
^{235}U	Isótopo do elemento urânio de massa atômica 235
^{238}U	Isótopo do elemento urânio de massa atômica 238
u	Unidade unificada de massa atômica
E_b	Energia de ligação
E_b/A	Energia de ligação por total de núcleons
β	Energia de transição de cascata
ΔM	Defeito de massa
c	Velocidade da luz
m_P	Massa do próton
m_N	Massa do nêutron
$m_{\text{núcleo}}$	Massa do núcleo atômico
M	Massa de um núcleon
E_F	Energia de Fermi
p_F	Momento associado à energia de Fermi
$V(r)$	Potencial efetivo nuclear
$Y_l^m(\theta, \phi)$	Harmônico esférico
n	Número quântico principal (nó radial)

l	Número quântico do momento angular orbital
m	Número quântico magnético
m_l	Orientação do momento angular orbital
m_s	Orientação de momento angular de spin intrínseco
j	Número quântico do momento angular total
s	Número quântico de spin
$V(r)$	Potencial efetivo médio ou energia potencial
\mathcal{H}	Hamiltoniano
\mathcal{H}_k^P	Hamiltoniano do k-ésimo próton
\mathcal{H}_k^N	Hamiltoniano do k-ésimo nêutron
V_0	Profundidade do poço potencial
x	Eixo cartesiano x (abscissa)
∇^2	Operador laplaciano
μ	Massa do sistema constituído por núcleon e núcleo
k	Ocupação da subcamada
$\psi(x)$	Função de onda ou amplitude de probabilidade
$R(r)$	Função da coordenada radial
\vec{S}	Vetor do spin
\vec{L}	Vetor do momento angular orbital
\vec{J}	Vetor do momento angular total
$P_l^{ml}(x)$	Polinômios associados de Legendre
\hbar	Constante de Planck reduzida
N'	Níveis de energia/Camadas

Sumário

1	INTRODUÇÃO	21
1.1	Objetivos	24
1.1.1	Objetivo Geral	24
1.1.2	Objetivos Específicos	24
2	MODELOS NUCLEARES: REVISÃO DE LITERATURA	27
2.1	Breve contextualização	27
2.2	Modelo da gota líquida	31
2.2.1	Fórmula semiempírica da massa	35
2.3	Modelo do gás de Fermi	38
2.4	Modelo de camadas	41
2.4.1	Princípios básicos	41
2.4.2	Números mágicos	43
2.4.3	Potencial efetivo médio	47
2.4.4	Aplicação de poços de potencial	49
2.4.5	Interação spin-órbita e camadas nucleares	52
2.4.6	Evidências e predições do modelo	54
3	MECÂNICA QUÂNTICA APLICADA AO NÚCLEO	57
3.1	Modelo da energia potencial nuclear	57
3.2	Solução da parte angular	59
3.3	Solução da parte radial: Poço potencial infinito	63
3.4	Solução da parte radial: Modelo oscilador harmônico	67
3.5	Potenciais intermediários	70
4	PRINCÍPIOS FUNDAMENTAIS: MOMENTO ANGULAR	73
4.1	Momento angular orbital	73
4.2	Spin	76
4.3	Momento angular total	77
5	INTERAÇÃO SPIN-ÓRBITA	79
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS E PERSPECTIVAS FUTURAS	85
	REFERÊNCIAS	87

1 Introdução

O cenário atual de demanda de energia se apresenta crescente e, aliado a isso, o incentivo à integração de fontes renováveis, nas matrizes elétricas e energéticas nacionais e mundiais, apresenta-se como uma medida primordial para mitigar os efeitos das mudanças climáticas e promover a transição energética.

Em consonância com os dados fornecidos pelo Relatório Síntese do Balanço Energético Nacional (BEN) de ano base 2023, a oferta interna de energia (OIE) registrou um aumento de 3,5% em relação ao ano anterior (EPE, 2024b). Nesse contexto, esse aumento foi refletido na maior participação de fontes renováveis na matriz energética, notadamente biomassa, eólica e solar. Dessa maneira, as fontes renováveis compuseram 49,1% da OIE, conforme ilustrado na Figura 1.

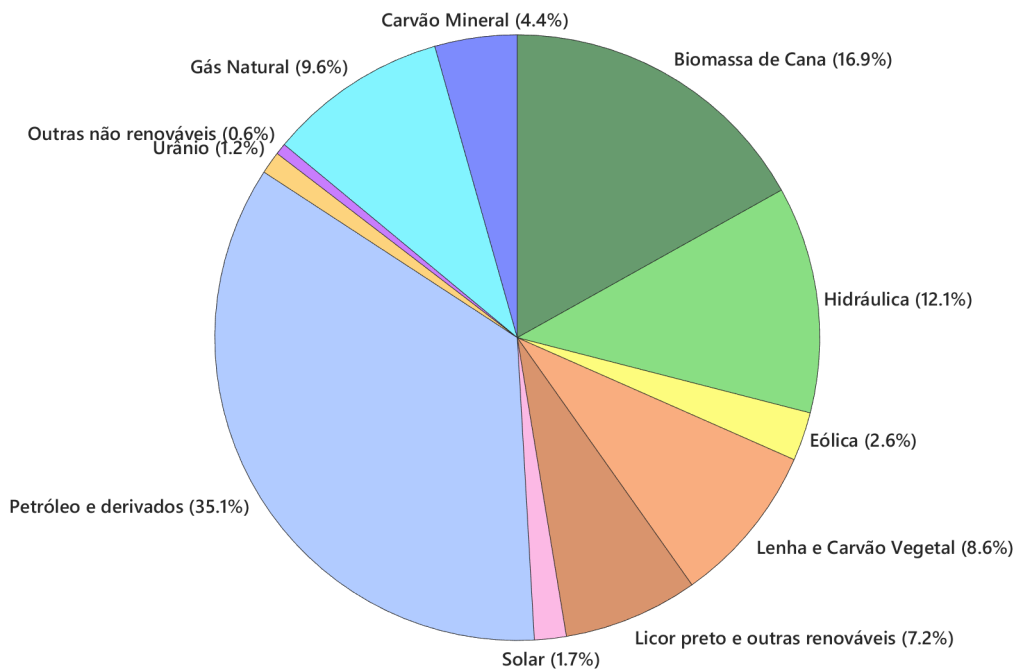


Figura 1 – Repartição da Oferta de Energia Interna, adaptado de (EPE, 2024b).

Diante da notoriedade do Brasil em face ao âmbito mundial, no que diz respeito à geração de energia por fontes renováveis, como pode ser observado em (EPE, 2024a), é perceptível que o fomento à integração de fontes intermitentes, principalmente solar e eólica, ao sistema elétrico é uma das principais providências para a descarbonização, precedida pela diminuição do uso de combustíveis fósseis. Contudo, é imprescindível considerar a complementariedade no que concerne à intermitência das fontes renováveis, especialmente na geração de energia elétrica, a fim de assegurar a segurança energética.

No contexto da complementariedade, as usinas hidrelétricas (UHEs) e térmicas

(UTEs) exercem funções essenciais. Todavia, as UHEs apresentam intermitência intrínseca, uma vez que sua geração depende do regime pluvial, e as UTEs utilizam majoritariamente combustíveis fósseis como fonte primária, contribuindo significativamente com a emissão de CO_2 e demais gases do efeito estufa (GEE).

A geração de energia nuclear se destaca pela eficiência entre as UTEs e desempenha um papel crucial na transição dos combustíveis fósseis para fontes limpas e sem emissões. Zhang et al. (2024) afirmam que a falta de investimentos em energia nuclear dificultará e encarecerá as metas globais de descarbonização (*net zero*). Dessa maneira, para atingir essas metas, a capacidade de geração nuclear deve dobrar de 413 GW em 2022 para 812 GW em 2050 (ZHANG et al., 2024). Além disso, a energia nuclear oferece um suprimento diversificado e seguro de eletricidade, com custos operacionais menos vulneráveis à volatilidade dos preços dos combustíveis em comparação com usinas de combustíveis fósseis (ZHANG et al., 2024; KRMI; KAVI, 2023). Tecnologias nucleares avançadas, como os pequenos reatores modulares (SMR), também fornecem geração despachável e maior segurança sem a necessidade de grandes instalações (KRMI; KAVI, 2023).

Defronte do potencial da energia nuclear e a alta demanda por energia, além do investimento nas cadeias finais das usinas e da indústria nucleares, é impreterível considerar que a pesquisa na área nuclear abarca avanços os quais demandam estudos de propriedades nucleares. O estudo aprimorado do núcleo atômico e de suas propriedades constitui a base para o desenvolvimento de tecnologias mais seguras e eficientes, permitindo a otimização dos reatores nucleares e a minimização dos riscos associados. Desse modo, uma das propriedades mais importantes para o desenvolvimento dessas tecnologias é a estabilidade nuclear.

A análise da estabilidade nuclear é fundamental no contexto da engenharia nuclear, a fim de garantir a segurança nas operações de usinas nucleares, prevenir acidentes, otimizar o manuseio de materiais radioativos e para o desenvolvimento de combustíveis nucleares mais eficientes e com maior controle de estabilidade (OLANDER, 2009), i.e. na identificação de materiais propícios à fissão nuclear. Nesse escopo, diversos modelos nucleares se propuseram a explicar essa propriedade, uma vez que se verifica experimentalmente que, dentre os 2500 núcleos atômicos conhecidos, menos de 300 núcleos não decaem naturalmente, sendo assim considerados estáveis e possuem grandes energias de ligação.

A fim de explicar a dinâmica e a estrutura dos núcleos estáveis, o primeiro modelo nuclear estabelecido para a física do núcleo atômico foi o modelo da gota líquida, introduzido por George Gamow em 1928 (GAMOW, 1930) e expandido e aperfeiçoado por Niels Bohr e Carl Friedrich von Weizsäcker. Sua principal contribuição foi calcular as energias de ligações de diversos núcleos atômicos. Porém, as limitações desse modelo se encontram em condições para explicar a estabilidade nuclear de núcleos atômicos com números de nêutrons N e/ou número de prótons Z iguais a 2, 8, 20, 28, 50 ou 126. Esses números,

por sua vez, referem-se diretamente à estabilidade nuclear (TIPLER, 1994) uma vez que eles correspondem a específicos números de prótons e nêutrons que pertencem às camadas completas do núcleo (SZAMOSI, 1954), eles os denominados como números mágicos.

Com isso, durante o desenvolvimento da física nuclear, observou-se que a estabilidade nuclear poderia ser interpretada de maneira análoga à estabilidade dos gases nobres, que possuem camadas eletrônicas preenchidas com Z iguais a 2, 10, 18, 36, 54 e 86. A mecânica quântica mostrou como os elétrons são distribuídos em camadas e subcamadas nos átomos, movendo-se independentemente no campo coulombiano do núcleo. As flutuações energéticas observadas tanto nos elétrons dos átomos quanto nos núcleos sugerem que algumas propriedades nucleares podem ser explicadas por um modelo de camadas nucleares. Essa analogia, por sua vez, é crucial para entender o modelo de camadas e a distribuição dos núcleons no núcleo atômico.

Nesse sentido, o modelo de camadas consiste em um modelo análogo à estrutura orbital dos elétrons no núcleo atômico (MARTIN; SHAW, 2019). Neste modelo, a interação dos núcleons gera um poço de potencial (KAMAL, 2014), no qual cada núcleon se move independentemente, ele representa a interação média com os outros núcleons em um núcleo, obedecendo ao princípio de exclusão de Pauli (SMIRNOVA, 2009). Este é o modelo responsável por fornecer uma compreensão essencial da organização dos núcleos atômicos e tem sido fundamental para explicar várias propriedades nucleares, como a distribuição de carga, a energia de ligação, a natureza dos isótopos, e abarcando a propriedade sobre a qual possui a explicação mais bem-sucedida: a estabilidade nuclear (MARTIN; SHAW, 2019).

Apesar das similaridades entre os âmbitos da eletrosfera e do núcleo atômico, é necessário considerar um potencial diferente deve ser usado para representar o curto alcance das forças nucleares. Segundo Fényes (2011), tendo em vista que o modelo de camadas é um modelo de partículas independentes, o pressuposto básico é que os núcleons de valência se movem em um campo médio produzido pelos núcleons inertes do núcleo. Sendo assim, espera-se que o campo médio seja aproximadamente proporcional à densidade nuclear (FÉNYES, 2011). Uma aproximação é assumir que os núcleons (prótons e nêutrons) se movem em um potencial aproximado de um oscilador harmônico tridimensional esférico $V = \frac{1}{2}m\omega^2 R^2$, por exemplo. Contudo, ressalta-se que qualquer poço de potencial gera níveis de energia discretos, cabe, então, analisar potenciais que sejam coerentes com as dinâmicas do núcleo atômico.

Conquanto, para o estudo desse modelo, é sabido na literatura que a ideia de que núcleons ocupariam camadas quânticas foi sugerida inicialmente em meados da década de 1930, no entanto, somente com a contribuição dos físicos Maria G. Mayer e Johannes H. D. Jensen, que se consolidaram explicações físicas plausíveis e evidências que sustentassem de fato o modelo de camadas (PANUSH, 1964), as quais concederam a eles o Nobel

de Física em 1963. Mayer descobriu ser possível discernir alguns padrões notáveis nas características e propriedades de combinações particulares de núcleons, além das citadas, como spins nucleares e momentos magnéticos (PANUSH, 1964).

Isto posto, o presente trabalho se concentra no estudo e na apresentação didática do modelo de camadas, analisando os níveis de energia que determinam a disposição dos prótons e nêutrons no núcleo. Busca-se obter os números mágicos, utilizando a equação de Schrödinger aplicada a dois modelos de poços de potencial: poço infinito e oscilador harmônico. Ademais, a interação spin-órbita será considerada, após o desenvolvimento das bases físicas e matemáticas, para compreender completamente a disposição energética dos núcleons no núcleo.

Além de compreender a estabilidade nuclear e o modelo de camadas, é indispensável trazê-la para uma linguagem acessível, de modo a difundir o conhecimento acerca desse modelo nuclear. Outrossim, considerando a ausência de materiais em português acerca do tema, este trabalho visa construir um material didático que auxilie estudantes de física nuclear a entender o modelo de camadas nucleares em níveis introdutórios e permita que estudantes e professores de mecânica quântica visualizem uma aplicação prática dos conteúdos abordados no curso.

1.1 Objetivos

1.1.1 Objetivo Geral

Este trabalho possui como objetivo geral apresentar didaticamente a obtenção dos números mágicos nucleares a partir do modelo de camadas, com a fundamentação na equação de Schrödinger.

1.1.2 Objetivos Específicos

Para que o objetivo geral seja atingido, pretende-se:

- Delinear um referencial teórico acerca dos modelos nucleares, com ênfase no modelo de camadas.
- Apresentar didaticamente a formulação do modelo de camadas nucleares.
- Elaborar a descrição do comportamento nuclear em um modelo de partículas independentes.
- Aplicar a equação de Schrödinger ao núcleo atômico para a obtenção da solução angular.

-
- Obter a solução da parte radial da equação de Schrödinger e os números mágicos com a aplicação do poço potencial infinito.
 - Obter a solução da parte radial da equação de Schrödinger e os números mágicos com a aplicação do oscilador harmônico.
 - Incluir a interação spin-órbita na solução radial para a obtenção de todos os números mágicos.
 - Discutir a concordância entre os resultados obtidos com a literatura, tendo em vista o desenvolvimento do referencial teórico.

2 Modelos nucleares: Revisão de literatura

O âmago da matéria se encontra no núcleo atômico e ele é responsável por nortear características fundamentais do mundo macroscópico. Assim, o núcleo constitui um objeto de estudo de suma importância e complexidade. Sendo constituído por prótons e nêutrons, chamados de núcleons, cuja coesão é regida pelas forças nucleares. Contudo, apesar de bem estabelecida, a composição do núcleo não consegue explicar por si só os fenômenos que o regem, bem como suas propriedades e interações.

Assim, os modelos nucleares foram desenvolvidos para elucidar as propriedades e interações dos núcleos atômicos, destacando-se entre eles o modelo da gota líquida, o modelo do gás de Fermi e o modelo de camadas. Cada um desses modelos é projetado para explicar propriedades nucleares específicas, considerando suas limitações e abordagens distintas (EISBERG; RESNICK, 1979). Como cada modelo se baseia em determinadas suposições, eles abordam apenas aspectos particulares dos núcleos, exigindo que outras características sejam explicadas e complementadas por outros modelos (KAMAL, 2014).

Neste capítulo, apresenta-se uma perspectiva histórica dos principais modelos nucleares, reverberando a evolução das propostas e a relevância de cada um.

2.1 Breve contextualização

Os modelos nucleares consistem em construções teóricas da estrutura do núcleo atômico, de modo que contenham os elementos essenciais da física nuclear (KRANE, 1991) e analogias em que determinadas semelhanças com alguns outros sistemas físicos são matematicamente bem compreendidas (KAMAL, 2014). Nessa perspectiva, esses modelos surgiram com o intuito de descrever e explicar certas propriedades nucleares (EISBERG; RESNICK, 1979). Assim, tendo em vista a complexidade inerente à interação entre os núcleons, tais modelos possuem limitações e se destinam a especificidades no que concerne às explicações de certos comportamentos nucleares, já que nenhum modelo por si só é capaz de explicar completamente todos esses comportamentos (LAMARSH; BARATTA, 2001). Com isso, a compreensão abrangente do núcleo requer a integração e complementaridade de múltiplos modelos, cada um contribuindo para uma visão mais completa da complexidade subjacente dos fenômenos e propriedades nucleares.

Em consonância com (KAMAL, 2014), sabe-se que os modelos os quais são usados na física nuclear, bem como na física atômica, são desenvolvidos devido ao fato de não ser possível resolver a equação de Schrödinger de muitos corpos com forças de Coulomb ou forças nucleares. Ademais, o autor supramencionado enfatiza que as particularidades

observadas dos núcleos leves e pesados são muito complexas para serem explicadas por uma teoria já estabelecida. Nesse aspecto, na ausência de uma teoria exata, foram criados modelos nucleares, e diferentes conjuntos de suposições simplificadoras fornecem a base para eles, de modo que cada modelo pode explicar apenas parcialmente os núcleos que observamos por meio de experimentos (KAMAL, 2014).

À vista disso, o desenvolvimento dos modelos nucleares se consolidou ao passo que os conhecimentos da física nuclear e de partículas estavam sendo construídos a fim de explicarem fenômenos intrínsecos ao núcleo atômico. Segundo Kamal (2014), os modelos nucleares mais antigos visavam abordar os problemas relacionados ao decaimento alfa (Gamow) e às reações dos núcleons no núcleo, sendo que para esse último os modelos assumiam uma interação muito fraca correspondente ao movimento de partículas independentes, tal qual no potencial de Bethe, e com interações fortes, como no modelo do núcleo composto de Bohr.

Posteriormente, com o alto grau de sofisticação tanto de forma semiclássica quanto quântica, os modelos puderam ser classificados em categorias, conforme a explicação para as dinâmicas que regem os núcleons: partículas independentes e coletivas (KAMAL, 2014). No entanto, há outros autores que classificam como coletivos e microscópicos, como é o caso dos autores Greiner e Maruhn (1996), sendo que se insere a categoria de partículas independentes em microscópicas, estabelecendo uma relação entre elas, conceituando uma em função da outra.

Ademais, Greiner e Maruhn (1996 apud COOK, 2010) sugerem um limite inferior a 31 modelos nucleares estabelecidos até então, de modo a comportá-los na divisão conceitual supramencionada, sendo que os modelos coletivos se referem aos modelos com princípios semelhantes ao da gota líquida e os microscópicos às partículas independentes, além de inserir modelos mistos situados em algum ponto intermediário entre a classificação estabelecida pelos autores, como pode ser observado na Figura 2.

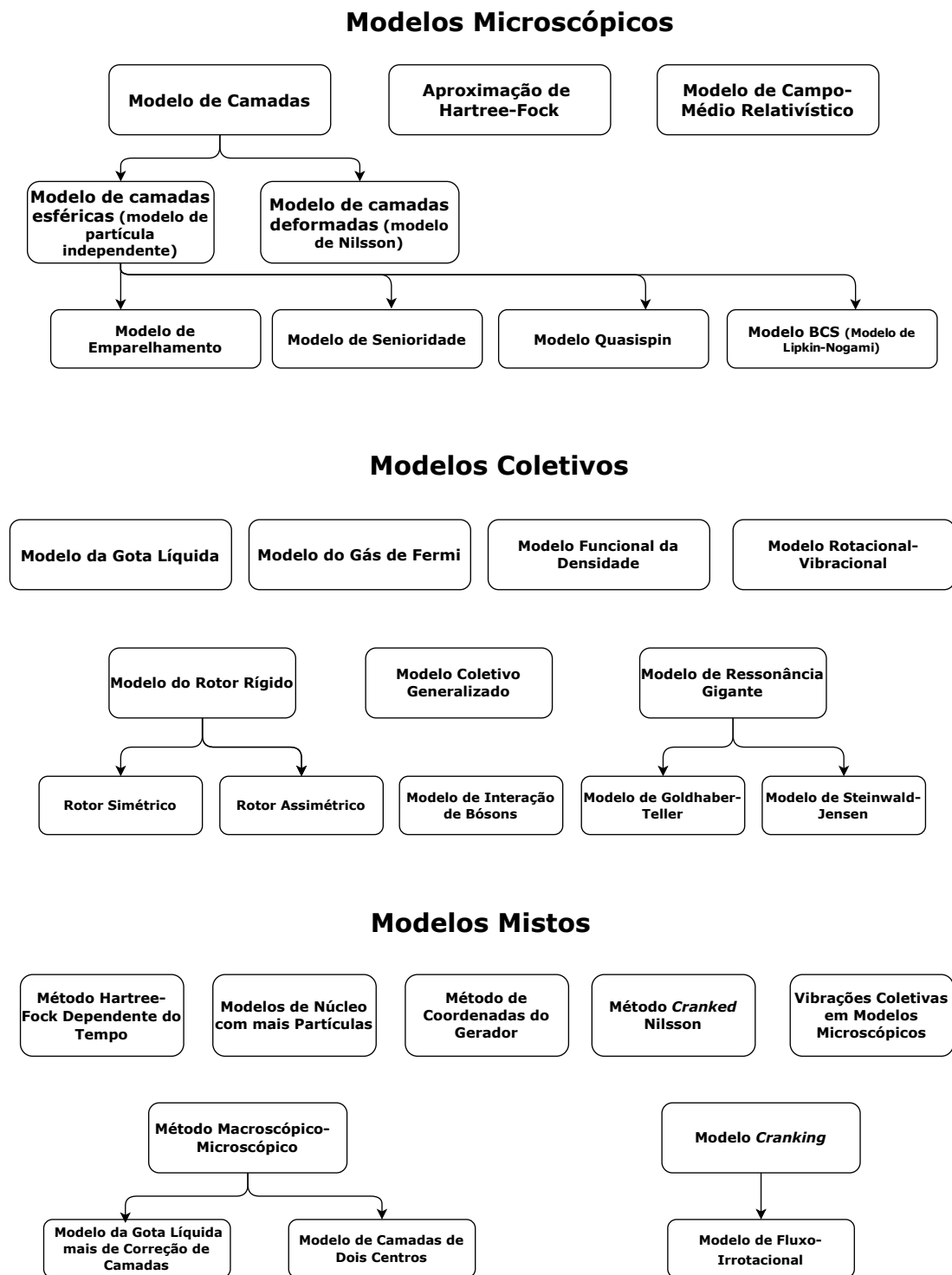


Figura 2 – Resumo das três classes gerais de modelos nucleares, adaptado de [Cook \(2010\)](#)

Além disso, os modelos nucleares podem ser classificados de forma cronológica, como [Cook \(2010\)](#) concatena na Figura 3, na qual o autor enfatiza que é possível observar

um isolamento relativo dos modelos que assumem os efeitos da força nuclear forte e aqueles que assumem uma força central de ligação mais fraca.

