

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
INSTITUTO DE FÍSICA

PAULO HENRIQUE CORTES CORDEIRO

O FORMATO DA ÁGUA QUE SAI DA TORNEIRA

BRASÍLIA
13 DE SETEMBRO DE 2024

Paulo Henrique Cortes Cordeiro

O formato da água que sai da torneira

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto de Física da Universidade de Brasília como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Bacharel em Física.

Orientador: Luiz Roncaratti

Universidade de Brasília – UnB

Instituto de Física

Brasília

13 de setembro de 2024

Resumo

Neste trabalho, o formato da água que sai de uma típica torneira de jardim foi estudado do ponto de vista teórico e experimental. O principal objetivo é verificar a consistência dos modelos teóricos através da comparação direta com medidas experimentais. Para isso, imagens e vídeos foram analisadas com o auxílio do software Tracker e, dessa forma, foi possível obter diversas medidas que revelaram detalhes importantes dos diferentes regimes que acontecem nesse sistema. Com essas medidas foi possível verificar que modelos teóricos relativamente simples são capazes de explicar fenômenos relativamente complexos e a importância da tensão superficial na descrição dos diversos aspectos do gotejamento e do formato do jato contínuo. Destaca-se também a verificação de resultados clássicos como o fator de correção de Harkins e Brown para o modelo de Tate e os modos normais de um gota esférica. Além disso, foi obtido um modelo efetivo do tipo massa-mola vertical para a gota pendente no orifício da torneira. Também foi possível vislumbrar a rota para o caos e identificar a vazão aproximada onde a primeira bifurcação acontece. Finalmente, o formato do jato contínuo foi medido e descrito por um modelo físico simples e efetivo.

Palavras-chaves: torneira, tensão superficial, equação de Young-Laplace, gotejamento, jato contínuo.

Abstract

In this work, the shape of the water coming from a typical garden faucet was studied from a theoretical and experimental point of view. The main objective is to verify the consistency of theoretical models through direct comparison with experimental measurements. For this purpose, images and videos were analyzed using the Tracker software, allowing the acquisition of several measurements that revealed important details of the different regimes occurring in this system. With these measurements, it was possible to verify that relatively simple theoretical models are capable of explaining relatively complex phenomena, as well as the importance of surface tension in describing various aspects of dripping and the shape of the continuous jet. The verification of classical results, such as the Harkins and Brown correction factor for the Tate model and the normal modes of a spherical drop, is also highlighted. Additionally, an effective vertical mass-spring model for the droplet hanging at the faucet's nozzle was obtained. It was also possible to glimpse the route to chaos and identify the approximate discharge at which the first bifurcation occurs. Finally, the shape of the continuous jet was measured and described by a simple and effective physical model.

Keywords: faucet, surface tension, Young-Laplace equation, dripping, continuous jet.

Sumário

1	Introdução	5
2	A origem física e as consequências da tensão superficial	6
2.1	A equação de Young-Laplace	8
2.2	Balanço de forças	9
2.3	Minimização da energia	11
2.4	Cálculo da curvatura	12
3	Metodologia	13
3.1	Aparato experimental	13
3.2	Tracker	14
4	Análise dos resultados	14
4.1	Gotejamento periódico	14
4.1.1	A gota pendente	15
4.1.2	Gotas secundárias	19
4.1.3	O tamanho da gota principal	19
4.1.4	Oscilações na gota principal	21
4.2	Gotejamento não periódico	22
4.3	Jato contínuo	25
5	Conclusão	29
	Referências	31
	ANEXOS	33
	ANEXO A – DEDUÇÃO DA FREQUÊNCIA DE OSCILAÇÃO DE UMA GOTA ESFÉRICA	34

1 Introdução

Apesar de fluírem facilmente, os líquidos podem adotar formas extremamente estáveis. Isso acontece pois a superfície dos líquidos podem funcionar como uma membrana elástica. Essa característica dos fluídos tem grande impacto em diversos fenômenos que acontecem em um planeta repleto de água como a Terra. Em especial, podemos citar a chuva e os aerossóis na atmosfera; as superfícies dos oceanos, rios e lagos e a formação de bolhas e espumas [1]. Além do impacto em larga escala na superfície e atmosfera do nosso planeta, esse comportamento também é importante no funcionamento dos sistemas biológicos [2], nas engenharias [3] e em diversos processos industriais [4].

Diversos fenômenos físicos interessantes associados com essa característica dos fluídos podem ser apreciados detalhadamente através de um dispositivo simples e ubíquo: a torneira. De forma geral, o formato da água que sai de uma torneira pode ser descrito por cinco parâmetros: a densidade (ρ) e a tensão superficial (σ) da água, a gravidade local (g), o raio do orifício da torneira (r_0) e o fluxo volumétrico (ou vazão Q) de água que passa por esse orifício. Uma torneira é, essencialmente, um dispositivo que permite algum controle desse último parâmetro enquanto os quatro primeiros se mantêm constantes.

Um observador atento pode perceber, através o controle da vazão, a existência de três regimes com características bem definidas para o formato da água que sai de uma torneira (veja a Fig. 1). Quando a vazão é pequena, acontece o gotejamento periódico (GP) onde gotas com volume constante se descolam do orifício com uma frequência constante. Conforme a vazão aumenta, o primeiro limiar é alcançado, acima do qual o gotejamento continua de forma quase-periódica ou caótica. Esse segundo regime de gotejamento não periódico (GNP) é um exemplo clássico de sistema dinâmico não-linear. Conforme a vazão aumenta ainda mais, um segundo limiar é alcançando, acima do qual o ponto de descolamento das gotas vai se movendo para baixo, se afastando do orifício, e um jato contínuo é formado. Nesse regime de jato contínuo (JC), a conservação do fluxo implica na diminuição do diâmetro do jato líquido ao longo da sua queda acelerada pela gravidade. Isso faz com que o jato acabe tendo o formato de um cilindro capilar que, por ser instável, se desfaz em gotas.

Todos esses regimes, e as transições entre eles, foram estudados extensivamente ao longo do últimos 150 anos, constituindo um interessante exemplo de avanço no entendimento de fenômenos físicos complexos.

Neste trabalho, o formato da água que sai de uma típica torneira, com espigão para encaixe de uma mangueira de jardim, é estudado do ponto de vista teórico e experimental. O principal objetivo é verificar a consistência dos modelos teóricos através da comparação direta com medidas experimentais.

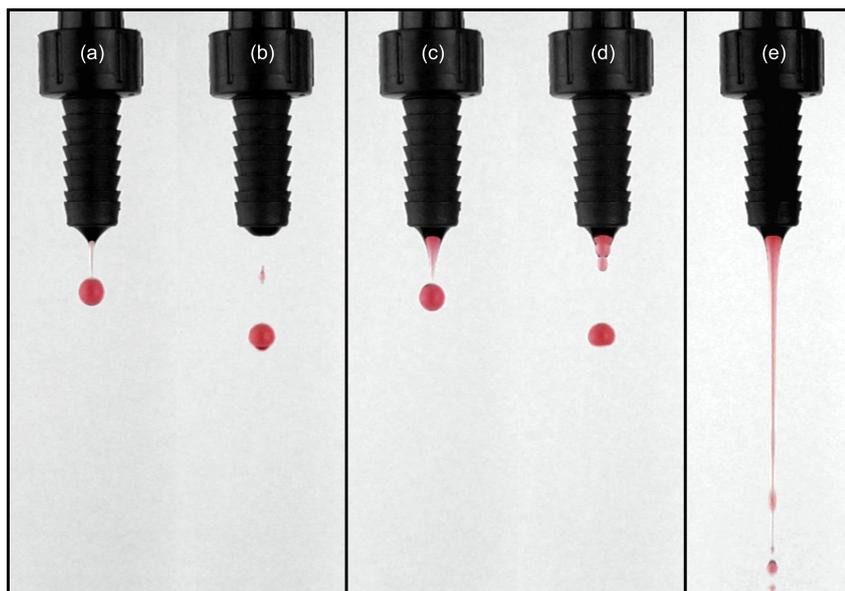


Figura 1 – Diferentes regimes vistos na torneira de com diferentes vazões. Gotejamento periódico (a) e (b), gotejamento caótico (c) e (d), e jato contínuo (e).

2 A origem física e as consequências da tensão superficial

Os estados condensados da matéria acontecem quando a energia de atração (coesão) entre as partículas é mais forte do que sua energia de agitação térmica. No caso dos líquidos, temos um estado mais denso do que o estado gasoso, porém, ainda desordenado. Uma molécula no interior de um líquido possui vizinhos em todas as direções. Em contraste, uma molécula que vagueia na interface do líquido com um gás perde cerca de metade dos seus vizinhos (veja Fig. 2). Ou seja, uma molécula localizada longe da interface é puxada igualmente em todas as direções, sentindo uma força resultante que, na média, é igual a zero. Já as moléculas na interface são puxadas para dentro. Isso cria pressão interna e força as superfícies líquidas a se contraírem até a atingirem uma área mínima. Além disso, há também uma tensão paralela à superfície na interface líquido-ar que faz com que a superfície líquida se comporte como uma membrana esticada, caracterizada por uma tensão superficial que se opõe a distorções. É por isso que, apesar de fluírem facilmente, os líquidos podem adotar formas extremamente estáveis.

Do ponto de vista energético, podemos dizer que na superfície de um líquido as moléculas se encontram em um estado de energia desfavorável e que, portanto, os líquidos ajustam sua forma para expor a menor área de superfície possível. Se dentro do líquido a energia de coesão por molécula é U , na interface com um gás ela é aproximadamente igual a $U/2$. A tensão superficial (σ) é uma medida direta dessa escassez de energia por unidade de área: se a é o tamanho de uma molécula e a^2 é a sua área exposta, $\sigma \approx U/2a^2$. Para líquidos nos quais as interações são do tipo van der Waals, temos que $U \approx kT$ e

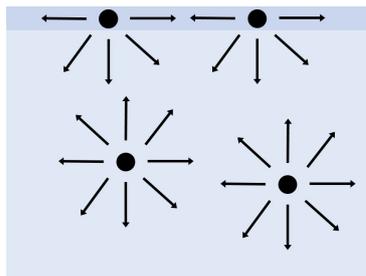


Figura 2 – Força resultante nas moléculas de um líquido no interior e na interface.

$\sigma \approx 20 \text{ mJ/m}^2$ para $T = 25 \text{ }^\circ\text{C}$. A tensão superficial da água é maior, $\sigma \approx 73 \text{ mJ/m}^2$, devido a presença de ligações de hidrogênio. Já para o mercúrio, que é um metal líquido altamente coesivo, $\sigma \approx 500 \text{ mJ/m}^2$.

Embora sua origem possa ser explicada no nível atômico e molecular, é mais conveniente definir a tensão superficial na escala macroscópica.

É fácil perceber que é necessário fornecer energia para criar superfícies líquidas quando soprarmos bolhas de sabão no ar ou bolhas de ar na água. Suponha que se queira aumentar a superfície de um líquido em uma quantidade de área ΔA . O trabalho ΔW_A necessário para realizar esse aumento deve ser proporcional ao número de moléculas que precisam ser levadas para a superfície que, por sua vez, deve ser proporcional a ΔA . A tensão superficial é justamente a constante de proporcionalidade entre ΔW_A e ΔA , ou seja,

$$\Delta W_A = \sigma \Delta A. \quad (1)$$

Em outras palavras, σ indica quanto de energia que deve ser fornecida para se aumentar uma unidade de área.

