



ESCOAMENTO LAMINAR EM DUTOS TRIANGULARES

RICARDO TAVARES DOMINGOS

**PROJETO DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA**

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

FACULDADE DE TECNOLOGIA

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA**

ESCOAMENTO LAMINAR EM DUTOS TRIANGULARES

RICARDO TAVARES DOMINGOS

Orientador: PROF. DR. ANDRÉ VON BORRIES LOPES, ENM/UNB

PROJETO DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

**PUBLICAÇÃO ENM.PG - XXX/AAAA
BRASÍLIA-DF, 19 DE DEZEMBRO DE 2023.**

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA**

ESCOAMENTO LAMINAR EM DUTOS TRIANGULARES

RICARDO TAVARES DOMINGOS

PROJETO DE GRADUAÇÃO SUBMETIDO AO DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA DA FACULDADE DE TECNOLOGIA DA UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA, COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE ENGENHEIRO MECÂNICO.

APROVADA POR:

Prof. Dr. André von Borries Lopes, ENM/UnB

Orientador

Prof. Dr. José Luiz Alves Fontoura Rodrigues, ENM/UnB

Examinador interno

Prof. Dr. Eder Lima de Albuquerque, ENM/UnB

Examinador interno

BRASÍLIA, 19 DE DEZEMBRO DE 2023.

FICHA CATALOGRÁFICA

RICARDO TAVARES DOMINGOS

Escoamento laminar em dutos triangulares

2023xv, 112p., 201x297 mm

(ENM/FT/UnB, Engenheiro Mecânico, Engenharia Mecânica, 2023)

Projeto de Graduação - Universidade de Brasília

Faculdade de Tecnologia - Departamento de Engenharia Mecânica

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

RICARDO TAVARES DOMINGOS (2023) Escoamento laminar em dutos triangulares. Projeto de Graduação em Engenharia Mecânica, Publicação xxx/AAAA, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 112p.

CESSÃO DE DIREITOS

AUTOR: RICARDO TAVARES DOMINGOS

TÍTULO: Escoamento laminar em dutos triangulares.

GRAU: Engenheiro Mecânico ANO: 2023

É concedida à Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias deste projeto de graduação e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor se reserva a outros direitos de publicação e nenhuma parte deste projeto de graduação pode ser reproduzida sem a autorização por escrito do autor.

RICARDO TAVARES DOMINGOS

ricardotdomingos@hotmail.com

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus por me guiar e me fortalecer durante toda a minha caminhada.

Aos meus pais, Cristiane e Lucas, agradeço por sempre estarem ao meu lado, por acreditarem em mim e por todo amor e apoio incondicional que sempre me ofereceram. Vocês são os maiores responsáveis por todas as minhas conquistas.

Aos meus irmãos, Lucas e Leonardo, agradeço pelo companheirismo, amizade e alegria que compartilhamos em todos os momentos da minha vida. Aos meus avós e demais membros da minha família, agradeço pelo carinho e por estarem comigo em todos os momentos da minha vida.

Aos meus amigos e colegas de universidade, agradeço por fazerem essa jornada ser mais leve e significativa. Ao meu orientador, Professor André Lopes, agradeço por ter me dado a oportunidade de trabalhar nesta área, pela paciência e por sempre estar disponível para me ajudar. Estendo também esse agradecimento a todos os Professores e funcionários que de alguma forma participaram dessa trajetória.

Ricardo Tavares Domingos.

Resumo

Este trabalho trata sobre escoamento laminar, totalmente desenvolvido e governado por um gradiente de pressão constante em dutos com a seção transversal triangular. Esses dutos são utilizados principalmente em trocadores de calor compactos, que apresentam aplicações nas indústrias aeroespacial, química, eletrônica e nuclear. Em um primeiro momento, foram obtidas a equação governante e as condições de contorno, a partir de hipótese simplificadoras. Duas metodologias independentes foram aplicadas para resolver este problema. A primeira foi o método variacional de Rayleigh-Ritz. Neste método, o campo de velocidade foi aproximado como uma série de funções base, e com a minimização da formulação variacional da equação governante, o problema se reduziu a resolver um sistema linear de equações. Posteriormente, foi aplicado um método analítico, que consiste em transformar o domínio triangular em um domínio retangular por meio de uma transformação de coordenadas. Desse modo, o campo de velocidade é assumido como uma série de Fourier, em que seus coeficientes foram obtidos a partir da solução de um sistema linear. Os resultados obtidos pelas duas metodologias foram separados em triângulos retângulo, isósceles e arbitrário e eles foram comparados com valores reportados na literatura, obtendo uma ótima concordância entre todos os dados analisados.

Palavras-chave: Escoamento em dutos, seção transversal triangular, método de Rayleigh Ritz, solução analítica

Abstract

This work investigates laminar, fully developed and governed by a constant pressure gradient flows in ducts with a triangular cross-section. The major application of this type of duct is in compact heat exchangers, which find applications in the aerospace, chemical, electronics, and nuclear industries. Initially, the governing equation and boundary conditions were obtained, based on simplifying hypotheses. Two independent methodologies were applied to solve this problem. The first one, was the Rayleigh-Ritz variational method. In this method, the velocity field was approximated as a series of base functions, and by minimizing the variational formulation of the governing equation, the problem was reduced to solving a linear system of equations. Subsequently, an analytical method was applied, which consist on transforming the triangular domain into a rectangular domain through a coordinate transformation. Therefore, the velocity field is assumed as a Fourier series, in which the coefficients are obtained from the solution of a linear system. The obtained results by the two methodologies were separated into right, isosceles, and arbitrary triangles, and they were compared with the values reported in the literature, obtaining excellent agreement between all the data analyzed.

Key-words: Flow in ducts, triangular cross-section, Rayleigh-Ritz method, Analytical solution

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	MOTIVAÇÃO	1
1.2	OBJETIVOS	4
1.2.1	OBJETIVO PRINCIPAL	4
1.2.2	OBJETIVOS ESPECÍFICOS	4
1.3	ESTRUTURA DO TRABALHO	5
2	REVISÃO DE LITERATURA	6
2.1	ESCOAMENTO EM DUTOS TRIANGULARES	6
2.2	MÉTODO DE RAYLEIGH-RITZ	13
3	FORMULAÇÃO MATEMÁTICA	16
3.1	EQUAÇÃO GOVERNANTE	16
3.2	VAZÃO VOLUMÉTRICA	19
3.3	NÚMERO DE REYNOLDS	20
3.4	FATOR DE ATRITO	20
3.5	MODELO PROPOSTO	21
3.6	ADIMENSIONALIZAÇÃO	21
4	METODOLOGIA NUMÉRICA	25
4.1	NOÇÕES DE CÁLCULO VARIACIONAL	25
4.1.1	LEMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO VARIACIONAL	26
4.1.2	EQUAÇÃO DE EULER-LAGRANGE	28
4.1.3	FUNCIONAL COM DUAS VARIÁVEIS INDEPENDENTES	29
4.1.4	FORMULAÇÃO VARIACIONAL DA EQUAÇÃO DE POISSON	31
4.2	MÉTODO RAYLEIGH-RITZ	32
4.3	APLICAÇÃO NO MODELO	34
4.3.1	MUDANÇA DE COORDENADAS	35
4.3.2	APLICAÇÃO DO MÉTODO DE RAYLEIGH-RITZ	36
4.3.3	CÁLCULO DA VAZÃO E DO fRe	37
5	IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA	39
5.1	IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA	39

5.1.1	CONSTRUÇÃO DAS FUNÇÕES BASE ϕ_i E SUAS DERIVADAS	40
5.1.2	CONSTRUÇÃO DO VETOR Λ_i	41
5.1.3	CONSTRUÇÃO DA MATRIZ Γ_{ij}	42
5.1.4	OBTENÇÃO DOS RESULTADOS	43
5.2	VALIDAÇÃO NUMÉRICA	44
5.2.1	DUTO RETANGULAR	44
5.2.2	DUTO LOSANGULAR	46
5.2.3	DUTO TRIANGULAR	48
6	METODOLOGIA ANALÍTICA	56
6.1	SOLUÇÃO ANALÍTICA	56
6.2	CÁLCULO DA VAZÃO	62
6.3	IMPLEMENTAÇÃO	63
6.4	CONVERGÊNCIA DO MÉTODO	65
7	RESULTADOS E DISCUSSÕES	69
7.1	TRIÂNGULO RETÂNGULO	69
7.2	TRIÂNGULO ISÓSCELES	74
7.3	TRIÂNGULO ARBITRÁRIO	80
8	CONCLUSÃO	85
8.1	CONSIDERAÇÕES FINAIS	85
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	87
A	CÓDIGO IMPLEMENTANDO O MÉTODO DE RAYLEIGH-RITZ EM DUTOS TRIANGULARES	90
B	CÓDIGO COM AS FUNÇÕES QUE RETORNAM OS VALORES DAS INTEGRAIS DA SOLUÇÃO ANALÍTICA	94

LISTA DE FIGURAS

1.1	Exemplos de geometrias não circulares utilizada em dutos. Adaptado de Yovanovich et al. (1997).	1
1.2	Comparação de dutos com e sem incrustações. Retirado de Penafiel (2020). ...	2
1.3	Exemplos de aletas de trocadores de calor compactos. A geometria das aletas corrugadas são: (a) Aletas triangulares retas; (b) Aletas retangulares retas; (c) Aletas onduladas; (d) Tira fina deslocada; (e) Aletas com múltiplas lâminas; (f) Aletas perfuradas. Retirado de Zohuri (2017).	3
1.4	Ilustração de um trocador de calor compacto de aletas retas triangulares. Retirado de Zhang (2007).	3
2.1	Contornos de velocidades constantes para um duto com geometria de um triângulo equilátero. Retirado de Lekner (2007).	7
2.2	(a) Seção transversal do duto triangular isósceles. (b) Contornos de velocidades constantes. Retirado de Sparrow (1962).	8
2.3	(a) Seção transversal arbitrária; (b) Triângulo isósceles; (c) Triângulo equilátero com os cantos arredondados; (d) Senoidal; (e) Losangular; (f) Trapezoidal. Retirado de Shah (1975).	9
2.4	Resultados do parâmetro de queda de pressão fRe , do incremento de queda de pressão $K(\infty)$ e do comprimento hidrodinâmico de entrada adimensional L_{hy}^+ em função da razão de aspecto α^* . Retirado de Shah (1975).	9
2.5	Resultado do fRe em função do raio dos cantos para um triângulo equilátero. Retirado de Ray e Misra (2010).	10
2.6	Resultados de fRe , K e Nu em função do ângulo de abertura para dutos com geometrias do setor circular, triângulo isósceles e triângulo retângulo. Retirado de Sparrow e Haji-Sheikh (1965).	10
2.7	(a) Resultados de fRe e Nu para triângulo isósceles na horizontal. (b) Resultados de fRe e Nu para o triângulo equilátero em função do ângulo de inclinação. Retirado de Nakamura et al. (1977).	11
2.8	Resultados para fRe para escoamentos totalmente desenvolvido em dutos triangulares. Retirado de Abdel-Wahed e Attia (1984).	12
2.9	(a) Contornos de velocidade para o triângulo isósceles com razão de aspecto igual a 1. (b) Resultados de fRe para diferentes triângulos isósceles. Retirado de Karabulut, Ipci e Cinar (2016).	12

2.10	Parâmetro de queda de pressão do triângulo retângulo para diversos números de Rayleigh (N_{Ra}) em função do ângulo de abertura. Retirado de Iqbal, Aggarwala e Fowler (1969)	13
2.11	Contornos de velocidade para um duto em forma de lente com razão de aspecto igual a 0,5. Retirado de Wang (2008).....	14
2.12	Convergência dos valores de fRe para uma razão de aspecto $c = 0,5$. Retirado de Wang (2009).....	14
3.1	Duto com seção transversal constante com área A	16
3.2	Duto com seção transversal triangular.	21
3.3	Seção transversal do duto triangular na forma dimensional e adimensional.	23
4.1	Extremos locais de uma função definida no intervalo $[x_1, x_2]$	26
4.2	Gráfico de uma função positiva de $\eta(x)$ somente no intervalo $\zeta - h \leq x \leq \zeta + h$	27
4.3	Caminho qualquer $Y(x)$ e a função $y(x)$ que minimiza o funcional I	28
4.4	Triângulo no domínio (x, y) e (ξ, η)	35
5.1	(a) Retângulo na forma dimensional; (b) Retângulo na forma adimensional. ...	45
5.2	Comparação entre o fRe para duto retangular calculado neste trabalho com o retirado da Tabela 42 de Shah e London (1978).	46
5.3	(a) Losango na forma dimensional; (b) Losango na forma adimensional.	47
5.4	Comparação entre o fRe para o duto losangular calculado neste trabalho com o retirado da tabela 73 de Shah e London (1978).	48
5.5	Contornos de velocidade constantes para o triângulo equilátero. (a) Este trabalho; (b) Lekner (2007).	50
5.6	Triângulo retângulo isósceles. Retirado de Jog (2015).	50
5.7	Triângulo $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$	54
6.1	(a) Seção triangular retirada de Chernyshov (2014); (b) Seção triangular utilizada neste trabalho.	57
6.2	Triângulo no sistema cartesiano e retângulo no sistema (x, ζ)	58
6.3	Análise gráfica da convergência do método analítico para o triângulo equilátero.	66
6.4	Análise gráfica da convergência do método analítico para o triângulo retângulo isósceles.	66
6.5	Análise gráfica da convergência do método analítico para o triângulo $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$	67
7.1	Triângulo retângulo ($\delta = \cos \theta$).	69
7.2	Gráfico dos valores de fRe em função de θ , obtidos pela metodologia analítica e pelo método de Rayleigh-Ritz.	71
7.3	Gráfico dos valores da vazão em função de θ , obtidos pela metodologia analítica e pelo método de Rayleigh-Ritz.	72

7.4	Contorno de velocidade triângulos retângulo ($\delta = \cos \theta$): (a) $\theta = 20^\circ$; (b) $\theta = 25^\circ$; (c) $\theta = 30^\circ$; (d) $\theta = 35^\circ$; (e) $\theta = 40^\circ$; (f) $\theta = 45^\circ$	73
7.5	Triângulo isósceles ($\delta = 2 \cos \theta$).....	74
7.6	Gráfico dos valores de fRe em função de β , obtidos pela metodologia analítica e pelo método de Rayleigh-Ritz.	77
7.7	Gráfico dos valores da vazão em função de β , obtidos pela metodologia analítica e pelo método de Rayleigh-Ritz.	77
7.8	Contorno de velocidade triângulos isósceles ($\delta = 2 \cos \theta$): (a) $\beta = 40^\circ$; (b) $\beta = 50^\circ$; (c) $\beta = 70^\circ$; (d) $\beta = 80^\circ$; (e) $\beta = 120^\circ$	79
7.9	Gráfico de fRe em função do ângulo de abertura para as razões de aspecto iguais a 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5 e 1,0. Linhas cheias - Método analítico; Pontos discretos - Método de Rayleigh-Ritz.....	83
7.10	Gráfico da vazão em função do ângulo de abertura para as razões de aspecto iguais a 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5 e 0,6. Linhas cheias - Método analítico; Pontos discretos - Método de Rayleigh-Ritz.....	83
7.11	Contornos de velocidades para triângulos arbitrários com $\theta = 60^\circ$ para as seguintes razões de aspecto: (a) $\delta = 0,3$; (b) $\delta = 0,4$; (c) $\delta = 0,6$; (d) $\delta = 0,8$	84

LISTA DE TABELAS

5.1	Análise de convergência do método de Rayleigh-Ritz para o triângulo retângulo isósceles.	53
5.2	Análise de convergência do método de Rayleigh-Ritz para o triângulo retângulo isósceles.	55
6.1	Correspondência entre a notação utilizada por Chernyshov (2014) e pela utilizada neste trabalho.	58
6.2	Análise de convergência do método analítico para o triângulo equilátero	67
6.3	Análise de convergência do método analítico para o triângulo retângulo isósceles.....	68
6.4	Análise de convergência do método analítico para o triângulo 30° – 60° – 90°.	68
7.1	Análise de convergência do método de Rayleigh-Ritz para triângulos retângulos.	70
7.2	Valores de fRe para triângulos retângulos obtidos pelos métodos analítico e de Rayleigh-Ritz.	70
7.3	Resultados de fRe , vazão (Q), razão entre velocidade máxima e média $\left(\frac{\tilde{w}_{\max}}{U_m}\right)$, área e perímetro para triângulos retângulos, obtidos pelo método de Rayleigh-Ritz.	72
7.4	Análise de convergência do método de Rayleigh-Ritz para triângulos isósceles.	75
7.5	Valores de fRe para triângulos isósceles obtidos pelos métodos analítico e de Rayleigh-Ritz.	75
7.6	Comparação fRe obtido neste trabalho com os presentes na literatura.....	76
7.7	Resultados de fRe , vazão (Q), razão entre velocidade máxima e média $\left(\frac{\tilde{w}_{\max}}{U_m}\right)$, área e perímetro para triângulos isósceles, obtidos pelo método de Rayleigh-Ritz.	78
7.8	Valores calculados do fRe para δ igual a 0,1 até 0,4.....	80
7.9	Valores calculados do fRe para δ igual a 0,5 até 0,8.....	81
7.10	Valores calculados do fRe para δ igual a 0,9 e 1,0.....	82

LISTA DE SÍMBOLOS

Grupos adimensionais

Nu	Número de Nusselt
Re	Número de Reynolds
N_{Ra}	Número de Rayleigh

Símbolos gregos

α	Razão de aspecto para o retângulo
∇^2	Operador Laplaciano
∇	Vetor gradiente
Γ	Matriz do método de Rayleigh-Ritz
Λ	Vetor do método de Rayleigh-Ritz
δ	Razão de aspecto para o triângulo
γ	Ângulo de abertura para o losango
μ	Viscosidade dinâmica
Φ	Função escalar
ϕ_i	Funções base
ρ	Massa específica
θ	Ângulo de abertura para o triângulo

Símbolos latinos

g	Aceleração gravitacional
n	Vetor normal unitário externo
u	Campo de velocidades

\boldsymbol{x}	Vetor posição
\hat{G}	Gradiente do campo de pressão
τ_w	Tensão de cisalhamento na parede do duto
A	Área
a_i	Coefficientes de Ritz
A_{mn}	Coefficientes da série de Fourier
D_h	Diâmetro hidráulico
f	Fator de atrito de Fanning
G	Gradiente do campo de pressão modificada
N	Número de coeficientes de Ritz
P	Perímetro molhado
p	Campo de pressão
p_m	Campo de pressão modificada
Q	Vazão volumétrica
S	Número de coeficientes na série de Fourier
U_m	Velocidade média
W	Velocidade de referência

Capítulo 1

Introdução

1.1 Motivação

O estudo de escoamentos em dutos é de suma importância para o dimensionamento e projeto de trocadores de calor. A geometria da seção transversal do duto mais utilizada para esta aplicação é a circular, devido à sua capacidade de suportar grandes valores de diferença de pressão interna e externa sem sofrer grandes deformações (Çengel, 2012). A análise de escoamentos em dutos com a seção transversal não circular, como as mostradas na Figura 1.1, também é importante para o desenvolvimento de trocadores de calor. Uma das aplicações desse tipo de duto, discutida por Santos Júnior (2018), é o estudo de dutos circulares que apresentam incrustações de parafina. Nesse caso, devido as incrustações o duto apresenta uma geometria irregular, afetando, dessa forma, a troca de calor entre o fluido e a parede do duto. A Figura 1.2 apresenta a comparação de dutos com e sem incrustações, evidenciando a diferença entre as seções transversais dos dois dutos.

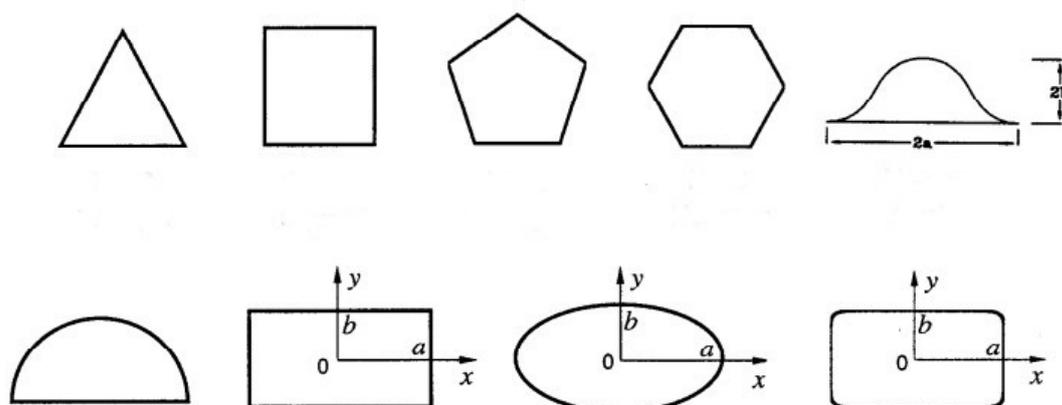


Figura 1.1: Exemplos de geometrias não circulares utilizadas em dutos. Adaptado de Yovanovich et al. (1997).



Figura 1.2: Comparação de dutos com e sem incrustações. Retirado de [Penafiel \(2020\)](#).

Outra aplicação é o uso de dutos não circulares em trocadores de calor compactos. Assim, segundo [Ray e Misra \(2010\)](#) o projeto de um trocador de calor deve levar em consideração os seguintes fatores:

1. Alto valor da razão entre a área de contato e o volume do trocador;
2. Alto coeficiente de troca de calor;
3. Um baixo valor do coeficiente de atrito e conseqüentemente uma menor queda de pressão.

Trocadores de calor compactos utilizam dutos com geometrias que satisfazem todos os pontos acima, principalmente o primeiro que está diretamente relacionado ao tamanho do equipamento, sendo um trocador de calor considerado compacto se essa razão for maior que $700 \text{ m}^2/\text{m}^3$ ([Zohuri, 2017](#)). Dessa forma, esse tipo de trocador é utilizado em diversas indústrias como a aeroespacial, nuclear, química, biomédica e eletrônica ([Ray e Misra, 2010](#)).

A indústria nuclear é onde reside uma das mais importantes aplicações de trocadores de calor compactos. Isso ocorre devido as usinas nucleares utilizarem reatores modulares pequenos, que usam trocadores compactos para obter uma grande eficiência e eficácia na troca de calor em um tamanho reduzido ([Zohuri, 2017](#)). A Figura 1.3 ilustra exemplos de aletas utilizadas nesse tipo de trocador de calor, o que mostra as diversas geometrias encontradas para essa aplicação.

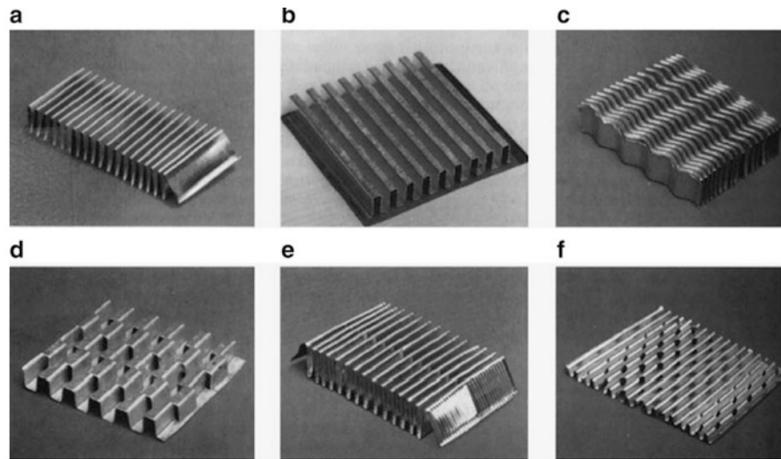


Figura 1.3: Exemplos de aletas de trocadores de calor compactos. A geometria das aletas corrugadas são: (a) Aletas triangulares retas; (b) Aletas retangulares retas; (c) Aletas onduladas; (d) Tira fina deslocada; (e) Aletas com múltiplas lâminas; (f) Aletas perfuradas. Retirado de [Zohuri \(2017\)](#).

Vale notar ainda, que os escoamentos em trocadores de calor compactos, que apresentam a razão entre a sua área de contato e seu volume maior que $3000 \text{ m}^2/\text{m}^3$, estão geralmente na faixa de regime laminar devido às dimensões reduzidas associadas a esses equipamentos ([Zohuri, 2017](#)). Pelo fato do escoamento ser laminar, o coeficiente de troca de calor nesses trocadores tende a ter um valor baixo. Por essa razão, algumas tecnologias são propostas para aumentar a intensidade da turbulência em trocadores de calor compactos, visando assim o aumento do coeficiente de troca de calor. Entretanto, isso também acarreta em um aumento do atrito e da queda de pressão no trocador ([Souza e Manzela, 2015](#)).

Em particular, dutos triangulares são os que apresentam a melhor razão entre a área de contato e o volume ocupado, principalmente em relação a dutos com a geometria circular ([Herris et al., 2015](#)). Outra vantagem da geometria triangular é a possibilidade de se obter uma alta resistência mecânica utilizando materiais finos ([Zhang, 2007](#)). A Figura 1.4 apresenta uma imagem esquemática de um trocador de calor compacto de aletas retas, que apresenta dutos com a seção transversal triangular.

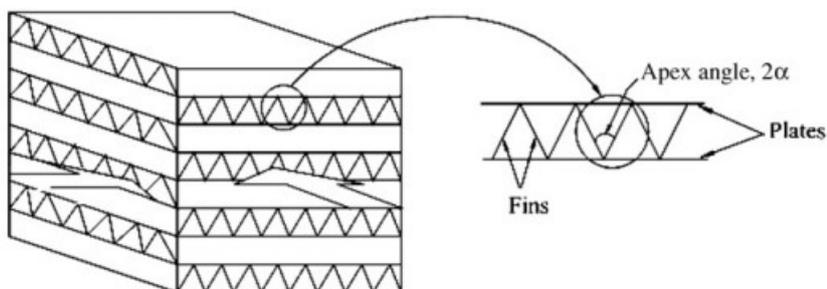


Figura 1.4: Ilustração de um trocador de calor compacto de aletas retas triangulares. Retirado de [Zhang \(2007\)](#).

A desvantagem de se utilizar essa geometria é que a troca de calor é menor, principal-

mente em relação ao duto circular. Isso acontece em razão da diminuição da área de contato entre o fluido e a parede do duto devido a presença dos cantos (Herris et al., 2015). Esse problema pode ser tratado de duas formas, a primeira, estudada por Ray e Misra (2010) em dutos retangulares e triangulares, é arredondar os cantos fazendo com que a superfície de contato aumente. A segunda forma de aumentar a troca de calor em dutos triangulares é utilizar nano fluidos para aumentar a eficiência da troca de calor. Esse tipo de fluido utiliza nanopartículas de metal ou óxido metálico que aumenta a condutividade térmica do fluido base, que pode ser a água, etileno glicol ou um óleo (Nasiri, Etermad e Bagheri, 2011).

1.2 Objetivos

1.2.1 Objetivo principal

Este trabalho tem como objetivo realizar uma análise numérica e analítica do escoamento isotérmico, laminar e completamente desenvolvido em um duto com seção transversal triangular. Para isso, será utilizado dois métodos de solução independentes para encontrar o campo de velocidade e, desse modo, obter parâmetros que auxiliam no projeto de dutos com esta geometria. O primeiro método utilizado foi o de Rayleigh-Ritz, e, posteriormente, o problema foi resolvido analiticamente, a partir da metodologia proposta por Chernyshov (2014), ainda inédita no contexto de mecânica dos fluidos.

1.2.2 Objetivos específicos

Para que o objetivo principal seja cumprido, os seguintes pontos devem ser alcançados:

- Obtenção da equação governante e das condições de contorno, a partir das hipóteses de escoamento incompressível, unidirecional, permanente e fluido newtoniano;
- Realização de um estudo sobre cálculo variacional para obter a base matemática para a aplicação do método de Rayleigh-Ritz;
- Aplicar o método de Rayleigh-Ritz no modelo proposto;
- Realizar a implementação numérica e a validação do código;
- Realizar uma analogia com o trabalho de Chernyshov (2014), e aplica a metodologia desse artigo no modelo proposto;
- Comparar e discutir os resultados obtidos com as duas metodologias, e valida-los com os valores disponíveis na literatura.

1.3 Estrutura do trabalho

O trabalho está organizado em 8 capítulos. No [Capítulo 2](#) é apresentado a metodologia e resultados de trabalhos presentes na literatura que abordaram o mesmo problema. O [Capítulo 3](#) discute a modelagem matemática do problema mostrando a obtenção da equação governante e das condições de contorno.

No [Capítulo 4](#), é apresentado o método de Rayleigh-Ritz, discutindo conceitos básicos de cálculo variacional e como esse método é aplicado no modelo proposto. A implementação e a validação numérica desse método estão contidas no [Capítulo 5](#). Esse mesmo problema foi resolvido analiticamente no [Capítulo 6](#), e no [Capítulo 7](#) são mostrados os resultados obtidos por esses dois métodos. Por fim, no [Capítulo 8](#), estão as considerações finais desse trabalho.

Capítulo 2

Revisão de literatura

Em um primeiro momento, neste capítulo, será feita uma revisão de trabalhos que estudaram escoamentos em dutos, focando naqueles que abordaram dutos com seção transversal triangular. Posteriormente, será realizada uma análise dos trabalhos que utilizaram o método de Rayleigh-Ritz para resolver escoamentos em dutos.

2.1 Escoamento em dutos triangulares

Nos estudos sobre escoamentos em dutos não há uma técnica única de solução que se aplica a qualquer geometria. Assim, [Shah e London \(1978\)](#) destacam 9 métodos presentes na literatura para resolver escoamentos hidrodinamicamente e termodinamicamente desenvolvidos em dutos, esses métodos são: solução exata das equações governantes; método de analogia; método de mapeamento conforme; método das diferenças finitas; método de colocação; método dos mínimos quadrados; métodos variacionais; método para dutos com pequena razão de aspecto.

As soluções exatas das equações governantes foram obtidas apenas para algumas geometrias como as circulares, elípticas e anulares. Recentemente, [Bacelar et al. \(2023\)](#) obtiveram a solução exata para o escoamento de Hagen-Poiseuille em duto quarto elíptico utilizando o método das separação de variáveis. Para dutos com a geometria triangular, de acordo com [Langlois e Deville \(2014\)](#), a solução exata pode ser obtida para um triângulo equilátero utilizando um método semi-inverso para encontrar o perfil de velocidade. [Boussinesq \(1868\)](#), foi o primeiro a obter a solução exata para esta geometria, neste mesmo trabalho foi demonstrado as soluções para os dutos elíptico e retangular. A Figura 2.1 mostra os contornos de velocidades constantes para um escoamento laminar, totalmente desenvolvido, permanente, incompressível e com todas as propriedades do fluido constantes em um triângulo equilátero. A partir dessa imagem, nota-se que os contornos de velocidades mudam de um perfil próximo ao circular na região em que a velocidade é máxima para um perfil mais próximo da parede do duto à medida que se aproxima dela.

A solução exata também pode ser obtida para o triângulo retângulo isósceles, esta solução foi apresentada por [Proudman \(1914\)](#). Ademais, soluções exatas para escoamento em dutos triangulares também podem ser obtidas pelo método da analogia. Neste contexto, se destaca o trabalho de [Marco e Han \(1955\)](#) que determinou a distribuição de velocidade e temperatura para escoamento laminar em dutos a partir da analogia com a deflexão de placas delgadas sobre carregamento uniforme e com suporte simples nas extremidades. Esse método foi aplicado para as seções transversais retangular, triangular equilátero, triangular reto isósceles e semicircular.

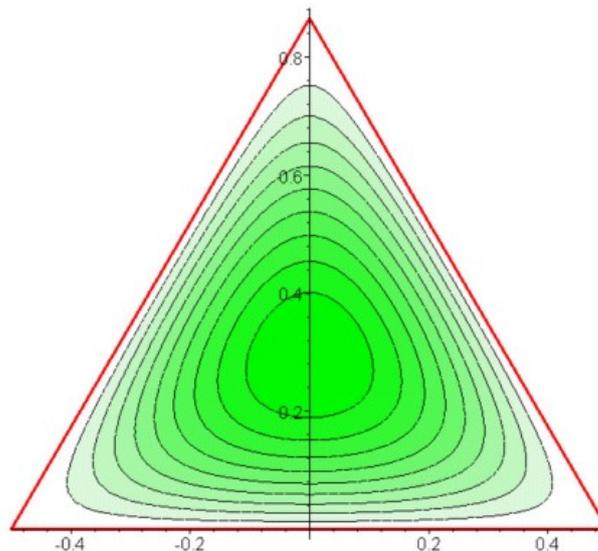


Figura 2.1: Contornos de velocidades constantes para um duto com geometria de um triângulo equilátero. Retirado de [Lekner \(2007\)](#).