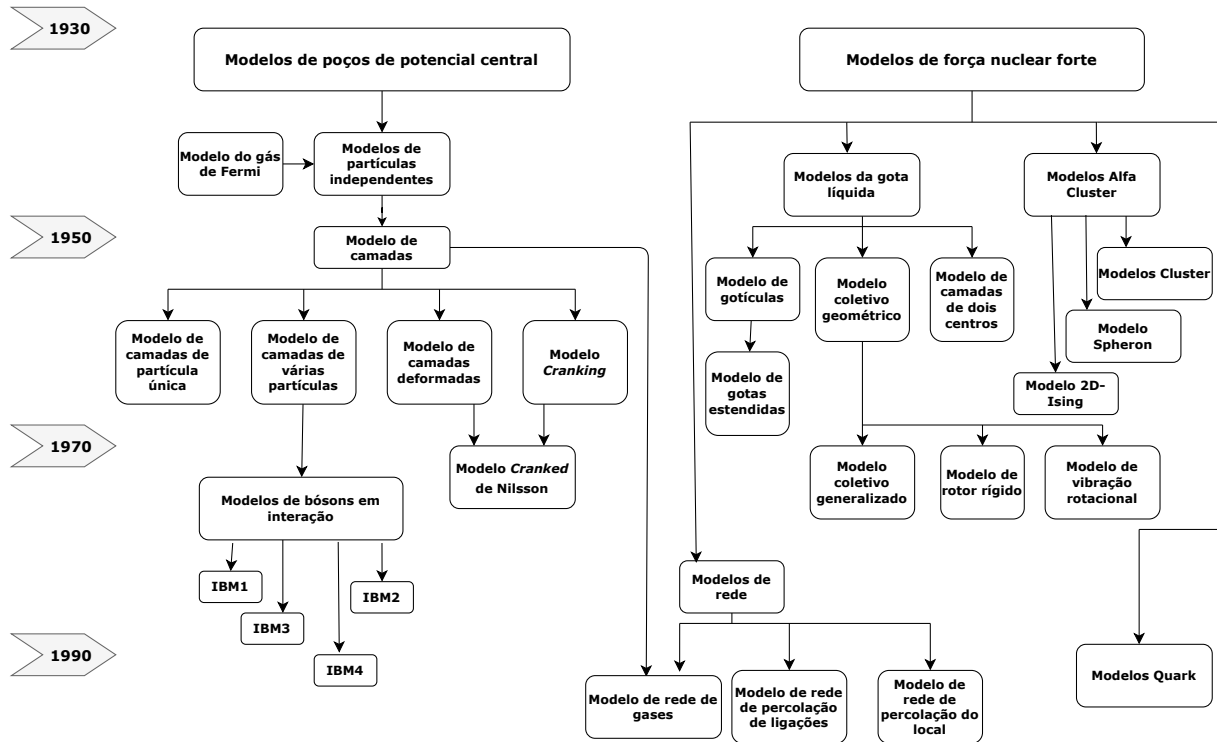


Figura 3 – Evolução cronológica dos modelos nucleares, adaptada de Cook (2010).

Diante da complexidade dessas classificações, destaca-se que não há um consenso definitivo em relação a elas (COOK, 2010), o que, muitas vezes, desafia uma classificação rígida, permitindo o desenvolvimento contínuo de abordagens híbridas e outras categorias. A exemplo disso, o autor Fossion (2010) se utiliza de três classificações diferentes, todavia complementares às citadas acima: (i) modelos microscópicos, (ii) modelos macroscópicos ou geométricos e (iii) modelos algébricos.

Entretanto, é inegável que todos os modelos que abarcam as principais explicações difundidas acerca da estrutura do núcleo estão inseridas em modelos dos autores abordados. Conquanto, prezando-se pela objetividade, opta-se por interpretar e seguir a classificação mais utilizada e difundida na literatura: modelos coletivos e de partículas independentes.

Sendo assim, os modelos coletivos tratam o núcleo atômico como um sistema coletivo de partículas, descrevendo-o como um objeto macroscópico sujeito a vibrações, rotações e deformações (GREINER; MARUHN, 1996). Já os modelos de partículas independentes visam abordar as propriedades intrínsecas dos constituintes nucleares, como

prótons e nêutrons, e nas interações fundamentais entre eles (COOK, 2010; KRANE, 1991). Considerando que esses últimos, devem levar em conta o princípio de Pauli, o qual afirma que não há dois núcleons que possam ocupar o mesmo estado quântico e isso, por sua vez, se deve à estatística Fermi-Dirac de partículas de spin $1/2$, em que a função de onda é antissimétrica sob a troca de quaisquer duas partículas (WALET, 2010; MARTIN; SHAW, 2019).

Nesse segmento, os modelos mais importantes a serem mencionados, que explicam fenômenos nucleares fundamentais e sendo sustentados por resultados experimentais, são o modelo da gota líquida, o modelo do gás de Fermi e o modelo de camadas (EISBERG; RESNICK, 1979; MARTIN; SHAW, 2019). De modo que os primeiros modelos citados se referem, respectivamente, ao movimento coletivo de núcleons e ao comportamento dos núcleons como um gás de partículas não interagentes, os quais são modelos semiclássicos, todavia precursores dos modelos quânticos mais importantes, como o modelo de camadas e o chamado modelo coletivo, que lidam com rotação e vibração (KAMAL, 2014).

Há de se mencionar que os aspectos coletivos e de partícula única da estrutura nuclear são unificados na forma do modelo de Nilsson, o qual considera o movimento independente dos núcleons em um potencial deformado (KAMAL, 2014).

Defronte da visão geral e dos principais modelos nucleares, a seguir eles serão apresentados e terão suas principais explicações e características desenvolvidas. A ênfase maior será dada ao modelo de camadas, que se trata do modelo a ser explorado no presente trabalho.

2.2 Modelo da gota líquida

Historicamente, o modelo da gota líquida foi o primeiro a descrever propriedades nucleares e surgiu principalmente a partir da observação de que as forças nucleares exibem propriedades de saturação (HEYDE, 2020). Essas propriedades de saturação estão relacionadas à densidade dos núcleons e da energia de ligação por núcleons nos núcleos atômicos, as quais estão diretamente relacionadas à natureza da força nuclear e sugerem a existência de um mecanismo fundamental responsável por manter os núcleos com seus tamanho e ligação, impedindo que os núcleons encolham ou entrem em colapso devido à forte atração da força nuclear (SAKURAGI, 2016).

Nesse sentido, por meio dos estudos de Gamow, Bohr e Wheeler (GAMOW, 1930), com contribuições de Weizsäcker, a estrutura do núcleo passou a ser retratada como uma gota macroscópica e suspensa de líquido incompressível com uma tensão superficial (SOMÀ, 2018). Assim, segundo esse modelo, o núcleo é uma entidade coletiva, que consiste em prótons e nêutrons compactados juntos, mas em um estado de movimento constante, semelhante à forma como as moléculas estão em uma gota de líquido (PANUSH, 1964).

Embora seja o mais simples dentre os modelos, ele é uma ferramenta extremamente útil para descrever as relações de energia no decaimento radioativo e nas reações nucleares (SOMÀ, 2018). Além disso, é utilizado para explicar a fissão nuclear, estendendo-a para descrever a energia de ligação nuclear como uma função do formato do núcleo (SOMÀ, 2018).

Assim, as propriedades que se propuseram ser explicadas pelo modelo da gota líquida são, de acordo com Kamal (2014):

1. Densidade substancialmente constante de núcleos, com $R \propto A^{1/3}$;
2. Dependência sistemática do excesso de nêutrons ($N - Z$) em $A^{5/3}$ para nuclídeos estáveis;
3. Constância aproximada da energia de ligação por núcleon E_b/A , bem como suas tendências com A ;
4. Diferença de massa em famílias de isóbaros e as energias de transições de cascata β ;
5. Variação sistemática das energias do decaimento α com N e Z ;
6. Fissão por nêutrons térmicos de ^{235}U e outros nuclídeos com N ímpar;
7. Limite superior finito para o número de prótons (Z) e o número de nêutrons (N) de nuclídeos pesados produzidos em reações nucleares e a não existência na natureza de nuclídeos mais pesados que o ^{238}U .

Com isso, é indispensável considerar que o modelo da gota líquida possui o seu cerne na origem da fórmula semiempírica da massa (ou fórmula de massa de Weizsäcker-Bethe), em meados de 1930, por von Weizsäcker, Bethe e Bacher (MÖLLER; SIERK, 2013; SOMÀ, 2018). Essa fórmula, por sua vez, é a responsável por explicar parte das propriedades mencionadas, incluindo a estabilidade do núcleo por meio da analogia com a gota e de suas suposições e considerações de análise. Isso se deve ao fato do modelo fornecer uma boa estimativa para o comportamento médio dos núcleos em relação à massa ou à energia de ligação, e esta última é uma medida direta da estabilidade (CONTI, 1995).

Nesse sentido, a energia de ligação, especialmente quando analisada por núcleon, refere-se a uma observação direta da propriedade de saturação nuclear explicada pelo modelo da gota líquida, uma vez que a força não saturada levaria a uma energia de ligação dada pela energia de interação de dois corpos do núcleon $A(A - 1)/2$ (HEYDE, 2020). Além disso, assim como o modelo propõe, o núcleo apresenta uma baixa compressibilidade e, portanto, uma superfície nuclear bem definida (HEYDE, 2020).

A energia de ligação se refere à energia necessária para dividir um núcleo em seus constituintes, prótons e nêutrons, e ela é calculada de acordo com a fórmula da

equivalência massa-energia (2.1), em consonância com a teoria da relatividade restrita (FÉNYES, 2011).

$$E_b = \Delta M c^2, \quad (2.1)$$

em que E_b é a energia de ligação, ΔM é o denominado defeito de massa e c é a velocidade da luz no vácuo.

No que se refere ao defeito de massa (ΔM), sabe-se por meio de experimentos que a massa total é menor do que a massa dos núcleons constituintes e isso se deve à 2.1, uma vez que a formação de um núcleo a partir de um sistema de núcleons isolados é uma reação exotérmica (WALET, 2010), ou seja, a diferença entre a massa total do núcleo e a soma das massas dos prótons e nêutrons é devida à conversão de massa em energia durante a formação do núcleo. Assim, o defeito de massa é dado por:

$$\Delta M = Zm_P + Nm_N - m_{núcleo}, \quad (2.2)$$

em que Zm_P é o produto entre a massa do próton e o número atômico do núcleo, resultando na massa total de prótons, Nm_N é o produto entre a massa do nêutron e o número de nêutrons do núcleo ($A - Z$), resultando na massa total de nêutrons, e $m_{núcleo}$ é a massa do núcleo.

Então, substituindo 2.2 em 2.1, tem-se a energia de ligação da seguinte forma:

$$E_b = [Zm_P + Nm_N - m_{núcleo}]c^2. \quad (2.3)$$

Com a definição da energia de ligação, é possível inferir que a energia de ligação por núcleon se refere à energia média requerida para remover um único núcleon (próton ou nêutron) do núcleo, análoga à energia de ionização do elétron do núcleo (WALET, 2010). As medições experimentais das massas nucleares mostram que a energia de ligação por núcleon (E_b/A) possui um valor quase constante de $8 \pm 0,5$ MeV, ou geralmente no intervalo de 6 a 10 MeV, independentemente do número de núcleons nos núcleos e esse valor é designado pela saturação da energia de ligação nos núcleos atômicos (SAKURAGI, 2016; WALET, 2010). Dessa maneira, esse valor constante indica que a energia de ligação total de um núcleo é aproximadamente proporcional ao seu número de massa A (e, logo, ao seu volume V) (SAKURAGI, 2016).

Por fim, tem-se que uma das representações de propriedades explicadas por esse modelo é justamente a energia de ligação por núcleon, como mostrado na Figura 4. Ela trata do gráfico das energias de ligação por núcleon em relação ao total de núcleons, isso significa a energia necessária para separar um nêutron ou próton do núcleo de um átomo em função da massa atômica (A).

Nota-se que o gráfico atinge seu ápice em A baixo, sendo pico próximo a $Z = 28$ (Fe , $A = 56$), sendo compreendido como o núcleo mais estável da natureza (a fusão nuclear nos núcleos das estrelas termina com Fe), e, em seguida, diminui em A alto (WALET, 2010). Acima de $A \sim 20$, os valores de E_b/A variam muito lenta e regularmente eles permanecem no intervalo de 7,5 a 8,8 MeV/A intervalo (FÉNYES, 2011).

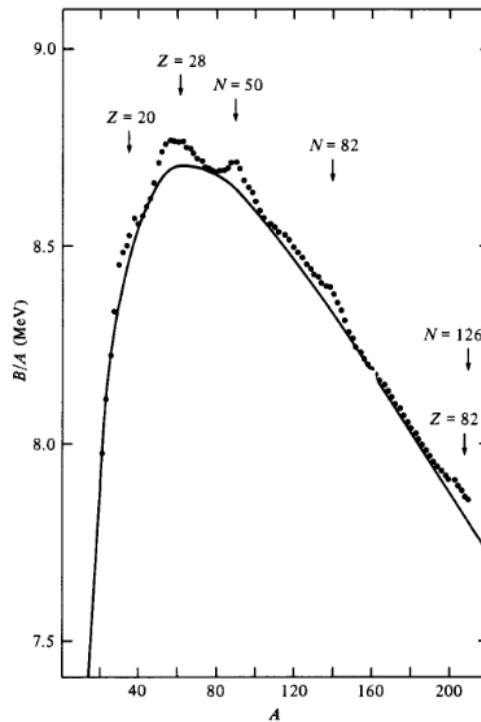


Figura 4 – Energia de ligação por total de núcleons (COTTINGHAM; GREENWOOD, 2001).

Assim, as variações do gráfico resultam das forças concorrentes no núcleo. Em valores baixos de A , as forças nucleares atrativas superam as forças eletrostáticas repulsivas entre os prótons (WALET, 2010). No entanto, em valores altos de A , as forças eletrostáticas repulsivas começam a predominar, levando à possível quebra do núcleo (WALET, 2010). A forma característica do gráfico revela que a energia de ligação por nucleão atinge seu ponto máximo em uma certa massa atômica (próxima ao ^{56}Fe), refletindo o equilíbrio entre a forte atração entre nêutrons e prótons e a repulsão eletrostática (WALET, 2010). Portanto, núcleos com maiores energias de ligação por nucleão tendem a ser mais estáveis.

Este gráfico é considerado por muitos físicos como um dos mais importantes da física, já que ele implica que núcleos divididos ou combinados com outros liberam uma enorme quantidade de energia e isso, por sua vez, é a base para diversos fenômenos, desde a produção de energia elétrica em uma usina nuclear e a fusão nuclear propriamente dita. Ademais, ele também pode mostrar regiões onde ocorrem certas transições nucleares, como a fissão nuclear (divisão de núcleos pesados) ou a fusão nuclear (união de núcleos

leves) (WALET, 2010). Trata-se de uma ferramenta valiosa para entender a estrutura dos núcleos atômicos e as condições que influenciam a estabilidade nuclear (WALET, 2010).

Apesar do modelo da gota líquida explicar satisfatoriamente a relação apresentada, ele não descreve adequadamente valores singularmente estáveis de Z e/ou N , apresentando desvios significativos de seus comportamentos médios (CONTI, 1995). Esses valores, por sua vez, referem-se aos números mágicos nucleares e possuem altos valores de energia de ligação como observado na Figura 4. Contudo, nas regiões entre os números mágicos, a energia de ligação do último nêutron pode ser calculada com boa precisão usando a fórmula semiempírica da massa (TIPLER, 1994).

A seguir a fórmula semiempírica será apresentada de maneira breve a fim de ilustrar os parâmetros que compõem o modelo, os argumentos que sustentam a analogia estabelecida por ele e a partir disso como a energia de ligação é explicada de maneira bem-sucedida. Para o propósito deste trabalho, a dedução não será feita.

2.2.1 Fórmula semiempírica da massa

Essa fórmula¹ se baseia em duas propriedades comuns a todos os núcleos, exceto aqueles que possuem massa atômica (A) muito pequena:

1. As densidades de massa no interior dos núcleos são aproximadamente as mesmas;
2. As energias totais de ligação (ΔE_b) são aproximadamente proporcionais às massas nucleares, pois $\Delta E_b/A \sim$ constante.

Diante disso, a analogia com as gotas macroscópicas de um líquido incompressível é estabelecida já que elas possuem as seguintes propriedades:

1. As densidades de massa no interior de uma gota são as mesmas;
2. Os calores específicos de vaporização (i.e. energia necessária para fragmentar a gota) são proporcionais às respectivas massas.

A fórmula é composta pela soma de 6 termos:

$$M_{Z,A} = f_0(Z, A) + f_1(Z, A) + f_2(Z, A) + f_3(Z, A) + f_4(Z, A) + f_5(Z, A), \quad (2.4)$$

em que $M_{Z,A}$ é a massa do núcleo a ser calculada pela fórmula, definida por Z e A . E, como termo inicial, $f_0(Z, A)$ corresponde à massa das partes constituintes do átomo e os

¹ A descrição e os cálculos dessa subseção se alicerçam no Tópico 15-5 do livro Física Quântica: Átomos, Moléculas, Sólidos, Núcleos e Partículas, dos autores Eisberg e Resnick (1979).

demais termos corrigem a equação com equivalentes em massa que vêm das contribuições de diferentes efeitos à energia total de ligação do núcleo.

O primeiro termo representa a massa das partes constituintes e ele é expresso da seguinte maneira:

$$f_0(Z, A) = 1,007825Z + 1,008665(A - Z),$$

em que 1,007825 é a massa do átomo de hidrogênio e 1,008665 é a massa do nêutron (ambos em unidades de u). Sendo que as contribuições de diferentes efeitos à energia total de ligação do núcleo são corrigidas pelos demais termos de forma equivalente em massa.

O segundo termo é denominado termo de volume, correspondendo a

$$f_1(Z, A) = -a_1A.$$

Esse termo indica diretamente que a energia de ligação é proporcional à massa do núcleo ou ao seu volume, isto é, é responsável por descrever a tendência da energia de ligação por núcleon ser constante. Por ser negativo, ele reduz a massa, aumentando a energia de ligação.

Em seguida, tem-se o termo de superfície, ou correlação proporcional à área superficial do núcleo. Ele representa o efeito similar à tensão superficial na gota: um núcleon na superfície sente forças atrativas apenas de um lado, assim, sua força de ligação é inferior aos núcleons do interior. Ou seja, o termo de volume, impõe que $\Delta E \propto A$, o que superestima ΔE dos núcleons superficiais.

Sendo assim, ele corresponde a

$$f_2(Z, A) = +a_2A^{2/3},$$

de modo que o termo positivo aumenta a massa e diminui energia de ligação.

O quarto termo é denominado termo coulombiano. Ele representa, em termos equivalentes de massa, a energia coulombiana positiva de um núcleo carregado (carga uniforme e). Dessa maneira, a energia potencial coulombiana de um próton devido aos demais é proporcional a $1e(Z - 1)e$. E a energia potencial total é proporcional a Z^2 . Já as repulsões coulombianas entre os prótons reduz a energia de ligação, o que implica em menos estabilidade. Sendo representado da seguinte forma:

$$f_3(Z, A) = +a_3 \frac{Z^2}{A^{1/3}}.$$

Logo após, há o termo de assimetria, representado por

$$f_4(Z, A) = +a_4 \frac{(Z - A/2)^2}{A}.$$

Ele exprime a tendência observada de se ter $Z = N$; e, se $Z = N$, o termo se iguala a zero.

Por fim, tem-se o termo de emparelhamento:

$$f_5(Z, A) = \begin{cases} -f(A), & \text{se } Z \text{ par, } N \text{ par.} \\ 0, & \text{se } Z \text{ par, } N \text{ ímpar ou } Z \text{ ímpar, } N \text{ par.} \\ +f(A), & \text{se } Z \text{ ímpar, } N \text{ ímpar.} \end{cases}$$

Esse termo está relacionado à indistinguibilidade de partículas idênticas (propriedade quântica) e $f(A) = -a_5 A^{1/2}$ é determinada de modo a reproduzir os dados experimentais.

Dessa forma, concatenando tais parâmetros, a fórmula reproduz de maneira satisfatória a tendência média dos valores mensurados de massa de todos os núcleos estáveis, com exceção daqueles cujo A é muito pequeno. Assim, a fórmula semiempírica é de importante utilidade na prática, já que é uma fórmula simples capaz de reproduzir com precisão as massas e energias de ligação de aproximadamente 200 núcleos estáveis e muitos outros núcleos instáveis (EISBERG; RESNICK, 1979), além das previsões mencionadas anteriormente.

Com isso, a Figura 5 representa a contribuição dos termos coulombiano, de superfície, volume e assimetria para a energia de ligação média por núcleon, com base no que foi observado na Figura 4 (EISBERG; RESNICK, 1979).

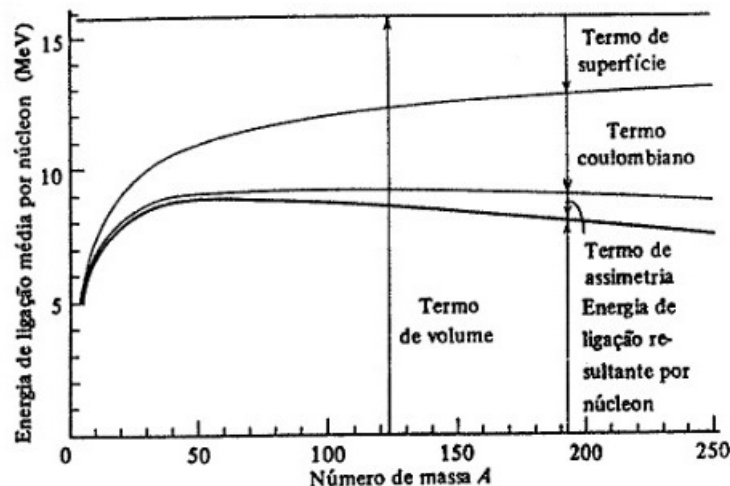


Figura 5 – Contribuições à energia de ligação por núcleon devido aos principais termos da fórmula semiempírica da massa (EISBERG; RESNICK, 1979)

Dessa forma, segundo Krane (1991), a importância da fórmula semiempírica da massa não reside no fato de ela permitir a previsão de qualquer fenômeno novo na física

nuclear, mas ela deve ser considerada uma primeira tentativa de aplicar modelos nucleares para entender o comportamento sistemático de uma propriedade nuclear, neste caso, a energia de ligação.

2.3 Modelo do gás de Fermi

Fundamentalmente, trata-se de um modelo análogo ao do gás de elétrons da condução elétrica em um metal (EISBERG; RESNICK, 1979). Por conseguinte, o tratamento matemático dos núcleos se assemelha a esse modelo, no qual os elétrons se movem quase livremente em um poço de íons carregados positivamente (ABDULLAH, 2017). Nesse sentido, o modelo do gás de Fermi descreve o comportamento de um gás de núcleons, que não interagem entre si, em um poço de potencial e é frequentemente usado para estudar propriedades nucleares como densidade e correlações de paridade (EISBERG; RESNICK, 1979).

Em consonância com Cook (2010), sabe-se que esse modelo forma a base para os modelos de partículas independentes, no qual a órbita distinta dos núcleons está incluída. Ademais, essa foi uma das primeiras abordagens a incluir a mecânica quântica no tratamento de núcleos, principalmente por meio da estatística quântica.