Considere o exemplo de uma bolha de água no ar. Na ausência da gravidade e outros campos externos, o formato esférico de raio R é aquele que possui a menor energia superficial. O trabalho total necessário para se aumentar o raio da bolha em ΔR é dado por

$$\Delta W = \Delta W_V + \Delta W_A. \quad (2)$$

O primeiro termo à direita na Eq. 2 se refere ao trabalho associado às variações de volumes envolvidas, sendo definido como $\Delta W_V = -P\Delta V - P_0\Delta V_0$, onde P e P_0 são as pressões dentro e fora da gota, respectivamente, e ΔV e $\Delta V_0 = -\Delta V$ são as variações de volume dentro e fora da gota, respectivamente. O segundo termo à direita na Eq. 2 se refere ao trabalho associado à variação da área superficial da gota, definido pela Eq. 1. Nesses termos, a Eq. 2 pode ser reescrita como

$$\Delta W = \left(-\Delta P + \sigma \frac{\Delta A}{\Delta V} \right) \Delta V, \quad (3)$$

onde $\Delta P = P - P_0$.

A condição para o equilíbrio mecânico ($\Delta W = 0$) implica na relação

$$\Delta P = \sigma \frac{\Delta A}{\Delta V}. \quad (4)$$

No caso de uma bolha esférica, cujo raio inicial é R e o raio final é $R + \Delta R$, temos que $\Delta V = 4\pi R^2 \Delta R$ e $\Delta A = 8\pi R \Delta R$ e, portanto,

$$\Delta P = \frac{2\sigma}{R}. \quad (5)$$

Analogamente, no caso de um cilindro de raio inicial R , raio final $R + \Delta R$ e comprimento constante $L \gg R$, temos que $\Delta V = 2\pi LR \Delta R$ e $\Delta A = 2\pi L \Delta R$ e, portanto,

$$\Delta P = \frac{\sigma}{R}. \quad (6)$$

As Eqs. 5 e 6 são casos específicos de uma relação mais geral, a equação de Young-Laplace [5]:

$$\Delta P = 2\sigma C = \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right), \quad (7)$$

onde C é a curvatura média da superfície expressa em termos dos raios principais de curvatura R_1 e R_2 .

Note que, no caso de uma bolha esférica temos que $R = R_1 = R_2$ e a Eq. 7 se reduz a Eq. 5. No caso do cilindro temos que $R = R_1$, $R_2 = \infty$ e a Eq. 7 se reduz a Eq. 6. No caso de um plano, $R_1 = R_2 = \infty$, e, portanto, $\Delta P = 0$.

A equação 7 fornece a diferença de pressão através da interface entre dois meios em termos da tensão superficial e dos raios principais de curvatura da superfície. Essa expressão é bastante geral, sendo comumente encontrada na literatura sobre capilaridade e molhabilidade [1, 6], portanto, é importante entender a sua origem e utilização.

2.1 A equação de Young-Laplace

A curvatura é um fator geométrico que fornece uma medida do quanto uma curva difere de uma linha reta ou uma superfície difere de um plano. A expressão entre parênteses na Eq. 7 indica que a curvatura em qualquer ponto de uma superfície ou curva suave pode ser definida em termos de dois raios de curvatura, localizados em dois planos normais que cortam a interface ao longo de duas secções principais de curvatura. Esses dois planos normais também são normais entre si e a sua linha de intersecção define a direção do vetor normal da superfície no ponto escolhido. A figura 3 apresenta uma ilustração de como a curvatura de um dado ponto em uma superfície pode ser determinada em termos dos raios de curvatura. A curvatura em dado ponto P no bulbo de uma lâmpada é determinada a partir da identificação da direção do vetor \vec{n} normal à superfície. Então, o bulbo é

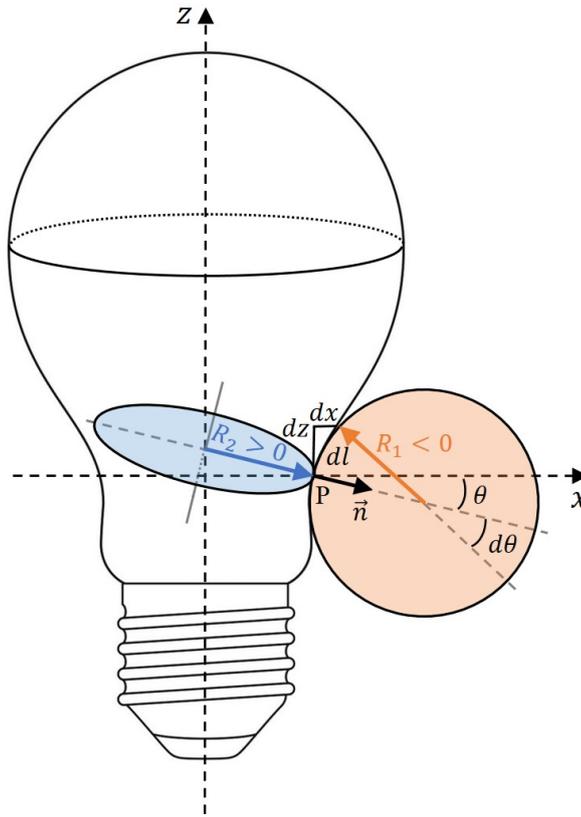


Figura 3 – Exemplo de raios principais de curvatura em uma superfície de revolução. O raio da superfície é $r(z)$. Os raios principais de curvaturas no ponto P são R_2 e R_1 .

seccionado ao longo de dois planos mutuamente ortogonais (plano vermelho, paralelo à página, e plano azul, perpendicular à página) que se interseccionam ao longo de \vec{n} . As intersecções desses planos com a superfície do bulbo definem duas curvas cujos raios de curvatura no ponto P são denotados por R_1 e R_2 . Esses dois raios devem ser tratados como quantidades algébricas: R é definido como positivo se o centro do circunferência correspondente se encontra dentro do bulbo e negativo caso contrário. Se existe um eixo de simetria e um dos dois planos contém esse eixo, os raios R_1 e R_2 são chamados raios principais de curvatura [1].

Do ponto de vista físico, a equação de Young-Laplace pode ser obtida tanto pelo método do balanço das forças quanto pelo método da minimização da energia [7]. Do ponto de vista matemático, a curvatura de uma dada superfície pode ser obtida explicitamente através da geometria diferencial ou indiretamente através da álgebra linear [8].

2.2 Balanço de forças

Na figura 4, é ilustrado os arredores de um ponto P em uma dada superfície. Ao seu redor é desenhada uma circunferência de raio r . Essa circunferência define as bordas

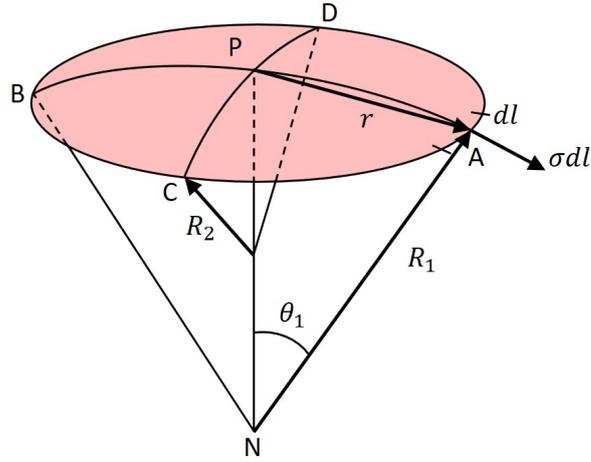


Figura 4 – Raios de curvatura R_1 e R_2 de uma superfície qualquer. A superfície tem raio r , sujeita a uma força σdl .

de uma calota. A equação de Young-Laplace resulta da imposição do equilíbrio de forças nessa calota quando r tende a zero.

Através de P são desenhadas as duas seções principais de curvatura AB e CD nas superfícies caracterizadas pelos raios R_1 e R_2 , respectivamente. A presença da tensão superficial faz com que um elemento infinitesimal de comprimento dl na borda da calota, localizado em A , esteja sujeito a uma força

$$dF = \sigma dl. \quad (8)$$

A origem dessa força pode ser entendida da seguinte maneira. De acordo com a Eq. 1, o trabalho necessário para aumentar a área da calota mostrada na Fig. 4

$$\Delta W_A = \sigma \Delta A = \sigma dl \Delta r = dF \Delta r, \quad (9)$$

onde $dF = \sigma dl$ é a tensão, propriamente dita, na superfície.

Se o ângulo θ_1 é pequeno, a projeção dessa força ao longo da normal PN é dada por $dF \sin \theta_1 \approx dF \theta_1 = \sigma dl r / R_1$. Considerando os quatro elementos dl em A , B , C e D , temos que a força ao longo da normal PN é

$$dF_N = 2\sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) r dl. \quad (10)$$

Essa expressão é independente da escolha de AB e CD e, portanto, pode ser integrada ao longo da circunferência que define as bordas da calota. Considerando que quatro elementos ortogonais foram considerados, a integração sobre $dl = r d\phi$ deve ser realizada em apenas um quarto de revolução, ou seja,

$$F_N = \int_0^{\pi/2} dF_N = \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \pi r^2. \quad (11)$$

Já a força na calota causada por uma diferença de pressão ΔP através da superfície é dada por

$$F_P = \Delta P \pi r^2. \quad (12)$$

A equação 7 resulta do equilíbrio imposto pela igualdade $F_N = F_P$.

2.3 Minimização da energia

A figura 5 mostra a transformação do elemento infinitesimal de área dA de uma dada superfície. Essa transformação resulta da variação de volume $\Delta V = \Delta R dA$ e da variação de área $\Delta A = \int dA' - \int dA$. O trabalho total associado à transformação é dado pela soma

$$\Delta W = \Delta W_V + \Delta W_A, \quad (13)$$

onde

$$\Delta W_V = \int -\Delta P \Delta R dA \quad (14)$$

é o trabalho associado à variação de volume e, de acordo com a Eq. 1,

$$\Delta W_A = \sigma \Delta A \quad (15)$$

é o trabalho associado à variação de área.

De acordo com a Fig. 5, as áreas antes e depois da transformação, dA e dA' , respectivamente, podem ser escritas como $dA = dl_1 dl_2$ e $dA' = dl'_1 dl'_2$, onde dl_1 , dl_2 , dl'_1 e dl'_2 são os elementos de comprimento ao longo das seções normais principais antes e depois da transformação, respectivamente. Os elementos de comprimento dl_1 e $d'l_1$ podem ser escritos como $dl_1 = R_1 \theta_1$ e $dl'_1 = (R_1 + \Delta R) \theta_1$, onde R_1 é o raio principal de curvatura associado com o ângulo θ_1 . Temos, portanto, que

$$\frac{dl'_1}{dl_1} = 1 + \frac{\Delta R}{R_1}. \quad (16)$$

Expressão similar pode ser encontrada para dl_2 e dl'_2 . Dessa forma, podemos escrever

$$dA' = dl'_1 dl'_2 \approx \left(1 + \frac{\Delta R}{R_1} + \frac{\Delta R}{R_2}\right) dA \quad (17)$$

se $\Delta R^2 \ll R_1 R_2$. Com a expressão acima, podemos calcular a variação de área em função dos raios principais de curvatura:

$$\Delta A = \int dA' - \int dA = \int \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \Delta R dA. \quad (18)$$

Finalmente, podemos escrever o trabalho total como

$$\Delta W = \int \left\{ -\Delta P + \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \right\} \Delta R dA. \quad (19)$$

A equação 7 resulta da condição de equilíbrio imposta pela igualdade $\Delta W = 0$ para qualquer ΔR .