O último tipo de duto triangular que possui solução exata é o $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$. Essa solução pode ser obtida por meio da analogia com a torção de um prisma com essa seção transversal. Para encontra-la, [Hay \(1939\)](#) utilizou o método das imagens para resolver a equação de Poisson com condição de contorno homogênea. Esse método foi aplicado para as seções retangular, triangular equilátero, triangular reto isósceles e para o triângulo $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$. Essas soluções também podem ser obtidas por meio da analogia com a vibração de membranas, como foi feito por [Aggarwala e Iqbal \(1969\)](#). Neste artigo, os autores obtiveram o número de Nusselt (Nu) e o parâmetro de queda de pressão (fRe) para a convecção natural e forçada em dutos triangulares com o formato equilátero, retangular isósceles e $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$.

Assim, para os dutos triangulares, há na literatura solução exata apenas para os triângulos equilátero, retângulo isósceles e $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$. Para os demais tipos, os trabalhos que abordaram este tema recorrem a métodos analíticos ou numéricos para obter uma solução aproximada do problema. Neste cenário, o estudo de [Sparrow \(1962\)](#) investigou o escoamento laminar totalmente desenvolvido em dutos triangulares isósceles. Para isso, o autor utilizou coordenadas polares para mapear a seção transversal, como mostrado na Figura 2.2a. Desse modo, foi introduzido uma variável auxiliar que torna a equação governante

do problema em uma equação de Laplace, e para esta equação foi utilizado os métodos de separação de variáveis e de colocação para obter uma expressão para o campo de velocidade. Assim, neste artigo foram obtidos a distribuição da tensão de cisalhamento na parede do duto, o produto do fator de atrito de Fanning com o número de Reynolds e os perfis de velocidades. A Figura 2.2b mostra os contornos de velocidades sobre a velocidade média para o caso em que o ângulo de abertura é 80° .

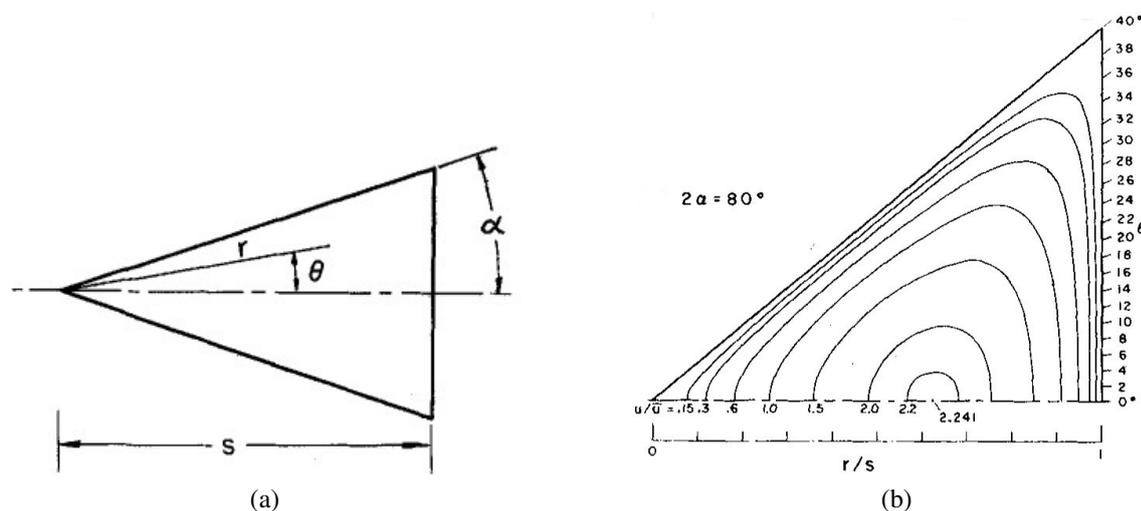


Figura 2.2: (a) Seção transversal do duto triangular isósceles. (b) Contornos de velocidades constantes. Retirado de Sparrow (1962).

No trabalho de Shah (1975), foi aplicado o método dos mínimos quadrados para resolver o escoamento laminar totalmente desenvolvido e a transferência de calor para os dutos com as geometrias mostradas na Figura 2.3. Assim, a diferença entre este método e aquele aplicado por Sparrow (1962) é a possibilidade de utilizar mais pontos no contorno para obter uma aproximação melhor das distribuições de velocidade e temperatura, principalmente para as geometrias que possuem cantos (Shah, 1975). A Figura 2.4 mostra os resultados gráficos obtidos nesse trabalho para os dutos triangulares isósceles.

O método dos mínimos quadrados também foi utilizado por Ray e Misra (2010) para obter a solução do escoamento laminar totalmente desenvolvido em torno de um quadrado e de um triângulo equilátero com os cantos arredondados. Dessa forma, a Figura 2.5 mostra os valores do fRe em função do raio de curvatura dos cantos para o triângulo equilátero. A partir dela, percebe-se que esse parâmetro aumenta se aproximando do valor de $fRe = 16$, que é o resultado encontrado para o duto circular.

Soluções numéricas para escoamentos totalmente desenvolvidos em dutos triangulares também estão disponíveis na literatura. Sparrow e Haji-Sheikh (1965) utilizaram o método das diferenças finitas para encontrar o número de Nusselt, o fRe e o incremento de queda de pressão K em função do ângulo de abertura para triângulos isósceles e retângulos. Também foram obtidos os mesmos parâmetros para um duto com o formato de um setor circular, porém neste caso foi utilizado a sua solução analítica. A Figura 2.6 ilustra os resultados

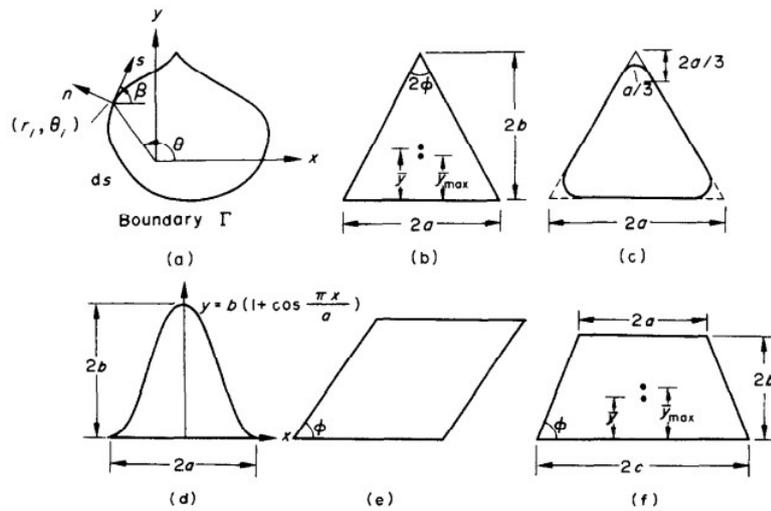


Figura 2.3: (a) Seção transversal arbitrária; (b) Triângulo isósceles; (c) Triângulo equilátero com os cantos arredondados; (d) Senoidal; (e) Losangular; (f) Trapezoidal. Retirado de [Shah \(1975\)](#).

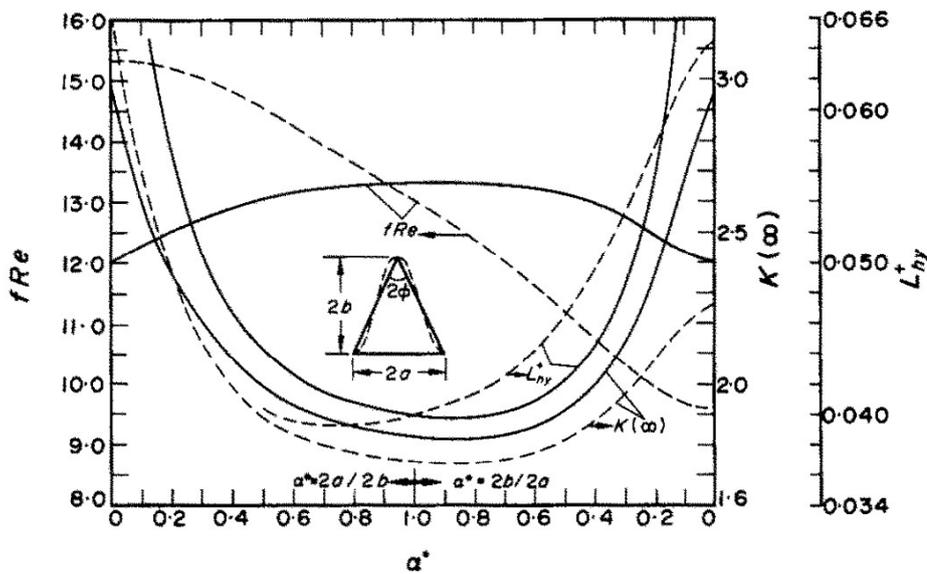


Figura 2.4: Resultados do parâmetro de queda de pressão fRe , do incremento de queda de pressão $K(\infty)$ e do comprimento hidrodinâmico de entrada adimensional L_{hy}^+ em função da razão de aspecto α^* . Retirado de [Shah \(1975\)](#).

obtidos para essas três geometrias. A partir dela, é possível notar que o número de Nusselt e o fRe são similares para o setor circular e para o triângulo isósceles, porém à medida que o ângulo de abertura aumenta, esses parâmetros para o setor circular ficam significativamente maiores em comparação com as geometrias triangulares. Isso mostra que o duto triangular apresenta uma menor queda de pressão em relação ao setor circular, em compensação o coeficiente de troca de calor deste último é maior.

Nesse mesmo caminho, [Nakamura et al. \(1977\)](#) aplicou o método das diferenças finitas em um sistema de coordenadas triangular para o problema da convecção natural e forçada

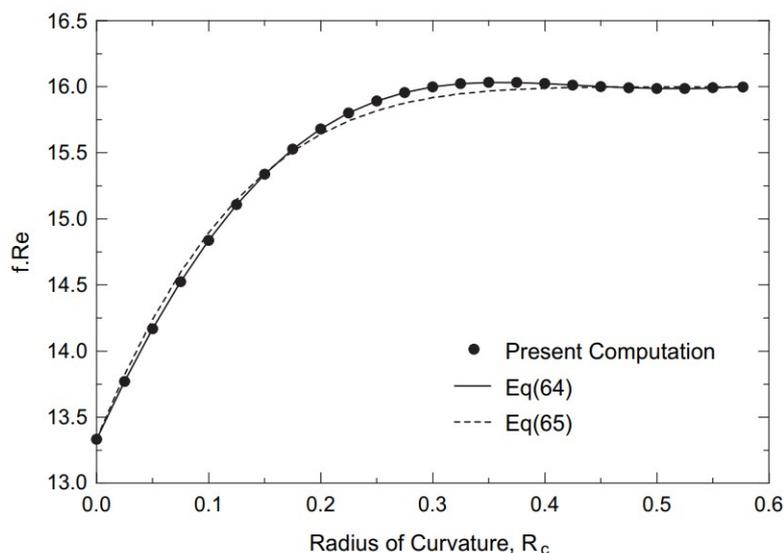


Figura 2.5: Resultado do fRe em função do raio dos cantos para um triângulo equilátero. Retirado de Ray e Misra (2010).

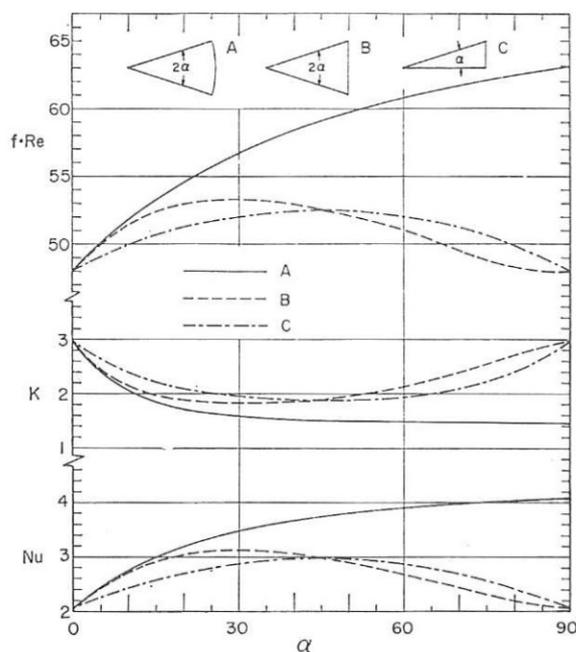


Figura 2.6: Resultados de fRe , K e Nu em função do ângulo de abertura para dutos com geometrias do setor circular, triângulo isósceles e triângulo retângulo. Retirado de Sparrow e Haji-Sheikh (1965).

em dutos triangulares. Assim, foram obtidas soluções numéricas para um duto em formato de um triângulo isósceles na horizontal e para um triângulo equilátero inclinado. A Figura 2.7a mostra as razões $fRe/(fRe)_0$ e $Nu/(Nu)_0$ em função do produto entre os números de Reynolds, Rayleigh e Prandtl, em que $(fRe)_0$ e $(Nu)_0$ são os valores desses parâmetros para a convecção puramente forçada. A Figura 2.7b, por sua vez, mostra a variação do fRe e de Nu em função do ângulo de inclinação ϕ do triângulo equilátero.

Outro trabalho que utilizou o método das diferenças finitas para resolver o escoamento

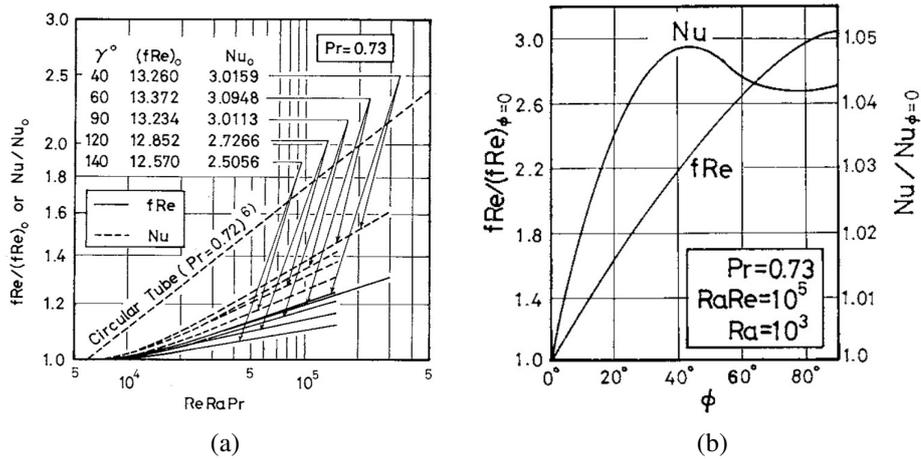


Figura 2.7: (a) Resultados de fRe e Nu para triângulo isósceles na horizontal. (b) Resultados de fRe e Nu para o triângulo equilátero em função do ângulo de inclinação. Retirado de Nakamura et al. (1977).

em dutos triangulares foi o de Abdel-Wahed e Attia (1984). Nesse estudo, os autores utilizaram uma malha uniforme de 33 pontos para discretizar o domínio, e foi utilizado o método iterativo de Gauss-Seidel para resolver as equações algébricas provenientes. Os resultados obtidos foram comparados com aqueles disponíveis na literatura. Deste modo, a discrepância máxima para o fRe observada foi de 0,3 %, sendo essa para triângulos que apresentam ângulos de abertura pequenos ou grandes. A Figura 2.8 mostra os resultados obtidos para o fRe pelos autores deste artigo. Além disso, nessa imagem também há a presença dos resultados obtidos por outros trabalhos e do domínio que foi utilizado para realizar os cálculos.

Recentemente, Karabulut, Ipci e Cinar (2016) utilizaram o método das diferenças finitas para resolver o escoamento e a transferência de calor em dutos triangulares isósceles e parabólicos. Para isso, foi utilizado uma mudança de coordenadas para a transformar o domínio triangular em um domínio computacional, para tal o triângulo é dividido em duas áreas simétricas. Assim, os contornos de velocidades para o triângulo isósceles com razão de aspecto igual a 1 está ilustrado na Figura 2.9a. E a Figura 2.9b apresenta os resultados do fRe obtido neste trabalho para diferentes triângulos isósceles.

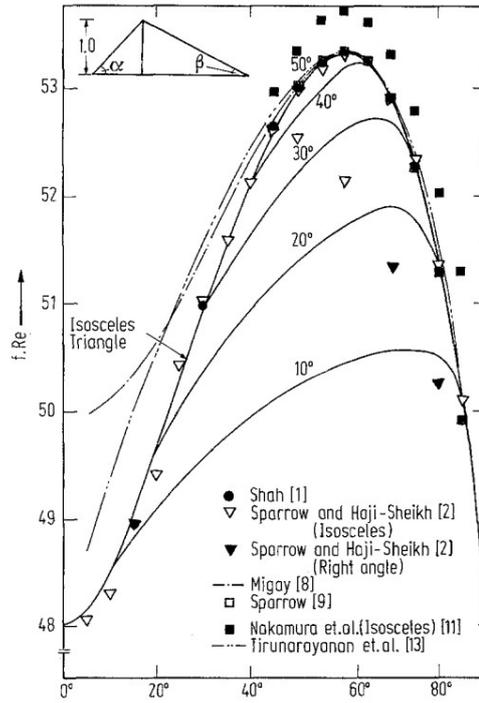
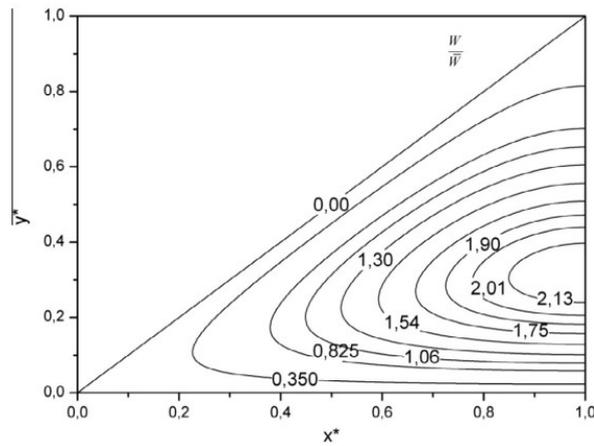


Figura 2.8: Resultados para fRe para escoamentos totalmente desenvolvido em dutos triangulares. Retirado de [Abdel-Wahed e Attia \(1984\)](#).



(a)

Aspect ratio	Apex angle ($^{\circ}$)	fRe Computed	fRe Literature data	Nu_T Computed	Nu_T Literature data
4.00	14.250	51.35	50.54 [12]	1.95	1.94 [12]
2.00	28.072	52.76	52.104 [12]	2.28	2.22 [12]
1.866	30	53.17	52.520 [32]	2.33	2.284 [32]
1.00	53.13	53.801	53.28 [12]	2.492	2.46 [12]
$\sqrt{3}/2$	60	53.94	53.33 [12]	2.535	2.47 [12]
0.75	67.380	53.85	53.28 [12]	2.52	2.45 [12]
0.50	90	53.08	52.612 [12]	2.383	2.363 [12]

(b)

Figura 2.9: (a) Contornos de velocidade para o triângulo isósceles com razão de aspecto igual a 1. (b) Resultados de fRe para diferentes triângulos isósceles. Retirado de [Karabulut, Ipci e Cinar \(2016\)](#).

Assim como os métodos já citados, os métodos variacionais foram utilizados para obter a solução aproximada do escoamento em dutos triangulares. Um dos estudos que abordou o problema dessa forma foi o realizado por [Iqbal, Aggarwala e Fowler \(1969\)](#). Neste artigo, os autores utilizaram o método de Rayleigh-Ritz e o método das diferenças finitas para resolver a convecção natural e forçada em dutos não circulares. As geometrias analisadas foram os triângulos retângulos e isósceles e o losango. Duas importantes conclusões foram obtidas a partir deste trabalho, a primeira é que à medida que se aumenta o número de Rayleigh¹ a queda de pressão não varia com o ângulo de abertura para nenhuma das três geometrias. A Figura 2.10 ilustra isso para o triângulo retângulo. A outra conclusão, é que o tempo de computação do método de Rayleigh-Ritz foi 200 vezes menor do que o do método das diferenças finitas.

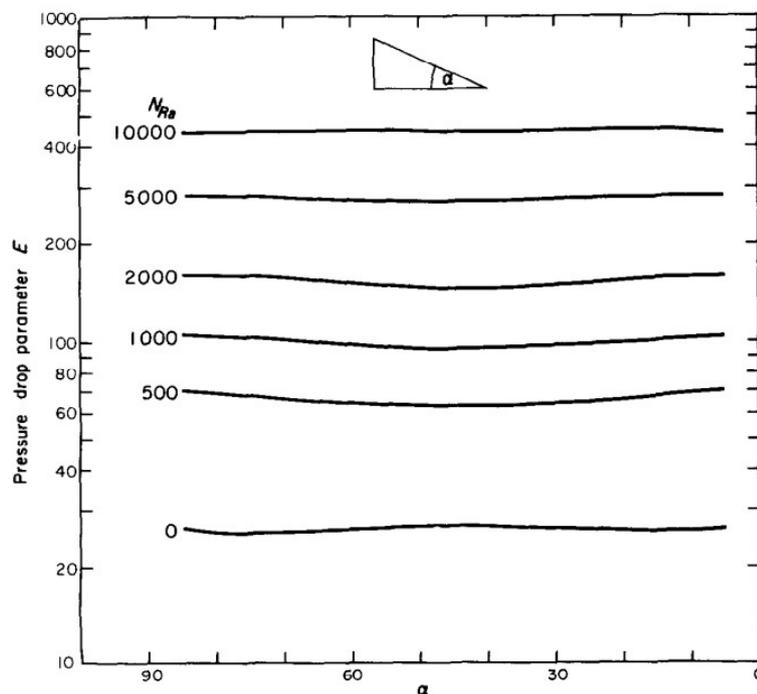


Figura 2.10: Parâmetro de queda de pressão do triângulo retângulo para diversos números de Rayleigh (N_{Ra}) em função do ângulo de abertura. Retirado de [Iqbal, Aggarwala e Fowler \(1969\)](#)

2.2 Método de Rayleigh-Ritz

O método de Rayleigh-Ritz (ou simplesmente método de Ritz) é um método variacional utilizado para obter soluções aproximadas para diversos problemas de engenharia. Esse método é comum para resolver problemas de vibrações, como é o exemplo do artigo de [Singh e Saxena \(1996\)](#) que aplicou este método para a vibração transversal de placas triangulares.

¹De acordo com [Çengel \(2012\)](#), o número de Rayleigh é definido como a razão entre as forças de flutuação e o produto entre difusividade térmica e viscosidade cinemática.

No contexto de escoamentos em dutos, como citado na [Seção 2.1](#), esse método foi usado por [Iqbal, Aggarwala e Fowler \(1969\)](#) para escoamentos em dutos triangulares e losangulares.

Outro trabalho que aplicou este método foi de [Wang \(2008\)](#), que utilizou os métodos de Rayleigh-Ritz e de perturbação para um duto com forma de lentes. Na [Figura 2.11](#) está mostrado os contornos de velocidades constantes para uma razão de espessura igual a $b = 0,5$. O autor obteve uma solução próxima da exata utilizando 15 coeficientes de Ritz, entretanto para os casos em que este duto se aproxima de um círculo e para os casos em que a seção transversal é muito fina, o método de Rayleigh-Ritz não convergiu para a solução exata. Assim, nesses casos, foram utilizados métodos de perturbação.

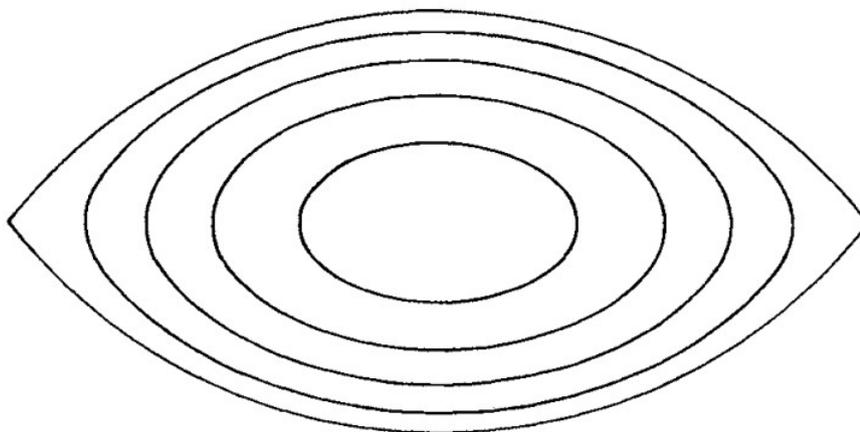


Figura 2.11: Contornos de velocidade para um duto em forma de lente com razão de aspecto igual a 0,5. Retirado de [Wang \(2008\)](#).

Em um artigo diferente, [Wang \(2009\)](#) aplicou este método em dutos super elípticos, que são semelhantes a dutos retangulares com os cantos arredondados. Deste modo, foi obtido valores do fRe , do número de Nusselt e da tensão de cisalhamento para diferentes geometrias de dutos super elípticos e razões de aspectos. A [Figura 2.12](#) ilustra a convergência dos valores de fRe para diferentes geometrias definidas por n com uma razão de aspecto $c = 0,5$.

$N \setminus n$	1	2	3	5	10
6	16.823	17.006	16.852	16.597	16.305
10	16.823	16.996	16.845	16.552	16.202
15		16.995	16.844	16.550	16.181
21					16.179

Figura 2.12: Convergência dos valores de fRe para uma razão de aspecto $c = 0,5$. Retirado de [Wang \(2009\)](#).

Na literatura também se encontra a utilização do método de Rayleigh-Ritz em escoamentos em dutos curvos. Como é o caso do trabalho de [Wang \(2012\)](#) que estudou o escoamento de Stokes em dutos curvos retangulares e elípticos obtendo resultados condizentes. Similarmente, [Harding \(2019\)](#) aplicou este método em dutos curvos retangulares, trapezoidais e

circulares. Ambos os artigos evidenciam a versatilidade do método que pode ser aplicado em diversas geometrias.

Capítulo 3

Formulação matemática

Neste capítulo será tratado a formulação matemática da equação governante e as condições de contorno para o escoamento isotérmico, laminar e incompressível em um duto, com gradiente de pressão constante, a partir das hipóteses adotadas. Em um primeiro momento, será obtido a equação governante para um duto com seção transversal constante arbitrária. Em seguida serão definidos alguns parâmetros de interesse, que serão: a vazão volumétrica, o número de Reynolds e o fator de atrito Fanning. Por fim, será formulado o caso de interesse deste trabalho, que é o escoamento em um duto com seção transversal triangular, mostrando também a adimensionalização adotada.

3.1 Equação governante

Considere um duto infinitamente longo e com seção transversal constante, mostrada na Figura 3.1, que apresenta área A e paredes definidas por Σ . O vetor posição adotado será $\mathbf{x} = (x, y, z)$, sendo o eixo z paralelo ao comprimento do duto.

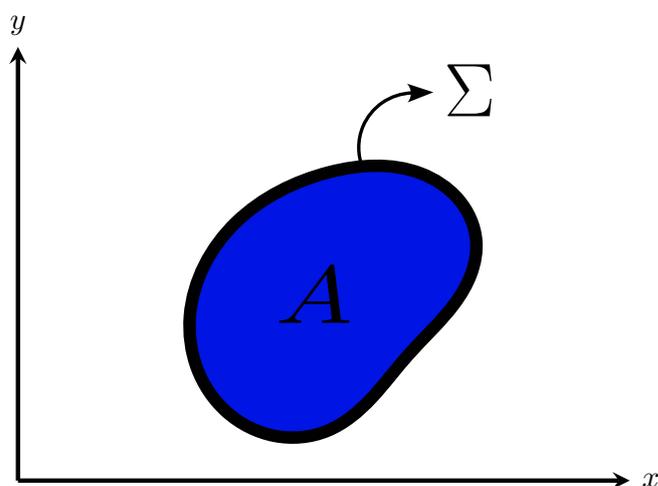


Figura 3.1: Duto com seção transversal constante com área A .

Primeiramente, será assumido que o escoamento é isotérmico, laminar e incompressível, portanto não há variação da massa específica ρ do fluido. Além disso, será considerado que o fluido é Newtoniano. Dessa forma, de acordo com [Langlois e Deville \(2014\)](#), esse tipo de escoamento é modelado pelas equações da continuidade e de Navier-Stokes. A primeira é a aplicação do princípio de conservação da massa de uma partícula de fluido, e devido a incompressibilidade o volume das partículas também não varia. A segunda é a aplicação da segunda lei de Newton, ou seja, a variação da quantidade de movimento de uma partícula de fluido é igual ao somatório de forças atuando nela. Assim, essas equações, em suas formas vetoriais, são dadas por

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (3.1)$$

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \rho \mathbf{g}, \quad (3.2)$$

em que \mathbf{u} é o campo de velocidade que apresenta as componentes nas direções x , y e z iguais a u , v e w , respectivamente. O campo de pressão é denotado por p e \mathbf{g} é a aceleração da gravidade. Em coordenadas cartesianas a equação (3.1) fica escrita como

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (3.3)$$

e as equações de Navier-Stokes (3.2) nas direções x , y e z se tornam, respectivamente,

$$\rho \left[\frac{\partial u}{\partial t} + \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \rho g_x, \quad (3.4)$$

$$\rho \left[\frac{\partial v}{\partial t} + \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) \right] = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + \rho g_y, \quad (3.5)$$

$$\rho \left[\frac{\partial w}{\partial t} + \left(u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + \rho g_z. \quad (3.6)$$

Adicionalmente, serão adotadas as seguintes hipóteses:

1. Escoamento permanente;
2. Escoamento unidirecional;
3. A gravidade atua apenas na direção do escoamento.

A primeira hipótese indica que nenhuma das variáveis do escoamento muda localmente ao longo do tempo. A segunda determina que as componentes de velocidade u e v são nulas, isto é, o fluido se movimenta apenas na direção do eixo z . Por último, a aceleração da gravidade \mathbf{g} tem componente diferente de zero apenas na direção do escoamento, ou seja,

$\mathbf{g} = (0, 0, g_z)$. Então, utilizando essas hipóteses na equação (3.3) teremos que

$$\frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (3.7)$$

portanto,

$$w = w(x, y), \quad (3.8)$$

por conseguinte, não há variação de velocidade ao longo do comprimento do duto. Logo, além de unidirecional o escoamento é bidimensional. Conforme Papanastasiou, Georgiou e Alexandrou (2000), escoamentos que satisfazem a expressão (3.7) são ditos completamente desenvolvidos, assim escoamentos em dutos longos o suficiente são enquadrados nessa classificação, pois os efeitos de entrada e saída são desprezíveis.

Implementando as hipóteses nas equações (3.4) e (3.5) temos que essas se reduzem a

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad (3.9)$$

ou seja,

$$p = p(z). \quad (3.10)$$

Desse modo, aplicando as hipóteses na equação (3.6) a componente z da equação de Navier-Stokes ficará igual a

$$-\frac{dp}{dz} + \mu \nabla^2 w + \rho g_z = 0, \quad (3.11)$$

como a força da gravidade é conservativa, o vetor \mathbf{g} será igual ao gradiente de uma função escalar Φ , então \mathbf{g} pode ser escrito como

$$\mathbf{g} = \nabla \Phi, \quad (3.12)$$

e como a gravidade ocorre apenas na direção z , a função Φ será igual a

$$\Phi = g_z z. \quad (3.13)$$

Desse modo, como o gradiente de pressão é constante, este pode ser escrito como

$$\frac{dp}{dz} = -\hat{G}, \quad (3.14)$$

em que \hat{G} é uma constante e o sinal negativo aparece devido a queda de pressão acontecer ao longo do comprimento do duto, fazendo com que o escoamento se desenvolva na direção contrária ao gradiente de pressão. Dessa forma, pode ser definida uma pressão modificada p_m igual a

$$p_m = p - \rho \Phi, \quad (3.15)$$

em que o seu gradiente fica escrito como

$$\frac{dp_m}{dz} = -\hat{G} - \rho g_z = -G. \quad (3.16)$$

Portanto, substituindo a equação (3.16) em (3.11), a equação governante se reduz a uma equação de Poisson do tipo

$$\nabla^2 w = -\frac{G}{\mu}. \quad (3.17)$$

Para as condições de contorno haverá não deslizamento ao longo da parede do duto, de modo que as partículas de fluido que estão em contato com a parede se aderem totalmente a ela. Dessa forma, o campo de velocidade w deve satisfazer simultaneamente as seguintes expressões

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\frac{G}{\mu}, \quad \text{em } A \quad (3.18)$$

e

$$w(x, y) = 0, \quad \text{em } \Sigma. \quad (3.19)$$

3.2 Vazão volumétrica

Sendo dS a superfície de um elemento infinitesimal, temos que a vazão volumétrica de fluido que passa pela superfície desse elemento é dada por

$$dQ = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dS, \quad (3.20)$$

em que \mathbf{n} é o vetor normal exterior à superfície dS . Sendo S toda a superfície do duto mostrado na Figura 3.1, a vazão volumétrica nesse duto será dada por

$$Q = \oiint_S (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dS. \quad (3.21)$$

Logo, a vazão em S é a soma da componente normal da velocidade em todos os pontos da superfície. No caso estudado não há fluxo nas paredes laterais, portanto a integral de superfície da equação (3.21) se torna uma integral dupla ao longo da área da seção transversal do duto. Por conseguinte,

$$Q = \iint_A (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dA, \quad (3.22)$$

e devido ao escoamento ser unidirecional e bidimensional, a equação (3.22) se reduz a

$$Q = \iint_A w(x, y) dA. \quad (3.23)$$

3.3 Número de Reynolds

O número de Reynolds é um grupo adimensional que representa a razão entre as forças de inércia e as forças viscosas atuantes no fluido em escoamento. Assim, escoamentos com um baixo número de Reynolds apresentam dimensões reduzidas, baixas velocidades e alta viscosidade, enquanto para um alto valor do número de Reynolds os escoamentos acontecem em grandes dimensões, altas velocidades e baixa viscosidade (Kundu, Cohen e Dowling, 2015). Dessa forma, para o escoamento em dutos o número de Reynolds é dado por

$$Re = \frac{\rho U_m D_h}{\mu}, \quad (3.24)$$

em que U_m é a velocidade média do escoamento e D_h é o diâmetro hidráulico. Para o duto mostrado na Figura 3.1 a velocidade média é obtida por

$$U_m = \frac{1}{A} \iint_A w(x, y) dA = \frac{Q}{A}. \quad (3.25)$$

O diâmetro hidráulico, por sua vez, é dado pela seguinte equação

$$D_h = \frac{4A}{P}, \quad (3.26)$$

sendo P o perímetro molhado da seção transversal.