Diante disso, o modelo é sustentado pela suposição que os prótons e nêutrons compreendem a dois sistemas independentes de núcleons, cada qual se movendo livremente dentro do volume nuclear sujeito às restrições do princípio de Pauli (MARTIN; SHAW, 2019), em que duas partículas não podem ocupar o mesmo estado quântico a menos que eles possuam spins antiparalelos (FREITAS; BONAGAMBA, 1999).

Com isso, o potencial sentido por cada núcleon é a superposição dos potenciais devidos a todos os outros núcleons. No caso dos nêutrons, supõe-se que seja um poço quadrado de profundidade finita; já no caso dos prótons, o potencial de Coulomb modifica isso (MARTIN; SHAW, 2019). Esses potenciais podem ser observados na Figura 6.

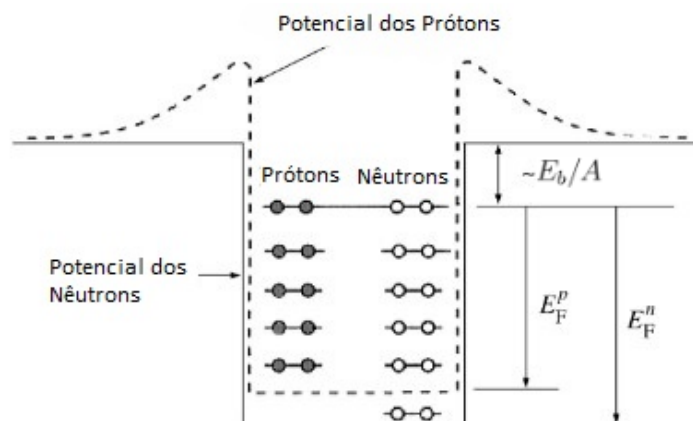


Figura 6 – Potenciais dos núcleons no modelo do gás de Fermi (MARTIN; SHAW, 2019).

Na Figura 6, observa-se ainda que para um determinado núcleo no estado fundamental, os níveis de energia serão preenchidos a partir da base do poço de potencial (MARTIN; SHAW, 2019).

Assim, a energia do nível mais alto desse poço é denominada de nível de energia de Fermi (E_F), com um momento $p_F = \sqrt{2ME_F}$, em que M é a massa do núcleon (MARTIN; SHAW, 2019). Ou seja, no modelo do gás de Fermi, os núcleons são considerados como um gás de partículas sem interação que se movem no núcleo com momentos que variam de zero a um valor máximo, p_F (KAMAL, 2014).

A partir disso, é possível obter o fator de densidade de estados, o qual dá o número de estados com um momento entre p e $p + dp$ dentro no interior do volume V (MARTIN; SHAW, 2019). Com as devidas aproximações e assumindo que as profundidades dos poços de nêutrons e prótons sejam as mesmas, é possível obter para um núcleo com $Z = N = A/2$, o momento de Fermi (MARTIN; SHAW, 2019):

$$p_F = p_F^n = p_F^p = \frac{\hbar}{R_0} \left(\frac{9\pi}{8} \right)^{1/3} \approx 250 \text{MeV}/c \quad (2.5)$$

em que \hbar é a constante de Planck reduzida, obtida por meio do quociente entre a constante de Planck (h) e 2π ($\hbar = \frac{h}{2\pi}$), a qual é uma constante física fundamental na teoria quântica, e R_0 é o raio do núcleo, aproximado pelos autores Martin e Shaw (2019) como $R_0 = 1.21 fm = 1.21 \times 10^{-15} \text{m}$.

Dessa forma, é possível observar que, nesse modelo, os núcleons se movem livremente dentro do núcleo com momentos bastante grandes (MARTIN; SHAW, 2019). Defronte do cálculo do momento, é possível obter um valor aproximado para a energia de Fermi:

$$E_F = \frac{p_F^2}{2M} \approx 33 \text{MeV}. \quad (2.6)$$

Segundo Martin e Shaw (2019), a diferença entre o topo do poço de potencial e o nível de Fermi é constante para a maioria dos núcleos pesados e é dada pela energia média de ligação por núcleon (E_b/A entre 6 e 10 MeV). Assim, a profundidade do potencial e a energia de Fermi são, com uma boa aproximação, independentes do número de massa A :

$$V_0 = E_F + E_b/A \approx 40 \text{MeV}. \quad (2.7)$$

Esse valor, por sua vez, indica um conceito inicial útil para a consolidação dos modelos nucleares independentes, demonstrando que os núcleons são basicamente livres em um potencial central com uma profundidade aproximada de 40 MeV (COKER, 2024). Dessa maneira, ao calcular a dispersão de um núcleon, uma abordagem adequada considera a interação da partícula de entrada com um potencial central simples, o qual possui

uma forma semelhante à da densidade da matéria nuclear (COKER, 2024). Isso, por sua vez, leva à ideia de que um núcleon dentro de um núcleo interage com um potencial central criado pela combinação de todos os outros núcleons, em vez de cada núcleon interagir diretamente com todos os outros de maneira aleatória; essa ideia evita, assim, o problema extremamente complexo de muitos corpos interagindo simultaneamente (COKER, 2024).

Como os níveis de Fermi dos prótons e nêutrons em um núcleo estável têm que ser iguais (caso contrário, o núcleo pode se tornar mais estável por meio do decaimento beta), isso implica que a profundidade do poço de potencial para o gás de nêutrons deve ser mais profunda do que para o próton (MARTIN; SHAW, 2019), como mostrado na Figura 6. Assim, os prótons estão, em média, menos fortemente ligados aos núcleos do que os nêutrons (MARTIN; SHAW, 2019). Nesse sentido, é possível usar o modelo do gás de Fermi para dar uma expressão teórica para algumas das dependências da energia de ligação no excedente de nêutrons, o que gera também contribuições à fórmula semiempírica da massa (MARTIN; SHAW, 2019).

Ademais, Eisberg e Resnick (1979) enunciam que o potencial no qual cada núcleo se move pode ser denominado potencial efetivo atrativo, o qual representa o efeito médio de suas interações com os outros núcleons do núcleo, ou seja, trata-se de um potencial (efetivo) médio, característico dos modelos de partícula independente. Tendo em vista que a distribuição de núcleons é constante no potencial efetivo, ele possui um valor constante dentro do núcleo e, fora do núcleo, ele decresce até zero, compreendendo uma distância igual ao alcance das forças nucleares (EISBERG; RESNICK, 1979). De modo geral, o potencial efetivo é aproximadamente igual a um poço quadrado finito tridimensional.

Seguindo esse raciocínio, no estado fundamental do núcleo, os núcleons ocupam os níveis de energia do potencial efetivo de maneira a minimizar a energia total, respeitando o princípio da exclusão (EISBERG; RESNICK, 1979). Então, há diversos níveis ocupados até um nível máximo, correspondendo ao número máximo de prótons e nêutrons presentes (FREITAS; BONAGAMBA, 1999), sendo que a grande maioria dos núcleons ocupa níveis bem inferiores ao nível máximo.

Assim, no contexto em que um núcleon interage com outro, i.e. colisão, não é possível haver troca de energia entre esses núcleons - exceto no caso daqueles que estão localizados próximos do nível máximo. Portanto, os núcleons, em sua massiva maioria, se movimentam desconsiderando as colisões que haveriam entre si, ocorrendo, no máximo, uma colisão entre dois prótons ou nêutrons, resultando na inversão de seus estados quânticos (EISBERG; RESNICK, 1979). No entanto, por serem partículas idênticas, essa ocorrência não causa nenhuma alteração significativa no estado do sistema (FREITAS; BONAGAMBA, 1999 apud KRANE, 1991). Com isso, somente os núcleons que se encontram nos níveis mais altos ocupados, próximos dos níveis vazios, são capazes de colidir entre si (TIPLER, 1994).

Por isso, nesse modelo, cada núcleon se move de maneira independente no núcleo, considerando somente o efeito médio da sua interação com os outros por meio do potencial efetivo médio (FREITAS; BONAGAMBA, 1999). Em suma, o modelo do gás de Fermi, além de justificar a hipótese do movimento independente dos núcleons, explica o fato de os nuclídeos conhecidos possuírem uma tendência marcante de apresentar Z aproximadamente igual a N (EISBERG; RESNICK, 1979; FREITAS; BONAGAMBA, 1999).

Além disso, com o desenvolvimento desse modelo, observa-se que a energia de Fermi é dependente apenas da densidade nuclear (analisando a função da densidade dos estados), como essa é aproximadamente constante, conclui-se que a energia de Fermi também o é para todos os núcleos (EISBERG; RESNICK, 1979).

Por fim, sabe-se que o modelo do gás de Fermi possui um sucesso limitado para descrever as propriedades mencionadas, em adição ao uso das estatísticas de partículas para estimar a energia cinética de nêutrons e prótons; ignorando, entretanto, a quantização decorrente do confinamento das partículas no volume do núcleo e das interações entre as partículas.

2.4 Modelo de camadas

2.4.1 Princípios básicos

O modelo de camadas corresponde a um dos modelos mais bem-sucedidos da física nuclear, especialmente no que concerne às determinações dos números mágicos e às previsões sobre a interação spin-órbita nuclear (FREITAS; BONAGAMBA, 1999; EISBERG; RESNICK, 1979). Acerca desse último aspecto, esse modelo é capaz de prever, satisfatoriamente, os spins e os momentos magnéticos dos núcleons, particularmente nas vizinhanças de camadas completas (KRANE, 1991).

A cronologia do desenvolvimento dos modelos nucleares indica que até a década de 1930, o modelo do núcleo composto de Bohr era dominante e possuía sucessos notáveis, com explicações para a energia de ligação nuclear e a fissão. Todavia, no final da década de 1940, certas discontinuidades nas energias de ligação e a atribuição de novas propriedades a determinados números de prótons e nêutrons (aqueles citados em 2.2) indicavam a necessidade de modelos nucleares de partícula única, já que os coletivos não comportavam as novas demandas de explicações (COOK, 2010).

Além disso, historicamente, a estrutura de camadas do núcleo não foi prevista por considerações teóricas *ab initio* baseadas no método de Hartree-Fock, todavia a evidência experimental das camadas fechadas em analogia aos gases inertes da estrutura atômica levou à postulação fenomenológica de potenciais de campo médio, conforme desenvolvido

nas referências (MAYER, 1948), (MAYER, 1949), (FEENBERG, 1949), (HAXEL; JENSEN; SUESS, 1949), (MAYER, 1950) e (MAYER, 1955), os quais poderiam ser explicados posteriormente em termos de campos autoconsistentes (GREINER; MARUHN, 1996).

Diane disso, dados experimentais acerca dos números mágicos sugeriam uma estrutura nuclear com níveis de energias associados, e foi a partir dessa premissa que Mayer, Jensen e outros físicos começaram a elaborar o modelo nuclear de camadas. Assim, em 1949, foi-se atribuída ao modelo uma descrição coerente da mecânica quântica dos núcleons com a introdução de uma força de acoplamento spin-órbita (COOK, 2010; KAMAL, 2014).

O modelo de camadas se trata de um modelo de partículas independentes e ele se baseia em uma analogia com o modelo da estrutura orbital dos elétrons no átomo (MARTIN; SHAW, 2019).

Nesse segmento, assim como os elétrons ocupam níveis discretos de energia, os núcleons também ocupariam camadas nesse modelo (MAYER, 1949). A ocupação completa de determinadas camadas (camadas fechadas) resulta em maior estabilidade nuclear e ela está intrinsecamente relacionada aos chamados números mágicos (MAYER, 1964).

Contudo, a diferença principal em relação à analogia com a estrutura atômica reside em não haver um campo dominante gerado por uma fonte externa correspondente ao campo de Coulomb do núcleo, o que é suficiente para explicar muitas características dos átomos sem recorrer aos efeitos muito mais complicados da interação elétron-elétron, já que nos núcleos, o campo médio é produzido exclusivamente pela interação núcleon-núcleon (GREINER; MARUHN, 1996).

Portanto, no modelo de camadas, compreende-se que cada núcleon se movimenta em um campo autoconsistente proveniente de todos os demais núcleons (ou seja, um potencial médio), sem que haja interação entre eles, apenas entre o núcleon e o potencial (CONTI, 1995). Assim, em razão da pequena faixa de ação das forças nucleares, esse campo diminui rapidamente fora do volume delimitado pelo que se considera a superfície do núcleo (LANDAU; LIFSHITZ, 2013). Por isso, o estado do núcleo em sua completude é descrito de modo a especificar os estados dos núcleons individualmente (LANDAU; LIFSHITZ, 2013; KAMAL, 2014).

Em suma, as principais premissas que sustentam o modelo são, as quais serão exploradas nos próximos subtópicos, de acordo com Krane (1991), Mayer (1964) e Samar (2021):

1. Os núcleons se movimentam de modo independente em um potencial determinado pelo movimento médio de todos os outros demais núcleons.
2. Assim como os demais modelos de partículas subatômicas, considerando que os

núcleons são férmions, obedece-se ao princípio de Pauli. E, nesse sentido, a existência de órbitas espaciais definidas depende do princípio de Pauli e ele resulta na ocupação dos níveis de energia de forma a preencher primeiro os estados de menor energia disponíveis.

3. O preenchimento das camadas do núcleo é feito individualmente por prótons e nêutrons.
4. A maioria dos núcleons se encontram emparelhados, sendo que um par de núcleons contribui com zero spin e zero momento magnético. A formação de pares de núcleons forma um núcleo inerte.
5. Para A ímpar, as propriedades do núcleo é caracterizada pelo núcleon não pareado. Já para núcleos com Z ou N ímpares, é caracterizado pelo próton ou nêutron não pareados.
6. As propriedades dos núcleos de número de massa ímpar são caracterizadas pelo núcleon não pareado e as dos núcleos de número par são caracterizadas pelo próton e nêutron não pareados.
7. Considera-se que o núcleo é aproximadamente esférico.

2.4.2 Números mágicos

Os números mágicos correspondem aos números de prótons e/ou nêutrons de núcleos singularmente estáveis; eles são:

$$Z \text{ e/ou } N = 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126,$$

sendo que os números mágicos 2, 8, 20, 28, 50 e 82 são comuns aos prótons e nêutrons, enquanto o 126 é estabelecido experimentalmente apenas para os nêutrons (GREINER; MARUHN, 1996).

Eles correspondem a uma ou mais camadas fechadas e os núcleos que possuem Z e N com um desses valores são chamados de duplamente mágicos (MARTIN; SHAW, 2019). Assim, os dois primeiros números se referem ao preenchimento das camadas $1s$ e $1p$ (COTTINGHAM; GREENWOOD, 2001). Já os demais, têm sua explicação decorrente do modelo oscilatório do núcleo, se for assumido que o acoplamento spin-órbita na teoria de campo de Yukawa das forças nucleares leva a uma forte divisão de um termo com momento angular l em dois termos distintos $j = \pm \frac{1}{2}$ (HAXEL; JENSEN; SUESS, 1949).

A existência dos números mágicos constitui uma das mais importantes informações experimentais do modelo de camadas. Como mencionado anteriormente, uma vez que os núcleons tenham números mágicos, o núcleo é especialmente estável e, neste contexto, ele é caracterizado com os seguintes aspectos, segundo Greiner e Maruhn (1996):

- Alta energia de ligação total do núcleo (como pode ser observado na Figura 4);
- Maior energia necessária para separar um único núcleon;
- Maiores energias dos estados excitados mais baixos;
- Grande número de isótopos ou isótonos com o mesmo número mágico de prótons (e/ou nêutrons).

Dessa maneira, os números mágicos começaram a ser investigados em 1933 pelo físico Walter M. Elsasser, quando sua existência foi notada pela primeira vez (MAYER, 1964). A constatação desses números, e suas conseqüentes existências, foi provada por diversos fatos experimentais e fenomenológicos, complementares às características supra-mencionadas.

A tabela 4 feita por Mayer (1964) em seus artigos originais, para ilustrar os números mágicos e abaixo deles seus núcleos estáveis contendo-os.

Número de Prótons	2	8	20	28	50	82	126
${}^4\text{He}$	${}^{16}\text{O}$	${}^{40}\text{Ca}$	${}^{58}\text{Ni}$	${}^{112}\text{Sn}$	${}^{204}\text{Pb}$		
	${}^{17}\text{O}$	${}^{42}\text{Ca}$	${}^{60}\text{Ni}$	${}^{114}\text{Sn}$			
	${}^{18}\text{O}$	${}^{43}\text{Ca}$	${}^{61}\text{Ni}$	${}^{115}\text{Sn}$			
		${}^{44}\text{Ca}$	${}^{62}\text{Ni}$	${}^{116}\text{Sn}$			
		${}^{46}\text{Ca}$	${}^{64}\text{Ni}$	${}^{117}\text{Sn}$			
		${}^{48}\text{Ca}$		${}^{118}\text{Sn}$			
				${}^{119}\text{Sn}$			
				${}^{120}\text{Sn}$			
				${}^{122}\text{Sn}$			
				${}^{124}\text{Sn}$			
Número de Nêutrons	2	8	20	28	50	82	126
${}^4\text{He}$	${}^{15}\text{N}$	${}^{36}\text{S}$	${}^{48}\text{Ca}$	${}^{86}\text{Kr}$	${}^{136}\text{Xe}$	${}^{208}\text{Pb}$	
	${}^{16}\text{O}$	${}^{37}\text{Cl}$	${}^{50}\text{Ti}$	${}^{87}\text{Rb}$	${}^{138}\text{Ba}$	${}^{209}\text{Bi}$	
		${}^{38}\text{A}$	${}^{51}\text{V}$	${}^{88}\text{Sr}$	${}^{139}\text{La}$		
		${}^{39}\text{K}$	${}^{52}\text{Cr}$	${}^{89}\text{Y}$	${}^{140}\text{Ce}$		
		${}^{40}\text{Ca}$	${}^{54}\text{Fe}$	${}^{90}\text{Zr}$	${}^{141}\text{Pr}$		
				${}^{92}\text{Mo}$	${}^{142}\text{Nd}$		
					${}^{144}\text{Sm}$		

Tabela 1 – Números e núcleos mágicos, traduzido de Mayer (1964).

Diante disso, Mayer (1949) destaca que o estanho (Sn, $Z = 50$) é o elemento que possui o maior número de isótopos estáveis. Observa-se também 6 núcleos estáveis com 50 nêutrons e 7 com 82 nêutrons, ao passo que normalmente ocorrem apenas 2 ou 3 núcleos com o mesmo número de nêutrons (MAYER, 1964).

Além disso, tem-se como principais exemplos de núcleos duplamente mágicos: ${}^4_2\text{He}$, ${}^{16}_8\text{O}$, ${}^{40}_{20}\text{Ca}$, ${}^{48}_{20}\text{Ca}$ e ${}^{208}_{82}\text{Pb}$, este último é o núcleo α -estável mais pesado junto a ${}^{209}_{83}\text{Bi}$

(KAMAL, 2014; COTTINGHAM; GREENWOOD, 2001). Observa-se com eles que a estabilidade nuclear está relacionada com o número de nêutrons ou de prótons, e não à soma deles, a exemplo disso o núcleo ${}^{16}_8\text{O}$ requer uma quantidade incomum de energia para remover um nêutron desse núcleo, enquanto, com um nêutron a mais, ${}^{17}_8\text{O}$ se apresenta fracamente ligado (MAYER, 1964).

Com isso, há vários outros fenômenos relacionados a esses números mágicos, em consonância com Martin e Shaw (2019), sabe-se que eles possuem muito mais isótopos estáveis do que outros núcleos e, assim, eles têm variações irregulares do momento quadrupolar elétrico com o número de núcleons (TIPLER, 1994). Esse último aspecto implica em outro muito importante para as considerações futuras: esses núcleos são aproximadamente esféricos, ou seja, a forma mais fortemente ligada (MARTIN; SHAW, 2019). Contudo, como o autor citado e as demais literaturas determinam, para a compreensão desses atributos é necessário saber algo sobre o potencial efetivo no modelo de camadas.

Ademais, os números mágicos podem ser provados por meio da seção de choque para captura de nêutrons com o número de nêutrons e da energia de ligação do último nêutron com o número de nêutrons para um dado valor de Z (TIPLER, 1994). Algumas das provas das existências dos números mágicos podem ser observadas na Figura 7.

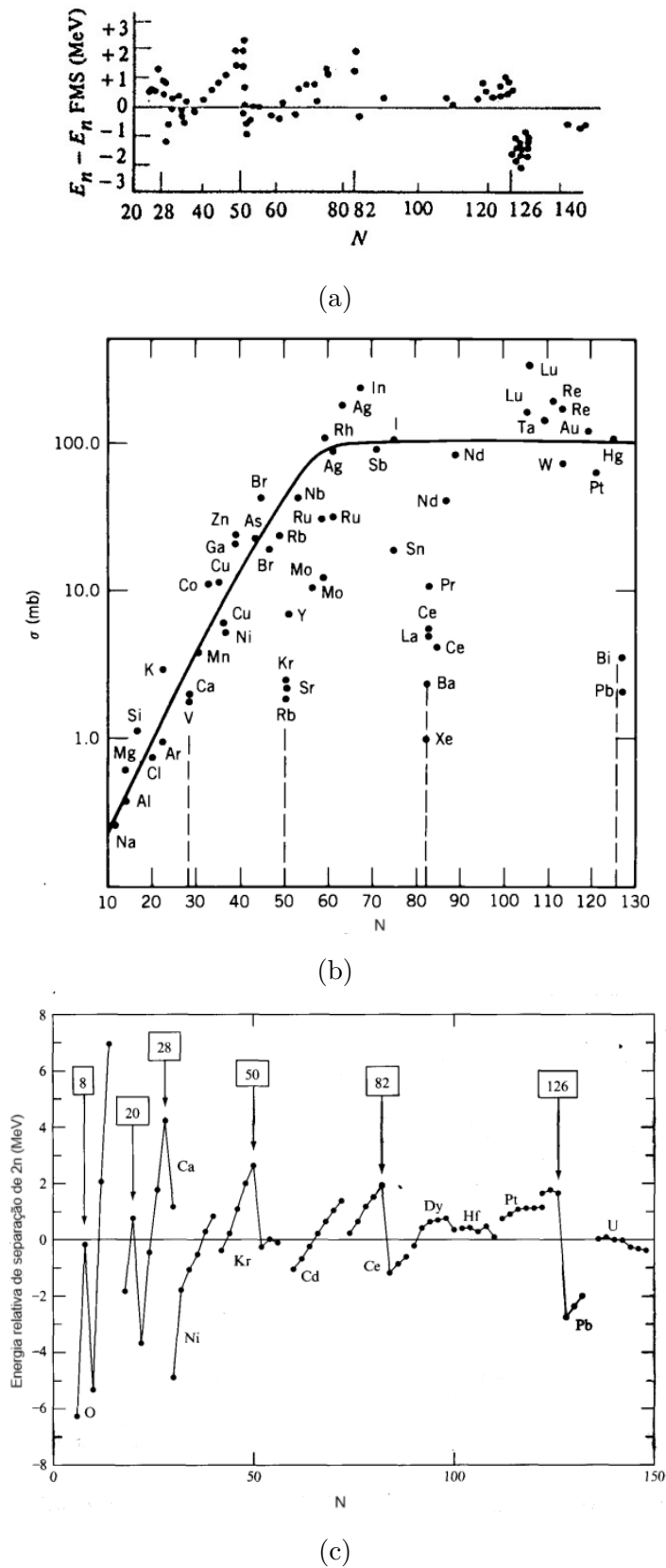


Figura 7 – Algumas provas da existência dos números mágicos: (a) Diferença entre valores experimentais e teóricos de E_B do último nêutron (EISBERG; RESNICK, 1979); (b) Seção de choque para captura em função de N (KRANE, 1991); (c) Diferença entre as energias de separação de dois nêutrons medidas e as previstas pela fórmula semiempírica em relação ao número de nêutrons (LILLEY, 2013).

