



PROJETO DE GRADUAÇÃO

**ESCOAMENTO LAMINAR LONGITUDINAL ENTRE
DOIS SEMICILINDROS EXCÊNTRICOS**

LUIZA CID ORNELAS

Brasília, 19 de dezembro de 2023

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

FACULDADE DE TECNOLOGIA

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA**

**ESCOAMENTO LAMINAR LONGITUDINAL ENTRE
DOIS SEMICILINDROS EXCÊNTRICOS**

LUIZA CID ORNELAS

Orientador: PROF. DR. ANDRÉ VON BORRIES LOPES, ENM/UNB

PROJETO DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

**PUBLICAÇÃO ENM.PG - XXX/AAAA
BRASÍLIA, 19 DE DEZEMBRO DE 2023.**

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
FACULDADE DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA**

**ESCOAMENTO LAMINAR LONGITUDINAL ENTRE
DOIS SEMICILINDROS EXCÊNTRICOS**

LUIZA CID ORNELAS

PROJETO DE GRADUAÇÃO SUBMETIDO AO DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA DA FACULDADE DE TECNOLOGIA DA UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA, COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE ENGENHEIRA MECÂNICA.

APROVADA POR:

Prof. Dr. André von Borries Lopes, ENM/UnB
Orientador

Prof. Dra. Déborah de Oliveira, ENM/UnB
Examinadora interna

Prof. Dr. Edgar Amaral Silveira, ENM/UnB
Examinador interno

Prof. Dr. José Luiz Alves da Fontura Rodrigues, ENM/UnB
Examinador interno

BRASÍLIA, 19 DE DEZEMBRO DE 2023.

FICHA CATALOGRÁFICA

LUIZA CID ORNELAS

ESCOAMENTO LAMINAR LONGITUDINAL ENTRE DOIS SEMICILINDROS EX-CÊNTRICOS

2023xv, 73p., 201x297 mm

(ENM/FT/UnB, Engenheira Mecânica, Engenharia Mecânica, 2023)

Projeto de Graduação - Universidade de Brasília

Faculdade de Tecnologia - Departamento de Engenharia Mecânica

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

LUIZA CID ORNELAS (2023) ESCOAMENTO LAMINAR LONGITUDINAL ENTRE DOIS SEMICILINDROS EXCÊNTRICOS. Projeto de Graduação em Engenharia Mecânica, Publicação xxx/AAAA, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 73p.

CESSÃO DE DIREITOS

AUTOR: LUIZA CID ORNELAS

TÍTULO: ESCOAMENTO LAMINAR LONGITUDINAL ENTRE DOIS SEMICILINDROS EXCÊNTRICOS.

GRAU: Engenheira Mecânica ANO: 2023

É concedida à Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias deste projeto de graduação e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor se reserva a outros direitos de publicação e nenhuma parte deste projeto de graduação pode ser reproduzida sem a autorização por escrito do autor.

LUIZA CID ORNELAS

luizacidornelas@gmail.com

Agradecimentos

Agradeço à Universidade de Brasília (UnB) e à Faculdade de Tecnologia por proporcionarem um ambiente acadêmico inspirador e repleto de oportunidades de aprendizado. Expresso minha gratidão a todos os professores que me acompanharam ao longo do curso, contribuindo para minha formação acadêmica. Em especial, gostaria de agradecer ao Professor José Luiz, que me introduziu ao mundo da Mecânica dos Fluidos e ao meu orientador, Professor André Lopes, pela orientação, apoio e confiança, sem ele esse trabalho não teria ocorrido.

Gostaria de expressar meu profundo carinho e gratidão aos meus pais, Joaquim e Ana Beatriz, e aos meus irmãos, Gustavo e Paula, pelo amor incondicional, incentivo e encorajamento constante durante toda a minha vida. Suas palavras de estímulo e crença em mim foram essenciais para minha motivação e confiança em enfrentar os desafios que surgiram ao longo do caminho.

Ao meu namorado, André Gomes, sou grata por todas as memórias que criamos juntos, pelas risadas compartilhadas e por ser meu melhor amigo. Agradeço por estar ao meu lado em cada passo desta jornada.

Sou grata também aos meus amigos e companheiros de curso, que tornaram essa jornada mais leve e prazerosa. Agradeço por todo apoio e cumplicidade ao longo dos últimos 5 anos. Em especial, gostaria de agradecer Eduarda Cavalcante, Lucas Magalhães, Marco Aurélio, Lethycia Menezes, Ricardo Tavares e Gabriel Nogueira, que estiveram ao meu lado e fizeram diferença em minha caminhada acadêmica. Minha graduação não teria sido a mesma sem vocês.

