



**ESCOAMENTO DE POISEUILLE
EM UM DUTO LOSANGULAR**

VINÍCIUS COUTINHO DA SILVA

**PROJETO DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA**

FACULDADE DE TECNOLOGIA

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA**

**ESCOAMENTO DE POISEUILLE
EM UM DUTO LOSANGULAR**

VINÍCIUS COUTINHO DA SILVA

Orientador: PROF. DR. ANDRÉ VON BORRIES LOPES, ENM/UNB

PROJETO DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

**PUBLICAÇÃO ENM.PG - XXX/AAAA
BRASÍLIA-DF, 20 DE DEZEMBRO DE 2023.**

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA**

**ESCOAMENTO DE POISEUILLE
EM UM DUTO LOSANGULAR**

VINÍCIUS COUTINHO DA SILVA

PROJETO DE GRADUAÇÃO SUBMETIDO AO DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA DA FACULDADE DE TECNOLOGIA DA UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA, COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE ENGENHEIRO MECÂNICO.

APROVADA POR:

Prof. Dr. André von Borries Lopes, ENM/UnB
Orientador

Prof. Dr. Eder Lima de Albuquerque, ENM/UnB
Examinador interno

Prof. Dr. Yuri Dumaresq Sobral, MAT/UnB
Examinador externo

BRASÍLIA, 20 DE DEZEMBRO DE 2023.

FICHA CATALOGRÁFICA

VINÍCIUS COUTINHO DA SILVA

Escoamento de Poiseuille em um duto losangular.

2023xv, 51p., 201x297 mm

(ENM/FT/UnB, Engenheiro Mecânico, Engenharia Mecânica, 2023)

Projeto de Graduação - Universidade de Brasília

Faculdade de Tecnologia - Departamento de Engenharia Mecânica

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

VINÍCIUS COUTINHO DA SILVA (2023) Escoamento de Poiseuille em um duto losangular.. Projeto de Graduação em Engenharia Mecânica, Publicação xxx/AAAA, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 51p.

CESSÃO DE DIREITOS

AUTOR: Vinícius Coutinho da Silva

TÍTULO: Escoamento de Poiseuille em um duto losangular..

GRAU: Engenheiro Mecânico ANO: 2023

É concedida à Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias deste projeto de graduação e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor se reserva a outros direitos de publicação e nenhuma parte deste projeto de graduação pode ser reproduzida sem a autorização por escrito do autor.

Vinícius Coutinho da Silva

viniciuscoutinho04@gmail.com

Agradecimentos

Acima de tudo, à Deus, por ter me concedido a graça de conceber este trabalho.

Ao meu pai, Francisco, que dedicou toda sua vida a me dar o melhor possível com o que o senhor tinha disponível. Sei que você fez o seu melhor, pai. Te amo. Você é o meu herói.

À minha mãe, Azenilda, por fazer de tudo para me fazer feliz. Por sempre cuidar de mim. Te amo mãe. Você é minha rainha. Queria que todos tivessem a oportunidade de ter pais como vocês.

Aos meus irmãos, Diego, Samuel e Fabiano, por todo apoio e carinho que me deram. Diego, se você não tivesse corrido atrás quando eu não podia, hoje eu não estaria aqui. Muito obrigado. Amo vocês.

À minha vó Tatá, que hoje está me acompanhando de um lugar melhor.

Ao meu primo Robertinho, pois sem seu apoio hoje não estaria aqui.

À minha alma gêmea, namorada, companheira e melhor amiga, Juliana. Por estar ao meu lado em todos os momentos e fazer tudo por mim. Obrigado. Te amo cada dia mais, meu bem.

Aos meus sogros, Marcelo e Marlene, pelo apoio e encorajamento durante os momentos que precisei.

Aos meus amigos, Pedro, Edu, Lucão e Caio, Artur e Rodrigo, Nicolas, Ricardo, Vinícius e Guilherme, Carlos, Gabriel, João, Dahaka e Hudossn, Davi, Caio e Lucas, Yuri, Douglas, Mohammad, Felipe, Augusto, Gustavo, Douglas, Manassés, Duda espero que nossa amizade permaneça eternamente.

Ao André, por todos ensinamentos passados durante essa jornada. Mais que apenas um orientador, foi meu amigo em momentos que eu precisava. Muito obrigado por acreditar em mim.

À professora Aline, por ter me dado a oportunidade de trabalhar academicamente e me iniciar no caminho da pesquisa.

Agradeço a todos que colaboraram minimamente para eu estar aqui hoje. Gostaria de escrever um pouco mais sobre cada um de vocês mas fazer isso seria maior do que todo este trabalho.

Resumo

Este trabalho tem como foco o estudo numérico do escoamento isotérmico de um fluido newtoniano, viscoso e incompressível induzido por um gradiente de pressão em um duto de seção transversal losangular constante. O escoamento é permanente, unidirecional e satisfaz a condição de contorno de não escorregamento. Parte-se da equação da continuidade e da equação de Navier-Stokes para chegar à equação governante, uma equação de Poisson com termo de fonte constante. Em seguida, são utilizadas as coordenadas oblíquas para transformar o domínio em um quadrado. Então, propõe-se a resolução numérica do campo de velocidades por um método das diferenças finitas centradas de segunda ordem com integração pelo método de Simpson em duas dimensões para encontrar a vazão, além de desenvolver uma simetria para reduzir em 75% o domínio computacional. Além disso, é exposta uma solução inédita pelo método de perturbação de homotopia para validar os resultados obtidos. A fim de avaliar os resultados, calcula-se o fRe e compara-se com os resultados de [Shah e London \(1978\)](#), [Lee e Lee \(2002\)](#) e [Bennett \(2021\)](#), apresentando resultados mais precisos que aqueles encontrados na literatura.

Palavras-chave: Escoamento interno, Escoamento laminar, Duto Losangular, Número de Poiseuille, Diferenças Finitas, Homotopia.

Abstract

This work focuses on the numerical study of the isothermal flow of a Newtonian, viscous, and incompressible fluid induced by a pressure gradient in a rhombic duct. The flow is steady, unidirectional, and satisfies the no-slip boundary condition. Starting from the continuity equation and the Navier-Stokes equation, we derive the governing equation, which is a Poisson equation with a constant source term. Then, skew coordinates are used to transform the domain into a square. Next, we propose the numerical solution of the velocity field using a second-order centered finite difference method with two-dimensional Simpson's integration to find the flow rate along with the development of a symmetry to reduce the computational domain by 75%. Furthermore, a novel solution is presented using the homotopy perturbation method to validate the results achieved. In order to evaluate the results, the fRe number is calculated and compared with the results of [Shah e London \(1978\)](#), [Lee e Lee \(2002\)](#) and [Bennett \(2021\)](#), demonstrating velocity fields and parameters more accurate than those found in the literature.

Key-words: Internal Flow, Laminar Flow, Rhombic Duct, Poiseuille Number, Finite Differences, Homotopy.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	MOTIVAÇÃO	1
1.2	OBJETIVOS	4
1.2.1	OBJETIVOS GERAIS	4
1.2.2	OBJETIVOS ESPECÍFICOS	4
1.3	ESTRUTURA DO TRABALHO	4
2	REVISÃO DE LITERATURA	6
2.1	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	6
3	FORMULAÇÃO MATEMÁTICA	12
3.1	ENUNCIADO DO PROBLEMA	12
3.1.1	VAZÃO	15
3.2	ADIMENSIONALIZAÇÃO	15
3.2.1	PRODUTO DO FATOR DE ATRITO DE FANNING E O NÚMERO DE REYNOLDS	16
3.2.2	RAZÃO $\frac{\tilde{U}_{MÁX}}{\tilde{U}_{MÉD}}$	17
3.3	SISTEMA DE COORDENADAS OBLÍQUO	18
3.3.1	VAZÃO	20
4	MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS	22
4.1	MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS	22
4.1.1	MATRIZ DOS COEFICIENTES	24
4.1.2	VETOR DE INCÓGNITAS	26
4.1.3	VETOR RESPOSTA	27
4.2	INTEGRAÇÃO NUMÉRICA	27
4.3	METODOLOGIA NUMÉRICA	30
4.3.1	BIBLIOTECAS E INPUTS	30
4.3.2	CONSTRUÇÃO DA MATRIZ DOS COEFICIENTES	31
4.3.3	ARMAZENAMENTO DA MATRIZ DOS COEFICIENTES	33
4.3.4	CRIAÇÃO DO VETOR RESPOSTA	33
4.3.5	SOLUÇÃO DO SISTEMA LINEAR	34
4.3.6	REARRANJO DO VETOR DE INCÓGNITAS	34

4.3.7	INTEGRAÇÃO NUMÉRICA	35
4.3.8	CÁLCULO DA VAZÃO	36
4.3.9	PRODUTO DO FATOR DE ATRITO DE FANNING E O NÚMERO DE REYNOLDS.	36
4.3.10	RAZÃO $\frac{U_{MÁX}}{U_{MÉD}}$	36
4.4	SIMETRIA 1/2	37
4.4.1	METODOLOGIA NUMÉRICA	39
4.5	SIMETRIA 1/4	41
4.5.1	METODOLOGIA NUMÉRICA	43
4.6	INVESTIGAÇÃO DA CONVERGÊNCIA NUMÉRICA	46
5	MÉTODO DE HOMOTOPIA	49
5.1	MÉTODO DE HOMOTOPIA	49
5.2	METODOLOGIA NUMÉRICA	51
5.2.1	BIBLIOTECAS E INPUTS	51
5.2.2	CONSTRUÇÃO DA MATRIZ DOS COEFICIENTES	52
5.2.3	CONSTRUÇÃO DA MATRIZ DE DERIVADA MISTA	52
5.2.4	INTEGRAÇÃO NUMÉRICA	53
5.2.5	SOLUÇÃO DA ORDEM INICIAL DE HOMOTOPIA	54
5.2.6	SOLUÇÃO DAS ORDENS MAIORES QUE 0	55
6	RESULTADOS	57
6.1	RESULTADOS	57
6.2	RESULTADOS DE HOMOTOPIA	62
7	CONCLUSÃO	68
7.1	CONCLUSÕES	68
7.2	TRABALHOS FUTUROS	69
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	71

LISTA DE FIGURAS

1.1	Aplicações de canais oblíquos para resfriamento interno de turbinas à gás. Retirado de Liou, Wang e Chan (2017).	2
1.2	Sistema de mistura gás-água e diferentes seções transversais testadas. Retirado de Wolk, Dreyer e Rath (2000).	2
1.3	Microtubos oblíquos de SnO ₂ sintetizados. Retirado de Xu et al. (2010).	3
1.4	Grade dianteira de um Focus. Retirado de < https://zoodmall.com/cdn-cgi/image/w=600,fit=contain,f=auto/http://images.bluelanshome.com/images/21/03/v/24012172/1.jpg-800 >. Acesso em 12 de janeiro de 2024.	3
2.1	Variação do parâmetro de queda de pressão com relação ao ângulo de abertura α para vários números de Rayleigh N_{Ra} . Retirado de Iqbal, Aggarwala e Fowler (1969).	7
2.2	Características do escoamento e transferência de calor para o escoamento laminar completamente desenvolvido em um duto oblíquo. Retirado de Shah (1975).	7
2.3	Valores de fRe computados para o duto oblíquo. Retirado de Lee e Lee (2002).	8
2.4	Equação que descreve o campo de velocidades e as constantes associadas. Retirado de Tamayol e Bahrami (2009).	9
2.5	Coefficiente para a equação de dutos superelípticos. Retirado de Tamayol e Bahrami (2009).	9
2.6	Parâmetro fRe para diferentes geometrias. Retirado de Tamayol e Bahrami (2009) e Bahrami (2010).	10
2.7	Coefficiente para a equação de dutos superelípticos. Retirado de Bahrami (2010).	10
2.8	Superfícies e linhas de simetria para geometrias de dutos geradas com funções superelípticas e polinomiais. Retirado de Bennett (2021).	11
2.9	Resultados do produto do fator de atrito de Darcy pelo número de Reynolds em função da tangente de metade do ângulo de abertura. Retirado de Bennett (2021).	11
3.1	Representação da seção oblíqua.	12
3.2	Representação das condições de contorno.	15
3.3	Representação das condições de contorno adimensionalizadas.	18
3.4	Eixo de coordenadas oblíquo.	19

4.1	Representação da malha no quadrado.	23
4.2	Representação da malha simétrica no quadrado.....	37
4.3	Representação da malha simétrica com pontos de velocidade iguais.	38
4.4	Representação da malha simétrica com pontos de velocidade iguais no plano oblíquo e no plano cartesiano.....	41
4.5	Módulo do erro absoluto da velocidade máxima em função do espaçamento da malha.	47
4.6	Módulo do erro absoluto da velocidade média em função do espaçamento da malha.	47
4.7	Módulo do erro absoluto da velocidade máxima em função do espaçamento horizontal da malha cartesiana.	48
4.8	Módulo do erro absoluto da velocidade média em função do espaçamento horizontal da malha cartesiana.	48
6.1	Linhas de isovelocidade no sistema de coordenadas cartesiano para: (a) $\beta = 90^\circ$, (b) $\beta = 60^\circ$, (c) $\beta = 45^\circ$ e (d) $\beta = 30^\circ$	58
6.2	Velocidade máxima $U_{\text{máx}}$ em função do ângulo de abertura β	58
6.3	Velocidade média $U_{\text{méd}}$ em função do ângulo de abertura β	59
6.4	Razão $\frac{U_{\text{máx}}}{U_{\text{méd}}}$ em função do ângulo de abertura β	59
6.5	fRe em função do ângulo de abertura β	60
6.6	Mapa de cores da velocidade no sistema de coordenadas oblíquo para $\beta = 45^\circ$ e: (a) v_0 , (b) v_1 , (c) v_2 , (d) v_3 , (e) v_4 e (f) v_5	63
6.7	Mapa de cores da velocidade final no sistema de coordenadas oblíquo para $\beta = 45^\circ$ somando-se: (a) v_0 , (b) v_1 , (c) v_2 e (d) v_3	64
6.8	Mapa de cores do campo de velocidade encontrado pelo método das diferenças finitas.	64
6.9	Erro relativo δfRe em função do ângulo de abertura β	66
6.10	Velocidades em função da ordem de homotopia para $\beta = 45^\circ$	66
6.11	QR code de acesso ao código utilizado para a solução do problema.....	67

LISTA DE TABELAS

6.1	Varição do fRe com relação ao ângulo β e o número de pontos interiores da malha N	61
6.2	Varição do fRe_n com relação ao ângulo β considerando até a ordem de homotopia n	65
6.3	Varição do δfRe_n com relação ao ângulo β considerando até a ordem de homotopia n	65

LISTA DE SÍMBOLOS

Grupos adimensionais

f	Fator de atrito de Fanning
fRe	Produto do fator de atrito de Fanning e o número de Reynolds
Re	Número de Reynolds

Símbolos gregos

β	Ângulo de abertura
ΔP	Queda de pressão
μ	Viscosidade dinâmica
Ω	Domínio de integração
ρ	Massa específica do fluido

Símbolos latinos

\mathbf{u}	Campo de velocidade
ℓ	Metade do lado do losango
\mathbb{J}	Matriz Jacobiana
\mathcal{O}	Ordem
\mathcal{Q}	Vazão
ξ, η, z	Coordenadas oblíquas
D_h	Diâmetro hidráulico
h	Espaçamento da malha na direção x
k	Espaçamento da malha na direção y
L	Comprimento da tubulação

N	Número de pontos interiores
N	Números de pontos internos
p	Campo de pressão
t	Tempo
U	Velocidade característica
u_x	Componente da velocidade na direção x
u_y	Componente da velocidade na direção y
u_z	Componente da velocidade na direção z
$U_{\text{máx}}$	Velocidade máxima
$U_{\text{méd}}$	Velocidade média
x, y, z	Coordenadas cartesianas

Capítulo 1

Introdução

1.1 Motivação

Dutos de variadas seções possuem inúmeras aplicações atualmente, como: trocadores de calor (Bacelar et al., 2023), resfriamento de eletrônicos (Dogruoz, Arik e Pautsch, 2010), análise do escoamento de sangue em um paciente (Minamitani et al., 2004), perfuração de poços de petróleo (Alegria, 2011), performance de células de combustível (Cha, O'Hayre e Prinz, 2004), redução de particulados em dutos de ventilação para a indústria alimentícia (Othmane et al., 2010) e estudo do fluxo de respiração humana (Kongnuan e Pholuang, 2012).

Dessa forma, nota-se que o entendimento abrangente da transferência de calor e massa dentro de dutos é fundamental para o desenvolvimento comercial e científico. Nesse sentido, o presente trabalho busca contribuir com o estudo de um caso particular de uma seção não convencional, um duto de seção transversal losangular, o qual será denominado duto de seção transversal oblíqua. Além disso, a solução do problema do escoamento interno é equivalente a solução do problema de uma calha (canal aberto) com geometria de triângulo equilátero.

Liou, Wang e Chan (2017) reportam a importância do uso de dutos oblíquos em trocadores de calor em sua pesquisa, em especial a influência do ângulo de abertura da seção transversal para efeitos de transferência de calor. A Figura 1.1 traz uma aplicação real de um duto oblíquo para o resfriamento de uma turbina a gás.

Wolk, Dreyer e Rath (2000) avaliaram a relevância de um tubo oblíquo para destilação e geradores de vapor em seu artigo. No caso analisado, foi proposto um modelo de escoamento multifásico vertical em que foi possível comparar a geometria losangular à outras geometrias de dutos. A Figura 1.2 apresenta uma aplicação desse sistema e as seções transversais avaliadas.

Xu et al. (2010) traz uma outra perspectiva de aplicação na área química para a produção de baterias de íons de Lítio. A síntese de SnO₂ poroso realizada pelos autores ocorreu de modo que sua estrutura se tornasse oblíqua e durante esse processo, há tanto a passagem

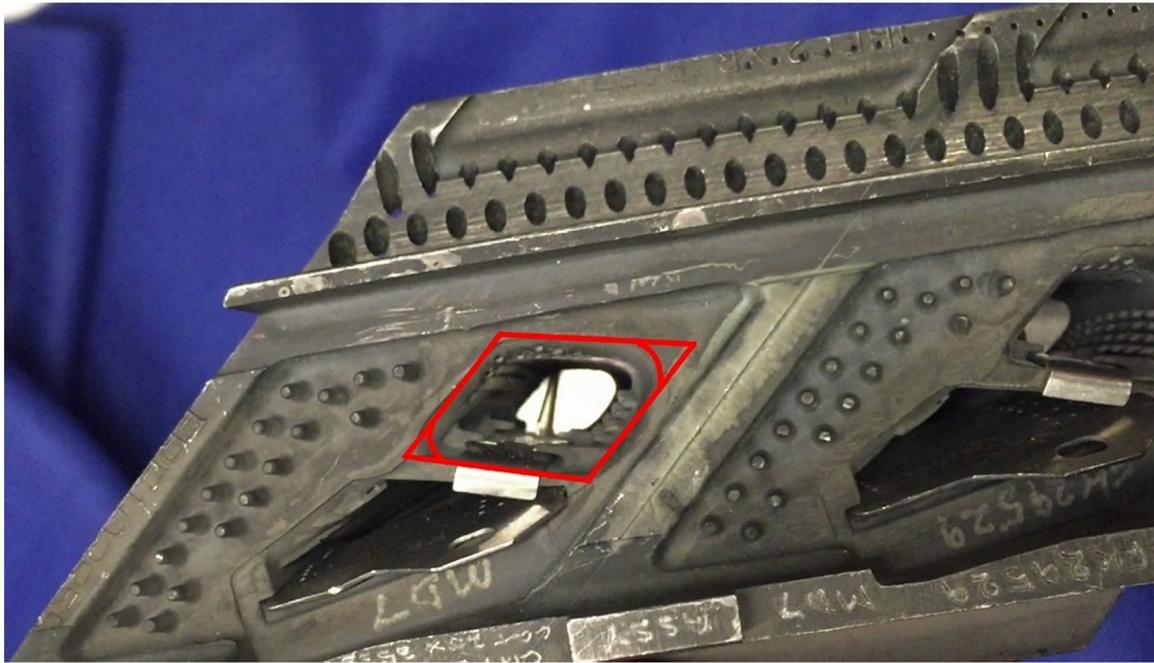


Figura 1.1: Aplicações de canais oblíquos para resfriamento interno de turbinas à gás. Retirado de [Liou, Wang e Chan \(2017\)](#).

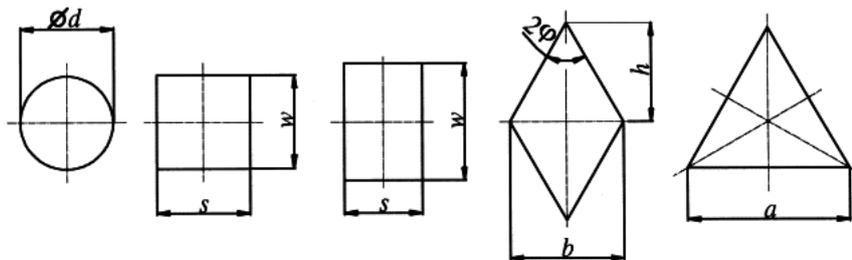
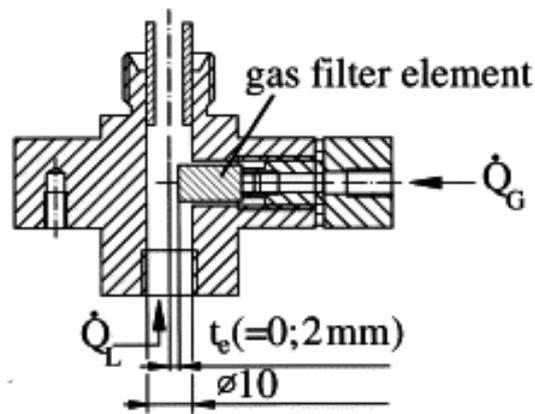


Figura 1.2: Sistema de mistura gás-água e diferentes seções transversais testadas. Retirado de [Wolk, Dreyer e Rath \(2000\)](#).

de líquido quanto gás pelos microtubos. Na [Figura 1.3](#) é possível ver a presença de vários microtubos oblíquos na área analisada.

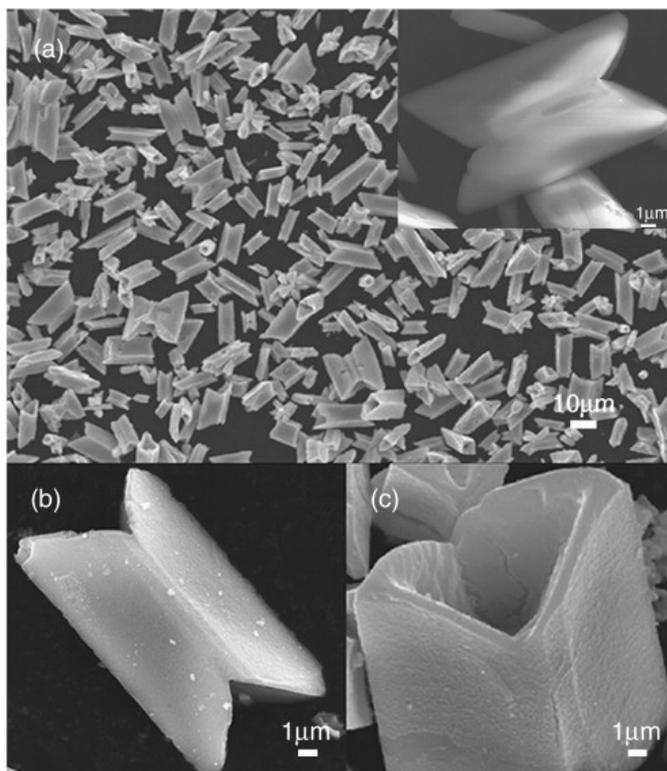


Figura 1.3: Microtubos oblíquos de SnO₂ sintetizados. Retirado de [Xu et al. \(2010\)](#).

Os dutos com seção oblíqua também podem ser encontrados em aplicações na área automotiva. Por exemplo, na grade dianteira de um Focus, conforme [Figura 1.4](#). Além das implicações estéticas associadas à grade dianteira, ela também possui função de auxiliar a circulação de ar para o motor, resfriando-o, e diminuindo o arrasto sofrido pelo carro, tal como descrito por [Kim et al. \(2016\)](#).



Figura 1.4: Grade dianteira de um Focus. Retirado de <https://zoodmall.com/cdn-cgi/image/w=600,fit=contain,f=auto/http://images.bluelanshome.com/images/21/03/v/24012172/1.jpg-800>. Acesso em 12 de janeiro de 2024.

1.2 Objetivos

1.2.1 Objetivos gerais

Este trabalho tem como objetivo realizar a solução do problema do escoamento laminar no interior de um duto com seção transversal oblíqua. Além disso, busca-se comparar os resultados obtidos com as abordagens aplicadas neste estudo com resultados previamente encontrados na literatura.

1.2.2 Objetivos específicos

No Projeto de Graduação, é de suma importância delinear metas específicas para orientar todas as fases da pesquisa, com o intuito de assegurar a consistência dos resultados finais e a aplicação correta das técnicas empregadas. As metas são:

1. Determinar uma expressão para o produto do fator de atrito de Fanning pelo número de Reynolds utilizando o diâmetro hidráulico como comprimento característico;
2. Aplicar o método das diferenças finitas para o cálculo do campo de velocidades;
3. Aplicar o método da integral numérica de Simpson em duas dimensões para obter a vazão.
4. Implementar uma simetria a fim de reduzir ao máximo o domínio computacional.
5. Apresentar um método inédito de perturbação de homotopia para simplificar a equação governante.
6. Comparar os resultados obtidos e discutir a validade dos modelos adotados.

1.3 Estrutura do trabalho

- Capítulo 2: Neste capítulo será realizada uma revisão bibliográfica, na qual espera-se observar o atual estado da arte da pesquisa e avaliar a inovação trazida pelo trabalho a ser realizado.
- Capítulo 3: Nessa seção espera-se estabelecer a formulação matemática que descreva os fenômenos derivados do escoamento no interior do duto oblíquo. Para isso, serão utilizadas algumas hipóteses iniciais e a aplicação das equações de Navier-Stokes.
- Capítulo 4: Tendo estabelecido as equações e condições de contorno do problema, tal capítulo procura soluções numéricas do campo de velocidades através do Método das Diferenças Finitas associado à integração numérica pela regra de Simpson em

duas dimensões. Também são apresentadas simetrias, as quais buscam simplificar a resolução numérica do problema.