3.4 Fator de atrito

De acordo com Cengel e Cimbala (2012), o fator de atrito pode ser definido como a razão entre a tensão de cisalhamento τ_w na parede do duto com a pressão dinâmica do escoamento $\rho U_m^2/2$. O fator de atrito de Fanning é obtido pela razão dessas duas grandezas, enquanto o fator de atrito de Darcy-Weisbach é quatro vezes essa razão. Portanto, o fator de atrito de Fanning é obtido por

$$f = \frac{\tau_w}{\rho U_m^2/2}. \quad (3.27)$$

Para escoamentos totalmente desenvolvidos o fator de atrito não varia ao longo do comprimento do duto, logo a queda de pressão modificada Δp_m para um duto com comprimento L pode ser dada por

$$\Delta p_m = f \frac{L}{D_h} 2\rho U_m^2. \quad (3.28)$$

Como o gradiente de pressão é constante temos que

$$\frac{dp_m}{dz} = -\frac{\Delta p_m}{L} = -G. \quad (3.29)$$

Logo, a equação (3.28) pode ser reescrita como

$$G = f \frac{2\rho U_m^2}{D_h}. \quad (3.30)$$

Desse modo, o fator de atrito de Fanning pode ser obtido pela seguinte equação

$$f = \frac{D_h G}{2\rho U_m^2}. \quad (3.31)$$

3.5 Modelo proposto

No presente trabalho será resolvido a equação (3.18), com a condição de contorno mostrada em (3.19), para um duto com seção transversal triangular, com lados com comprimentos a , b e c , com área igual a A e ângulo de abertura entre os lados de comprimento a e c igual a θ , que varia de $0 < \theta \leq 90^\circ$. As paredes da seção transversal deste duto são definidas por Σ . O esquema desse duto está mostrado na Figura 3.2.

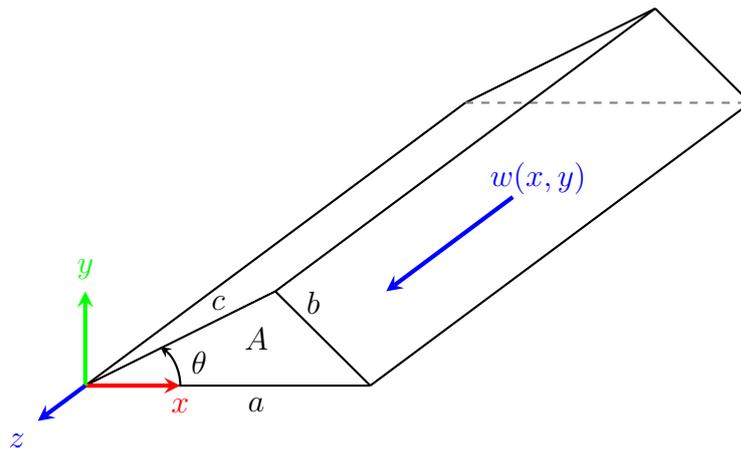


Figura 3.2: Duto com seção transversal triangular.

3.6 Adimensionalização

Será adotado, para o duto mostrado na Figura 3.2, a adimensionalização proposta por Shah e London (1978), assim c será utilizado como comprimento de referência e W será a velocidade de referência. Dessa maneira, as variáveis adimensionais x^* , y^* e w^* serão dadas por

$$x^* = \frac{x}{c}, \quad y^* = \frac{y}{c}, \quad w^* = \frac{w}{W}, \quad (3.32)$$

em que W é igual a

$$W = \frac{c^2 G}{\mu}, \quad (3.33)$$

dessa forma, a velocidade adimensional w^* é obtida por

$$w^* = \frac{\mu w}{c^2 G}. \quad (3.34)$$

Um importante parâmetro adimensional para escoamentos em dutos é o produto entre o fator de atrito de Fanning e o número de Reynolds, fRe , que pelas equações (3.31) e (3.24) é dado por

$$fRe = \frac{D_h^2 G}{2\mu U_m}. \quad (3.35)$$

O diâmetro hidráulico adimensional ficará igual a

$$D_h^* = \frac{D_h}{c}, \quad (3.36)$$

e a velocidade média adimensional será

$$U_m^* = \frac{\mu U_m}{c^2 G}. \quad (3.37)$$

Portanto, com essas variáveis adimensionais a equação (3.35) pode ser expressa por

$$fRe = \frac{D_h^{*2}}{2U_m^*}. \quad (3.38)$$

Pela equação (3.26), o diâmetro hidráulico pode ser obtido em função da área e do perímetro, logo na forma adimensional a área deste duto é dada por

$$A^* = \frac{A}{c^2} = \frac{\delta \sin \theta}{2}, \quad (3.39)$$

em que

$$\delta = \frac{a}{c} \quad (3.40)$$

é a razão de aspecto entre os lados a e c . O perímetro adimensional é obtido por

$$P^* = 1 + \delta + b^*, \quad (3.41)$$

em que b^* pode ser determinado em função de θ e δ utilizando a lei dos cossenos, de modo que

$$b^* = \sqrt{1 + \delta^2 - 2\delta \cos \theta}. \quad (3.42)$$

A velocidade média adimensional pode ser obtida substituindo a velocidade e a área em suas formas adimensionais na equação (3.25), deste modo

$$U_m^* = \frac{1}{A^*} \iint_{A^*} w^*(x^*, y^*) dA^* = \frac{Q^*}{A^*}, \quad (3.43)$$

em que Q^* é a vazão volumétrica adimensional. Por conseguinte, a equação (3.38) pode ser

escrita como

$$fRe = \frac{8(A^*)^3}{(P^*)^2 Q^*}. \quad (3.44)$$

Portanto, para escoamentos laminares completamente desenvolvidos, o produto entre o fator de atrito e o número de Reynolds depende apenas da geometria da seção transversal. Dessa forma, a Figura 3.3 mostra a seção transversal do duto triangular na forma dimensional e adimensional.

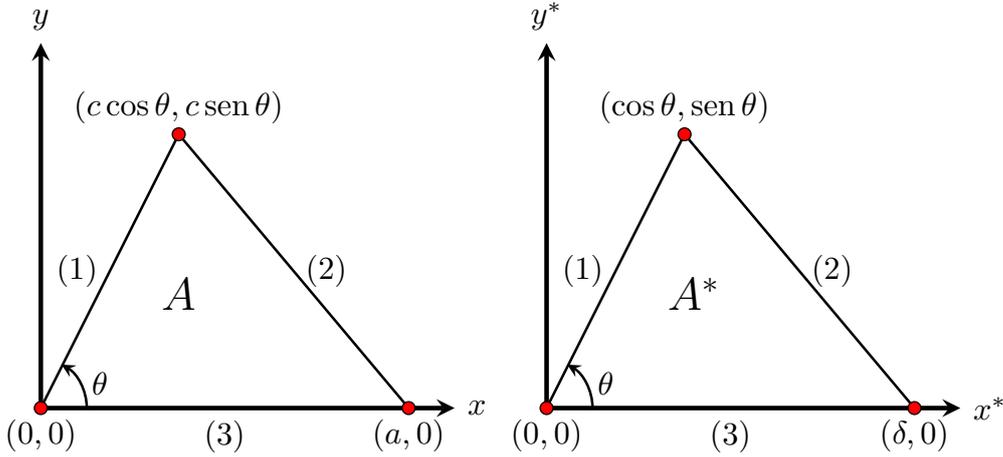


Figura 3.3: Seção transversal do duto triangular na forma dimensional e adimensional.

Assim, a parede da seção transversal do duto é definida pelos lados (1), (2) e (3) mostrados na Figura 3.3, na forma adimensional as equações desses lados serão dadas, respectivamente, por

$$y^* = x^* \tan \theta, \quad (3.45)$$

$$y^* = (x^* - \delta) \left(\frac{\text{sen } \theta}{\cos \theta - \delta} \right), \quad (3.46)$$

e

$$y^* = 0. \quad (3.47)$$

A equação (3.45) não é válida quando o triângulo é retângulo, pois $\theta = 90^\circ$. Nesse caso, ao tomar os limites apropriados, essa equação é simplificada para

$$x^* = 0. \quad (3.48)$$

E a equação (3.46) não é válida quando o lado (2) for perpendicular ao lado (3), pois, neste caso, $\cos \theta = \delta$. Logo, esta equação se torna igual a

$$x^* = \delta. \quad (3.49)$$

Conseqüentemente, utilizando a adimensionalização proposta, a equação governante do pro-

blema se reduz a

$$\frac{\partial^2 w^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^{*2}} = -1, \quad \text{em } A^*. \quad (3.50)$$

As condições de contorno para o caso em que o triângulo não é retângulo serão iguais a

$$\begin{cases} w^*(x^*, x^* \tan \theta) = 0, & \text{para } 0 \leq x^* \leq \cos \theta, \\ w^*\left(x^*, (x^* - \delta) \left[\frac{\text{sen } \theta}{\cos \theta - \delta} \right]\right) = 0, & \text{para } \cos \theta \leq x^* \leq \delta, \\ w^*(x^*, 0) = 0, & \text{para } 0 \leq x^* \leq \delta. \end{cases} \quad (3.51)$$

Quando $\theta = 90^\circ$, as condições de contorno serão

$$\begin{cases} w^*(0, y^*) = 0, & \text{para } 0 \leq y^* \leq 1, \\ w^*\left(x^*, (x^* - \delta) \left[\frac{\text{sen } \theta}{\cos \theta - \delta} \right]\right) = 0, & \text{para } \cos \theta \leq x^* \leq \delta, \\ w^*(x^*, 0) = 0, & \text{para } 0 \leq x^* \leq \delta. \end{cases} \quad (3.52)$$

Por fim, as condições de contorno quando $\cos \theta = \delta$ serão as seguintes

$$\begin{cases} w^*(x^*, x^* \tan \theta) = 0, & \text{para } 0 \leq y^* \leq 1, \\ w^*(\delta, y^*) = 0, & \text{para } 0 \leq y^* \leq \text{sen } \theta, \\ w^*(x^*, 0) = 0, & \text{para } 0 \leq x^* \leq \delta. \end{cases} \quad (3.53)$$

Para simplificar a notação nos próximos capítulos, o símbolo “*” para denotar uma variável adimensional será omitido. Desta forma, todas as variáveis serão tratadas a priori como adimensionais.

Capítulo 4

Metodologia numérica

Este capítulo discute o método de Rayleigh-Ritz, que será utilizado para a resolução da equação governante. Dessa forma, primeiramente, será discutido conceitos importantes do cálculo variacional para a aplicação deste método. Em seguida, será mostrado como o método funciona e, por fim, ele será aplicado para o caso de interesse, mostrando a mudança de variáveis utilizada, o cálculo da vazão e do fRe .

4.1 Noções de cálculo variacional

Um problema de interesse no cálculo diferencial é a obtenção dos extremos locais de uma função, ou seja, se $y(x)$ é uma função contínua e diferenciável no intervalo $[x_1, x_2]$, os extremos desta função podem ser pontos de máximo local, mínimo local ou de inflexão, esse pontos estão mostrados na Figura 4.1. Assim, para obter um extremo local basta fazer

$$\frac{dy}{dx} = 0. \quad (4.1)$$

Se a equação (4.1) tiver solução para $x = x_n$, em que $x_1 \leq x_n \leq x_2$, então x_n é um extremo local.

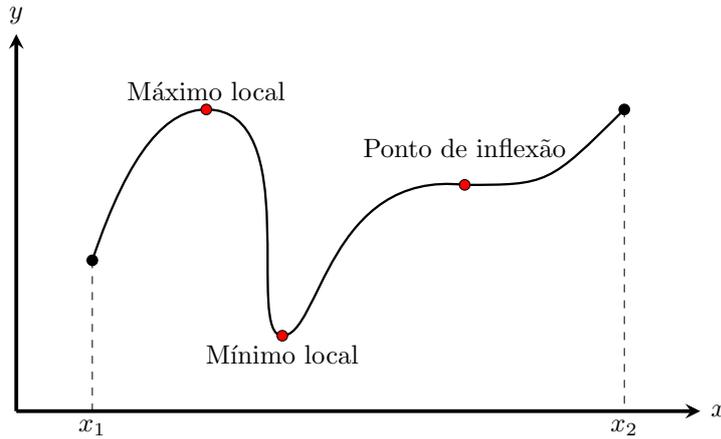


Figura 4.1: Extremos locais de uma função definida no intervalo $[x_1, x_2]$.

No cálculo variacional, o objetivo é obter os extremos de um funcional, que é definido, de acordo com Soriano (2009), como uma função de funções que retorna um número real quando essas funções são definidas. Deste modo, no cálculo variacional se deseja obter qual função que retorna um valor extremo do funcional, portanto, se uma função retorna o valor mínimo de um funcional, qualquer função vizinha a esta aumenta o funcional (Thorton e Marion, 2011). O funcional I da função $y(x)$ pode ser definido como

$$I(y) = \int_{x_1}^{x_2} F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) dx, \quad (4.2)$$

em que F também é uma função contínua e diferenciável. Adicionalmente, a função y deve satisfazer as seguintes condições de contorno

$$\begin{cases} y(x_1) = y_1 \\ y(x_2) = y_2. \end{cases} \quad (4.3)$$

Portanto, alguns exemplos de problemas que buscam as funções que minimizam ou maximizam funcionais são: encontrar a menor distância entre dois pontos de uma superfície, a curva com a queda mais acentuada entre dois pontos e a superfície mínima de revolução de uma área (Weinstock, 1974). Neste trabalho, será minimizado o funcional da equação governante dada por (3.50) e aplicar nela o método de Rayleigh-Ritz com as condições de contorno definidas em (3.51), (3.52) ou (3.53).

4.1.1 Lema fundamental do cálculo variacional

O lema fundamental do cálculo variacional expressa que se

$$\int_{x_1}^{x_2} \eta(x) \psi(x) dx = 0, \quad (4.4)$$

então,

$$\psi(x) = 0, \quad \text{em } x_1 \leq x \leq x_2, \quad (4.5)$$

sendo $\eta(x)$ uma função arbitrária contínua e diferenciável, que satisfaz as seguintes condições de contorno

$$\begin{cases} \eta(x_1) = 0 \\ \eta(x_2) = 0. \end{cases} \quad (4.6)$$

Esse lema é provado por contradição, dessa forma admitindo uma função $\psi(x)$, que não satisfaz a equação (4.5) em $x = \zeta$, em que $x_1 \leq \zeta \leq x_2$. Por exemplo, seja $\psi(\zeta) > 0$, então como $\psi(x)$ é contínua deve existir um intervalo, ao redor do ponto $x = \zeta$, em que $\psi(x)$ seja maior que zero (Weinstock, 1974). Portanto, no intervalo $\zeta - h \leq x \leq \zeta + h$, $\psi(x) > 0$, desse modo, como $\eta(x)$ é uma função arbitrária pode ser escolhido uma função $\eta(x) > 0$ somente no intervalo $\zeta - h \leq x \leq \zeta + h$ e igual a zero para os demais valores de x , como mostrado na Figura 4.2. Por conseguinte,

$$\int_{x_1}^{x_2} \eta(x)\psi(x) dx > 0, \quad (4.7)$$

contradizendo a equação (4.4), essa expressão somente é satisfeita para a função $\eta(x)$ escolhida se $\psi(x) = 0$. O mesmo raciocínio pode ser aplicado para uma função $\psi(x) < 0$, o que prova o lema fundamental do cálculo variacional.

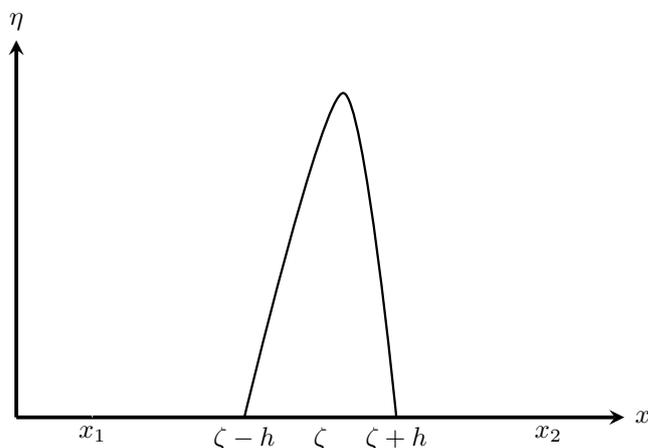


Figura 4.2: Gráfico de uma função positiva de $\eta(x)$ somente no intervalo $\zeta - h \leq x \leq \zeta + h$.

4.1.2 Equação de Euler-Lagrange

Considere uma família de funções $Y(x)$, que são contínuas e diferenciáveis no intervalo $[x_1, x_2]$, essas funções podem ser parametrizadas por

$$Y(x) = y(x) + \epsilon\eta(x), \quad (4.8)$$

em que $y(x)$ é a função que retorna um valor mínimo do funcional $I(Y)$, ϵ é um parâmetro que define as diferentes curvas de $Y(x)$ e $\eta(x)$ é uma função arbitrária que satisfaz as condições de contorno mostradas na equação (4.6). Dessa maneira, qualquer função $Y(x)$ satisfaz as mesmas condições de contorno de $y(x)$, que serão iguais a

$$\begin{cases} Y(x_1) = y(x_1) = y_1 \\ Y(x_2) = y(x_2) = y_2. \end{cases} \quad (4.9)$$

A Figura 4.3 compara a curva de uma função de $Y(x)$, com $\epsilon \neq 0$, com a curva da função $y(x)$ que retorna um extremo do funcional, sendo esta definida quando $\epsilon = 0$.

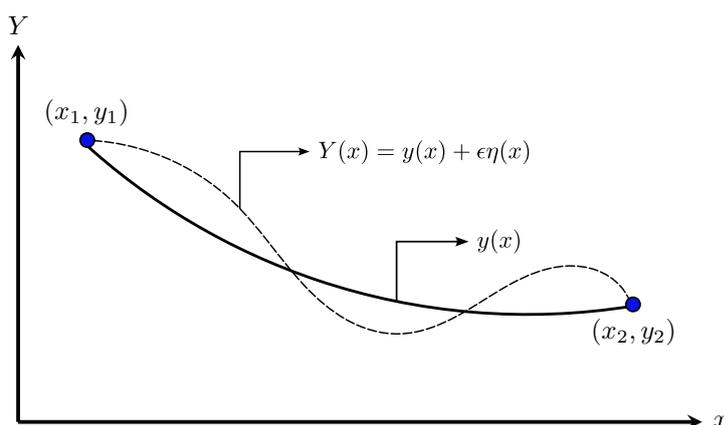


Figura 4.3: Caminho qualquer $Y(x)$ e a função $y(x)$ que minimiza o funcional I .

Substituindo a expressão (4.8) no funcional temos que

$$I(\epsilon) = \int_{x_1}^{x_2} F\left(x, Y, \frac{dY}{dx}\right) dx, \quad (4.10)$$

derivando esse funcional em relação ao parâmetro ϵ e utilizando a regra da cadeia se obtém a seguinte equação

$$\frac{dI}{d\epsilon} = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial \epsilon} + \frac{\partial F}{\partial Y'} \frac{\partial Y'}{\partial \epsilon} \right) dx, \quad (4.11)$$

em que $Y' = \frac{dY}{dx}$. Dessa forma, pela equação (4.8), $\frac{\partial Y}{\partial \epsilon}$ e $\frac{\partial Y'}{\partial \epsilon}$ serão, respectivamente, iguais a

$$\frac{\partial Y}{\partial \epsilon} = \eta \quad (4.12)$$

e

$$\frac{\partial Y'}{\partial \epsilon} = \frac{d\eta}{dx} = \eta', \quad (4.13)$$

então a equação (4.11) se reduz a

$$\frac{dI}{d\epsilon} = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial Y} \eta + \frac{\partial F}{\partial Y'} \eta' \right) dx. \quad (4.14)$$

Integrando o segundo termo dessa equação por parte teremos

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial Y'} \eta' = \frac{\partial F}{\partial Y'} \eta \Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial Y'} \right) \eta dx, \quad (4.15)$$

o termo $\frac{\partial F}{\partial Y'} \eta \Big|_{x_1}^{x_2}$ é igual a zero, pois $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$. Assim, $\frac{dI}{d\epsilon}$ fica igual a

$$\frac{dI}{d\epsilon} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial Y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial Y'} \right) \right] \eta dx. \quad (4.16)$$

Para encontrar a função que minimiza esse funcional basta igualar a equação (4.17) a zero para $\epsilon = 0$. Isso faz com que $Y(x) = y(x)$ para esse valor de ϵ , portanto

$$\frac{dI}{d\epsilon} \Big|_{\epsilon=0} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \right] \eta dx = 0. \quad (4.17)$$

Aplicando nessa equação o lema fundamental do cálculo variacional se obtém a seguinte expressão

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0. \quad (4.18)$$

Essa é a equação diferencial de Euler-Lagrange. Por conseguinte, para uma função $y(x)$ obter o valor mínimo de um funcional I ela deve necessariamente satisfazer a equação (4.18), porém esta não é uma condição suficiente, pois $\frac{dI}{d\epsilon} \Big|_{\epsilon=0}$ pode indicar um máximo ou uma inflexão do funcional $I(\epsilon)$ (Weinstock, 1974).

4.1.3 Funcional com duas variáveis independentes

O procedimento realizado na seção anterior pode ser generalizado para um funcional com duas variáveis independentes. Deste modo, de acordo com Komzsisik (2009), para um funcional $I(w)$ dado por

$$I(w) = \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} F \left(x, y, w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y} \right) dx dy, \quad (4.19)$$

a equação diferencial de Euler-Lagrange que equivale a minimizar esse funcional é igual a

$$\frac{\partial F}{\partial w} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial w_x} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial w_y} = 0, \quad (4.20)$$

em que $w = w(x, y)$, com x pertencente ao intervalo $[x_1, x_2]$ e y está contido em $[y_1, y_2]$ e w_x e w_y são iguais, respectivamente, a $\frac{\partial w}{\partial x}$ e $\frac{\partial w}{\partial y}$. Esse resultado pode ser obtido de maneira análoga ao funcional com uma variável independente, assim pode ser definida uma família de funções $W(x, y)$ dada por

$$W(x, y) = w(x, y) + \epsilon \eta(x, y), \quad (4.21)$$

em que $w(x, y)$ é a função que minimiza o funcional dado pela equação (4.19) e ϵ e $\eta(x, y)$ tem os mesmos significados para o caso do funcional com apenas uma variável independente. Dessa forma, substituindo a equação (4.21) na equação (4.19), temos que o funcional $I(w)$ se torna uma função do parâmetro ϵ , ou seja,

$$I(\epsilon) = \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, W, W_x, W_y) dx dy, \quad (4.22)$$

em que W_x e W_y são iguais a

$$W_x = \frac{\partial W}{\partial x} \quad (4.23)$$

e

$$W_y = \frac{\partial W}{\partial y}. \quad (4.24)$$

Derivando essa equação em relação a ϵ e utilizando a regra da cadeia esta equação ficará igual a

$$\frac{dI}{d\epsilon} = \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial Z} \frac{\partial Z}{\partial \epsilon} + \frac{\partial F}{\partial W_x} \frac{\partial W_x}{\partial \epsilon} + \frac{\partial F}{\partial W_y} \frac{\partial W_y}{\partial \epsilon} \right) dx dy. \quad (4.25)$$

Os termos $\frac{\partial W}{\partial \epsilon}$, $\frac{\partial W_x}{\partial \epsilon}$ e $\frac{\partial W_y}{\partial \epsilon}$ são iguais a

$$\frac{\partial W}{\partial \epsilon} = \eta(x, y), \quad (4.26)$$

$$\frac{\partial W_x}{\partial \epsilon} = \frac{\partial \eta}{\partial x} = \eta_x \quad (4.27)$$

e

$$\frac{\partial W_y}{\partial \epsilon} = \frac{\partial \eta}{\partial y} = \eta_y. \quad (4.28)$$

Substituindo esses termos na equação (4.25) teremos

$$\frac{dI}{d\epsilon} = \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial W} \eta + \frac{\partial F}{\partial W_x} \eta_x + \frac{\partial F}{\partial W_y} \eta_y \right) dx dy. \quad (4.29)$$

O teorema de Green estabelece a seguinte relação

$$\oint_C Q dy + P dx = \iint_A \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA, \quad (4.30)$$

em que C será a fronteira do domínio A e este, por sua vez, é definido por $[x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$. Portanto, fazendo $P = -\frac{\partial F}{\partial W_y} \eta$ e $Q = \frac{\partial F}{\partial W_x} \eta$, temos que

$$\oint_C \frac{\partial F}{\partial W_x} \eta dy - \frac{\partial F}{\partial W_y} \eta dx = \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial W_x} \eta \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial W_y} \eta \right) \right] dA. \quad (4.31)$$

Dessa forma, efetuando a regra da cadeia nos termos à esquerda desta equação e realizando algumas manipulações é possível obter a seguinte expressão

$$\begin{aligned} \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial W_x} \eta_x + \frac{\partial F}{\partial W_y} \eta_y \right) dx dy &= \oint_C \frac{\partial F}{\partial W_x} \eta dy - \frac{\partial F}{\partial W_y} \eta dx \\ &\quad - \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial W_x} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial W_y} \right) \eta dx dy. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Como a função $\eta(x, y)$ será nula na fronteira do domínio, o termo $\oint_C \frac{\partial F}{\partial W_x} \eta dy - \frac{\partial F}{\partial W_y} \eta dx$ é igual a zero. Assim, a equação (4.32) se reduz a

$$\int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial W_x} \eta_x + \frac{\partial F}{\partial W_y} \eta_y \right) dx dy = - \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial W_x} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial W_y} \right) \eta dx dy. \quad (4.33)$$

Portanto, substituindo esta expressão na equação (4.29) obtemos

$$\frac{dI}{d\epsilon} = \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial W} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial W_x} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial W_y} \right) \eta dx dy, \quad (4.34)$$

igualando essa equação a zero para $\epsilon = 0$ temos

$$\int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial w} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial w_x} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial w_y} \right) \eta dx dy = 0. \quad (4.35)$$

Por conseguinte, aplicando o lema fundamental do cálculo variacional se obtém a equação (4.20).

4.1.4 Formulação variacional da equação de Poisson

Em alguns problemas é vantajoso obter o funcional de uma equação diferencial para resolver um problema. Por exemplo, no método de Rayleigh-Ritz é obtido uma solução

aproximada de uma equação diferencial, com condições de contorno definidas, minimizando o funcional desta equação. Assim, é possível obter a formulação variacional para equações diferenciais que apresentam operadores lineares, auto-adjuntos e positivos (Komzisk, 2009).

A equação de Poisson bidimensional, que é definida por

$$\nabla^2 w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = f(x, y), \quad (4.36)$$

em que $f(x, y)$ é um termo de fonte, satisfaz as condições para que exista sua formulação variacional. Deste modo, de acordo com Komzisk (2009), a formulação variacional da equação de Poisson é dada por

$$I(w) = \iint_A (w_x^2 + w_y^2 + 2wf) \, dA. \quad (4.37)$$

Esse resultado pode ser demonstrado obtendo a equação de Euler-Lagrange que equivale a minimizar esse funcional. Dessa forma, sendo F igual a

$$F = w_x^2 + w_y^2 + 2wf, \quad (4.38)$$

os termos $\frac{\partial F}{\partial w}$, $\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial w_x}$ e $\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial w_y}$ da equação (4.20), para esse caso, serão iguais a

$$\frac{\partial F}{\partial w} = \frac{\partial}{\partial w} (w_x^2 + w_y^2 + 2wf) = 2f, \quad (4.39)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial w_x} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial w_x} (w_x^2 + w_y^2 + 2wf) = 2 \frac{\partial w_x}{\partial x} = 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (4.40)$$

e

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial w_y} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial w_y} (w_x^2 + w_y^2 + 2wf) = 2 \frac{\partial w_y}{\partial y} = 2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}. \quad (4.41)$$

Portanto, a equação de Euler-Lagrange para o funcional da equação (4.37) é igual a

$$2f - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad (4.42)$$

colocando o 2 em evidência e separando o termo de fonte do operador diferencial essa equação se torna a equação de Poisson dada por (4.36). Por conseguinte, a equação (4.37) é a formulação variacional da equação de Poisson bidimensional.

4.2 Método Rayleigh-Ritz

O método de Rayleigh-Ritz é um método de aproximação direta que consiste em obter um valor aproximado de uma função a partir da minimização de sua formulação variacional. Dessa forma, considerando uma função w , que satisfaz a equação de Poisson no domínio A ,

esta função pode ser aproximada por

$$\tilde{w} = \phi_0 + \sum_{i=1}^N a_i \phi_i, \quad (4.43)$$

em que \tilde{w} é a solução aproximada de w , ϕ_0 é uma função que satisfaz as condições de contorno não homogêneas, ϕ_i são as funções base que satisfazem as condições de contorno homogêneas e são linearmente independentes, a_i são constantes chamadas de coeficientes de Ritz e N será o número de coeficientes a_i e funções ϕ_i utilizadas para encontrar uma solução aproximada.

Para o caso em que a condição de contorno no domínio é de $w = 0$, e não há condições de contorno não homogêneas, temos

$$\phi_0 = 0. \quad (4.44)$$

As funções base ϕ_i podem ser escritas, em coordenadas cartesianas, como

$$\phi = \phi_c (1, x, y, x^2, xy, y^2, x^3, x^2y, xy^2, y^3, \dots), \quad (4.45)$$

em que ϕ_c é uma função que satisfaz a condição de contorno homogênea e $(1, x, y, x^2, xy, y^2, x^3, x^2y, xy^2, y^3, \dots)$ são funções polinomiais linearmente independentes e a quantidade de componentes desse vetor irá ser igual ao valor de N , que pode ser igual apenas a números triangulares¹, ou seja, igual a 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28 e assim por diante. Então, para $N = 15$ a solução de $w(x, y)$ é aproximada por

$$\begin{aligned} \tilde{w} = \sum_{i=1}^{15} a_i \phi_i = \phi & (a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 x^2 + a_5 xy + a_6 y^2 \\ & + a_7 x^3 + a_8 x^2y + a_9 xy^2 + a_{10} y^3 + a_{11} x^4 \\ & + a_{12} x^3y + a_{13} x^2y^2 + a_{14} x^3y + a_{15} y^4). \end{aligned} \quad (4.46)$$

As derivadas em relação a x e y de \tilde{w} serão iguais a

$$\frac{\partial \tilde{w}}{\partial x} = \sum_{i=1}^N a_i \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \quad (4.47)$$

e

$$\frac{\partial \tilde{w}}{\partial y} = \sum_{i=1}^N a_i \frac{\partial \phi_i}{\partial y}. \quad (4.48)$$

Assim, substituindo essa equação na formulação variacional da equação de Poisson é obtida

¹O N -ésimo número triangular é dado por $\binom{N}{2}$.

a seguinte expressão

$$I(\tilde{w}) = \iint_A \left[\left(\sum_{i=1}^N a_i \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^N a_i \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \right)^2 + 2 \sum_{i=1}^N a_i \phi_i f \right] dx dy. \quad (4.49)$$

Derivando este funcional em relação aos coeficientes a_i , obtemos a seguinte equação

$$\frac{\partial I(\tilde{w})}{\partial a_i} = 2 \iint_A \left[\sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial \phi_j}{\partial x} + \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \right) + \phi_i f \right] dx dy, \quad (4.50)$$

igualando a equação acima a zero, é obtido o seguinte sistema de equações lineares

$$\sum_{j=1}^N \Gamma_{ij} a_j = \Lambda_i, \quad (4.51)$$

em que os componentes da matriz Γ são dados por

$$\Gamma_{ij} = \iint_A \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial \phi_j}{\partial x} + \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \right) dx dy \quad (4.52)$$

e os componentes do vetor Λ são obtidos por

$$\Lambda_i = - \iint_A \phi_i f dx dy. \quad (4.53)$$

O vetor \mathbf{a} , que tem como componentes os coeficientes de Ritz, é obtido resolvendo o sistema linear dado pela equação (4.51), desse modo

$$\mathbf{a} = \Gamma^{-1} \Lambda, \quad (4.54)$$

em que Γ^{-1} é a matriz inversa de Γ .