Gostaria de dedicar um agradecimento especial às minhas amigas, que estiveram ao meu lado durante toda a minha trajetória acadêmica. Vocês foram mais do que amigas, foram meu apoio constante, fonte de alegria e compartilharam comigo momentos inesquecíveis. Agradeço por todas as risadas, conselhos e pelo suporte emocional que me deram nos momentos mais desafiadores. Obrigada por tudo Beatriz Billafan, Geovana Xavier, Mariana Vasconcelos, Marina Vilardo, e Talita Peres.

Resumo

Este trabalho busca desenvolver soluções analíticas para dois casos de dutos semi-anulares: semicilindros concêntricos e excêntricos, sendo este último uma contribuição inédita na literatura. Esses cenários têm aplicações amplas em diversas áreas, como em tubulações obstruídas e no estudo do fluxo sanguíneo arterial, onde placas de gordura podem reduzir o diâmetro do vaso. A pesquisa abrange uma análise detalhada dos resultados, incluindo a influência de diferentes parâmetros, como razão de aspecto e excentricidade.

Ao utilizar coordenadas ortogonais apropriadas, coordenadas polares para o caso concêntrico e bipolares para o caso excêntrico, as equações governantes são simplificadas e adimensionalizadas. A transformação de variáveis é empregada em ambos os casos, permitindo a utilização do método de separação de variáveis. Como resultado, obtiveram-se as soluções analíticas exatas para a vazão e o número de Poiseuille. A partir da solução, observou-se a influência da razão de aspecto nos parâmetros de área, perímetro molhado, vazão volumétrica, velocidade e número de Poiseuille.

Além de consolidar conhecimentos preexistentes, destaca-se a introdução de uma abordagem inédita para o escoamento entre semicilindros excêntricos, preenchendo uma lacuna antes existente na literatura e reforçando a importância do trabalho realizado. A contribuição da pesquisa não só apresenta soluções para problemas até então pouco explorados, mas também abre novas perspectivas para aplicações práticas e validações experimentais.

Palavras-chave: Escoamento Hagen-Poiseuille, Dutos Semicirculares, Solução Analítica, Solução Exata, Coordenadas Bipolares.

Abstract

This work aims to develop analytical solutions for two cases of semi-annular ducts: concentric and eccentric semicylinders, the latter being a novel contribution to the literature. These scenarios have broad applications in various fields, such as obstructed pipelines and the study of arterial blood flow, where fat plaques can reduce the vessel diameter. The research includes a detailed analysis of the results, considering the influence of different parameters, such as aspect ratio and eccentricity.

By using appropriate orthogonal coordinates, polar coordinates for the concentric case, and bipolar coordinates for the eccentric case, the governing equations are simplified and dimensionless. Variable transformation is employed in both cases, allowing the use of the method of separation of variables. As a result, exact analytical solutions for flow and the Poiseuille number were obtained. From the solution, the influence of the aspect ratio on the parameters of area, wetted perimeter, volumetric flow, speed and Poiseuille number was observed.

In addition to consolidating existing knowledge, the introduction of a novel approach for the flow between eccentric semicylinders stands out, filling a previously existing gap in the literature and emphasizing the importance of the work conducted. The research contribution not only provides solutions for previously unexplored problems but also opens new perspectives for practical applications and experimental validations.

Key-words: Hagen-Poiseuille Flow, Semicircular Ducts, Analytical Solution, Exact Solution, Bipolar Coordinates.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	MOTIVAÇÃO	1
1.2	OBJETIVOS	3
1.3	ESTRUTURA DO TRABALHO	4
2	REVISÃO DE LITERATURA	6
2.1	CONTEXTUALIZAÇÃO	6
2.2	SEÇÕES SETORIAIS	8
2.3	SEÇÃO ANULAR CONCÊNTRICA	9
2.4	SEÇÃO CIRCULAR EXCÊNTRICA	10
3	FORMULAÇÃO	12
3.1	ESCOAMENTO ENTRE DOIS SEMICILINDROS	12
3.2	ADIMENSIONALIZAÇÃO	14
3.3	COORDENADAS POLARES	16
3.4	COORDENADAS BIPOLARES	18
4	ESCOAMENTO ENTRE DOIS SEMICILINDROS CONCÊNTRICOS	23
4.1	MÉTODO DE SEPARAÇÃO DE VARIÁVEIS	23
4.2	VAZÃO	27
4.3	NÚMERO DE POISEUILLE	30
5	ANÁLISE DOS RESULTADOS- CASO CONCÊNTRICO	33
6	ESCOAMENTO ENTRE DOIS SEMICILINDROS EXCÊNTRICOS	38
6.1	MÉTODO DE SEPARAÇÃO DE VARIÁVEIS	38
6.2	VAZÃO	42
6.3	NÚMERO DE POISEUILLE	43
7	ANÁLISE DOS RESULTADOS- CASO EXCÊNTRICO	44
8	CONCLUSÃO	51
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	53