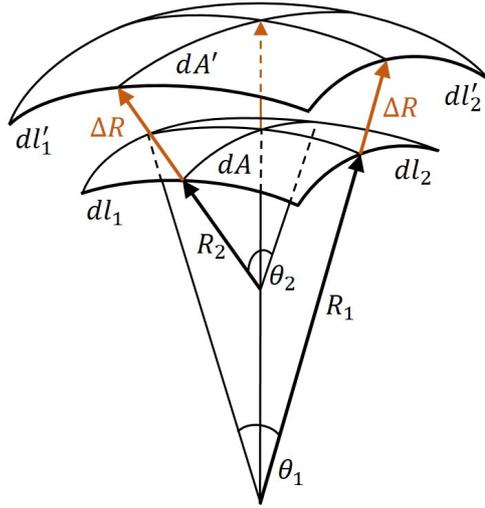


Figura 5 – Mudança de área em uma superfície que se expande. Os raios de curvatura R_1 e R_2 se expandem à $R_1 + \Delta R$ e $R_2 + \Delta R$, e a área passa de dA a um dA' .

2.4 Cálculo da curvatura

Na prática, a equação de Young-Laplace na forma da Eq. 7 tem utilidade e aplicação imediata apenas nos casos de superfícies com raios de curvatura explícitos e constantes, e.g., planos, cilindros e esferas. Entretanto, a maioria dos sistemas físicos com interface entre líquidos e gases apresentam uma superfície de revolução, ou seja, superfície que pode ser obtida pela rotação de uma curva plana em torno de um eixo que se situa no mesmo plano da curva. O bulbo mostrado na Fig. 3 é um exemplo de superfície de revolução, gerada por uma curva plana $z = f(x)$ em torno do eixo z . Para esses casos é possível encontrar expressões explícitas para R_1 e R_2 [1, 6]. De acordo com a Fig. 3, se l é a coordenada curvilínea ao longo da curva meridiana do bulbo, orientada de baixo para cima, e θ é o ângulo entre o vetor normal \vec{n} à curva e o eixo x , temos que

$$dl = -R_1 d\theta \quad (20)$$

$$x = R_2 \cos \theta, \quad (21)$$

de tal forma que a curvatura média que aparece na Eq. 7 pode ser reescrita como

$$C = \frac{1}{2} \left(-\frac{d\theta}{dl} + \frac{\cos \theta}{x} \right). \quad (22)$$

Ao longo da curva $f(x)$, temos que $dx = dl \sin \theta$, $dz = dl \cos \theta$ e $dl^2 = dx^2 + dz^2$. Com a notação $z' = dz/dx$ e $z'' = d^2z/dx^2$, podemos escrever que

$$\cos \theta = \frac{dz}{dl} = \frac{z'}{(1 + z'^2)^{1/2}}, \quad (23)$$

e

$$\frac{d\theta}{dl} = \frac{d\theta}{dx} \frac{dx}{dl} = \frac{1}{(1 + z'^2)^{1/2}} \frac{d\theta}{dx}. \quad (24)$$

Sendo

$$z' = \frac{dz}{dx} = \tan^{-1} \theta, \quad (25)$$

e

$$z'' = \frac{dz'}{dx} = \frac{d}{dz} \tan^{-1} \theta = -(1 + \tan^{-2} \theta) \frac{d\theta}{dx}, \quad (26)$$

temos que

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{z''}{1 + z'^2}. \quad (27)$$

Substituindo as Eqs. 23, 24 e 27 na Eq. 22, obtemos a curvatura média em função da curva plana que gera a superfície de revolução:

$$C = \frac{1}{2} \left(\frac{z''}{(1 + z'^2)^{3/2}} + \frac{z'}{x(1 + z'^2)^{1/2}} \right). \quad (28)$$

Com isto, pode-se obter a curvatura de uma superfície de revolução em função do formato $z = f(x)$.

3 Metodologia

3.1 Aparato experimental

O aparato experimental utilizado neste trabalho é ilustrado no esquema da Fig. 6. Ele é composto por uma torneira conectada a um reservatório de água com volume constante, uma proveta graduada, um cronômetro digital e uma câmera.

A torneira é uma típica torneira plástica simples, com bico (espigão) para conexão de mangueira de 1/2 polegada. O bico da torneira possui diâmetro interno de 9 mm ($r_0 = 4.5$ mm) e foi alinhado verticalmente. O volume do reservatório principal foi mantido constante com o auxílio de uma bomba submersa em um reservatório auxiliar. Essa bomba, que ficou constantemente ligada durante todas as medidas, injetou constantemente no reservatório principal uma vazão maior do que a maior vazão utilizada na torneira (Q). O volume do reservatório principal foi mantido constante devido a presença de uma saída para o escoamento do excesso de água posicionada a uma altura h do fundo desse reservatório. Essa saída de água, juntamente com a bomba no reservatório auxiliar, faz com que a altura da coluna de água dentro do reservatório seja sempre constante e independente da vazão de água que passa pela torneira.

A vazão Q de cada experimento foi controlada manualmente girando-se a manopla da torneira. Seu valor foi medido com o auxílio de uma proveta graduada de 2 litros posicionada sob o orifício da torneira e um cronômetro. A vazão resultante de um certo posicionamento da manopla foi considerada como sendo o valor médio de cinco vazões obtidas através dos tempos necessários para o nível da água atingir cinco marcações consecutivas dentro da proveta. Por exemplo, para as maiores vazões, utilizamos as marcações

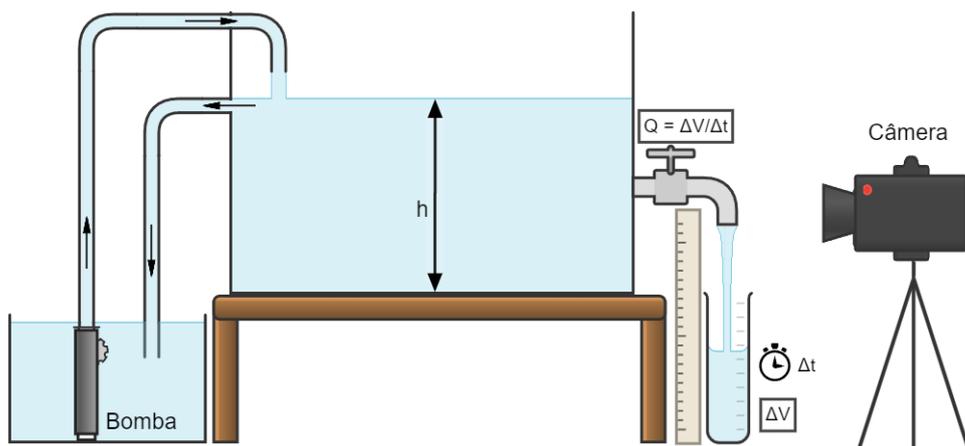


Figura 6 – Montagem inicial do experimento. Um tanque com água mantida a uma altura constante h , com o auxílio de uma bomba. A água retorna ao reservatório da bomba, impedindo que a altura seja maior do que h . Há uma torneira aberta, tal que a água cai em um recipiente. O tempo em que o recipiente enche é medido com um relógio, e o volume é medido por marcações no recipiente. Uma régua é posta ao lado do jato de água para referência, enquanto uma câmera grava o jato e a régua, em alta velocidade.

200, 400, 600, 800 e 1000 ml, de tal forma que $Q = \sum_{i=1}^5 \frac{200}{t_i}$, onde t_1 é o tempo medido para a marca de 200 ml, t_2 é o tempo medido para a marca de 400 ml e assim por diante. Para as vazões menores, realizamos o mesmo processo, porém, utilizamos as marcações de 20, 40, 60, 80 e 100 ml.

Para obtenção dos vídeos e fotos, foi utilizada uma câmera Sony DSC-RX100 VA posicionada sobre um tripé e um sistema de iluminação (softbox) contendo seis lâmpadas de 200 W. Com esse conjunto é possível capturar vídeos nítidos contendo até 960 fps (quadros por segundo). Para melhor visualização foi utilizada água com corante vermelho.

3.2 Tracker

As análises dos vídeos e fotos foram realizadas no software Tracker [9]. Ele é uma ferramenta gratuita de análise e modelagem de vídeo construída na estrutura Java Open Source Physics (OSP) projetada para ser usada no ensino de física.

4 Análise dos resultados

4.1 Gotejamento periódico

Para vazões pequenas, a água sai da torneira em pacotes discretos, i.e., gotas. Se a vazão é muito pequena, essas gotas crescem quase-estaticamente no orifício da torneira. Inicialmente, quando a massa da gota ainda é pequena, a componente vertical da tensão superficial F_σ é igual ao peso F_P da gota e ela se mantém grudada no orifício da torneira

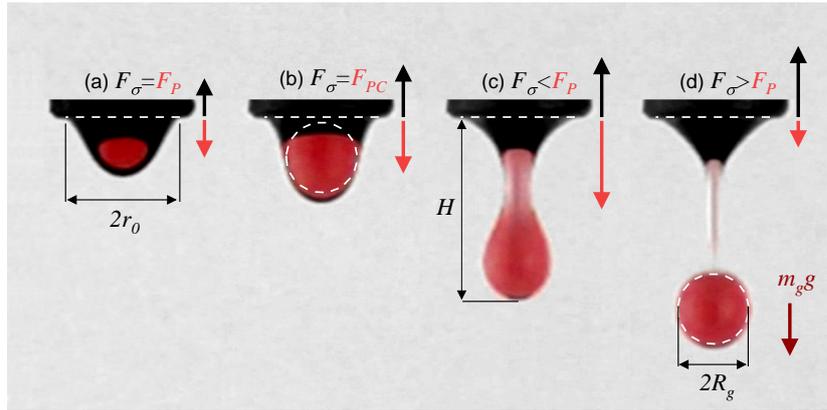


Figura 7 – Balanço de forças na gota pendente. F é a força devida a tensão superficial, e P a força peso. Vemos de (a)-(d) o crescimento da gota pendente, causando o aumento da força peso em relação à F , e o desprendimento da gota de raio R_g .

(veja os painéis (a) e (b) da Fig. 7). Durante esse equilíbrio de forças ($F_\sigma = F_P$), a altura vertical H da gota pendente cresce linearmente até que o peso crítico F_{PC} seja atingido (veja o painel (b) da Fig. 7). A partir desse ponto, a tensão superficial não consegue mais balancear o peso ($F_\sigma < F_P$) e a gota pendente se alonga de forma acelerada, afinando sua parte do meio, até que sua porção inferior (gota principal) se descola e cai livremente sob efeito da gravidade (veja os painéis (c) e (d) da Fig. 7). Imediatamente após o descolamento da gota principal, a energia potencial acumulada no alongamento da superfície da gota pendente é liberada na forma de uma rápida retração (pois agora $F_\sigma > F_P$) e o processo de formação de mais uma gota principal se repete.

A Figura 8 ilustra com detalhes esse processo. No painel superior dessa figura é mostrada uma sequência de quadros obtidos de uma gravação de vídeo em alta velocidade (960 fps) do gotejamento em uma torneira com orifício de raio $r_0 = 4,5$ mm e vazão de água $Q = 0,06$ ml/s. Os quadros mostrados nos painéis (a) e (l) registram os instantes dos descolamentos de duas gotas principais sucessivas. A análise desses quadros indica que esse gotejamento produz gotas com raio $R_g \approx 3.0$ mm que periodicamente se descolam quando a gota pendente atinge uma altura $H \approx 18,2$ mm, com período $T \approx 2,070$ s. Além disso, a Fig. 8 mostra que essa rápida retração gera três fenômenos interessantes: 1) a oscilação na gota pendente; 2) a formação de gotas satélites entre a gota pendente e a gota principal; e 3) a oscilação na gota principal em queda livre.