4.3 Aplicação no modelo

O escoamento laminar no duto triangular mostrado na Figura 3.2 é modelado, na forma adimensional, pela equação (3.50) com as condições de contorno dadas por (3.51). Então, a formulação variacional desse problema será dada por

$$I(w) = \iint_A \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 - 2w \right] dx dy, \quad (4.55)$$

pois, neste caso, f é igual a -1 .

4.3.1 Mudança de coordenadas

Para simplificar os cálculos, será utilizada a mudança de coordenadas proposta por [Singh e Saxena \(1996\)](#). Nesta transformação de coordenadas, um triângulo arbitrário definido, em coordenadas cartesianas, no domínio A se torna um triângulo retângulo com ambos os lados dos catetos iguais a 1 no domínio R para o sistema de coordenadas (ξ, η) . A Figura 4.4 mostra o triângulo em coordenadas cartesianas e no sistema de coordenadas (ξ, η) .

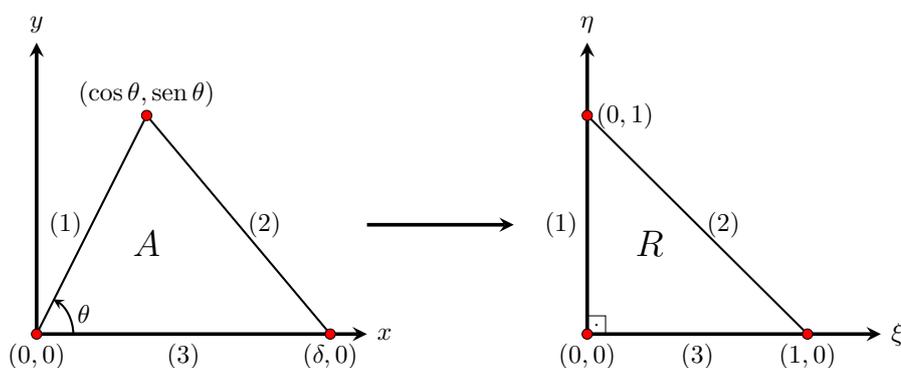


Figura 4.4: Triângulo no domínio (x, y) e (ξ, η) .

Em termos das coordenadas ξ e η , x e y podem ser escritos como

$$x = \delta\xi + \eta \cos \theta \quad (4.56)$$

e

$$y = \eta \sin \theta. \quad (4.57)$$

Alternativamente,

$$\xi = \frac{1}{\delta} (x - y \cot \theta) \quad (4.58)$$

e

$$\eta = \frac{y}{\sin \theta}. \quad (4.59)$$

Neste novo sistema de coordenadas, as equações dos lados (1), (2) e (3) serão dadas, respectivamente, por

$$\xi = 0, \quad (4.60)$$

$$1 - \xi - \eta = 0 \quad (4.61)$$

e

$$\eta = 0. \quad (4.62)$$

Essas equações valem para qualquer triângulo definido por δ e θ , sendo isso uma vantagem do sistemas de coordenadas (ξ, η) , pois, em coordenadas cartesianas, as equações mudam quando o triângulo é retângulo, como foi discutido na [Seção 3.6](#).

O Jacobiano $J(\xi, \eta)$ dessa transformação é dado por

$$J(\xi, \eta) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix}, \quad (4.63)$$

em que

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \delta, \quad (4.64)$$

$$\frac{\partial x}{\partial \eta} = \cos \theta, \quad (4.65)$$

$$\frac{\partial y}{\partial \xi} = 0 \quad (4.66)$$

e

$$\frac{\partial y}{\partial \eta} = \text{sen } \theta. \quad (4.67)$$

Logo, o Jacobiano será igual a

$$J(\xi, \eta) = \begin{vmatrix} \delta & \cos \theta \\ 0 & \text{sen } \theta \end{vmatrix} = \delta \text{sen } \theta. \quad (4.68)$$

As derivadas $\frac{\partial}{\partial x}$ e $\frac{\partial}{\partial y}$ podem ser escritas em função de ξ e η pelas seguintes equações

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{1}{\delta} \frac{\partial}{\partial \xi} \quad (4.69)$$

e

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = -\frac{\cot \theta}{\delta} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{1}{\text{sen } \theta} \frac{\partial}{\partial \eta}. \quad (4.70)$$

4.3.2 Aplicação do método de Rayleigh-Ritz

Será aplicado o método de Rayleigh-Ritz para o sistema de coordenadas definido por (ξ, η) , dessa forma as funções base ϕ_i são dadas por

$$\phi = \phi_c (1, \xi, \eta, \xi^2, \xi\eta, \eta^2, \xi^3, \xi^2\eta, \xi\eta^2, \eta^3, \dots), \quad (4.71)$$

em que ϕ_c será a função que automaticamente satisfaz a condição de não deslizamento nas paredes do duto, portanto ϕ_c pode ser igual a

$$\phi_c = \xi\eta(1 - \xi - \eta). \quad (4.72)$$

Esta expressão é o produto das equações (4.60), (4.61) e (4.62), que definem os lados do triângulo no sistema de coordenadas (ξ, η) . Então, uma aproximação \tilde{w} do campo de velocidade, para $N = 15$, é dada por

$$\begin{aligned} \tilde{w}(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^{15} a_i \phi_i = & \xi \eta (1 - \xi - \eta) (a_1 + a_2 \xi + a_3 \eta + a_4 \xi^2 + a_5 \xi \eta \\ & + a_6 \eta^2 + a_7 \xi^3 + a_8 \xi^2 \eta + a_9 \xi \eta^2 + a_{10} \eta^3 \\ & + a_{11} \xi^4 + a_{12} \xi^3 \eta + a_{13} \xi^2 \eta^2 + a_{14} \xi \eta^3 + a_{15} \eta^4). \end{aligned} \quad (4.73)$$

Neste sistema de coordenadas, as componentes da matriz Γ podem ser obtidas em função de ξ e η utilizando as equações (4.69) e (4.70) na equação (4.52), desse modo

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij} = \delta \operatorname{sen} \theta \int_0^1 \int_0^{1-\xi} & \left[\frac{1}{\delta^2} \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial \xi} \frac{\partial \phi_j}{\partial \xi} \right) + \left(\frac{1}{\operatorname{sen} \theta} \frac{\partial \phi_i}{\partial \eta} - \frac{\cot \theta}{\delta} \frac{\partial \phi_i}{\partial \xi} \right) \right. \\ & \left. \left(\frac{1}{\operatorname{sen} \theta} \frac{\partial \phi_j}{\partial \eta} - \frac{\cot \theta}{\delta} \frac{\partial \phi_j}{\partial \xi} \right) \right] d\eta d\xi \end{aligned} \quad (4.74)$$

e as componentes do vetor Λ serão dadas, em função de ξ e η , por

$$\Lambda_i = \delta \operatorname{sen} \theta \int_0^1 \int_0^{1-\xi} \phi_i d\eta d\xi, \quad (4.75)$$

em que ϕ_i é obtido pela equação (4.71). Assim, os coeficientes de Ritz são obtidos pela equação (4.54), utilizando as equações (5.13) e (4.75) para obter Γ e Λ .

4.3.3 Cálculo da vazão e do fRe

A vazão volumétrica pode ser determinada substituindo \tilde{w} na equação (3.23). Deste modo, uma vazão aproximada \tilde{Q} pode ser obtida por

$$\tilde{Q} = \delta \operatorname{sen} \theta \int_0^1 \int_0^{1-\xi} \tilde{w}(\xi, \eta) d\eta d\xi. \quad (4.76)$$

Substituindo a equação (4.73) nesta expressão temos

$$\tilde{Q} = \delta \operatorname{sen} \theta \int_0^1 \int_0^{1-\xi} \sum_{i=1}^N a_i \phi_i d\eta d\xi, \quad (4.77)$$

como os coeficientes a_i são constantes eles saem da integral dupla, logo

$$\tilde{Q} = \sum_{i=1}^N a_i \delta \operatorname{sen} \theta \int_0^1 \int_0^{1-\xi} \phi_i d\eta d\xi. \quad (4.78)$$

Dessa forma, como $\Lambda_i = \delta \sin \theta \int_0^1 \int_0^{1-\xi} \phi_i \, d\eta \, d\xi$, a vazão volumétrica pode ser obtida em função apenas dos coeficientes de Ritz e do vetor Λ , portanto

$$\tilde{Q} = \sum_{i=1}^N a_i \Lambda_i. \quad (4.79)$$

Assim, o parâmetro fRe será dado por

$$fRe = \frac{8A^3}{P^2 \tilde{Q}}, \quad (4.80)$$

em que a área A e o perímetro molhado P são obtidos no sistema de coordenadas cartesianas, pelas equações (3.39) e (3.41), respectivamente.

Capítulo 5

Implementação numérica

Este capítulo aborda como foi realizada a implementação numérica do método de Rayleigh-Ritz para resolver o escoamento em um duto triangular. Deste modo, será discutido como foram feitas as construções das funções base ϕ_i e suas derivadas, do vetor Λ e da matriz Γ . Ademais, será mostrado como foi calculado os coeficientes de Ritz a_i e efetuado a obtenção dos resultados, que incluem a vazão \tilde{Q} e o fRe . Por último, será efetuada a validação numérica desse método, por meio do cálculo do $f\mathfrak{R}$ para os dutos com seção transversal retangular, losangular e para triângulos que apresentam soluções exatas, que são o equilátero, retangular isósceles e o $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$.

5.1 Implementação numérica

Para a implementação do método de Rayleigh-Ritz, um código foi desenvolvido na linguagem de programação Python. Dessa forma, o código foi estruturado em 4 funções, e cada uma delas será discutida nas seções a seguir.

De modo de ter o uso mais eficientes, serão importadas bibliotecas que já estão prontas. Assim, os módulos utilizados estão mostrados na Listagem 5.1. O módulo *numpy* é utilizado para efetuar operações numéricas, como construção de vetores, matrizes, cálculo de funções trigonométricas, entre outros. Da biblioteca *scipy*, foi importado dois módulos, o primeiro *scipy.integrate* efetuará o cálculo numérico das integrais para determinar o vetor Λ e a matriz Γ . já o módulo *scipy.linalg* será usado para resolver o sistema linear da equação (4.54), e desse modo, encontrar os coeficientes de Ritz. Por fim, *sympy* é um módulo de linguagem matemática simbólica e sua principal função neste código é calcular as derivadas das funções base em relação a ξ e η .

```
1 import numpy as np
2 import scipy.integrate
3 import scipy.linalg
4 from sympy import diff, lambdify, symbols, zeros
```

Listagem 5.1: Código das bibliotecas importadas.

5.1.1 Construção das funções base ϕ_i e suas derivadas

A primeira função do código tem como objetivo a construção das funções base ϕ e das derivadas $\frac{\partial \phi}{\partial \xi}$ e $\frac{\partial \phi}{\partial \eta}$. Nessa função, as funções base são construídas na forma de uma matriz quadrada $n \times n$, em que n é um dos parâmetros de entrada da função, juntamente com a razão de aspecto δ do triângulo e o ângulo de abertura θ .

Assim, a matriz das funções base com n linhas e n colunas terá a seguinte forma

$$\phi = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ \xi & \eta & & & & \\ \xi^2 & \xi\eta & \eta^2 & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ \xi^{n-1} & \xi^{n-2}\eta & \xi^{n-3}\eta^2 & \dots & \eta^{n-1} & \end{bmatrix}, \quad (5.1)$$

em que os espaços em branco são valores nulos e a primeira linha tem índice zero como é utilizado em Python. Portanto, para $n = 2$ será construído uma função base com 3 coeficientes de Ritz. Deste modo, a Listagem 5.2 mostra esta primeira parte dessa função.

```
1 def vetor_phi(n, delta, theta):
2     # n = 2 -> a_1 + a_2*x + a_3*y
3     # n = 3 -> a_1 + a_2*x + a_3*y + a_4*x**2 + a_5*x*y + a_6*y**2 ...
4     # retorna -> (phi, phi_x, phi_y)
5
6     xi, eta = symbols('xi eta')
7     phi = zeros(n, n)
8
9     c = 1
10    for i in range(0, n):
11        k = i
12        for j in range(0, c):
13            phi[i, j] = xi**k * eta**j
14            k = k - 1
15        c += 1
```

Listagem 5.2: Primeira parte do código da função de construção das funções base.

Em seguida, os valores dessa matriz são colocados na forma de lista, de modo que cada função base seja um termo dessa lista. E nessa lista, é aplicada a equação (4.72) que garante a condição de não deslizamento nas paredes do triângulo. Essa parte da função está mostrada na Listagem 5.3.

```
1     N = 0 # numero de coeficientes de Ritz utilizados.
2     for i in range(1, n+1):
3         N += i
4
```

```

5     phi_lista = [0]*N
6     c = 0
7     for i in range(0, n):
8         c+=1
9         for j in range(0, c):
10            phi_lista[k] = phi[i, j]
11            k+=1
12
13     # Aplicacao de phi_c
14     phi_c = xi*eta*(1 - xi - eta)
15     for i in range(0, N):
16         phi_lista[i] = phi_lista[i]*phi_c

```

Listagem 5.3: Segunda parte do código da função de construção das funções base.

A terceira e última parte dessa função consiste na determinação das derivadas de cada uma das funções base em relação a ξ e η . Para isso, será utilizado a função *diff* da biblioteca *sympy* para realizar os cálculos dessas derivadas. Essa função apresenta dois parâmetros de entrada, o primeiro indica qual expressão deve ser derivada e o segundo designa em relação a qual incógnita deve ser realizada essa operação. Além disso, para ϕ e suas derivadas é utilizado a função *lambdify*, também da biblioteca *sympy*, para transformar cada expressão simbólica em uma função do Python. Isso é feito para que seja possível realizar os cálculos numéricos das integrais de forma eficiente. Assim, a última parte dessa função está mostrada na Listagem 5.4.

```

1     # Derivada de phi em relacao a xi e eta
2     phi_xi = [lambdify([xi, eta], (1/delta)*diff(phi_lista[i], xi)) for i
3         in range(0, N)]
4     phi_eta = [lambdify([xi, eta], (1/np.sin(theta))*diff(phi_lista[i],
5         eta) - (1 / (np.tan(theta)*delta))*diff(phi_lista[i], xi) ) for i
6         in range(0, N)]
7
8     phi_lista = [lambdify([xi, eta], phi_lista[i]) for i in range(0, N)]
9
10    return (phi_lista, phi_xi, phi_eta)

```

Listagem 5.4: Terceira parte do código da função de construção das funções base.

5.1.2 Construção do vetor Λ_i

A função que realiza a construção do vetor Λ recebe como parâmetros de entrada as funções base ϕ , calculadas na função discutida na [Subseção 5.1.1](#), a razão de aspecto δ e o ângulo de abertura θ . Primeiramente, foi criado uma variável *Lambda* como lista de zeros com o mesmo comprimento de ϕ . Posteriormente, foi realizado o cálculo da equação (4.75), assim, para os cálculos das integrais foi utilizado a função *scipy.integrate.dblquad*. Essa função é utilizada para o cálculo de integrais duplas, e ela tem cinco parâmetros de entrada, sendo o primeiro a função que deve ser integrada e os demais indicam os limites de

integração. Como retorno, essa função apresenta uma tupla, em que o primeiro termo é o valor da integral calculado e o segunda é uma suposição do erro cometido. Essa função está na Listagem 5.5.

```

1 def vetor_Lambda(phi, delta, theta):
2     # phi = vetor_phi()[0]
3
4     Lambda = np.zeros(len(phi), float)
5     for i in range(0, len(phi)):
6         c = scipy.integrate.dblquad(phi[i], 0, 1, 0, lambda eta: 1 - eta)
7         Lambda[i] = delta*np.sin(theta)*c[0]
8
9     return Lambda

```

Listagem 5.5: Código da função de construção do vetor Λ .

5.1.3 Construção da matriz Γ_{ij}

A listagem 5.6 mostra como implementado a equação (5.13), que determina os componentes da matriz Γ . Essa função tem os mesmos parâmetros de entrada que a função de construção do vetor Λ , com a adição de das listas com as derivadas de ϕ em relação a ξ e η . Assim, o cálculo das integrais são similares daquelas realizados para Λ . A diferença reside no integrando, que para o caso de Γ é o integrando da equação (5.13). No código, esse integrando é representado pela variável g .

```

1 def matriz_Gamma(phi, phi_xi, phi_eta, delta, theta):
2     # phi = vetor_phi[0]
3     # phi_x = vetor_phi[1]
4     # phi_y = vetor_phi[2]
5
6     Gamma = np.zeros((len(phi), len(phi)), float)
7     for i in range(0, len(phi)):
8         for j in range(0, len(phi)):
9             g_1 = phi_xi[i]
10            g_2 = phi_xi[j]
11            g_3 = phi_eta[i]
12            g_4 = phi_eta[j]
13            g = lambda x, y: g_1(x, y)*g_2(x, y) + g_3(x, y)*g_4(x, y)
14
15            d = scipy.integrate.dblquad(g, 0, 1, 0, lambda eta: 1-eta)
16            Gamma[i, j] = delta*np.sin(theta)*d[0]
17
18     return Gamma

```

Listagem 5.6: Código da função de construção da matriz Γ .

5.1.4 Obtenção dos resultados

A função resultados, mostrada na Listagem 5.7, retorna o valor do fRe , da vazão \tilde{Q} , a razão entre a velocidade máxima (\tilde{w}) e a velocidade média (U_m), a área A e o perímetro P de um triângulo definido por δ e θ . Dessa forma, esta função tem como valores de entrada esses parâmetros e o número de linhas e colunas n da matriz para construção de ϕ .

Para a determinação dos coeficientes de Ritz foi utilizado a função `scipy.linalg.solve` para resolver o sistema linear dado pela equação (4.54). O cálculo da vazão e do fRe foi a implementação das equações (4.79) e (4.80), respectivamente. As equações (3.39) e (3.41) foram utilizadas para o cálculo da área e do perímetro molhado do triângulo. A velocidade média foi obtida realizando a razão entre a vazão e a área. E a velocidade máxima foi obtida calculando a velocidade de forma discreta em uma malha de 200×200 pontos.

```
1 def resultados(n, delta, theta):
2     # Retorna o fRe de um triangulo com parametros delta e theta
3
4     # Funcao base e suas derivadas
5     phi = vetor_phi(n, delta, theta)[0]
6     phi_x = vetor_phi(n, delta, theta)[1]
7     phi_y = vetor_phi(n, delta, theta)[2]
8
9     # Vetor Lambda
10    Lambda = vetor_Lambda(phi, delta, theta)
11    # Matriz Gamma
12    Gamma = matriz_Gamma(phi, phi_x, phi_y, delta, theta)
13
14    # Coeficientes de Ritz
15    a = scipy.linalg.solve(Gamma, Lambda)
16
17    # Vazao
18    Q = 0
19    for i in range(0, len(phi)):
20        Q += a[i]*Lambda[i]
21
22    # Area do triangulo
23    A = np.sin(theta)*delta / 2
24
25    # Perimetro
26    a = delta
27    c = 1
28    b = np.sqrt(a**2 + c**2 - 2*a*c*np.cos(theta))
29    P = a + b + c
30
31    # fRe
32    fRe = 8*(A**3) / ((P**2)*Q)
33
34    # Velocidade media
35    u_med = Q / A
```

```

36
37 # velocidade
38 n_1 = 200 # Numero de pontos
39 xi = np.linspace(0, 1, n_1)
40 eta = np.linspace(0, 1, n_1)
41 w_matriz = np.zeros((n_1, n_1))
42
43 soma = 0
44 for i in range(0, n_1):
45     for j in range(0, n_1):
46         if xi[j] <= 1-eta[i]:
47             soma = 0
48             for k in range(0, len(phi)):
49                 s = phi[k]
50                 soma = soma + a[k]*s(xi[j], eta[i])
51
52             w_matriz[i, j] = soma
53
54 w_max = np.amax(w_matriz)
55
56 # razao vel_max / vel_med
57 r = w_max / u_med
58
59 return (fRe, Q, r, A, P)

```

Listagem 5.7: Código da função que calcula a vazão e o fRe .

O código completo desta implementação está no [Apêndice A](#).

5.2 Validação numérica

5.2.1 Duto retangular

Para a geometria retangular será considerado um retângulo com lados iguais a $2a$ e $2b$, como mostrado na Figura 5.1a. Dessa forma, o comprimento referência considerado para essa geometria será o lado com comprimento igual a $2a$ e a velocidade de referência W será igual a

$$W = \frac{(2a)^2 G}{\mu}. \quad (5.2)$$

Portanto, com essas variáveis de referência a equação governante do problema se reduz a equação (3.50). Além disso, pode ser definido a razão de aspecto α da seguinte forma

$$\alpha = \frac{2b}{2a}. \quad (5.3)$$

As condições de contorno são dadas por

$$\begin{cases} w^*(x^*, 0) = 0, & \text{para } 0 \leq x^* \leq 1, \\ w^*(y^*, 1) = 0, & \text{para } 0 \leq y^* \leq \alpha, \\ w^*(x^*, \alpha) = 0, & \text{para } 0 \leq x^* \leq 1, \\ w^*(y^*, 0) = 0, & \text{para } 0 \leq y^* \leq \alpha, \end{cases} \quad (5.4)$$

em que w^* , x^* e y^* são variáveis dimensionais. A Figura 5.1b mostra essa seção transversal na forma adimensional.

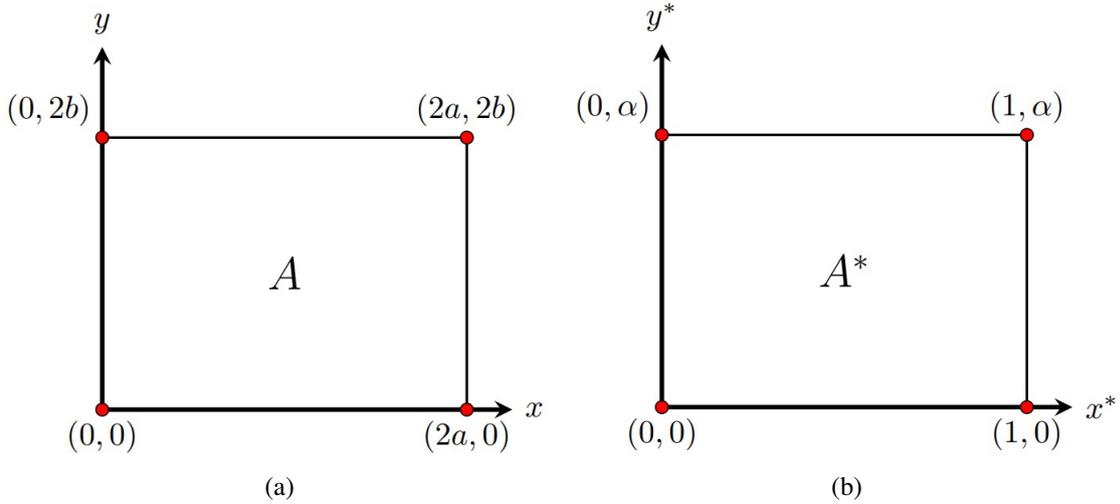


Figura 5.1: (a) Retângulo na forma dimensional; (b) Retângulo na forma adimensional.

Nesta geometria, as funções base ϕ_i serão iguais a

$$\phi = xy(x-1)(y-\alpha)(1, x, y, x^2, xy, y^2, x^3, x^2y, xy^2, y^3, \dots). \quad (5.5)$$

A matriz Γ e o vetor Λ serão dados, respectivamente, por

$$\Gamma_{i,j} = \int_0^\alpha \int_0^1 \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial \phi_j}{\partial x} + \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \right) dx dy \quad (5.6)$$

e

$$\Lambda_i = \int_0^\alpha \int_0^1 \phi_i dx dy. \quad (5.7)$$

A Figura 5.2 compara os valores de fRe pelo método de Rayleigh-Ritz e os da Tabela 42 de Shah e London (1978) em função da razão de aspecto, mostrando que ambos os resultados são muito próximos. Em termos de perfil, é possível notar que o fRe diminui à medida que se aumenta a razão de aspecto, logo para os casos analisados o quadrado ($\alpha = 1$) apresenta a menor queda de pressão.

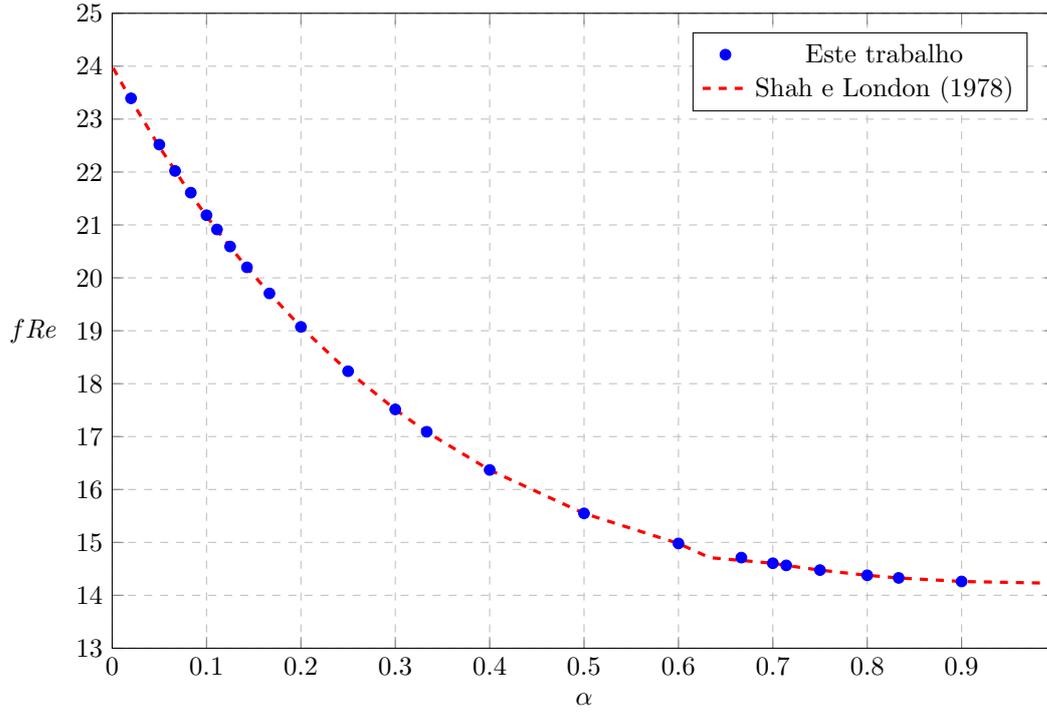


Figura 5.2: Comparação entre o fRe para duto retangular calculado neste trabalho com o retirado da Tabela 42 de [Shah e London \(1978\)](#).

5.2.2 Duto losangular

Por definição, losango é um quadrilátero com todos os lados iguais, portanto o comprimento de referência considerado será o lado com comprimento a do losango. O ângulo γ é o ângulo de abertura do losango. Assim, as Figura 5.3a e 5.3b mostram, respectivamente, essa seção transversal dimensional e adimensional. Para o último caso, as condições de contorno serão iguais a

$$\begin{cases} w^*(x^*, x^*) = 0, & \text{para } 0 \leq x^* \leq 1, \\ w^*(x^*, 1) = 0, & \text{para } \cos \gamma \leq x^* \leq 1 + \cos \gamma, \\ w^*(x^*, \tan \gamma(x^* - 1)) = 0, & \text{para } 1 \leq x^* \leq 1 + \cos \gamma, \\ w^*(x^*, 0) = 0, & \text{para } 0 \leq x^* \leq 1. \end{cases} \quad (5.8)$$

Para aplicar o método de Rayleigh-Ritz no losango, será utilizado uma mudança de coordenadas semelhante a mostrada na [Subseção 4.3.1](#). Desse modo, o losango se torna um quadrado de lados 1 no sistema de coordenadas (ξ, η) , em que essas coordenadas são dadas por

$$\xi = x - \frac{y}{\tan \gamma} \quad (5.9)$$

e

$$\eta = \frac{y}{\sin \gamma}. \quad (5.10)$$

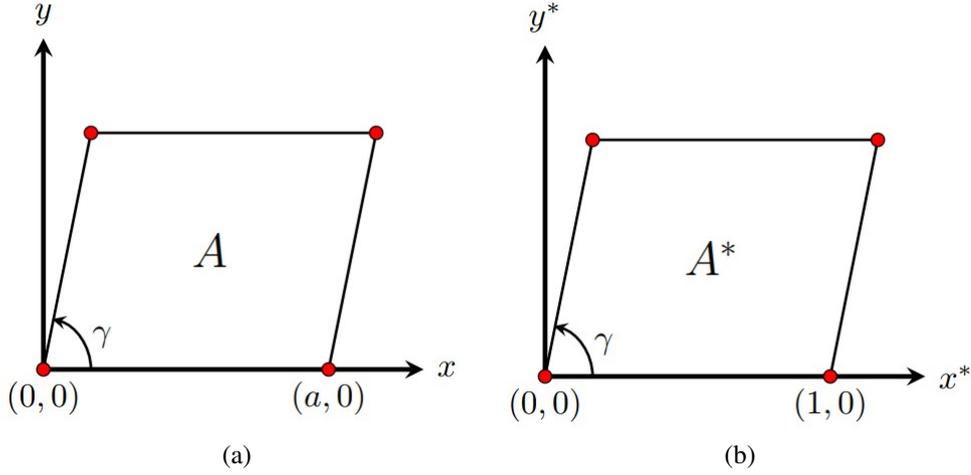


Figura 5.3: (a) Losango na forma dimensional; (b) Losango na forma adimensional.

O jacobiano dessa transformação é igual a

$$J(\xi, \eta) = \text{sen } \gamma. \quad (5.11)$$

Assim, as funções base nesse sistema de coordenadas são dadas por

$$\phi = \xi\eta(\xi - 1)(\eta - 1) (1, \xi, \eta, \xi^2, \xi\eta, \eta^2, \xi^3, \xi^2\eta, \xi\eta^2, \eta^3, \dots). \quad (5.12)$$

Por conseguinte, a matriz Γ e o vetor Λ são iguais a

$$\Gamma_{ij} = \text{sen } \gamma \int_0^1 \int_0^1 \left[\left(\frac{\partial \phi_i}{\partial \xi} \frac{\partial \phi_j}{\partial \xi} \right) + \left(\frac{1}{\text{sen } \gamma} \frac{\partial \phi_i}{\partial \eta} - \cot \gamma \frac{\partial \phi_i}{\partial \xi} \right) \left(\frac{1}{\text{sen } \gamma} \frac{\partial \phi_j}{\partial \eta} - \cot \gamma \frac{\partial \phi_j}{\partial \xi} \right) \right] d\eta d\xi \quad (5.13)$$

e

$$\Lambda_i = \text{sen } \gamma \int_0^1 \int_0^1 \phi_i d\xi d\eta. \quad (5.14)$$

A Figura 5.4 compara os resultados obtidos de *fRe* para o losango a partir do método de Rayleigh-Ritz e os da Tabela 73 de [Shah e London \(1978\)](#). A discrepância máxima entre os dois resultados foi de 1,27%, e essa diferença ocorreu para $\gamma = 10^\circ$. Dessa forma, esse parâmetro aumenta à medida que se aumenta o ângulo de abertura γ , em que o valor máximo é encontrado para $\gamma = 90^\circ$ que é um quadrado.