Na Figura 7a, observa-se a diferença entre os valores experimentais e teóricos da energia de ligação (E_b) do último nêutron para diferentes números de nêutrons (N), em que é perceptível nos números de nêutrons correspondentes aos números mágicos um desvio notável entre os valores experimentais e teóricos. Esse desvio reforça a ideia de que os números mágicos estão associados a uma estabilidade nuclear adicional, que não é prevista pelo modelo da gota líquida.

Já na Figura 7b, há picos de seção de choque nos números mágicos, indicando que núcleos com esses números têm uma maior probabilidade de capturar um nêutron. Isso ocorre porque os núcleos com números mágicos tendem a ser mais estáveis, o que facilita a captura adicional de nêutrons.

No que concerne à Figura 7c, os núcleos com números mágicos de nêutrons têm uma energia de separação de dois nêutrons significativamente mais alta, indicando uma maior estabilidade. Entre os números , a estabilidade pode flutuar, mas retorna a valores altos nos números mágicos, o que reforça o conceito de camadas nucleares completas. Nessa figura, as linhas conectam isótopos de sequências e as descontinuidades na tendência suave são evidentes.

Por fim, como discutido por Mayer (1964), os números mágicos foram identificados experimentalmente antes do modelo de camadas ser estabelecido com a perspectiva vigente. Apesar disso, a existência desses números foi uma forte motivação para a formulação e consolidação desse modelo (COTTINGHAM; GREENWOOD, 2001). Aliado ao fato de que qualquer núcleo que possua um número de nêutrons e/ou prótons correspondente aos números mágicos apresenta estabilidade nuclear excepcional, constatou-se a sua abundância na natureza (MARTIN; SHAW, 2019).

2.4.3 Potencial efetivo médio

No átomo, a energia de ligação dos elétrons decorre principalmente do potencial central de Coulomb (HEYDE, 2020). Desse fato, sabe-se que a resolução dos níveis de energia eletrônicos podem ser obtidos com a utilização dos estados quânticos do átomo de hidrogênio, descritos pelos números quânticos n, l, m_l e m_s (TIPLER, 1994). Com as aproximações promovidas por eles, possibilita-se adquirir os níveis de energia dos elétrons em átomos complexos e, por conseguinte, os números mágicos atômicos surgem devido às grandes diferenças de energia entre as camadas (e/ou subcamadas/"órbitas") (TIPLER, 1994).

Entretanto, quando se trata do modelo nuclear das camadas, apenas o potencial coulombiano não é capaz de descrever o potencial efetivo de todos os outros núcleons. Devido à força nuclear forte e seu curto alcance, espera-se que o potencial siga a forma de distribuição de densidade dos núcleos no núcleo (tal qual como visto previamente

no modelo do gás de Fermi) (MARTIN; SHAW, 2019). Com isso, no núcleo, não há potencial central análogo à carga positiva fixa do átomo (TIPLER, 1994) e, além disso, no caso nuclear, o potencial responsável pela coesão dos núcleons não provém de um agente externo, mas a partir dos próprios núcleons (KRANE, 1991; FREITAS; BONAGAMBA, 1999).

Diante disso, é perceptível que há algumas dificuldades significativas na transposição do modelo de camadas atômico para a instância nuclear (FREITAS; BONAGAMBA, 1999). Nesse sentido, para compreender a maneira pela qual os núcleons geram o potencial efetivo médio, recorre-se à explicação feita na seção 2.3. Uma vez que uma das suposições primordiais do modelo reside no fato de que cada núcleon se move independentemente em órbitas bem definidas no núcleo (FREITAS; BONAGAMBA, 1999), propôs-se que como solução tratar os núcleons constituindo dois conjuntos separados de partículas idênticas, de modo que cada um esteja submetido a um potencial médio, sendo esta a essência do modelo do gás de Fermi (FREITAS; BONAGAMBA, 1999).

Sendo assim, parte-se da suposição que os núcleons sejam partículas pontuais livres para orbitar dentro do núcleo devido à força atrativa líquida de um poço de potencial (COOK, 2010). Isto posto, o modelo parte do pressuposto que a força nuclear que atua entre os núcleons produz um poço de potencial líquido que puxa todos os núcleons para o centro do núcleo, e não diretamente para outros núcleons individuais (COOK, 2010). Devido ao princípio de exclusão, pode-se sustentar a hipótese de que cada núcleon descreve uma órbita regular sem que haja colisão com outros núcleons (TIPLER, 1994). Ademais, bem como os elétrons, os núcleons possuem um nível de Fermi (TIPLER, 1994). De tal maneira, tratando cada núcleon de modo individual, torna-se possível que os núcleons ocupem os níveis de energia de uma série de subcamadas (KRANE, 1991).

Nesse sentido, Tipler (1994) mostra como o potencial médio no modelo de camadas pode ser gerado, tal qual observado na Figura 8 em que se tem a representação da maneira como os potenciais são produzidos. Em 8a, um núcleon que se move ao longo do eixo x encontra o potencial produzido por um segundo núcleon situado em $x = x_1$; já em 8b observa-se um potencial gerado por quatro núcleons, sendo que a média dos quatro potenciais pode ser aproximada pela curva tracejada, formando um poço finito com bordas arredondadas.

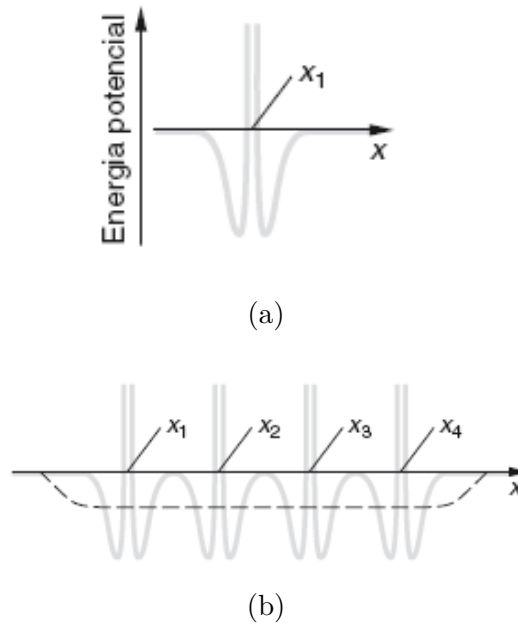


Figura 8 – Formação de potenciais no modelo de partículas independente (TIPLER, 1994).

Com a compreensão da maneira pela qual o potencial é obtido no modelo de camadas, deve-se definir os parâmetros do potencial efetivo médio para a construção do modelo. É por meio desse potencial que se determina a sequência de níveis de energia correspondente à existência dos números mágicos, em que as resoluções analítica e numérica deve ser coerente com os resultados experimentais (FREITAS; BONAGAMBA, 1999).

2.4.4 Aplicação de poços de potencial

O primeiro passo para o desenvolvimento do modelo de camadas, após a sua elaboração, é a escolha do potencial (KRANE, 1991). Diante disso, vários poços de potencial foram usados para representar o potencial central no qual os núcleons se movem, a exemplo disso têm-se poço quadrado, poço oscilatório e poço esférico infinito (KAMAL, 2014), cujo primeiro e último exemplos compõem a parte metodológica e, por conseguinte, os resultados deste trabalho.

A partir disso, pretende-se com tal escolha encontrar os níveis de energia dos nêutrons e prótons. Sendo assim, se o movimento de cada núcleon é independente em um potencial nuclear efetivo $V(r)$, os níveis de energia limitados aos núcleons são resolvidas na forma de $V(r)$ por meio da equação de Schrödinger para esse potencial (EISBERG; RESNICK, 1979).

Para tanto, parte-se da suposição primordial de que o potencial efetivo médio é esféricamente simétrico (FREITAS; BONAGAMBA, 1999), de modo que a resolução da equação de Schrödinger seja facilitada (EISBERG; RESNICK, 1979). Com isso, as funções

de onda obtidas com esse potencial se apresentarão com momento angular orbital (l) bem definido (FREITAS; BONAGAMBA, 1999).

Defronte disso, de acordo com Eisberg e Resnick (1979), bem como na teoria Hartree, encontra-se que os níveis de energia do núcleons em $V(r)$ dependem dos números quânticos n e l , que especificam o comportamento radial e angular de tais núcleons. Contudo, em consonância com Martin e Shaw (2019) opta-se por chamar n de nó radial, uma vez que ele determina a forma da parte radial das funções de onda.

Além disso, lembra-se do caso atômico que a notação $1s$ significa $n = 1$ e $l = 0$, sendo que para um dado l , a energia aumenta se n aumenta (EISBERG; RESNICK, 1979) e $1d$ significa o primeiro estado d (mais baixo), $2d$ significa o segundo e assim por diante (KRANE, 1991).

Dessa maneira, com a analogia com o caso atômico, as mencionadas funções de onda são dadas pelo produto de uma função radial $R(r)$ por uma função angular chamada de harmônico esférico Y_l^m , que é independente da forma exata do potencial, contanto que este seja esféricamente simétrico (FREITAS; BONAGAMBA, 1999 apud EISBERG; RESNICK, 1979), então:

$$\psi(r, \theta, \phi) = R(r)Y_l^m(\theta, \phi), \quad (2.8)$$

em que r, θ e ϕ são as coordenadas esféricas intrínsecas ao problema, em que a origem se encontra no centro de simetria do potencial (FREITAS; BONAGAMBA, 1999). E os índices do harmônico esférico o especificam como tal, o já mencionado l e o m é número quântico magnético do núcleon.

Com isso, o potencial efetivo médio $V(r)$ escolhido deve necessariamente se associar a maneira pela qual a matéria se distribui no núcleo, sendo que os formatos mais realistas dos potenciais devem refletir as propriedades conhecidas para a distribuição de massa nuclear (FREITAS; BONAGAMBA, 1999).

Assim, ao encontrar os níveis de energia em um determinado $V(r)$, deve-se, como próximo passo do modelo de camadas, "construir" o núcleo, de forma crescente de energia - ordenando os N nêutrons e Z prótons nesses níveis (EISBERG; RESNICK, 1979). De acordo com o princípio da exclusão, o limite de ocupação máxima de cada nível de energia corresponde a $2(2l + 1)$ para prótons ou nêutrons (KRANE, 1991). Essa ocupação, por sua vez, diz respeito aos números quânticos da componente z do momento angular (EISBERG; RESNICK, 1979). Refere-se aos dois possíveis valores do número quântico m_s , o qual caracterizar a orientação dos momentos angulares de spin intrínseco de um núcleon (EISBERG; RESNICK, 1979). Já o fator $(2l + 1)$, é os valores possíveis do número quântico m_l , que, por sua vez, é o que especifica a orientação do momento angular orbital do núcleon (KRANE, 1991; EISBERG; RESNICK, 1979).

Em virtude dessa construção de níveis de energia, é perceptível que o procedimento

é o mesmo utilizado na teoria de Hartree na física atômica, todavia, considerando que no núcleo há dois tipos de partículas (EISBERG; RESNICK, 1979). Com a consolidação dessa analogia, esperava-se encontrar justificativas para a existência dos números mágicos por intermédio de uma forma particular para os potenciais $V(r)$ de núcleos distintos (EISBERG; RESNICK, 1979).

Sabe-se que diversos formatos particulares foram utilizadas a fim de estabelecer uma dependência radial do potencial nuclear; contudo, constatou-se que não havia uma forma única de $V(r)$ que levasse à obtenção de todos os níveis correspondentes aos números mágicos (KAMAL, 2014; EISBERG; RESNICK, 1979). Esse fato, por sua vez, significa que a ordem e o espaçamento dos níveis de energia dos núcleons podem ser tais que um nível particular, correspondendo a um estado fortemente ligado e contendo um número adequado de nêutrons ou prótons, fica completamente preenchido nos núcleos em que os valores de N ou Z são iguais aos números mágicos (EISBERG; RESNICK, 1979).

Ademais, um dos problemas enfrentados no desenvolvimento do modelo de camadas era encontrar um poço com profundidade e formato que reproduzisse as discontinuidades experimentais nas energias de ligação nuclear (COOK, 2010). E, além disso, o cálculo das funções de onda e das energias dos núcleons, é permeado por uma série de aproximações, que até o presente constituem um objeto de estudo da física nuclear (TIPLER, 1994).

Sabe-se que os primeiros cálculos usando o modelo de camadas foram executados supondo um poço de potencial quadrado com 40 MeV de profundidade, porém não foi possível a previsão correta dos números mágicos (TIPLER, 1994). Com o prosseguimento, das tentativas de descrição dos níveis de energia, os mencionados poço finito quadrado e potencial de um oscilador harmônico simples seriam potenciais escolhas simplificadas que reproduziriam o comportamento da densidade nuclear de modo coerente (FREITAS; BONAGAMBA, 1999). Entretanto, apesar de permitirem soluções exatas da equação de Schrödinger, elas não representam fielmente o que deve ocorrer no potencial nuclear (FREITAS; BONAGAMBA, 1999), contudo podem ser utilizados de maneira complementar para a construção das camadas nucleares.

Diante das dificuldades de se encontrar os potenciais adequados para a descrição dos números mágicos, somente em 1949, Mayer e Jensen propuseram uma explicação que, por analogia com a física atômica, deveria haver também uma parte de spin-órbita no potencial total (MARTIN; SHAW, 2019). Dessa maneira, eles mostraram que os números mágicos poderiam ser obtidos a partir de um modelo de camadas relativamente simples, considerando que, no núcleo, a interação spin-órbita seria tão forte que geraria um acoplamento do spin de cada núcleon ao seu momento angular orbital (TIPLER, 1994). Este, portanto, foi um passo crucial para consolidar o modelo de camadas e difundir suas implicações como bem-sucedidas.

2.4.5 Interação spin-órbita e camadas nucleares

Segundo [Tipler \(1994\)](#), no núcleo a interação spin-órbita é tão forte que faz com que o spin de cada núcleon se acople ao seu momento angular orbital. Com isso, a interação spin-órbita nuclear leva a um acoplamento $j - j^{21}$, em vez do acoplamento que caracteriza a interação spin-órbita eletrônica, L-S.

A proposta dessa interação se concentra na explicação de que cada núcleon sente, além do potencial efetivo médio, essa interação de maneira invertida e proporcional a $\vec{S} \cdot \vec{L}$, sendo este o produto escalar dos vetores spin e momento angular orbital para um único núcleon ([EISBERG; RESNICK, 1979](#)). Assim, por ser forte, a interação spin-órbita faz com que a energia de cada núcleo seja bem menor, caso o spin e o momento angular orbital estiverem alinhados paralelamente, em relação a se estiverem alinhados antiparalelamente ([TIPLER, 1994](#)).

Dessa forma, o potencial total considerando a parte da interação spin-órbita é ([MARTIN; SHAW, 2019](#)):

$$V_{total}(r) = V_{central}(r) + V_{ls}(r)\vec{L} \cdot \vec{S}, \quad (2.9)$$

sendo $V_{ls}(r)$ chamada por [Martin e Shaw \(2019\)](#) de uma função arbitrária da coordenada radial. Essa é a mesma forma do potencial total usado na física atômica, exceto pela presença dessa função arbitrária ([MARTIN; SHAW, 2019](#)). Sendo que o fator $\vec{L} \cdot \vec{S}$, o responsável pela reordenação dos níveis de energia ([KRANE, 1991](#)).

Diante disso, uma vez tendo o acoplamento entre \vec{L} e \vec{S} , é mais conveniente trabalhar com os estados próprios do vetor do momento angular \vec{J} (associado ao o número quântico j que é um múltiplo de $1/2$), uma vez que $\vec{J} = \vec{S} + \vec{L}$ ([MARTIN; SHAW, 2019](#); [EISBERG; RESNICK, 1979](#)).

Além disso, um único núcleon tem $s = 1/2$, logo, os valores possíveis do número quântico do momento angular total são $j = l + 1/2$ ou $j = l - 1/2$, exceto para quando $l = 0$, caso em que somente $j = 1/2$ é permitido ([KRANE, 1991](#)). Dessa forma, o número de estados em cada um dos dois níveis é igual a $(2j + 1)$, devido à orientação diferente do momento angular total ([MAYER, 1964](#)). Tal fato se deve ao princípio da exclusão e $(2j + 1)$ corresponde aos possíveis valores de m_j , número quântico que especifica J_z , a componente z do momento angular total ([EISBERG; RESNICK, 1979](#)).

Isto posto, [Mayer \(1964\)](#) explica e reitera que a suposição básica do modelo de camadas é que devido à forte interação entre o spin e o momento angular orbital, o nível $j = l + 1/2$ adquire uma energia consideravelmente menor. Tendo em vista que o desdobramento spin-órbita dos níveis é proporcional a l e, presumivelmente, diminui um pouco com o tamanho do núcleo, conclui-se que as lacunas proeminentes na estrutura do nível sempre ocorrerão quando um momento orbital alto ocorrer pela primeira vez ([MAYER, 1964](#)). E, isto, por sua vez, explica os números mágicos.

A Figura 9 mostra os níveis de energia calculados em consonância com essa conclusão, segundo o modelo de camadas de Mayer e Jensen. O número de estados em cada nível é ilustrado à direita, seguido pelo número total de estados com energia menor ou igual à do nível correspondente, de modo que o espaçamento mostrado designa o caso dos prótons; já que os nêutrons não estão sujeitos à repulsão eletrostática, o espaçamento é ligeiramente menor (TIPLER, 1994).

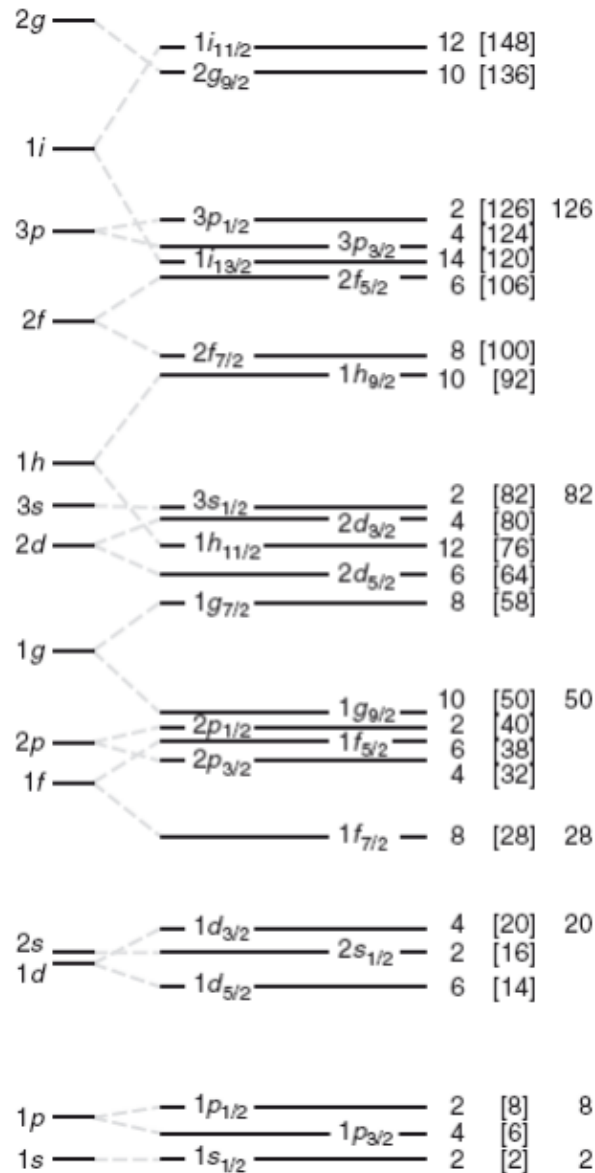


Figura 9 – Camadas de energia de uma partícula em um poço nuclear, incluindo o desdobramento spin-órbita (TIPLER, 1994).

À vista disso, a configuração de um nuclídeo real descreve o preenchimento de seus níveis de energia (subcamadas), para prótons e nêutrons, em ordem, com a notação $(nl_j)^k$ para cada subcamada, na qual k é a ocupação da subcamada em questão (MARTIN; SHAW, 2019). Com o uso do diagrama de ordenação acima e lembrando que a ocupação

máxima de cada subcamada é $2j + 1$, pode-se prever, por exemplo, a configuração do núcleo ${}^{17}_8\text{O}$ será, de acordo com [Martin e Shaw \(2019\)](#):

$$(1s_{\frac{1}{2}})^2(1p_{\frac{3}{2}})^4(1p_{\frac{1}{2}})^2, \quad (2.10)$$

para os prótons. E

$$(1s_{\frac{1}{2}})^2(1p_{\frac{3}{2}})^4(1p_{\frac{1}{2}})^2(1d_{\frac{5}{2}})^1, \quad (2.11)$$

para os nêutrons.

Assim, usando a notação mencionada, a maioria das propriedades do estado fundamental de ${}^{17}_8\text{O}$ podem ser encontradas por meio da configuração dos nêutrons como $(1d_{\frac{5}{2}})^1$, já que se observa que todas as subcamadas dos prótons estão devidamente preenchidas (tendo a presença de um número mágico), e todas as subcamadas dos nêutrons estão preenchidas, com exceção da última, que é uma subcamada por si só ([MARTIN; SHAW, 2019](#)). Isto é, o estado fundamental do ${}^{17}_8\text{O}$ deve ser característico de um nêutron $d_{\frac{5}{2}}$ com spin $5/2$ e paridade par ([KRANE, 1991](#)).

2.4.6 Evidências e predições do modelo

Além dos aspectos supramencionados, é sabido que o modelo de camadas pode prever outras propriedades do núcleo, para além dos números mágicos e suas consequências ([EISBERG; RESNICK, 1979](#)). Dessa maneira, esta seção irá concatenar as informações que foram expostas acima e descrever brevemente algumas predições do modelo de camadas a fim de explicitar seu sucesso e citar suas limitações.

Uma das predições do modelo diz respeito ao momento angular total do estado fundamental da grande maioria dos núcleos ([EISBERG; RESNICK, 1979](#)). Os valores do momento angular, diante disso, seguem algumas regras, segundo [Cottingham e Greenwood \(2001\)](#):

- Núcleos cujos números de prótons e nêutrons são pares (ou seja, núcleos par-par) possuem momento angular zero e paridade positiva;
- Núcleos com um número par de prótons e um número ímpar de nêutrons ou vice-versa (núcleos par-ímpar) possuem momento angular e paridade iguais aos do núcleon ímpar na camada que está sendo preenchida.

Diante disso, [Mayer \(1964\)](#) explica que perante essas regras uma camada fechada possui momento angular nulo, já que todos os estados de diferentes direções do momento angular contém um núcleon. Portanto, núcleos mágicos (seja por Z e/ou N) são previstos para ter spin nuclear zero e, de fato, isso corresponde a um caso provado experimentalmente ([MARTIN; SHAW, 2019](#)). Além disso, núcleos com um núcleon fora de uma

camada fechada de nêutrons ou prótons, ou ambos, devem ter um spin nuclear correspondente ao nível do último núcleon e ao spin da órbita da partícula individual pelo modelo de camadas (MAYER, 1964).

Além disso, outras predições podem ser feitas em relação às paridades nucleares. Diante das propriedades das paridades, a hipótese de emparelhamento diz que a paridade total de um núcleo é obtida a partir do produto das paridades do último próton e do último nêutron; assim, é possível prever, a partir do modelo de camadas, a paridade de qualquer nuclídeo, inclusive os ímpares-ímpares, e essas previsões estão de acordo com os experimentos (MARTIN; SHAW, 2019).