4.1.1 A gota pendente

O painel inferior da Fig. 8 mostra o comportamento da altura da gota pendente (veja a Fig. 7) ao longo do tempo. A curva $H(t)$ mostrada nesse painel foi obtida a partir da análise da gravação do vídeo em alta velocidade no *software* Tracker. Nela é

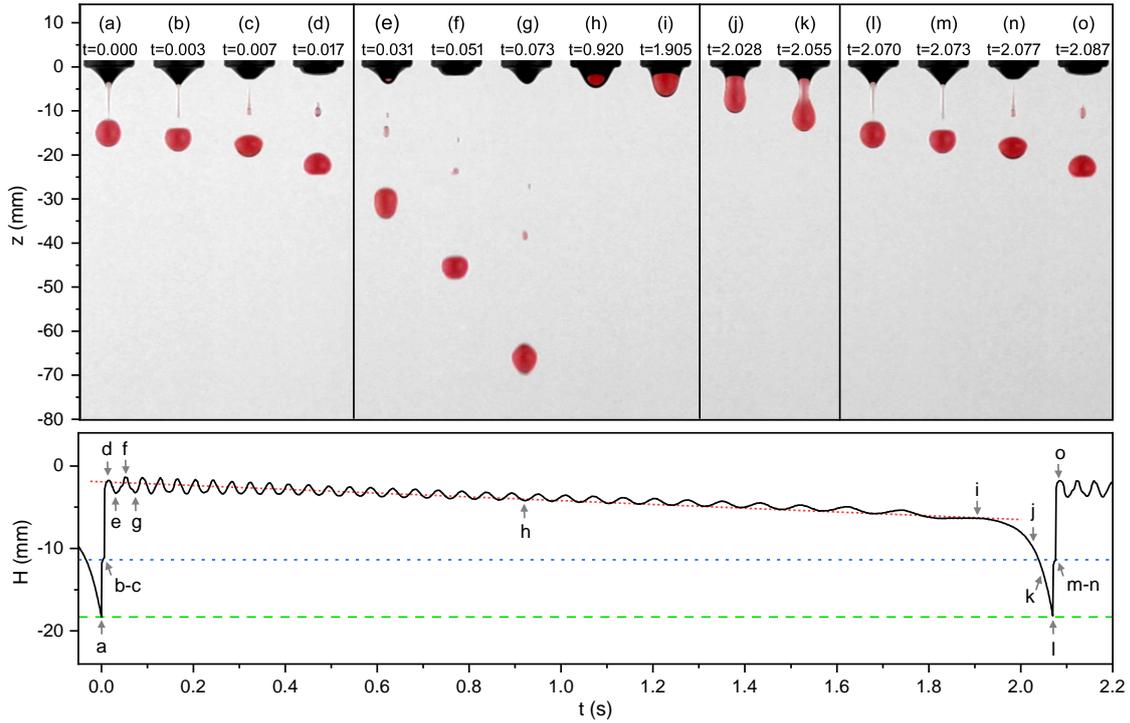


Figura 8 – Acima, o desprendimento da gota principal, e as gotas pendentes em (a)-(g). Em (h) vemos a nova gota pendente na torneira, que se desprende novamente em (l), retornando o sistema ao estado inicial. Abaixo, o gráfico da posição vertical H das gotas pendentes. No primeiro intervalo entre os pontos a e d , a gota rapidamente retorna ao estado inicial após a gota principal se desprender. entre d e i , o sistema está em equilíbrio, e ocorre uma oscilação. No terceiro intervalo entre i e l , o sistema a gota se desprende exponencialmente.

possível identificar três intervalos distintos entre o descolamento de duas gotas principais sucessivas.

O primeiro intervalo é caracterizado pela rápida retração da gota pendente após o descolamento da gota principal causado pelo desequilíbrio $F_\sigma > F_P$. Ele dura aproximadamente 17 ms (a-d). Essa retração transfere parte da energia potencial acumulada no alongamento da gota pendente para a gota principal, que cai oscilando. O restante dessa energia mecânica continua na gota residual que, logo após o descolamento, pende oscilando com uma massa residual m_0 .

O segundo intervalo se inicia imediatamente após o termino da retração e dura aproximadamente 1.9 s (d-i). Além da oscilação da gota pendente, a outra característica importante desse intervalo é o crescimento uniforme da altura média dessa gota. A vazão constante Q causa o aumento do volume da gota que resulta no aumento da sua altura. O

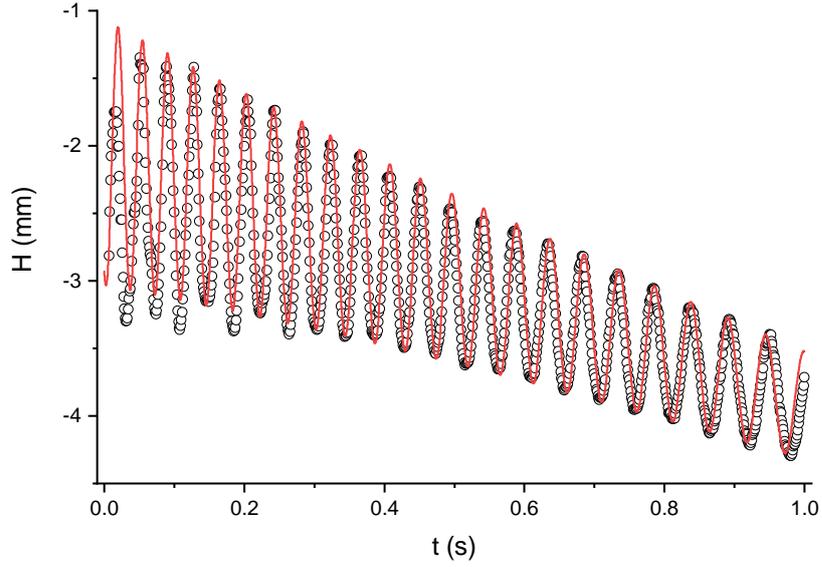


Figura 9 – Movimento uniformemente variado da gota pendente. Os círculos são os dados experimentais obtidos, e em vermelho, é o ajuste de acordo com a equação 29

aumento da altura da gota nesse intervalo é definido pela condição de equilíbrio $F_\sigma = F_P$, que resulta no movimento retilíneo uniforme (MRU) da borda inferior da gota ao longo da direção vertical. A linha reta inclinada $H_e(t)$, sobre a curva $H(t)$ mostrada na Fig. 8, descreve o MRU da altura de equilíbrio da gota pendente ao longo desse intervalo. Note que o instante registrado no quadro (i) é o ponto aproximado onde a curva $H(t)$ começa a se afastar de $H_e(t)$, ou seja, a partir desse ponto $F_\sigma < F_P$.

Nesse intervalo, a altura da gota pode ser modelada como um sistema massa-mola amortecido que se desloca com velocidade constante ao longo do tempo. Sendo a vazão Q constante, podemos considerar que a massa varia linearmente no tempo, ou seja, $m(t) = m_0 + (\rho Q)t$, onde m_0 é a massa residual e ρ é a densidade da água. Dessa forma, podemos considerar que

$$H(t) = -(H_0 + vt) + Ae^{-t/\tau_2} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m_0 + \rho Qt}}t + \varphi\right). \quad (29)$$

O primeiro termo a direita da equação acima é a altura de equilíbrio $H_e(t)$, ou seja, a altura da gota pendente se ela não oscilasse. Nesse termo, H_0 é a altura da gota pendente imediatamente após a retração e v a sua velocidade constante de crescimento. No segundo termo, A é a amplitude inicial da oscilação, τ_2 o tempo característico do amortecimento, m_0 a massa inicial da gota pendente imediatamente após a retração e k a constante da mola que representa o sistema. A Figura 9 mostra que a função 29 se ajusta muito bem ao resultado experimental apresentado na Fig. 8. Os para parâmetros desse ajuste são mostrados na Tabela 4.1.1.

H_0	-2.05 mm
v	-1.87 mm s ⁻¹
A	0.10 mm
τ_2	0.75 s ⁻¹
k	0.003 N mm ⁻¹
m_0	8.90 mg
Q	0.06 ml s ⁻¹
ρ	1.00 mg ml ⁻¹

Tabela 1 – Parâmetros obtidos no ajuste dos dados vistos na figura 9 à equação 29.

O terceiro intervalo inicia quando a curva $H(t)$ começa a se afastar exponencialmente de $H_e(t)$, sendo caracterizado pela condição $F_\sigma < F_P$. Ele dura aproximadamente 0.17 s (i-l) e termina com o descolamento da próxima gota principal. A Figura 10 mostra que, nesse intervalo, a altura da gota pendente é bem descrita pela expressão

$$H(t) = -B_1 e^{-(t-t_0)/\tau_3} + B_2, \quad (30)$$

onde $B_2 - B_1$ é a altura da gota no ponto de transição entre o segundo e o terceiro intervalo e τ_3 é o tempo característico do crescimento exponencial da altura da gota.

Note que é interessante descrever o segundo intervalo como o intervalo onde acontece uma deformação elástica, ou seja, vale a Lei de Hooke e o corpo retorna ao seu estado original na ausência da tensão. Já no terceiro intervalo temos uma deformação plástica e o corpo não retorna ao seu estado original, terminando com a ruptura que separa a gota pendente das gotas principal e secundarias.

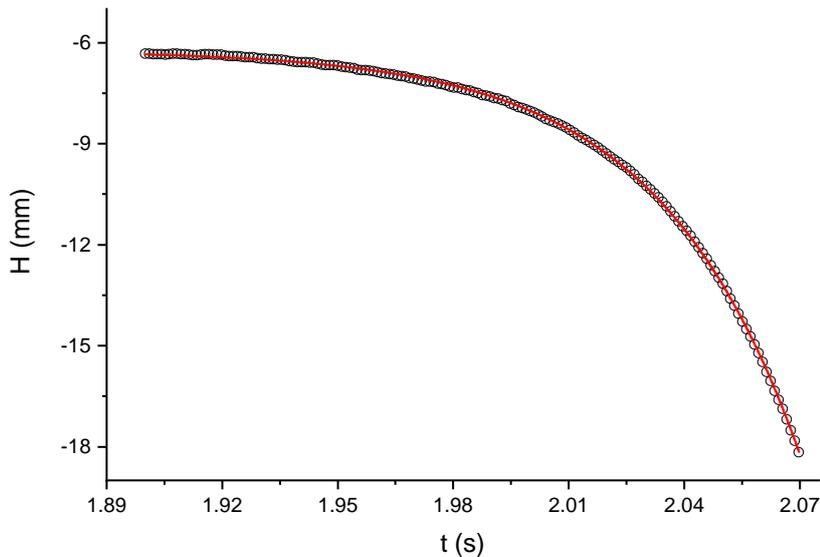


Figura 10 – Desprendimento da gota pendente após a quebra de equilíbrio. O ajuste dos dados é feito de acordo com a equação 30.