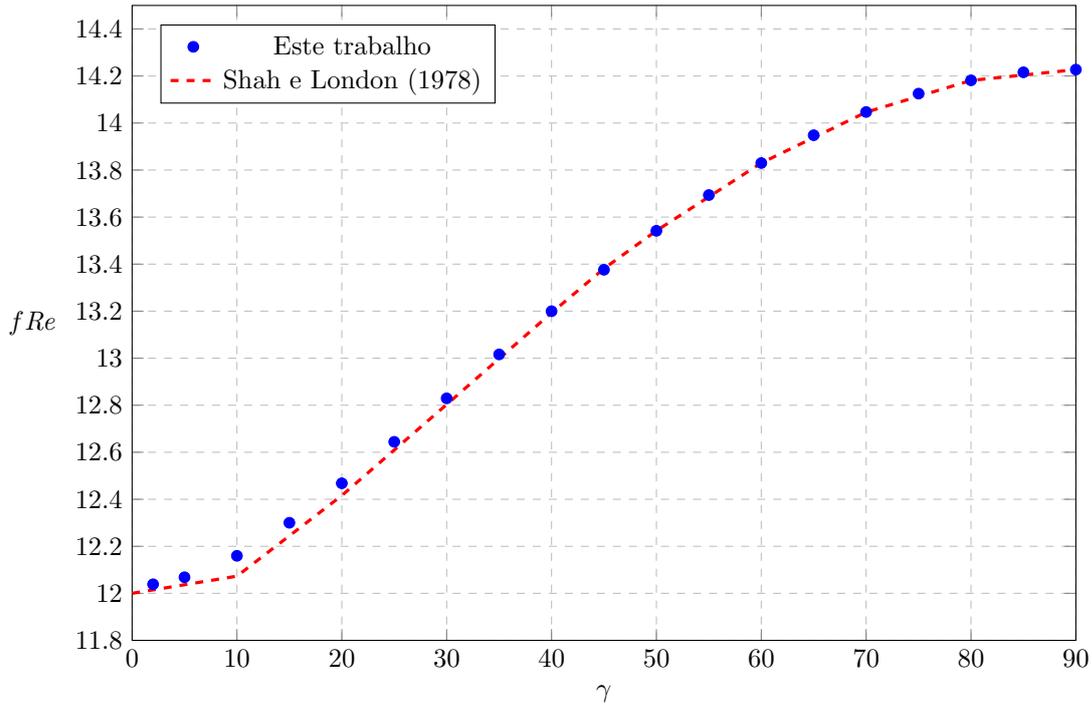


Figura 5.4: Comparação entre o fRe para o duto losangular calculado neste trabalho com o retirado da tabela 73 de [Shah e London \(1978\)](#).

5.2.3 Duto triangular

Como apresentado na [Seção 2.1](#), existem soluções exatas para o escoamento laminar em dutos triangulares para os triângulos equilátero, retângulo isósceles e $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$. Dessa forma, para validar o código discutido na seção anterior, será calculado os valores de fRe para esses triângulos e eles serão comparados com as soluções presentes na literatura para os respectivos casos.

5.2.3.1 Triângulo equilátero

Para um triângulo equilátero de lado c , segundo [Lekner \(2007\)](#), o campo de velocidade ($w(x, y)$) que satisfaz a equação (3.18) com as condições de contorno dadas em (3.19), é dado em coordenadas cartesianas por

$$w(x, y) = \frac{\sqrt{3} G}{2c \mu} \left[y \left(x + \frac{y}{\sqrt{3}} - \frac{c}{2} \right) \left(x - \frac{y}{\sqrt{3}} + \frac{c}{2} \right) \right], \quad (5.15)$$

em que a expressão $y \left(x + \frac{y}{\sqrt{3}} - \frac{c}{2} \right) \left(x - \frac{y}{\sqrt{3}} + \frac{c}{2} \right)$ é o produto das equações dos lados do triângulo equilátero. Neste caso, a origem do sistema de coordenadas está no centro da

base do triângulo. A vazão volumétrica será dada pela seguinte equação

$$Q = \frac{\sqrt{3}a^4}{320} \left(\frac{G}{\mu} \right). \quad (5.16)$$

Utilizando as variáveis adimensionais propostas na equação (3.32), as equações (5.15) e (5.16) se reduzem a

$$w^*(x^*, y^*) = \frac{\sqrt{3}}{2} \left[y^* \left(x^* + \frac{y^*}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2} \right) \left(x^* - \frac{y^*}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2} \right) \right] \quad (5.17)$$

e

$$Q^* = \frac{\sqrt{3}}{320}. \quad (5.18)$$

Para o triângulo equilátero a sua área e seu perímetro nas formas adimensionais serão dadas, respectivamente, por

$$A^* = \frac{\sqrt{3}}{4} \quad (5.19)$$

e

$$P^* = 3. \quad (5.20)$$

Portanto, pela equação (3.38) temos que o fRe exato para o triângulo equilátero é igual a

$$fRe_{\text{exato}} = \frac{40}{3} \cong 13,333. \quad (5.21)$$

No modelo proposto no [Capítulo 3](#), o triângulo equilátero é obtido usando a razão de aspecto $\delta = 1$ e o ângulo de abertura $\theta = 60^\circ$. Assim, o fRe calculado pelo método de Rayleigh-Ritz, convergiu para solução exata para apenas 1 coeficiente de Ritz ($N = 1$). O valor computado deste coeficiente foi de $a_1 = 0,75$. Portanto, o campo de velocidade obtido por esse método para o triângulo equilátero será igual a

$$\tilde{w}(\xi, \eta) = 0,75 \xi \eta (1 - \xi - \eta). \quad (5.22)$$

Pelas equações (4.58) e (4.59), este campo de velocidade pode ser escrito em coordenadas cartesianas como

$$\tilde{w}(x, y) = \frac{\sqrt{3}}{2} \left[y \left(x - \frac{y}{\sqrt{3}} \right) \left(1 - x - \frac{y}{\sqrt{3}} \right) \right]. \quad (5.23)$$

A diferença entre as equações (5.15) e (5.23) é a posição da origem do sistema de coordenadas. Na segunda equação o sistema de coordenadas está posicionado como mostrado na Figura (3.2). A Figura 5.5 compara os contornos de velocidade obtidos a partir do método de Rayleigh-Ritz (Figura 5.5a) com os obtidos por [Lekner \(2007\)](#) (Figura 5.5b). Em ambas as figuras, estão mostradas as curvas de 0,1 até 0,9 vezes a velocidade máxima, com um incremento de 0,1 para cada curva.

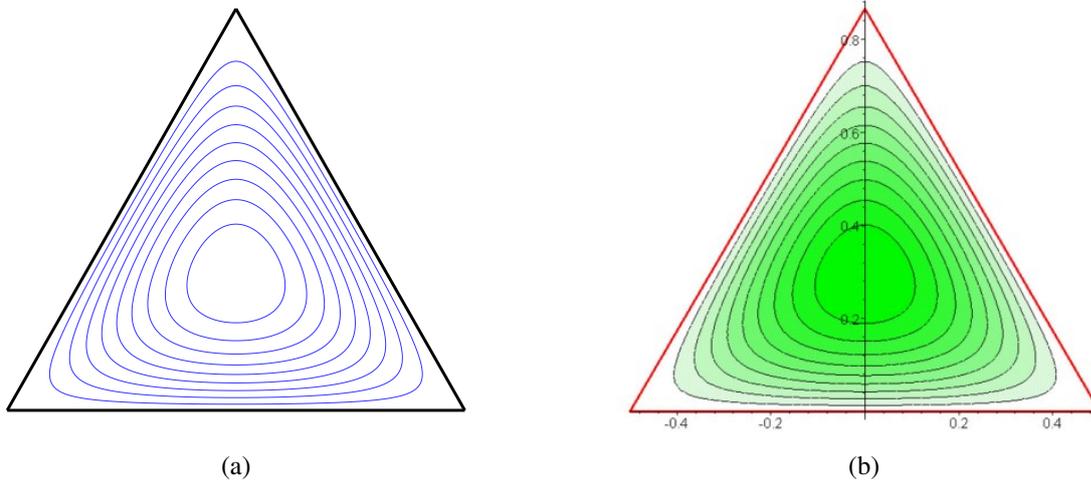


Figura 5.5: Contornos de velocidade constantes para o triângulo equilátero. (a) Este trabalho; (b) [Lekner \(2007\)](#).

5.2.3.2 Triângulo retângulo isósceles

De acordo com [Jog \(2015\)](#), o perfil de velocidade adimensional para o triângulo retângulo isósceles é dado por

$$w(x, y) = \frac{1}{2}x(y - x) + \sum_{m=1}^{\infty} A_m (\sin m\pi x \sinh m\pi y - \sin m\pi y \sinh m\pi x), \quad (5.24)$$

em que o comprimento de referência que foi utilizado para adimensionalizar essa equação é a dimensão b mostrada na Figura 5.6.

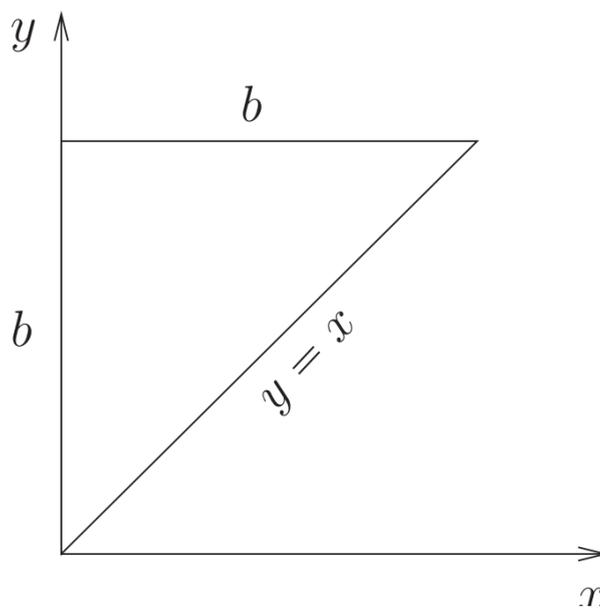


Figura 5.6: Triângulo retângulo isósceles. Retirado de [Jog \(2015\)](#).

A equação (5.24) satisfaz automaticamente a equação governante (3.50) e as condições de não deslizamento para $x = 0$ e $x = y$. Desse modo, os coeficientes A_m serão determinados a partir da condição de não deslizamento em $y = 1$. Portanto, nesta parede temos que

$$w(x,1) = 0, \quad (5.25)$$

logo

$$\sum_{m=1}^{\infty} A_m \operatorname{sen} m\pi x \operatorname{senh} m\pi = \frac{1}{2}x(x-1). \quad (5.26)$$

Multiplicando ambos os lados desta equação por $\operatorname{sen} n\pi x$, em que n é um número inteiro qualquer maior que zero, e realizando a integração em x teremos

$$\sum_{m=1}^{\infty} A_m \operatorname{senh} m\pi \int_0^1 \operatorname{sen} m\pi x \operatorname{sen} n\pi x \, dx = \int_0^1 \frac{1}{2}x(x-1) \operatorname{sen} n\pi x \, dx. \quad (5.27)$$

Pela ortogonalidade das funções senos, a integral $\int_0^1 \operatorname{sen} m\pi x \operatorname{sen} n\pi x \, dx$ será igual a

$$\int_0^1 \operatorname{sen} m\pi x \operatorname{sen} n\pi x \, dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \frac{1}{2}, & m = n. \end{cases} \quad (5.28)$$

E a integral $\int_0^1 \frac{1}{2}x(x-1) \operatorname{sen} n\pi x \, dx$ é igual a

$$\int_0^1 \frac{1}{2}x(x-1) \operatorname{sen} n\pi x \, dx = \frac{(-1)^n - 1}{n^3\pi^3}. \quad (5.29)$$

Então os coeficientes A_n serão dados por

$$A_n = \frac{2((-1)^n - 1)}{n^3\pi^3 \operatorname{senh} \pi n}. \quad (5.30)$$

Substituindo essa expressão na equação (5.24) o campo de velocidade será dado por

$$w(x,y) = \frac{1}{2}x(y-x) + \frac{2}{\pi^3} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m - 1}{m^3 \operatorname{senh} \pi m} (\operatorname{sen} m\pi x \operatorname{senh} m\pi y - \operatorname{sen} m\pi y \operatorname{senh} m\pi x) \quad (5.31)$$

Assim, a vazão volumétrica para o triângulo isósceles reto será dada por

$$Q = \int_0^1 \int_x^1 w(x,y) \, dy \, dx. \quad (5.32)$$

Substituindo a equação (5.24) na equação acima teremos que a vazão é obtida pela seguinte

expressão

$$Q = \frac{1}{48} + \frac{2}{\pi^5} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{((-1)^m - 1)(\cosh m\pi - (-1)^m)}{m^5 \sinh m\pi}. \quad (5.33)$$

Pela Figura 5.6, a área e o perímetro molhado para este tipo de triângulo serão dados respectivamente por

$$A = 0,5 \quad (5.34)$$

e

$$P = 1 + \sqrt{2}. \quad (5.35)$$

Portanto, utilizando a equação (3.38) o fRe_{exato} para esta geometria será igual a

$$fRe_{\text{exato}} = 13,15256155. \quad (5.36)$$

Esta expressão diverge daquela reportada por Shah e London (1978). Dessa forma, o valor dado pela equação (5.36) inédito na literatura.

Desse modo, para aplicar o método de Rayleigh-Ritz neste triângulo, $\theta = 45^\circ$ e $\delta = \cos 45^\circ$. Assim, na Tabela 5.1 estão contidos os valores calculados para o fRe para 3 até 120 coeficientes de Ritz. Além disso, essa tabela mostra o erro relativo entre o valor calculado do fRe pelo método de Rayleigh-Ritz e o valor exato dado pela equação (5.36). Por meio dessa tabela, é possível verificar a convergência do método de Rayleigh-Ritz, pois à medida que se aumenta o número de coeficientes de Ritz, a solução aproximada se torna mais próxima da exata. Os erros mostrados na Tabela 5.1 foram obtidos pela seguinte expressão

$$\text{erro} = \left| \frac{fRe_{\text{exato}} - fRe}{fRe_{\text{exato}}} \right| \times 100\%. \quad (5.37)$$

Tabela 5.1: Análise de convergência do método de Rayleigh-Ritz para o triângulo retângulo isósceles.

N	fRe	Erro (%)
3	13,235621	0,6
6	13,164918	0,09
10	13,155801	0,02
15	13,153554	0,007
21	13,152920	0,002
28	13,152706	0,001
36	13,152626	0,0004
45	13,152592	0,0002
55	13,152577	0,0001
66	13,152570	6×10^{-5}
78	13,152566	3×10^{-5}
91	13,152564	2×10^{-5}
105	13,152563	1×10^{-5}
120	13,152562	5×10^{-6}

5.2.3.3 Triângulo $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$

O campo de velocidade adimensional obtido a partir do trabalho de [Hay \(1939\)](#) é dado por

$$w(x,y) = \frac{(x-1)(-x^2-x+3y^2)}{6} - \frac{2}{\pi^3} \sum_{m=1}^{\infty} \chi_m \operatorname{sen} m\pi x \left\{ G(y) + \cosh \left[m\pi \left(y - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right] \right\}, \quad (5.38)$$

onde

$$G(y) = \begin{cases} -(-1)^{\frac{m+1}{2}} \sqrt{3} \operatorname{senh} m\pi y, & \text{para } m \text{ ímpar} \\ (-1)^{\frac{m}{2}} \operatorname{cosh} m\pi y, & \text{para } m \text{ par} \end{cases} \quad (5.39)$$

e

$$\chi_m = \frac{(-1)^{m+1}}{m^3 \left(\cos \frac{m\pi}{2} + \cosh \frac{m\pi\sqrt{3}}{2} \right)}. \quad (5.40)$$

Algumas manipulações matemática foram feitas na equação dada por Hay (1939), com o intuito de simplificar a expressão. A Figura 5.7 mostra um esquema do triângulo utilizado por Hay (1939), em que a é a dimensão utilizada para adimensionalizar a equação.

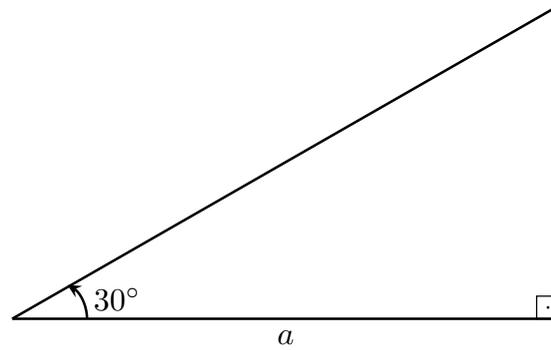


Figura 5.7: Triângulo $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$.

Integrando a equação (5.38), temos que a vazão volumétrica será obtida por

$$Q = \frac{7\sqrt{3}}{1080} - \frac{1}{\pi^5} \sum_{m=1}^{\infty} \chi_m \left\{ H(y) - \frac{4(-1)^m \sinh\left(\frac{m\pi\sqrt{3}}{2}\right) - 3(-1)^m \sinh\left(\frac{m\pi\sqrt{3}}{6}\right) + \cosh\left(\frac{m\pi\sqrt{3}}{2}\right)}{4m^2} \right\}, \quad (5.41)$$

em que χ_m é dado pela equação (5.40) e

$$H(y) = \begin{cases} \frac{(-1)^{\frac{m+1}{2}} \sqrt{3} \left[3(-1)^m \cosh\left(\frac{m\pi\sqrt{3}}{3}\right) - 4(-1)^m + 1 \right]}{2m^2}, & \text{para } m \text{ ímpar} \\ -\frac{3(-1)^{\frac{3m}{2}} \sinh\left(\frac{\pi m\sqrt{3}}{3}\right)}{2m^2}, & \text{para } m \text{ par.} \end{cases} \quad (5.42)$$

Devido as simplificações utilizadas, as equações (5.38) e (5.41) são inéditas na literatura. A área e o perímetro molhado serão iguais a

$$A = \frac{\sqrt{3}}{6} \quad (5.43)$$

e

$$P = 1 + \sqrt{3}. \quad (5.44)$$

Por conseguinte, o fRe exato para essa geometria será igual a

$$fRe_{\text{exato}} = 13,03169337. \quad (5.45)$$

Assim, a Tabela 5.2 mostra a convergência para o valor exato do fRe calculado pelo

método de Rayleigh-Ritz à medida que se aumenta o número de coeficientes de Ritz. Novamente, a equação (5.37) foi utilizada para se obter o erro relativo entre o valor calculado e o exato.

Tabela 5.2: Análise de convergência do método de Rayleigh-Ritz para o triângulo retângulo isósceles.

N	fRe	Erro (%)
3	13,1240420	0,7
6	13,0492076	0,1
10	13,0360283	0,03
15	13,0330170	0,01
21	13,0321727	0,003
28	13,0318872	0,001
36	13,0317796	0,0006
45	13,0317347	0,0003
55	13,0317145	0,0001
66	13,0317048	8×10^{-5}
78	13,0316998	4×10^{-5}
91	13,0316971	2×10^{-5}
105	13,0316956	1×10^{-5}
120	13,0316951	1×10^{-5}

Capítulo 6

Metodologia analítica

O presente capítulo se dedica a resolver analiticamente o escoamento em um duto com a seção transversal triangular. Para isso, será realizada uma transformação de coordenadas, que converte o domínio triangular em coordenadas cartesianas para o domínio retangular no novo sistema de coordenadas. Assim, é proposto um campo de velocidade dado por uma série de Fourier, em que seus coeficientes serão obtidos resolvendo um sistema linear proveniente da equação governante. Em seguida é discutido o cálculo da vazão e do fRe e como foi realizada a implementação desse método. Por último, foi feita uma análise de convergência do método para os triângulos que apresentam solução exata.

6.1 Solução analítica

No artigo de [Chernyshov \(2014\)](#), é proposta uma metodologia analítica para resolver a torção elástica em uma haste para as seções transversais com os formatos de um paralelogramo, de um trapézio, de um triângulo ou com um formato arbitrário. O objetivo dessa seção é utilizar esse método para resolver o escoamento isotérmico, laminar e incompressível em um duto com a seção transversal triangular.

A Figura [6.1a](#) ilustra a seção transversal triangular utilizada por [Chernyshov \(2014\)](#), e a Figura [6.1b](#) mostra a seção triangular utilizada neste trabalho, com os parâmetros δ e θ definidos no [Capítulo 3](#). A mudança de direção foi feita para facilitar a analogia com o trabalho de [Chernyshov \(2014\)](#).

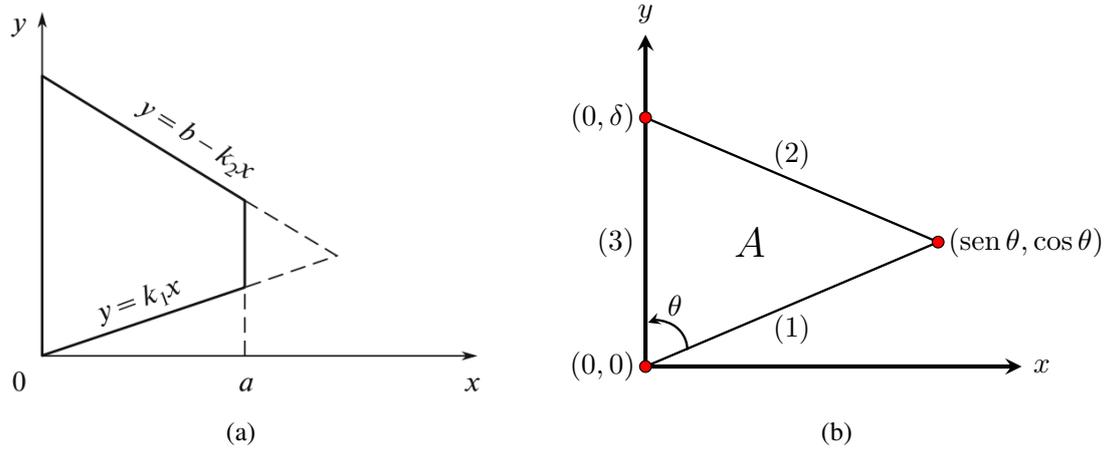


Figura 6.1: (a) Seção triangular retirada de Chernyshov (2014); (b) Seção triangular utilizada neste trabalho.

Comparando as duas figuras, fica claro que o termo a apresentado na Figura 6.1a será igual a $\text{sen } \theta$ na notação utilizada neste trabalho. Adicionalmente, a partir das equações dos lados (1), (2) e (3) do triângulo da Figura 6.1b é possível identificar os valores correspondentes dos termos k_1 , k_2 e b que aparecem na Figura 6.1a. Dessa forma, temos que as equações para os lados (1), (2) e (3) serão, respectivamente,

$$y = x \cot \theta, \quad (6.1)$$

$$y = \delta - \left(\frac{\delta - \cos \theta}{\text{sen } \theta} \right) x \quad (6.2)$$

e

$$x = 0. \quad (6.3)$$

Portanto, os valores de k_1 , k_2 e b serão iguais a

$$k_1 = \cot \theta, \quad (6.4)$$

$$k_2 = \frac{\delta - \cos \theta}{\text{sen } \theta} \quad (6.5)$$

e

$$b = \delta. \quad (6.6)$$

Assim, Chernyshov (2014) propõe uma mudança de coordenadas em que o triângulo definido no domínio A , em coordenadas cartesianas, se torna um retângulo no domínio Ω para o sistema de coordenadas (x, ζ) , em que $0 \leq \zeta \leq 1$. A Figura 6.2 mostra o triângulo em coordenadas cartesianas e o retângulo no sistema de coordenadas (x, ζ) .

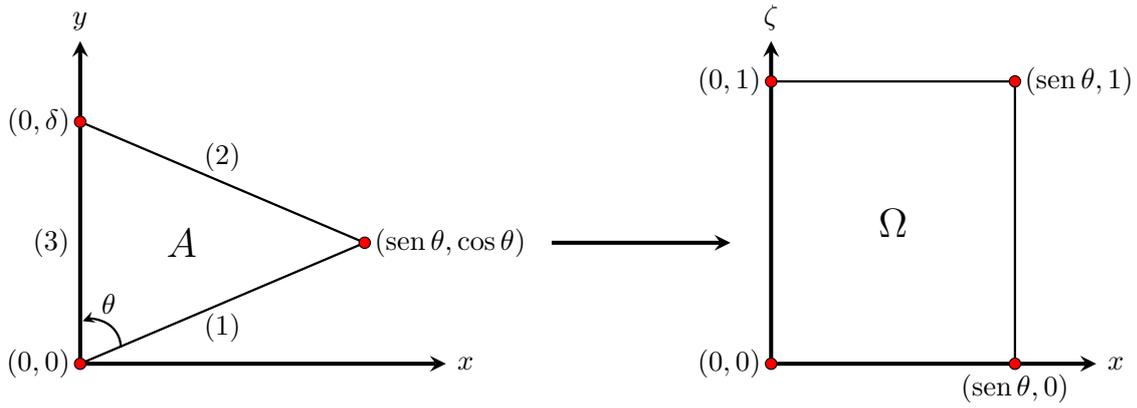


Figura 6.2: Triângulo no sistema cartesiano e retângulo no sistema (x, ζ) .

No artigo de Chernyshov (2014) ζ é definido como

$$\zeta = \frac{y - k_1 x}{b - k_0 x}, \quad (6.7)$$

onde

$$k_0 = k_1 + k_2. \quad (6.8)$$

Na notação adotada neste trabalho, ζ será obtido pela seguinte equação

$$\zeta = \frac{y - x \cot \theta}{\delta - k_0 x} \quad (6.9)$$

em que, pela equação (6.8), k_0 será igual a

$$k_0 = \cot \theta + \frac{\delta - \cos \theta}{\sin \theta} = \frac{\delta}{\sin \theta}. \quad (6.10)$$

A correspondência entre essas duas notações está sintetizada na Tabela 6.1.

Tabela 6.1: Correspondência entre a notação utilizada por Chernyshov (2014) e pela utilizada neste trabalho.

Chernyshov (2014)	Este trabalho
a	$\sin \theta$
b	δ
k_1	$\cot \theta$
k_2	$\frac{\delta - \cos \theta}{\sin \theta}$
$k_0 = k_1 + k_2$	$\frac{\delta}{\sin \theta}$
$\zeta = \frac{y - k_1 x}{b - k_0 x}$	$\zeta = \frac{y - x \cot \theta}{\delta - k_0 x}$

Neste novo sistema de coordenadas, as derivadas parciais $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ e $\frac{\partial^2}{\partial y^2}$ são dadas por

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2\zeta_x \frac{\partial^2}{\partial x \partial \zeta} + \zeta_x^2 \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} + \zeta_{xx} \frac{\partial}{\partial \zeta} \quad (6.11)$$

e

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} = \zeta_y^2 \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} + \zeta_{yy} \frac{\partial}{\partial \zeta}, \quad (6.12)$$

em que

$$\zeta_x = \frac{\partial \zeta}{\partial x} = \frac{k_0 y - \cot \theta \delta}{(\delta - k_0 x)^2}, \quad (6.13)$$

$$\zeta_{xx} = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} = \frac{2k_0(k_0 y - \cot \theta \delta)}{(\delta - k_0 x)^3}, \quad (6.14)$$

$$\zeta_y = \frac{\partial \zeta}{\partial y} = \frac{1}{\delta - k_0 x} \quad (6.15)$$

e

$$\zeta_{yy} = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} = 0. \quad (6.16)$$

Dessa forma, a equação governante do problema, dada pela equação (3.50), no sistema de coordenadas (x, ζ) se torna

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2\zeta_x \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \zeta} + \zeta_{xx} \frac{\partial w}{\partial \zeta} + (\zeta_x^2 + \zeta_y^2) \frac{\partial^2 w}{\partial \zeta^2} = -1. \quad (6.17)$$

Pelas equações (6.13) até (6.15) a equação acima pode ser reescrita como

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{2Z}{(\delta - k_0 x)^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \zeta} + \frac{2k_0 Z}{(\delta - k_0 x)^3} \frac{\partial w}{\partial \zeta} + \left[\frac{Z^2}{(\delta - k_0 x)^4} + \frac{1}{(\delta - k_0 x)^2} \right] \frac{\partial^2 w}{\partial \zeta^2} = -1, \quad (6.18)$$

onde

$$Z = k_0 y - \cot \theta \delta. \quad (6.19)$$

Ademais, as condições de contorno neste novo sistema de coordenadas reduzem-se a

$$\begin{cases} w(x, 0) = 0, & \text{para } 0 \leq x \leq \text{sen } \theta, \\ w(\text{sen } \theta, \zeta) = 0, & \text{para } 0 \leq \zeta \leq 1, \\ w(x, 1) = 0, & \text{para } 0 \leq x \leq \text{sen } \theta, \\ w(0, \zeta) = 0, & \text{para } 0 \leq \zeta \leq 1, \end{cases} \quad (6.20)$$

Como solução da equação (6.18), é proposto um campo de velocidade dado por

$$w(x, \zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{mn} \text{sen} \left(\frac{m\pi x}{\text{sen } \theta} \right) \text{sen} (n\pi \zeta). \quad (6.21)$$

A expressão acima satisfaz automaticamente as quatro condições de contorno mostradas na equação (6.20). Assim, os coeficientes A_{mn} serão determinados de tal forma que a expressão (6.21) satisfaça a equação governante do problema. Desse modo, temos que

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{mn} \left(\frac{m\pi}{\text{sen } \theta} \right)^2 \text{sen} \left(\frac{m\pi x}{\text{sen } \theta} \right) \text{sen} (n\pi\zeta), \quad (6.22)$$

$$\frac{\partial w}{\partial \zeta} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{mn} (n\pi) \text{sen} \left(\frac{m\pi x}{\text{sen } \theta} \right) \cos (n\pi\zeta), \quad (6.23)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \zeta^2} = - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{mn} (n\pi)^2 \text{sen} \left(\frac{m\pi x}{\text{sen } \theta} \right) \text{sen} (n\pi\zeta) \quad (6.24)$$

e

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \zeta} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{mn} mn(\pi)^2 \cos \left(\frac{m\pi x}{\text{sen } \theta} \right) \cos (n\pi\zeta). \quad (6.25)$$

Então substituindo essas expressões na equação (6.18) se obtém a seguinte equação

$$\begin{aligned} & - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{mn} \left(\frac{m\pi}{\text{sen } \theta} \right)^2 \text{sen} \left(\frac{m\pi x}{\text{sen } \theta} \right) \text{sen} (n\pi\zeta) \\ & + \frac{2Z}{(\delta - k_0 x)^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{mn} mn(\pi)^2 \cos \left(\frac{m\pi x}{\text{sen } \theta} \right) \cos (n\pi\zeta) \\ & + \frac{2k_0 Z}{(\delta - k_0 x)^3} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{mn} (n\pi) \text{sen} \left(\frac{m\pi x}{\text{sen } \theta} \right) \cos (n\pi\zeta) \\ & - \left[\frac{Z^2}{(\delta - k_0 x)^4} + \frac{1}{(\delta - k_0 x)^2} \right] \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{mn} (n\pi)^2 \text{sen} \left(\frac{m\pi x}{\text{sen } \theta} \right) \text{sen} (n\pi\zeta) = -1. \quad (6.26) \end{aligned}$$

Multiplicando essa expressão por $\text{sen} \left(\frac{p\pi x}{\text{sen } \theta} \right) \text{sen} (s\pi\zeta)$, em que p e s são números inteiros positivos, e por $(\delta - k_0 x)^4$, com o intuito de facilitar a integração, temos que

$$\begin{aligned} & - (\delta - k_0 x)^4 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{mn} \left(\frac{m\pi}{\text{sen } \theta} \right)^2 \text{sen} \left(\frac{m\pi x}{\text{sen } \theta} \right) \text{sen} (n\pi\zeta) \text{sen} \left(\frac{p\pi x}{\text{sen } \theta} \right) \text{sen} (s\pi\zeta) \\ & + 2Z(\delta - k_0 x)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{mn} mn(\pi)^2 \cos \left(\frac{m\pi x}{\text{sen } \theta} \right) \cos (n\pi\zeta) \text{sen} \left(\frac{p\pi x}{\text{sen } \theta} \right) \text{sen} (s\pi\zeta) \\ & + 2k_0 Z(\delta - k_0 x) \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{mn} (n\pi) \text{sen} \left(\frac{m\pi x}{\text{sen } \theta} \right) \cos (n\pi\zeta) \text{sen} \left(\frac{p\pi x}{\text{sen } \theta} \right) \text{sen} (s\pi\zeta) \\ & - [Z^2 + (\delta - k_0 x)^2] \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{mn} (n\pi)^2 \text{sen} \left(\frac{m\pi x}{\text{sen } \theta} \right) \text{sen} (n\pi\zeta) \\ & = -(\delta - k_0 x)^4 \text{sen} \left(\frac{p\pi x}{\text{sen } \theta} \right) \text{sen} (s\pi\zeta). \quad (6.27) \end{aligned}$$

Por fim, integrando a equação acima no domínio Ω , obtemos o seguinte sistema linear de

equações

$$\begin{aligned}
& - \int_0^{\text{sen } \theta} \int_0^1 (\delta - k_0)^4 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{mn} \left(\frac{m\pi}{\text{sen } \theta} \right)^2 \text{sen} \left(\frac{m\pi x}{\text{sen } \theta} \right) \text{sen} (n\pi\zeta) \text{sen} \left(\frac{p\pi x}{\text{sen } \theta} \right) \text{sen} (s\pi\zeta) d\zeta dx \\
& + \int_0^{\text{sen } \theta} \int_0^1 2Z(\delta - k_0x)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{mn} mn(\pi)^2 \cos \left(\frac{m\pi x}{\text{sen } \theta} \right) \cos (n\pi\zeta) \text{sen} \left(\frac{p\pi x}{\text{sen } \theta} \right) \text{sen} (s\pi\zeta) d\zeta dx \\
& + \int_0^{\text{sen } \theta} \int_0^1 2k_0Z(\delta - k_0x) \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{mn} (n\pi) \text{sen} \left(\frac{m\pi x}{\text{sen } \theta} \right) \cos (n\pi\zeta) \text{sen} \left(\frac{p\pi x}{\text{sen } \theta} \right) \text{sen} (s\pi\zeta) d\zeta dx \\
& - \int_0^{\text{sen } \theta} \int_0^1 [Z^2 + (\delta - k_0x)^2] \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{mn} (n\pi)^2 \text{sen} \left(\frac{m\pi x}{\text{sen } \theta} \right) \text{sen} (n\pi\zeta) \text{sen} \left(\frac{p\pi x}{\text{sen } \theta} \right) \text{sen} (s\pi\zeta) d\zeta dx \\
& = - \int_0^{\text{sen } \theta} \int_0^1 (\delta - k_0)^4 \text{sen} \left(\frac{p\pi x}{\text{sen } \theta} \right) \text{sen} (s\pi\zeta) d\zeta dx, \tag{6.28}
\end{aligned}$$

em que as componentes do vetor de incógnitas desse sistema são os coeficientes A_{ps} .