Outra propriedade que pode ser prevista diz respeito ao momento de dipolo magnético. Exceto se o spin nuclear seja zero, espera-se que os núcleos tenham momentos de dipolo magnético, uma vez que os núcleons possuem momentos magnéticos intrínsecos, e o próton é eletricamente carregado, logo, pode produzir um momento magnético quando tem movimento orbital (MARTIN; SHAW, 2019).

Contudo, essa compõe uma das falhas de previsões do modelo de camadas, visto que elas não são precisas mesmo para núcleos par-ímpar em que há apenas um único núcleon não pareado no estado fundamental (MARTIN; SHAW, 2019). Tal fato se deve à suposição de que os momentos de dipolo magnético dos demais núcleons se cancelam par a par, da mesma maneira que ocorre com seus momentos angulares totais (EISBERG; RESNICK, 1979). Por meio dessas predições, foram obtidas as linhas de Schmidt, as quais representam as predições para os casos em que os momentos angulares de spin e orbital do núcleon não emparelhado são essencialmente paralelos ou antiparalelos ($j = l + \frac{1}{2}$ ou $j = l - \frac{1}{2}$) (EISBERG; RESNICK, 1979). Porém, constatou-se que o momento de dipolo magnético nuclear não se deve exclusivamente ao núcleon não pareado, constituindo uma predição falha do modelo de camadas (EISBERG; RESNICK, 1979).

De maneira semelhante às demais previsões, o modelo de camadas, preliminarmente, possui uma estrutura de níveis de energia capaz de prever alguns estados nucleares excitados (MARTIN; SHAW, 2019). Contudo, isso funciona muito bem para os primeiros estados excitados, quando há apenas uma configuração possível do núcleo. Para os estados mais elevados, vários núcleons podem estar excitados simultaneamente em uma superposição de muitas configurações diferentes para produzir um determinado spin e paridade nuclear, tornando a análise do espectro muito complicada (MARTIN; SHAW, 2019).

Além dos aspectos mencionados, este modelo também faz predições acerca do momento de quadrupolo elétrico de nuclídeos com A e Z ímpar, supondo que este seja o último próton no núcleo (KAMAL, 2014), apresentando incoerências nas previsões por considerar o potencial esfericamente simétrico.

No que concerne aos elementos abundantes e estáveis, que possuem camadas nucleares fechadas, observa-se na natureza que entre os terras raras m que os processos químicos na natureza não podem afetar muito as abundâncias originais, os isótopos com $N = 82$ são excepcionalmente abundantes (KAMAL, 2014). Além desse exemplo, empiricamente afere-se que a forte tendência à fissão assimétrica por nêutrons térmicos parece ser um efeito dinâmico de relativa complexidade, mas diretamente dependente da estabilidade acentuada da camada fechada do núcleon de maneira que os fragmentos mais favorecidos são aqueles com $N = 82$ e seus complementares (KAMAL, 2014).

Portanto, é cognoscível que o modelo de camadas é muito bem-sucedido na obtenção dos números mágicos e na análise da estabilidade nuclear, além de prever adequadamente spins, paridades e momentos angulares do estado fundamental, no entanto, não possui muito êxito na descrição de estados excitados e momentos magnéticos (KAMAL, 2014).

3 Mecânica quântica aplicada ao núcleo

O comportamento dos núcleons é responsável por determinar as propriedades do núcleo (KRANE, 1991). Tendo em vista que os núcleons não se comportam como partículas clássicas, é necessário compreender que o que acontece no núcleo é regido pela mecânica quântica, exigindo tal tratamento matemático para a compreensão das propriedades nucleares. Uma vez que já é sabido que os conceitos clássicos não descrevem adequadamente ondas e partículas, sendo que tanto a matéria quanto a radiação apresentam aspectos corpusculares e ondulatórios (TIPLER, 1994).

No capítulo anterior, várias propriedades nucleares foram citadas diante dos respectivos modelos que se propuseram a explicá-las, e, nesse escopo, conceitos muito importantes da mecânica quântica, como a equação de Schrödinger, o princípio de Pauli e o spin, emergiram como fundamentais para a compreensão desses fenômenos. Esses princípios da mecânica quântica, por sua vez, são essenciais para descrever o comportamento dos núcleons dentro do núcleo atômico, influenciando diretamente sua estrutura, estabilidade e interações nucleares. Ademais, o modelo de camadas nucleares é explicado de maneira análoga ao modelo de camadas eletrônicas, o qual é elucidado de forma bem-sucedida pela mecânica quântica. Portanto, a mecânica quântica oferece uma estrutura teórica sólida para descrever não apenas o comportamento dos elétrons, mas também dos núcleons no interior do núcleo atômico.

Diante disso, é indispensável que esses conceitos estejam bem delimitados para o estudo mais aprofundado dos modelos nucleares, especialmente do modelo de camadas, o qual corresponde a um dos mais importantes modelos nucleares explicados pela mecânica quântica e, por conseguinte, para a obtenção dos níveis de energia nucleares. Nesse sentido, este capítulo apresenta os conceitos fundamentais para a elaboração do modelo de camadas e a obtenção dos números mágicos nucleares, propósito primordial deste trabalho.

3.1 Modelo da energia potencial nuclear

O hamiltoniano se trata de um operador cujo observável corresponde à energia total do sistema (GRIFFITHS; FREITAS, 2011), compreendendo a energia cinética e a energia potencial. Dessa maneira, o hamiltoniano a ser utilizado na equação de Schrödinger para uma descrição rigorosa do núcleo atômico, tendo em vista que ele seja constituído de prótons e nêutrons, é proposto como sendo,

$$\mathcal{H} = \sum_k (\mathcal{H}_k^N + \mathcal{H}_k^P), \quad (3.1)$$

onde \mathcal{H}_k^N é o hamiltoniano referente ao k -ésimo nêutron e \mathcal{H}_k^P é o hamiltoniano referente ao k -ésimo próton.

Então, para os nêutrons tem-se:

$$\mathcal{H}_k^N = \frac{p_k^2}{2m_N} + \sum_{i < k} V(|\vec{r}_i - \vec{r}_k|), \quad (3.2)$$

sendo que o primeiro termo, $\frac{p_k^2}{2m_N}$, representa a energia cinética do k -ésimo nêutron, m_N é a massa do nêutron; e o segundo, $\sum_{i < k} V(|\vec{r}_i - \vec{r}_k|)$, representa a energia de interação entre o k -ésimo nêutron e os demais núcleons. Nesse sentido, \vec{r}_k representa o vetor posição do k -ésimo nêutron e \vec{r}_i o vetor posição do i -ésimo núcleon.

Com isso, o hamiltoniano para os prótons, o segundo termo na equação (3.1), é dado por

$$\mathcal{H}_k^P = \frac{p_k^2}{2m_P} + \sum_{i < k} V(|\vec{r}_i - \vec{r}_k|) + \sum_{i < k} \frac{e^2}{|\vec{r}_i - \vec{r}_k|}, \quad (3.3)$$

representando o hamiltoniano referente ao k -ésimo próton, cuja energia cinética do k -ésimo próton é o termo $\frac{p_k^2}{2m_P}$, sendo m_P a massa do próton; o termo $\sum_{i < k} V(|\vec{r}_i - \vec{r}_k|)$, refere-se a interação entre o k -ésimo próton e os outros núcleons; e $\sum_{i < k} \frac{e^2}{|\vec{r}_i - \vec{r}_k|}$ está relacionada apenas aos prótons, já que estabelece a interação eletrostática coulombiana repulsiva entre o k -ésimo e os demais prótons. Somando as contribuições de todos os prótons e nêutrons, obtém-se o hamiltoniano da equação (3.1).

No entanto, solucionar a equação (3.1) é uma tarefa muito complicada, pois se trata de um problema de muitos corpos, além de que apenas soluções numéricas são plausíveis. Visando abordar o problema de maneira mais simples e encontrar soluções analíticas, utiliza-se uma abordagem baseada na teoria do campo médio. Ademais, cabe ressaltar que a interação residual entre dois e três corpos, que poderia ocorrer, será desconsiderada nesta análise. Adota-se, portanto, um potencial central, assumindo simetria esférica. Também será desprezado o potencial de simetria resultante do desequilíbrio entre o número de prótons e nêutrons nessa aproximação.

Nesse caminho, considera-se um potencial de campo médio que independe da posição do núcleon, ou seja, o núcleon é considerado numa posição fixa. Inicia-se, assim, a modelagem do campo médio pela escolha da energia potencial entre os núcleons. Escolhe-se a energia potencial entre dois núcleons representada por um poço de potencial de profundidade $-V_0$ e alcance R_0 , em que R_0 é da ordem do núcleo atômico, isto é, $R_0 \approx 10^{-15} m$ e $V_0 \approx 50 \text{ MeV}$. A soma dos poços de potenciais que descrevem a interação entre um dado núcleon e os demais núcleons pode ser representado pelo potencial parabólico dado por

$$V_1(r) \approx -V_0 \left(1 - \frac{r^2}{R_0^2} \right), \quad (3.4)$$

em que $V_1(r)$ descreve a interação que um dado núcleon sofre dos demais.

Em relação aos prótons, tem-se que além da interação nuclear, eles também sofrem interação eletrostática dos demais prótons. Para descrever como essa interação ocorre na média, ou seja, a energia eletrostática sobre um dos prótons, utiliza-se o potencial eletrostático de uma esfera de raio R_0 contendo uma densidade uniforme de carga $(Z-1)e$ produzida pelos demais $(Z-1)$ prótons, isto é,

$$V_2(r) = \frac{(Z-1)e^2}{R_0} \left(\frac{3}{2} - \frac{r^2}{3R_0^2} \right). \quad (3.5)$$

Dessa forma, obtém-se que a energia potencial efetiva para descrever o nêutron é dada por $V_1(r)$ e para o próton é $V_2(r)$. Assim, é possível escrever

$$\begin{aligned} V_1(r) + V_2(r) &= \left(\frac{V_0}{R_0^2} - \frac{(Z-1)e^2}{2R_0^3} \right) r^2 - V_0 + \frac{3}{2} \frac{(Z-1)e^2}{R_0} \\ &= \frac{1}{2} m\omega^2 r^2 + V, \end{aligned}$$

em que $\frac{1}{2} m\omega^2 = \frac{V_0}{R_0^2} - \frac{(Z-1)e^2}{2R_0^3}$ e $V = V_0 + \frac{3}{2} \frac{(Z-1)e^2}{R_0}$. Percebe-se que $V = V_0$ quando o núcleon é um nêutron. Ou seja, em ambos os casos, prótons ou nêutrons, a energia potencial pode ser modelada pela interação do oscilador harmônico. Assim, o hamiltoniano que descreve um dado núcleon pode ser escrito como

$$\mathcal{H}^N = \frac{p^2}{2m_N} + \frac{1}{2} m_N \omega^2 r^2 + V_0, \quad (3.6)$$

no caso de nêutrons; e

$$\mathcal{H}^P = \frac{p^2}{2m_P} + \frac{1}{2} m_P \omega^2 r^2 + V, \quad (3.7)$$

no caso de prótons.

3.2 Solução da parte angular

A equação de Schrödinger se trata de uma equação de onda responsável por governar o movimento de partículas subatômicas, sendo elétrons e outras partículas com massa de repouso diferente de zero, de maneira análoga à equação de onda clássica (TIPPLER, 1994). Ademais, os aspectos matemáticos da mecânica quântica não-relativística são determinados por essa equação (KRANE, 1991), o que corresponde diretamente ao contexto do núcleo atômico. Diante disso, a equação de Schrödinger é utilizada no modelo de camadas por descrever o comportamento de sistemas quânticos, como o núcleo atômico, de forma abrangente e precisa para a determinação dos níveis de energia permitidos no sistema a ser descrito.

Assim, as soluções dessa equação são as denominadas funções de onda, recorrentemente citadas em 2.4.4 e denotadas na equação 2.8 em sua forma tridimensional. As funções de onda representam a probabilidade de se encontrar uma partícula em uma

determinada posição e estado quântico dentro do potencial escolhido, podendo indicar também o comportamento dessa partícula temporalmente.

Destarte, a forma da função de onda $\psi(x)$ deve ser dependente da função da energia potencial $V(x)$ (TIPLER, 1994). Com isso, para a obtenção de resultados coerentes que descrevam o comportamento a ser analisado, a função de onda deve satisfazer as seguintes condições (TIPLER, 1994):

- Deve existir e ser contínua.
- Diferenciável (derivadas contínuas).
- $\psi(x)$ e $\frac{d\psi}{dx}$ devem ser unívocas e finitas.
- Deve ser limitada ($x \rightarrow \pm\infty, \psi \rightarrow 0$).
- $\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x, t)|^2 = 1$.

Para a finalidade deste trabalho, admite-se que todas as condições foram satisfeitas.

Tendo em vista que a equação de Schrödinger aplicada ao potencial do núcleo é capaz de fornecer as soluções para as funções de onda nucleares e, conseqüentemente, determinar as propriedades das camadas nucleares, como os níveis de energia, as distribuições de spin e paridade, e os números quânticos associados, é fundamental adequá-la ao contexto nuclear. Para tanto, deve-se considerar a equação estacionária na forma:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(\vec{r}) + V(r)\psi(\vec{r}) = E\psi(\vec{r}), \quad (3.8)$$

em que ∇^2 representa o operador laplaciano, $V(r)$, conforme mencionado, é a energia potencial do sistema e E se trata do autovalor de energia.

Esquemáticamente, com os núcleons se movendo em um potencial central (que depende apenas da distância do núcleon ao centro de massa do núcleo onde o sistema de eixos cartesianos está montado) e a energia potencial $V(|\vec{r}|) = V(r)$, a situação pode ser descrita como (HEYDE, 2020)

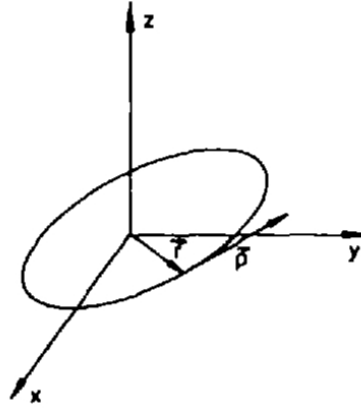


Figura 10 – Ilustração esquemática de uma partícula se movendo com momento linear a uma distância radial em um campo central caracterizado por uma energia potencial (HEYDE, 2020).

Conforme mencionado no referencial teórico, no modelo de camadas, a energia potencial é definida como função da coordenada radial r e, além disso, há a suposição primordial de que o núcleo é esférico (com raio da ordem de 10^{-15} m), e seguindo o princípio da simetria do potencial, opta-se por se utilizar o sistema de coordenadas esférico. Com isso, o operador laplaciano em coordenadas esféricas fica (ARFKEN; WEBER, 2005)

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}. \quad (3.9)$$

Logo, a função de onda pode ser escrita conforme a equação 2.8, mas por ora se considera que $\psi(|\vec{r}|) = \psi(r, \theta, \phi)$, sendo abreviada como simplesmente ψ . Portanto, a equação 3.8 pode ser reescrita como

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} \right) + V(r)\psi = E\psi. \quad (3.10)$$

Para resolver a equação acima, usa-se a técnica de separação de variáveis. Para esse fim, retorna-se à equação 2.8, considerando o harmônico esférico $Y_l^m(\theta, \phi) = Q(\theta)F(\phi)$, tem-se $\psi(r, \theta, \phi) = R(r)Q(\theta)F(\phi) = RQF$. Substituindo na equação 3.10 e dividindo por RQF , obtém-se

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{1}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2}{rR} \frac{dR}{dr} + \frac{1}{r^2 Q} \frac{d^2 Q}{d\theta^2} + \frac{\cot \theta}{r^2 Q} \frac{dQ}{d\theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta F} \frac{d^2 F}{d\phi^2} \right) + V(r)\psi = E\psi. \quad (3.11)$$

Equação a qual pode ser reescrita como

$$r^2 \sin \theta \left[\frac{1}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2}{Rr} \frac{dR}{dr} + \frac{1}{r^2 Q} \frac{d^2 Q}{d\theta^2} + \frac{\cot \theta}{r^2 Q} \frac{dQ}{d\theta} + \frac{2m}{\hbar} (E - V(r)) \right] = -\frac{1}{F} \frac{d^2 F}{d\phi^2}. \quad (3.12)$$

Da equação acima, nota-se que o lado esquerdo é função das variáveis r e θ , ao passo que o lado direito é função de ϕ . Dessa forma, para que haja uma igualdade nessa

equação, ambos lados devem ser iguais a uma constante, a qual corresponde a m_l . Com isso, igualando o lado direito a essa constante, a seguinte equação é obtida

$$\frac{d^2 F}{d\phi^2} = -m_l F, \quad (3.13)$$

cuja solução é conhecida e dada por

$$F(\phi) = C_1 e^{im_l \phi} + C_2 e^{-im_l \phi}. \quad (3.14)$$

Diante disso, sabendo que $\psi(r, \theta, \phi)$ deve satisfazer as condições supracitadas, infere-se que para que $F(\phi)$ obedeça igualmente às condições, sendo unívoca, a função deve assumir o mesmo valor para $\phi = 0$ e $\phi = 2\pi$. Para que isso ocorra, m_l deve assumir valores inteiros, ou seja, $m_l = \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$. Portanto, m_l é quantizado.

Assim, a equação 3.12 pode ser reescrita como

$$r^2 \sin \theta \left[\frac{1}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2}{Rr} \frac{dR}{dr} + \frac{1}{r^2 Q} \frac{d^2 Q}{d\theta^2} + \frac{\cot \theta}{r^2 Q} \frac{dQ}{d\theta} + \frac{2m}{\hbar} (E - V(r)) \right] = m_l. \quad (3.15)$$

É evidente, então, que na equação acima (3.15), é possível separar a dependência das variáveis r e θ , então tem-se

$$\frac{r^2}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2r}{R} \frac{dR}{dr} + \frac{2mr^2}{\hbar} (E - V(r)) = -\frac{1}{Q} \frac{d^2 Q}{d\theta^2} - \frac{\cot \theta}{Q} \frac{dQ}{d\theta} + \frac{m_l^2}{\sin^2 \theta}. \quad (3.16)$$

Observa-se que, na equação 3.16, o lado esquerdo é função de r , enquanto o lado direito é função de θ . Assim, da mesma maneira calculada anteriormente, para que a igualdade seja verdade, ambos devem ser iguais a uma constante, que corresponde a $l(l+1)$. Dessa maneira, obtêm-se as seguintes equações

$$\frac{d^2 Q}{d\theta^2} + \cot \theta \frac{dQ}{d\theta} + \left(l(l+1) - \frac{m_l^2}{\sin^2 \theta} \right) Q = 0, \quad (3.17)$$

e

$$r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + 2r \frac{dR}{dr} + \frac{2mr^2}{\hbar} \left(E - V(r) - \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2m r^2} \right) R = 0. \quad (3.18)$$

Sendo assim, a equação 3.18 poderá ser utilizada nas seções posteriores para energias potenciais $V(r)$ específicas.

No que diz respeito à equação 3.17, faz-se a mudança de variáveis $x = \cos \theta$. Logo, têm-se

$$\frac{dQ}{d\theta} = -\sin \theta \frac{dQ}{dx}, \quad (3.19)$$

e

$$\frac{d^2 Q}{d\theta^2} = -\cos \theta \frac{dQ}{dx} - \sin \theta \frac{d^2 Q}{dx^2}, \quad (3.20)$$

Diante disso, a equação 3.17 fica

$$(1 - x^2) \frac{d^2 Q}{dx^2} - 2x \frac{dQ}{dx} + \left(l(l+1) - \frac{m_l^2}{1-x^2} \right) Q = 0. \quad (3.21)$$

A equação 3.21 é, por sua vez, a equação diferencial associada de Legendre, descrevendo o caráter simétrico e esférico intrínseco ao sistema analisado. A solução desta equação são os polinômios associados de Legendre $P_l^{m_l}(x)$ (ARFKEN; WEBER, 2005). Assim, os valores de l são números naturais. Os polinômios podem ser obtidos por meio da fórmula de Rodrigues

$$P_l^{m_l}(x) = \frac{1}{2^l l!} (1-x^2)^{\frac{m_l}{2}} \frac{d^{l+m_l}}{dx^{l+m_l}} (x^2-1)^l, \quad (3.22)$$

e

$$P_l^{-m_l}(x) = (-1)^{m_l} \frac{(l-m_l)!}{(l+m_l)!} P_l^{m_l}(x). \quad (3.23)$$

A equação 3.22 possui extrema importância para que se possa descobrir a relação entre l e m_l . A tabela a seguir traz alguns polinômios associados de Legendre.

l	m_l	$P_l^{m_l}$
1	1	$(1-x^2)^{1/2}$
2	1	$3x(1-x^2)^{1/2}$
2	2	$3(1-x^2)^{1/2}$
3	1	$\frac{3}{2}(5x^2-1)(1-x^2)^{1/2}$
3	2	$15x(1-x^2)$
3	3	$15(1-x^2)^{3/2}$

Tabela 2 – Polinômios associados de Legendre (ARFKEN; WEBER, 2005).

A partir das equações 3.22 e 3.23, percebe-se que a derivada possui ordem $l+m_l$ e o polinômio que está sendo derivado possui grau $2l$. Então, para a obtenção de resultados diferente de zero, m_l deve ser menor ou igual a l , como m_l pode ser negativo, tem-se que

$$-l \leq m_l \leq l. \quad (3.24)$$

Portanto, a inequação acima relaciona os valores possíveis para os números quânticos l e m_l .

3.3 Solução da parte radial: Poço potencial infinito

O primeiro potencial a ser tratado é o poço infinito. Este potencial se demonstra, inicialmente, adequado para simular o núcleon, seja próton ou nêutron, aprisionado no núcleo atômico. Diante do sistema, a massa utilizada na equação de Schrödinger deveria

ser a massa reduzida do sistema constituído por núcleon e núcleo, isto é, $\mu = \frac{A-1}{A}m \sim m$, que, no que lhe concerne, é aproximadamente igual à massa do núcleon. À vista disso, a equação de Schrödinger será mantida em termos da massa do núcleon. Com isso, a energia potencial, ou potencial efetivo, $V(r)$ a ser utilizada será dada por

$$V(r) = \begin{cases} 0, & r < R_0 \\ \infty, & r > R_0 \end{cases}, \quad (3.25)$$

em que R_0 se trata do raio do núcleo.

Dessa maneira, a equação 3.18 que descreve a aplicação do potencial no núcleon, i.e. seu comportamento enquanto aprisionado no núcleo, fica dada por

$$r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + 2r \frac{dR}{dr} + \frac{2m}{\hbar^2} \left(Er^2 - \frac{\hbar^2}{2m} l(l+1) \right) R = 0. \quad (3.26)$$

Essa equação diferencial possui notoriedade e é bastante conhecida na literatura, sendo denominada Equação Diferencial Esférica de Bessel (ARFKEN; WEBER, 2005), dada por meio da seguinte equação (BOWMAN, 1958)

$$r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + 2r \frac{dR}{dr} + (k^2 r^2 - l(l+1)) R = 0. \quad (3.27)$$

sendo sua solução dada em termos das funções esféricas de Bessel e de Neumann, ou seja

$$R(r) = k_l j_l(kr) + n_l(kr). \quad (3.28)$$

Todavia, as funções esféricas de Neumann não constituirão a solução do presente problema em particular, já que divergem na origem ($r = 0$) (BOWMAN, 1958). Com isso, a solução se reduz a

$$R(r) = k_l j_l(kr). \quad (3.29)$$

Assim, a condição de contorno $R(R_0) = 0$, implica em $j_l(kR_0) = 0$. Essa condição é satisfeita se kR_0 for igual às raízes (n raízes) da função de Bessel de ordem l . O índice n , relativo a um dado l , corresponde à ordem em que uma dada raiz aparece ao longo do eixo x . Para tanto, tais raízes serão representadas aqui por $x_{n,l}$. Desse modo,

$$kR_0 = x_{n,l}. \quad (3.30)$$

Entretanto, no caso analisado, $k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$, logo

$$\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} R_0 = x_{l,n}. \quad (3.31)$$

E essa equação fornece, por sua vez

$$E_{l,n} = \frac{\hbar^2 x_{l,n}^2}{2mR_0^2}. \quad (3.32)$$

Para observar o comportamento das funções esféricas de Bessel, tem-se a figura abaixo 11. Nesse gráfico, é possível observar o comportamento das funções de ordens zero, um e dois, representados nas cores vermelho, azul e verde, respectivamente. As raízes dessas funções correspondem aos pontos em que seus gráficos cruzam o eixo das abcissas. Diante disso, no intervalo $[0, 10]$, percebe-se que as $j_0(x)$ possui três raízes. Essas raízes podem ser obtidas a partir da literatura, como encontrado em [Bowman \(1958\)](#), bem como de programas de computação simbólica.