4.1.2 Gotas secundárias

As oscilações causadas pelo descolamento da gota principal desestabilizam a região da gota pendente que, imediatamente após o descolamento da gota principal, possui o formato aproximado de um cilindro capilar de raio R_c e altura L (veja o painel (d) da Fig. 7). Pela conservação do volume, esse cilindro pode, em princípio, ser transformado em n gotas de raio R_g , de tal forma que,

$$\pi R_c^2 L = n \frac{4}{3} \pi R_g^3. \quad (31)$$

Nesse caso, razão entre a área superficial final das gotas A_g e a área inicial do cilindro A_c pode ser escrita como

$$\frac{A_g}{A_c} = \frac{n 4 \pi R_g^2}{2 \pi R_c L} = \frac{3 R_c}{2 R_g}, \quad (32)$$

sendo que, no último passo, a razão n/L foi eliminada com a Eq. 31. A Eq. 32 indica que $A_g < A_c$ se $R_g > 1.5 R_c$. Já a Eq. 1 indica que $\Delta W = E_c - E_g = \sigma(A_c - A_g) > 0$ se $A_g < A_c$. Isso indica que um cilindro perturbado tende a se transformar espontaneamente em uma ou mais gotas (de acordo com o seu comprimento L) de modo a minimizar sua área superficial.

4.1.3 O tamanho da gota principal

O tamanho da gota principal foi estudado por Tate em 1864 [10] que considerou que o volume V_g da gota principal poderia ser calculado igualando-se o peso da gota com a força da tensão superficial no orifício da torneira (veja a Eq. 8 e a Fig. 7), ou seja,

$$m_g g = 2 \pi r_0 \sigma, \quad (33)$$

onde m_g é a massa da gota principal e, portanto,

$$V_g = \frac{2 \pi r_0 \sigma}{\rho g}. \quad (34)$$

Note que essa relação pode ser reescrita na forma adimensional como

$$\left(\frac{r_0}{l_c}\right)^2 \frac{V_g}{r_0^3} = B_o \tilde{V}_g = 2\pi, \quad (35)$$

onde $\tilde{V}_g = V_g/r_0^3$ e

$$l_c = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}} \quad (36)$$

é definido como comprimento capilar. O número de Bond

$$B_o = \left(\frac{r_0}{l_c}\right)^2 = \frac{\rho g}{\sigma/r_0^2} = \frac{\text{Gravidade}}{\text{Curvatura}} \quad (37)$$

é uma medida da importância da força gravitacional relativa à força da tensão superficial. Considerando os valores $\sigma = 0,072$ N/m, $\rho = 997$ kg/m³, $g = 9,8$ m/s e o raio da torneira

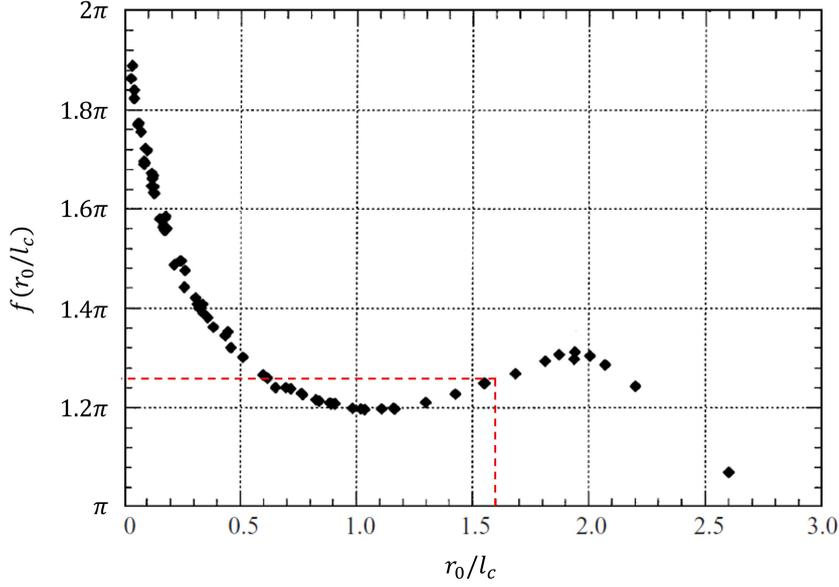


Figura 11 – Fator de correção da lei de Tate originalmente obtidos por Harkins, Brown e Wilkinson [14, 15]. As linhas tracejadas indicam o fator de correção do aparato experimental utilizado neste trabalho.

utilizada $r_0 = 0,0045$ m, encontramos que: no nosso aparato $l_c \approx 2,7$ mm, $r_0/l_c \approx 1,6$ e $B_o \approx 2,7$.

Além de ignorar os efeitos da força inercial com o fluxo de massa e viscosidade do líquido, essa relação, conhecida como lei de Tate, assume que: i) todo o volume do líquido pendente no orifício é transferido para a gota no momento do seu descolamento e que ii) a força associada com a tensão superficial no instante do descolamento é igual ao seu máximo valor possível. Porém, como pode ser visto nas Figs. 7 e 8, apenas uma porção do volume do líquido pendente no orifício se descola, sendo que outra parte desse volume continua com gota pendente no orifício após o descolamento da gota principal [11, 12]. Além disso, a força de tensão superficial na linha de contato de três fases onde a borda do orifício, o líquido e o ar se encontram é melhor descrita por $\pi r_0 \sigma \cos \theta$, onde θ é o ângulo entre a tangente da superfície do líquido pendente na linha de contato e a direção da gravidade [13]. Ou seja, além de ser proporcional ao raio do orifício e da tensão superficial, a massa da gota deve ser, de alguma forma, proporcional ao formato da gota pendente.

Em 1899 Rayleigh [16] indicou, através de uma análise dimensional, que essa dependência do formato da gota poderia ser levada em conta fazendo

$$m_g g = f(r_0/l_c) r_0 \sigma, \quad (38)$$

onde f é uma função que pode ser determinada experimentalmente. A partir de medidas experimentais ele encontrou que $f(r_0/l_c)$ poderia ser aproximada por uma constante igual

a 3,8, ao invés do 2π previsto pela lei de Tate.

Em 1919 Harkins e Brown publicaram medidas para a água e para o benzeno na faixa $0,257 < r_0/l_c < 2,625$ mostrando que $f(r_0/l_c)$ é melhor descrita através de um polinômio de terceira ordem [14]. Em 1972 Wilkinson estendeu as medidas de Harkins e Brown para $0,0276 < r_0/l_c$ para uma grande variedade de viscosidades e tensões superficiais [15]. Essas medidas (veja a Fig. 11) mostraram que no limite $r_0/l_c \ll 1$, $f(r_0/l_c) \approx 2\pi$, resultado previsto pela a lei de Tate. Entretanto, conforme r_0/l_c aumenta, a função $f(r_0/l_c)$ se afasta de 2π e corrige a lei de Tate. Esse conjunto de medidas extremamente precisas e acuradas realizadas por esses autores serviu de base para o estabelecimento do método de determinação da tensão superficial conhecido como método do peso da gota [13].

A figura 11 indica que o fator de correção da Lei de Tate para o nosso aparato experimental deve ser aproximadamente $f(1,6) \approx 1,26\pi \approx 3,95$. A análise da Fig. 8 no Tracker, indica que o raio da gota principal do caso $Q = 0.06$ ml/s é $r_g \approx 3,1$ mm. Considerando que $m = \rho V = (4/3)\rho\pi r_g^3$, encontramos que a massa dessa gota principal é $m_g \approx 0,13$ g. Se considerarmos esse valor e $f(1,6)$ na Eq. 38, encontramos que $\sigma \approx 0,0717$ N/m, valor muito próximo do valor aceito para a tensão superficial da água.

Como o fator de correção vem principalmente do fato da lei de Tate ser aplicada no equilíbrio, podemos aplicar a relação $m(t) = m_0 + \rho Qt$ para obter a massa m_e da gota pendente no último instante em que o equilíbrio $F_\sigma = F_P$ é válido, que ocorre aproximadamente no instante (i) na figura 8 ($t \approx 1,905$ s). Com o ajuste feito com a equação 29, os parâmetros são conhecidos, conforme a tabela 4.1.1. Sabendo os parâmetros, a massa obtida da gota pendente no instante (i) é $m(1,905) = m_e \approx 0,20$ g. Aplicando a lei de Tate (eq. 33) à esta massa, obtém-se o valor para a tensão superficial $\sigma \approx 0,070$ N/m. Podemos ainda obter de uma outra forma o fator de correção $f(r_0/l_c)$ comparando a equação 33, com $m_g = m_e \approx 0,20$ g, com a equação 38, com $m_g \approx 0,13$ g:

$$\frac{m_g}{m_e} = \frac{f(1,6)}{2\pi} \approx 0,64, \quad (39)$$

tal que $f(1,6) \approx 1,28\pi \approx 4,02$, que é bem próximo do valor encontrado anteriormente com a figura 11.

4.1.4 Oscilações na gota principal

Teoricamente, os modos normais de vibração de uma gota esférica de um fluido incompressível são dados por (veja o Anexo A)

$$\omega^2 = \frac{\sigma l(l-1)(l+2)}{\rho r_g^3}, \quad (40)$$

portanto, as menores frequências de oscilação possíveis são $\omega_2 \approx 80$ rad/s ($l = 2$) e $\omega_3 \approx 154$ rad/s ($l = 3$).

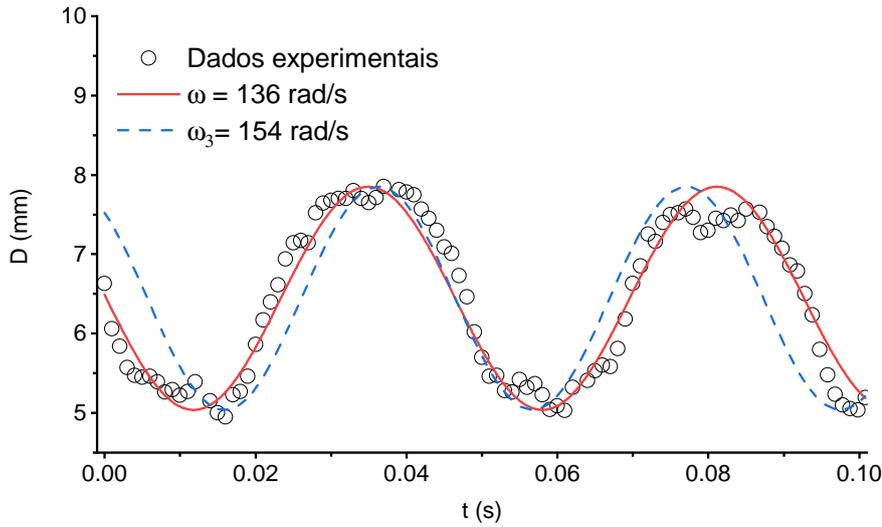


Figura 12 – Oscilação no diâmetro da gota esférica. Os círculos são os dados experimentais, e em vermelho, o ajuste feito em uma curva senoidal com a frequência angular $\omega = 136 \text{ rad/s}$ medida no *software* Tracker.

A Figura 8 mostra que a gota principal cai oscilando ao longo direção vertical. A Figura 12 apresenta a distância entre a parte mais alta e a parte mais baixa da gota principal nos primeiros instantes da queda. Essa figura mostra que, nos instantes iniciais, a oscilação da gota é bem descrita por um oscilador harmônico com frequência angular $\omega = 136 \text{ rad/s}$ (21.6 Hz). Esse valor é muito distante de ω_2 porém relativamente próximo de valor de $\omega_3 = 154 \text{ rad/s}$ (24.5 Hz) previsto pela teoria, o que nos permite inferir que o processo de descolamento no caso considerado ($\sigma = 0,072 \text{ N/m}$, $r_0 = 4,5 \text{ mm}$ e $Q = 0,06 \text{ ml/s}$) excita o terceiro modo normal da gota principal.