Em uma forma mais compacta esse sistema pode ser escrito como

$$C\mathbf{x} = \mathbf{f}, \tag{6.29}$$

onde C é a matriz de coeficientes, \mathbf{x} será o vetor de incógnitas e o vetor \mathbf{f} é o termo de fonte da equação (6.31). Para resolver esse problema, os coeficientes $(m; n)$ variarão de 1 até um número finito S , resultando em uma matriz C com dimensões de $S^2 \times S^2$ e os vetores \mathbf{x} e \mathbf{f} terão dimensão igual a S^2 . Com a finalidade de ilustrar a configuração desse sistema linear, considere $S = 2$. Assim, a matriz C será igual a

$$C_{ij} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} \end{bmatrix}. \tag{6.30}$$

Os coeficientes $(p; s)$ variam em respeito às linhas i . Por conseguinte, os valores desses coeficientes serão (1; 1), (1; 2), (2; 1) e (2; 2) para i igual a 1, 2, 3 e 4, respectivamente. E os coeficientes $(m; n)$ conforme a variação de j , sendo seus valores iguais a (1; 1), (1; 2), (2; 1) e (2; 2) para j igual a 1, 2, 3 e 4, nesta ordem. Dessa maneira, para ilustrar, o termo C_{23} será

dado por

$$\begin{aligned}
C_{23} = & - \int_0^{\text{sen } \theta} \int_0^1 (\delta - k_0)^4 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{2\pi}{\text{sen } \theta} \right)^2 \text{sen} \left(\frac{2\pi x}{\text{sen } \theta} \right) \text{sen}(\pi\zeta) \text{sen} \left(\frac{\pi x}{\text{sen } \theta} \right) \text{sen}(2\pi\zeta) d\zeta dx \\
& + \int_0^{\text{sen } \theta} \int_0^1 2Z(\delta - k_0 x)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} 2(\pi)^2 \cos \left(\frac{2\pi x}{\text{sen } \theta} \right) \cos(\pi\zeta) \text{sen} \left(\frac{\pi x}{\text{sen } \theta} \right) \text{sen}(2\pi\zeta) d\zeta dx \\
& + \int_0^{\text{sen } \theta} \int_0^1 2k_0 Z(\delta - k_0 x) \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \pi \text{sen} \left(\frac{2\pi x}{\text{sen } \theta} \right) \cos(\pi\zeta) \text{sen} \left(\frac{\pi x}{\text{sen } \theta} \right) \text{sen}(2\pi\zeta) d\zeta dx \\
& - \int_0^{\text{sen } \theta} \int_0^1 [Z^2 + (\delta - k_0 x)^2] \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (\pi)^2 \text{sen} \left(\frac{2\pi x}{\text{sen } \theta} \right) \text{sen}(\pi\zeta) \text{sen} \left(\frac{\pi x}{\text{sen } \theta} \right) \text{sen}(2\pi\zeta) d\zeta dx.
\end{aligned} \tag{6.31}$$

As componentes do vetor \mathbf{x} serão iguais aos coeficientes A_{ps} . Logo,

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{12} \\ A_{21} \\ A_{22} \end{bmatrix} \tag{6.32}$$

e o vetor \mathbf{f} , por sua vez, é dado por

$$\mathbf{f} = - \begin{bmatrix} \int_0^{\text{sen } \theta} \int_0^1 (\delta - k_0)^4 \text{sen} \left(\frac{\pi x}{\text{sen } \theta} \right) \text{sen}(\pi\zeta) d\zeta dx \\ \int_0^{\text{sen } \theta} \int_0^1 (\delta - k_0)^4 \text{sen} \left(\frac{\pi x}{\text{sen } \theta} \right) \text{sen}(2\pi\zeta) d\zeta dx \\ \int_0^{\text{sen } \theta} \int_0^1 (\delta - k_0)^4 \text{sen} \left(\frac{2\pi x}{\text{sen } \theta} \right) \text{sen}(\pi\zeta) d\zeta dx \\ \int_0^{\text{sen } \theta} \int_0^1 (\delta - k_0)^4 \text{sen} \left(\frac{2\pi x}{\text{sen } \theta} \right) \text{sen}(2\pi\zeta) d\zeta dx \end{bmatrix}. \tag{6.33}$$

Os detalhes de como foi realizada a implementação desse método estão descritos na [Seção 6.3](#).

6.2 Cálculo da vazão

Para a determinação da vazão, a equação (6.21) foi integrada no domínio Ω , dessa forma a vazão será obtida por

$$Q = \int_0^{\text{sen } \theta} \int_0^1 w(x, \zeta) J(x, \zeta) d\zeta dx, \tag{6.34}$$

em que $J(x, \zeta)$ é o jacobiano dessa transformação, que será dado por

$$J(x, \zeta) = \begin{vmatrix} 1 & \frac{\partial x}{\partial \zeta} \\ 0 & \frac{\partial y}{\partial \zeta} \end{vmatrix}, \quad (6.35)$$

em que

$$\frac{\partial y}{\partial \zeta} = \delta - k_0 x, \quad (6.36)$$

logo

$$J(x, \zeta) = \delta - k_0 x. \quad (6.37)$$

Portanto, a vazão será obtida pela seguinte expressão

$$Q = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{m2n-1} \frac{2 \operatorname{sen} \theta [(-1)^m (k_0 \operatorname{sen} \theta - \delta) + \delta]}{\pi^2 m (2n - 1)}. \quad (6.38)$$

O fRe pode ser obtido pela equação (4.80), em que a área e o perímetro são dados, respectivamente, pelas equações (3.39) e (3.41).

6.3 Implementação

Novamente utilizamos a linguagem Python para desenvolver um código para encontrar os coeficientes A_{ps} , permitindo assim determinar a vazão e o fRe para um triângulo arbitrário definido pela sua razão de aspecto δ e seu ângulo de abertura θ . Na Listagem 6.1, estão apresentadas as bibliotecas importadas. O módulo *numpy* foi empregado para cálculos trigonométricos e de constantes matemáticas, e o *scipy.linalg* foi utilizado para resolver o sistema linear.

```
1 import numpy as np
2 import scipy.linalg
```

Listagem 6.1: Bibliotecas importadas.

As integrais da matriz de coeficientes C e do vetor f foram obtidas analiticamente em função dos coeficientes m , n , p e s . O Apêndice B mostra as funções que retornam os valores de cada das integrais da equação (6.31). As funções *int_1* até *int_4* representam as integrais da matriz C , que são somadas na função *integrais*, enquanto *int_fonte* retorna o valor da integral dupla do vetor f . Adicionalmente, está contida na Listagem B.1 a função que retorna o valor da vazão volumétrica, obtida a partir da equação (6.38).

Por fim, foi desenvolvida a função *fRe_vazão*, mostrada na Listagem 6.2, que retorna os valores de fRe e da vazão a partir do número S de coeficientes $(m; n)$ utilizados, da razão de aspecto δ e do ângulo θ . Na primeira parte dessa função, foram utilizadas as correspon-

dências da Tabela 6.1 para calcular k_1 , k_2 , b e a a partir de δ e θ . Com esses valores, foram calculados os termos da matriz C e do vetor f , utilizando as funções da Listagem B.1. Para determinar os coeficientes A_{ps} , foi utilizado a função `scipy.linalg.solve`. Em seguida, são calculados a vazão, a área e o perímetro para obter o valor de fRe .

```

1 def fRe_vazao(S, delta, theta):
2     k_1 = 1 / np.tan(theta)
3     k_2 = (delta - np.cos(theta)) / (np.sin(theta))
4     a = np.sin(theta)
5     b = delta
6
7     C = np.zeros((S**2, S**2)) # Matriz dos coeficientes
8     f = np.zeros(N**2)
9
10    # construcao da matriz C
11    c_p=0
12    for linha in range(0, S**2):
13        if linha %S==0:
14            c_s = 1
15            c_p += 1
16        else:
17            c_s += 1
18
19        p = c_p
20        s = c_s
21        c_m = 0
22        for coluna in range(0, S**2):
23            if coluna % S ==0:
24                c_n = 1
25                c_m+=1
26            else:
27                c_n += 1
28            m = c_m
29            n = c_n
30            #print(m,n,p,s)
31            x_2 = integrais(m,n,p,s,k_1,k_2,a,b)
32            C[linha, coluna] = x_2
33
34    # Termo de fonte
35    c_p=0
36    for linha in range(0, S**2):
37        if linha %S ==0:
38            c_s = 1
39            c_p += 1
40        else:
41            c_s += 1
42
43        p = c_p
44        s = c_s
45        x_3 = int_fonte(p,s,k_1,k_2,a,b)

```

```

46     #print(p,s)
47     f[linha] = x_3
48
49     # Coeficientes
50     x = scipy.linalg.solve(C,f)
51
52     # Vazao
53     Q = 0
54     c_p=0
55     #print(A)
56     for linha in range(0, S**2):
57         if linha%S==0:
58             c_s = 1
59             c_p += 1
60         else:
61             c_s += 1
62
63         p = c_p
64         s = c_s
65         if s%2 != 0: # so contabiliza os valores impares de s
66             Q+=x[linha]*vazao(p,s,k_1,k_2,b,a)
67
68     # Area
69     Area = delta * np.sin(theta) / 2
70
71     # Perimetro
72     b_lado = np.sqrt(1 + delta**2 - 2*delta*np.cos(theta))
73     P = 1 + delta + b_lado
74
75     # fRe
76     fRe = (8*(Area**3))/((P**2)*Q)
77
78     u = [fRe, Q]
79
80     return u

```

Listagem 6.2: Código utilizado para a obtenção dos resultados analíticos.

6.4 Convergência do método

Para analisar a convergência do método analítico, foram calculados os valores de fRe para diferentes valores de S nos triângulos equilátero, retângulo isósceles e $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$. O valor de S foi variado de 2 até 64, seguindo as potências de 2, para essas três geometrias. As Figuras 6.3, 6.4 e 6.5 mostram os gráficos de fRe em função de S para os triângulos equilátero, retângulo isósceles e $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$, respectivamente. Nesses três gráficos, percebe-se que o valor de fRe se aproxima da solução exata à medida que S aumenta, che-

gando a valores próximos ao exato quando $S = 32$ e $S = 64$.

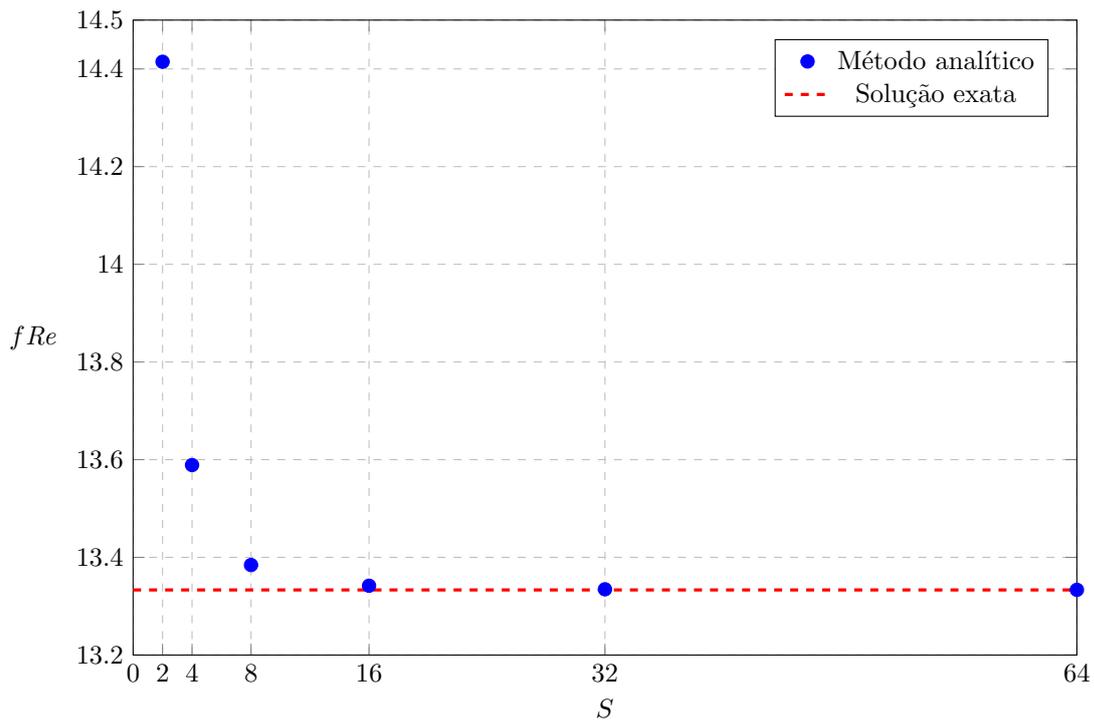


Figura 6.3: Análise gráfica da convergência do método analítico para o triângulo equilátero.

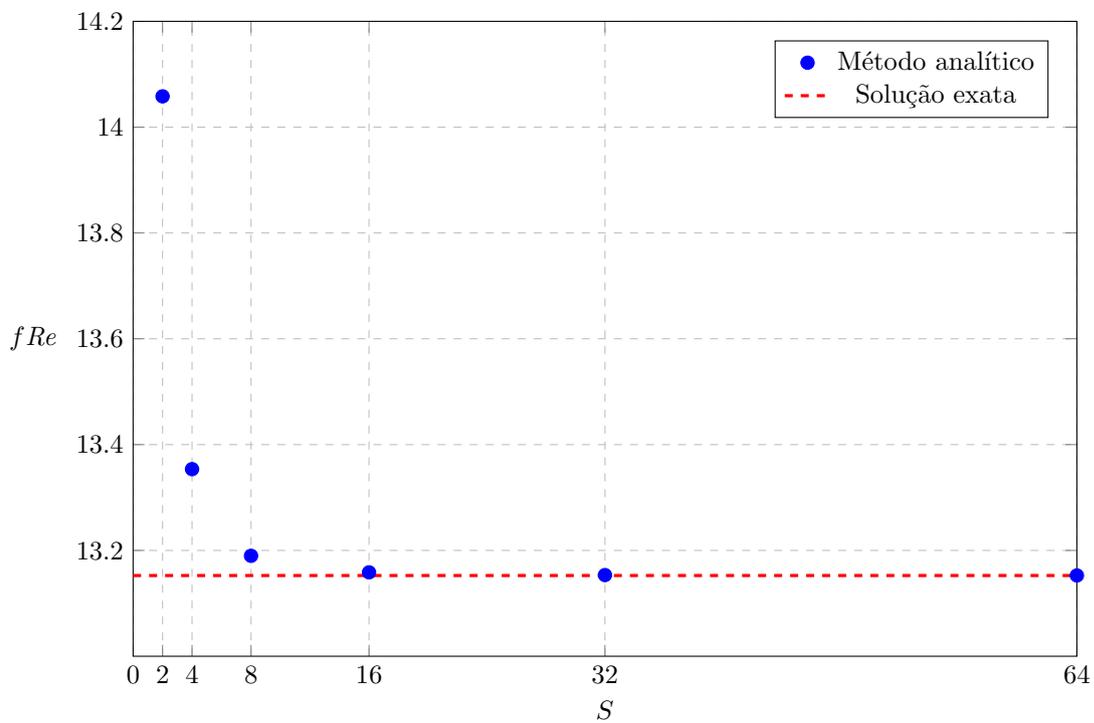


Figura 6.4: Análise gráfica da convergência do método analítico para o triângulo retângulo isósceles.

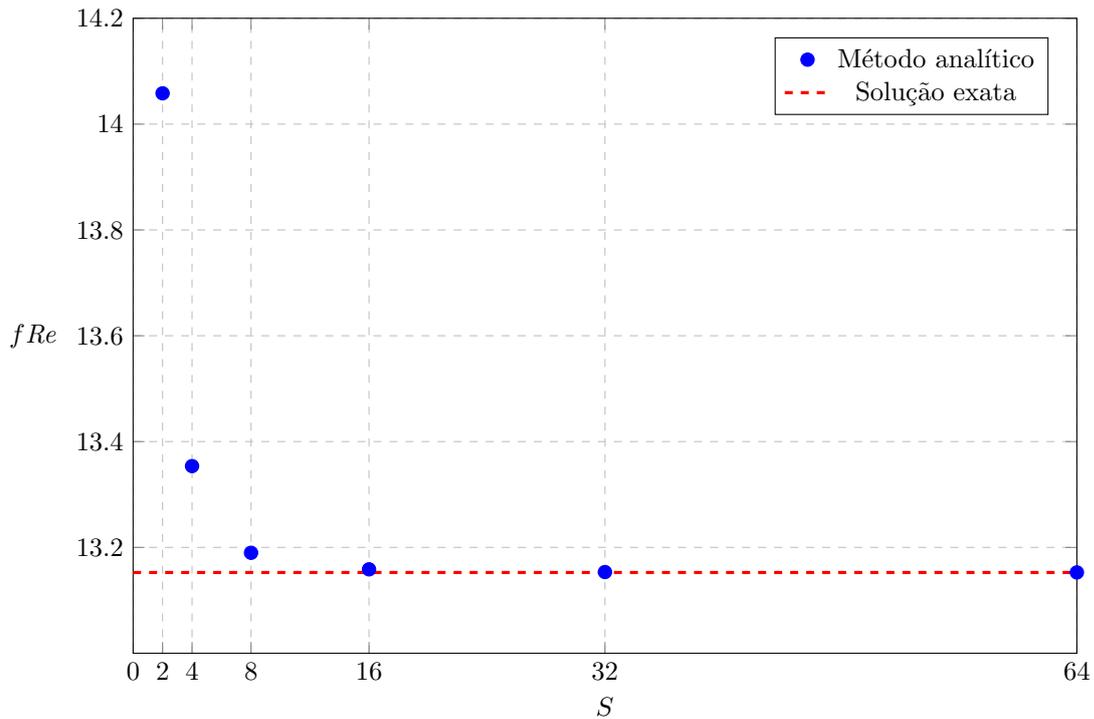


Figura 6.5: Análise gráfica da convergência do método analítico para o triângulo $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$.

Em adição a esses gráficos, está contido nas Tabelas 6.2, 6.3 e 6.4 os valores de fRe para cada S e seus respectivos erros relativos em relação ao valor exato, para os triângulos equilátero, retângulo isósceles e $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$.

Tabela 6.2: Análise de convergência do método analítico para o triângulo equilátero

S	fRe	Erro (%)
2	14.4146	8,1
4	13.5889	1,9
8	13.3842	0,3
16	13.3418	0,06
32	13.3346	0,009
64	13.3335	0,001

Tabela 6.3: Análise de convergência do método analítico para o triângulo retângulo isósceles

S	fRe	Erro (%)
2	14.0582	4,2
4	13.3536	1,3
8	13.1898	0,3
16	13.1585	0,05
32	13.1534	0,007
64	13.1526	0,001

Tabela 6.4: Análise de convergência do método analítico para o triângulo $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$.

S	fRe	Erro (%)
2	13.5836	6,8
4	13.2133	1,5
8	13.0711	0,2
16	13.0385	0,04
32	13.0327	0,006
64	13.0318	0,0009

Capítulo 7

Resultados e discussões

Neste capítulo, serão mostrados os resultados obtidos neste trabalho utilizando os métodos de Rayleigh-Ritz e analítico. Para realizar essa discussão, os resultados serão divididos em três classes de triângulos: retângulo, isósceles e arbitrário.

7.1 Triângulo retângulo

Para mapear triângulos retângulos, a razão de aspecto δ será igual a $\cos \theta$, como mostrado na Figura 7.1. Para obtenção dos resultados, o ângulo de abertura será variado até 45° , pois, como os ângulos diferentes de 90° são complementares, para valores de θ maiores que 45° , os triângulos se repetem.

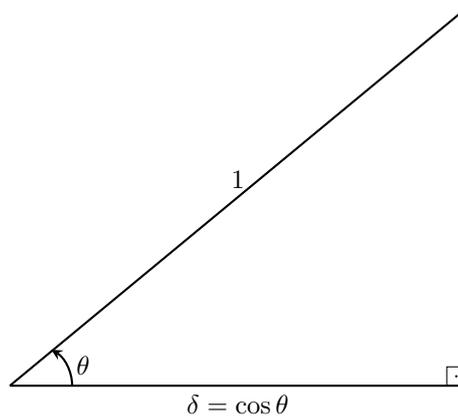


Figura 7.1: Triângulo retângulo ($\delta = \cos \theta$).

A Tabela 7.1 mostra os valores de fRe para os ângulos de abertura de 5° até 45° para diferentes números de coeficientes de Ritz. A partir desses resultados, nota-se que apenas o triângulo de $\theta = 5^\circ$ não estabilizou o resultado na terceira casa decimal até $N = 45$. Para esse caso, o resultado estabilizou em 12,254 para 78 coeficientes. Para os demais triângulos, foi necessário 28 ou menos coeficientes de Ritz para o resultado convergir, exceto para $\theta =$

10° que convergiu com $N = 45$.

Tabela 7.1: Análise de convergência do método de Rayleigh-Ritz para triângulos retângulos.

$\theta \backslash N$	3	6	10	15	21	28	36	45
5°	14,333	13,131	12,638	12,418	12,320	12,279	12,263	12,258
10°	13,656	12,800	12,556	12,492	12,478	12,475	12,474	12,473
15°	13,286	12,766	12,676	12,663	12,660	12,659	-	-
20°	13,125	12,850	12,820	12,815	12,813	12,812	-	-
25°	13,092	12,957	12,942	12,938	12,937	12,936	-	-
30°	13,124	13,049	13,036	13,033	13,032	13,031	-	-
35°	13,176	13,114	13,102	13,100	13,099	-	-	-
40°	13,219	13,152	13,142	13,139	-	-	-	-
45°	13,235	13,164	13,155	13,153	13,152	-	-	-

Os resultados encontrados a partir da metodologia analítica estão apresentados na Tabela 7.2, e todos esses valores foram obtidos com $S = 64$. Além disso, nesta tabela constam os resultados alcançados pelo método de Rayleigh-Ritz, os dados da Tabela 60 de [Shah e London \(1978\)](#), e o erro relativo entre o resultado analítico em relação a esses outros dois métodos. O maior erro entre os resultados obtidos pelos métodos analítico e de Rayleigh-Ritz foi da ordem de $10^{-3}\%$. Em contrapartida, a ordem da maior disparidade entre o método analítico e os resultados reportados por [Shah e London \(1978\)](#) foi de $10^{-1}\%$.

Tabela 7.2: Valores de fRe para triângulos retângulos obtidos pelos métodos analítico e de Rayleigh-Ritz.

θ	Método Analítico	Rayleigh-Ritz	Erro (%)	Ref. (16)	Erro(%)
5°	12,255	12,254	0,005	12,27	0,12
10°	12,473	12,473	0,002	12,49	0,13
15°	12,658	12,658	0,002	12,68	0,16
20°	12,812	12,812	0,001	12,83	0,13
25°	12,936	12,936	0,001	12,94	0,02
30°	13,031	13,031	0,001	13,034	0,01
35°	13,099	13,099	9×10^{-4}	13,09	0,07
40°	13,139	13,139	8×10^{-4}	13,13	0,07
45°	13,152	13,152	8×10^{-4}	13,154	0,01

As Figuras 7.2 e 7.3 apresentam de forma visual os resultados de fRe e Q para ângulos de abertura de $2,5^\circ$ até 45° , com incrementos de $2,5^\circ$. Os dois parâmetros aumentam à medida que se aumenta o ângulo de abertura, sendo os maiores valores para o ângulo de 45° . Nestes gráficos, estão comparados os resultados obtidos pelo método analítico e pelo método de Rayleigh-Ritz, evidenciando a ótima concordância entre as duas metodologias.

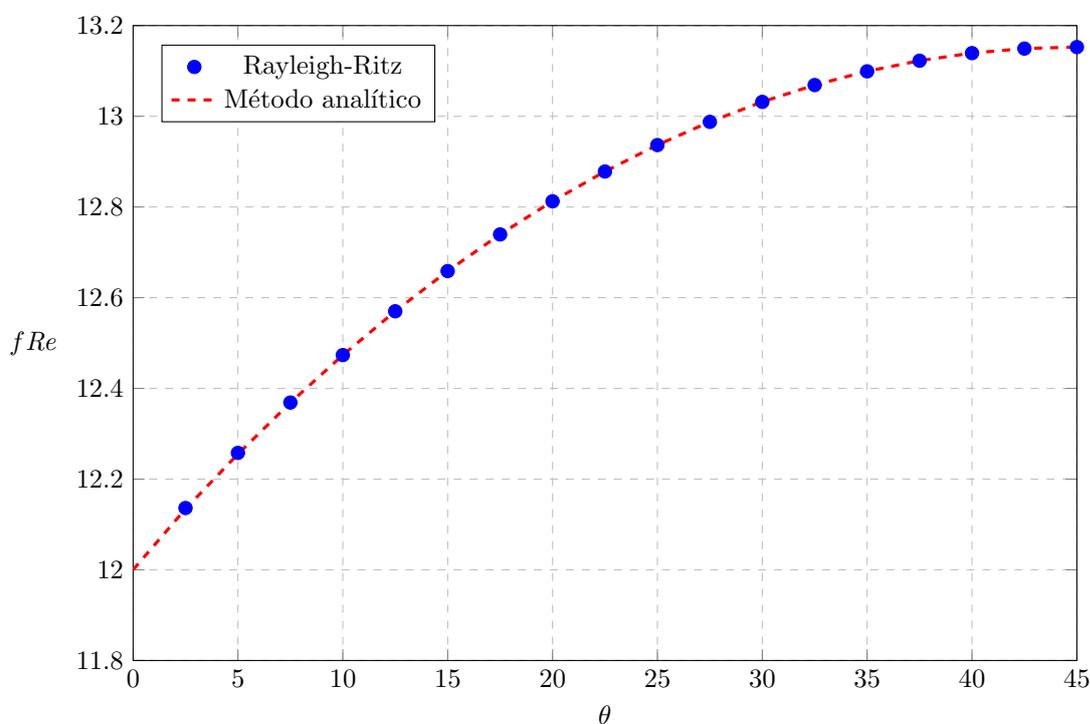


Figura 7.2: Gráfico dos valores de fRe em função de θ , obtidos pela metodologia analítica e pelo método de Rayleigh-Ritz.

Na Tabela 7.3, estão contidos os resultados do produto de fator de atrito com o número de Reynolds, a vazão, a razão entre a velocidade máxima e média $\left(\frac{w_{\max}}{U_m}\right)$, a área e o perímetro para os triângulos retângulos analisados. Esses valores foram obtidos pelo método de Rayleigh-Ritz.

As Figuras 7.4a até 7.4f mostram os contornos de velocidade constantes, encontrado pelo método de Rayleigh-Ritz, para os triângulos retângulos com ângulos de abertura iguais a 20° , 25° , 30° , 35° , 40° e 45° . Assim como o contorno de velocidade mostrado no Capítulo 5 para o triângulo equilátero, está ilustrado nessas figuras as curvas de 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7; 0,8 e 0,9 vezes a velocidade máxima. Os contornos de velocidade tomam o formato da parede nas regiões próximas a ela, e se aproximam cada vez mais de um perfil circular à medida que se aumenta a velocidade. Além disso, percebe-se que quanto menor é o valor de θ , a variação do escoamento na direção vertical (y) é maior do que na direção horizontal (x). Quando se aumenta o ângulo, aumenta também a dependência do escoamento na direção x , chegando a um perfil simétrico em relação a bissetriz do ângulo reto quando $\theta = 90^\circ$ (Figura 7.4f).

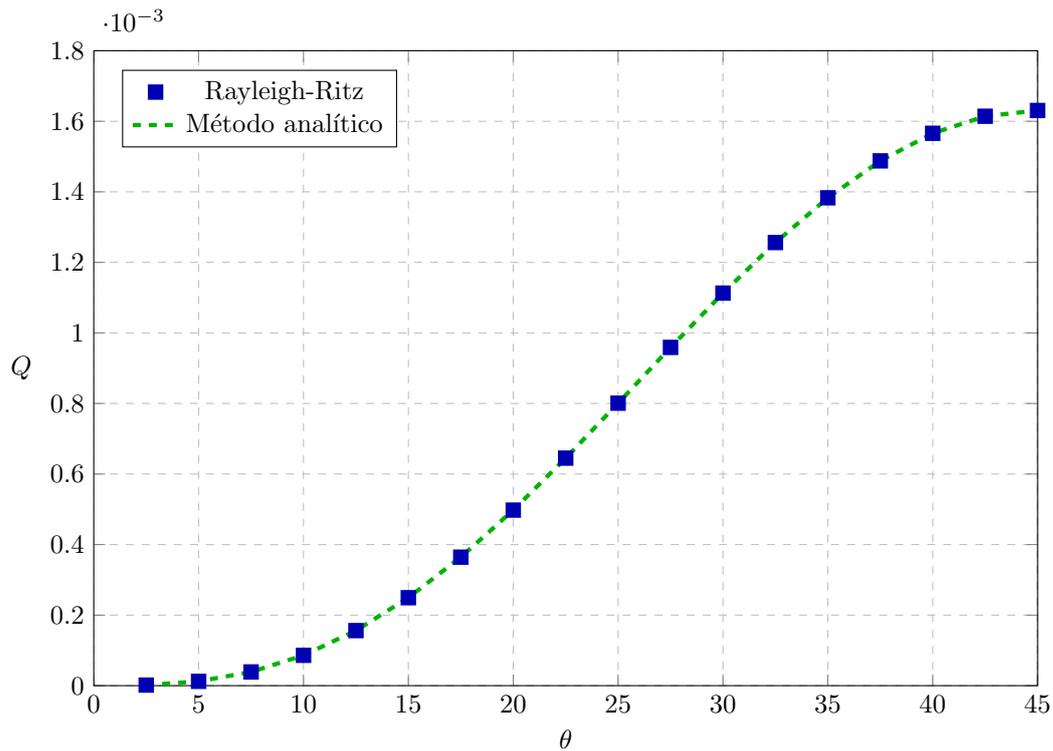


Figura 7.3: Gráfico dos valores da vazão em função de θ , obtidos pela metodologia analítica e pelo método de Rayleigh-Ritz.

Tabela 7.3: Resultados de fRe , vazão (Q), razão entre velocidade máxima e média $\left(\frac{\tilde{w}_{\max}}{U_m}\right)$, área e perímetro para triângulos retângulos, obtidos pelo método de Rayleigh-Ritz.