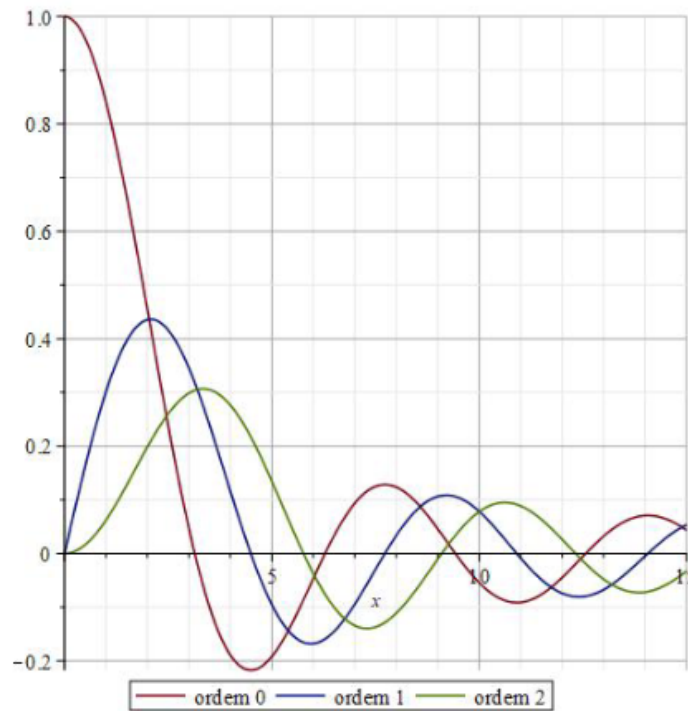


Figura 11 – Gráficos de $j_l(x)$ para $l = 0$ (vermelho), $l = 1$ (azul) e $l = 2$ (verde) ([BOWMAN, 1958](#)).

Em virtude dos resultados obtidos preliminarmente acerca das raízes da função de Bessel, torna-se possível obter resultados relativos à predição dos primeiros números mágicos a partir do poço infinito. Tais resultados se encontram registrados abaixo, a fim de evidenciar a relação dos cálculos executados nesta seção, com as camadas fechadas obtidas e percepções embasadas e provenientes da literatura.

Tendo vista os cálculos e os resultados obtidos, é perceptível que, a partir da equação 3.32, a energia dos núcleons é quantizada e seu valor depende dos números quânticos n e l . Dessa forma, os estados com $l = 0, 1, 2, 3, \dots$ são denominados s, p, d, f, \dots , nesta ordem. E, assim, as raízes de $j_l(kr)$ estão dispostas de acordo com: $1s, 1p, 1d, 2s, 2p, 2d, 3s, 3p, 3d, \dots$, seguindo a notação nl . É por meio desta expressão que as camadas do núcleo atômico serão definidas nesta seção.

Tal qual citado na revisão de literatura, nota-se que para um dado l há $2l + 1$

possibilidades para m_l . Esse valor equivale ao número de núcleons que poderiam ocupar um dado estado. Contudo, é necessário lembrar que os núcleons possuem spin $1/2$, o que faz com que essas possibilidades sejam duplicadas, o que garante que cada estado possa ser ocupado por $4l + 2$ núcleons. Recorre-se a um exemplo já mencionado anteriormente para reiterar tal fato, o estado $1s$ ($n = 1$ e $s = 0$) possui apenas uma opção para m_l ($m_l = 0$), o que comportaria dois núcleons.

A Tabela 3 mostra as cinco primeiras raízes de algumas funções esféricas de Bessel, assim como o estado correspondente e o número de núcleons que o estado pode comportar.

$x_{n,l}$	Estado	Quantidade de núcleons
3,14	1s	2
4,59	1p	6
5,76	1d	10
6,28	2s	2
6,99	1f	14
7,73	2p	6

Tabela 3 – Raízes de $j_l(x)$ e quantidade de núcleons por estado.

Defronte disso, no que se refere à definição de camadas, analisa-se a proximidade entre os níveis de energia. De tal maneira, sabe-se que uma camada é constituída pelo número total de núcleons que esses níveis de energia podem comportar, adicionado da quantidade de núcleons das camadas mais baixas. Portanto, observando a Tabela 3, é possível notar que a primeira camada corresponderia ao primeiro estado (1s), ou seja, comportaria 2 núcleons. Enquanto isso, a segunda camada comportaria, além dos núcleons já contidos na primeira, também os 6 núcleons do segundo estado (1p), o que totalizaria 8 núcleons na segunda camada. Com esse prosseguimento, a terceira camada seria composta pelas duas próximas raízes, ou seja, pelos estados 1d e 2s, sendo possível perceber que a energia desses dois estados possuem valores bem próximos entre si e, por isso, podem ser considerados constituintes da mesma camada. Dessa camada, obtêm-se 12 núcleons, os quais acrescidos dos 8 das camadas antecedentes, totalizando 20 núcleons.

Diante disso, os resultados experimentais evidenciam que as camadas fechadas ocorrem para os números mágicos nucleares, conforme desenvolvido em 2.4.2. As camadas completas obtidas podem ser observadas na Figura 12, em consonância com Krane (1991).

Contudo, é notório que não é possível obter os próximos números mágicos, a partir da quarta camada. Essa limitação se refere ao fato de que no poço infinito há uma mudança demasiadamente abrupta na superfície do núcleo (FREITAS; BONAGAMBA, 1999).

Ademais, apesar da obtenção das três primeiras camadas, considera-se que o poço infinito não é uma aproximação adequada do potencial nuclear, devido aos seguintes aspectos, segundo Krane (1991)

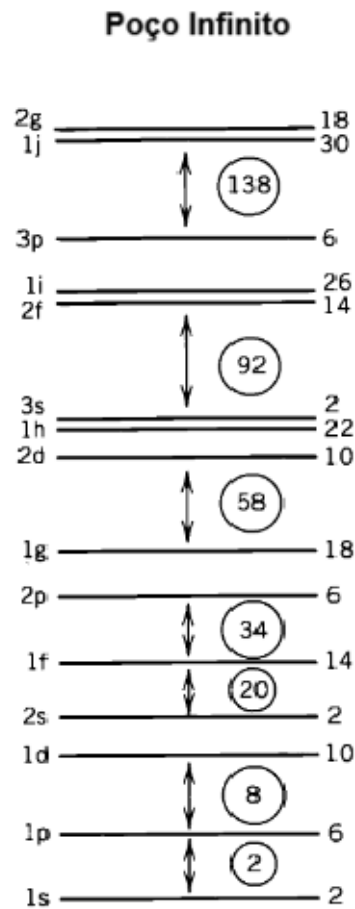


Figura 12 – Estrutura de camadas obtida com poço infinito (KRANE, 1991).

- Neste potencial, para separar um nêutron ou próton, é necessário fornecer energia suficiente para retirá-lo do poço, i.e. uma quantidade infinita.
- O potencial nuclear não possui uma borda acentuada, mas se aproxima bastante da carga nuclear e da distribuição de matéria, caindo suavemente para zero após o raio médio R_M .

3.4 Solução da parte radial: Modelo oscilador harmônico

Nesta seção, analisa-se a equação (3.18) sujeita à energia potencial do tipo oscilador harmônico. Relembrando a forma do potencial, definida em 3.1, nas equações (3.4), (3.5) e, notadamente, nos hamiltonianos em (3.6) e (3.7) .

Usando $R(r) = \frac{u(r)}{r}$, obtém-se

$$\frac{dR}{dr} = -\frac{1}{r^2}u + \frac{1}{r} \frac{du}{dr},$$

de forma que,

$$\frac{d^2R}{dr^2} = -\frac{2}{r^3}u - \frac{2}{r^2} \frac{du}{dr} + \frac{1}{r} \frac{d^2u}{dr^2}.$$

Substituindo esses resultados na equação (3.18), é possível reescrevê-la na forma

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 u}{dr^2} + \left[\frac{l(l+1)\hbar^2}{2mr^2} + \frac{1}{2} m\omega^2 r^2 \right] u = Eu. \quad (3.33)$$

Para solucionar a equação (3.33), toma-se o ansatz

$$u(r) = r^{l+1} e^{-(m\omega/2\hbar)r^2} T(r). \quad (3.34)$$

Derivando a função dada na equação (3.34) e substituindo na equação (3.33), obtém-se

$$r^{l+3} \frac{d^2 T}{dr^2} + \left(2(l+1) - \frac{2m\omega}{\hbar} r^2 \right) r^l \frac{dT}{dr} + \left(\frac{2mE}{\hbar^2} - \frac{m\omega(2l+3)}{\hbar} \right) r^{l+1} T = 0. \quad (3.35)$$

Definindo, $T(r) = L\left(\frac{m\omega}{\hbar}r\right)$, tem-se que

$$\frac{dT}{dr} = \frac{2m\omega}{\hbar} r \frac{dL}{dr},$$

e

$$\frac{d^2 T}{dr^2} = \frac{4m^2\omega^2}{\hbar^2} r^2 \frac{d^2 L}{dr^2} + \frac{2m\omega}{\hbar} \frac{dL}{dr}.$$

Substituindo esses resultados na equação (3.35) obtém-se a equação diferencial

$$\frac{m\omega}{\hbar^2} r^2 \frac{d^2 L}{dr^2} + \left(\frac{m\omega}{\hbar^2} r^2 + \left(l + \frac{1}{2}\right) + 1 \right) \frac{dL}{dr} + \left(\frac{E}{2\hbar\omega} - \frac{l}{2} - \frac{3}{4} \right) L = 0. \quad (3.36)$$

Se a identificação $z = \frac{m\omega}{\hbar^2} r^2$ for feita, a equação (3.36) pode ser vislumbrada como a equação diferencial associada de Laguerre, $xy'' + (\alpha + 1 - x)y' + ny = 0$, em que $n = 0, 1, 2, 3, \dots$, ou seja, $n \in \mathbb{N}$, e $y = L_n^\alpha(x)$ são os polinômios associados de Laguerre de ordem n . Dessa forma, a solução fica dada por

$$u_{l,n}(r) = C r^{l+1} e^{-(m\omega/\hbar)r^2} L_n^{(l+1/2)}\left(\frac{m\omega}{\hbar^2} r^2\right), \quad (3.37)$$

em que C é uma constante de normalização. É notável que $\frac{E}{2\hbar\omega} - \frac{l}{2} - \frac{3}{4} = n$, ou seja,

$$E_{n,l} = \left(2n + l + \frac{3}{2} \right) \hbar\omega. \quad (3.38)$$

Nota-se que a relação dos níveis de energia, dada na equação (3.38), é bastante similar aos níveis de energia de um oscilador harmônico tridimensional, $E_{N'} = \left(N' + \frac{3}{2}\right) \hbar\omega$. Assim, definindo $N' = 2n + l$, pode-se considerar os níveis de energia do problema analisado como correspondentes aos níveis do oscilador harmônico tridimensional.

Substituindo os valores para as constantes, encontra-se que o espaçamento entre dois níveis adjacentes do oscilador, $\Delta E = E_{N'} - E_{N'-1}$ está contido no intervalo $10 \text{ MeV} < \Delta E < 20 \text{ MeV}$, pois $\hbar\omega \approx 51A^{-1/3}$. Observa-se, desse modo, as consequências que esses números quânticos, n , l , e N' , exercem na definição dos números mágicos.

Relembra-se que $l = 0, 1, 2, 3, \dots$, assim como $n = 0, 1, 2, 3, \dots$, da mesma forma, N' também é inteiro positivo. Logo, os valores possíveis para l e n de uma dada camada são delineados pelos valores de N' . Dessa forma, denota-se a camada pelo número N' , de modo que a quantidade de núcleons permitidas em cada camada é definida pelo número de estados contidos no respectivo N' . Por exemplo, o estado em que $N' = 0$ só é possível se ambos, n e l , forem simultaneamente nulos, uma vez que ambos são inteiros e positivos. Logo, na camada $N' = 0$, há apenas um estado, definido por $(n = 0, l = 0)$.

Além disso, conforme definido na equação (3.24), m_l assume somente o valor zero, i.e., $m_l = 0$. Assim, o único estado é dado por $(n = 0, l = 0, m_l = 0)$, ou seja, um estado. Contudo, lembra-se que os núcleons são férmions de spin $1/2$. Logo, em cada estado alocam-se dois núcleons. Com isso, são permitidos até 2 núcleons na camada $N' = 0$. Se tal camada tiver um par de nêutrons e um par de prótons, é dito que essa camada está completa para ambos núcleons.

Pode-se conduzir este raciocínio para as demais camadas. Por exemplo, a camada em que $N' = 1$, pode ter somente $(n = 0, l = 1)$. Como $l = 1$, o número quântico magnético pode ser $m_l = -1, m_l = 0$, ou ainda $m_l = 1$. Isso nos fornece três estados possíveis, quais sejam, $(n = 0, l = 1, m_l = -1)$, $(n = 0, l = 1, m_l = 0)$ e $(n = 0, l = 1, m_l = 1)$. Levando em consideração a natureza fermiônica dos núcleons, cada um desses estados pode comportar dois núcleons, assim para $N' = 1$, pode-se ter 6 núcleons na camada. Se for considerar o número acumulado de núcleons, tem-se que são comportados 8 núcleons até esta camada.

Na camada em que $N' = 2$, pode-se ter $(n = 1, l = 0)$, e também $(n = 0, l = 2)$. Considerando m_l , dado na equação (3.24), esses estados ficam dados por $(n = 1, l = 0, m_l = 0)$, $(n = 0, l = 2, m_l = -2)$, $(n = 0, l = 2, m_l = -1)$, $(n = 0, l = 2, m_l = 0)$, $(n = 0, l = 2, m_l = 1)$, $(n = 0, l = 2, m_l = 2)$. Ou seja, seis estados. Considerando que são férmions, para $N' = 2$ temos 12 estados. Assim, o número acumulado de núcleons até a terceira camada é 20.

Sabendo que camadas com a quantidade de núcleons completamente preenchida definem núcleos estáveis, e levando em consideração que as quantidades acumuladas até o momento são 2, 8, 20 e 40, percebe-se que o modelo até então proposto fornece a quantidade correta de núcleons por camada somente até a terceira camada, pois dos dados empíricos não há núcleos fortemente estáveis com 40 núcleons. Os dados experimentais mostram que o próximo número de núcleo estável é o de 28 nêutrons ou prótons. A Tabela 4 destaca a quantidade de núcleons por camada que foi obtida a partir do modelo proposto.

N'	l	$-l \leq m_l \leq l$	Número de Estados	Número de Núcleons Acumulados
0	0	0	2	2
1	1	-1, 0, 1	6	8
2	0	0	12	20
	2	-2, -1, 0, 1, 2		
3	1	-1, 0, 1	20	40
	3	-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3		
4	0	0	30	70
	2	-2, -1, 0, 1, 2		
	4	-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4		

Tabela 4 – Modelo nuclear obtido com oscilador harmônico simples tridimensional

Assim como no poço potencial infinito, observa-se que no modelo do oscilador harmônico, as camadas fechadas em comum se referem aos números mágicos 2, 8 e 20, os quais correspondem aos núcleos particularmente estáveis ${}^4\text{He}$, ${}^{16}\text{O}$ e ${}^{40}\text{Ca}$ e estão consonantes com os dados empíricos (HEYDE, 2020). Ademais, o potencial do oscilador harmônico tem a maior degenerescência dos autovalores de energia e das funções de onda correspondentes (a degenerescência em $2(n-1)+1$ é dividida para o potencial de poço quadrado, por exemplo) (HEYDE, 2020).

É perceptível, à vista disso, que algo fundamental ainda está faltando na solução. Contata-se, desse modo, a origem da força de interação spin-órbita, acoplando o spin e o momento orbital total, obtém-se uma solução com os números corretos de fechamento das camadas (HEYDE, 2020).

3.5 Potenciais intermediários

Diante dos resultados obtidos com as predições dos potenciais escolhidos, é sabido que o potencial médio tende a ser proporcional à densidade nuclear (FÉNYES, 2011). Em consonância com as curvas de distribuição de massa, Fényes (2011) sugere parecer promissor usar um potencial de oscilador harmônico para o campo médio nos núcleos leves e um potencial de Woods-Saxon nos mais pesados. Contudo, o autor reitera a necessidade de considerar que o potencial do oscilador harmônico aumenta até o infinito com o raio, enquanto as forças nucleares têm um alcance curto. Portanto, em grandes distâncias (e.g. em colisões), o potencial do oscilador harmônico não é realista.

Nessa perspectiva, embora os potenciais nucleares sejam muito complexos, em modelos simples é possível usar potenciais centrais de curto alcance, como foi desenvolvido com o oscilador harmônico. Desse modo, com a modelagem de diferentes potenciais, a dependência do potencial nuclear em relação à distância pode ser aproximada de diferentes maneiras, o que pode ser observado na Figura 13.

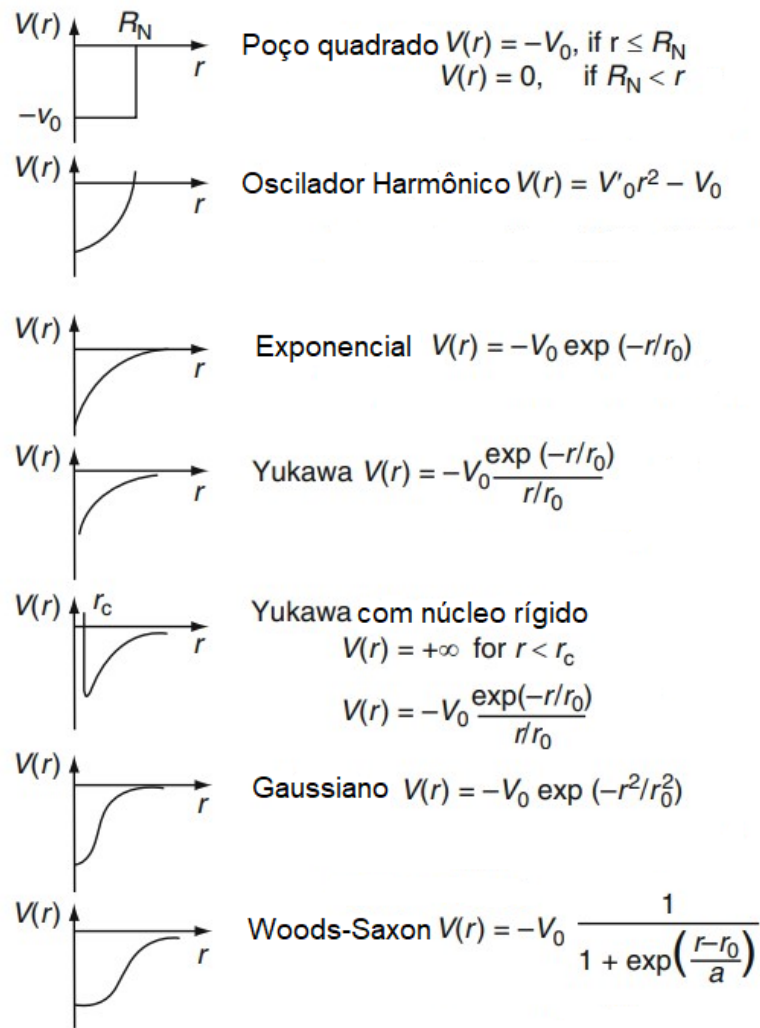


Figura 13 – Esquema ilustrativo de potenciais de interação nuclear simples e central, adaptado de Fényes (2011).

Desse modo, apesar dos diversos potenciais que podem ser utilizados para o modelo de camadas, considera-se, na física nuclear, que o potencial de Woods-Saxon é o mais realista dentre eles. Segundo Krane (1991), o poço infinito não é uma aproximação adequada para o potencial pelos motivos mencionados em 3.3, já o modelo oscilador harmônico não possui uma borda suficientemente acentuada e também requer energias de separação infinitas. Desse modo, um potencial por si só para representar o núcleo atômico seria o da forma intermediária

$$V(r) = \frac{-V_0}{1 + \exp\left(\frac{r-R_M}{a}\right)}, \quad (3.39)$$

em que R_M corresponde ao raio médio e a é a espessura denominada *skin thickness*, a qual designa a diferença entre os raios médios nucleares obtidos usando as distribuições de densidade para nêutrons e prótons pontuais (THAKUR; DHIMAN, 2019). A profundidade

do poço, V_0 , é ajustada para fornecer as energias de separação adequadas e é da ordem de 50 MeV.

Dessa forma, o efeito desse potencial, em face ao oscilador harmônico, remove 8 degenerescências das camadas principais (KRANE, 1991). Isso significa que no oscilador harmônico, há vários estados energéticos diferentes com a mesma energia, o que se chama degenerescência; contudo, ao usar o potencial de Woods-Saxon, essa degenerescência é removida, ou seja, os níveis de energia se separam, e estados que antes tinham a mesma energia agora têm valores de energia ligeiramente diferentes (KRANE, 1991; FÉNYES, 2011).

Assim, à medida que se aumentam os níveis de energia, essa separação entre os níveis de energia (que era antes degenerada) aumenta. Em níveis de energia muito altos, a diferença entre esses níveis separados se torna comparável ao espaçamento entre os próprios níveis de energia do oscilador harmônico (KRANE, 1991). Portanto, preenchendo as camadas em ordem com $2(2l + 1)$ núcleons, obtêm-se novamente os números mágicos 2, 8 e 20, mas os números mágicos mais altos não emergem dos cálculos. Os níveis de energia resultantes são mostrados na Figura 14.