4.2 Gotejamento não periódico

Em 1997 Rössler indicou que o gotejamento de uma torneira é um exemplo familiar de sistema dinâmico capaz de exibir comportamento caótico [17]. O mecanismo por trás desse comportamento é a presença de dois osciladores no gotejamento. O primeiro é um oscilador de relaxação, ou seja, um oscilador que produz um sinal periódico não sinusoidal, e.g., uma onda triangular ou quadrada. Esse oscilador descreve a evolução temporal do processo de enchimento-descolamento das gotas principais (veja Fig. 8). Uma condição importante para o regime de GP é que a condição iniciais de formação e descolamento (estado da membrana que preenche o orifício) sejam suficientemente iguais para todas as gotas. O segundo é o oscilador amortecido, excitado no orifício toda vez que parte da gota pendente se retrai no instante do descolamento (veja a Fig. 9 e a Eq. 29). O regime GNP acontece quando essas oscilações residuais do descolamento precedente são fortes e duradouras o suficiente para afetar as condições de queda da próxima gota principal, cau-

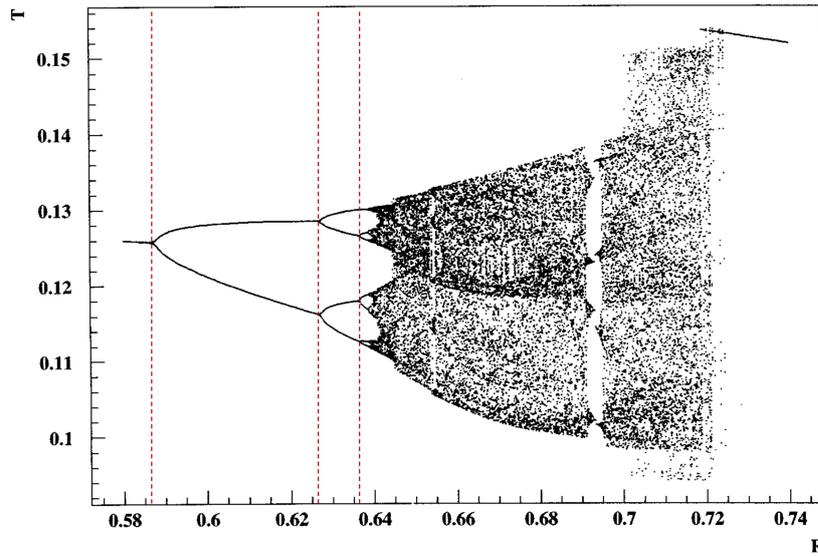


Figura 13 – Rota para o caos via duplicação de período obtida através do modelo teórico para o gotejamento [20]. As linhas tracejadas indicam as posições aproximadas das primeiras bifurcações. O parâmetro R na abscissa é um parâmetro adimensional proporcional a vazão Q .

sando um acoplamento entre os dois osciladores. Esse acoplamento faz com que o sistema apresente uma dinâmica não-linear, exibindo uma variedade de fenômenos associados com o comportamento caótico [18, 19, 20]. Os painéis (b) e (d) da Fig. 1 mostram claramente a origem da diferença entre o GP e o GNP. No painel (b) temos um GP resultante da baixa vazão, de tal forma que, logo após o descolamento, o volume da gota pendente residual é pequeno e "bem comportado". Já no painel (d) temos um GNP resultante de uma vazão maior, de tal forma que, logo após o descolamento, o volume da gota pendente residual é grande e "excitado". Isso faz com que a gota principal se descole antes da atenuação completa da oscilação da gota pendente. Podemos dizer que no primeiro caso os dois osciladores estão desacoplados enquanto que, no segundo, eles estão acoplados.

A transição de regime GP para o regime GNP de acordo com a conhecida rota para o caos via duplicação de período [20]. Nesse processo, conforme a vazão aumenta, a quantidade de gotas no período do sistema dobra. Inicialmente temos o sistema com a periodicidade de um gota, após a primeira bifurcação temos um sistema com a periodicidade de duas gotas, após a segunda bifurcação temos um sistema com a periodicidade de quatro gotas e assim por diante. Em outras palavras, inicialmente o sistema retorna ao estado inicial e se repete a cada descolamento de uma gota principal. Após a primeira bifurcação, o sistema só retorna ao estado inicial após o desprendimento de duas gotas. Os intervalos entre cada bifurcação sucessiva vai diminuindo conforme a vazão aumenta até que o sistema se tornar caótico.

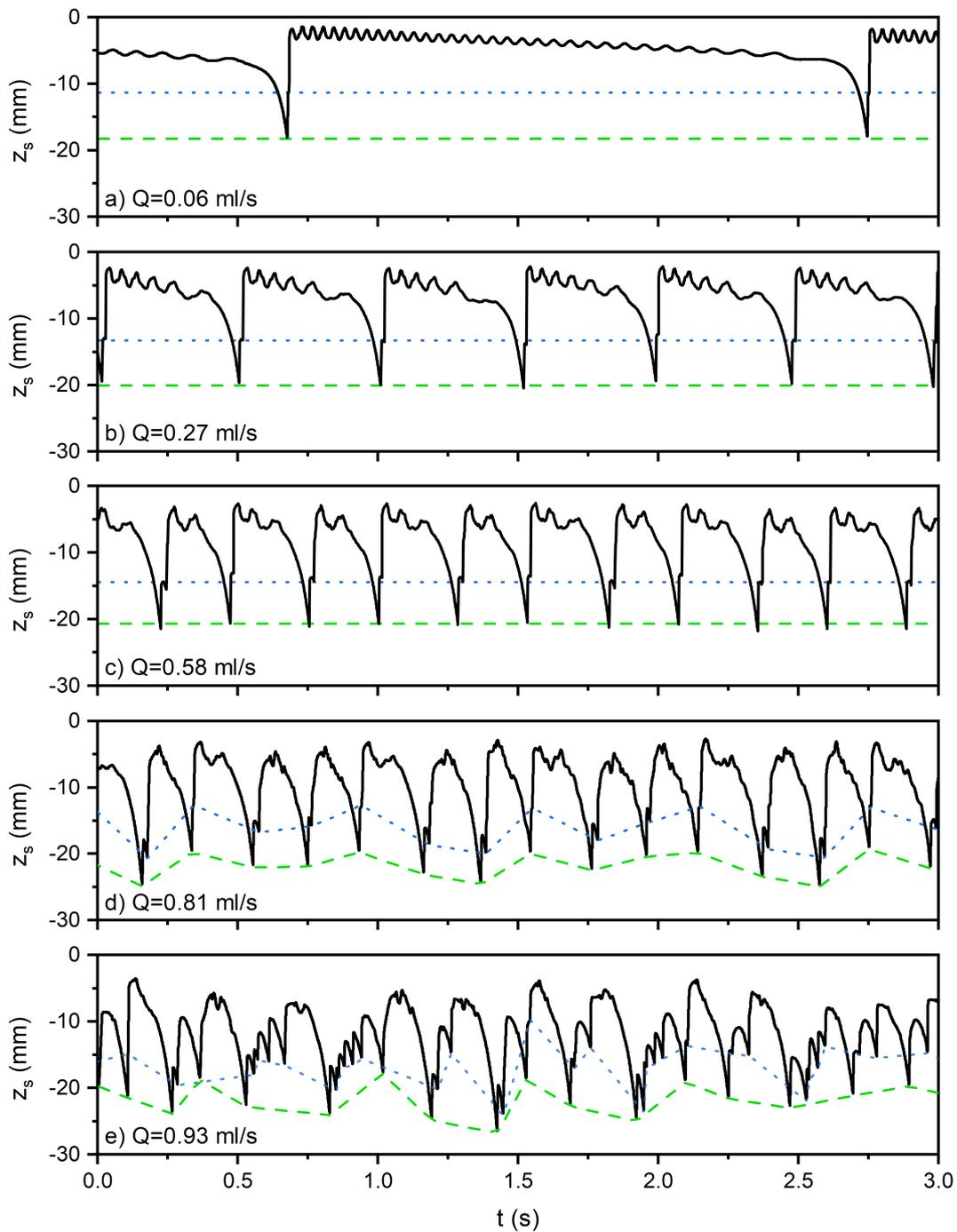


Figura 14 – Transição para o gotejamento caótico, mostrando as posições de cada gota pendente. Vemos o ponto em que a gota se desprende em cada gráfico. O período do sistema é obtido em termos de quantas gotas se desprendem até o sistema se repetir. Vemos então em (a) e (b) que o sistema tem período 1. Em (c) o sistema dobra de período, em rota para o caos. Em (d) e (e) o período é no mínimo maior do que se pode ver na figura, ou é caótico. A linha verde é a envoltória que mostra o momento em que as gotas se desprendem.

Na Figura 14 é apresentado o padrão de gotejamento para diferentes vazões. Pode ser percebido nessa figura que entre $Q = 0,06 \text{ ml/s}$ e $Q = 0,27 \text{ ml/s}$ o intervalo entre as gotas principais vai diminuindo com o aumento da vazão mas temos apenas uma gota por período (note que os padrões de oscilação entre as gotas é sempre o mesmo). No caso $Q = 0,58 \text{ ml/s}$ temos o que parece ser duas gotas por período (note que padrão de oscilação entre as gotas principais se repete a cada duas gotas). Portanto, podemos estimar que no nosso aparato, a primeira bifurcação acontece entre $0,27 \text{ ml/s}$ e $0,58 \text{ ml/s}$. A partir de $Q = 0,81 \text{ ml/s}$ o sistema parece se comportar de forma não periódica na janela de tempo considerada (3 s).

4.3 Jato contínuo

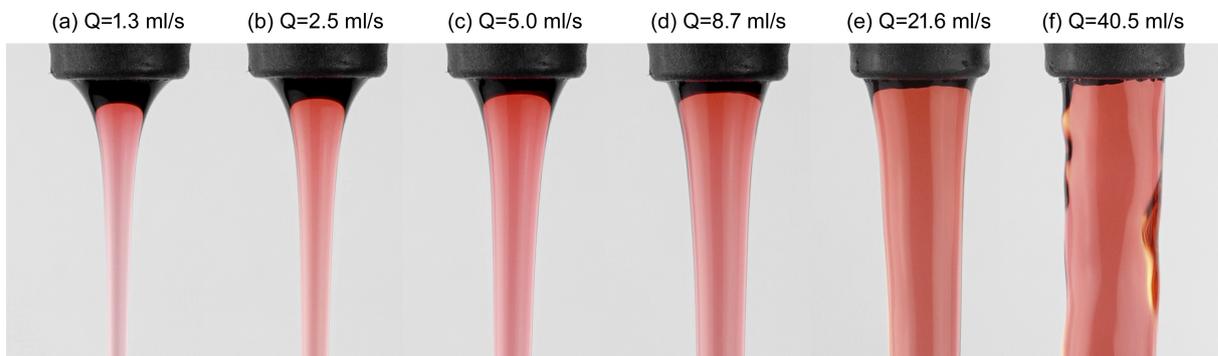


Figura 15 – Formato do jato de água saindo da torneira para diferentes vazões. O jato se aproxima de um cilindro quanto maior a vazão.

Conforme a vazão aumenta ainda mais, acontece a transição do gotejamento não periódico para jato contínuo [21]. A Figura 15 mostra o formato do jato contínuo para seis valores diferentes de vazões entre 1,3 e 40,5 ml/s . Na Figura 16 é apresentado um modelo esquemático para a forma desses jatos.