- Capítulo 5: Este capítulo apresenta um método de perturbação de homotopia inédito na literatura, no qual é proposta uma solução da equação governante do problema por uma soma de várias ordens, validando, dessa maneira, o modelo de diferenças finitas proposto anteriormente.
- Capítulo 6: Nos resultados será realizada uma discussão acerca dos resultados obtidos através das técnicas numéricas. Também serão gerados gráficos para facilitar a visualização do escoamento e para comparação com dados disponíveis na literatura.
- Capítulo 7: Por fim, neste capítulo, são apresentadas conclusões gerais, resgatando as principais discussões realizadas anteriormente e apontando as contribuições realizadas para a literatura. Além de indicar caminhos para possíveis trabalhos futuros.

Capítulo 2

Revisão de literatura

Neste capítulo, será apresentada a revisão das pesquisas e discussões de autores acerca do escoamento permanente, laminar, incompressível de fluido newtoniano para o caso do duto de seção transversal losangular. Com isso, será possível estabelecer paralelos de comparação entre os resultados obtidos neste trabalho e os trabalhos passados com este mesmo tema.

2.1 Revisão bibliográfica

Os estudos dirigidos para gerar soluções em geometrias losangular possuem especial ênfase nas aplicações relacionadas à transferência de calor e massa. O principal objetivo dessas pesquisas é compreender como geometrias distintas podem afetar os parâmetros físicos fundamentais, a fim de otimizar sistemas como trocadores de calor, plantas de energia nuclear e motores de turbinas a gás.

A primeira referência encontrada na literatura para a análise de números adimensionais relacionados à mecânica dos fluidos newtonianos em um duto de seção transversal oblíqua constante foi um artigo de três autores [Iqbal, Aggarwala e Fowler \(1969\)](#), no qual é analisado o escoamento utilizando métodos variacionais e apenas apresentam os dados de $2fRe$ graficamente, conforme [Figura 2.1](#). Vale ressaltar que a denominação do duto utilizada nesse artigo é de duto rômboico¹, e essa nomeação é utilizada em todas as fontes internacionais produzidas posteriormente a esta.

Seis anos após a publicação de [Iqbal, Aggarwala e Fowler \(1969\)](#), [Shah \(1975\)](#), motivado pelas aplicações veiculares e industriais do motor de turbina a gás com regeneração, propõe a utilização do método de correspondência por mínimos quadrados para solucionar problemas de dutos de diversas geometrias, dentre eles o duto oblíquo. Dessa forma, o autor tabela os dados encontrados para esta seção e afirma concordância de 0,1% com os valores encontrados por [Iqbal, Aggarwala e Fowler \(1969\)](#). A tabela é mostrada na [Figura 2.2](#).

¹Do inglês *rhombus* (losango).

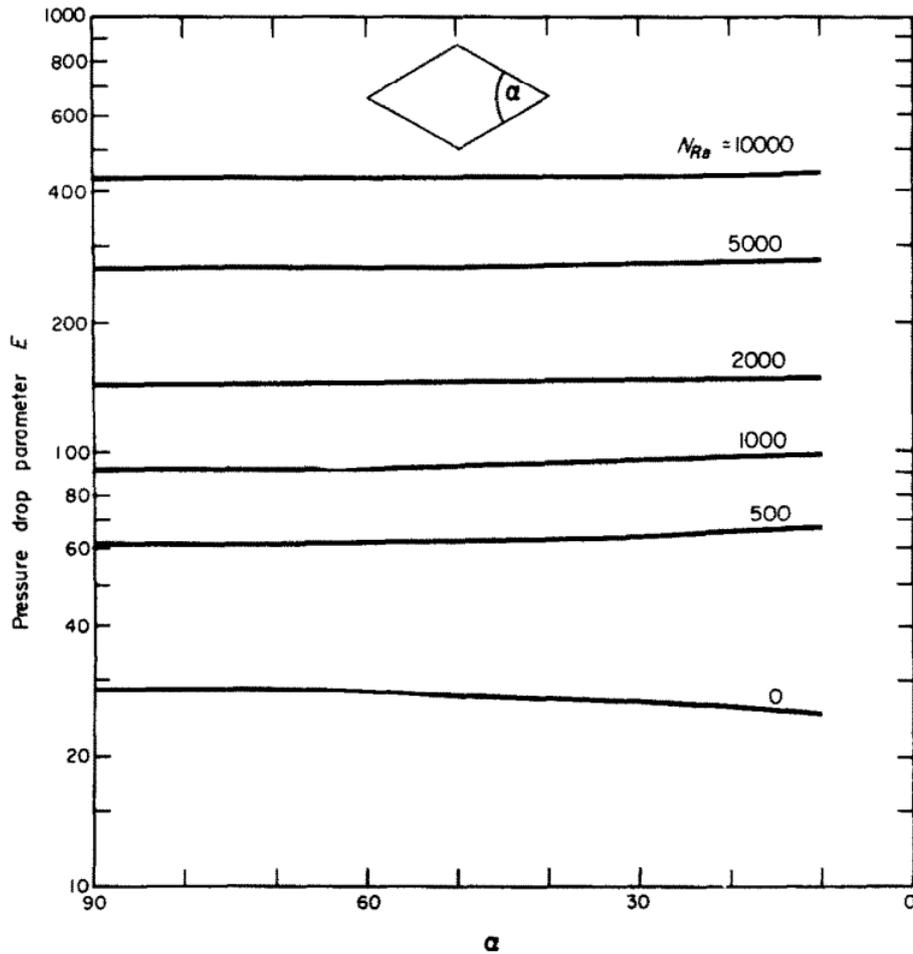


Figura 2.1: Variação do parâmetro de queda de pressão com relação ao ângulo de abertura α para vários números de Rayleigh N_{Ra} . Retirado de [Iqbal, Aggarwala e Fowler \(1969\)](#).

ϕ	$\frac{u_{max}}{u_m}$	$K_d(\infty)$	$K_e(\infty)$	$K(\infty)$	L_{hy}^+	fRe
90	2.096	1.378	2.154	1.551	0.0324	14.227
80	2.102	1.381	2.163	1.564	0.0327	14.181
70	2.120	1.389	2.190	1.603	0.0336	14.046
60	2.151	1.402	2.239	1.673	0.0353	13.830
50	2.199	1.422	2.311	1.778	0.0380	13.542
45	2.230	1.436	2.361	1.850	0.0397	13.381
40	2.266	1.448	2.411	1.925	0.0419	13.193
30	2.359	1.481	2.541	2.120	0.0477	12.803
20	2.493	1.521	2.713	2.384	0.0570	12.416
10	2.689	1.562	2.908	2.693	0.0732	12.073
0	3.000	1.600	3.086	2.971	0.1048	12.000

Figura 2.2: Características do escoamento e transferência de calor para o escoamento laminar completamente desenvolvido em um duto oblíquo. Retirado de [Shah \(1975\)](#).

A crescente necessidade de unificar as soluções de dutos de diversas geometrias de seção transversal para a engenharia levou [Shah e London \(1978\)](#) a produzirem uma coletânea de resultados analíticos, numéricos e experimentais de inúmeros autores acerca do *escoamento laminar e a convecção forçada de fluidos newtonianos de propriedades constantes passando por dutos retos, estacionários e não porosos de seção transversal constante*. Este monógrafo é reconhecido até os dias de hoje e é um marco nos estudos de dutos, sendo referenciado em todos os artigos apresentados nessa revisão bibliográfica que foram produzidos após 1978.

Dentro dessa obra, [Shah e London \(1978\)](#) citam o trabalho de [Iqbal, Aggarwala e Fowler \(1969\)](#) e apresentam os dados encontrados por [Shah \(1975\)](#) em forma de tabela, além de representar graficamente esses dados para algumas quantidades adimensionais.

[Asako e Faghri \(1988\)](#) produziram um trabalho que englobou o estudo do escoamento na região de entrada do duto oblíquo, porém, para realizar esta análise, o autor primeiramente procedeu com a análise do escoamento totalmente desenvolvido por meio de uma transformação de coordenadas algébrica, de modo a transformar o domínio em um retângulo e assim solucionar o problema com uma técnica de escoamentos parabólicos tridimensionais. Dessa maneira, são apresentados gráficos, tabelas e campos de velocidade dos resultados obtidos.

O próximo artigo encontrado na literatura é datado 14 anos após o trabalho de [Asako e Faghri \(1988\)](#), no qual [Lee e Lee \(2002\)](#) estudam os coeficientes de troca de calor em um duto oblíquo com temperatura da parede constante. Nesse trabalho, [Lee e Lee \(2002\)](#) realizam o método da integral de Galerkin para obter o fator de atrito do duto e o campo de velocidades. Por fim, tabelam os resultados encontrados pelo método aplicado, variando o número de funções de base N utilizadas em sua aproximação e comparando-os com resultados divulgados por [Shah e London \(1978\)](#). Os valores apresentados na [Figura 2.3](#) concordam com aqueles encontrados por [Shah \(1975\)](#), porém para ângulos abaixo de 45° , há uma leve divergência.

$C_f Re$							
θ	$N = 3$	$N = 6$	$N = 10$	$N = 15$	$N = 21$	$N = 28$	Available data [4]
10	12.747	12.381	12.256	12.203	12.177	12.164	12.073
20	12.906	12.610	12.519	12.484	12.468	12.460	12.416
30	13.140	12.921	12.861	12.837	12.829	12.825	12.803
40	13.409	13.258	13.219	13.205	13.199	13.197	13.193
45	13.545	13.421	13.390	13.380	13.376	13.374	13.381
50	13.676	13.576	13.552	13.545	13.542	—	13.542
60	13.912	13.849	13.835	13.831	13.830	—	13.830
70	14.093	14.056	14.049	14.048	14.047	—	14.046
80	14.207	14.185	14.182	14.182	14.182	—	14.181
90	14.246	14.229	14.228	14.227	14.227	—	14.227

Figura 2.3: Valores de fRe computados para o duto oblíquo. Retirado de [Lee e Lee \(2002\)](#).

Após uma crescente necessidade de apresentar uma solução aproximada que resolva vá-

rios dutos com uma mesma abordagem [Bahrami, Yovanovich e Culham \(2007\)](#) propuseram um modelo de solução baseado na elipse, mostrando que o fRe utilizando a raiz de área como comprimento característico, ao contrário do diâmetro hidráulico que é comumente utilizado, pode ser aproximada por uma função do momento polar de inércia, da área e do perímetro da seção transversal do canal. Apesar de não apresentar um perfil de velocidades, [Bahrami, Yovanovich e Culham \(2007\)](#) apresentam uma equação que descreve o comportamento aproximado da curva de fRe para várias geometrias, dentre elas, o losango. No trabalho, é apresentada apenas graficamente a solução pelo novo método desenvolvido e os autores afirmam que há um erro máximo na ordem de 8%.

Em 2009, [Tamayol e Bahrami \(2009\)](#) retornam propondo uma solução analítica para o escoamento em diversos dutos baseado na equação que descreve a superelipse e na solução analítica do escoamento nessa geometria, com um caso particular e um caso geral, assim, resolvendo o escoamento de Hagen-Poiseuille nessa seção em função dos parâmetros da superelipse, sendo o losango um caso particular dessa geometria. Logo, com as condições de contorno impostas pelo losango, os autores encontram certos fatores da equação que fornece o campo de velocidades ([Figura 2.4](#)). Nesse artigo, são mostrados os coeficientes que governam o campo de velocidades do escoamento de Hagen-Poiseuille do duto oblíquo e um gráfico baseado nos dados de [Shah e London \(1978\)](#), essas conclusões são expostas na [Figura 2.5](#) e [Figura 2.6](#). Vale ressaltar que a configuração do campo de velocidades é baseado na solução da equação de Laplace em coordenadas polares.

$$u = A_1 + B \ln r + \frac{r^2}{4\mu} \left(\frac{dP}{dz} \right) + \sum_{k=1}^{\infty} (C_k r^k + D_k r^{-k})(E_k \cos k\theta + F_k \sin k\theta)$$

Figura 2.4: Equação que descreve o campo de velocidades e as constantes associadas. Retirado de [Tamayol e Bahrami \(2009\)](#).

	$n = 1, \text{ rhomboid}$						
	$\varepsilon = 0.2$	$\varepsilon = 0.25$	$\varepsilon = 0.4$	$\varepsilon = 0.5$	$\varepsilon = 0.6$	$\varepsilon = 0.8$	$\varepsilon = 1$
A_1	0.016	0.023	0.048	0.065	0.084	0.117	0.149
C_1	0.164	0.143	0.096	0.075	0.054	0.027	0.000
C_2	0.310	0.312	0.237	0.202	0.175	0.131	0.101
C_3	-0.820	-0.715	-0.251	-0.186	-0.063	-0.025	0.000
C_4	1.377	1.106	0.119	0.094	0.000	0.000	0.000
C_5	-1.253	-0.961	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
C_6	0.457	0.341	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

Figura 2.5: Coeficiente para a equação de dutos superelípticos. Retirado de [Tamayol e Bahrami \(2009\)](#).

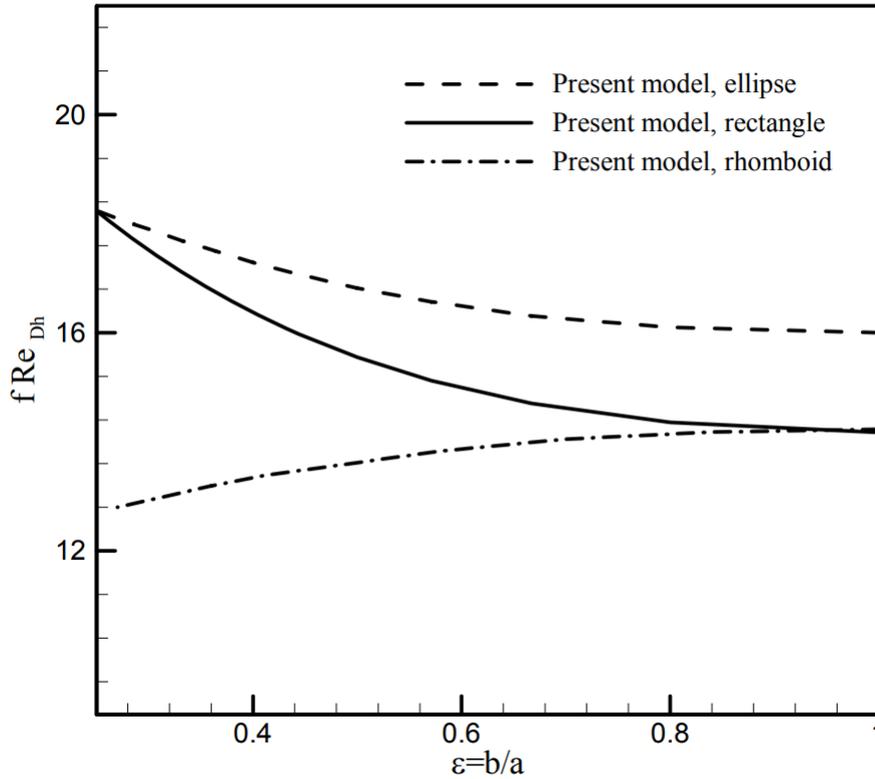


Figura 2.6: Parâmetro fRe para diferentes geometrias. Retirado de [Tamayol e Bahrami \(2009\)](#) e [Bahrami \(2010\)](#).

Um ano depois, [Bahrami \(2010\)](#) apresenta a mesma solução baseada na superelipse e corrige alguns fatores encontrados por [Tamayol e Bahrami \(2009\)](#), tal como mostrado na [Figura 2.7](#). Após a correção, os mesmos gráficos com os resultados expostos na [Figura 2.6](#) de [Tamayol e Bahrami \(2009\)](#) são mostrados.

	$\varepsilon=0.2$	$\varepsilon=0.25$	$\varepsilon=0.4$	$n=1$, rhombus $\varepsilon=0.5$	$\varepsilon=0.6$	$\varepsilon=0.8$	$\varepsilon=1$
A_1	0.015	0.022	0.046	0.064	0.082	0.116	0.147
C_1	0.167	0.149	0.106	0.083	0.062	0.028	0.000
C_2	0.356	0.344	0.242	0.189	0.154	0.114	0.091
C_3	-1.130	-0.996	-0.453	-0.228	-0.110	-0.026	0.000
C_4	2.026	1.771	0.766	0.357	0.152	0.029	0.010
C_5	-1.792	-1.588	-0.728	-0.354	-0.155	-0.011	0.000
C_6	0.607	0.548	0.270	0.139	0.066	0.000	0.000

Figura 2.7: Coeficiente para a equação de dutos superelípticos. Retirado de [Bahrami \(2010\)](#).

O último artigo da literatura acerca do escoamento em um duto oblíquo é datado de 2021. Nele, [Bennett \(2021\)](#) demonstra a solução do problema com fatores de correção para a solução de [Lévêque \(1928\)](#) em geometrias superelípticas, similar ao feito realizado por [Tamayol e Bahrami \(2009\)](#). Entretanto, nesse artigo são comparados os resultados tabelados de [Bennett \(2021\)](#) com os valores de [Shah e London \(1978\)](#) para o fator de atrito de Darcy. Os resultados estão exibidos na [Figura 2.9](#).

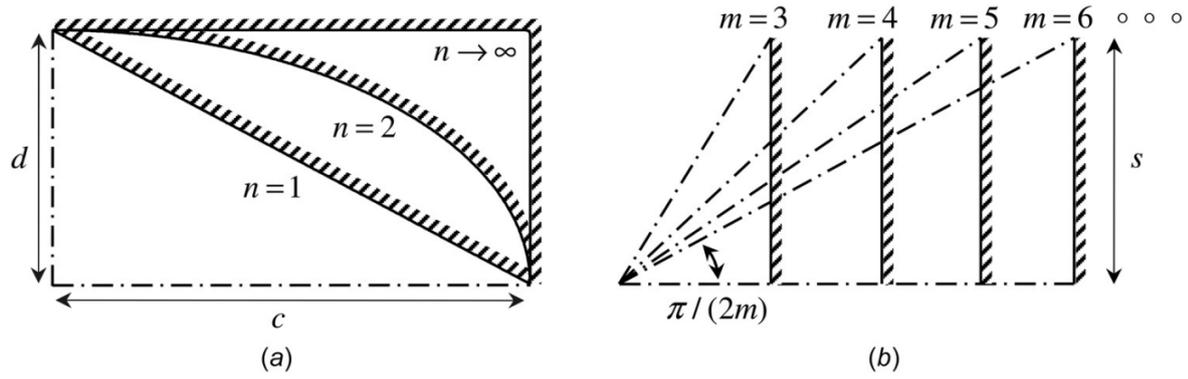


Figura 2.8: Superfícies e linhas de simetria para geometrias de dutos geradas com funções superelípticas e polinomiais. Retirado de [Bennett \(2021\)](#).

ε	ϕ_1	ϕ_2	fRe_D	Ref. [25]
1	0.93477	0.81731	56.908	56.908
0.95	0.93425	0.81299	56.892	—
0.9	0.93364	0.81120	56.842	—
$\tan(2\pi/9)$	0.93181	0.80374	56.726	56.724
0.8	0.93038	0.79868	56.615	—
3/4	0.92812	0.79081	56.428	—
0.7	0.92467	0.77856	56.185	56.184
2/3	0.92225	0.77068	55.988	—
0.6	0.91648	0.75265	55.507	—
$\tan(\pi/6)$	0.91472	0.74804	55.315	55.320
1/2	0.90494	0.71915	54.546	—
$\tan(5\pi/36)$	0.90041	0.70707	54.156	54.168
$\tan(\pi/8)$	0.89333	0.68942	53.489	53.524
0.4	0.89091	0.68321	53.294	—
$\tan(\pi/9)$	0.88553	0.67065	52.775	52.772
1/3	0.88055	0.65968	52.315	—
0.3	0.87539	0.64882	51.789	—
$\tan(\pi/12)$	0.87069	0.63926	51.271	51.212
1/4	0.86796	0.63394	50.978	—
1/5	0.86030	0.61965	50.164	—
$\tan(\pi/18)$	0.85732	0.61445	49.787	49.664
1/6	0.85646	0.61302	49.638	—
1/7	0.85335	0.60771	49.285	—
1/8	0.85096	0.60363	49.028	—
1/9	0.84956	0.60140	48.844	—
1/10	0.84846	0.59949	48.704	—
$\tan(\pi/36)$	0.84746	0.59803	48.556	48.292
1/50	0.84422	0.59343	48.038	—
1/100	0.84403	0.59314	48.001	—

Figura 2.9: Resultados do produto do fator de atrito de Darcy pelo número de Reynolds em função da tangente de metade do ângulo de abertura. Retirado de [Bennett \(2021\)](#).

Capítulo 3

Formulação matemática

Neste capítulo, é apresentada a formulação do problema estudado, um escoamento induzido por um gradiente de pressão em um duto de seção transversal losangular. Além disso, é realizada a adimensionalização das equações governantes e das condições de contorno utilizando um sistema de coordenadas adequado para auxiliar a descrição geométrica.

3.1 Enunciado do problema

Considere o escoamento laminar isotérmico de um fluido newtoniano, viscoso e incompressível através de um canal de seção transversal constante cuja geometria é um losango, com um ângulo interno β ($0^\circ \leq \beta \leq 90^\circ$) e um lado de comprimento 2ℓ , conforme ilustrado na Figura 3.1.

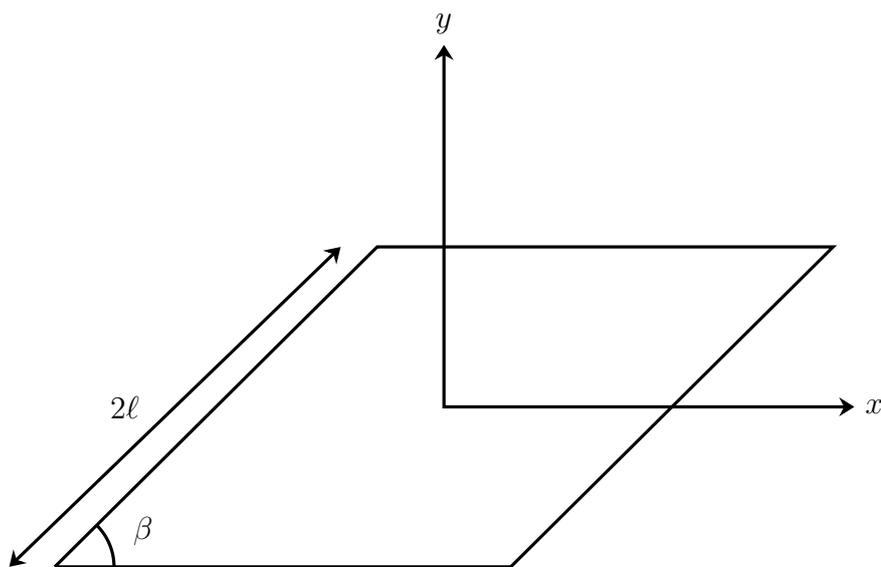


Figura 3.1: Representação da seção oblíqua.

Com estas considerações, as equações governantes do problema são a equação da continuidade

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (3.1)$$

e a equação de Navier-Stokes

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u}, \quad (3.2)$$

em que \mathbf{u} é o campo de velocidade, p é o campo de pressão, μ é a viscosidade dinâmica do fluido, ρ é a massa específica do fluido e t é o tempo.

Em coordenadas cartesianas (x, y, z) , a equação da continuidade (3.1) pode ser escrita como

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0, \quad (3.3)$$

e as componentes da equação de Navier-Stokes (3.2) nas direções x , y e z , são dadas por

$$\rho \left(\frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right), \quad (3.4)$$

$$\rho \left(\frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \right), \quad (3.5)$$

$$\rho \left(\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right), \quad (3.6)$$

respectivamente. Aqui u_x , u_y e u_z são as três componentes da velocidade.

Supondo escoamento permanente e unidirecional na direção positiva do eixo z , o campo de velocidades pode ser escrito como

$$\mathbf{u} = (0, 0, u_z(x, y, z)). \quad (3.7)$$

Assim, a equação da continuidade (3.3) se reduz à

$$\frac{\partial u_z}{\partial z} = 0, \quad (3.8)$$

e, conseqüentemente

$$u_z = u_z(x, y). \quad (3.9)$$

Dessa forma, têm-se que, além de unidirecional, o escoamento também é bidimensional.

Utilizando as equações (3.7) e (3.9) em (3.4), (3.5) e (3.6), obtêm-se

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad (3.11)$$

$$\mu \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial p}{\partial z}. \quad (3.12)$$

A partir das equações (3.10) e (3.11), conclui-se que

$$p = p(z), \quad (3.13)$$

e, portanto, (3.12) torna-se

$$\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dz}. \quad (3.14)$$

Sabe-se que a componente não nula da velocidade depende apenas das coordenadas x e y , enquanto o campo de pressão é uma função apenas de z . Logo, a equação (3.14) será verdadeira se, e somente se, ambos os lados dela forem iguais a uma mesma constante.

Considerando a região da seção transversal delimitada pelo losango como Ω , a condição de não escorregamento na parede exige que

$$u_z = 0 \quad (3.15)$$

em $\partial\Omega$, o bordo do domínio, que está representado pelas retas na Figura 3.2 .

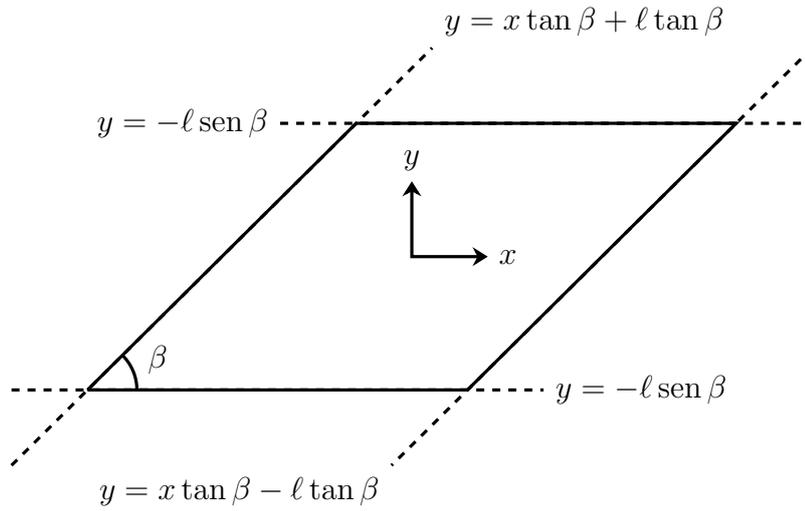


Figura 3.2: Representação das condições de contorno.