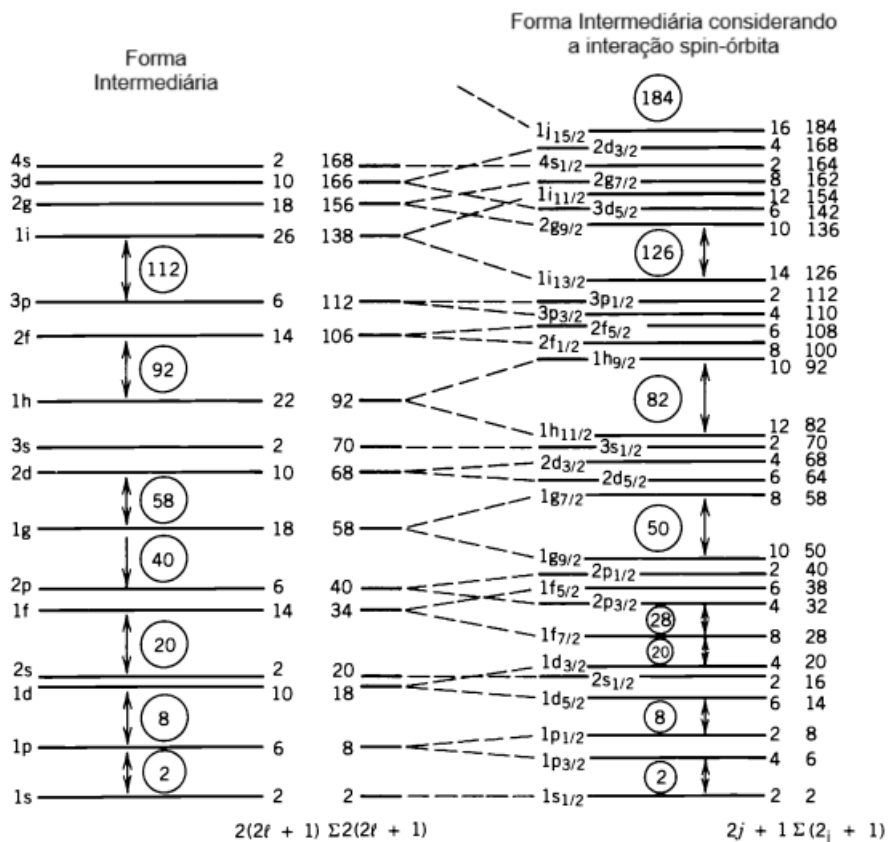


Figura 14 – Níveis de energia (camadas fechadas) obtidas com o potencial intermediário sem a interação spin-órbita (esquerda) e considerando-a (direita) (KRANE, 1991).

4 Princípios Fundamentais: Momento Angular

Com a consolidação de conceitos essenciais da mecânica quântica e o entendimento da maneira pela qual as partículas e seus movimentos são compreendidos no modelo de partículas independentes, é necessário discutir alguns pontos sobre o momento angular total a fim de apresentar um modelo mais realístico para o modelo de camadas posteriormente. Assim, neste capítulo, apresenta-se uma rápida revisão sobre a teoria do momento angular. Dessa maneira, alguns elementos acerca do momento angular no âmbito da mecânica quântica serão discutidos, passando brevemente pelo spin. Os conteúdos discutidos neste capítulo, portanto, serão importantes na continuidade do trabalho, sobretudo na compreensão da interação spin-órbita.

4.1 Momento angular orbital

O momento angular orbital é uma grandeza física de extrema importância na mecânica clássica, uma vez que na teoria clássica das forças centrais, a energia e o momento angular orbital são as quantidades conservadas fundamentais (GRIFFITHS; FREITAS, 2011). Na mecânica quântica, o momento angular orbital também exerce papel imprescindível (GRIFFITHS; FREITAS, 2011; ZETTILI, 2009), já que ele é muito útil para estudar a dinâmica de sistemas que se movem sob a influência de potenciais esfericamente simétricos ou centrais, pois os momentos angulares orbitais desses sistemas são conservados (ZETTILI, 2009). Nesse escopo, o momento angular orbital é essencial no que concerne à descrição do movimento dos núcleons no núcleo atômico, sendo um pré-requisito para o estudo dos sistemas nucleares (ZETTILI, 2009).

Assim, classicamente, o momento angular orbital é definido pela equação

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p},$$

na qual \vec{r} é o vetor deslocamento a partir da origem e \vec{p} é o momento linear.

Dessa forma, do produto vetorial, as componentes do vetor momento angular orbital, coordenadas cartesianas são dados por

$$\begin{aligned}\hat{L}_x &= yp_z - zp_y, \\ \hat{L}_y &= zp_x - xp_z, \\ \hat{L}_z &= xp_y - yp_x.\end{aligned}$$

A partir disso, com o procedimento canônico de quantização, isto é, escrever os operadores posição na forma $\hat{x} \rightarrow x$, $\hat{y} \rightarrow y$, e $\hat{z} \rightarrow z$; e os operadores do momento (*operadores momentum*) na forma $\hat{p}_x \rightarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$, $\hat{p}_y \rightarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial y}$ e $\hat{p}_z \rightarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial z}$. É possível mostrar que os operadores do momento angular orbital satisfazem a álgebra dada pelos comutadores a seguir:

$$\begin{aligned} [\hat{L}_x, \hat{L}_y] &= i\hbar \hat{L}_z, \\ [\hat{L}_y, \hat{L}_z] &= i\hbar \hat{L}_x, \\ [\hat{L}_z, \hat{L}_x] &= i\hbar \hat{L}_y. \end{aligned}$$

Diante disso, para a aplicação do momento angular no contexto do núcleo atômico e a equação de Schrödinger nessa instância, é necessário entender que o problema é tridimensional e, para isso, serão utilizadas coordenadas esféricas. Para tanto, a transformação de coordenadas cartesianas em esféricas se dá por:

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \phi, \\ y &= r \sin \theta \sin \phi, \\ z &= r \cos \theta. \end{aligned}$$

O que implica em:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \\ \theta &= \arccos \left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right), \\ \phi &= \arctan \left(\frac{y}{x} \right). \end{aligned}$$

Fazendo as adequações exigidas pela transformação nas componentes do momento angular orbital, têm-se:

$$\begin{aligned} \hat{L}_x &= i\hbar \left(\sin \phi \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\cos \phi}{\tan \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right), \\ \hat{L}_y &= i\hbar \left(-\cos \phi \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\sin \phi}{\tan \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right), \\ \hat{L}_z &= -i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi}. \end{aligned}$$

Já é possível notar a presença da componente \hat{L}_z na equação de Schrödinger tridimensional (3.12). Contudo, é importante obter o operador \hat{L}^2 , com o fato que:

$$\hat{L}^2 = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2,$$

com $\hat{L}_x^2 = \hat{L}_x \hat{L}_x$, $\hat{L}_y^2 = \hat{L}_y \hat{L}_y$ e $\hat{L}_z^2 = \hat{L}_z \hat{L}_z$.

A partir disso, para \hat{L}_x^2 se obtém:

$$\begin{aligned} \hat{L}_x^2 = -\hbar^2 \left(\sin^2 \phi \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + 2 \sin \phi \cos \phi \cot \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} + \cot^2 \theta \cos^2 \phi \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \right. \\ \left. + \cot \theta \cos^2 \phi \frac{\partial}{\partial \theta} - \sin \phi \cos \phi (2\theta + \cot^2 \theta) \frac{\partial}{\partial \phi} \right). \end{aligned}$$

Para \hat{L}_y^2 ,

$$\begin{aligned} \hat{L}_y^2 = -\hbar^2 \left(\cos^2 \phi \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - 2 \sin \phi \cos \phi \cot \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} + \cot^2 \theta \sin^2 \phi \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \right. \\ \left. + \cot \theta \sin^2 \phi \frac{\partial}{\partial \theta} + \sin \phi \cos \phi (2\theta + \cot^2 \theta) \frac{\partial}{\partial \phi} \right). \end{aligned}$$

E, por fim, para \hat{L}_z^2 ,

$$\hat{L}_z^2 = \hbar^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right).$$

Desse modo, somando os quadrados das componentes do momento angular orbital, obtêm-se:

$$\hat{L}^2 = -\hbar^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \cot \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right). \quad (4.1)$$

É possível verificar que a equação (3.8) pode ser escrita na forma

$$\hat{H}\psi(r, \theta, \phi) = E\psi(r, \theta, \phi), \quad (4.2)$$

em que

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\hat{L}^2}{2mr^2} + U(r).$$

Assim, ainda é possível inferir pelos resultados provindos da resolução da equação de Schrödinger, no capítulo 3, que

$$\hat{L}^2\psi(r, \theta, \phi) = \hbar^2 l(l+1)\psi(r, \theta, \phi). \quad (4.3)$$

Bem como,

$$\hat{L}_z\psi(r, \theta, \phi) = \hbar m_l \psi(r, \theta, \phi). \quad (4.4)$$

É possível notar ainda que \hat{L}^2 é justamente a parte angular da equação de Schrödinger, enquanto \hat{L}_z é função direta de ψ . Desse modo, $\hbar^2 l(l+1)$ e $\hbar m_l$ são os autovalores dos operadores \hat{L}^2 e \hat{L}_z , respectivamente. O estado quântico representado por $\psi(r, \theta, \phi)$ é então definido por três números quânticos, n , l , e m_l , os quais são relacionados aos

autovalores da energia e momento angular orbital, respectivamente. Por isso, tal estado será denotado por $\psi_{n,l,m_l}(r, \theta, \phi)$, o harmônico esférico referido durante na seção 2.4.

Ademais, observa-se o fato que para qualquer potencial do formato $V = V(r)$, o momento angular é quantizado e seus módulos permitidos são justamente os autovalores (TIPLER, 1994), dados por

$$L = \sqrt{l(l+1)} \text{ para } l = 0, 1, 2, 3, \dots$$

E

$$L_z = m\hbar \text{ para } m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l.$$

4.2 Spin

No contexto da descrição completa de um estado eletrônico em um átomo, há a necessidade da introdução de um importante número quântico, o spin (KRANE, 1991). O elétron foi a primeira partícula elementar cujo spin foi detectado, sendo que diante de vários experimentos, os quais não podiam ser interpretados classicamente, os físicos Goudsmit e Uhlenbeck, em 1925, levantaram a hipótese de que todo elétron possui um spin de $\frac{1}{2}\hbar$, o que corresponde a um momento magnético de um magnéton de Bohr (GREINER, 2011).

Desse modo, na instância nuclear, a mesma importância se aplica e, portanto, o spin precisa ser introduzido. Segundo Krane (1991), embora não tenha análogo clássico, o spin pode ser tratado matematicamente como um tipo de momento angular. Nesse sentido, de acordo com Dirac (1981), o spin de uma partícula pode ser imaginado em decorrência a algum movimento interno da partícula, de forma que esteja associado a graus de liberdade diferentes daqueles que descrevem o movimento da partícula em sua totalidade.

Isto posto, o spin é uma propriedade intrínseca das partículas e o seu tratamento algébrico é similar ao do momento angular, embora não se possa dizer que o spin é uma espécie de momento angular intrínseco das partículas, como usualmente. Goudsmit e Uhlenbeck atribuíram ao módulo do vetor spin (\vec{S}) uma forma muito similar ao módulo que o vetor momento angular orbital assume na mecânica ondulatório de Schrödinger (TIPLER, 1994):

$$S = \sqrt{s(s+1)}\hbar$$

Em suma, nos problemas em que o spin da partícula deve ser considerado, o estado quântico do sistema é definido com um número quântico extra, denotado por m_s , o qual é autovalor do operador \hat{S} . Com isso, a função de onda passa a ser dada por $\psi_{n,l,m_l,m_s}(r, \theta, \phi)$.

Para os elétrons e núcleons, que são partículas de spin $1/2$ (férmions), o valor do spin s é fixo, ou seja, $s = 1/2$, e m_s pode assumir apenas dois valores $m_s = 1/2$ e $m_s = -1/2$, os quais relacionamos ao spin *up* e spin *down*, respectivamente.

Os operadores de spin quando aplicados à função de onda fornecem

$$\hat{S}^2 \psi_{n,l,m_l,m_s}(r, \theta, \phi) = \hbar^2 s(s+1) \psi_{n,l,m_l,m_s}(r, \theta, \phi), \quad (4.5)$$

e

$$\hat{S}_z \psi_{n,l,m_l,m_s}(r, \theta, \phi) = \hbar m_s \psi_{n,l,m_l,m_s}(r, \theta, \phi). \quad (4.6)$$

E os operadores de spin, por sua vez, satisfazem as relações de comutação dadas por

$$\begin{aligned} [\hat{S}_x, \hat{S}_y] &= i\hbar \hat{S}_z, \\ [\hat{S}_y, \hat{S}_z] &= i\hbar \hat{S}_x, \\ [\hat{S}_z, \hat{S}_x] &= i\hbar \hat{S}_y, \end{aligned}$$

as quais são idênticas àquelas satisfeitas pelos operadores que representam o momento angular. Por esse motivo, muitas vezes, o spin é identificado, erroneamente, como uma espécie de rotação.

Em relação aos núcleons, que tem spin fixo ($s = 1/2$), a aplicação dos operadores de spin fornece

$$\hat{S}^2 \psi_{n,l,m_l,1/2}(r, \theta, \phi) = \frac{3}{4} \hbar^2 \psi_{n,l,m_l,1/2}(r, \theta, \phi), \quad (4.7)$$

$$\hat{S}_z \psi_{n,l,m_l,1/2}(r, \theta, \phi) = \frac{1}{2} \hbar \psi_{n,l,m_l,1/2}(r, \theta, \phi), \quad (4.8)$$

para o caso do spin *up*, $m_s = 1/2$. E também,

$$\hat{S}^2 \psi_{n,l,m_l,-1/2}(r, \theta, \phi) = -\frac{1}{4} \hbar^2 \psi_{n,l,m_l,-1/2}(r, \theta, \phi), \quad (4.9)$$

$$\hat{S}_z \psi_{n,l,m_l,-1/2}(r, \theta, \phi) = -\frac{1}{2} \hbar \psi_{n,l,m_l,-1/2}(r, \theta, \phi), \quad (4.10)$$

para o caso de spin *down*, $m_s = -1/2$.

4.3 Momento angular total

O momento angular total, denotado por \vec{J} , inclui a soma do momento angular orbital \vec{L} e o spin \vec{S} , isto é, $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$. Com isso, é possível definir o operador momento angular total \hat{J} , o qual, juntamente com \hat{J}_z , satisfaz as equações de autovalores dadas por

$$\hat{J}^2 \Psi_{j,m_j}(r, \theta, \phi) = \hbar^2 j(j+1) \Psi_{j,m_j}(r, \theta, \phi), \quad (4.11)$$

$$\hat{J}_z \Psi_{j,m_j}(r, \theta, \phi) = \hbar m_j \Psi_{j,m_j}(r, \theta, \phi). \quad (4.12)$$

Nesse arcabouço, o número j pode assumir valores dados por $j = l + s$; enquanto o número m_j pode assumir os valores $m_j = -j, -j + 1, \dots, 0, \dots, j - 1, j$. É importante notar que nos casos de partículas de spin semi-inteiro, como elétrons e núcleons, j pode assumir valores inteiros e semi-inteiros; nestes casos, m_j também será semi-inteiro, e $m_j = 0$ não é um valor permitido.

Como exemplo, toma-se um elétron que esteja num estado em que seu momento angular orbital seja igual a zero, isto é, $l = 0$. Como para o elétron $s = 1/2$, o número j pode assumir somente o valor $j = 1/2$, enquanto $m_j = 1/2$ ou $m_j = -1/2$.

No caso de um elétron cujo momento angular orbital seja igual a $l = 1$, podemos ter $j = 3/2$ (pois $j = l + s$), e assim, m_j pode assumir os valores $-3/2, -1/2, 1/2, 3/2$.

Dessa maneira, nota-se que para um dado l , a inclusão do spin do elétron dobra a quantidade de estados permitidos. Por exemplo, se $n = 0$ e $l = 0$, ter-se-ia a função de onda $\Psi_{0,0,0}$, pois só haveria $m_l = 0$. Contudo, se o spin for considerado, pode-se ter os estados representados pelas funções de onda $\Psi_{0,0,0,1/2}$ e $\Psi_{0,0,0,-1/2}$. Assim, os aspectos aqui esboçados sobre momento angular serão bastante úteis no próximo capítulo.

5 Interação spin-órbita

Tendo em vista que o modelo até aqui desenvolvido não ter sido suficiente para prever a quantidade de núcleons por camada que esteja consoante a experiência, é necessário aprimorá-lo. Uma proposta é considerar uma interação análoga à interação spin-órbita estabelecida na resolução do átomo de hidrogênio na mecânica quântica. A proposta é acrescentar no hamiltoniano o termo de spin-órbita (MAYER, 1949; MAYER; JENSEN, 1955; GREINER; MARUHN, 1996),

$$\mathcal{H}_{SL} = \Phi(r)\vec{S} \cdot \vec{L}, \quad (5.1)$$

em que \vec{S} é o vetor spin do núcleon, enquanto \vec{L} é o vetor momento angular do núcleon, e $\Phi(r)$ uma função com dependência radial que pode ser modelada com base na fenomenologia.

O termo spin-órbita adicionado à interação entre núcleons encontra embasamento experimental, conforme pode ser verificado no trabalho Greiner e Maruhn (1996) e Bohr e Mottelson (1998).

Na abordagem que é construída neste capítulo, o momento angular total \vec{J} será utilizado, o qual é definido por $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$. Usando o fato que $J^2 = (\vec{L} + \vec{S}) \cdot (\vec{L} + \vec{S}) = L^2 + S^2 + 2\vec{L} \cdot \vec{S}$, escreve-se que $\vec{L} \cdot \vec{S} = \frac{1}{2}(J^2 - L^2 - S^2)$. A escrita dessa última forma facilitará a resolução do problema posto.

A presença do termo dado na equação (5.1) é responsável por causar um desmembramento de cada nível de energia, autovalores das equações (3.6-3.7), em dois, os quais são correspondentes aos autovalores de $\vec{L} \cdot \vec{S}$. Ou seja, originalmente, pelas equações (3.6-3.7), havia uma equação de autovalores dada por $\mathcal{H}\psi = E\psi$, na qual E são os autovalores. Por conseguinte, tem-se uma equação de autovalores dada por $(\mathcal{H} + \mathcal{H}_{SL})\psi = E'\psi$, em que $E' = E_{n,l} + E_j$, ou $E_{n,l,j} = (2n + l + \frac{3}{2})\hbar\omega + E_j$, sendo que E_j representa os autovalores do termo spin-órbita. Define-se $\psi = u_{n,l}F$, em que F é uma função dependente das variáveis angulares e do spin.

Dos cursos de mecânica quântica (COHEN-TANNOUDJI; DIU; LALOË, 1977; GRIFFITHS; FREITAS, 2011), sabe-se que os autovalores de $\vec{L} \cdot \vec{S}$ e, logo, de $\frac{1}{2}(J^2 - L^2 - S^2)$, são dados por

$$\frac{1}{2}(J^2 - L^2 - S^2)F = \frac{\hbar^2}{2}[j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)]F, \quad (5.2)$$

em que se define $E_j = \kappa \frac{\hbar^2}{2}[j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)]$, em que $\kappa = \int_0^{R_0} u_{n,l}\Phi(r)dr$. Como os núcleons são partículas de spin $s = 1/2$, é possível escrever

$$E_j = \kappa \frac{\hbar^2}{2} \left[j(j+1) - l(l+1) - \frac{3}{4} \right]. \quad (5.3)$$

Deve-se observar que $j = l + s$ resulta em dois possíveis valores para cada valor de l : $j = l - 1/2$ e $j = l + 1/2$. Assim escreve-se, respectivamente

$$E_{j=l-1/2} = -\kappa \frac{\hbar^2}{2} (l + 1), \quad (5.4)$$

e

$$E_{j=l+1/2} = \kappa \frac{\hbar^2}{2} l. \quad (5.5)$$

A separação energética entre dois níveis orbitais é $\Delta E_l = E_{j=l+1/2} - E_{j=l-1/2} = \kappa \hbar^2 (l + 1/2)$.

Experimentalmente, sabe-se que a energia do nível em que $j = l - 1/2$ é mais elevada que do nível em que $j = l + 1/2$. Por esse motivo, o termo de acoplamento spin-órbita deve ser negativo, então cada nível de energia possível $E_{n,l,j}$ contém os desdobramentos: $E_{n,l} - E_{l+1/2}$ e $E_{n,l} - E_{l-1/2}$. Além disso, o arcabouço experimental infere que o coeficiente κ possui valor absoluto entre $0,3 \text{ MeV}/\hbar^2$ e $0,6 \text{ MeV}/\hbar^2$ (GREINER; MARUHN, 1996).

Isto posto, tabelam-se os primeiros valores de E_j , para $l = 0, \dots, 6$, a partir das equações (5.4) e (5.5) com os respectivos subníveis rotulados com a notação espectroscópica, ($l = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots$) \rightarrow ($s, p, d, f, g, h, i, \dots$).

l	j	notação espectroscópica	Energia
	-1/2	-	-
0	1/2	$s_{1/2}$	0
	1/2	$p_{1/2}$	$-\kappa \hbar^2$
1	3/2	$p_{3/2}$	$\frac{1}{2} \kappa \hbar^2$
	3/2	$d_{3/2}$	$-\frac{3}{2} \kappa \hbar^2$
2	5/2	$d_{5/2}$	$\kappa \hbar^2$
	5/2	$f_{5/2}$	$-2\kappa \hbar^2$
3	7/2	$f_{7/2}$	$\frac{3}{2} \kappa \hbar^2$
	7/2	$g_{7/2}$	$-\frac{5}{2} \kappa \hbar^2$
4	9/2	$g_{9/2}$	$2\kappa \hbar^2$
	9/2	$h_{9/2}$	$-3\kappa \hbar^2$
5	11/2	$h_{11/2}$	$\frac{5}{2} \kappa \hbar^2$
	11/2	$i_{11/2}$	$-\frac{7}{2} \kappa \hbar^2$
6	13/2	$i_{13/2}$	$3\kappa \hbar^2$

Tabela 5 – Valores de energia do desdobramento spin-órbita e as respectivas camadas espectroscópicas.

A partir da Tabela 5, é possível posicionar os níveis e subníveis energéticos do modelo de camadas com a interação spin-órbita e assim ao contar o número de degenerescência D de núcleons permitidos, conforme o princípio de exclusão de Pauli, em uma camada completamente ocupada.

Dessa maneira, pelo princípio de exclusão de Pauli, dois núcleons não podem ter o mesmo conjunto de números quânticos (n, l, j, m_j) . Da mecânica quântica (obtida na equação (3.24)) para um dado valor de j tem-se que

$$m_j = -j, -(j-1), \dots, -1, 0, 1, \dots, j-1, j.$$

Isso resulta em um total de $2j + 1$ valores para cada j .

Conclui-se, logo, que pelo princípio de exclusão de Pauli, um orbital completo pode conter um máximo de $D(j) = 2j + 1$ núcleons. Adquirindo a distribuição dos núcleons nesse modelo de camadas, lembrando que da equação (3.38), tem-se que $N' = 2n + l$, de modo que se constrói as camadas com

- $N' = 0$, resulta que $n = 0$ e $l = 0$. De acordo com a Tabela 5, tem-se apenas um subnível e corresponde a $1s_{1/2}$. Conforme a regra do princípio de exclusão de Pauli, da expressão, pode-se alocar $2j + 1$ núcleons nesse nível. Com $j = 1/2$ obtém-se que apenas dois núcleons completam esse nível, então $D = 2$.
- $N' = 1$, resulta que $n = 0$ e $l = 1$. Consoante a Tabela 5, têm-se apenas dois subníveis correspondente a $1p_{1/2}$ e $1p_{3/2}$. Segundo a expressão $2j + 1$, em $1p_{1/2}$ tem-se $j = 1/2$, e dois núcleons podem ocupar esse subnível; em $1p_{3/2}$ tem-se $j = 3/2$, e quatro núcleons podem ocupar esse subnível. Resulta que $D = 6$ núcleons no máximo podem ocupar esse nível.
- $N' = 2$ apresenta duas possíveis combinações:
 - (i) $n = 0$ e $l = 2$, que de acordo com a Tabela 5, têm-se os dois subníveis correspondentes a $1d_{1/2}$ e $1d_{5/2}$. Segundo a expressão $2j + 1$, em $1d_{3/2}$ tem-se $j = 3/2$, tal que quatro núcleons podem ocupar esse subnível; em $1d_{5/2}$ tem-se $j = 5/2$, e seis núcleons podem ocupar esse subnível.
 - (ii) $n = 1$ e $l = 0$, que de acordo com a Tabela 5, tem um subnível e corresponde a $2s_{1/2}$ com a possibilidade de mais dois núcleons ocuparem esse estado. Resulta então que $D = 4 + 6 + 2 = 12$ núcleons no máximo podem ocupar esse nível. É importante também observar, na Tabela 5, a ordem dos níveis de energia, que do menor para o maior fica $1d_{5/2}$, $2s_{1/2}$ e $1d_{3/2}$. O nível $2s_{1/2}$ não é afetado pelo acoplamento spin-órbita, ao passo que o subnível $1d_{3/2}$ sobe e o subnível $1d_{5/2}$ desce em concordância com a regra que o subnível $j + 1/2$ fica abaixo do subnível $j - 1/2$ para um mesmo n e l .