O formato teórico aproximado desses jatos pode ser calculado da seguinte maneira. Considere um fluido Newtoniano de densidade ρ , viscosidade cinemática ν desprezível e tensão superficial σ injetado verticalmente para baixo (seguindo a direção da gravidade local, \vec{g}), no ar em repouso, com velocidade v_0 através de um orifício de raio r_0 . O formato do jato [22] pode ser calculado aplicando a equação de Bernoulli em dois pontos $A = 0$ e $B = z$ no jato ao longo da vertical:

$$\frac{1}{2}\rho v_0^2 + P_A = \frac{1}{2}\rho v^2(z) + P_B - \rho g z. \quad (41)$$

As pressões nos pontos A e B podem ser calculadas aplicando equação de Young-Laplace na interface do jato com o ar:

$$\Delta P_A = P_A - P_0 = \sigma C_A \quad (42)$$

e

$$\Delta P_B = P_B - P_0 = \sigma C_B, \quad (43)$$

onde C_A e C_B são as curvaturas nos pontos A e B , respectivamente, e P_0 é a pressão atmosférica. Considerando a aproximação

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \approx \frac{1}{r}, \quad (44)$$

temos que

$$P_A = P_0 + \sigma C_A \approx \frac{1}{r_0} \quad (45)$$

e

$$P_B = P_0 + \sigma C_B \approx \frac{1}{r(z)}, \quad (46)$$

onde $r(z)$ é o raio interno do jato na posição z (veja Fig. 16). A substituição das duas expressões acima na Eq. 41 resulta em

$$\frac{1}{2}\rho v_0^2 + \rho g z + \frac{\sigma}{r_0} = \frac{1}{2}\rho v^2(z) + \frac{\sigma}{r(z)}. \quad (47)$$

A expressão acima ser escrita no formato adimensional

$$\frac{v(z)}{v_0} = \left[1 + \frac{2}{F_r} \frac{z}{r_0} + \frac{2}{We_e} \left(1 - \frac{r_0}{r(z)} \right) \right]^{1/2}, \quad (48)$$

onde

$$F_r = \frac{v_0^2}{g r_0} = \frac{\text{Inércia}}{\text{Gravidade}} \quad (49)$$

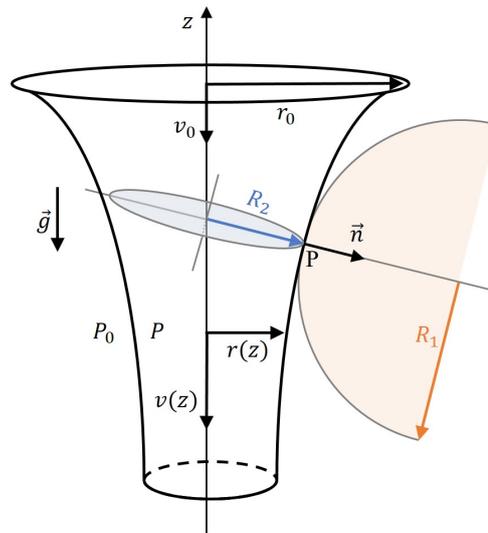


Figura 16 – Raios principais de curvatura R_2 e R_1 no jato que sai da torneira de raio r_0 . Há uma diferença de pressão $P - P_0$ na interface entre a água e o ar. O jato tem raio $r(z)$.

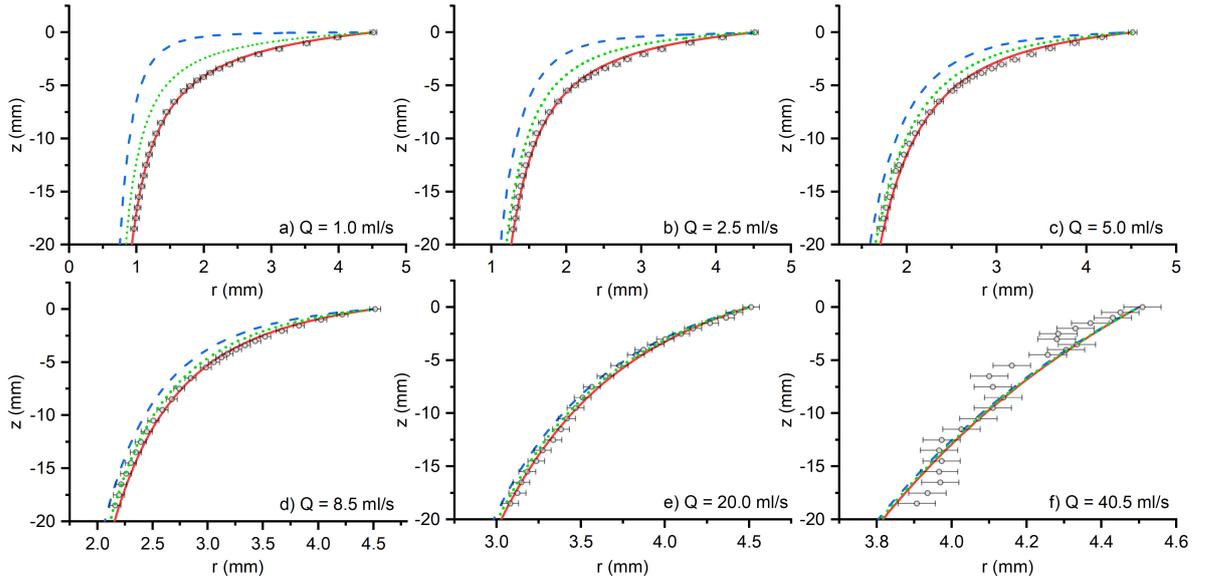


Figura 17 – Formato do jato contínuo para diferentes vazões. Os símbolos são os dados experimentais obtidos a partir da análise das imagens mostradas na Fig. 15. A linha azul tracejada representa o modelo teórico com $\sigma = 0 \text{ N/m}$. A linha verde pontilhada representa o modelo teórico com $\sigma = 0,072 \text{ N/m}$ e $c = 1$. A linha contínua vermelha representa o modelo teórico com $\sigma = 0,072$ e o fator de correção $c = 1,8$.

é o número de Froude, um parâmetro adimensional que pode ser interpretado como uma medida da inércia do fluídica comparada com a gravidade, e

$$W_e = \frac{\rho v_0^2 r_0}{\sigma} = \frac{\text{Inércia}}{\text{Curvatura}} \quad (50)$$

é o número de Weber, um parâmetro adimensional que pode ser interpretado como uma medida da inércia fluídica comparada com a curvatura.

A conservação do fluxo implica que $Q = \pi r_0^2 v_0 = \pi r(z)^2 v(z)$ e que, portanto,

$$\frac{r(z)}{r_0} = \left(\frac{v_0}{v(z)} \right)^{1/2} = \left[1 + \frac{2}{F_r} \frac{z}{r_0} + \frac{2}{W_e} \left(1 - \frac{r_0}{r(z)} \right) \right]^{-1/4}. \quad (51)$$

É interessante reescrever acima como

$$z(r) = \alpha r^{-4} + \beta r^{-1} - \gamma, \quad (52)$$

onde

$$\alpha = \frac{F_r}{2} r_0^5 = \frac{1}{2\pi} \frac{Q^2}{g}, \quad (53)$$

$$\beta = \frac{F_r}{W_e} r_0^2 = \frac{\sigma}{\rho g}, \quad (54)$$

e

$$\gamma = \alpha r_0^{-4} + \beta r_0^{-1}. \quad (55)$$

A Figura 17 mostra o formato $z(r)$ dos jatos da Fig. 15. Nessa figura, além dos dados experimentais (símbolos), são mostrados três modelos teóricos definidos pela Eq. 52 (linhas). A linha azul tracejada representa uma aproximação ainda mais forte para o problema: o caso onde $\sigma = 0 \text{ N/m}$ e, portanto, $\beta = 0$ e $z(r) = \alpha(r - r_0)^{-4}$. A linha pontilhada verde representa o ajuste com $\sigma = 0,072 \text{ N/m}$. A linha contínua vermelha representa o modelo onde o parâmetro β possui um fator de correção c , ou seja,

$$\beta = c \frac{\sigma}{\rho g}. \quad (56)$$

Pode ser visto na Fig. 17 que o modelo com fator de correção $c = 1,8$ descreve muito bem a forma de jato para todas as vazões. Além disso, pode ser visto que todos os modelos convergem para a curva $\beta = 0$ conforme a vazão aumenta. Essa constatação pode ser justificada no fato que para vazões elevadas $\alpha = (1/2\pi)Q^2/g \gg \beta = \sigma/\rho g$ e, portanto, $z(r) \approx \alpha(r - r_0)^{-4}$.

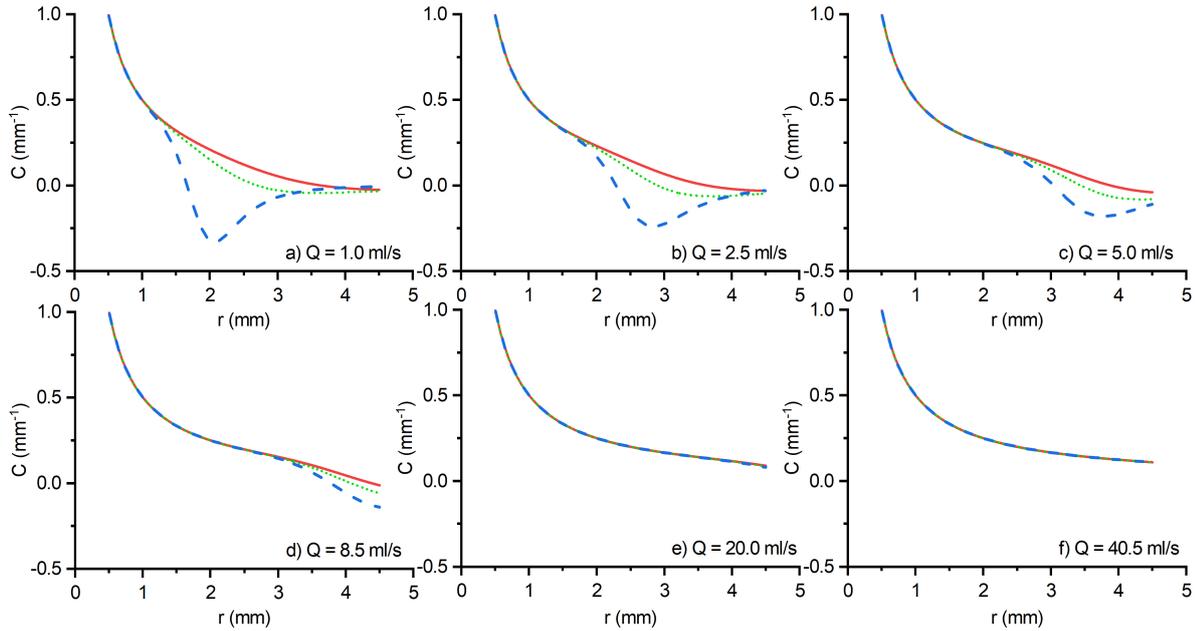


Figura 18 – Curvaturas dos modelos teóricos mostrados na Fig. 17. A linha azul tracejada representa o modelo teórico com $\sigma = 0 \text{ N/m}$. A linha verde pontilhada representa o modelo teórico com $\sigma = 0,072 \text{ N/m}$ e $c = 1$. A linha contínua vermelha representa o modelo teórico com $\sigma = 0,072$ e o fator de correção $c = 1,8$.