3.1.1 Vazão

A vazão é uma quantidade de fundamental importância no estudo de escoamento em dutos. Ao longo do trabalho, se mostrará essencial para a obtenção dos resultados, em particular no [Capítulo 4](#), em que ela será utilizada para calcular o produto do fator de atrito de Fanning pelo número de Reynolds. Logo, é necessário definir o cálculo dessa quantidade, que em coordenadas cartesianas é dada por

$$Q = \iint_{\Omega} u_z(x, y) dx dy. \quad (3.16)$$

3.2 Adimensionalização

Para tornar a equação analisada livre de parâmetros, realiza-se uma adimensionalização das grandezas características de posição e velocidade, mantendo-a inalterada em sua forma original como uma equação de Poisson. Substituindo

$$\tilde{x} = \frac{x}{\ell}, \quad \tilde{y} = \frac{y}{\ell}, \quad \tilde{u} = \frac{u_z}{U}, \quad (3.17)$$

na equação (3.14), obtém-se o resultado

$$\frac{\mu U}{\ell^2} \left(\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2} \right) = \frac{dp}{dz}. \quad (3.18)$$

Seguindo [Shah e London \(1978\)](#), escolhemos

$$U = -\frac{\ell^2}{\mu} \frac{dp}{dz}, \quad (3.19)$$

de modo que a equação anterior reduz-se a

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2} = -1. \quad (3.20)$$

Como foi assumido anteriormente que o escoamento ocorre na direção z positiva, o sinal negativo na equação (3.19) é imperativo para que essa condição seja satisfeita.

3.2.1 Produto do fator de atrito de Fanning e o número de Reynolds

Com o intuito de comparar os resultados obtidos com o de outros autores e avaliar a qualidade do método empregado, são utilizados dois grupos adimensionais, o produto do fator de atrito de Fanning e o número de Reynolds, e a razão $\frac{U_{\text{máx}}}{U_{\text{méd}}}$.

O produto do fator de atrito de Fanning e o número de Reynolds, também conhecido como número de Poiseuille, é uma constante de proporcionalidade entre o gradiente de pressão e a velocidade média. Desta forma, se considerarmos um determinado fluido escoando com velocidade invariante em dutos de mesmo diâmetro hidráulico, o gradiente de pressão aumenta se o número de Poiseuille aumentar (Neves, 2020).

O fRe é resultado de uma multiplicação do fator de atrito de Fanning pelo número de Reynolds, dois parâmetros muito utilizados na mecânica dos fluidos que oferecem uma perspectiva, por exemplo, para projetos de trocadores de calor compactos. Cengel e Cimbala (2013) definem o número de Reynolds para dutos de seção transversal não circular de modo

$$Re = \frac{\rho U_{\text{méd}} D_h}{\mu}, \quad (3.21)$$

em que $U_{\text{méd}}$ é a velocidade média do escoamento na entrada do duto e D_h é o diâmetro hidráulico utilizado para converter dutos não circulares em tubos circulares de diâmetro equivalente. Com essa definição, é possível calcular os parâmetros da mesma maneira que para um tubo circular (Connor, 2022).

Cengel e Cimbala (2013) definem o fator de atrito de Fanning em termos da queda de pressão como

$$f = \frac{\Delta P D_h}{2\rho L U_{\text{méd}}^2}, \quad (3.22)$$

em que ΔP é a diferença entre a pressão de entrada e saída do duto e L é o comprimento da tubulação. Dessa forma, multiplicando o fator de atrito pelo número de Reynolds, obtêm-se

$$fRe = \frac{\Delta P D_h^2}{2\mu L U_{\text{méd}}}. \quad (3.23)$$

Note que esse termo, apesar de adimensional, é escrito em função de quantidades dimensionais. Por isso, a fim de usar quantidades adimensionais para comparação, realizaremos a seguinte adimensionalização

$$\tilde{D}_h = \frac{D_h}{\ell}, \quad \tilde{U}_{\text{méd}} = \frac{U_{\text{méd}}}{U}. \quad (3.24)$$

Observa-se também que

$$\frac{\Delta p}{L} = -\frac{dp}{dz} \quad (3.25)$$

e, por conseguinte, a equação 3.19 pode ser reescrita como

$$U = \frac{\ell^2 \Delta p}{\mu L}. \quad (3.26)$$

Assim, substituindo as equações (3.25) e (3.26) em (3.23), segue que

$$fRe = \frac{\tilde{D}_h^2}{2\tilde{U}_{\text{méd}}}. \quad (3.27)$$

Portanto, utilizando a definição do diâmetro hidráulico e da velocidade média,

$$\tilde{D}_h = \frac{4\tilde{A}}{\tilde{P}}, \quad (3.28)$$

no qual \tilde{P} é o perímetro molhado (adimensional) da seção, ou seja, no bordo do domínio, e

$$\tilde{U}_{\text{méd}} = \frac{\tilde{Q}}{\tilde{A}}, \quad (3.29)$$

chegamos na forma adimensional final e mais simplificada do produto do fator de atrito de Fanning e o número de Reynolds

$$fRe = \frac{8\tilde{A}^3}{\tilde{P}^2 \tilde{Q}}. \quad (3.30)$$

3.2.2 Razão $\frac{\tilde{U}_{\text{máx}}}{\tilde{U}_{\text{méd}}}$

Outro grupo adimensional utilizado para avaliar os resultados é a razão da velocidade máxima (sendo localizada no centro geométrico, no caso do duto oblíquo) pela velocidade

média do escoamento, representada por $\frac{\tilde{U}_{\text{máx}}}{\tilde{U}_{\text{méd}}}$. Essa quantidade será utilizada posteriormente para comparação com os resultados reportados por [Shah e London \(1978\)](#). Essa razão indicará se o método empregado para obter o campo de velocidades está informando corretamente os valores ou se precisa ser ajustado, aumentando o número de pontos da malha, por exemplo.

De agora em diante, os tildes serão omitidos em todas as equações para evitar uma notação sobrecarregada. Assim, a menos que seja mencionado o contrário, todos os parâmetros e variáveis devem ser entendidos como adimensionais. Com os tildes agora omitidos, a equação (3.20) pode ser descrita de forma mais elegante como:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -1. \quad (3.31)$$

Observe que a equação (3.15) mantém sua forma original mesmo após a adimensionalização. Além de que o domínio é adimensionalizado, eliminando a unidade dimensional ℓ das retas, tal como é visto na [Figura 3.3](#).

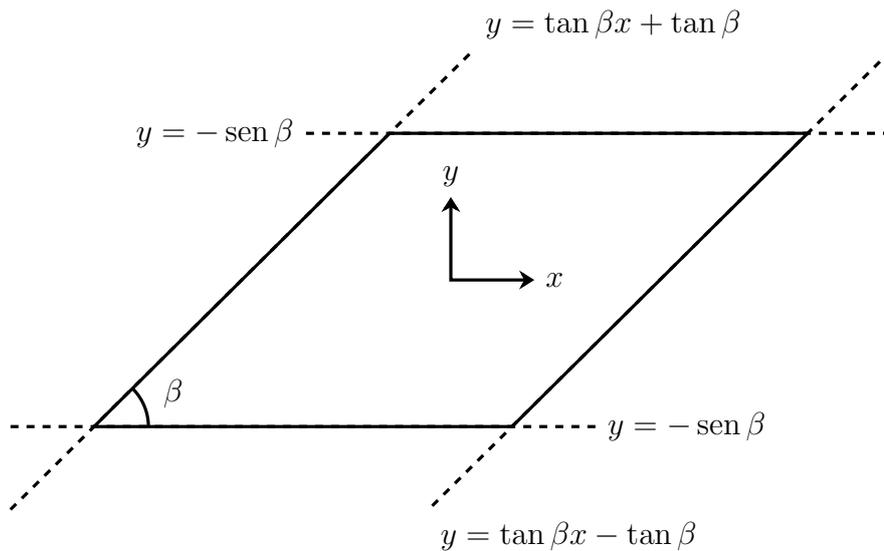


Figura 3.3: Representação das condições de contorno adimensionalizadas.

A equação governante do problema foi inicialmente descrita no sistema de coordenadas cartesianas, mas é interessante formular a equação também no sistema de coordenadas oblíquo, o qual será discutido detalhadamente na próxima seção.

3.3 Sistema de coordenadas oblíquo

Por conta de sua geometria bidimensional não convencional, o problema apresentado pode ser melhor representado a partir de um sistema de coordenadas oblíquo (ξ, η) , em opo-

sição ao tradicional sistema cartesiano (x, y) , conforme a [Figura 3.4](#). O intuito da mudança de coordenadas é transformar o domínio em um quadrado buscando definir um eixo de coordenadas paralelo aos lados do losango.

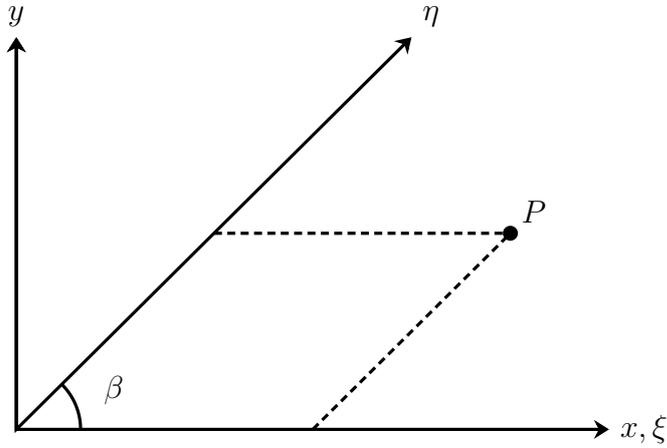


Figura 3.4: Eixo de coordenadas oblíquo.

Tal como visto por [Leissa \(1969\)](#), o sistema de coordenadas oblíquo é baseado no ângulo interno β , de tal forma que, as novas variáveis ξ e η , se relacionam com x e y da seguinte maneira

$$\begin{cases} \xi = x - y \cot \beta, \\ \eta = \frac{y}{\text{sen } \beta}. \end{cases} \quad (3.32)$$

A partir destas relações, pode-se mostrar que

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad (3.33)$$

e que

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \eta} = -\cot \beta \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{1}{\text{sen } \beta} \frac{\partial}{\partial \eta}. \quad (3.34)$$

Por fim, para representar a equação adimensionalizada [\(3.31\)](#) neste novo sistema de coordenadas, é preciso escrever o operador Laplaciano em coordenadas oblíquas. Utilizando [\(3.33\)](#) e [\(3.34\)](#), têm-se que

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad (3.35)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}, \quad (3.36)$$

e

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} = \left(-\cot \beta \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{1}{\operatorname{sen} \beta} \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \left(-\cot \beta \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{1}{\operatorname{sen} \beta} \frac{\partial}{\partial \eta} \right), \quad (3.37)$$

ou seja,

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \beta} \left(\cos^2 \beta \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - 2 \cos \beta \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right). \quad (3.38)$$

Logo,

$$\nabla^2 = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \beta} \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - 2 \cos \beta \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right). \quad (3.39)$$

Finalmente, a equação (3.31) é escrita da seguinte maneira em coordenadas oblíquas

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2 \cos \beta \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = -\operatorname{sen}^2 \beta. \quad (3.40)$$

Com as seguintes condições de contorno consequentes da condição de não escorregamento

$$u(\xi, \pm 1) = u(\pm 1, \eta) = 0. \quad (3.41)$$

Com a solução da equação (3.40), é possível obter uma função que descreve o campo de velocidades na seção transversal de um domínio quadrado, utilizando um sistema de coordenadas oblíquo. É importante destacar que essa solução incorpora um termo de derivada mista, decorrente da alteração do sistema de coordenadas em relação à equação (3.31). Essa etapa é essencial para a posterior discretização da malha por meio do método de diferenças finitas, que será detalhado na seção [Capítulo 4](#).

3.3.1 Vazão

Ao realizar a transformação do sistema de coordenadas cartesiano para o sistema de coordenadas oblíquo, é necessário considerar a alteração do elemento de área dA . Nesse sentido, o Jacobiano $|\mathbb{J}|$, determinante da matriz Jacobiana, desempenha um papel fundamental ao assegurar a compatibilidade entre os dois sistemas de coordenadas.

No caso do sistema de coordenadas oblíquo, com relação a ξ e η , o determinante Jacobiano é descrito por

$$|\mathbb{J}| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \\ \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \cos \beta \\ 0 & \operatorname{sen} \beta \end{vmatrix} = \operatorname{sen} \beta. \quad (3.42)$$

Assim, a equação (3.16) para a vazão no domínio analisado se torna

$$Q = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 u_z(\xi, \eta) |\mathbb{J}| \, d\xi \, d\eta = \text{sen } \beta \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 u_z(\xi, \eta) \, d\xi \, d\eta. \quad (3.43)$$

Capítulo 4

Método das diferenças finitas

Neste capítulo, será introduzida a metodologia aplicada para a resolução da equação governante do problema. O método das diferenças finitas é mostrado como técnica de obtenção do campo de velocidades e, posteriormente, é realizada uma integração em duas dimensões a fim de encontrar a vazão.

4.1 Método das diferenças finitas

O método das diferenças finitas é um procedimento de solução numérica de equações diferenciais que consiste em dividir o domínio da equação em um conjunto de pontos discretos e aproximar as derivadas por uma razão de diferenças utilizando expansões da série de Taylor, conforme [Anderson e Wendt \(1995\)](#). A técnica possui inúmeras aplicações, desde problemas de transferência de calor ([Raynaud e Bransier, 1986](#)), mecânica dos fluidos ([Sobral e Hinch, 2017](#)), mecânica dos sólidos ([Cruz e Souza, 2018](#)) até mecânica quântica ([Gray e Goldfield, 2001](#)).

Similar a outros métodos numéricos, o objetivo das diferenças finitas é substituir um problema em um meio contínuo com infinitos graus de liberdade por um campo discretizado regularmente com nós finitos. As derivadas parciais da função desconhecida são aproximadas pela diferença de quocientes no conjunto de pontos discretizados. A equação diferencial parcial original é então transformada em um conjunto de equações algébricas. A solução simultânea dessas equações é a solução aproximada do problema de valor de contorno. ([Zhou, 1993](#)).

Para resolver o problema do duto oblíquo, determina-se então uma malha quadriculada de $(N+2) \times (N+2)$ pontos, ou nós, igualmente espaçados na direção ξ e η para garantir uma qualidade dos resultados em ambas direções simetricamente. A divisão foi considerada com N sendo o número de pontos interiores, pois estes serão os pontos efetivamente calculados. Assim, $\Delta\eta$ e $\Delta\xi$ são definidos como o espaçamento em cada direção.

O domínio do problema, ao ser trocado para o sistema de coordenadas oblíquo, é repre-

sentado como $\Omega = [-1, 1] \times [-1, 1]$. Adota-se essa configuração para que o centro do eixo de coordenadas seja o ponto central do domínio, conforme [Figura 4.1](#).

Cada nó é definido pelos índices i e j que significam a posição da linha e coluna que cada ponto ocupa na malha.

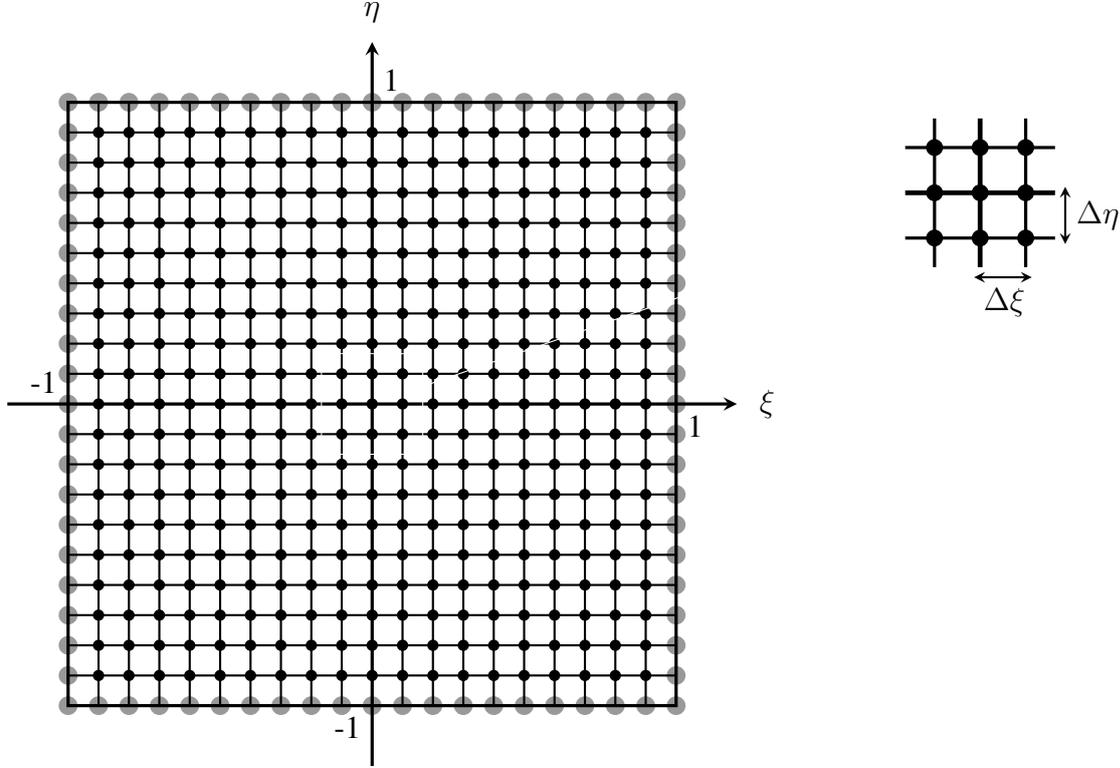


Figura 4.1: Representação da malha no quadrado.

Dada a discretização do domínio, a equação (3.40) precisa ser transformada em uma equação de diferenças finitas. Para esse fim, utilizaremos uma aproximação de segunda ordem centrada tanto para as segundas derivadas quanto para a derivada mista definidas por [Pedrola \(2015\)](#):

$$\left[\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \right]_{i,j} = \frac{u(\xi + h, \eta) - 2u(\xi, \eta) + u(\xi - h, \eta)}{h^2} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2}, \quad (4.1)$$

$$\left[\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \right]_{i,j} = \frac{u(\xi, \eta + k) - 2u(\xi, \eta) + u(\xi, \eta - k)}{k^2} = \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{k^2}, \quad (4.2)$$

$$\left[\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \right]_{i,j} = \frac{u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j-1} - u_{i-1,j+1} + u_{i-1,j-1}}{4hk}, \quad (4.3)$$

em que $h = \Delta \xi$ e $k = \Delta \eta$. Ademais, como o domínio é um quadrado, escolhamos h e k de tal forma que

$$h = k = \frac{2}{N+1}. \quad (4.4)$$

Aplicando as aproximações para as derivadas e discretização do domínio na equação (3.40), obtemos a seguinte equação de diferenças finitas:

$$-4u_{i,j} + u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - \frac{\cos \beta}{2} (u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j-1} - u_{i-1,j+1} + u_{i-1,j-1}) = -h^2 \sin^2 \beta. \quad (4.5)$$

Note que a equação (4.5) deve ser resolvida para cada um dos pontos internos, e que cada ponto depende da resolução para os 8 pontos ao redor deste. Assim, é necessário resolver um sistema linear da forma $\mathbf{A}\mathbf{b} = \mathbf{x}$ em que \mathbf{A} é a matriz de coeficientes, \mathbf{b} é o vetor coluna de incógnitas respectivo a velocidade em cada ponto e \mathbf{x} é o vetor coluna resposta dos termos independentes.

Devido a aderência do fluido no contorno da seção, a velocidade no bordo é nula, ou seja, nos pontos de contorno a velocidade é conhecida. Portanto, a partir da definição adotada, a matriz \mathbf{A} contém em suas linhas apenas os coeficientes referentes aos pontos interiores, logo, possui dimensão $N^2 \times N^2$. Da mesma maneira, o vetor \mathbf{b} e o vetor \mathbf{x} têm dimensão $N^2 \times 1$.

A vantagem do método é tal que ao transformar a equação diferencial parcial, reduzimos a complexidade das operações matemáticas necessárias para solucionar esse tipo de problema a uma complexidade computacional para solucionar sistemas lineares.

4.1.1 Matriz dos coeficientes

A matriz dos coeficientes contém os termos que multiplicam os valores de velocidade na equação de diferenças finitas. A partir disso, pode-se notar que, no máximo, nove elementos não nulos compõem a linha referente a velocidade de um ponto. Com isso em vista, a quantidade de elementos nulos será maior ao aumentar o número de pontos na malha. A esse tipo de matriz atribui-se o nome de matriz esparsa.

Ao analisar mais profundamente a matriz, é notável a presença de padrões e simetrias em suas diagonais. Essas repetições foram utilizadas para organizar o código de diferenças finitas, que depende fortemente da construção de \mathbf{A} . Para explicar o raciocínio utilizado, será demonstrado o caso de uma matriz com $N = 3$.

$$\begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 & 1 & -\frac{\cos \beta}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & \frac{\cos \beta}{2} & 1 & -\frac{\cos \beta}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & \frac{\cos \beta}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{\cos \beta}{2} & 0 & -4 & 1 & 0 & 1 & -\frac{\cos \beta}{2} & 0 \\ -\frac{\cos \beta}{2} & 1 & \frac{\cos \beta}{2} & 1 & -4 & 1 & \frac{\cos \beta}{2} & 1 & -\frac{\cos \beta}{2} \\ 0 & -\frac{\cos \beta}{2} & 1 & 0 & 1 & -4 & 0 & \frac{\cos \beta}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{\cos \beta}{2} & 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\cos \beta}{2} & 1 & \frac{\cos \beta}{2} & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\cos \beta}{2} & 1 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}. \quad (4.6)$$

A diagonal principal é constituída apenas de -4 ao longo de sua extensão e possui N^2 termos. Na equação (4.5) ela representa o coeficiente do ponto analisado $u_{i,j}$. Logo, esse coeficiente sempre estará presente na equação.

$$\begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 & 1 & -\frac{\cos \beta}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & \frac{\cos \beta}{2} & 1 & -\frac{\cos \beta}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & \frac{\cos \beta}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{\cos \beta}{2} & 0 & -4 & 1 & 0 & 1 & -\frac{\cos \beta}{2} & 0 \\ -\frac{\cos \beta}{2} & 1 & \frac{\cos \beta}{2} & 1 & -4 & 1 & \frac{\cos \beta}{2} & 1 & -\frac{\cos \beta}{2} \\ 0 & -\frac{\cos \beta}{2} & 1 & 0 & 1 & -4 & 0 & \frac{\cos \beta}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{\cos \beta}{2} & 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\cos \beta}{2} & 1 & \frac{\cos \beta}{2} & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\cos \beta}{2} & 1 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}. \quad (4.7)$$

As diagonais diretamente acima e abaixo da diagonal representam os coeficientes dos pontos $u_{i+1,j}$ e $u_{i-1,j}$, portanto, quando analisamos um ponto que se encontra na extremidade esquerda ou direita da malha, um termo será nulo. Assim, o padrão que encontramos nessa diagonal é de $N - 1$ termos 1 seguidos de um 0, repetido ao longo da extensão da mesma.

$$\begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 & 1 & -\frac{\cos \beta}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & \frac{\cos \beta}{2} & 1 & -\frac{\cos \beta}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & \frac{\cos \beta}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{\cos \beta}{2} & 0 & -4 & 1 & 0 & 1 & -\frac{\cos \beta}{2} & 0 \\ -\frac{\cos \beta}{2} & 1 & \frac{\cos \beta}{2} & 1 & -4 & 1 & \frac{\cos \beta}{2} & 1 & -\frac{\cos \beta}{2} \\ 0 & -\frac{\cos \beta}{2} & 1 & 0 & 1 & -4 & 0 & \frac{\cos \beta}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{\cos \beta}{2} & 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\cos \beta}{2} & 1 & \frac{\cos \beta}{2} & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\cos \beta}{2} & 1 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}. \quad (4.8)$$

Os coeficientes dos pontos $u_{i,j+1}$ e $u_{i,j-1}$, ou seja, os pontos acima e abaixo do ponto

analisado, estão a uma distância de N pontos da diagonal principal. Dessa maneira, vemos que sempre há um ponto acima ou abaixo, sem interrupções ao longo da malha. Consequentemente, essa diagonal será composta completamente de $N^2 - N$ termos de valor 1.

$$\begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 & 1 & -\frac{\cos \beta}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & \frac{\cos \beta}{2} & 1 & -\frac{\cos \beta}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & \frac{\cos \beta}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{\cos \beta}{2} & 0 & -4 & 1 & 0 & 1 & -\frac{\cos \beta}{2} & 0 \\ -\frac{\cos \beta}{2} & 1 & \frac{\cos \beta}{2} & 1 & -4 & 1 & \frac{\cos \beta}{2} & 1 & -\frac{\cos \beta}{2} \\ 0 & -\frac{\cos \beta}{2} & 1 & 0 & 1 & -4 & 0 & \frac{\cos \beta}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{\cos \beta}{2} & 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\cos \beta}{2} & 1 & \frac{\cos \beta}{2} & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\cos \beta}{2} & 1 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}. \quad (4.9)$$

Nas diagonais $N - 1$ pontos distantes da diagonal principal se localizam os coeficientes referentes a diagonal superior esquerda $u_{i-1,j+1}$ e inferior direita $u_{i+1,j-1}$ do ponto analisado. O padrão presente nas diagonais é o primeiro termo nulo e $\frac{\cos \beta}{2}$ se repetindo por $N - 1$ pontos, de maneira semelhante ao que acontece nas diagonais diretamente acima e abaixo da diagonal principal, com um padrão de N termos.

$$\begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 & 1 & -\frac{\cos \beta}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & \frac{\cos \beta}{2} & 1 & -\frac{\cos \beta}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & \frac{\cos \beta}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{\cos \beta}{2} & 0 & -4 & 1 & 0 & 1 & -\frac{\cos \beta}{2} & 0 \\ -\frac{\cos \beta}{2} & 1 & \frac{\cos \beta}{2} & 1 & -4 & 1 & \frac{\cos \beta}{2} & 1 & -\frac{\cos \beta}{2} \\ 0 & -\frac{\cos \beta}{2} & 1 & 0 & 1 & -4 & 0 & \frac{\cos \beta}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{\cos \beta}{2} & 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\cos \beta}{2} & 1 & \frac{\cos \beta}{2} & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\cos \beta}{2} & 1 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}. \quad (4.10)$$

Já nas diagonais $N + 1$ pontos distantes da principal, $-\frac{\cos \beta}{2}$ se repete $N - 1$ pontos e logo após, há um único valor nulo. Comparando com o padrão das diagonais mais próximas a diagonal principal, apenas o valor que aparece nelas é alterado. Esses valores são referentes aos coeficientes das diagonais superior direita e inferior esquerda do ponto analisado, ou seja, $u_{i+1,j+1}$ e $u_{i-1,j-1}$.