θ	fRe	$\tilde{Q} (10^{-3})$	$\frac{\tilde{w}_{\max}}{U_m}$	Área	Perímetro
5°	12,254	0,012	2,675	0,043	2,083
10°	12,473	0,086	2,522	0,0855	2,158
15°	12,659	0,249	2,432	0,125	2,224
20°	12,812	0,497	2,371	0,160	2,281
25°	12,936	0,800	2,328	0,191	2,328
30°	13,031	1,111	2,297	0,216	2,366
35°	13,099	1,138	2,277	0,234	2,392
40°	13,139	1,565	2,268	0,246	2,408
45°	13,152	1,630	2,264	2,414	0,250

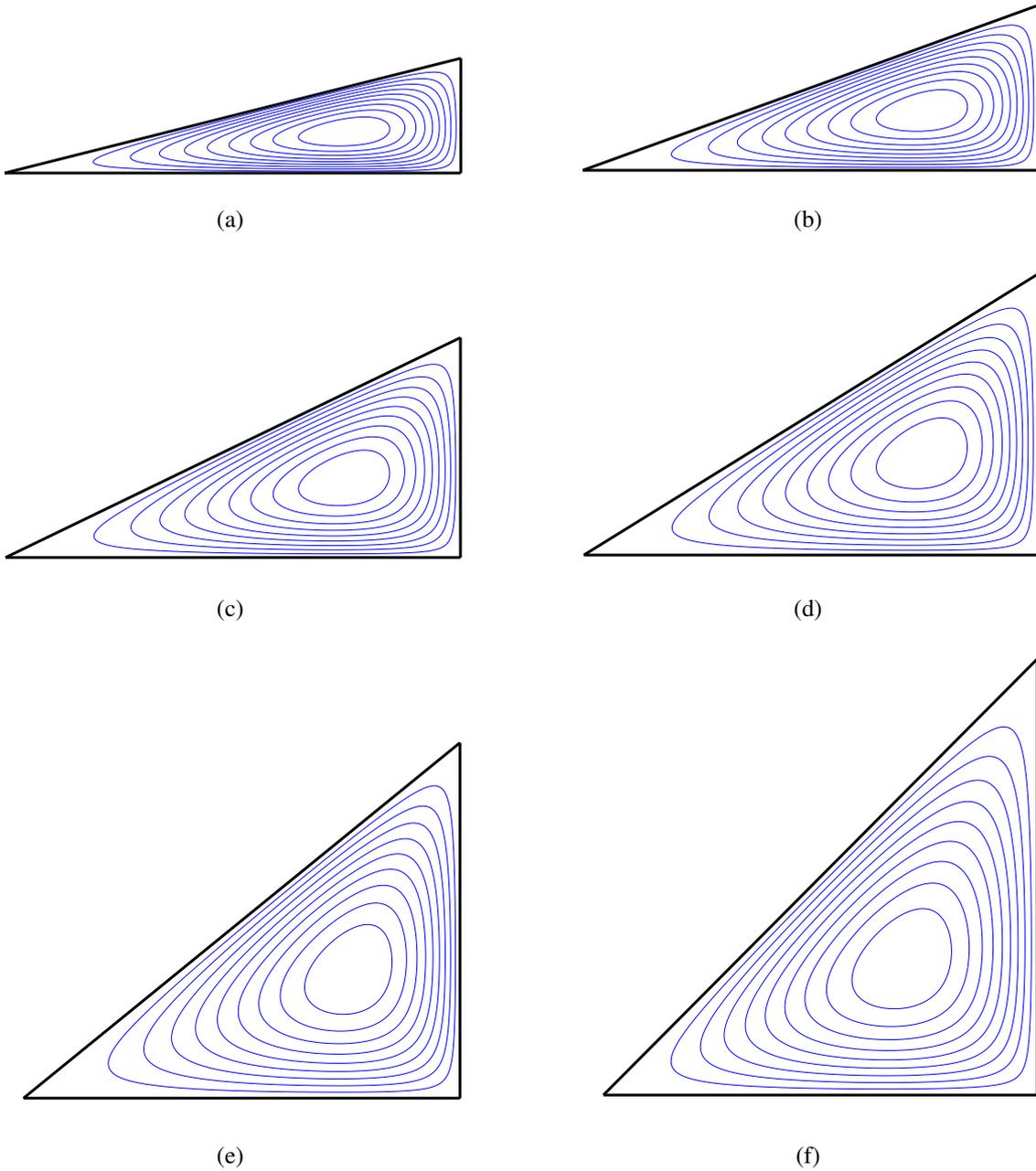


Figura 7.4: Contorno de velocidade triângulos retângulo ($\delta = \cos \theta$): (a) $\theta = 20^\circ$; (b) $\theta = 25^\circ$; (c) $\theta = 30^\circ$; (d) $\theta = 35^\circ$; (e) $\theta = 40^\circ$; (f) $\theta = 45^\circ$.

7.2 Triângulo isósceles

A análise dos resultados para triângulos isósceles é realizada de maneira semelhante daquela feita para triângulos retângulos. Para obter esses resultados, a razão de aspecto será igual a $2 \cos \theta$, em que θ será o ângulo repetido e β é o ângulo oposto a base do triângulo, como está mostrado na Figura 7.5.

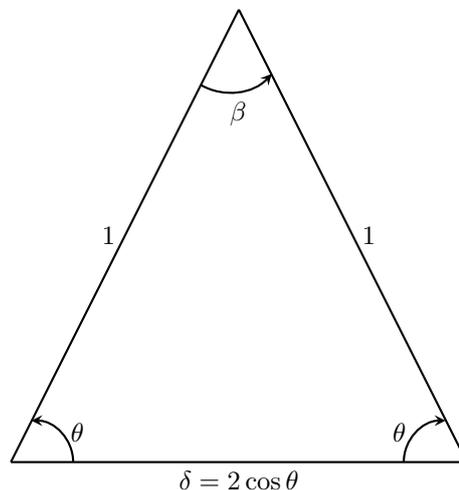


Figura 7.5: Triângulo isósceles ($\delta = 2 \cos \theta$).

Análise de convergência do método de Rayleigh-Ritz para o triângulo isósceles, está mostrada na Tabela 7.4. A partir dela, é possível notar que apenas para os triângulos com β iguais a 150° , 160° e 170° , o resultado não convergiu até $N = 55$. Dessa forma, para esses ângulos, o valor de fRe convergiu para 12,270, 12,140 e 12,051, respectivamente, quando utilizado $N = 105$. Assim, como para o caso do triângulo retângulo quanto menor a razão de aspecto mais coeficientes de Ritz para o resultado convergir, já que para esses casos os valores de θ são, respectivamente, 5° , 10° e 15° .

A Tabela 7.5, reporta os valores de fRe obtidos pela metodologia analítica, para $S = 64$, e os compara com os resultados encontrados a partir do método de Rayleigh-Ritz e os listados na Tabela 57 de Shah e London (1978). Os maiores erros entre as duas metodologias, foram da ordem de 10^{-2} para os triângulos com β igual a 150° , 160° e 170° . Em relação aos resultados analíticos e os reportados por Shah e London (1978), a maior diferença foi de 0,35%, para $\beta = 150^\circ$.

Como o triângulo isósceles é o que apresenta mais resultados reportados na literatura, a Tabela 7.6 mostra uma comparação entre os resultados obtidos neste trabalho, pelo método de Rayleigh-Ritz, com os de outros estudos que abordaram esse mesmo tema. Na última coluna dessa tabela está contido o maior erro entre os trabalhos analisados para cada valor de β . Assim, a maior discrepância encontrada foi de 1,70% , que ocorreu para $\beta = 30^\circ$.

Tabela 7.4: Análise de convergência do método de Rayleigh-Ritz para triângulos isósceles.

$\beta \backslash N$	3	6	10	15	21	28	36	45	55
10°	13,660	12,802	12,556	12,492	12,478	12,475	12,474	-	-
20°	13,129	12,852	12,826	12,823	12,822	-	-	-	-
30°	13,118	13,069	13,066	13,065	-	-	-	-	-
40°	13,228	13,223	13,222	-	-	-	-	-	-
50°	13,309	13,307	-	-	-	-	-	-	-
60°	13,333	-	-	-	-	-	-	-	-
70°	13,316	13,310	-	-	-	-	-	-	-
80°	13,278	13,251	13,248	13,247	-	-	-	-	-
90°	13,235	13,164	13,155	13,153	13,152	-	-	-	-
120°	13,138	12,849	12,780	12,755	12,746	12,742	12,740	12,739	-
150°	13,101	12,594	12,430	12,352	12,316	12,296	12,285	12,279	12,275
160°	13,097	12,542	12,353	12,257	12,211	12,183	12,167	12,157	12,151
170°	13,095	12,510	12,305	12,196	12,142	12,108	12,088	12,074	12,065

Tabela 7.5: Valores de fRe para triângulos isósceles obtidos pelos métodos analítico e de Rayleigh-Ritz.

β	Método Analítico	Rayleigh-Ritz	Erro (%)	Ref. (16)	Erro(%)
10°	12,474	12,474	0,004	12,474	0,005
20°	12,822	12,822	0,001	12,822	0,002
30°	13,065	13,065	0,001	13,065	0,004
40°	13,222	13,222	0,001	13,222	0,002
50°	13,307	13,307	0,001	13,307	0,003
60°	13,333	13,333	0,001	13,333	0,003
70°	13,310	13,310	0,001	13,311	0,001
80°	13,248	13,247	0,002	13,248	3×10^{-4}
90°	13,153	13,152	0,003	13,153	5×10^{-5}
120°	12,739	12,739	0,007	12,744	0,03
150°	12,269	12,270	0,01	12,226	0,35
160°	12,138	12,140	0,01	-	-
170°	12,041	12,051	0,07	-	-

Tabela 7.6: Comparação fRe obtido neste trabalho com os presentes na literatura.

β	Este trabalho	Ref. (7)	Ref. (11)	Ref. (12)	Ref. (10)	Erro
10°	12,474	12,474	12,522	-	-	0,37%
20°	12,822	12,822	12,839	-	-	0,13%
30°	13,065	13,065	13,075	13,292	-	1,70%
40°	13,222	13,222	-	-	13,260	0,28%
50°	13,307	13,307	-	-	-	0,004%
60°	13,333	13,333	13,334	13,485	13,372	1,12%
70°	13,310	13,311	-	-	-	0,0006%
80°	13,247	13,248	-	-	-	0,0006%
90°	13,152	13,153	-	13,270	13,234	0,89%
120°	12,739	12,744	-	-	12,852	0,87%
150°	12,270	12,226	12,262	-	-	0,36%
160°	12,140	-	12,130	-	-	0,91%
170°	12,051	-	12,033	-	-	0,15%

Os gráficos de fRe e da vazão Q , calculados pelos métodos analítico e de Rayleigh-Ritz, estão mostrados nas Figuras 7.6 e 7.7, respectivamente. O maior valor de fRe acontece para o triângulo equilátero ($\theta = 60^\circ$), dessa forma dentre os triângulo isósceles este é o que apresenta uma maior queda de pressão. Em relação a vazão, o triângulo $\theta = 80^\circ$ apresentou o maior valor computado.

Na Tabela 7.7, está incluído os resultados de fRe , Q , $\frac{\tilde{w}_{\max}}{U_m}$, área e perímetro calculados para triângulo isósceles a partir do método de Rayleigh-Ritz. Por fim, as Figuras 7.8a até 7.8e mostram os contornos de velocidade para valores de β iguais a 40° , 50° , 70° , 80° e 120° . Nessas figuras é possível notar a simetria em relação a bissetriz do ângulo β . Assim, uma forma de melhorar esses resultados em trabalhos futuros é utilizar somente funções base que apresentam expoentes pares, aproveitando, dessa forma, a simetria existente nesse problema. Também é possível notar que, à medida que se aumenta o ângulo β , e consequente diminui a razão de aspecto δ , o escoamento se torna cada vez mais horizontal, como pode ser notado na Figura 7.8e. Enquanto para menores valores de β , maior é a dependência do escoamento em relação a direção vertical, como mostrado na Figura 7.8a. Todos esses contornos de velocidade foram obtidos pelo campo de velocidade aproximado pelo método de Rayleigh-Ritz.

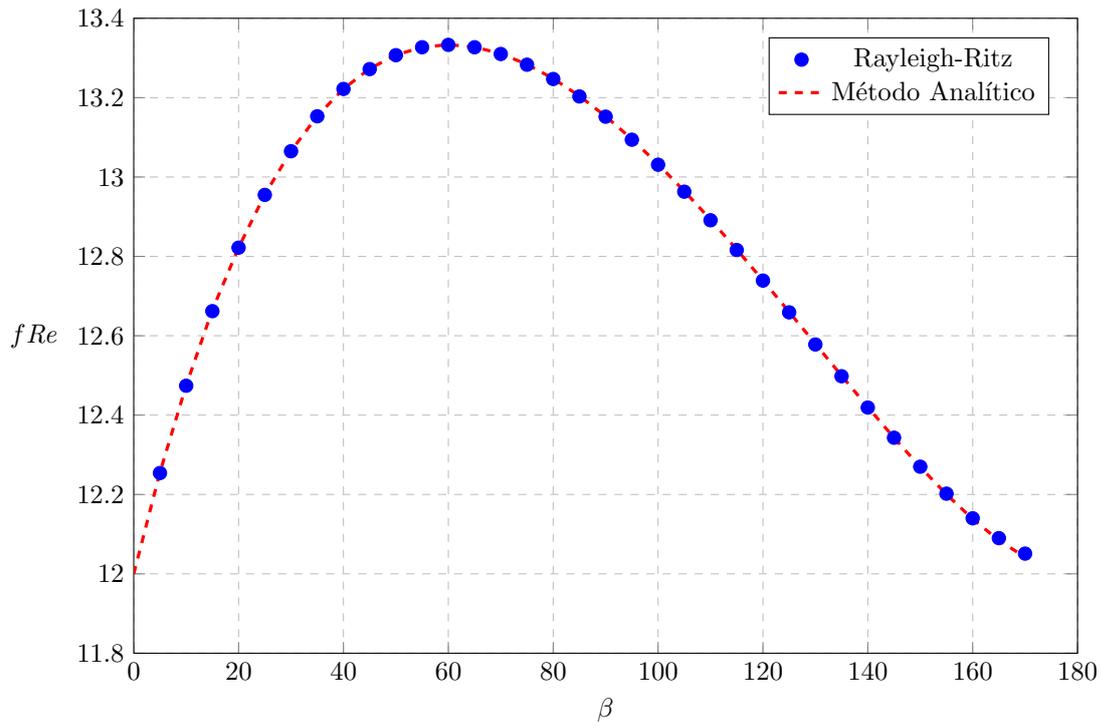


Figura 7.6: Gráfico dos valores de fRe em função de β , obtidos pela metodologia analítica e pelo método de Rayleigh-Ritz.

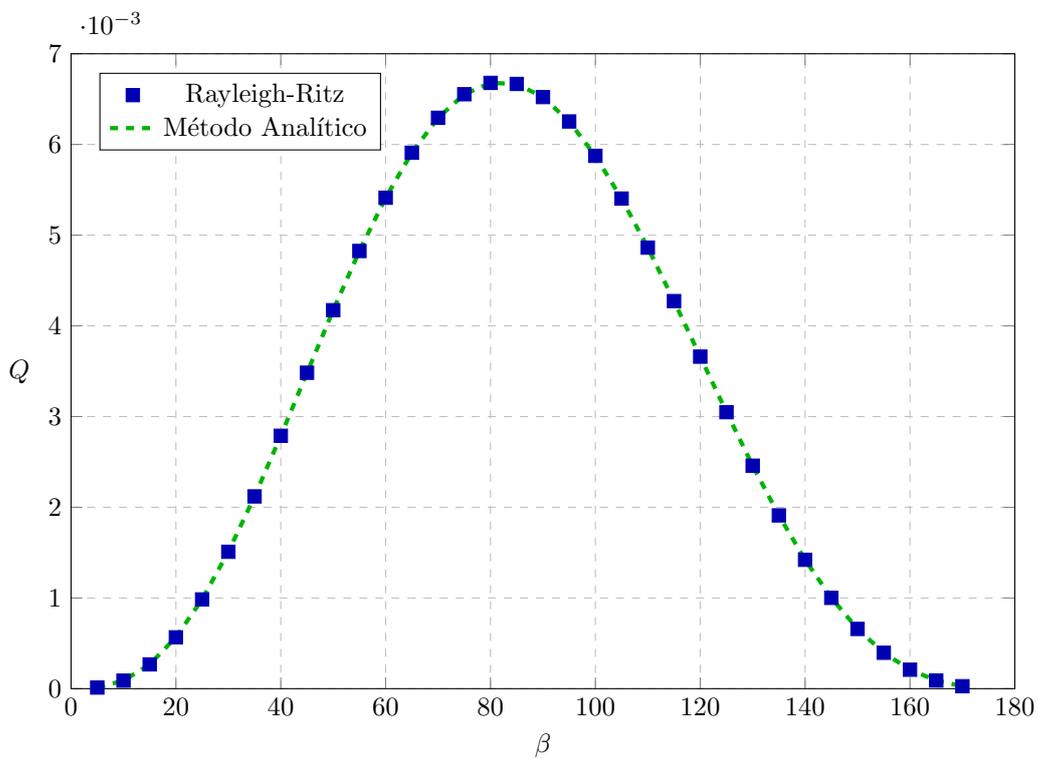


Figura 7.7: Gráfico dos valores da vazão em função de β , obtidos pela metodologia analítica e pelo método de Rayleigh-Ritz.

Tabela 7.7: Resultados de fRe , vazão (Q), razão entre velocidade máxima e média $\left(\frac{\tilde{w}_{\max}}{U_m}\right)$, área e perímetro para triângulos isósceles, obtidos pelo método de Rayleigh-Ritz.

β	fRe	$\tilde{Q} (10^{-3})$	$\frac{\tilde{w}_{\max}}{U_{\text{med}}}$	Área	Perímetro
10°	12,474	0,0887	2,521	0,0868	2,174
20°	12,822	0,566	2,368	0,171	2,347
30°	13,065	1,509	2,290	0,25	2,517
40°	13,222	2,788	2,248	0,321	2,684
50°	13,307	4,172	2,228	0,383	2,845
60°	13,333	5,412	2,222	0,433	3,000
70°	13,310	6,294	2,227	0,469	3,147
80°	13,247	6,678	2,241	0,492	3,285
90°	13,152	6,522	2,263	0,500	3,414
120°	12,739	3,660	2,379	0,433	3,732
150°	12,270	0,658	2,577	0,250	3,931
160°	12,140	0,208	2,653	0,171	3,969
170°	12,051	0,027	2,714	0,086	3,992

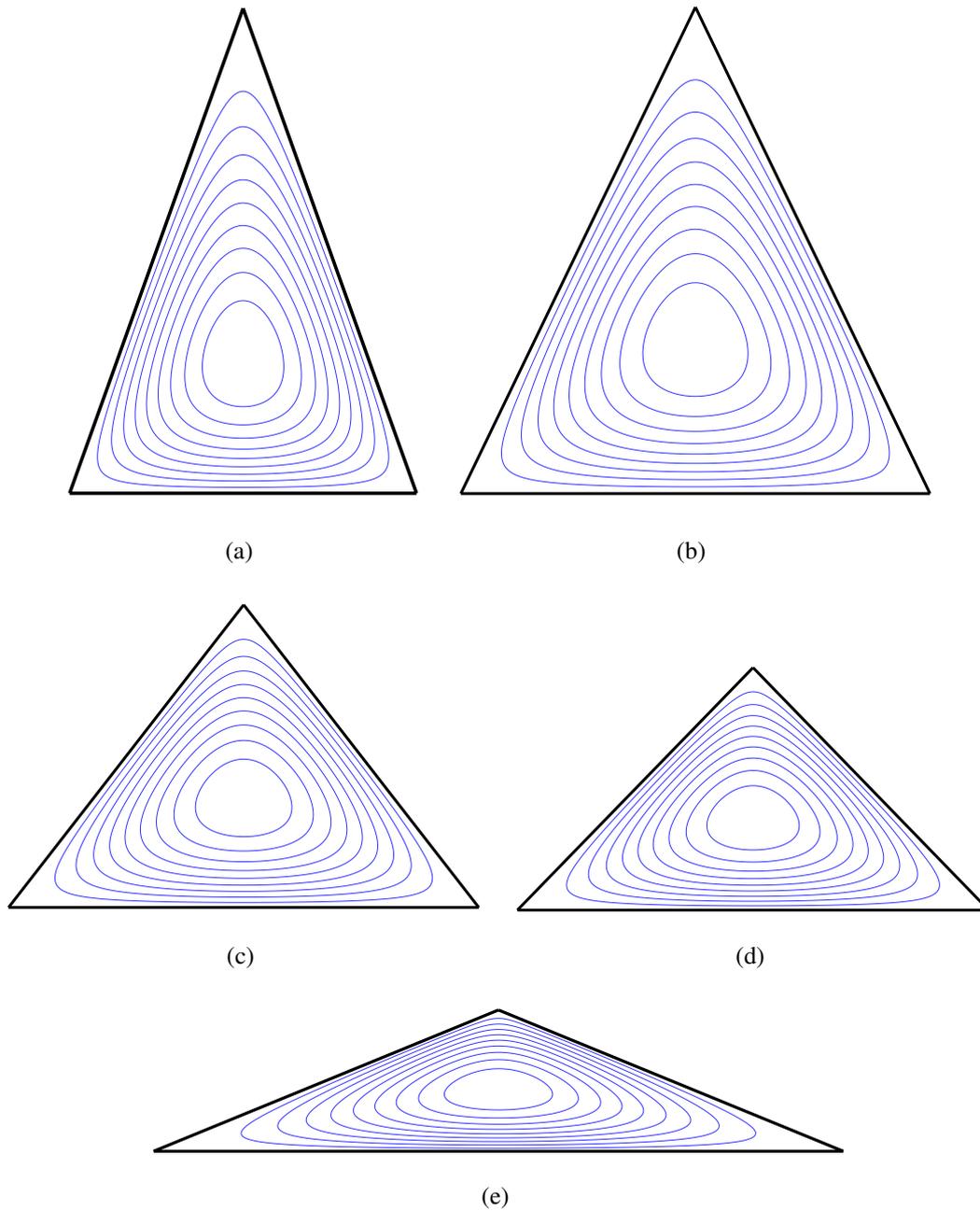


Figura 7.8: Contorno de velocidade triângulos isósceles ($\delta = 2 \cos \theta$): (a) $\beta = 40^\circ$; (b) $\beta = 50^\circ$; (c) $\beta = 70^\circ$; (d) $\beta = 80^\circ$; (e) $\beta = 120^\circ$.

7.3 Triângulo arbitrário

Os últimos tipos de triângulos analisados são os arbitrários. Para esses tipos, será calculado o fRe para razões de aspecto de 0,1 até 0,9 para diferentes ângulos de abertura. Assim, as Tabelas 7.8, 7.9 e 7.10 mostram os valores de fRe calculados para esses triângulos, pelas duas metodologias abordadas neste trabalho. Os valores obtidos pelo método de Rayleigh-Ritz reportados com apenas duas casas decimais são aqueles em que a convergência não foi alcançada até a terceira casa decimal, mesmo utilizando até 120 coeficientes de Ritz. Isso aconteceu para valores de δ menores que 0,5 e, principalmente, para baixos valores de θ . Nesta tabela, ainda está contido, para efeitos de comparação, os valores de fRe para o triângulo isósceles ($\delta = 1,0$). Os resultados encontrados a partir do método analítico foram obtidos com $N = 64$.

Tabela 7.8: Valores calculados do fRe para δ igual a 0,1 até 0,4.

θ	$\delta = 0,1$			$\delta = 0,2$		
	Analítico	Rayleigh-Ritz	Erro (%)	Analítico	Rayleigh-Ritz	Erro (%)
10°	12,024	12,03	0,004	12,040	12,05	0,06
20°	12,062	12,07	0,001	12,124	12,128	0,03
30°	12,111	12,11	0,001	12,227	12,228	0,005
40°	12,169	12,16	0,001	12,327	12,328	2×10^{-5}
50°	12,209	12,21	0,001	12,414	12,414	0,003
60°	12,247	12,24	0,001	12,479	12,479	0,001
70°	12,274	12,273	0,001	12,519	12,519	6×10^{-4}
80°	12,288	12,287	0,002	12,534	12,534	0,001
90°	12,288	12,288	0,003	12,525	12,524	0,002
θ	$\delta = 0,3$			$\delta = 0,4$		
	Analítico	Rayleigh-Ritz	Erro (%)	Analítico	Rayleigh-Ritz	Erro (%)
10°	12,063	12,070	0,05	12,094	12,10	0,13
20°	12,199	12,20	0,01	12,285	12,28	0,007
30°	12,354	12,35	0,002	12,490	12,490	0,001
40°	12,498	12,498	2×10^{-4}	12,666	12,666	5×10^{-4}
50°	12,612	12,612	0,001	12,797	12,796	0,001
60°	12,691	12,691	0,001	12,877	12,877	0,001
70°	12,733	12,733	0,001	12,911	12,911	0,001
80°	12,739	12,739	0,001	12,903	12,903	0,001
90°	12,714	12,714	0,001	12,860	12,860	0,001

Tabela 7.9: Valores calculados do fRe para δ igual a 0,5 até 0,8.

θ	$\delta = 0,5$			$\delta = 0,6$		
	Analítico	Rayleigh-Ritz	Erro (%)	Analítico	Rayleigh-Ritz	Erro (%)
10°	12,133	12,136	0,02	12,183	12,186	0,01
20°	12,384	12,385	0,004	12,494	12,495	0,001
30°	12,631	12,631	2×10^{-4}	12,769	12,769	4×10^{-4}
40°	12,826	12,826	6×10^{-4}	12,967	12,967	7×10^{-4}
50°	12,958	12,958	9×10^{-4}	13,092	13,092	8×10^{-4}
60°	13,031	13,031	0,001	13,152	13,151	0,001
70°	13,052	13,052	0,001	13,158	13,158	0,001
80°	13,029	13,028	0,001	13,120	13,120	0,001
90°	12,969	12,969	0,001	13,046	13,046	9×10^{-4}
θ	$\delta = 0,7$			$\delta = 0,8$		
	Analítico	Rayleigh-Ritz	Erro (%)	Analítico	Rayleigh-Ritz	Erro (%)
10°	12,250	12,252	0,01	12,335	12,336	0,003
20°	12,610	12,610	6×10^{-5}	12,718	12,718	8×10^{-4}
30°	12,892	12,892	7×10^{-4}	12,988	12,988	9×10^{-4}
40°	13,082	13,081	8×10^{-4}	13,162	13,162	9×10^{-4}
50°	13,192	13,192	9×10^{-4}	13,259	13,259	0,001
60°	13,238	13,238	0,001	13,294	13,294	0,001
70°	13,232	13,232	0,001	13,278	13,278	0,001
80°	13,182	13,182	0,001	13,221	13,221	9×10^{-4}
90°	13,099	13,098	9×10^{-4}	13,131	13,131	9×10^{-4}

Tabela 7.10: Valores calculados do fRe para δ igual a 0,9 e 1,0.

θ	$\delta = 0,9$			$\delta = 1,0$		
	Analítico	Rayleigh-Ritz	Erro (%)	Analítico	Rayleigh-Ritz	Erro (%)
10°	12,428	12,428	0,002	12,474	12,474	0,003
20°	12,795	12,795	0,001	12,822	12,822	0,002
30°	13,047	13,046	0,001	13,065	13,065	0,001
40°	13,208	13,208	0,001	13,222	13,222	0,001
50°	13,296	13,296	0,001	13,307	13,307	0,001
60°	13,324	13,324	0,001	13,333	13,333	0,001
70°	13,303	13,303	0,001	13,310	13,310	0,001
80°	13,241	13,241	9×10^{-4}	13,247	13,247	0,001
90°	13,147	13,147	8×10^{-4}	13,152	13,152	8×10^{-4}

Nas tabelas acima, também estão registrados os erros relativos entre os valores obtidos pelas duas metodologias. A maior discrepância encontrada foi de 0,13% para o triângulo com $\delta = 0,4$ e $\theta = 10^\circ$. Para os demais casos, os erros foram de ordem 10^{-2} ou inferiores.

As Figuras 7.9 e 7.10 mostram, respectivamente, os gráficos de fRe e da vazão Q em função do ângulo de abertura para diferentes razões de aspecto. As linhas cheias representam os resultados obtidos pelo método analítico, enquanto os pontos discretos são os valores alcançados a partir do método de Rayleigh-Ritz. Dessa forma, para o fRe estão mostradas as curvas de para δ igual a 0,1, 0,2, 0,3, 0,4, 0,5 e 1,0. Assim, percebe-se que à medida que a razão de aspecto aumenta, o valor de fRe também aumenta. Porém, o ângulo θ , em que ocorre o maior valor de fRe , diminui com aumento de δ . Por exemplo, em $\delta = 0,1$ esse valor acontece para $\theta = 90^\circ$, enquanto para $\delta = 1,0$ o valor máximo é encontrado para $\theta = 60^\circ$. Em relação a vazão, o aumento é mais significativo com a variação da razão de aspecto. Por esse motivo, na Figura 7.10, estão ilustrados somente os valores de δ de 0,1 até 0,6.

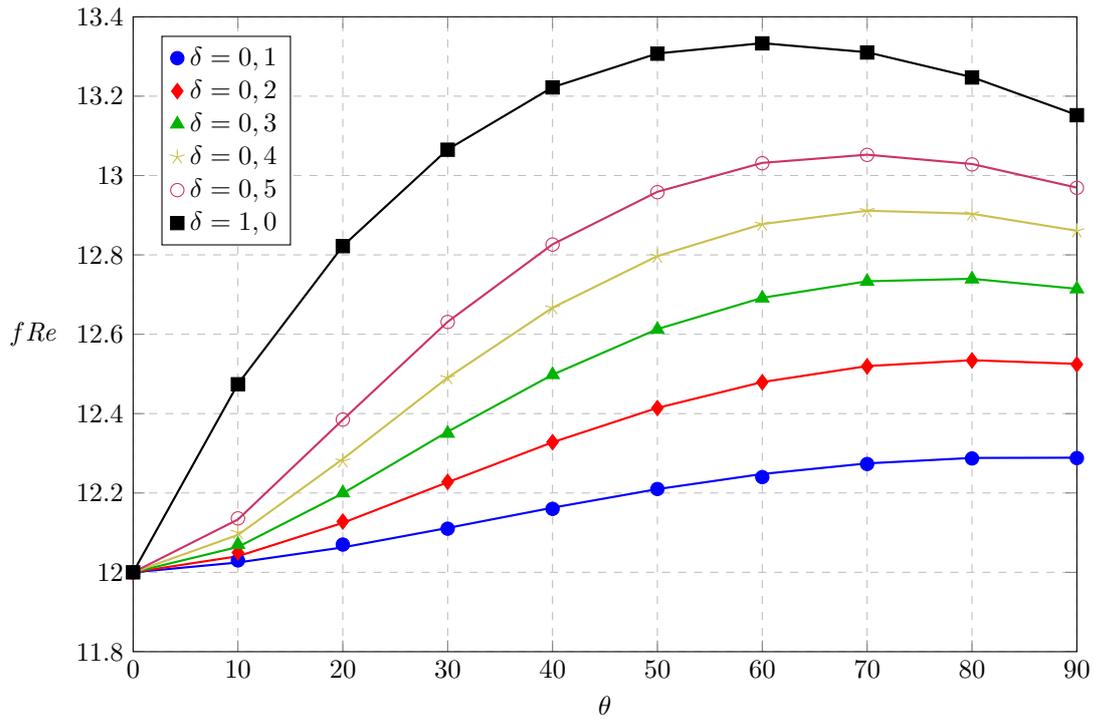


Figura 7.9: Gráfico de fRe em função do ângulo de abertura para as razões de aspecto iguais a 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5 e 1,0. Linhas cheias - Método analítico; Pontos discretos - Método de Rayleigh-Ritz.