Até aqui, é palpável que um núcleo atômico com a camada $N' = 0$ tenha o número mágico igual a 2, para $N' = 1$ as camadas completas resultam no número mágico 8 e para $N' = 2$ as camadas completas resultam no número mágico igual a 20. Estes três primeiros números estão de acordo com o previsto na seção 3.4 visto na Tabela

4. Entretanto, para a camada $N' = 3$ o acoplamento spin-órbita afeta a separação dos subníveis conforme mostrado a seguir.

- $N' = 3$ é um nível dividido em duas camadas. Para $n = 0$ e $l = 3$ há os dois subníveis correspondentes a $1f_{5/2}$ e $1f_{7/2}$, que de acordo com a Tabela 5 a energia do subnível $1f_{7/2}$ será $E = \frac{9}{2}\omega\hbar - \frac{3}{2}\kappa\hbar^2$ que está abaixo do subnível $1f_{5/2}$ com energia $E = \frac{9}{2}\omega\hbar + 2\kappa\hbar^2$. A separação entre esses dois níveis vale $\Delta E_l = \kappa\hbar^2(l + \frac{1}{2}) = \frac{7}{2}\kappa\hbar^2$, de forma que se observa uma separação energética considerável. O subnível $1f_{7/2}$ é apreciavelmente baixo, de tal forma que este é levado a um isolamento justificável, o que leva o subnível $1f_{7/2}$ ao *status* de uma camada fechada com um número de ocupação igual a $D(7/2) = (2 \cdot 7/2 + 1) = 8$, alcançando o próximo número mágico igual a 28 (MAYER; JENSEN, 1955).

O subnível $1f_{5/2}$, com $D = 6$ irá se associar aos outros subníveis de $N' = 3$, $n = 1$ e $l = 1$, que são $2p_{1/2}$ e $2p_{3/2}$ com $D = 2$ e $D = 4$ respectivamente. Isso resulta em um número de ocupação igual a 12, que somado com o número mágico anterior 28 resulta em 40 que não é um número mágico. Da mesma forma que aconteceu com o subnível $1f_{7/2}$, um subnível do nível $N' = 4$ devido ao acoplamento spin-órbita, desce para se associar com os subníveis $1f_{5/2}$, $2p_{1/2}$ e $2p_{3/2}$ para formarem uma camada estável. Esse subnível vem dos números quânticos $N' = 4$, $n = 0$ e $l = 4$, como se observa na Tabela 5, o subnível $1g_{9/2}$ está abaixo do subnível $1g_{7/2}$, e sendo também observado na experiência, que o subnível $1g_{9/2}$ com $D = 10$ se associa subníveis $1f_{5/2}$, $2p_{1/2}$ e $2p_{3/2}$ para obter a camada completa com número mágico igual a 50. Os dados empíricos mostram que os níveis de energia do menor para o maior é $2p_{3/2}$, $1f_{5/2}$, $2p_{1/2}$ e $1g_{9/2}$ (MAYER; JENSEN, 1955).

- $N' = 4$ tem um subnível $1g_{7/2}$, com $D = 8$ para os números quânticos $n = 0$ e $l = 4$. Existem dois subníveis para $n = 1$ e $l = 2$ que são $2d_{3/2}$ e $2d_{5/2}$ com $D = 4$ e $D = 6$ respectivamente. E existe um subnível para $n = 2$ e $l = 0$ que é o subnível $3s_{1/2}$ com $D = 2$. Até aqui tem-se um número de ocupação para esses subníveis igual a 20, que resulta um número de núcleons acumulados igual a 70, que não é um número mágico. E como antes os dados empíricos mostram que um subnível de $N' = 5$ desce para compor uma camada com $1g_{7/2}$, $2d_{3/2}$, $2d_{5/2}$ e $3s_{1/2}$. O subnível que tem números quânticos $N' = 5$, $n = 0$ e $l = 5$ que desce do nível $N' = 5$ é o subnível $1h_{11/2}$ com $D = 12$. Assim essa camada tem subníveis com ordem energética do menor para o maior dado por $1g_{7/2}$, $2d_{5/2}$, $2d_{3/2}$, $3s_{1/2}$ e $1h_{11/2}$ totalizando $D = 32$ e número de ocupação igual a 82, um número mágico.
- $N' = 5$ tem o subnível $1h_{9/2}$ com $n = 0$ e $l = 5$ com $D = 10$. Para $n = 1$ e $l = 3$ têm-se dois subníveis $2f_{5/2}$ e $2f_{7/2}$ com $D = 6$ e $D = 8$ respectivamente. Para $n = 2$ e $l = 1$ tem-se mais dois subníveis $3p_{1/2}$ e $3p_{3/2}$ com $D = 2$ e $D = 4$ respectivamente. Como nos casos anteriores, um subnível de $N' = 6$, com $n = 0$ e

$l = 6$ desce para compor essa camada. É o subnível $1i_{13/2}$ com $D = 14$ que desce e completa a camada com níveis de energia do menor para o maior dado por $1h_{9/2}$, $2f_{7/2}$, $2f_{5/2}$, $3p_{3/2}$, $3p_{1/2}$ e $1i_{13/2}$ totalizando $D = 44$ e o número de ocupação igual a 126, outro número mágico.

- $N' = 6$ com $n = 0$ e $l = 5$ tem um subnível $1i_{11/2}$ com $D = 12$, o subnível $1i_{13/2}$, como explicado acima tem nível energético baixo que o coloca na camada anterior. Para $n = 1$ e $l = 4$, em concordância com a Tabela 5 corresponde aos subníveis $2g_{9/2}$ e $2g_{7/2}$ cada $D = 10$ e $D = 8$ respectivamente. Para $n = 2$ e $l = 2$ tem subníveis $3d_{5/2}$ e $3d_{3/2}$ com $D = 6$ e $D = 4$ respectivamente. Para $n = 3$ e $l = 0$ tem um único subnível $4s_{1/2}$ com $D = 2$. A ordem energética nessa camada, de acordo com os dados experimentais, do menor valor para o maior valor é dada por: $2g_{9/2}$, $3d_{5/2}$, $1i_{11/2}$, $2g_{7/2}$, $4s_{1/2}$, $3d_{3/2}$ mais um subnível $1j_{15/2}$ que desce do nível $N' = 7$, $n = 0$ e $l = 7$ com $D(15/2) = 16$, resultando no número de degenerescência total para essa camada, $D = 58$. Até essa camada o número de ocupação é igual a 184, um potencial número mágico.

E assim, obtêm-se todos os números mágicos: 2, 8, 20, 28, 50, 82 e 126. A análise aqui realizada abrange tanto prótons, quanto nêutrons.

Assim, o núcleo é estável se possui o número de prótons ou o número de nêutrons igual a algum número mágico. Existem os núcleos denominados de duplamente mágicos que possuem tanto o número de prótons como o de nêutrons igual a um dos números mágicos. Apresenta-se na Tabela 6 o resumo descritivo do modelo de camadas seguindo a ordem energética de baixo para cima (ordem crescente).

A seguir, há o exemplo do isótopo de potássio ${}^{39}_{19}\text{K}$, cuja configuração do estado fundamental no modelo de camadas é mostrado na Figura 15,

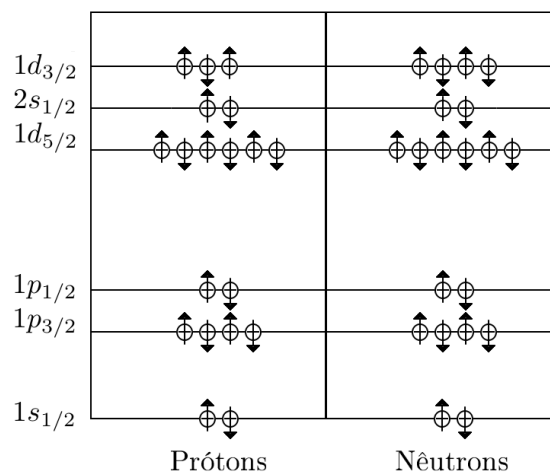


Figura 15 – Modelo de camadas para o ${}^{39}_{19}\text{K}$.

N'	l	notação espectroscópica	spin-orbital	D	número mágico
6	0	$4s$.	58	184
	2	$3d$.		
	4	$2g$.		
	6	$1i$	$1i_{11/2}$		
5	1	$3p$	$1i_{13/2}$	44	126
			$3p_{1/2}$		
	3	$2f$	$3p_{3/2}$		
			$2f_{5/2}$		
5	$1h$	$2f_{7/2}$			
		$1h_{9/2}$			
4	0	$3s$	$1h_{11/2}$	32	82
			$3s_{1/2}$		
	2	$2d$	$2d_{3/2}$		
			$2d_{5/2}$		
4	$1g$	$1g_{7/2}$			
3	1	$2p$	$1g_{9/2}$	22	50
			$2p_{1/2}$		
	3	$1f$	$1f_{5/2}$		
			$2p_{3/2}$		
			$1f_{7/2}$	8	28
2	0	$2s$	$1d_{3/2}$	12	20
	2	$1d$	$2s_{1/2}$		
			$1d_{5/2}$		
1	1	$1p$	$1p_{1/2}$	6	8
			$1p_{3/2}$		
0	0	$1s$	$1s_{1/2}$	2	2

Tabela 6 – Predição dos números mágicos no modelo de camadas. O valor de D é o número de núcleons em cada nível N' .

Observa-se que o potássio ${}^{39}_{19}\text{K}$ tem o número de prótons $Z = 19$ distribuído até a camada $1d_{3/2}$. O número de nêutrons distribuídos nas camadas completam o número mágico igual a 20. Todos os núcleons estão pareados exceto o próton $1d_{3/2}$. Isso resulta que o momento angular do estado fundamental é $j = l - s = 2 - 1/2 = 3/2$.

6 Considerações finais e perspectivas futuras

Em virtude dos aspectos desenvolvidos, ao longo deste trabalho foram explorados o modelo de camadas e sua aplicação na compreensão e obtenção dos números mágicos nucleares, de modo que foi realizada uma revisão pedagógica desse modelo. Nesse sentido, perante o detalhamento teórico e da resolução analítica da equação de Schrödinger para o poço potencial infinito e o modelo do oscilador harmônico, constatou-se que apesar da eficácia de uma análise simples, com potenciais menos robustos acerca das camadas nucleares, é imprescindível considerar a interação spin-órbita para a obtenção dos números mágicos nucleares, tal qual previsto por Mayer e Jensen.

Assim, de maneira geral, a complexidade dos modelos nucleares se tornou explícita devido aos processos que permearam sua construção e difusão ao longo da história, demonstrando a necessidade de constantes desenvolvimentos e aprimoramentos acerca da descrição da estrutura aliada às dinâmicas físicas intrínsecas ao núcleo atômico. Nesses aspectos, a importância do modelo de camadas se torna evidente, verificando-se extremamente precisas para o estudo da estabilidade nuclear.

Portanto, o resultado primordial residiu na obtenção dos números mágicos, que definem a estabilidade dos núcleos atômicos, a partir da equação de Schrödinger. A suposição feita na elaboração do modelo foi a de que os núcleons interagem uns com os outros, tanto em relação à força forte, e no caso dos prótons também como com respeito à força eletrostática. Esta interação, por sua vez, foi modelada via um campo médio, o qual foi aproximado pela energia potencial do oscilador harmônico. Com isso, foi possível fazer o tratamento de uma única partícula. Não obstante, somente essa suposição foi insuficiente para descrever todos os números mágicos; e assim, foi necessário que incluir no hamiltoniano uma forte interação do tipo spin-órbita. Feito isso, todos os números mágicos foram obtidos, quais sejam: 2, 8, 20, 28, 50, 82 e 126. Desse modo, o núcleo é estável se possui o número de prótons ou o número de nêutrons igual a algum número mágico.

Em suma, este trabalho se apresenta como um passo fundamental para investigar os números mágicos nucleares junto ao modelo de camadas e apresentá-los de forma didática, espera-se que trabalhos futuros aprofundem os conhecimentos a serem construídos e forneçam uma contribuição relevante para as instâncias do campo da física nuclear e para a compreensão da estrutura dos núcleos atômicos. Espera-se que este trabalho cumpra com um dos seus objetivos, visando fornecer subsídios didáticos para estudantes que queiram compreender melhor o modelo das camadas nucleares, especialmente em disciplinas de introdutórias de física nuclear.

Para trabalhos futuros, cuja finalidade seja apresentar e explorar didaticamente

modelos nucleares, sugere-se abordar o problema da estabilidade nuclear e outras propriedades nucleares por diferentes modelos, desde hamiltonianos de muitos corpos até outros tipos de energia potencial. Ademais, sugere-se o enfoque do avanço que modelo de camadas promoveu outros modelos nucleares, como a abordagem de camadas deformadas e em modelos mistos.

Referências

- ABDULLAH, K. *Fundamentals in Nuclear Physics*. [S.l.]: Noor Publishing, 2017. Citado na página 38.
- ARFKEN, G. B.; WEBER, H. J. *Mathematical methods for physicists. Published: Amsterdam; Boston: Elsevier*, n. 6, 2005. Citado 4 vezes nas páginas 14, 61, 63 e 64.
- BOHR, A.; MOTTELSON, B. R. *Nuclear Structure*. [s.n.], 1998. v. 1. Disponível em: <<https://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/3530>>. Citado na página 79.
- BOWMAN, F. *Introduction to Bessel Functions*. [S.l.]: Dover Publications Inc. New York, 1958. Citado 3 vezes nas páginas 13, 64 e 65.
- COHEN-TANNOUJDI, C.; DIU, B.; LALOË, F. *Quantum Mechanics*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 1977. v. 2. Citado na página 79.
- COKER, R. *Fermi gas*. 2024. <<https://web2.ph.utexas.edu/~coker2/index.files/fermigas.htm>>. [Acesso em 31 de julho de 2024]. Citado 2 vezes nas páginas 39 e 40.
- CONTI, A. C. d. *Análise dos efeitos da correção de camadas para a distribuição de massa do ⁴⁰Ca*. Tese (Doutorado) — Universidade Estadual Paulista (UNESP), 1995. Citado 3 vezes nas páginas 32, 35 e 42.
- COOK, N. D. *Models of the atomic nucleus: unification through a lattice of nucleons*. [S.l.]: Springer, 2010. Citado 10 vezes nas páginas 13, 28, 29, 30, 31, 38, 41, 42, 48 e 51.
- COTTINGHAM, W. N.; GREENWOOD, D. A. *An introduction to nuclear physics*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2001. Citado 6 vezes nas páginas 13, 34, 43, 45, 47 e 54.
- DIRAC, P. A. M. *The principles of quantum mechanics*. [S.l.]: Oxford University Press, 1981. Citado na página 76.
- EISBERG, R.; RESNICK, R. *Física quântica. Campus, Rio de Janeiro*, 1979. Citado 15 vezes nas páginas 13, 27, 31, 35, 37, 38, 40, 41, 46, 49, 50, 51, 52, 54 e 55.
- EPE. *Matriz Energética e Elétrica*. 2024. <<https://www.epe.gov.br/pt/abcdenergia/matriz-energetica-e-eletrica>>. Empresa de Pesquisa Energética. Online. Acesso em 1 de junho de 2024. Citado na página 21.
- EPE. *Relatório Síntese 2024: Balanço Energético Nacional 2023*. 2024. <<https://www.epe.gov.br/pt/publicacoes-dados-abertos/publicacoes/balanco-energetico-nacional-2024>>. Empresa de Pesquisa Energética. Online. Acesso em 1 de junho de 2024. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 21.
- FEENBERG, E. Nuclear shell structure and isomerism. *Physical Review*, APS, v. 75, n. 2, p. 320, 1949. Citado na página 42.
- FÉNYES, T. Basic properties of the atomic nucleus. *Handbook of Nuclear Chemistry*, p. 39, 2011. Citado 7 vezes nas páginas 13, 23, 33, 34, 70, 71 e 72.

- FOSSIÓN, R. Nuclear models. In: AMERICAN INSTITUTE OF PHYSICS. *AIP Conference Proceedings*. [S.l.], 2010. v. 1271, n. 1, p. 24–64. Citado na página 30.
- FREITAS, J. C. C.; BONAGAMBA, T. J. Os núcleos atômicos e a RMN. *Fundamentos e aplicações da ressonância magnética nuclear*. Rio de Janeiro: AUREMN, 1999. Citado 8 vezes nas páginas 38, 40, 41, 48, 49, 50, 51 e 66.
- GAMOW, G. Mass defect curve and nuclear constitution. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, The Royal Society London, v. 126, n. 803, p. 632–644, 1930. Citado 2 vezes nas páginas 22 e 31.
- GREINER, W. *Quantum mechanics: an introduction*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2011. Citado na página 76.
- GREINER, W.; MARUHN, J. A. *Nuclear models*. [S.l.]: Springer, 1996. Citado 6 vezes nas páginas 28, 30, 42, 43, 79 e 80.
- GRIFFITHS, D. J.; FREITAS, L. *Mecânica quântica*. [S.l.]: Pearson Prentice Hall, 2011. Citado 3 vezes nas páginas 57, 73 e 79.
- HAXEL, O.; JENSEN, J. H. D.; SUESS, H. E. On the "magic numbers" in nuclear structure. *Physical Review*, APS, v. 75, n. 11, p. 1766, 1949. Citado 2 vezes nas páginas 42 e 43.
- HEYDE, K. *Basic ideas and concepts in nuclear physics: an introductory approach*. [S.l.]: CRC Press, 2020. Citado 7 vezes nas páginas 13, 31, 32, 47, 60, 61 e 70.
- KAMAL, A. *Nuclear physics*. [S.l.]: Springer, 2014. Citado 12 vezes nas páginas 23, 27, 28, 31, 32, 39, 42, 45, 49, 51, 55 e 56.
- KRANE, K. S. *Introductory nuclear physics*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 1991. Citado 20 vezes nas páginas 13, 27, 31, 37, 40, 41, 42, 46, 48, 49, 50, 52, 54, 57, 59, 66, 67, 71, 72 e 76.
- KRMI, J.; KAVI, M. Investigating the potential of nuclear energy in achieving a carbon-free energy future. *Energies*, v. 16, n. 9, 2023. ISSN 1996-1073. Disponível em: <<https://www.mdpi.com/1996-1073/16/9/3612>>. Citado na página 22.
- LAMARSH, J. R.; BARATTA, A. J. *Introduction to nuclear engineering*. [S.l.]: Prentice hall Upper Saddle River, NJ, 2001. v. 3. Citado na página 27.
- LANDAU, L. D.; LIFSHITZ, E. M. *Quantum mechanics: Non-relativistic theory*. [S.l.]: Elsevier, 2013. v. 3. Citado na página 42.
- LILLEY, J. *Nuclear physics: principles and applications*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 46.
- MARTIN, B. R.; SHAW, G. *Nuclear and Particle Physics: An Introduction*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2019. Citado 17 vezes nas páginas 13, 23, 31, 38, 39, 40, 42, 43, 45, 47, 48, 50, 51, 52, 53, 54 e 55.
- MAYER, J. H. D. J. M. G. Elementary theory of nuclear shell structure. *Wiley*, 1955. Citado na página 42.

- MAYER, M. G. On closed shells in nuclei. *Physical Review*, APS, v. 74, n. 3, p. 235, 1948. Citado na página 42.
- MAYER, M. G. On closed shells in nuclei II. *Physical Review*, APS, v. 75, n. 12, p. 1969, 1949. Citado 3 vezes nas páginas 42, 44 e 79.
- MAYER, M. G. Nuclear configurations in the spin-orbit coupling model. ii. theoretical considerations. *Physical Review*, APS, v. 78, n. 1, p. 22, 1950. Citado na página 42.
- MAYER, M. G. The shell model. *Science*, American Association for the Advancement of Science, v. 145, n. 3636, p. 999–1006, 1964. Citado 8 vezes nas páginas 14, 42, 44, 45, 47, 52, 54 e 55.
- MAYER, M. G.; JENSEN, J. H. D. Elementary theory of nuclear shell structure. *Science*, v. 122, n. 3170, p. 603–603, 1955. Disponível em: <<https://www.science.org/doi/abs/10.1126/science.122.3170.603.b>>. Citado 2 vezes nas páginas 79 e 82.
- MÖLLER, P.; SIERK, A. 80 years of the liquid drop 50 years of the macroscopic-microscopic model. *International Journal of Mass Spectrometry*, v. 349-350, p. 19–25, 2013. ISSN 1387-3806. 100 years of Mass Spectrometry. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1387380613001346>>. Citado na página 32.
- OLANDER, D. Nuclear fuels present and future. *Journal of Nuclear Materials*, v. 389, n. 1, p. 1–22, 2009. ISSN 0022-3115. Thermochemistry and Thermophysics of Nuclear Materials. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022311509000063>>. Citado na página 22.
- PANUSH, L. Atomic nucleus models. *School Science and Mathematics*, Wiley Online Library, v. 64, n. 4, p. 312–318, 1964. Citado 3 vezes nas páginas 23, 24 e 31.
- SAKURAGI, Y. Saturation of nuclear matter and roles of many-body forces: nuclear matter in neutron stars probed by nucleus-nucleus scattering. *Progress of Theoretical and Experimental Physics*, Oxford University Press, v. 2016, n. 6, p. 06A106, 2016. Citado 2 vezes nas páginas 31 e 33.
- SAMAR, C. *Shell Model of Nucleus: Magic Numbers*. 2021. Acesso em 1 de julho de 2023. Disponível em: <<https://www.mphysicstutorial.com/2021/01/shell-model-in-nuclear-physics-magic-number.html>>. Citado na página 42.
- SMIRNOVA, N. Shell structure evolution and effective in-medium NN interaction. *interactions*, v. 30, p. 09, 2009. Citado na página 23.
- SOMÀ, V. From the liquid drop model to lattice QCD: A brief history of nuclear interactions. *The European Physical Journal Plus*, Springer, v. 133, p. 1–22, 2018. Citado 2 vezes nas páginas 31 e 32.
- SZAMOSI, G. On the spin-orbit interaction between nucleons. *Acta Physica Academiae Scientiarum Hungaricae*, Springer, v. 3, n. 3-4, p. 243–254, 1954. Citado na página 23.
- THAKUR, V.; DHIMAN, S. K. A study of charge radii and neutron skin thickness near nuclear drip lines. *Nuclear Physics A*, v. 992, p. 121623, 2019. ISSN 0375-9474. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0375947419301988>>. Citado na página 71.

- TIPLER, P. A. *Física Moderna*. [S.l.]: Reverté, 1994. Citado 15 vezes nas páginas 13, 23, 35, 40, 45, 47, 48, 49, 51, 52, 53, 57, 59, 60 e 76.
- WALET, N. Nuclear and particle physics. 2010. Citado 4 vezes nas páginas 31, 33, 34 e 35.
- ZETTILI, N. *Quantum mechanics: Concepts and Applications*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2009. Citado na página 73.
- ZHANG, T. et al. A review on emerging mixed-spectrum nuclear reactors for safety and sustainability of nuclear energy systems. *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, Elsevier, v. 202, p. 114666, 2024. Citado na página 22.