4.1.2 Vetor de incógnitas

O vetor de incógnitas contém os termos de velocidade em cada ponto da malha, portanto, tem dimensão $N^2 \times 1$. Os pontos do vetores estão organizados com seu primeiro valor $u_{0,0}$ sendo o nó extremo no canto inferior esquerdo da malha discretizada e os pontos subsequentes

tes aumentando em ordem crescente das colunas até alcançar seu valor máximo $(N - 1)$, a partir do qual é avaliada a próxima linha da mesma maneira até atingir o ponto superior esquerdo da malha $u_{N-1,N-1}$. A equação (4.11) apresenta a estrutura do vetor de incógnitas \mathbf{b} .

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} u_{0,0} \\ u_{1,0} \\ u_{2,0} \\ \vdots \\ u_{N-1,0} \\ u_{0,1} \\ u_{1,1} \\ \vdots \\ u_{N-2,N-1} \\ u_{N-1,N-1} \end{pmatrix}. \quad (4.11)$$

4.1.3 Vetor resposta

O vetor resposta é resultado da multiplicação da matriz dos coeficientes pelo vetor de incógnitas, sendo assim, sua dimensão deve ser de $N^2 \times 1$. O vetor é constituído apenas dos termos independentes $-(h \operatorname{sen} \beta)^2$, pois todos os pontos tem a mesma equação de diferenças finitas. A equação (4.12) mostra como está estruturado esse vetor.

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -(h \operatorname{sen} \beta)^2 \\ -(h \operatorname{sen} \beta)^2 \\ \vdots \\ -(h \operatorname{sen} \beta)^2 \end{pmatrix}. \quad (4.12)$$

4.2 Integração numérica

A integração numérica é um processo de aproximação no cálculo de integrais definidas usando técnicas numéricas. No geral, a integração numérica é baseada na interpolação das funções integradas por polinômios de primeiro ou segundo grau e o cálculo da área em pequenos intervalos. Devido à interpolação, há um erro numérico associado a essa aproximação que depende do grau do polinômio escolhido e da número de pontos utilizados na divisão dos intervalos. Portanto, com a finalidade de diminuir os erros numéricos associados à integração, foi escolhida a regra de Simpson.

A regra de Simpson é baseada na interpolação da função escolhida por um polinômio de segundo grau dividindo o domínio em um número par $n - 1$ de partições, ou seja, com um número ímpar n de pontos na malha (Atkinson, 1991). O polinômio é aproximado no ponto a cada par de partições, e a integral é simplificada da seguinte maneira

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + \dots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)], \quad (4.13)$$

sendo $h = \frac{b-a}{n-1}$ o tamanho da malha na direção x e $x_i = a + ih$ para $i = 0, 1, \dots, n-1, n$. No caso dessa aproximação, o erro local associado é da ordem de $\mathcal{O}(h^4)$ como demonstrado por [Burden e Faires \(2010\)](#). Nota-se que também é possível definir a integral de forma vetorial de modo

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3} \mathbf{c} \mathbf{f}^T, \quad (4.14)$$

em que $\mathbf{c} = [142 \dots 241]$ é o vetor linha com os coeficientes e $\mathbf{f} = [f(x_0) f(x_1) f(x_2) \dots f(x_{n-2}) f(x_{n-1}) f(x_n)]$ é o vetor linha com o valor da função nos pontos analisados, que é transposto para gerar o resultado obtido na equação (4.13). Essa interpretação é valiosa para a implementação numérica, pois a criação de matrizes é mais rápida se comparada com a iteração que seria necessária para realizar um somatório.

Para estender o conceito da regra de Simpson a duas dimensões, primeiro, precisamos definir o tamanho da malha na direção y , dada por $k = \frac{d-c}{n-1}$, adotando o mesmo número de pontos em ambas as direções, com $y_j = c + jk$ para $j = 0, 1, \dots, n-1, n$.

Estabelecidas as divisões em x e y , temos uma malha de $n \times n$ pontos. Dessa maneira, a integral dupla pode ser dividida na integral iterada

$$I = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx, \quad (4.15)$$

na qual a regra de Simpson deve ser aplicada duas vezes. [Burden e Faires \(2010\)](#) relatam o resultado dessa integração como

$$\begin{aligned} I \approx \frac{hk}{9} & \left\{ \left[f(x_0, y_0) + 2 \sum_{i=1}^{(n/2)-1} f(x_{2i}, y_0) + 4 \sum_{i=1}^{(n/2)} f(x_{2i-1}, y_0) + f(x_n, y_0) \right] \right. \\ & + 2 \left[\sum_{j=1}^{(m/2)-1} f(x_0, y_{2j}) + 2 \sum_{j=1}^{(m/2)-1} \sum_{i=1}^{(n/2)-1} f(x_{2i}, y_{2j}) \right. \\ & \left. \left. + 4 \sum_{j=1}^{(m/2)-1} \sum_{i=1}^{(n/2)} f(x_{2i-1}, y_{2j}) + \sum_{j=1}^{(m/2)-1} f(x_n, y_{2j}) \right] \right. \\ & \left. + 4 \left[\sum_{j=1}^{(m/2)} f(x_0, y_{2j-1}) + 2 \sum_{j=1}^{(m/2)} \sum_{i=1}^{(n/2)-1} f(x_{2i}, y_{2j-1}) \right] \right\} \quad (4.16) \end{aligned}$$

$$+ 4 \left[\sum_{j=1}^{(m/2)} \sum_{i=1}^{(n/2)} + f(x_{2i-1}, y_{2j-1}) + \sum_{j=1}^{(m/2)} f(x_n, y_{2j-1}) \right] \\ + \left[f(x_0, y_m) + 2 \sum_{i=1}^{(n/2)-1} f(x_{2i}, y_m) + 4 \sum_{i=1}^{(n/2)} f(x_{2i-1}, y_m) + f(x_n, y_m) \right] \Bigg\}.$$

Assim sendo, é perceptível também que o mesmo raciocínio de vetorização empregado na integração em uma dimensão pode ser aplicado na integração 2D. Entretanto, devido à adição de uma dimensão ao problema não serão utilizados vetores na descrição, mas sim matrizes:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & \dots & 2 & 4 & 1 \\ 4 & 16 & 8 & \dots & 8 & 16 & 4 \\ 2 & 8 & 4 & \dots & 4 & 8 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 2 & 8 & 4 & \dots & 4 & 8 & 4 \\ 4 & 16 & 8 & \dots & 8 & 16 & 2 \\ 1 & 4 & 2 & \dots & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad (4.17)$$

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} f(x_0, y_0) & f(x_1, y_0) & \dots & f(x_{n-1}, y_0) & f(x_n, y_0) \\ f(x_0, y_1) & f(x_1, y_1) & \dots & f(x_{n-1}, y_1) & f(x_n, y_1) \\ f(x_0, y_2) & f(x_1, y_2) & \dots & f(x_{n-1}, y_2) & f(x_n, y_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ f(x_0, y_{n-2}) & f(x_1, y_{n-2}) & \dots & f(x_{n-1}, y_{n-2}) & f(x_n, y_{n-2}) \\ f(x_0, y_{n-1}) & f(x_1, y_{n-1}) & \dots & f(x_{n-1}, y_{n-1}) & f(x_n, y_{n-1}) \\ f(x_0, y_n) & f(x_1, y_n) & \dots & f(x_{n-1}, y_n) & f(x_n, y_n) \end{pmatrix}, \quad (4.18)$$

em que \mathbf{S} é a matriz dos coeficientes de Simpson e \mathbf{F} é a matriz com os valores da função em cada ponto. Dessa forma, a integral dupla é reescrita como

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx \approx \frac{hk}{9} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (S_{ij} F_{ij}). \quad (4.19)$$

De acordo com [Bregains et al. \(2004\)](#), o erro dessa aproximação é de $\mathcal{O}(h^4) + \mathcal{O}(k^4)$. Neste trabalho, o uso da integração numérica se dará para o cálculo da vazão do campo de velocidades dado pela equação (3.16). Nesse sentido, utilizando a regra de Simpson em duas dimensões para expressar a integral da vazão no sistema de coordenadas cartesiano, obtém-se

$$\mathcal{Q} \approx \frac{hk}{9} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (S_{ij} U_{ij}), \quad (4.20)$$

em que U_{ij} é o campo de velocidades discretizado.

Para facilitar a integração, realizaremos o mesmo procedimento de (4.20) agora no sis-

tema de coordenadas oblíquo. Para isso, nota-se que o Jacobiano (3.42) não depende das coordenadas ξ ou η , logo, este pode ser separado da integral, simplificando a resolução do problema. Assim, a expressão final para a vazão é

$$Q \approx \frac{hk}{9} |\mathbb{J}| \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (S_{ij} U_{ij}). \quad (4.21)$$

4.3 Metodologia numérica

Para o desenvolvimento do código e obtenção dos resultados numéricos, foi utilizada a linguagem Python 3.9 no ambiente Colab em conjunto com algumas bibliotecas que serão explicadas posteriormente. O uso da linguagem se justifica pela qualidade e tempo de execução das bibliotecas de código aberto para resolução de sistemas lineares com matrizes esparsas. Além de que a simplicidade de escrita e interpretação facilita a reprodutibilidade do código.

Nesta seção, cada etapa do programa será comentada, guiando à solução do problema, partindo da definição das bibliotecas utilizadas no programa e a entrada dos dados fundamentais para cada caso.

4.3.1 Bibliotecas e inputs

```

1  '''Imports'''
2  !pip install pyamg
3  import pyamg
4  import numpy as np
5  from numpy import savetxt
6  import matplotlib.pyplot as plt
7  import scipy as sp
8  from scipy import linalg
9  from scipy.sparse.linalg import spsolve, lgmres, inv
10 from scipy.sparse import csr_matrix, diags, lil_matrix, dia_matrix,
    csc_matrix
11
12 '''Inputs'''
13
14 n = 2001    #Número de pontos em uma fileira
15 B = 45     #Ângulo de abertura em graus

```

Listagem 4.1: Realização dos imports e inputs do código.

Cada um dos imports foi pensado de modo a melhorar a eficiência do código e gerar valores mais precisos. Nesta parte, os imports mais importantes são o numpy e o scipy. A biblioteca numpy é responsável pela parte da manipulação de matrizes e vetores, oferecendo funcionalidades de criação, modificação e operações algébricas com capacidade computa-

cional similar às linguagens como C e Fortran. A biblioteca `scipy` serve como apoio ao `numpy` para realização de operações com matrizes esparsas com o módulo `scipy.linalg`. O `scipy.linalg` contém todas funções do `numpy.linalg` com a vantagem de apresentar maneiras de transformar as matrizes criadas no `numpy` em matrizes esparsas e resolver o sistema linear com maior quantidade de pontos. O desenvolvimento do `scipy` é suportado pelas rotinas LAPACK/BLAS escritas em Fortran, por esse motivo, conseguem oferecer velocidades de execução similares as de um código compilado. Vale ressaltar que ambas bibliotecas permitem acesso ao código-fonte de cada módulo, com o qual foi possível executar a rotina e garantir a validade dos resultados.

Os valores de β e N são inicializados nas variáveis `B` e `n`, respectivamente. A leitura das variáveis determina o tamanho das matrizes do sistema linear e a característica de seus termos.

4.3.2 Construção da matriz dos coeficientes

Definidos os valores de entrada, busca-se montar e implementar a matriz de coeficientes `A` apresentada na seção 4.1.1. Conforme dito, a matriz `A` é constituída de $N^2 \times N^2$ termos, sendo esparsa e simétrica ao longo da diagonal principal. Essa definição é importante para direcionar a implementação. As etapas para a construção da matriz seguem a seguinte ordem:

1. Construção do vetor diagonal principal.
2. Construção do vetor diagonal 1 elemento acima e abaixo da diagonal principal.
3. Construção do vetor diagonal N elementos acima e abaixo da diagonal principal.
4. Construção do vetor diagonal $N + 1$ elementos acima e abaixo da diagonal principal.
5. Construção do vetor diagonal $N - 1$ elementos acima e abaixo da diagonal principal.

```

16 def matriz(n,B):      #Procedimento para criar a matriz
17
18     Principal = np.full(n**2,-2**2)  #Diagonal principal com elementos -4
19
20     Onedist = np.ones(n**2-1)
21
22     for i in range(n**2-1):
23         if (i+1)%n==0:
24             Onedist[i]=0  #Elementos unitários da diagonal superior e inferior
25                             (1 e -1)
26
27     Ndist = np.ones(n**2-n)  #Elementos unitários da diagonal n superior e
28                             inferior (n e -n)
29
30     Nm1dist = np.full(n**2-(n-1), np.float64(np.cos(B*np.pi/180)/2))

```

```

29
30
31 for i in range(n**2-(n-1)):
32     if i%n==0:
33         Nm1dist[i]=0    #Elementos da diagonal superior e inferior ((n-1) e
34                             -(n-1))
35
36 Np1dist = np.full(n**2-(n+1), - np.float64(np.cos(B*np.pi/180)/2))
37
38 for i in range(n**2-(n+1)):
39     if (i+1)%n==0:
40         Np1dist[i]=0    #Elementos da diagonal superior e inferior ((n+1) e
41                             -(n+1))
42
43 diagonals = [Principal , Onedist , Onedist , Nm1dist , Nm1dist , Ndist , Ndist ,
44             Np1dist , Np1dist]
45 offset = [0,1,-1,(n-1),-(n-1),n,-n,(n+1),-(n+1)]
46
47 A = diags(diagonals , offset)
48
49 return A

```

Listagem 4.2: Criação da matriz dos coeficientes.

A primeira linha de código estabelece uma função, um trecho de código específico que, após sua definição, pode ser chamado várias vezes ao longo do código. A função matriz depende apenas da quantidade de termos e do ângulo de abertura, por ser uma matriz quadrada com a mesma estrutura de estêncil em todos os pontos. A princípio, é importante ressaltar que a definição da função matriz se torna necessária para automatizar a geração dos gráficos produzidos no [Capítulo 6](#).

A estrutura de criação da matriz foi elaborada pensando na lógica das diagonais que a compõem. A fim de facilitar esse processo, a função `diags` da biblioteca `scipy` foi utilizada. Seus inputs são uma lista de listas das diagonais e a distância que cada diagonal está em relação a diagonal principal, o *offset*.

A lista de listas das diagonais é composta por 5 diagonais diferentes. A primeira diagonal é a diagonal principal e esta é facilmente criada por ser uma lista cheia com N^2 elementos com valor igual a -4 e *offset* nulo.

A diagonal 1 elemento acima e abaixo da diagonal principal é criada inteiramente com o número 1. Por este motivo, foi usada a função `ones` que fornece uma lista com $N^2 - 1$ termos iguais a 1. Dentro dessa lista, a cada N termos, é inserido um valor de 0, que no programa é representado por um *if* com condição de resto da divisão. Seu *offset* é, respectivamente, 1 e -1 , para a diagonal diretamente acima e para a diagonal diretamente abaixo da diagonal principal.

A diagonal N elementos distante da diagonal principal é composta de $N^2 - N$ termos

iguais a 1. Desse modo, para sua definição, a função ones foi utilizada, com offset igual a N e $-N$.

A diagonal $N - 1$ elementos acima e abaixo da diagonal principal contém $N^2 - (N - 1)$ termos. Sua criação é feita de maneira similar às diagonais diretamente acima e abaixo da diagonal principal, pois há um padrão de repetição a cada N termos. Primeiramente, é definida uma lista cheia com valores $\frac{\cos\left(\beta\frac{\pi}{180}\right)}{2}$, o que se dá pelo fato de que β representa o ângulo de abertura do losango em graus. Então, um *if* é usado para definir o primeiro termo igual a 0 e repetir esse padrão a cada N repetições.

A diagonal $N + 1$ elementos distante da diagonal principal tem a mesma base de criação da diagonal diretamente acima da diagonal principal, com o mesmo padrão de repetição. A única diferença é o termo que é incluído na lista, $-\frac{\cos\left(\beta\frac{\pi}{180}\right)}{2}$. Este valor se repete a cada $N - 1$ termos, seguido de um 0, em uma lista com $N^2 - (N + 1)$ componentes.

4.3.3 Armazenamento da matriz dos coeficientes

A matriz dos coeficientes é armazenada em uma variável A a fim de realizarmos a solução do sistema linear e mudanças posteriores. Após sua declaração, a matriz A deve ser transformada em uma matriz de formato CSR. O formato CSR (Compressed Sparse Row) é um tipo de armazenamento de matrizes esparsas que arquiva apenas valores não nulos e suas respectivas posições. Essa alteração de formato da matriz A é essencial para a solução do sistema linear pela função `spsolve` do `scipy`, reduzindo a execução do programa de dezenas de minutos a poucos segundos.

```
47 A = matriz(n,B)
48 A = csr_matrix(A)
```

Listagem 4.3: Instauração da variável da matriz de coeficientes e mudança de formato.

4.3.4 Criação do vetor resposta

Para definir o vetor resposta, primeiro é preciso saber o tamanho da malha, e este é definido como $h = \frac{2}{n + 1}$, conforme a equação (4.4).

O vetor resposta é uma lista com todos termos iguais, assim, sua declaração é realizada com a função *full*, com n^2 elementos iguais a $-\left(h \operatorname{sen}\left(B\frac{\pi}{180}\right)\right)^2$. Na função é inserido um tipo especial de dado para aumentar a precisão do seno para ângulos pequenos em que seu valor é próximo de 0, fato que pode ser uma fonte de erros no resultado.

```
49 h = 2/(n+1)
```

```
50 b = np.full(n**2, -np.sin(B*np.pi/180)**2 * h**2, dtype = np.float64)
```

Listagem 4.4: Determinação do tamanho da malha e vetor resposta b

4.3.5 Solução do sistema linear

Para solucionar o sistema linear, usamos a função `spsolve` da biblioteca `scipy` e do módulo `sparse`. Com base em seu código fonte, nota-se que função resolve o sistema de equações utilizando decomposição LU, *a decomposição LU é uma técnica muito utilizada pela maioria dos pacotes para otimização linear, equivalente à eliminação de Gauss, procedimento útil quando se trata de sistemas lineares gerais esparsos de grande porte* (Silva, Arenales e Sousa, 2007).

Seu funcionamento é tal como descrito por Luca (2020), *a decomposição LU (lower and upper) tem como procedimento a fatoração de uma matriz não singular, que é a matriz inicial, como o produto de uma matriz triangular inferior (lower) e uma matriz triangular superior (upper). Esta decomposição é utilizada em análises numéricas para resolver sistemas de equações mais eficientes.*

```
51 x = spsolve(A, b)
```

Listagem 4.5: Resolução do sistema linear pela decomposição LU.

4.3.6 Rearranjo do vetor de incógnitas

Ao solucionar o sistema de equações, sua estrutura está orientada da maneira descrita na Subseção 4.1.3. Assim, é preciso manipular o vetor de modo que ele se disponha conforme a malha de diferenças finitas discretizada.

A função `split` se encarrega de separar os elementos do vetor x em uma matriz velocidade com n linhas igualmente espaçadas, ordenadas de cima para baixo, ou seja, ao contrário do que foi feito na malha. Assim, é necessário refletir a matriz velocidade horizontalmente. A função `flip` então realiza essa reflexão em torno do eixo x , ou *axis 0* no caso do Python.

Após essas modificações na matriz velocidade, temos todos os pontos interiores da malha organizados de acordo com a discretização adotada, faltando apenas os pontos de fronteira. Sabe-se que os pontos de fronteira tem velocidade nula devido a condição de não escorregamento, logo, para definir completamente a matriz velocidade, resta apenas inserir valores 0 ao redor da mesma.

A função `pad` realiza a adição de uma camada externa de valores em uma matriz, que, no caso analisado são elementos nulos. Para isso, definimos o modo de adição de valores como constante, utilizando apenas zeros. Também define-se uma camada de espessura de um componente, completando a malha de diferenças finitas.

```

52 velocidade = np.split(x,n)
53 velocidade = np.flip(velocidade,0)
54 velocidade = np.pad(velocidade, pad_width=1, mode='constant',
    constant_values=0)

```

Listagem 4.6: Organização do vetor de incógnitas na estrutura final da malha.

4.3.7 Integração numérica

Como pode ser visto na matriz (4.17), há uma repetição entre as fileiras da matriz dos coeficientes de Simpson. Se interpretado como se a primeira linha representasse um vetor, a segunda seria o quádruplo desse vetor, posicionado diretamente abaixo dele e a terceira seria o dobro da primeira, diretamente abaixo da segunda linha.

Na integração numérica, foi criada apenas uma fileira de padrão $[1\ 4\ 2\ \dots\ 2\ 4\ 1]$. Primeiro é definido um vetor de $n + 2$ termos nulos e são colocados elementos 2 nos índices pares e elementos 4 nos índices ímpares. Então, nas bordas são inseridos elementos 1 para finalizar a fileira1.

A segunda fileira é declarada como a multiplicação da fileira1 por 4 e a fileira 3 como o produto da fileira1 por 2. Dessa maneira, a matriz pesos é criada colocando alternadamente a fileira2 e fileira3 abaixo da fileira1.

Esse procedimento de criação de matriz foi escolhido pela facilidade de implementação se comparado ao método de somatório descrito em (4.16). Em testes realizados, para um valor alto de n , o método de integração pela criação da matriz se mostrou mais rápido se comparado a iteração por *fors*, indicando a superioridade da biblioteca numpy comparadas ao Python puro.

```

55 j=n+2
56
57 fileira1 = np.array(np.zeros(j))
58 fileira1[::2] = 2
59 fileira1[1::2] = 4
60 fileira1[0] = 1
61 fileira1[j-1] = 1
62
63 fileira2 = fileira1 * 4
64 fileira3 = fileira1 * 2
65
66 pesos = fileira1
67 for i in range(j-1):
68     if i%2==0:
69         pesos = np.vstack((pesos, fileira2))
70     if i%2==1:
71         pesos = np.vstack((pesos, fileira3))
72

```

```
73 pesos[j-1] = fileira1
```

Listagem 4.7: Definição de uma função para gerar a matriz dos coeficientes de Simpson.

4.3.8 Cálculo da vazão

O cálculo da vazão é realizado conforme a equação (4.21), na qual \mathbf{S} é a matriz pesos, \mathbf{U} é a matriz velocidade e $\sin\left(\frac{B\pi}{180}\right)$ é o Jacobiano. Desse modo, é realizada uma multiplicação termo a termo da matriz pesos e a matriz velocidade $S_{ij}U_{ij}$ e esse resultado é armazenado na matriz soma. Então, todos elementos da matriz são somados e esse resultado é multiplicado pelo Jacobiano $|\mathbb{J}|$ e o tamanho de malha $h^2/9$, pois este é o mesmo em ambas direções.

```
74 soma = pesos * velocidade
75 soma = np.sum(soma) * np.sin(B*np.pi/180)
76 vazao = soma*h**2/9
```

Listagem 4.8: Cálculo da vazão.

4.3.9 Produto do fator de atrito de Fanning e o número de Reynolds.

O valor de fRe será obtido para cada ângulo de abertura, assim é preciso defini-lo corretamente para servir de base de comparação.

Dessa forma, o cálculo do produto do fator de atrito e o número de Reynolds é realizado com base na equação (3.30). Como o domínio em coordenadas oblíquas é um quadrado de lado igual a 2, a área A a ser utilizada para o cálculo do número de Poiseuille é igual a área de um quadrado multiplicado pelo Jacobiano. Da mesma forma, o perímetro é a soma dos quatro lados.

```
77 area = 4*np.sin(B*np.pi/180)
78 P = 4*2
79 fRe = 8*area**3/(P**2*vazao)
```

Listagem 4.9: Cálculo do produto do fator de atrito de Fanning e o número de Reynolds.

4.3.10 Razão $\frac{U_{\text{máx}}}{U_{\text{méd}}}$

A necessidade de uma validação do método das diferenças finitas por mais de um meio é fundamental. Para estar de acordo com outros resultados obtidos, tanto a razão quanto o produto do fator de atrito e o número de Reynolds precisam estar em consonância.

Sendo assim, do campo de velocidades é retirado o máximo valor da malha pela função $amax$, e este é dividido pela velocidade média dada pela fórmula (6.3).

```

80 u_max = np.amax(velocidade)
81 u_med = vazao/area
82 razao = u_max/u_med

```

Listagem 4.10: Cálculo da razão $u_{\text{máx}}/u_{\text{méd}}$.

4.4 Simetria 1/2

Após considerações sobre o formato do resultado do campo de velocidades, foi possível notar uma simetria ao longo da diagonal do losango. Essa simetria facilita a resolução do sistema, diminuindo o número de computações necessárias para obter os mesmos resultados.

Para analisar a simetria nesse caso, utilizamos apenas a metade superior do domínio. Dessa forma, apenas $(N/2 + 1) \times N$ pontos serão necessários na malha ao invés de $N \times N$, de acordo com a [Figura 4.2](#). Essa diminuição permite aumentar o número de pontos em cada lado N usando os mesmos recursos computacionais.