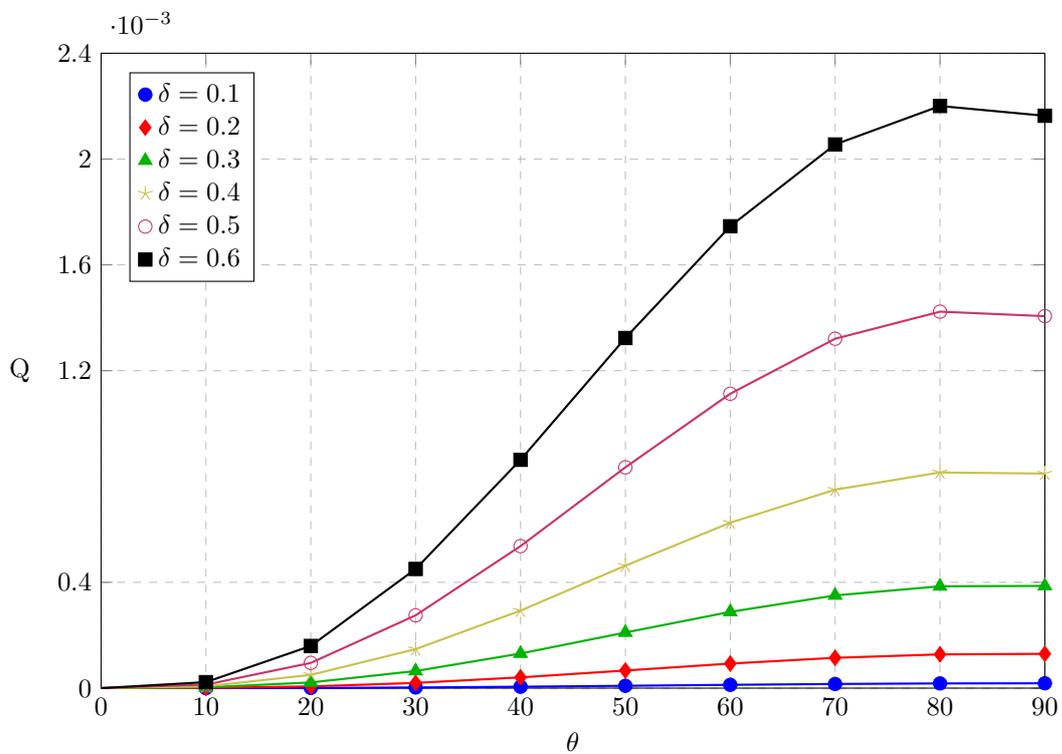


Figura 7.10: Gráfico da vazão em função do ângulo de abertura para as razões de aspecto iguais a 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5 e 0,6. Linhas cheias - Método analítico; Pontos discretos - Método de Rayleigh-Ritz.

Com intuito de verificar como a razão de aspecto afeta as curvas de velocidade constante, as Figuras 7.11a até 7.11d mostram essas curvas para triângulos com ângulo de abertura igual a $\theta = 60^\circ$ para os seguintes valores de δ : 0,3; 0,4; 0,6 e 0,8. Estes campos de velocidade foram obtidos pelo método de Rayleigh-Ritz. A partir dessas figuras, nota-se que o perfil se torna cada vez mais simétrico quando se aumenta a razão de aspecto, sendo o perfil totalmente simétrico quando $\delta = 0,1$. Outro ponto a ser destacado nessa Figura é a diferença entre a variação de x para diferentes triângulos. Por exemplo, para as razões de aspecto iguais a 0,3 e 0,4 (Figuras 7.11a e 7.11b), x varia de 0 até $\cos \theta$, enquanto para δ igual a 0,6 e 0,8 (Figuras 7.11c e 7.11d), x irá variar de 0 até δ .

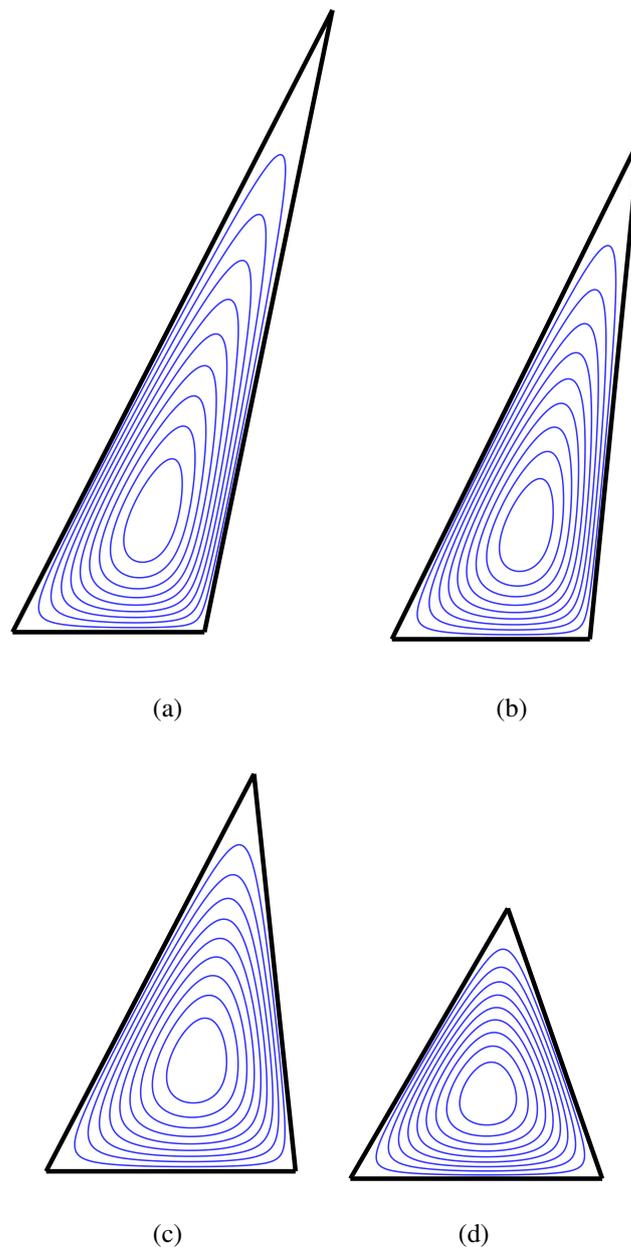


Figura 7.11: Contornos de velocidades para triângulos arbitrários com $\theta = 60^\circ$ para as seguintes razões de aspecto: (a) $\delta = 0,3$; (b) $\delta = 0,4$; (c) $\delta = 0,6$; (d) $\delta = 0,8$.

Capítulo 8

Conclusão

8.1 Considerações finais

Neste trabalho foram obtidos resultados para escoamento laminar totalmente desenvolvido em dutos com a seção transversal triangular. Estes resultados foram alcançados por meio de duas metodologias, e os valores obtidos em ambas estão em ótima concordância com os reportados na literatura.

Em um primeiro momento, foi realizado a obtenção da equação governante, a partir de hipóteses simplificadoras do escoamento laminar, isotérmico, incompressível, fluido Newtoniano, permanente e unidirecional. Com essas considerações, o problema do escoamento em um duto se reduz a resolver uma equação de Poisson com o termo de fonte constante. Como condição de contorno, consideramos não deslizamento na parede do duto. Posteriormente, foi realizada uma adimensionalização da equação governante, fazendo com que todos os triângulos sejam definidos por dois parâmetros: a razão de aspecto e o ângulo de abertura.

O primeiro método utilizado para resolver esse problema foi o método variacional de Rayleigh-Ritz. Dessa forma, o campo de velocidade foi aproximado por uma série de funções polinomiais, em que os coeficientes de Ritz são obtidos de forma a minimizar o funcional da equação governante. As integrais resultantes deste método foram resolvidas numericamente, possibilitando utilizar um maior número de coeficientes de Ritz, e consequentemente uma melhor aproximação do campo de velocidade.

Como solução alternativa, foi aplicada uma metodologia analítica, proposta por [Chernyshov \(2014\)](#), ainda inédita no contexto de mecânica dos fluidos. Primeiramente, realizamos uma transformação de coordenadas que leva o triângulo para um domínio retangular. Nesse novo sistema de coordenadas, o campo de velocidade será dado por uma série de funções senos, em que os coeficientes da série são encontrados como solução de sistema linear de equações. Os resultados obtidos pelas duas metodologias estão em ótima concordância, sendo a discrepância máxima encontrada igual a 0,13%.

Para futuros estudos, recomendamos expandir os resultados para a transferência de calor,

considerando convecção natural e forçada, para a geometria triangular, e compará-los com os resultados listados na literatura. Além disso, a metodologia analítica aplicada neste trabalho pode ser empregada para resolver o escoamento em dutos com formato de um paralelogramo e de um trapézio.

Referências Bibliográficas

- 1 YOVANOVICH, M. et al. Solutions of Poisson equation within singly and doubly connected prismatic domains. In: *1997 National Heat Transfer Conference*. [S.l.: s.n.], 1997. p. 3880.
- 2 PENAFIEL, H. *Unikrafht*. 2020. Acesso em: 04 de julho de 2023. Disponível em: <https://unikrafht.com.br/incrustacao-e-corrosao-em-caldeiras/>.
- 3 ZOHURI, B. *Compact heat exchangers: selection, application, design and evaluation*. [S.l.]: Springer International Publishing Switzerland, 2017.
- 4 ZHANG, L.-Z. Laminar flow and heat transfer in plate-fin triangular ducts in thermally developing entry region. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Elsevier, v. 50, p. 1637–1640, 2007.
- 5 LEKNER, J. Viscous flow through pipes of various cross-sections. *European Journal of Physics*, IOP Publishing, v. 28, n. 3, p. 521, 2007.
- 6 SPARROW, E. Laminar flow in isosceles triangular ducts. *AIChE Journal*, Wiley Online Library, v. 8, n. 5, p. 599–604, 1962.
- 7 SHAH, R. Laminar flow friction and forced convection heat transfer in ducts of arbitrary geometry. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Elsevier, v. 18, n. 7-8, p. 849–862, 1975.
- 8 RAY, S.; MISRA, D. Laminar fully developed flow through square and equilateral triangular ducts with rounded corners subjected to H1 and H2 boundary conditions. *International Journal of Thermal Sciences*, Elsevier, v. 49, p. 1763–1775, 2010.
- 9 SPARROW, E.; HAJI-SHEIKH, A. Laminar heat transfer and pressure drop in isosceles triangular, right triangular, and circular sector ducts. 1965.
- 10 NAKAMURA, H. et al. Combined free and forced laminar convection in triangular ducts. *Journal of Chemical Engineering of Japan*, The Society of Chemical Engineers, Japan, v. 10, n. 2, p. 109–115, 1977.
- 11 ABDEL-WAHED, R.; ATTIA, A. Fully developed laminar flow and heat transfer in an arbitrarily shaped triangular duct. *Waerme und Stoffuebertragung*, v. 18, n. 2, p. 83–88, 1984.
- 12 KARABULUT, H.; IPCI, D.; CINAR, C. Numerical solution of fully developed heat transfer problem with constant wall temperature and application to isosceles triangle and parabolic ducts. *Applied Thermal Engineering*, Elsevier, v. 102, p. 115–124, 2016.

- 13 IQBAL, M.; AGGARWALA, B.; FOWLER, A. Laminar combined free and forced convection in vertical non-circular ducts under uniform heat flux. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Elsevier, v. 12, n. 9, p. 1123–1139, 1969.
- 14 WANG, C. Flow through a lens-shaped duct. *Journal of Applied Mechanics*, 2008.
- 15 WANG, C. Heat transfer and flow through a super-elliptic duct—effect of corner rounding. *Mechanics Research Communications*, Elsevier, v. 36, n. 4, p. 509–514, 2009.
- 16 SHAH, R.; LONDON, A. Advances in heat transfer. *Laminar forced flow convection in ducts, Suppl*, v. 1, 1978.
- 17 JOG, C. *Fluid Mechanics: Foundations and applications of mechanics*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2015.
- 18 CHERNYSHOV, A. Torsion of an elastic rod whose cross-section is a parallelogram, trapezoid, or triangle, or has an arbitrary shape by the method of transformation to a rectangular domain. *Mechanics of Solids*, Springer, v. 49, p. 225–236, 2014.
- 19 ÇENGEL, Y. A. *Transferência de calor e massa: uma abordagem prática*. [S.l.]: McGraw Hill, 2012.
- 20 Santos Júnior, V. A. d. Escoamento de fluido em dutos de seção arbitrária utilizando o método integral baseado em Galerkin. estudo de caso: óleo pesado. Universidade Federal de Campina Grande, 2018.
- 21 SOUZA, W. N. T. de; MANZELA, M. S. A. A. Otimização de desempenho de trocadores de calor compactos. 2015.
- 22 HERRIS, Z. S. et al. Simulation of convective heat transfer and pressure drop in laminar flow of al₂o₃/water and cuo/water nanofluids through square and triangular cross-sectional ducts. *Journal of Renewable Energy and Environment*, v. 2, n. 1, p. 6–18, 2015.
- 23 NASIRI, M.; ETERMAD, S.; BAGHERI, R. Experimental heat transfer of nanofluid through an annular duct. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, Elsevier, v. 38, p. 958–963, 2011.
- 24 BACELAR, M. D. et al. Hagen-poiseuille flow in a quarter-elliptic tube. *Fluids*, MDPI, v. 8, n. 9, p. 247, 2023.
- 25 LANGLOIS, W. E.; DEVILLE, M. O. *Slow viscous flow*. [S.l.]: Springer, 2014.
- 26 BOUSSINESQ, J. Mémoire sur l'influence des frottements dans les mouvements réguliers des fluids. *Louisville*, v. 13, p. 377–424, 1868.
- 27 PROUDMAN, J. Iv. notes on the motion of viscous liquids in channels. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, Taylor & Francis, v. 28, n. 163, p. 30–36, 1914.
- 28 MARCO, S.; HAN, L. A note on limiting laminar Nusselt number in ducts with constant temperature gradient by analogy to thin-plate theory. *Transactions of the American Society of Mechanical Engineers*, American Society of Mechanical Engineers, v. 77, n. 5, p. 625–630, 1955.

- 29 HAY, G. The method of images applied to the problem of torsion. *Proceedings of the London Mathematical Society*, Oxford University Press, v. 2, n. 1, p. 382–397, 1939.
- 30 AGGARWALA, B.; IQBAL, M. On limiting Nusselt numbers from membrane analogy for combined free and forced convection through vertical ducts. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Elsevier, v. 12, n. 6, p. 737–748, 1969.
- 31 SINGH, B.; SAXENA, V. Transverse vibration of triangular plates with variable thickness. *Journal of Sound and Vibration*, Elsevier, v. 194, n. 4, p. 471 – 496, 1996.
- 32 WANG, C. Stokes flow in a curved duct—a ritz method. *Computers & Fluids*, Elsevier, v. 53, p. 145–148, 2012.
- 33 HARDING, B. A Rayleigh–Ritz method for Navier–Stokes flow through curved ducts. *ANZIAM Journal*, Cambridge University Press, v. 61, n. 1, p. 1–22, 2019.
- 34 PAPANASTASIOU, T.; GEORGIU, G.; ALEXANDROU, A. N. *Viscous fluid flow*. [S.l.]: CRC press, 2000.
- 35 KUNDU, P. K.; COHEN, I. M.; DOWLING, D. R. *Fluid mechanics*. [S.l.]: Academic press, 2015.
- 36 CENGEL, Y. A.; CIMBALA, J. M. *Mecânica dos fluidos: fundamentos e aplicações*. [S.l.]: Amgh Editora, 2012.
- 37 SORIANO, H. L. *Elementos finitos: formulação e aplicação na estática e dinâmica das estruturas*. [S.l.]: Ciência Moderna, 2009.
- 38 THORTON, S. T.; MARION, J. B. *Dinâmica clássica de partículas e sistemas - tradução da 5ª*. [S.l.]: Cengage Learning, 2011.
- 39 WEINSTOCK, R. *Calculus of variations: with applications to physics and engineering*. [S.l.]: Courier Corporation, 1974.
- 40 KOMZSIK, L. *Applied calculus of variations for engineers*. [S.l.]: Taylor & Francis Group, 2009.

Apêndice A

Código implementando o método de Rayleigh-Ritz em dutos triangulares.

```
1 import numpy as np
2 import scipy.integrate
3 import scipy.linalg
4 from sympy import diff, lambdify, symbols, zeros
5
6 def vetor_phi(n, delta, theta):
7     # n = 2 -> a_1 + a_2*x + a_3*y
8     # n = 3 -> a_1 + a_2*x + a_3*y + a_4*x**2 + a_5*x*y + a_6*y**2 ...
9     # retorna -> (phi, phi_x, phi_y)
10
11     xi, eta = symbols('xi eta')
12     phi = zeros(n, n)
13
14     c = 1
15     for i in range(0, n):
16         k = i
17         for j in range(0, c):
18             phi[i, j] = xi**k * eta**j
19             k = k - 1
20         c += 1
21
22     N = 0 # numero de coeficientes de Ritz utilizados.
23     for i in range(1, n+1):
24         N += i
25
26     phi_lista = [0]*N
27     c = 0
28     for i in range(0, n):
29         c+=1
30         for j in range(0, c):
31             phi_lista[k] = phi[i, j]
32         k+=1
```

```

33
34 # Aplicacao de phi_c
35 phi_c = xi*eta*(1 - xi - eta)
36 for i in range(0, N):
37     phi_lista[i] = phi_lista[i]*phi_c
38
39 # Derivada de phi em relacao a xi e eta
40 phi_xi = [lambdify([xi, eta], (1/delta)*diff(phi_lista[i], xi)) for i
41            in range(0, N)]
42 phi_eta = [lambdify([xi, eta], (1/np.sin(theta))*diff(phi_lista[i],
43            eta) - (1 / (np.tan(theta)*delta))*diff(phi_lista[i], xi) ) for i
44            in range(0, N)]
45
46 phi_lista = [lambdify([xi, eta], phi_lista[i]) for i in range(0, N)]
47
48 return (phi_lista, phi_xi, phi_eta)
49
50 def vetor_Lambda(phi, delta, theta):
51     # phi - vetor_phi()[0]
52
53     Lambda = np.zeros(len(phi), float)
54     for i in range(0, len(phi)):
55         c = scipy.integrate.dblquad(phi[i], 0, 1, 0, lambda eta: 1 - eta)
56         Lambda[i] = delta*np.sin(theta)*c[0]
57
58     return Lambda
59
60 def matriz_Gamma(phi, phi_xi, phi_eta, delta, theta):
61     # phi - vetor_phi[0]
62     # phi_x - vetor_phi[1]
63     # phi_y - vetor_phi[2]
64
65     Gamma = np.zeros((len(phi), len(phi)), float)
66     for i in range(0, len(phi)):
67         for j in range(0, len(phi)):
68             g_1 = phi_xi[i]
69             g_2 = phi_xi[j]
70             g_3 = phi_eta[i]
71             g_4 = phi_eta[j]
72             g = lambda x, y: g_1(x, y)*g_2(x, y) + g_3(x, y)*g_4(x, y)
73
74             d = scipy.integrate.dblquad(g, 0, 1, 0, lambda eta: 1-eta)
75             Gamma[i, j] = delta*np.sin(theta)*d[0]
76
77     return Gamma
78
79 def resultados(n, delta, theta):

```

```

79 # Retorna o fRe de um triangulo com parametros delta e theta
80
81 # Funcao base e suas derivadas
82 phi = vetor_phi(n, delta, theta)[0]
83 phi_x = vetor_phi(n, delta, theta)[1]
84 phi_y = vetor_phi(n, delta, theta)[2]
85
86 # Vetor Lambda
87 Lambda = vetor_Lambda(phi, delta, theta)
88 # Matriz Gamma
89 Gamma = matriz_Gamma(phi, phi_x, phi_y, delta, theta)
90
91 # Coeficientes de Ritz
92 a = scipy.linalg.solve(Gamma, Lambda)
93
94 # Vazao
95 Q = 0
96 for i in range(0, len(phi)):
97     Q += a[i]*Lambda[i]
98
99 # Area do triangulo
100 A = np.sin(theta)*delta / 2
101
102 # Perimetro
103 a = delta
104 c = 1
105 b = np.sqrt(a**2 + c**2 - 2*a*c*np.cos(theta))
106 P = a + b + c
107
108 # fRe
109 fRe = 8*(A**3) / ((P**2)*Q)
110
111 # Velocidade media
112 u_med = Q / A
113
114 # velocidade
115 n_1 = 200 # Numero de pontos
116 xi = np.linspace(0, 1, n_1)
117 eta = np.linspace(0, 1, n_1)
118 w_matriz = np.zeros((n_1, n_1))
119
120 soma = 0
121 for i in range(0, n_1):
122     for j in range(0, n_1):
123         if xi[j] <= 1-eta[i]:
124             soma = 0
125             for k in range(0, len(phi)):
126                 s = phi[k]
127                 soma = soma + a[k]*s(xi[j], eta[i])

```

```
128
129         w_matriz[i, j] = soma
130
131     w_max = np.amax(w_matriz)
132
133     # razao vel_max / vel_med
134     r = w_max / u_med
135
136     return (fRe, Q, r, A, P)
```

Listagem A.1: Código completo da implementação do método de Rayleigh-Ritz em dutos triangulares.

Apêndice B

Código com as funções que retornam os valores das integrais da solução analítica.

```
1 # Funcoes
2 def int_1(m,n,p,s,k1,k2,a,b):
3     k0 = k1 + k2
4     # integral 11
5     if m==p and n!=s:
6         return (-2*a*k0*n*(a**2*(np.pi**2*m**2 - 3/2)*k0**2 - 3*np.pi**2*
7             a*b*k0*m**2 + 3*np.pi**2*b**2*m**2)*((k0 - k1)*(-1)**(n + s) +
8             k1)*s) / ((6*n**2 - 6*s**2)*m**2*np.pi**2)
9     # Integral 12
10    elif m!=p and n==s:
11        return (2*a**2*p*((k0*a - b)*(-1)**(m + p) + b)*k0**3*m) / (np.pi
12            **2 * (m - p)**2 * (m + p)**2)
13    # Integral 13
14    elif m==p and n==s and m!=s:
15        return (k0**2 * (2*np.pi**2*a**2*k0**2*m**2 - 6*np.pi**2*a*b*k0*m
16            **2 + 6*np.pi**2*b**2*m**2 - 3*a**2*k0**2) * a) / (24*np.pi
17            **2*m**2)
18    # Integral 14
19    elif m==p and n==s and m==n:
20        return (k0**2 * (2*np.pi**2*a**2*k0**2*m**2 - 6*np.pi**2*a*b*k0*
21            m**2 + 6*np.pi**2*b**2*m**2 - 3*a**2*k0**2) * a) / (24*m**2*np
22            .pi**2)
23    # Integral 15
24    else:
25        return (-8 * k0**2 * a**2 * ((k0 - k1) * (k0 * a - b) * (-1)**(m
26            + n + p + s) + k1 * (k0 * a - b) * (-1)**(m + p) + ((k0 - k1)
27            * (-1)**(n + s) + k1) * b) * s * n * p * m) / ((n**2 - s**2) *
28            np.pi**2 * (m - p)**2 * (m + p)**2)
29
30 def int_2(m,n,p,s,k1,k2,a,b):
31     k0 = k1 + k2
```

```

23 # integral 21
24 if m==p and n!=s:
25     numerador = 2 * s * n**3 * a * ((k0 - k1) * (-1)**(n + s) + k1) *
26         k0 * (a**2 * (np.pi**2 * m**2 - 3/2) * k0**2 - 3 * np.pi**2 *
27         a * b * k0 * m**2 + 3 * np.pi**2 * b**2 * m**2)
28     denominador = 3 * (n - s)**2 * (n + s)**2 * np.pi**2 * m**2
29     return numerador/denominador
30 # integral 22
31 elif m!=p and n==s:
32     numerador = 2 * m * p * ((n**2 * np.pi**2 - 3/2) * k0**2 - 3 * n
33         **2 * np.pi**2 * k0 * k1 + 3 * n**2 * np.pi**2 * (k1**2 + 1))
34         * ((a * k0 - b) * (-1)**(m + p) + b) * a**2 * k0
35     denominador = 3 * np.pi**2 * (m - p)**2 * (m + p)**2
36     return numerador/denominador
37 # integral 23
38 elif m==p and n==s and m!=s:
39     numerador = ((1/6 * k0**2 * n**2 * np.pi**2 - 1/2 * n**2 * np.pi
40         **2 * k0 * k1 + 1/2 * np.pi**2 * k1**2 * n**2 + 1/2 * n**2 *
41         np.pi**2 - 1/4 * k0**2) * (2 * a**2 * k0**2 * np.pi**2 * m**2
42         - 6 * np.pi**2 * a * b * k0 * m**2 + 6 * np.pi**2 * b**2 * m
43         **2 - 3 * a**2 * k0**2)) * a
44     denominador = 12 * np.pi**2 * m**2
45     return numerador/denominador
46 # integral 24
47 elif m==p and n==s and m==n:
48     numerador = ((1/6 * m**2 * k0**2 * np.pi**2 - 1/2 * m**2 * k0 *
49         np.pi**2 * k1 + 1/2 * np.pi**2 * k1**2 * m**2 + 1/2 * np.pi**2
50         * m**2 - 1/4 * k0**2) * (2 * a**2 * k0**2 * np.pi**2 * m**2 -
51         6 * np.pi**2 * a * b * k0 * m**2 + 6 * np.pi**2 * b**2 * m**2
52         - 3 * a**2 * k0**2)) * a
53     denominador = 12 * np.pi**2 * m**2
54     return numerador/denominador
55 # integral 25
56 else:
57     #return (16 * (( (k0 - k1) * (a * k0 - b) * (-1)**(m + n + p + s)
58         + k1 * (a * k0 - b) * (-1)**(m + p) + ((k0 - k1) * (-1)**(n +
59         s) + k1) * b ) * n**3 * s * k0**2 * m * a**2 * p) / ((n - s)
60         **2 * (n + s)**2 * np.pi**2 * (m - p)**2 * (m + p)**2))
61     numerador = 16 * m * k0**2 * ((k0 - k1) * (a * k0 - b) * (-1)**(m
62         + n + p + s) + k1 * (a * k0 - b) * (-1)**(m + p) + b * ((k0 -
63         k1) * (-1)**(n + s) + k1)) * p * n**3 * a**2 * s
64     denominador = (n - s)**2 * (n + s)**2 * np.pi**2 * (m - p)**2 * (
65         m + p)**2
66     return numerador/denominador
67
68 def int_3(m,n,p,s,k1,k2,a,b):
69     k0 = k1 + k2
70     # integral 31
71     if m==p and n!=s:

```

```

54     return (-2 * a * k0 * (a**2 * (m**2 * np.pi**2 - 3/2) * k0**2 - 3
        * np.pi**2 * a * b * k0 * m**2 + 3 * np.pi**2 * b**2 * m**2)
        * ((k0 - k1) * (-1)**(n + s) + k1) * s * n) / ((4 * n**2 - 4 *
        s**2) * m**2 * np.pi**2)
55 # integral 32
56 elif m!=p and n==s:
57     return (-m * ((a**2 * ((m - p)**2 * (m + p)**2 * np.pi**2 - 18 *
        m**2 - 6 * p**2) * k0**2 - 2 * a * b * np.pi**2 * (m - p)**2 *
        (m + p)**2 * k0 + b**2 * np.pi**2 * (m - p)**2 * (m + p)**2)
        * (a * k0 - b) * (-1)**(m + p) - 18 * b * (a**2 * (m**2 + p**2
        / 3) * k0**2 - (b**2 * np.pi**2 * (m - p)**2 * (m + p)**2) /
        18)) * k0 * p) / (2 * np.pi**2 * (m - p)**3 * (m + p)**3)
58 # integral 33
59 elif m==p and n==s and m!=s:
60     return (a * k0**2 * (2 * a**2 * k0**2 * m**2 * np.pi**2 - 6 * np.
        pi**2 * a * b * k0 * m**2 + 6 * np.pi**2 * b**2 * m**2 - 3 * a
        **2 * k0**2)) / (16 * m**2 * np.pi**2)
61 # integral 34
62 elif m==p and n==s and m==n:
63     return (a * k0**2 * (2 * a**2 * k0**2 * m**2 * np.pi**2 - 6 * np.
        pi**2 * a * b * k0 * m**2 + 6 * np.pi**2 * b**2 * m**2 - 3 * a
        **2 * k0**2)) / (16 * m**2 * np.pi**2)
64 else:
65     return 2 * m * s * ((a**2 * ((m - p)**2 * (m + p)**2 * np.pi**2
        - 18 * m**2 - 6 * p**2) * k0**2 - 2 * a * b * np.pi**2 * (m -
        p)**2 * (m + p)**2 * k0 + b**2 * np.pi**2 * (m - p)**2 * (m +
        p)**2) * (k0 * a - b) * (k0 - k1) * (-1)**(m + n + p + s) + (a
        **2 * (((m - p)**2 * (m + p)**2 * np.pi**2 - 18 * m**2 - 6 * p
        **2) * k0**2 - 2 * a * b * np.pi**2 * (m - p)**2 * (m + p)**2
        * k0 + b**2 * np.pi**2 * (m - p)**2 * (m + p)**2) * k1 * (k0 *
        a - b) * (-1)**(m + p) - 18 * (((k0 - k1) * (-1)**(n + s) + k1
        ) * b * (a**2 * (m**2 + p**2 / 3) * k0**2 - (b**2 * np.pi**2 *
        (m - p)**2 * (m + p)**2) / 18)))) * p * n) / (np.pi**2 * (n
        **2 - s**2) * (m - p)**3 * (m + p)**3)
66
67 def int_4(m,n,p,s,k1,k2,a,b):
68     k0 = k1 + k2
69     # integral 41
70     if m==p and n!=s:
71         return 0
72     # integral 42
73     elif m!=p and n==s:
74         numerador = 4 * m**3 * p * k0 * ((a * k0 - b) * (a**2 * ((m - p)
            **2 * (m + p)**2 * np.pi**2 - 12 * m**2 - 12 * p**2) * k0**2 -
            2 * a * b * np.pi**2 * (m - p)**2 * (m + p)**2 * k0 + b**2 *
            np.pi**2 * (m - p)**2 * (m + p)**2) * (-1)**(m + p) - 12 * b *
            (a**2 * (m**2 + p**2) * k0**2 - (b**2 * np.pi**2 * (m - p)**2
            * (m + p)**2) / 12))
75         denominador = np.pi**2 * (m - p)**4 * (m + p)**4

```

```

76     return numerador/denominador
77 # integral 43
78 elif m==p and n==s and m!=s:
79     numerador = (2 * np.pi**4 * a**4 * k0**4 * m**4 - 10 * np.pi**4 *
80                 a**3 * b * k0**3 * m**4 + 20 * np.pi**4 * a**2 * b**2 * k0**2
81                 * m**4 - 20 * np.pi**4 * a * b**3 * k0 * m**4 + 10 * np.pi**4
82                 * b**4 * m**4 - 10 * np.pi**2 * a**4 * k0**4 * m**2 + 30 * np
83                 .pi**2 * a**3 * b * k0**3 * m**2 - 30 * a**2 * b**2 * k0**2 *
84                 m**2 * np.pi**2 + 15 * a**4 * k0**4)
85     denominador = 40 * m**2 * np.pi**2 * a
86     return numerador/denominador
87 # integral 44
88 elif m==p and n==s and m==n:
89     numerador = (2 * np.pi**4 * a**4 * k0**4 * m**4 - 10 * np.pi**4 *
90                 a**3 * b * k0**3 * m**4 + 20 * np.pi**4 * a**2 * b**2 * k0**2
91                 * m**4 - 20 * np.pi**4 * a * b**3 * k0 * m**4 + 10 * np.pi**4
92                 * b**4 * m**4 - 10 * np.pi**2 * a**4 * k0**4 * m**2 + 30 * np
93                 .pi**2 * a**3 * b * k0**3 * m**2 - 30 * a**2 * b**2 * k0**2 *
94                 m**2 * np.pi**2 + 15 * a**4 * k0**4)
95     denominador = 40 * m**2 * np.pi**2 * a
96     return numerador/denominador
97 else:
98     return 0
99
100 def int_fonte(p,s,k1,k2,a,b):
101     k0 = k1+k2
102     numerador = -a * ((-p**4 * (a * k0 - b)**4 * np.pi**4 + 12 * a**2 * p
103                     **2 * k0**2 * (a * k0 - b)**2 * np.pi**2 - 24 * a**4 * k0**4) *
104                     (-1)**(p + s) + (p**4 * (a * k0 - b)**4 * np.pi**4 - 12 * a**2 * p
105                     **2 * k0**2 * (a * k0 - b)**2 * np.pi**2 + 24 * a**4 * k0**4) *
106                     (-1)**p + 24 * (-1 + (-1)**s) * (1/24 * np.pi**4 * b**4 * p**4 -
107                     1/2 * np.pi**2 * a**2 * b**2 * k0**2 * p**2 + a**4 * k0**4))
108     denominador = s * np.pi**6 * p**5
109     return numerador/denominador
110
111 def integrais(m,n,p,s,k1,k2,a,b):
112     return int_1(m,n,p,s,k1,k2,a,b) + int_2(m,n,p,s,k1,k2,a,b) + int_3(m,
113         n,p,s,k1,k2,a,b) + int_4(m,n,p,s,k1,k2,a,b)
114
115 def vazao(p,s,k_1,k_2,b,a):
116     k_0 = k_1 + k_2
117     numerador = 2*a*((k_0*a-b)*(-1)**p + b)
118     denominador = (np.pi**2)*s*p
119     return numerador/denominador

```

Listagem B.1: Código com a funções que retornam of valores das integrais duplas do sistema linear e da vazão.