A curvatura do jato pode ser calculada substituindo-se a Eq. 52 na Eq. 28. A Figura 18 mostra as curvaturas para cada um dos modelos considerados na Fig. 17. Note

que, longe do orifício, a forma do jato converge para a forma cilíndrica e que, nesse caso, as aproximações das Eqs. 45 e 46 são boas aproximações. Próximo ao orifício da torneira, essas aproximações só são boas quando a vazão é alta, ou seja, $\alpha \gg \beta$. Os resultados mostrados na Fig. 18 indicam que o fator c corrige a curvatura da simplificação introduzidas pelas Eqs. 45 e 46.

Podemos conjecturar que, assim como o fator de correção f de Harkins e Brown corrigem o modelo simplificado de Tate para o peso da gota principal, esse fator c , corrige a curvatura no modelo simplificado que aproxima o jato por um cilindro. Podemos conjecturar também que, assim como f , c deve ser um função de r_0/l_c , sendo $c(1,6) = 1,8$ a correção específica para o aparato utilizado neste trabalho.

5 Conclusão

Neste trabalho, foi utilizado imagens e vídeos para estudarmos diversos fenômenos físicos associados com o escoamento da água através de uma típica torneira de jardim. Essas imagens e vídeos foram analisadas com o auxílio do software Tracker e, dessa forma, foi possível obter diversas medidas que revelaram detalhes importantes dos diferentes regimes que acontecem nesse sistema. Com essas medidas foi possível verificar que modelos teóricos relativamente simples são capazes de explicar fenômenos relativamente complexos.

Em particular, ficou claro a importância da tensão superficial na descrição dos diversos aspectos do gotejamento e do formato do jato contínuo. Destaca-se também a verificação de resultados clássicos como o fator de correção de Harkins e Brown para o modelo de Tate e os modos normais de um gota esférica.

Foi obtido um modelo efetivo do tipo massa-mola vertical para a gota pendente no orifício da torneira. Também foi possível vislumbrar a rota para o caos e identificar a vazão aproximada onde a primeira bifurcação acontece. Finalmente, o formato do jato contínuo foi medido e descrito por um modelo físico simples e efetivo.

Todos os estudados nesse trabalho foram descritos em termos dos parâmetros listados na Tabela 2. As vazões e os regimes correspondentes são listados na Tabela 3.

Constantes	Símbolo	Valor
Densidade da água	ρ	997 kg/m^3
Tensão superficial da água	σ	0,072 N/m
Raio da torneira	r_0	0,0045 m
Aceleração gravitacional	g	9,8 m/s^2
Comprimento capilar	l_c	2,7 mm

Tabela 2 – Valores e símbolos de constantes utilizadas ao longo do trabalho.

Vazão (<i>ml/s</i>)	Fr	We	Regime
0,06	3,2	0,05	GP
0,27	14,0	0,24	GP
0,58	30,1	0,51	GP
0,81	42,1	0,71	GNP
0,93	48,3	0,82	GNP
1,3	67,5	1,15	JC
2,5	130,0	2,20	JC
5,0	259,8	4,41	JC
8,7	452,1	7,67	JC
21,6	1122,5	19,04	JC
40,5	2104,7	37,70	JC

Tabela 3 – Parâmetros e regimes estudados neste trabalho.

Referências

- [1] P. de Gennes, F. Brochard-Wyart, and D. Quéré. *Capillarity and Wetting Phenomena*. Springer, Paris, 1 edition, 2003. Citado 4 vezes nas páginas 5, 8, 9 e 12.
- [2] R. Soncini and W. Klein. Surface tension in biological systems - a common problem with a variety of solutions. *Comparative Biochemistry & Physiology, Part A*, 284:111475, 2023. Citado na página 5.
- [3] C. Hall and W. D. Hoff. *Water Transportation in Brick, Stone and Concrete*. CRC Press, Abingdon, 3 edition, 2021. Citado na página 5.
- [4] T. Karbowiak, F. Debeaufort, and A. Voilley. Importance of surface tension characterization for food, pharmaceutical and packaging products: A review. *Food Science and Nutrition*, 46:391–407, 2006. Citado na página 5.
- [5] T. Young. An essay on the cohesion of fluids, ". *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 95:65–87, 1805. Citado na página 8.
- [6] A. W. Adamson and A. P. Gast. *Physical Chemistry of Surfaces*. Wiley-Interscience, New York, 6 edition, 1997. Citado 2 vezes nas páginas 8 e 12.
- [7] L. Landau and E. Lifshitz. *Fluid Mechanics*. Pergamon Press, Oxford, 2 edition, 1987. Citado 2 vezes nas páginas 9 e 34.
- [8] L. M. Siqueland and S. M. Skjæveland. Derivations of the young-laplace equation. *Physical Review E*, 4:23–30, 2021. Citado na página 9.
- [9] <https://physlets.org/tracker/>. Citado na página 14.
- [10] T. Tate. On the magnitude of a drop of liquid formed under different circumstances. *The Philosophical Magazine*, 27:176–180, 1864. Citado na página 19.
- [11] H. E. Edgerton, E. A. Hauser, and W. B. Tucker. Studies in drop formation as revealed by the high-speed motion camera. *J. Phys. Chem.*, 41:1017–1028, 1937. Citado na página 20.
- [12] X. Zhang and O. Basaran. An experimental study of dynamics of drop formation. *Physics of Fluids*, 48:1184, 1995. Citado na página 20.
- [13] O. E. Yildirim, Q. Xu, and O. A. Basarana. Analysis of the drop weight method. *Phys. Fluids*, 17:062107, 2005. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 21.

- [14] W. D. Harkins and F. E. Brown. The surface tension of water and benzene by capillary height method. *J. Am. Chem. Soc.*, 41:499–524, 1919. Citado 2 vezes nas páginas [20](#) e [21](#).
- [15] M. C. Wilkinson. Extended use of, and comments on, the drop-weight (drop-volume) technique for the determination of surface and interfacial tensions. *J. Colloid Interface Sci.*, 40:14–26, 1971. Citado 2 vezes nas páginas [20](#) e [21](#).
- [16] L. Rayleigh. Investigations in capillarity: The size of drops. the liberation of gas from supersaturated solutions. colliding jets. tension of contaminated water surfaces. *J. of Sci.*, 5:321–337, 1899. Citado na página [20](#).
- [17] O. Rossler. Continuous chaos. *Synergetics: A Workshop Proceedings of the International Workshop on Synergetics*, 2:184–197, 1977. Citado na página [22](#).
- [18] P. Martien, S.C. Pope, P.L. Scott, and R.S. Shaw. The chaotic behaviour of the leaky faucet. *Physics Letters*, 110A:399–404, 1985. Citado na página [23](#).
- [19] J. C. Sartorelli, W. M. Gonçalves, and R. D. Pinto. Crisis and intermittence in a leaky-faucet experiment. *Physical Review E*, 49:3963, 1994. Citado na página [23](#).
- [20] A. D’Innocenzo and L. Renna. Crisis and intermittence in a leaky-faucet experiment. *Physical Review E*, 55:6776, 1997. Citado na página [23](#).
- [21] C. Clanet and J. C. Lasheras. Transition from dripping to jetting. *J. Fluid Mech.*, 383:307–326, 1999. Citado na página [25](#).
- [22] J. W. M. Bush. Interfacial phenomena, lecture 11. *MIT OpenCourseWare*, pages 40–44, 2010. Citado na página [25](#).

Anexos

ANEXO A – Dedução da Frequência de Oscilação de uma Gota Esférica

Esta dedução foi originalmente apresentada no livro *Fluid Mechanics*[7].

Uma gota esférica de um fluido incompressível sob a ação de forças de capilaridade oscila desviando ligeiramente de um formato esférico. Pode-se determinar as frequências de oscilação possíveis partindo da variação da área superficial da gota. Em coordenadas esféricas, r, θ, ϕ , considerando uma função $r = r(\theta, \phi)$, a área superficial A é dada pela integral[7]:

$$A = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sqrt{r^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{1}{\sin^2 \theta} \left(\frac{\partial r}{\partial \phi}\right)^2} r \sin \theta d\theta d\phi \quad (57)$$

Uma superfície que varia ligeiramente de uma esfera é dada por $r = R + \zeta$, com ζ pequeno em relação à R , R constante. Substituindo na equação acima, e fazendo a expansão binomial, obtém-se aproximadamente:

$$A = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left\{ (R + \zeta)^2 + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \zeta}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{1}{\sin^2 \theta} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial \phi}\right)^2 \right] \right\} \sin \theta d\theta d\phi \quad (58)$$

A variação ΔA na área é:

$$\Delta A = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left\{ 2(R + \zeta) \Delta \zeta + \frac{\partial \zeta}{\partial \theta} \frac{\partial \Delta \zeta}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial \zeta}{\partial \phi} \frac{\partial \Delta \zeta}{\partial \phi} \right\} \sin \theta d\theta d\phi \quad (59)$$

Integrando por partes, o segundo termo em relação a θ e o terceiro em relação a ϕ , temos:

$$\Delta A = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left\{ 2(R + \zeta) - \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \zeta}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \phi^2} \right\} \Delta \zeta \sin \theta d\theta d\phi \quad (60)$$

Multiplicando e dividindo a expressão acima por $R(R + 2\zeta)$, fazendo a aproximação $\Delta \zeta dA \approx \Delta \zeta R(R + 2\zeta) \sin \theta d\theta d\phi$, e comparando com a equação 18, temos que:

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{2}{R} - \frac{2\zeta}{R^2} - \frac{1}{R^2} \left\{ \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \phi^2} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \zeta}{\partial \theta} \right) \right\}. \quad (61)$$

Da equação de Young-Laplace, na superfície em $r = R$:

$$p - p_0 = \sigma \left\{ \frac{2}{R} - \frac{2\zeta}{R^2} - \frac{1}{R^2} \left[\frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \phi^2} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \zeta}{\partial \theta} \right) \right] \right\}. \quad (62)$$

Introduzindo o potencial de velocidade ψ , considerando que o fluido é irrotacional, e, portanto a velocidade do fluido é tal que $\vec{\nabla} \times \vec{u} = 0$, então $\vec{u} = \vec{\nabla} \psi$. Vale que $p = -\rho \partial \psi / \partial t$, então:

$$\rho \frac{\partial \psi}{\partial t} + \sigma \left\{ \frac{2}{R} - \frac{2\zeta}{R^2} - \frac{1}{R^2} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \zeta}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \phi^2} \right] \right\} + p_0 = 0. \quad (63)$$

Podemos omitir a constante $p_0 + 2\sigma/R$ redefinindo o potencial ψ . Derivando em relação ao tempo, podemos dizer que $\partial \zeta / \partial t = u_r = \partial \psi / \partial r$. Assim, chegamos na condição de contorno para ψ em $r = R$.

$$\rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \frac{\sigma}{R^2} \left\{ 2 \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} \right] \right\} = 0 \quad (64)$$

A solução tem a forma de uma onda estacionária, do tipo $\psi = e^{-i\omega t} f(r, \theta, \phi)$, onde a função f é solução da equação de Laplace $\nabla^2 f = 0$. Podemos portanto escrevê-la em termos das funções harmônicas esféricas $Y_{lm} = P_l^m(\cos \theta) e^{im\phi}$, onde $P_l^m(\cos \theta)$ são os polinômios de Legendre. Podemos substituir $\psi = B e^{-i\omega t} r^l P_l^m(\cos \theta) e^{im\phi}$ na equação 64 e, como as funções harmônicas esféricas satisfazem a equação:

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y_{lm}}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y_{lm}}{\partial \phi^2} + l(l+1) Y_{lm} = 0 \quad (65)$$

Obtemos

$$\omega^2 = \frac{\sigma l(l-1)(l+2)}{\rho R^3} \quad (66)$$