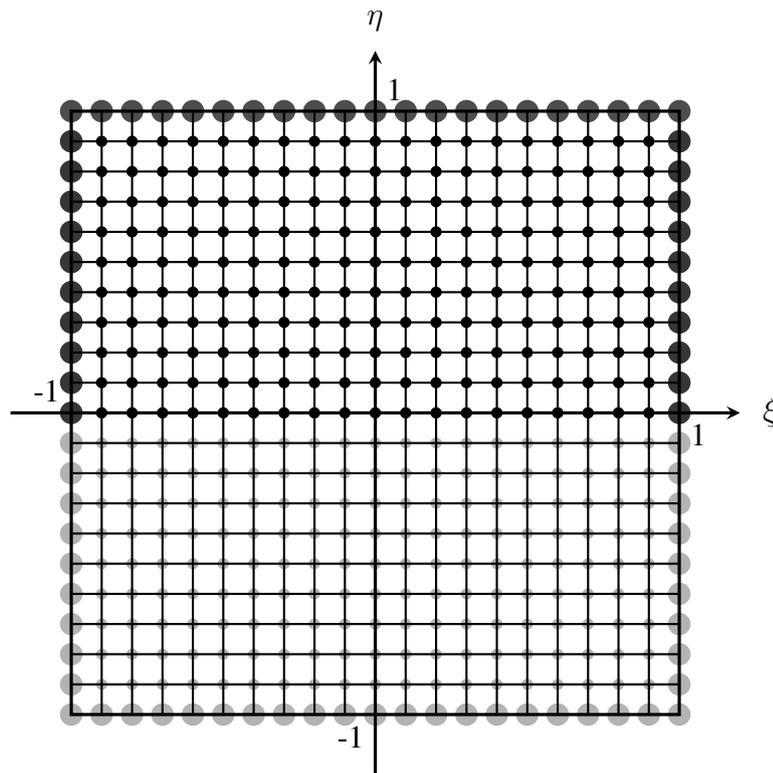


Figura 4.2: Representação da malha simétrica no quadrado.

Foi realizado o mesmo processo do caso com a malha cheia, porém, com a ligeira diferença que conhecemos o padrão por trás da construção desta. Dessa maneira, adicionando um bloco a mais na matriz, resultado da interação da primeira com a segunda linha, conforme [Figura 4.3](#).

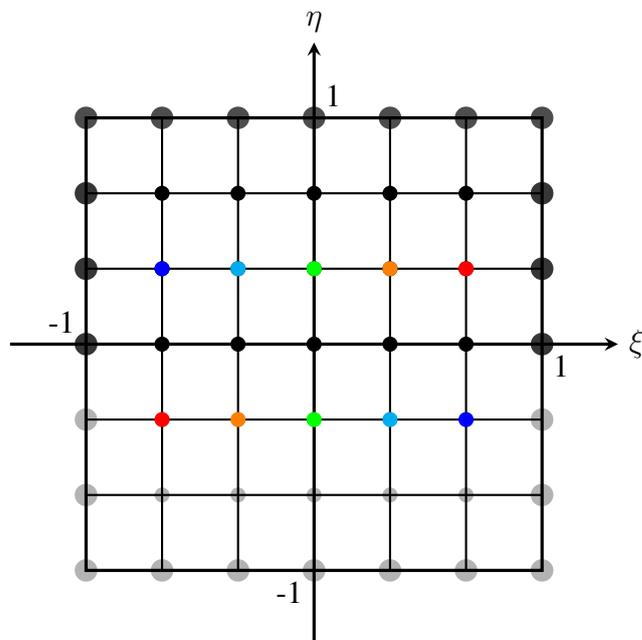


Figura 4.3: Representação da malha simétrica com pontos de velocidade iguais.

O método utilizado para a matriz simétrica consiste em alterar o padrão de pontos da primeira linha utilizando apenas os valores da segunda linha, que são refletidos no eixo ξ e η conforme a Figura 4.3. Assim, o sistema de equações da primeira linha que antes era igual a

$$\begin{aligned}
 -4u_1 + 1u_2 + 1u_8 - \frac{\cos \beta}{2}u_9 &= -(h \operatorname{sen} \beta)^2, \\
 1u_1 - 4u_2 + 1u_3 + \frac{\cos \beta}{2}u_8 + 1u_9 - \frac{\cos \beta}{2}u_{10} &= -(h \operatorname{sen} \beta)^2, \\
 1u_2 - 4u_3 + 1u_4 + \frac{\cos \beta}{2}u_9 + 1u_{10} - \frac{\cos \beta}{2}u_{11} &= -(h \operatorname{sen} \beta)^2, \\
 1u_3 - 4u_4 + 1u_5 + \frac{\cos \beta}{2}u_{10} + 1u_{11} - \frac{\cos \beta}{2}u_{12} &= -(h \operatorname{sen} \beta)^2, \\
 1u_4 - 4u_5 + 1u_6 + \frac{\cos \beta}{2}u_{11} + 1u_{12} - \frac{\cos \beta}{2}u_{13} &= -(h \operatorname{sen} \beta)^2, \\
 1u_5 - 4u_6 + 1u_7 + \frac{\cos \beta}{2}u_{12} + 1u_{13} - \frac{\cos \beta}{2}u_{14} &= -(h \operatorname{sen} \beta)^2, \\
 1u_6 - 4u_7 + \frac{\cos \beta}{2}u_{13} - 1u_{13} &= -(h \operatorname{sen} \beta)^2,
 \end{aligned}$$

para um caso de $N = 7$, com a simetria, se torna

$$\begin{aligned}
 -4u_1 + 1u_2 + 1u_8 - \frac{\cos \beta}{2}u_9 + \frac{\cos \beta}{2}u_{13} + 1u_{14} &= -(h \operatorname{sen} \beta)^2, \\
 1u_1 - 4u_2 + 1u_3 + \frac{\cos \beta}{2}u_8 + 1u_9 - \frac{\cos \beta}{2}u_{10} + \frac{\cos \beta}{2}u_{12} + 1u_{13} - \frac{\cos \beta}{2}u_{14} &= -(h \operatorname{sen} \beta)^2,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
1u_2 - 4u_3 + 1u_4 + \frac{\cos \beta}{2}u_9 + 1u_{10} + 1u_{12} - \frac{\cos \beta}{2}u_{13} &= - (h \operatorname{sen} \beta)^2, \\
1u_3 - 4u_4 + 1u_5 + \cos \beta u_{10} + 2u_{12} - \cos \beta u_{12} &= - (h \operatorname{sen} \beta)^2, \\
1u_4 - 4u_5 + 1u_6 + \frac{\cos \beta}{2}u_9 + 1u_{10} + 1u_{12} + \frac{\cos \beta}{2}u_{13} &= - (h \operatorname{sen} \beta)^2, \\
1u_5 - 4u_6 + 1u_7 + \frac{\cos \beta}{2}u_8 + 1u_9 - \frac{\cos \beta}{2}u_{10} + \frac{\cos \beta}{2}u_{12} + 1u_{13} - \frac{\cos \beta}{2}u_{14} &= - (h \operatorname{sen} \beta)^2, \\
1u_6 - 4u_7 + \frac{\cos \beta}{2}u_{13} - 1u_{13} &= - (h \operatorname{sen} \beta)^2,
\end{aligned}$$

Verifica-se então a presença de um bloco de dimensão $N \times N$ na matriz dos coeficientes nas linhas 1 à 7 e nas colunas 8 à 14, referentes à relação dos valores da primeira linha da malha com os elementos da segunda linha. A estrutura desse bloco introduzido com a simetria é

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\cos \beta}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{\cos \beta}{2} & 1 \\ \frac{\cos \beta}{2} & 1 & -\frac{\cos \beta}{2} & 0 & \frac{\cos \beta}{2} & 1 & -\frac{\cos \beta}{2} \\ 0 & \frac{\cos \beta}{2} & 1 & 0 & 1 & -\frac{\cos \beta}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \cos \beta & 2 & -\cos \beta & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\cos \beta}{2} & 1 & 0 & 1 & -\frac{\cos \beta}{2} & 0 \\ \frac{\cos \beta}{2} & 1 & -\frac{\cos \beta}{2} & 0 & \frac{\cos \beta}{2} & 1 & -\frac{\cos \beta}{2} \\ 1 & -\frac{\cos \beta}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{\cos \beta}{2} & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.22)$$

Percebe-se novamente a presença de padrões nas diagonais principais e nas secundárias. Esses padrões serão utilizados na implementação para acelerar a computação desses novos elementos.

4.4.1 Metodologia Numérica

4.4.1.1 Construção do bloco de simetria

Levando a matriz \mathbf{C} (4.22) em consideração. A presença de duas matrizes tridiagonais somadas fica evidente. Desse modo, é criada uma função com as seguintes funcionalidades para a construção do bloco

1. Criação de cada diagonal individualmente
2. União das diagonais em uma matriz tridiagonal principal e tridiagonal secundária
3. Soma das matrizes criadas

```

83 def simetrico(n,B):
84
85     cosbp = np.full(n - 1 , np.float64(np.cos(B*np.pi/180)/2))

```

```

86 cosbm = np.full(n - 1, np.float64(-np.cos(B*np.pi/180)/2))
87 principal = np.full(n,1)
88
89 diagonalsp = [cosbm, cosbp, principal]
90 diagonalsa = [-cosbm, -cosbp, principal]
91 offset = [1, -1, 0]
92
93 principal = diags(diagonalsp, offset)
94 antiprincipal = diags(diagonalsa, offset)
95
96 antiprincipal = antiprincipal.tocsr()
97 antiprincipal.indices = -antiprincipal.indices + antiprincipal.shape[1]
98     - 1
99
100 simetrico = principal + antiprincipal
101
102
103 Bloco = simetrico(n,B)
104 Bloco = lil_matrix(Bloco)
105
106 A = matriz((n*(n//2+1)), n, B)
107 A = lil_matrix(A)
108 A[0:n, n:2*n] = Teste

```

Listagem 4.11: Declaração da função de simetria.

Primeiramente, são criadas as listas com os elementos que compõem as diagonais e definidas as matrizes da mesma maneira que foi feito na [Subseção 4.3.2](#). Então, para utilizar menos espaço na memória, utilizamos a transformação para o formato CSR e, somente assim, inverter a matriz que foi criada como sendo uma matriz tridiagonal primária em uma matriz tridiagonal secundária. Essas duas matrizes *principal* e *antiprincipal* logo são somadas para compor o bloco gerado pela função *simetrico*.

4.4.1.2 Armazenamento da nova matriz de coeficientes

Utilizando o formato CSR, não é possível realizar operações de inserção na matriz, por isso, para inserir o bloco na matriz de coeficientes, é preciso antes transformar as matrizes em um outro formato que permita a rápida manipulação das matrizes sem perder a característica esparsa da mesma.

Nesse sentido, foi realizada uma mudança do formato CSR antes utilizado para um novo formato passível de alteração gerado pela função *lil_matrix*. Por fim, as matrizes *Bloco* e *A* são transformadas e, na matriz dos coeficientes é colocada a matriz *Bloco* da primeira à sétima linha e da oitava à décima quarta coluna.

```

109 Bloco = simetrico(n,B)
110 Bloco = lil_matrix(Bloco)

```

111

112 `A = matriz((n*(n//2+1)), n, B)`113 `A = lil_matrix(A)`114 `A[0:n, n:2*n] = Bloco`

Listagem 4.12: Criação da nova matriz de coeficientes

4.5 Simetria 1/4

Além da simetria sobre metade do domínio, é possível realizar uma simetria dentro desta, aproveitando ao máximo a capacidade computacional. A simetria permite ampliar ainda mais o número de pontos utilizados na malha, utilizando apenas um quarto da malha original e aproximadamente metade dos pontos utilizados na simetria anterior.

Para um quarto do domínio, a construção de um triângulo é necessária tanto no sistema de coordenadas cartesianas quanto no sistema oblíquo, conforme [Figura 4.4](#). Dado que a mudança de coordenadas foi motivada pela característica geométrica do problema e sua construção, nesse caso, se baseia em uma mesma geometria, retornaremos então para o sistema de coordenadas cartesianas com o domínio variando de 0 a $2 \cos \frac{\beta}{2}$ em x e de 0 a $2 \sin \frac{\beta}{2}$ em y , com a equação governante sendo a [\(3.31\)](#).

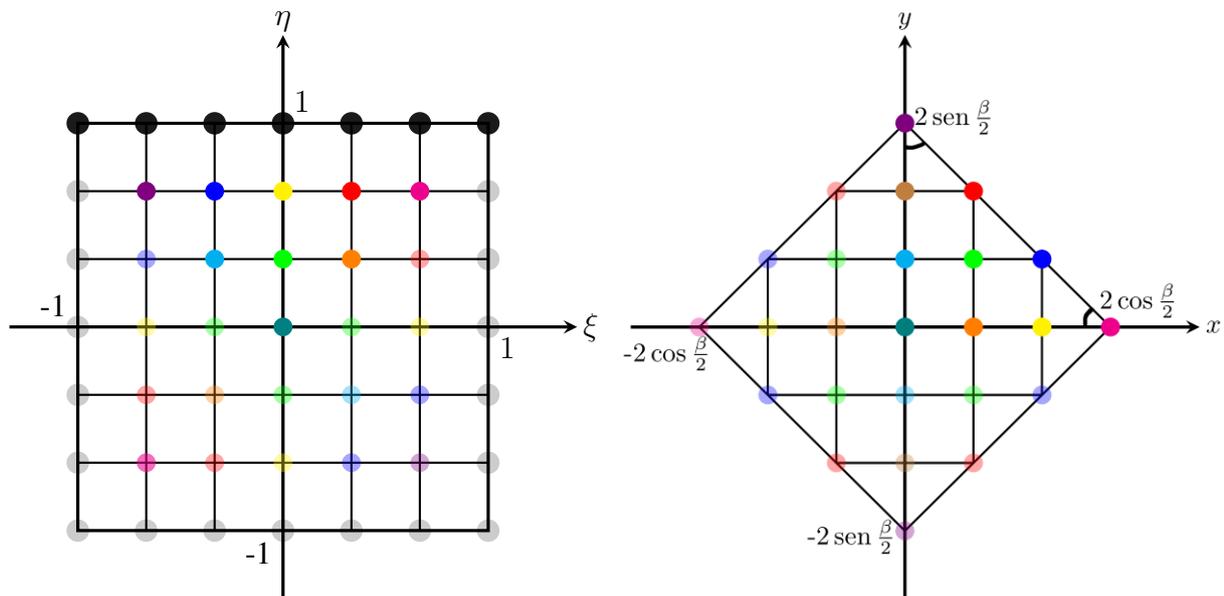


Figura 4.4: Representação da malha simétrica com pontos de velocidade iguais no plano oblíquo e no plano cartesiano.

Utilizando o sistema cartesiano, optou-se pela disposição do triângulo conforme a [Figura 4.4](#), de modo a facilitar a criação da matriz dos coeficientes, que agora sofrerá apenas a influência dos quatro pontos ao redor do ponto analisado e pode ser facilmente implementado. Dessa forma, utilizam-se $N(N+1)/2$ pontos, onde N é o número de pontos no cateto do triângulo retângulo simétrico.

Com as devidas considerações, aplicaremos a discretização da (3.31) utilizando as aproximações (4.1) e (4.2) para o sistema de coordenadas cartesiano com o espaçamento definido em (4.24), que se torna:

$$\frac{-2u_{i,j} + u_{i+1,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + \frac{-2u_{i,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1}}{k^2} = -1. \quad (4.23)$$

$$h = \frac{2 \cos \frac{\beta}{2}}{N} \text{ e } k = \frac{2 \sin \frac{\beta}{2}}{N} \quad (4.24)$$

Dessa maneira, ao utilizar a simetria de um quarto do domínio, teremos uma matriz dos coeficientes com $N(N+1)/2 \times N(N+1)/2$ elementos da seguinte forma:

$$\begin{pmatrix} P & D_m & 0 & 0 & C_m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ E & P & D & 0 & 0 & C_m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & P & D & 0 & 0 & C_m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & P & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ B & 0 & 0 & 0 & P & D_m & 0 & C & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 & 0 & E & P & D & 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & B & 0 & 0 & E & P & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & B & 0 & 0 & P & D_m & C \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B & 0 & E & P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B & 0 & P \end{pmatrix} \quad (4.25)$$

em que P é o valor no ponto analisado $u_{i,j}$, D é o valor no ponto à direita do ponto analisado $u_{i+1,j}$, E é o valor no ponto à esquerda do ponto analisado $u_{i-1,j}$, C é o valor no ponto acima do ponto analisado $u_{i,j+1}$, B é o valor no ponto abaixo do ponto analisado $u_{i,j-1}$ e C_m e D_m são os valores modificados devido a simetria.

Nota-se que apesar da estrutura similar ao caso sem simetria nas três diagonais principais, há uma discrepância com relação aos pontos da diagonal N elementos distante, devido a maneira como foi estruturada a malha triangular. Essa diferença advém da troca de linhas, em que, a cada troca, temos um ponto a menos na linha atual do que na linha anterior, dessa forma, causando uma descontinuidade na diagonal.

Quanto ao vetor de incógnitas nesse caso, tem-se a mesma organização da Subseção 4.1.2 e o vetor resposta é constituído de $N(N+1)/2$ termos iguais a -1 , diferentemente dos outros vetores resposta, pois a distinção entre espaçamentos é aplicada na matriz dos coeficientes, como será detalhado na metodologia numérica.

4.5.1 Metodologia Numérica

4.5.1.1 Construção da matriz dos coeficientes

A matriz 4.25 possui uma estrutura diferente daquelas implementadas anteriormente. Desse modo, é criada uma função para automatizar esse processo com as seguintes processos:

1. Definição dos espaçamentos
2. Declaração dos coeficientes
3. Criação da matriz tridiagonal principal pela inserção de cada vetor diagonal
4. Inserção pontual dos elementos referentes aos pontos acima e abaixo do ponto analisado

```
115 def matriz(x,n,B):      #Procedimento para criar a matriz
116
117     Dx = np.cos(B*np.pi/180/2)
118     Dy = np.sin(B*np.pi/180/2)
119
120     h = Dx/n
121     k = Dy/n
122
123     P = -2/h**2 - 2/k**2
124     D = 1/h**2
125     D_mod = 2/h**2
126     E = 1/h**2
127     C = 1/k**2
128     C_mod = 2/k**2
129     B = 1/k**2
130
131     Principal = np.full(x,P)      #Diagonal principal com elementos relativos
132     ao ponto analisado.
133
134     OnedistD = np.full(x-1,D)     #Elementos da diagonal à direita da
135     diagonal principal.
136     OnedistE = np.full(x-1,E)     #Elementos da diagonal à esquerda da
137     diagonal principal.
138
139     val = 0
140     for i in range(n,1,-1):
141         OnedistD[val-1]=0      #Elementos zero da diagonal superior
142         OnedistE[val-1]=0      #Elementos zero da diagonal inferior
143         OnedistD[val]=D_mod     #Elementos simétricos da diagonal superior
144         val +=i
```

```

143 diagonals = [ Principal , OnedistD , OnedistE ]
144
145 offset = [0,1,-1]
146
147 A = diags( diagonals , offset )
148 A = lil_matrix( A )
149
150 contlE = 0
151 contlD = 0
152 contcE = 0
153 contcD = 0
154
155 for i , j in zip( range( n-1 , 0 , -1 ) , range( n-1 ) ) :
156     for k in range( i ) :
157         if contlE >= ( n-1 ) :
158             A[ n+contlE , contcE ] = B    #Elementos relativos ao ponto abaixo do
159             ponto analisado
160             A[ contlD , n+contcD ] = C    #Elementos relativos ao ponto acima do
161             ponto analisado
162         else :
163             A[ n+contlE , contcE ] = B    #Elementos relativos ao ponto abaixo do
164             ponto analisado
165             A[ contlD , n+contcD ] = C_mod #Elementos relativos ao ponto acima
166             do ponto analisado
167             contlE += 1
168             contlD += 1
169             contcE += 1
170             contcD += 1
171
172 return A

```

Listagem 4.13: Declaração da função de simetria.

Instauram-se então os espaçamentos e coeficientes P , D , E , C , B , C_{mod} e D_{mod} . Com isso, são criadas listas individuais que irão compor a matriz tridiagonal, referente aos termos $u_{i,j}$, $u_{i-1,j}$ e $u_{i+1,j}$ e nessas listas são introduzidos elementos 0 a cada N , $N - 1$, ..., 1 elementos e os coeficientes D_{mod} partindo do índice 0 e a cada N , $N - 1$, ..., 1 elementos. Dessa forma, utiliza-se a função `diags` para criar a matriz tridiagonal, similarmente ao que foi realizado na [Seção 4.4](#) e na [Seção 4.3](#).

Para inserir os coeficientes dos pontos $u_{i,j+1}$ e $u_{i,j-1}$, foram consideradas diversas opções, como a criação de várias diagonais e a criação de uma matriz separada para somá-la a matriz tridiagonal, porém, o método mais simples se mostrou mais eficiente também, inserindo cada termo individualmente com dois fors aninhados, com um `if` para garantir que a primeira linha tenha os coeficientes simétricos C_{mod} , e para realizar esse procedimento, é necessário que a matriz A seja transformada na extensão `lil_matrix`, pois esta permite a

manipulação dos componentes da matriz, mantendo sua esparsidade.

4.5.1.2 Construção do sistema linear

Procedemos então, declarando o tamanho da matriz A que será criada, partindo do número de pontos da lateral maior, juntamente com o ângulo que foi informado, similarmente ao que foi realizado anteriormente nos outros casos. A única diferença, nesse sentido, é alterar o valor que compõe o vetor b, que agora é igual a -1.

```
171 x = n*(n+1)/2
172 x = int(x)
173
174 A = matriz(x,n,B)
175 A = csr_matrix(A)
176
177 b = np.full(x,-1,dtype = np.float64)
178
179 x = spsolve(A,b)
```

Listagem 4.14: Declaração da função de simetria.

4.5.1.3 Integração numérica

Dado que a malha agora foi trocada para uma disposição triangular, não é possível realizar a integração conforme fizemos no quadrado. Logo, ponderou-se outras maneiras de realizar a integração e, nesse caso, a maneira mais simples também se mostrou a mais efetiva computacionalmente. Primeiro, instaurou-se um for com duas variáveis i e j , e essas foram usadas para criar listas cheias do número 0 a fim de completar a malha, formando um quadrado, para, então, aplicar a mesma técnica de integração utilizada na [Subseção 4.3.7](#).

Com o novo método de integração pensado, utiliza-se apenas um quarto do domínio para calcular a vazão, acelerando a execução do código. Dessa forma, definimos novamente os espaçamentos para aplicar a matriz pesos, multiplicando o resultado por $h \times k \times 4/9$, sem a necessidade do jacobiano, consoante a [Equação 4.20](#), que agora será utilizado como sendo a área do losango A.

```
180 val = 0
181 velocidade = []
182
183 for i,j in zip(range(n+1),range(n,-1,-1)):
184
185     zeros = np.zeros(n-j+1)
186     lin = x[val:val+j]
187     lin = np.append(lin , zeros)
188     velocidade.append(lin)
189
190     val+=j
```

```

191
192 Dx = np.cos(B*np.pi/180/2)
193 Dy = np.sin(B*np.pi/180/2)
194
195 h = Dx/(n)
196 k = Dy/(n)
197
198 soma = pesos * velocidade
199 soma = np.sum(soma)
200 vazao = soma*h*k*4/9
201
202 A = np.sin(B*np.pi/180)
203 P = 4
204 fRe = 8*A**3/(P**2*vazao)
205 print(fRe)

```

Listagem 4.15: Declaração da função de simetria.

4.6 Investigação da convergência numérica

Para avaliar a ordem de convergência do método de diferenças finitas utilizaremos uma das soluções propostas por [Runborg \(2012\)](#), adotando o resultado com a malha mais refinada como sendo a solução de referência. Nesse ínterim, serão examinadas duas quantidades, uma global e uma local para um ângulo específico. A velocidade máxima representará a grandeza local e a velocidade média representará a grandeza global, sendo

$$v_{\text{máx}} = 0.04166666 \quad (4.26)$$

e

$$v_{\text{méd}} = 0.01869534 \quad (4.27)$$

para o ângulo $\beta = 45^\circ$. Então, foi realizado um gráfico de erro absoluto pelo espaçamento, obtendo a [Figura 4.5](#) e a [Figura 4.6](#). Na figura, realizamos uma regressão linear para obter o coeficiente angular da reta no gráfico $\log \times \log$ e esse coeficiente deve-se aproximar da ordem de convergência do método numérico utilizado.

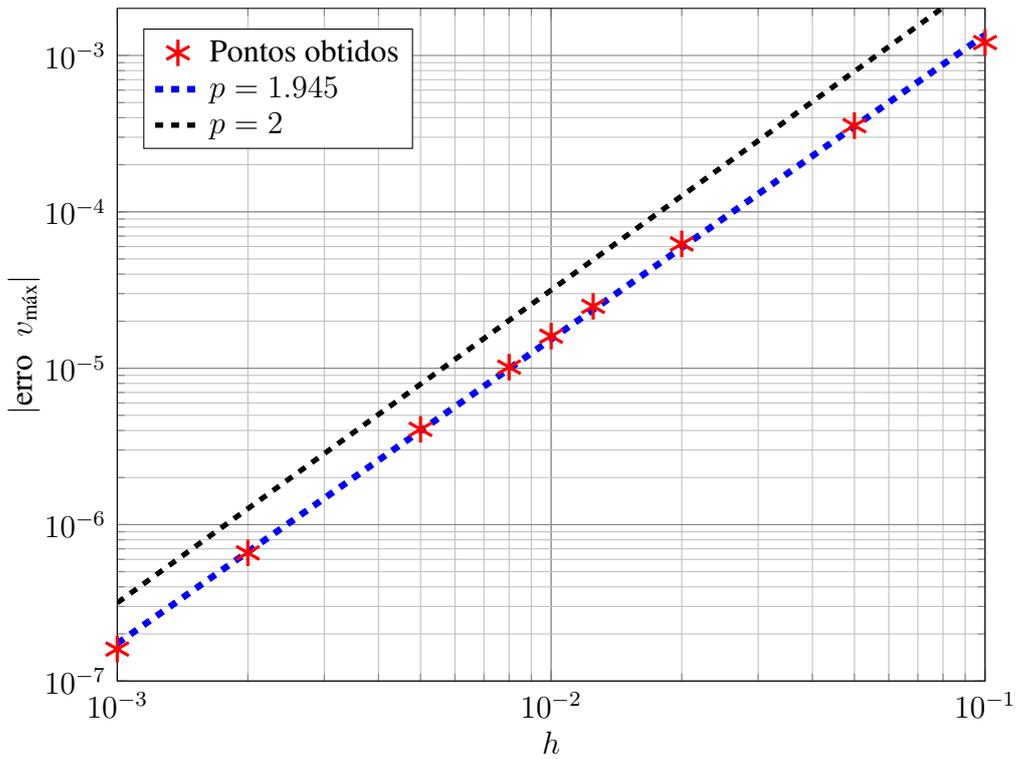


Figura 4.5: Módulo do erro absoluto da velocidade máxima em função do espaçamento da malha.

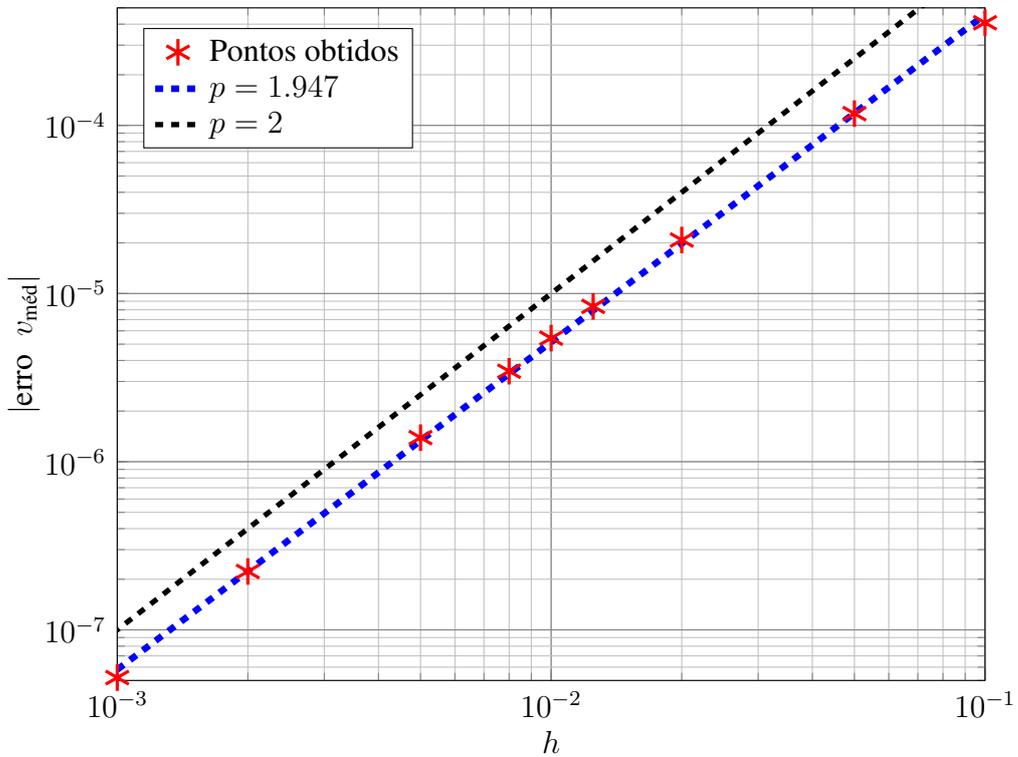


Figura 4.6: Módulo do erro absoluto da velocidade média em função do espaçamento da malha.

Observa-se, portanto, que a taxa de convergência se aproxima da ordem 2, tanto no caso da velocidade máxima quanto na velocidade média. Dessa forma, podemos afirmar que o método utilizado é da ordem de h^2 , tal como esperado pela [Seção 4.1](#). Também é notado a mesma conclusão para o caso da malha cartesiana, como pode-se perceber na [Figura 4.7](#) e [Figura 4.8](#).

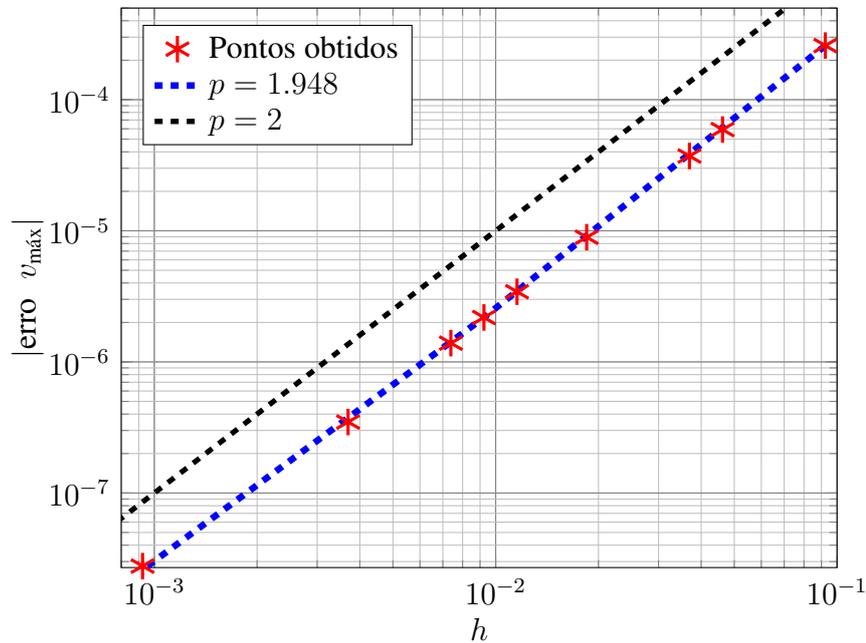


Figura 4.7: Módulo do erro absoluto da velocidade máxima em função do espaçamento horizontal da malha cartesiana.

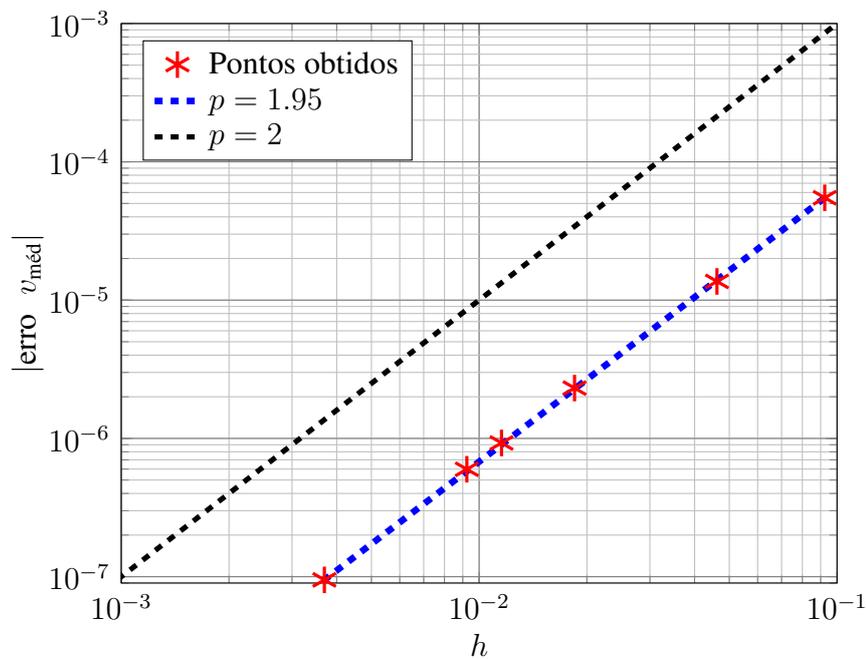


Figura 4.8: Módulo do erro absoluto da velocidade média em função do espaçamento horizontal da malha cartesiana.

Capítulo 5

Método de homotopia

Neste capítulo, será introduzida uma metodologia inédita para a solução da equação governante do problema. O método de perturbação é mostrado como técnica iterativa de obtenção do campo de velocidades, a qual será utilizada para validar os resultados obtidos.

5.1 Método de homotopia

Considere a equação governante em coordenadas oblíquas

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2 \cos \beta \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = -\sin^2 \beta, \quad (5.1)$$

em que $0^\circ < \beta \leq 90^\circ$, sujeita às condições de contorno

$$u(\xi, \pm 1) = u(\pm 1, \eta) = 0 \quad (5.2)$$

Usando o método de perturbação de homotopia conforme [He \(1999\)](#), construímos uma homotopia na seguinte forma

$$(1 - q) \left(\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} - \frac{\partial^2 u_0}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 u_0}{\partial \eta^2} \right) + q \left(\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} - 2 \cos \beta \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} + \sin^2 \beta \right) = 0, \quad (5.3)$$

em que $q \in [0, 1]$ é o parâmetro de homotopia e $u_0(\xi, \eta)$ é uma aproximação inicial que satisfaz as quatro condições de contorno. Substituindo

$$v = v_0 + qv_1 + q^2v_2 + \dots, \quad (5.4)$$

em (5.2) e (5.3) e igualando os termos com potências idênticas de p , obtemos assim,

$$q^0 : \begin{cases} \frac{\partial^2 v_0}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial \eta^2} = \frac{\partial^2 u_0}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial \eta^2}, \\ v_0(\xi, \pm 1) = v_0(\pm 1, \eta) = 0, \end{cases} \quad (5.5)$$

$$q^1 : \begin{cases} \frac{\partial^2 v_1}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial \eta^2} = -\frac{\partial^2 v_0}{\partial \xi^2} + 2 \cos \beta \frac{\partial^2 v_0}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial^2 v_0}{\partial \eta^2} - \sin^2 \beta, \\ v_1(\xi, \pm 1) = v_1(\pm 1, \eta) = 0, \end{cases} \quad (5.6)$$

$$q^2 : \begin{cases} \frac{\partial^2 v_2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial \eta^2} = 2 \cos \beta \frac{\partial^2 v_1}{\partial \xi \partial \eta}, \\ v_2(\xi, \pm 1) = v_2(\pm 1, \eta) = 0, \end{cases} \quad (5.7)$$

$$q^3 : \begin{cases} \frac{\partial^2 v_3}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial \eta^2} = 2 \cos \beta \frac{\partial^2 v_2}{\partial \xi \partial \eta}, \\ v_3(\xi, \pm 1) = v_3(\pm 1, \eta) = 0, \end{cases} \quad (5.8)$$

⋮

Assim, fazendo

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial \eta^2} = -\sin^2 \beta \quad (5.9)$$

e

$$v_0(\xi, \eta) = u_0(\xi, \eta), \quad (5.10)$$

segue que

$$q^1 : \begin{cases} \frac{\partial^2 v_1}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial \eta^2} = 2 \cos \beta \frac{\partial^2 v_0}{\partial \xi \partial \eta}, \\ v_1(\xi, \pm 1) = v_1(\pm 1, \eta) = 0, \end{cases} \quad (5.11)$$

$$q^2 : \begin{cases} \frac{\partial^2 v_2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial \eta^2} = 2 \cos \beta \frac{\partial^2 v_1}{\partial \xi \partial \eta}, \\ v_2(\xi, \pm 1) = v_2(\pm 1, \eta) = 0, \end{cases} \quad (5.12)$$

$$q^3 : \begin{cases} \frac{\partial^2 v_3}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial \eta^2} = 2 \cos \beta \frac{\partial^2 v_2}{\partial \xi \partial \eta}, \\ v_3(\xi, \pm 1) = v_3(\pm 1, \eta) = 0, \end{cases} \quad (5.13)$$

⋮

$$q^n : \begin{cases} \frac{\partial^2 v_n}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 v_n}{\partial \eta^2} = 2 \cos \beta \frac{\partial^2 v_{n-1}}{\partial \xi \partial \eta}, \\ v_n(\xi, \pm 1) = v_n(\pm 1, \eta), \end{cases} \quad (5.14)$$

⋮

Para obter, então, o campo de velocidades final, fazemos

$$u = \lim_{q \rightarrow 1} v = v_0 + v_1 + v_2 + \dots, \quad (5.15)$$

Normalmente, a solução da equação governante no sistema oblíquo é inviável devido a não ortogonalidade desse sistema de coordenadas (Moon e Spencer, 2012). Nesse sentido, o destaque do método de perturbação de homotopia é a simplificação da equação governante a fim de solucionar a equação governante por separação de variáveis.

Numericamente, a implementação da homotopia viabiliza a verificação do resultado numérico obtido por uma outra fonte, além de se aproveitar de um dos limitadores do código que é a falta de memória RAM para a criação de uma malha mais refinada. Ademais, a metodologia permite a solução da equação governante analiticamente, preenchendo uma lacuna na literatura da área de mecânica dos fluidos.

5.2 Metodologia numérica

5.2.1 Bibliotecas e inputs

```
1 '''Imports'''
2 !pip install pyamg
3 import pyamg
4 import numpy as np
5 from numpy import savetxt
6 import matplotlib.pyplot as plt
7 import scipy as sp
8 from scipy import linalg
9 from scipy.sparse.linalg import spsolve, lgmres, inv
10 from scipy.sparse import csr_matrix, diags, lil_matrix, dia_matrix,
    csc_matrix
11
12 '''Inputs'''
13
14 n = 501    #Número de pontos em uma fileira
15 B = 10    #Ângulo de abertura em graus
16 Ord = 3   #Ordem de homotopia
```

Listagem 5.1: Realização dos imports e inputs do código.

Similarmente ao que foi executado na [Subseção 4.3.1](#), importamos as mesmas bibliotecas com o propósito de melhorar a eficiência do código e gerar valores precisos. A diferença nessa seção é apenas a definição da ordem de homotopia *Ord* que será calculada pelo usuário e definirá a quantidade de iterações realizadas pelo programa.

5.2.2 Construção da matriz dos coeficientes

A matriz A ainda contém $N^2 \times N^2$ termos, é esparsa e simétrica ao longo da diagonal principal. Entretanto, devido a equação de diferenças finitas de homotopia, apenas estão presentes os termos referentes às derivadas parciais de segunda ordem com relação a ξ e com relação a η , ou seja, a matriz dos coeficientes contará apenas com 5 diagonais, em contraste com as 9 diagonais utilizadas anteriormente no caso sem simetria.

Logo, a construção da matriz dos coeficientes segue a seguinte ordem:

1. Construção do vetor diagonal principal.
2. Construção do vetor diagonal 1 elemento acima e abaixo da diagonal principal.
3. Construção do vetor diagonal N elementos acima e abaixo da diagonal principal.

Para fazer esse procedimento, utilizamos os mesmos comandos utilizados em [Subseção 4.3.2](#), retirando as seções relacionadas as derivadas mistas.

```
17 def matriz(n,B):      #Procedimento para criar a matriz
18
19     Principal = np.full(n**2,-4)    #Diagonal principal com elementos -4
20
21     Onedist = np.ones(n**2-1)
22     for i in range(n**2-1):
23         if (i+1)%n==0:
24             Onedist[i]=0    #Elementos da diagonal superior e inferior
25
26     Ndist = np.ones(n**2-n)    #Elementos da diagonal n superior e inferior
27
28     diagonals = [Principal , Onedist , Onedist , Ndist , Ndist ]
29     offset = [0,1,-1,n,-n]
30
31     A = diags(diagonals , offset )
32
33     return A
```

Listagem 5.2: Criação da matriz dos coeficientes.

5.2.3 Construção da matriz de derivada mista

Observando a [Equação 5.11](#), notamos que operação de derivada mista deve ser feita sobre o campo de velocidades obtido na ordem anterior, a partir da segunda ordem de homotopia. Então, como da primeira ordem é retornado um vetor ordenado do campo de velocidades, aplicamos a operação diretamente sobre este vetor em cada iteração subsequente.

Desse modo, a matriz de derivada mista M será utilizada sobre cada vetor do campo de velocidades obtido na ordem anterior e esse resultado será o vetor resposta do sistema linear a ser resolvido.

A construção da matriz de derivada mista segue os seguintes passos:

1. Construção do vetor diagonal $N + 1$ elementos acima e abaixo da diagonal principal.
2. Construção do vetor diagonal $N - 1$ elementos acima e abaixo da diagonal principal.

Notamos então que, essencialmente, para a homotopia, realiza-se uma divisão da [Subseção 4.3.2](#) em duas partes que serão utilizadas separadamente.

```
34 def mista(n):
35
36     Nm1dist = np.full(n**2-(n-1), -1/4)
37
38     for i in range(n**2-(n-1)):
39         if i%n==0:
40             Nm1dist[i]=0 #Elementos da diagonal superior e inferior ((n-1) e
41                 -(n-1)) {Derivada mista i-1 j+1}
42
43     Np1dist = np.full(n**2-(n+1), 1/4)
44
45     for i in range(n**2-(n+1)):
46         if (i+1)%n==0:
47             Np1dist[i]=0 #Elementos da diagonal superior e inferior ((n+1) e
48                 -(n+1)) {Derivada mista i+1 j+1}
49
50     diagonals = [Nm1dist, Nm1dist, Np1dist, Np1dist]
51     offset = [(n-1), -(n-1), (n+1), -(n+1)]
52
53     M = diags(diagonals, offset)
```

Listagem 5.3: Criação da matriz de derivada mista.

A definição de uma função, tanto para a matriz A quanto para a matriz M é necessária a fim de atribuir essas matrizes a uma variável que será utilizada em todo o código, evitando computações desnecessárias.

5.2.4 Integração numérica

A criação da matriz de integração numérica se dá do mesmo modo que na [Subseção 4.3.7](#), aproveitando-se da facilidade em aplicar os vetores numpy para criar a matriz *pesos*, definindo a operação de integração durante todo o código. Como a matriz é completa com

entradas não nulas, utilizaremos a matriz do próprio numpy para armazenar os valores, sem realizar alteração sobre o formato da mesma, como foi realizado, por exemplo, nas matrizes A e M.

```

54 j=n+2
55
56 fileira1 = np.array(np.zeros(j))
57 fileira1[:,2] = 2
58 fileira1[1::2] = 4
59 fileira1[0] = 1
60 fileira1[j-1] = 1
61
62 fileira2 = fileira1 * 4
63 fileira3 = fileira1 * 2
64
65 pesos = fileira1
66 for i in range(j-1):
67     if i%2==0:
68         pesos = np.vstack((pesos, fileira2))
69     if i%2==1:
70         pesos = np.vstack((pesos, fileira3))
71
72 pesos[j-1] = fileira1

```

Listagem 5.4: Definição de uma função para gerar a matriz dos coeficientes de Simpson.

5.2.5 Solução da ordem inicial de homotopia

Aproveita-se essa seção para transformar as matrizes esparsas A e M em matrizes do formato csr, o que virá a ser útil para diminuir o tempo de computação de cada ordem de homotopia.

Define o espaçamento da malha como constante nas duas direções e igual a $h = \frac{2}{n+1}$, seguindo a [Equação 4.4](#).

Na ordem 0, em que se define o campo de velocidades inicial, o vetor resposta é tratado como um vetor com n^2 termos iguais a $-\left(h \sin\left(B\frac{\pi}{180}\right)\right)^2$.

```

73 A = matriz(n,B)
74 A = csr_matrix(A)
75
76 M = mista(n)
77 M = csr_matrix(M)
78
79 h = 1/(n+1)
80 b = np.full(n**2,- h**2 * np.sin(B*np.pi/180)**2, dtype = np.float64)
81

```

```
82 x_0 = spsolve(A, b)
```

Listagem 5.5: Solução do sistema linear.

Estreitamente, esse passo é análogo às seções 4.3.3, 4.3.4 e 4.3.5, sua distinção se encontra no fato de que esta condição aparece apenas na ordem 0 da homotopia, sendo as outras ordens definidas a seguir.

5.2.6 Solução das ordens maiores que 0

Ao solucionar o sistema de equações, sua estrutura está orientada da maneira descrita na Subseção 4.1.3. Assim, é preciso manipular o vetor de modo que ele se disponha conforme a malha de diferenças finitas discretizada.

Primeiramente, instauramos as variáveis `vel` e `campo`, que armazenarão o campo de velocidades de cada ordem e o campo de velocidades completo, respectivamente. Sua inicialização se dá com o vetor `x_0`, o qual é a lista com n^2 termos do campo de velocidades inicial v_0 .

Então, é criado um processo iterativo com o `while`, em que é passada a informação de quantas ordens `Ord` devem ser calculadas e esse será o número de iterações que serão realizadas pelo programa. Esse processo é feito utilizando a condição de `Ord > num`, ou seja, enquanto a ordem inserida inicialmente for maior que o número da ordem que está sendo calculada, o programa continuará sendo iterado e esse processo é parado quando a ordem calculada for igual a ordem inserida nos inputs do programa.

Dentro do processo iterativo, é realizada a derivação por diferenças finitas do campo de velocidades `vel` da ordem anterior a que se busca resolver, armazena-se o resultado do termo de fonte na lista `fonte` e então multiplica-se por $-2 \cos\left(B \frac{\pi}{180}\right)$ para chegar ao vetor de resposta `b` e então utilizá-lo no `spsolve` com a matriz de coeficientes `A`. Nesse passo, verifica-se que não há a dependência do espaçamento da malha no cálculo do campo de velocidade, devido as malhas quadradas que contém o mesmo número de pontos em ambas as direções.

Por fim, realiza-se uma atualização do campo de velocidades completo, conforme Equação 5.4. Além disso, atualiza-se a lista `vel` com o campo de velocidades calculado na iteração atual `x_n`.

O restante dos procedimentos da seção são feitos apenas com o intuito de rearranjar o vetor com o campo de velocidades de cada ordem `x_n` em um formato de matriz quadrada com as condições da borda aplicadas e assim integrá-lo, obtendo o `fRe` do mesmo.

```
83 vel = np.copy(x_0)
84 campo = np.copy(x_0)
85 num = 0
86
87 while Ord > num:
```

```

88
89 fonte = M.dot(vel)
90 b = 2*np.cos(B*np.pi/180)*fonte
91
92 x_n = spsolve(A,b)
93
94 campo = campo + x_n
95 vel = x_n
96
97 campo_int = np.split(campo,n)
98 campo_mat = np.flip(campo_int,0)
99 velocidade_final = np.pad(campo_mat, pad_width=1, mode='constant',
    constant_values=0)
100
101 soma = pesos * velocidade_final * np.sin(B*np.pi/180)
102 soma = np.sum(soma)
103 vazao = soma*h**2/9
104
105 area = np.sin(B*np.pi/180)
106 P = 4
107 fRe = 8*area**3/(P**2*vazao)
108 print(num+1, fRe)
109
110 num+=1

```

Listagem 5.6: Processo iterativo para determinar as soluções homotopia para qualquer ordem.

Os passos subsequentes a este seguem a ordem das seções [4.3.6](#), [4.3.8](#), [4.3.9](#) e [4.3.10](#) aplicadas ao campo de velocidades final v .

Capítulo 6

Resultados

Neste capítulo, são expostos os resultados obtidos pelas técnicas empregadas e estes são discutidos e comparados com outros resultados similares presentes na literatura acerca do escoamento em dutos de seção transversal oblíqua.

6.1 Resultados

A implementação do método das diferenças finitas nos fornece a matriz do campo de velocidades para cada ângulo no domínio quadrado em coordenadas oblíquas. Com essa matriz, é possível passar por um pós-processamento e analisar a distribuição do campo de velocidades em linhas de isovelocidade. A [Figura 6.1](#) demonstra em vermelho as linhas de isovelocidade normalizadas a partir da velocidade máxima com valores 0.1, 0.3, 0.5, 0.7 e 0.9.

Nota-se que o comportamento do campo de velocidades está dentro do esperado. As linhas de 0.9 se encontram mais ao centro e as linhas de 0.1 próximas a parede, dessa forma a distribuição de velocidades cresce em direção ao centro. É perceptível uma grande influência da condição de não deslizamento na fronteira da seção na distribuição do campo de velocidades, com as menores velocidades encontradas nos ângulos agudos do losango, onde a linha de 0.1 se encontra mais distante do que nos ângulos obtusos, os quais há um rápido crescimento na velocidade. Além disso, constata-se também que a velocidade máxima se restringe ao centróide do losango.

É válido acentuar que, conforme o ângulo β se aproxima de 90° , a forma losangular do duto vai sendo substituída por uma forma quadrada, atuando como uma boa validação para o modelo e alcançando uma simetria em todos quadrantes. No caso contrário, quando o ângulo β se aproxima de 0° há uma singularidade no fRe calculado pela [Equação 3.30](#), assim, é necessário pensar em outro meio para calcular o valor no ponto.

Juntamente com os campos de velocidades, é possível demonstrar a evolução da veloci-

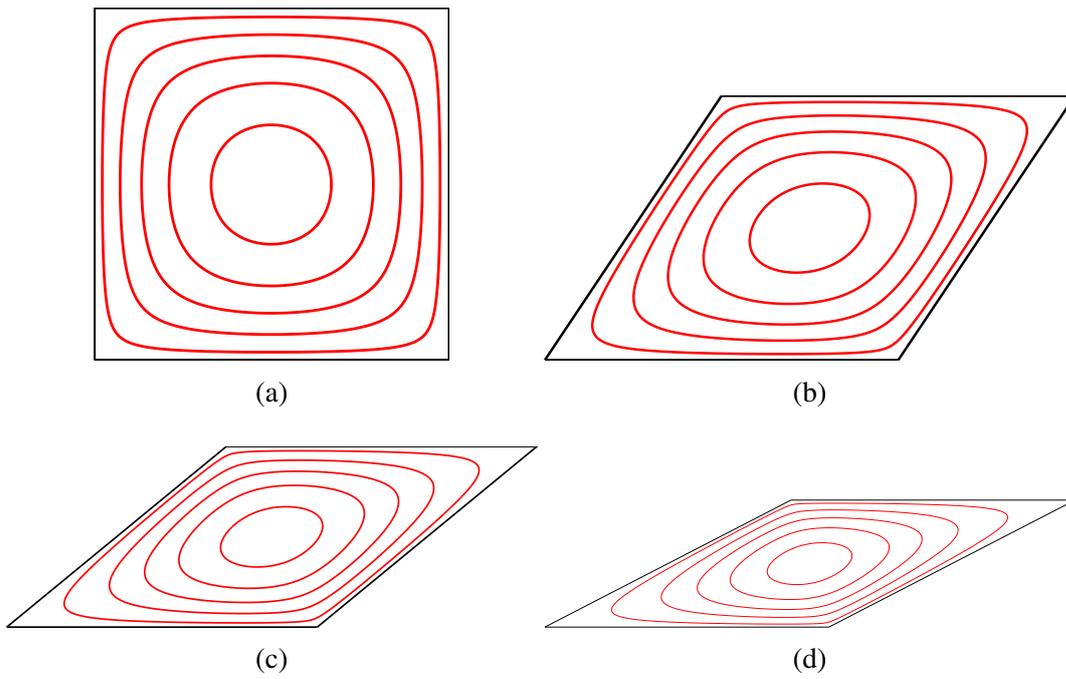


Figura 6.1: Linhas de isovelocidade no sistema de coordenadas cartesiano para: (a) $\beta = 90^\circ$, (b) $\beta = 60^\circ$, (c) $\beta = 45^\circ$ e (d) $\beta = 30^\circ$.

dade máxima, da velocidade média e da razão entre elas com relação ao ângulo de abertura. A [Figura 6.2](#), a [Figura 6.3](#) e a [Figura 6.4](#) mostram as curvas de cada parâmetro adimensional.

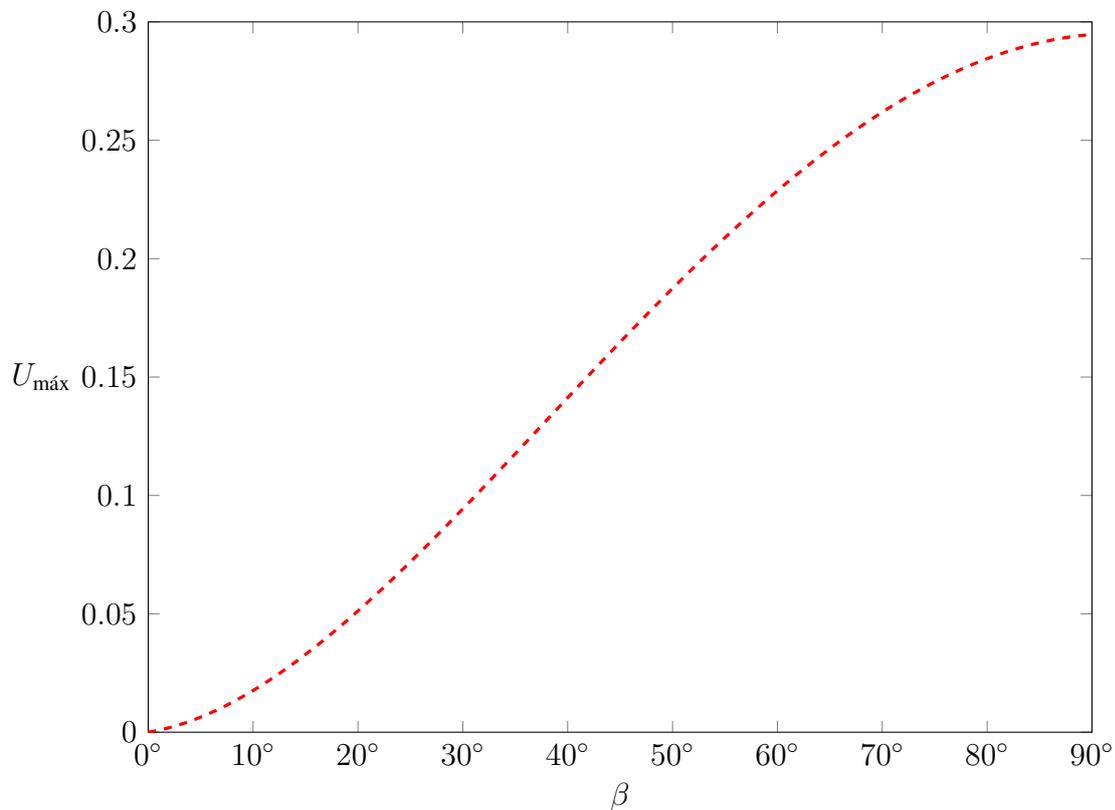


Figura 6.2: Velocidade máxima $U_{\text{máx}}$ em função do ângulo de abertura β .

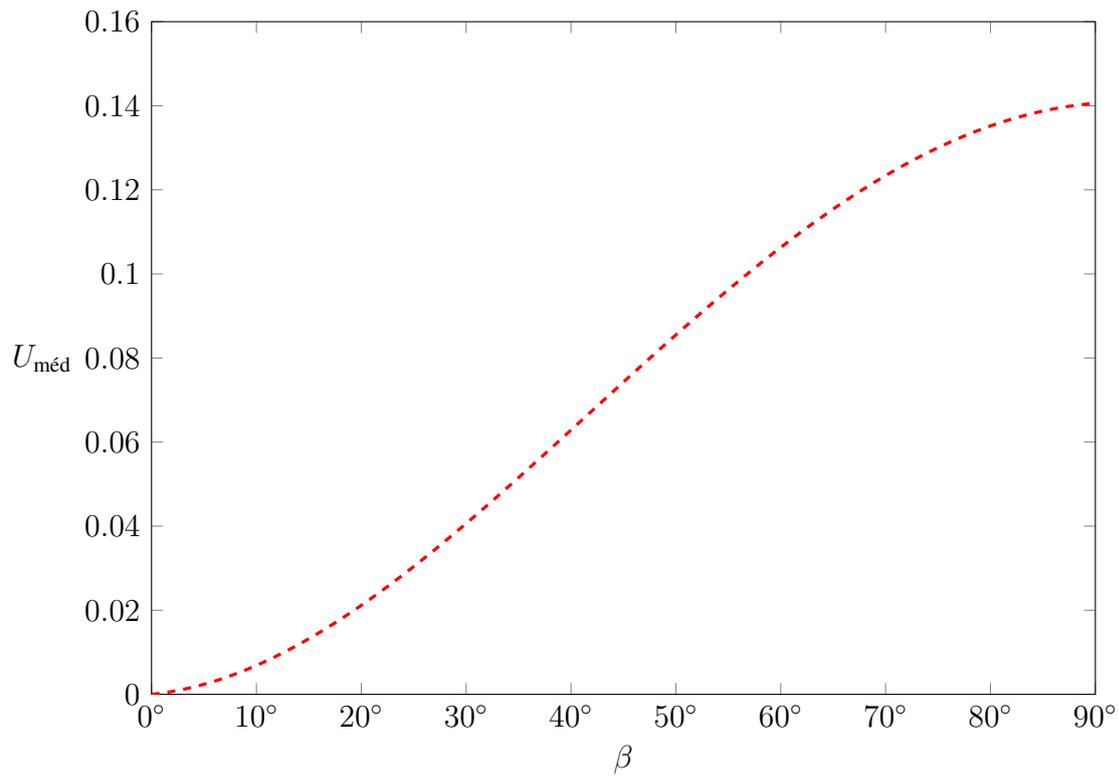


Figura 6.3: Velocidade média $U_{\text{méd}}$ em função do ângulo de abertura β .

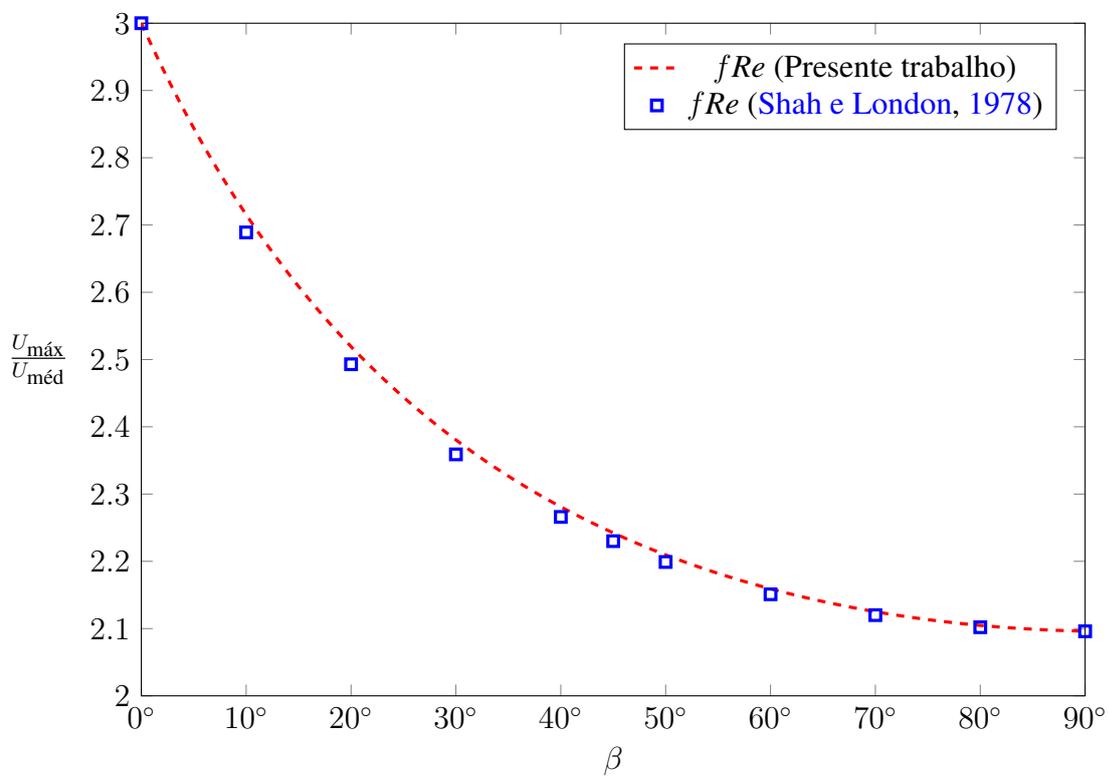


Figura 6.4: Razão $\frac{U_{\text{máx}}}{U_{\text{méd}}}$ em função do ângulo de abertura β .

Podemos afirmar que a variação da função de velocidade máxima está dentro do esperado, aumentando consoante com o ângulo de abertura, de forma que as paredes se afastam e há menos influência da condição de não escorregamento no campo de velocidades. O mesmo fenômeno ocorre para a velocidade média, o que também poderia ser inferido pelo cálculo da vazão.

Ainda que a curva de velocidade máxima e de velocidade média apresentem valor nulo para o ângulo zero, a razão dessas quantidades manifesta comportamento estritamente decrescente com máximo no ângulo zero. Dessa forma, é possível mostrar que esse valor tende a 3 tanto graficamente quanto formalmente.

Para comparar os resultados obtidos com os valores de [Shah e London \(1978\)](#) e [Lee e Lee \(2002\)](#), foi produzida a [Figura 6.5](#).

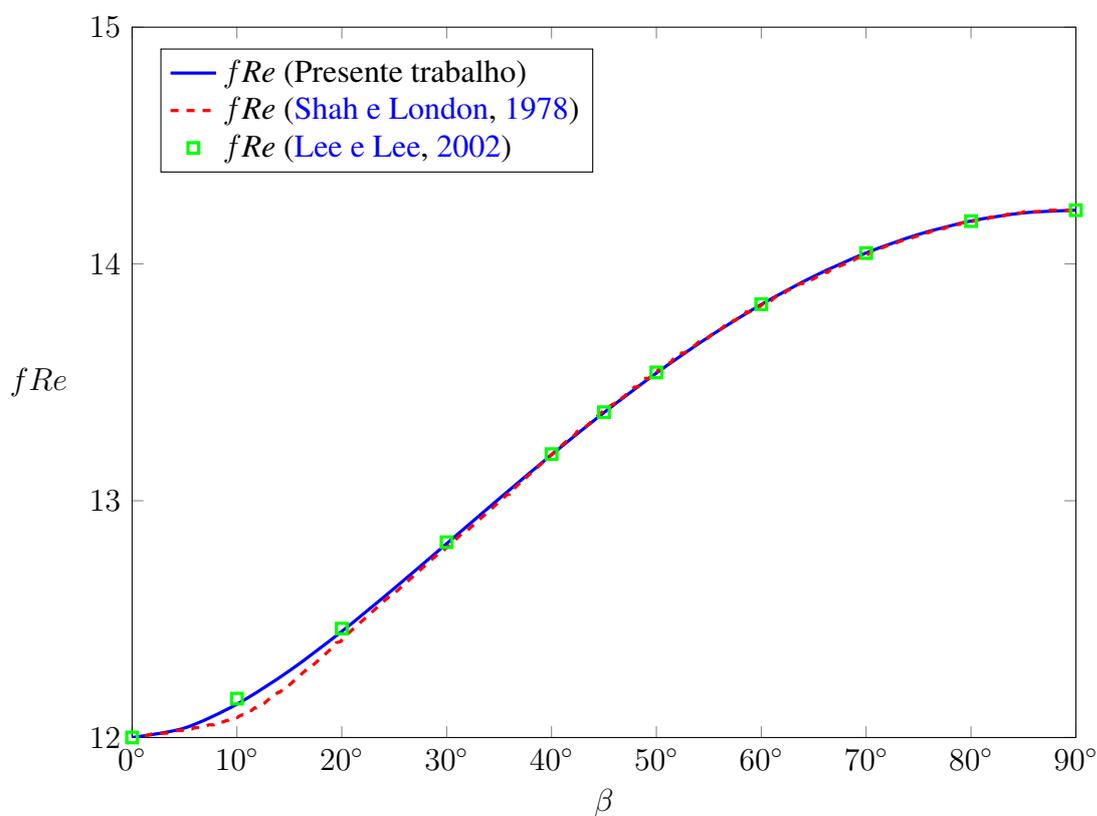


Figura 6.5: fRe em função do ângulo de abertura β .

Diante dos resultados, observa-se a convergência do método das diferenças finitas para o cálculo do fRe , entretanto, este valor difere dos valores tabelados.

Assim, é analisada a variação do número de pontos usados na matriz dos coeficientes N e o ângulo de abertura β , e a influência destes parâmetros no cálculo do produto do fator de atrito pelo número de Reynolds na [Tabela 6.1](#). Posteriormente, compara-se os resultados obtidos com a maior referência na literatura de dutos de diferentes geometrias, [Shah e London \(1978\)](#) e também [Lee e Lee \(2002\)](#), que obtiveram resultados distintos de Shah para

pequenos ângulos.

Assegurando um número suficiente de pontos na malha, foram escolhidas potências de 2 a partir de 2^7 até 2^{10} , somando-se uma unidade para garantir a convenção adotada na [Seção 4.2](#). Os ângulos variam da forma como foi descrito por [Shah e London \(1978\)](#) em seus resultados tabelados.

Os valores para N de 2901 e 1901 estão representados na tabela por serem os valores máximo de pontos alcançados com a memória RAM disponível no computador para o caso com simetria e sem simetria, respectivamente. Esses valores correspondem a matrizes de coeficientes com dimensões 2105401×8415801 e 3613801×3613801 , ou seja, 17.718 trilhões de termos e 13.059 trilhões de termos em cada caso. Vale ressaltar que os valores de fRe foram calculados com o caso simétrico devido a sua velocidade de execução, apesar de que seriam obtidos os mesmos valores caso fosse optado pelo caso sem simetria, de acordo com esperado.

Tabela 6.1: Variação do fRe com relação ao ângulo β e o número de pontos interiores da malha N .

$N \backslash \beta$	90°	80°	70°	60°	50°	45°	40°	30°	20°	10°
129	14.227	14.182	14.047	13.830	13.541	13.374	13.197	12.823	12.455	12.153
257	14.227	14.181	14.046	13.829	13.539	13.372	13.195	13.819	12.450	12.144
513	14.227	14.181	14.046	13.828	13.539	13.372	13.194	12.818	12.448	12.141
1025	14.227	14.181	14.046	13.828	13.539	13.372	13.194	12.818	12.448	12.141
1901	14.227	14.181	14.046	13.828	13.539	13.372	13.194	12.818	12.448	12.140
2901	14.227	14.181	14.046	13.828	13.539	13.372	13.194	12.818	12.448	12.140
(Lee e Lee, 2002)	14.227	14.181	14.046	13.830	13.542	13.374	13.197	12.825	12.460	12.164
(Bennett, 2021)	14.227	14.181	14.046	13.828	13.539	13.372	13.193	12.817	12.446	12.139
(Shah e London, 1978)	14.227	14.181	14.046	13.830	13.542	13.381	13.193	12.803	12.416	12.073

Em primeiro plano, atesta-se a validade do código implementado para a faixa dos maiores ângulos de abertura em comparação tanto com [Shah e London \(1978\)](#) quanto com [Lee e Lee \(2002\)](#). Para o caso do duto de seção transversal quadrada $\beta = 90^\circ$, o método converge com poucos pontos, o que mostra a qualidade da metodologia das diferenças finitas.

É possível notar que há uma inclinação mais acentuada no início do gráfico de Shah, de 0° a 20° , o que não ocorre no gráfico obtido pela metodologia aplicada. Além disso, na faixa intermediária, de 45° a 65° , os valores encontrados pelo método das diferenças finitas apresentaram uma diminuição do fRe em comparação com aqueles apontados na literatura.

As diferenças crescem conforme o ângulo diminui e a maior diferença encontrada foi no menor ângulo tabelado, o ângulo de 10° . A diferença absoluta entre os valores encontrados pela metodologia aplicada foi de 0.067 e em termos de erro relativo, foi de 0.554%.

Em relação ao dados obtidos por [Lee e Lee \(2002\)](#), os valores se apresentam menores ou iguais para todos os ângulos, indicando uma discordância entre os autores e uma possível

melhoria em relação aos resultados de [Lee e Lee \(2002\)](#).

Portanto, para validar os resultados obtidos numericamente nesse trabalho, diferentes metodologias deverão ser aplicadas. Os métodos a serem utilizados devem ser capazes de captar as sutilezas nas variações para pequenos ângulos e também precisam obter os mesmos resultados obtidos com o método das diferenças finitas. Tendo isso em vista, é proposto o método de perturbação de homotopia para comprovar os resultados obtidos.

6.2 Resultados de homotopia

A figura [Figura 6.7](#) apresenta os campos de velocidade v_n apenas das seis primeiras ordens, respectivamente, para o ângulo $\beta = 45^\circ$. Nela, pode-se ver o comportamento individual de cada ordem e compreender o método de perturbação de homotopia. Com relação as ordens superiores, todas as ordens ímpares são similares à v_1 e todas as pares são similares à v_2 .

Primeiramente, vale ressaltar que o campo de velocidades para a ordem zero v_0 apresenta o mesmo arranjo, similar ao comportamento ângulo de 90° , e mantém a mesma vazão para todos os ângulos. Portanto, o campo de velocidades final v e o fRe partem do caso do duto quadrado e se ajustam até atingir o ângulo de interesse. No geral, verifica-se a conservação da condição de contorno em cada ordem, influenciando na distribuição do campo de velocidades e a velocidade máxima tanto em v_0 quanto v_2 se dispõem no centro geométrico da figura.

Ademais, no campo de velocidades para a primeira ordem, há um aumento de velocidades nas regiões de ângulos maiores e uma diminuição nas regiões de ângulos menores, conforme esperado, a fim de obter o campo de velocidades final. Entretanto, como o campo de velocidades se altera nas regiões de alta e baixa velocidade, a vazão não se altera e o fRe permanece o mesmo de v_0 .

Somente na segunda ordem há uma variação da vazão, na qual há uma distribuição semelhante à v_0 , com uma sutil diminuição de velocidade nas bordas do duto. Logo, é de interesse que se conclua os cálculos em uma ordem par com a finalidade de obter o parâmetro de interesse fRe . Nesse sentido, criou-se a [Tabela 6.2](#) com o intuito de avaliar a evolução do fRe com a soma de cada ordem de homotopia.

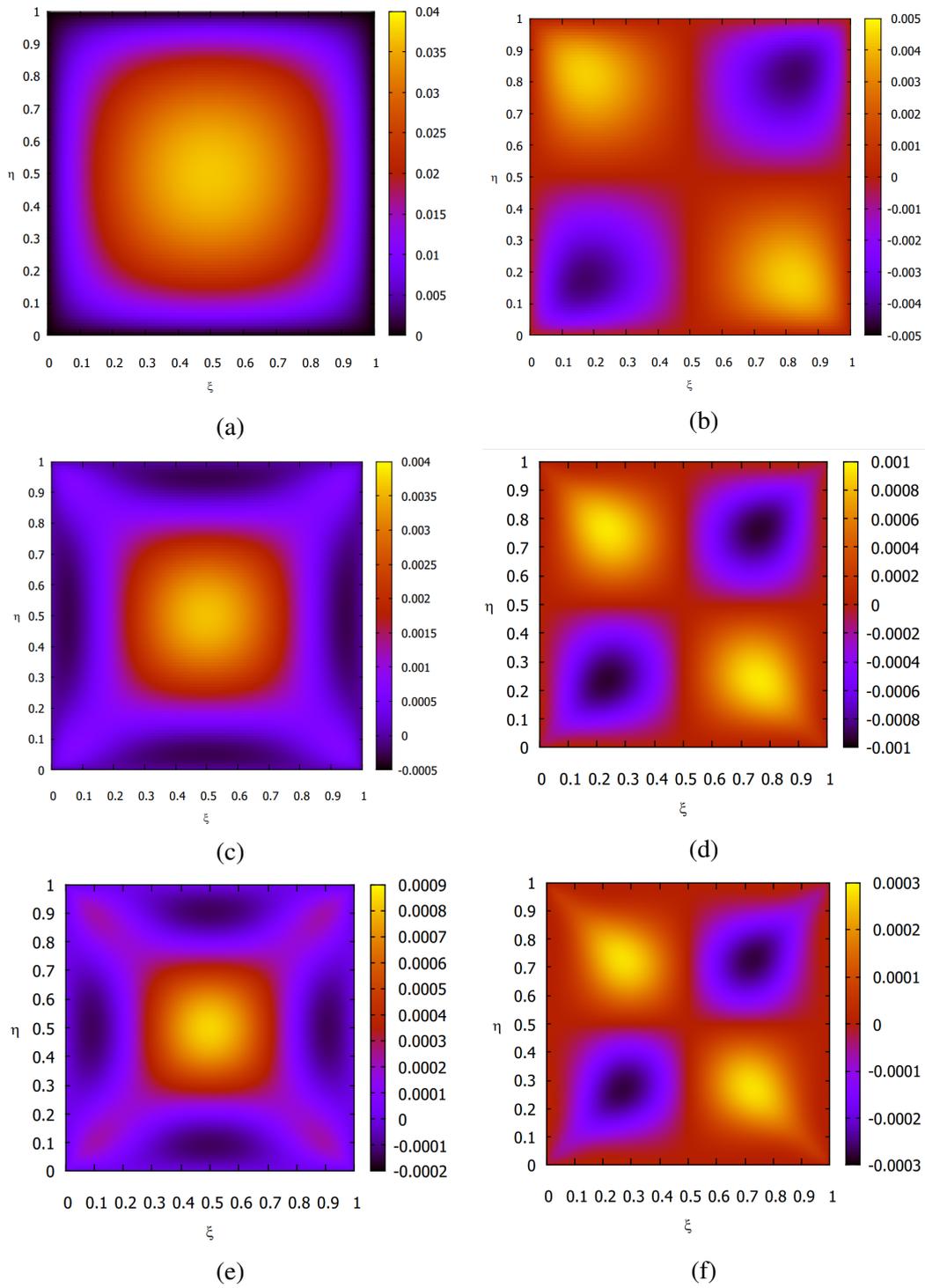


Figura 6.6: Mapa de cores da velocidade no sistema de coordenadas oblíquo para $\beta = 45^\circ$ e: (a) v_0 , (b) v_1 , (c) v_2 , (d) v_3 , (e) v_4 e (f) v_5 .

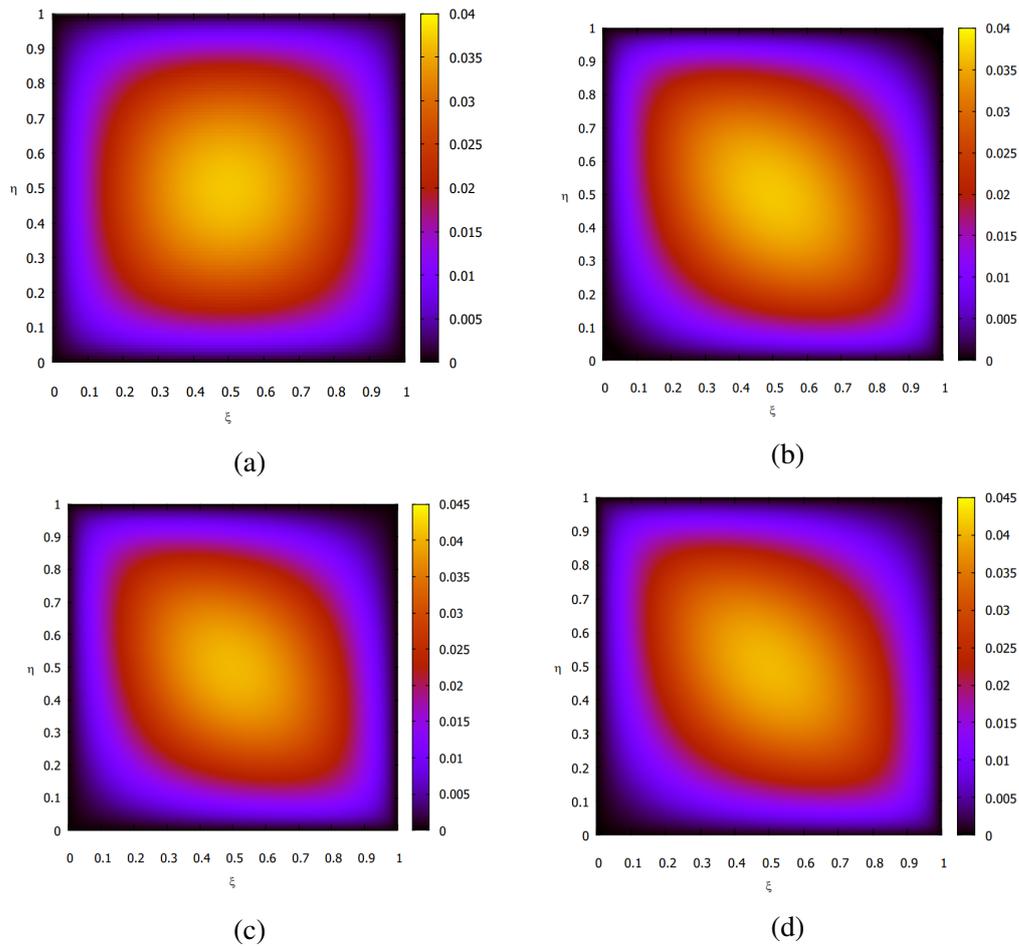


Figura 6.7: Mapa de cores da velocidade final no sistema de coordenadas oblíquo para $\beta = 45^\circ$ somando-se: (a) v_0 , (b) v_1 , (c) v_2 e (d) v_3 .

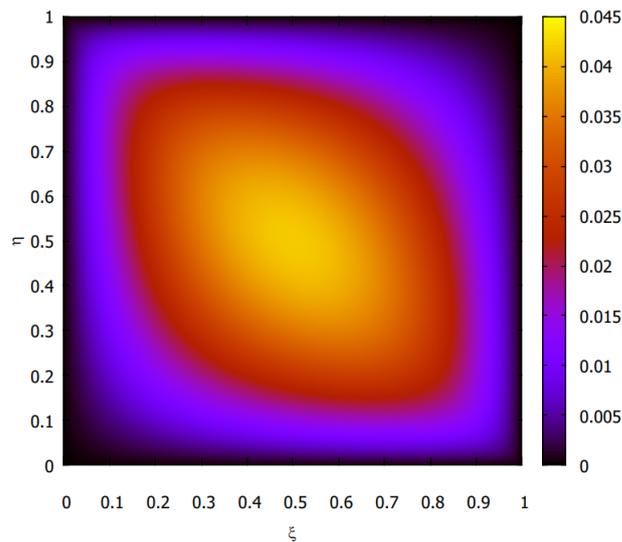


Figura 6.8: Mapa de cores do campo de velocidade encontrado pelo método das diferenças finitas.

Tabela 6.2: Variação do fRe_n com relação ao ângulo β considerando até a ordem de homotopia n .

$n \backslash \beta$	90°	80°	70°	60°	50°	45°	40°	30°	20°	10°
0	14.2270	14.2270	14.2270	14.2270	14.2270	14.2270	14.2270	14.2270	14.2270	14.2270
2	14.2270	14.1818	14.0532	13.8606	13.6315	13.5126	13.3958	13.1817	13.0121	12.9038
4	14.2270	14.1814	14.0469	13.8325	13.5573	13.4061	13.2521	12.9558	12.7089	12.5457
8	14.2270	14.1814	14.0465	13.8288	13.5402	13.3754	13.2018	12.8491	12.5337	12.3134
16	14.2270	14.1814	14.0465	13.8287	13.5391	13.3724	13.1946	12.8217	12.4662	12.1996
32	14.2270	14.1814	14.0465	13.8287	13.5391	13.3723	13.1943	12.8188	12.4503	12.1563
64	14.2270	14.1814	14.0465	13.8287	13.5391	13.3723	13.1943	12.8187	12.4484	12.1438
128	14.2270	14.1814	14.0465	13.8287	13.5391	13.3723	13.1943	12.8187	12.4482	12.1413
(Coutinho, 2023)	14.2270	14.1814	14.0465	13.8287	13.5391	13.3723	13.1943	12.8187	12.4482	12.1407

A fim de simplificar a análise, foi elaborada a [Tabela 6.3](#) com o erro relativo percentual de cada fRe com relação ao resultado numérico mais preciso encontrado por diferenças finitas.

Tabela 6.3: Variação do δfRe_n com relação ao ângulo β considerando até a ordem de homotopia n .

$n \backslash \beta$	90°	80°	70°	60°	50°	45°	40°	30°	20°	10°
0	-	0.32%	1.28%	2.88%	5.08%	6.39%	7.82%	10.98%	14.29%	17.19%
2	-	-	0.05%	0.23%	0.68%	1.04%	1.52%	2.83%	4.53%	6.29%
4	-	-	-	0.03%	0.13%	0.25%	0.43%	1.06%	2.09%	3.34%
8	-	-	-	-	-	0.02%	0.05%	0.23%	0.68%	1.42%
16	-	-	-	-	-	-	-	-	0.14%	0.49%
32	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0.13%
64	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0.03%
128	-	-	-	-	-	-	-	-	-	0.01%

Ressalta-se que, na [Tabela 6.3](#), o símbolo - denota um erro menor que 0.01%, ou seja, indistinguível do valor encontrado pelo método de diferenças finitas. Notamos, dessa maneira, um decréscimo do erro consoante com o aumento do erro e do aumento do ângulo de abertura, de acordo com o esperado, pois a homotopia realizada se apresenta com a vazão da ordem zero v_0 igual a do caso do ângulo reto.

Também é mostrado o erro relativo δfRe em porcentagem para cada ordem de homotopia na [Figura 6.9](#), de forma que o resultados obtidos são cada vez mais precisos conforme aumenta-se a ordem de homotopia. Além disso, apenas 14 ordens são necessárias para que se atinja um erro máximo de 1% para as simulações feitas com $N = 2101$ pontos na malha em relação ao resultado obtido por diferenças finitas para $N = 2901$ pontos no caso simétrico triangular. Mais uma vez, percebe-se a dificuldade encontrada nos ângulos pequenos, onde é encontrado o erro máximo. Porém, o erro é suprimido totalmente para todas as ordens na iteração de número 140, validando o resultado encontrado por diferenças finitas.

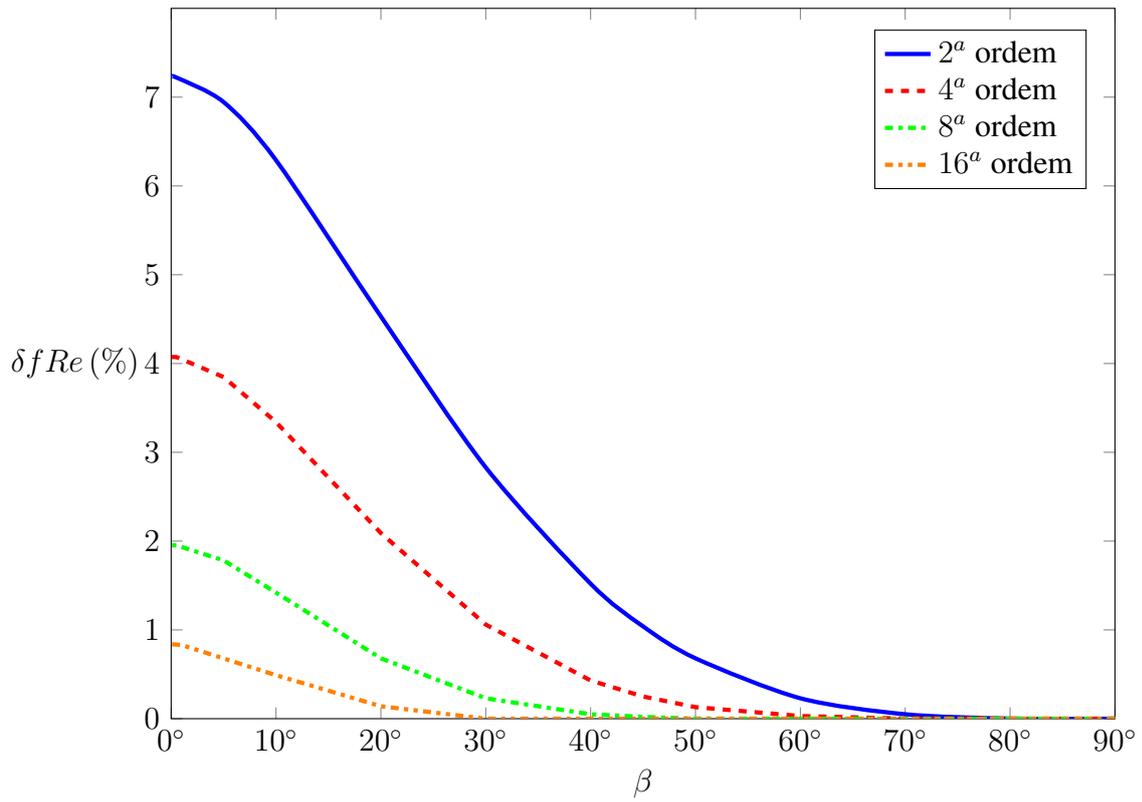


Figura 6.9: Erro relativo $\delta f Re$ em função do ângulo de abertura β .

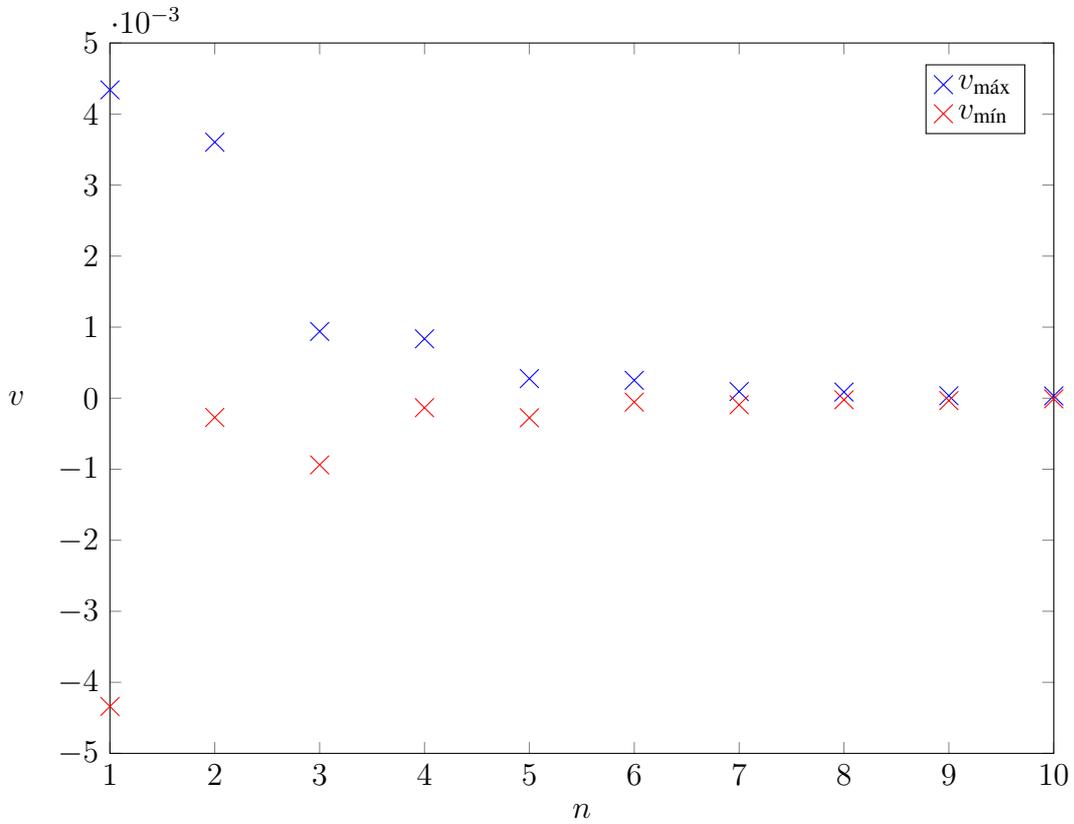


Figura 6.10: Velocidades em função da ordem de homotopia para $\beta = 45^\circ$.

Na [Figura 6.10](#) podemos ver a diminuição tanto da velocidade máxima quanto da velocidade mínima conforme adicionam-se mais ordens ao campo de velocidades, tendendo a zero. Já na primeira ordem, temos um valor absoluto na ordem de 10^{-3} , e na oitava ordem há uma diminuição de três ordens de grandeza nas duas quantidades, chegando a 10^{-6} , em concordância com a [Tabela 6.3](#) na qual se apresenta uma divergência de 0.02% do método das diferenças finitas na oitava ordem. Para a décima ordem, ambas velocidades estão na ordem de 10^{-7} e já não impactam significativamente no campo de velocidades final.

Logo, no caso de homotopia, nota-se a convergência rápida de cada ordem para os ângulos maiores, além de uma diminuição no erro nos pequenos graus em relação ao caso de diferenças finitas a cada nova ordem que é inserida. Fica evidenciada então a convergência para ambos os métodos, assertando os resultados obtidos.

A metodologia numérica foi implementada na linguagem Python. Todas as rotinas desenvolvidas estão disponíveis no Colab, por meio do link https://colab.research.google.com/drive/1OBsSkILELMGjeWCfPa5svWP_jjMOJMic?usp=sharing ou pelo QR code abaixo.



Figura 6.11: QR code de acesso ao código utilizado para a solução do problema.

Capítulo 7

Conclusão

7.1 Conclusões

Neste trabalho, solucionou-se o problema do escoamento laminar isotérmico de um fluido newtoniano incompressível através de um duto de seção transversal oblíqua.

Primeiramente, foi realizada uma revisão bibliográfica com o intuito de compreender o que havia sido feito sobre esse problema. A partir de uma análise bibliométrica, identificou-se todos os autores que trabalharam nesse assunto e quais eram as pendências na área.

Em seguida, utilizou-se a equação de Navier-Stokes em conjunto com a equação da continuidade para derivar a equação do escoamento de Poiseuille em dutos de geometria qualquer. Definiu-se a condição de contorno geométrica do losango e adimensionalizou a equação governante. Ademais, a fim de facilitar a solução do problema numericamente, propôs-se uma mudança de coordenadas do sistema cartesiano para o sistema de coordenadas oblíquo, facilitando a discretização do domínio em detrimento da simplicidade da equação governante.

Logo após, a equação governante foi aproximada numericamente. Foi utilizada uma metodologia de diferenças finitas no domínio quadrado no sistema oblíquo, partindo de aproximações de segunda ordem centradas. Solucionando o sistema linear associado ao método, foi aplicada a técnica da integração de Simpson em 2D para obter a vazão e, assim, obter o parâmetro fRe .

Após verificar a presença de pontos de velocidades simétricos ao longo das diagonais do campo de velocidades, sugeriu-se a criação de duas simetrias a fim de aumentar a quantidade de pontos presentes na malha e obter resultados mais precisos. Dessa maneira, criou-se uma malha quadrada no sistema oblíquo para uma simetria de metade do domínio e uma malha triangular no sistema cartesiano para uma simetria de um quarto do domínio e gerando uma simplificação da equação governante.

Sendo assim, obtivemos os campos de velocidades, velocidades máximas e velocidades médias em função do ângulo de abertura β , além de comparar a razão da velocidade máxima

pela velocidade média com [Shah e London \(1978\)](#), obtendo resultados mais precisos com relação a solução alcançada pelo autor. Também foi possível comparar os resultados do parâmetro de interesse no projeto de trocadores de calor compactos fRe com autores de referência na área, [Shah \(1975\)](#), [Bennett \(2021\)](#) e [Lee e Lee \(2002\)](#). Assim, verificou-se a qualidade dos resultados obtidos na região dos ângulos maiores que 45° , semelhantes entre todos autores, porém divergindo na faixa dos ângulos menores que 45° , fato que motivou uma validação dos resultados obtidos por diferenças finitas.

Por fim, demonstrou-se uma outra solução para o problema pelo método de perturbação de homotopia. Nessa proposta, é realizada uma aproximação recursiva de várias ordens para a equação governante no sistema de coordenadas oblíquo, em que parte-se do campo de velocidades do quadrado e a cada ordem a solução do problema vai se ajustando para o campo de velocidades do losango com ângulo de abertura de interesse. A solução numérica é promissora no sentido que o método de perturbação de homotopia permite a separação de variáveis da equação governante por meio da solução de diversas ordens passíveis de solução analítica. Espera-se, então, que este trabalho sirva de base para obtenção dessa solução.

Portanto, os resultados deste estudo numérico do escoamento isotérmico de um fluido newtoniano, viscoso e incompressível, induzido por um gradiente de pressão em um duto de seção transversal losangular constante, demonstraram notável convergência com os valores dos estudos de [Shah e London \(1978\)](#) e [Lee e Lee \(2002\)](#), fortalecendo ainda mais a confiabilidade e relevância das conclusões deste trabalho. Além disso, para consolidar a confiabilidade dos resultados, introduziu-se uma solução analítica inédita pelo método de homotopia, que se diferencia significativamente do cenário literário pré-existente. Os resultados dessa abordagem inovadora se mostraram altamente promissores, sugerindo que a solução analítica baseada no método de homotopia pode representar uma valiosa contribuição à literatura existente sobre esse problema.

7.2 Trabalhos futuros

Recomenda-se a utilização desse trabalho como base para:

- Variar a razão de aspecto do duto oblíquo. A introdução de uma razão de aspecto introduziria apenas uma nova adimensionalização e seria de extrema utilidade, visto que esse problema ainda não foi abordado na literatura e poderia ser validado com os dados apresentados neste trabalho.
- Acoplar a equação da energia. Os parâmetros de transferência de calor para trocadores de calor compactos são de grande interesse e seu cálculo é realizado a partir do campo de velocidades. Nesse sentido, utilizando os dados apresentados, pode-se chegar ao valor preciso do campo de temperatura do problema.

- Avaliar o escoamento de Couette no duto oblíquo. O estudo de escoamento de Couette, em combinação com o escoamento de Poiseuille é de interesse em processos de extrusão na indústria de plástico e de alimentos, conforme [Liu e Chen \(1987\)](#) e [Lopes e Siqueira \(2022\)](#).

Referências Bibliográficas

- 1 SHAH, R.; LONDON, A. *Laminar Flow Forced Convection in Ducts*. [S.l.]: Elsevier, 1978.
- 2 LEE, Y.-M.; LEE, P.-C. Heat transfer coefficients of laminar flow in a rhombic duct with constant wall temperature. *Numerical Heat Transfer, Part A: Applications*, Taylor & Francis, v. 42, n. 3, p. 285–296, 2002. Disponível em: <<https://doi.org/10.1080/10407780290059558>>.
- 3 BENNETT, T. D. Generalized Lévêque Solution for Ducts of Arbitrary Cross Section. *Journal of Heat Transfer*, v. 143, n. 4, p. 041801, 02 2021. ISSN 0022-1481. Disponível em: <<https://doi.org/10.1115/1.4049511>>.
- 4 LIOU, T.-M.; WANG, C.-S.; CHAN, S.-P. Effect of included angle on turbulent flow and heat transfer in rhombic serpentine heat exchangers. *International Journal of Thermal Sciences*, v. 114, p. 155–171, 2017. ISSN 1290-0729. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1290072916301697>>.
- 5 WOLK, G.; DREYER, M.; RATH, H. Flow patterns in small diameter vertical non-circular channels. *International Journal of Multiphase Flow*, v. 26, n. 6, p. 1037–1061, 2000. ISSN 0301-9322. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0301932299000695>>.
- 6 XU, M. et al. Facile synthesis and electrochemical properties of porous SnO₂ micro-tubes as anode material for lithium-ion battery. *Materials Letters*, v. 64, n. 8, p. 921–923, 2010. ISSN 0167-577X. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0167577X1000073X>>.
- 7 IQBAL, M.; AGGARWALA, B.; FOWLER, A. Laminar combined free and forced convection in vertical non-circular ducts under uniform heat flux. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 12, n. 9, p. 1123–1139, 1969. ISSN 0017-9310. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0017931069901203>>.
- 8 SHAH, R. Laminar flow friction and forced convection heat transfer in ducts of arbitrary geometry. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 18, n. 7, p. 849–862, 1975. ISSN 0017-9310. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0017931075901763>>.
- 9 *Analytical Solutions for Laminar Fully-Developed Flow in Microchannels With Non-Circular Cross-Section*, Volume 1: Symposia, Parts A, B and C de *Fluids Engineering Division Summer Meeting*, (Fluids Engineering Division Summer Meeting, Volume 1: Symposia, Parts A, B and C). 1323-1333 p. Disponível em: <<https://doi.org/10.1115/FEDSM2009-78167>>.

- 10 BAHRAMI, M. Laminar flow in microchannels with noncircular cross section. *Journal of Fluids Engineering*, v. 132, 11 2010.
- 11 BACELAR, M. D. et al. Hagen-poiseuille flow in a quarter-elliptic tube. *Fluids*, v. 8, n. 9, 2023. ISSN 2311-5521. Disponível em: <<https://www.mdpi.com/2311-5521/8/9/247>>.
- 12 DOGRUOZ, M. B.; ARIK, M.; PAUTSCH, A. Heat transfer in microchannels: substrate effects and cooling efficiency for rectangular and circular ducts. In: *2010 12th IEEE Intersociety Conference on Thermal and Thermomechanical Phenomena in Electronic Systems*. [S.l.: s.n.], 2010. p. 1–7.
- 13 MINAMITANI, T. et al. Micro-channel flow analyzers for visualization of micro-fluidic simulations. In: IEEE. *The 26th Annual International Conference of the IEEE Engineering in Medicine and Biology Society*. [S.l.], 2004. v. 1, p. 2038–2040.
- 14 ALEGRIA, L. M. C. *Soluções analíticas e numéricas para o escoamento laminar desenvolvido de fluido viscoplástico em dutos e anulares elípticos*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Tecnológica Federal do Paraná, 2011.
- 15 CHA, S. W.; O'HAYRE, R.; PRINZ, F. B. The influence of size scale on the performance of fuel cells. *Solid State Ionics*, v. 175, n. 1, p. 789–795, 2004. ISSN 0167-2738. Fourteenth International Conference on Solid State Ionics. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0167273804006307>>.
- 16 OTHMANE, M. B. et al. Mechanisms of particle deposition in ventilation ducts for a food factory. *Aerosol Science and Technology*, Taylor & Francis, v. 44, n. 9, p. 775–784, 2010. Disponível em: <<https://doi.org/10.1080/02786826.2010.490799>>.
- 17 KONGNUAN, S.; PHOLUANG, J. A Fourier series-based analytical solution for the oscillating airflow in a human respiratory tract. *Int J Pure Appl Math*, v. 78, n. 5, p. 721–733, 2012.
- 18 KIM, J. et al. Grille design for passenger car to improve aerodynamic and cooling performance using cfd technique. *International Journal of Automotive Technology*, v. 17, p. 967–976, 12 2016.
- 19 Asako, Y.; Faghri, M. Three-dimensional laminar heat transfer and fluid flow characteristics in the entrance region of a rhombic duct. *ASME Journal of Heat Transfer*, v. 110, p. 855–861, nov. 1988.
- 20 BAHRAMI, M.; YOVANOVICH, M.; CULHAM, J. A novel solution for pressure drop in singly connected microchannels of arbitrary cross-section. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 50, p. 2492–2502, 07 2007.
- 21 LÉVÊQUE, A. *Les Lois de la Transmission de Chaleur par Convection*. Dunod, 1928. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=tcIjHQAACAAJ>>.
- 22 Neves, R. A. *Escoamento laminar em dutos circulares com incrustações: Análise do perfil de velocidade e fator de atrito*. Monografia (Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Física)) — Universidade Estadual da Paraíba, 2020.
- 23 CENGEL, Y. A.; CIMBALA, J. M. *Fluid Mechanics Fundamentals and Applications*. 3. ed. New York, NY: McGraw-Hill Professional, 2013.

- 24 CONNOR, N. *What is Hydraulic Diameter – Definition*. 2022. Disponível em: <https://www.thermal-engineering.org/what-is-hydraulic-diameter-definition/>.
- 25 LEISSA, A. W. *Vibration of Plates*. [S.l.]: Scientific and Technical Information Division, National Aeronautics and Space Administration, 1969.
- 26 ANDERSON, J. D.; WENDT, J. *Computational fluid dynamics*. [S.l.]: Springer, 1995.
- 27 RAYNAUD, M.; BRANSIER, J. A new finite-difference method for the nonlinear inverse heat conduction problem. *Numerical Heat Transfer*, Taylor & Francis, v. 9, n. 1, p. 27–42, 1986. Disponível em: <https://doi.org/10.1080/10407788608913463>.
- 28 SOBRAL, Y. D.; HINCH, E. J. Finite amplitude steady-state one-dimensional waves in fluidized beds. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, Society for Industrial and Applied Mathematics, v. 77, n. 1, p. 247–266, 2017. ISSN 00361399. Disponível em: <http://www.jstor.org/stable/26166440>.
- 29 CRUZ, G.; SOUZA, C. de. Análise comparativa das teorias de Euler-Bernoulli e Timoshenko via método das diferenças finitas com implementação computacional em scilab. *Revista Tecnologia*, v. 39, p. 1, 06 2018.
- 30 GRAY, S. K.; GOLDFIELD, E. M. Dispersion fitted finite difference method with applications to molecular quantum mechanics. *The Journal of Chemical Physics*, American Institute of Physics, v. 115, n. 18, p. 8331–8344, 2001.
- 31 ZHOU, P.-b. Finite difference method. In: _____. *Numerical Analysis of Electromagnetic Fields*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1993. p. 63–94. ISBN 978-3-642-50319-1. Disponível em: https://doi.org/10.1007/978-3-642-50319-1_3.
- 32 PEDROLA, G. L. *Beam Propagation Method for Design of Optical Waveguide Devices*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2015.
- 33 ATKINSON, K. *An Introduction to Numerical Analysis*. Wiley, 1991. ISBN 9780471624899. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=wbCjEAAAQBAJ>.
- 34 BURDEN, R. L.; FAIRES, J. D. *Numerical Analysis*. 9. ed. Florence, AL: Cengage Learning, 2010.
- 35 BREGAINS, J. C. et al. Calculating directivities with the two-dimensional Simpson's rule. *IEEE Antennas Propag. Mag.*, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), v. 46, n. 4, p. 106–112, ago. 2004.
- 36 SILVA, C. T. L. da; ARENALES, M. N.; SOUSA, R. S. Métodos tipo dual simplex para problemas de otimização linear canalizados e esparsos. *Pesquisa Operacional*, FapUNIFESP (SciELO), v. 27, n. 3, p. 457–486, 2007. Disponível em: <https://doi.org/10.1590/s0101-74382007000300004>.
- 37 LUCA, C. C. S. d. *Análise comparativa de métodos numéricos para simulação de transitórios eletromagnéticos*. [S.l.]: Universidade Estadual Paulista (Unesp), 2020.
- 38 RUNBORG, O. *Numerical Solutions of Differential Equations*. 2012. University Lecture.

- 39 HE, J.-H. Homotopy perturbation technique. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 178, n. 3, p. 257–262, 1999. ISSN 0045-7825. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045782599000183>>.
- 40 MOON, P.; SPENCER, D. *Field Theory Handbook: Including Coordinate Systems, Differential Equations and Their Solutions*. Springer Berlin Heidelberg, 2012. ISBN 9783642832437. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=O3TpCAAQBAJ>>.
- 41 LIU, T.; CHEN, K. Generalized Couette flow in channels of irregular cross-section. *Journal of the Chinese Institute of Engineers*, Taylor & Francis, v. 10, n. 3, p. 345–352, 1987.
- 42 LOPES, A. v. B.; SIQUEIRA, I. R. Couette–Poiseuille Flow in Semi-Elliptic Channels. *Journal of Fluids Engineering*, v. 144, n. 10, p. 101302, 05 2022. ISSN 0098-2202. Disponível em: <<https://doi.org/10.1115/1.4054356>>.