A	COORDENADAS BIPOLARES	56
A.1	CURVA COM σ CONSTANTE	56
A.2	CURVA COM τ CONSTANTE	57
A.3	EXCENTRICIDADE	58

LISTA DE FIGURAS

1.1	Três microdispositivos de monitoramento de hemostasia. Retirado de Jain et al. (2016).....	1
1.2	Exemplos de diferentes geometrias utilizadas em dutos. Adaptado de White e Majdalani (2006).	2
1.3	Tubulação obstruída. Retirado de: < https://www.oatey.com/faqs-blog-videos-case-studies/blog/four-reasons-why-diy-drain-cleaning-could-be-bad-idea >. Acesso em 11 de janeiro de 2024.	3
1.4	Fluxo sanguíneo reduzido. Retirado de: < https://www.vidavascular.com.br/doenca-renovascular/ >. Acesso em 11 de janeiro de 2024.	3
2.1	Número de artigos sobre dutos de seção anular desde 2014 (Pesquisa no site Google Acadêmico, palavras-chave: “annulus” e “flow”).	6
3.1	Duto semianular (a) concêntrico e (b) excêntrico, onde os pontos são os centros das circunferências	13
3.2	Curvas de r (laranja) e θ (verde) constantes	17
3.3	Curvas de σ constante	19
3.4	Curvas de τ constante.	20
4.1	Geometria do problema na forma adimensional.	30
5.1	Representação gráfica de (a) área (A) e (b) perímetro molhado (P) em função da razão de aspecto (λ).	34
5.2	Representação gráfica da vazão (Q) em função da razão de aspecto (λ).	35
5.3	Campos de velocidades adimensionais em coordenadas cartesianas para dutos semicilíndricos concêntricos com valores de λ iguais a (a) 0, (b) 0.25, (c) 0.5 e (d) 0.75.	36
5.4	Contornos de velocidade no caso de deslizamento para vários valores de λ : (a) $\lambda = 0$, (b) $\lambda = 0.25$, (c) $\lambda = 0.5$, (d) $\lambda = 0.75$. Retirado de Kyritsi-Yiallourou e Georgiou (2018)	36
5.5	Representação gráfica do número de Poiseuille (Po) em função da razão de aspecto (λ).	37

6.1	Escoamento entre dois semicilindros excêntricos: (a) coordenadas cartesianas (b) coordenadas bipolares	38
6.2	Geometria do problema na forma adimensional.	43
7.1	Representação gráfica da vazão (Q) em função da razão de aspecto (λ). As curvas variam de 0 a 0.9 com incrementos de 0.1 de cima para baixo.....	46
7.2	Campos de velocidades adimensionais em coordenadas bipolares para dutos semicilíndricos com excentricidade $\epsilon = 0.2$ e valores de λ iguais a (a) 0, (b) 0.25, (c) 0.5 e (d) 0.75.	47
7.3	Campos de velocidades adimensionais em coordenadas bipolares para dutos semicilíndricos com excentricidade $\epsilon = 0.4$ e valores de λ iguais a (a) 0, (b) 0.25, (c) 0.5 e (d) 0.75.	47
7.4	Campos de velocidades adimensionais em coordenadas bipolares para dutos semicilíndricos com excentricidade $\epsilon = 0.6$ e valores de λ iguais a (a) 0, (b) 0.25, (c) 0.5 e (d) 0.75.	48
7.5	Campos de velocidades adimensionais em coordenadas bipolares para dutos semicilíndricos com excentricidade $\epsilon = 0.8$ e valores de λ iguais a (a) 0, (b) 0.25, (c) 0.5 e (d) 0.75.	48
7.6	Representação gráfica do número de Poiseuille (Po) em função da razão de aspecto (λ). As curvas variam de 0 a 0.9 com incrementos de 0.1 de baixo para cima.	50

LISTA DE TABELAS

2.1 Estudos importantes organizados cronologicamente.....	7
5.1 Parâmetro analisados	33
5.1 Parâmetro analisados	34
7.1 Parâmetro analisados	44
7.2 Velocidades máximas adimensionais	49

LISTA DE SÍMBOLOS

Grupos dimensionais

Nu	Número de Nusselt
Po	Número de Poiseuille
Re	Número de Reynolds
f	Fator de atrito de Fanning

Símbolos gregos

α	Curva correspondente à semicircunferência de raio λ
β	Curva correspondente à semicircunferência de raio 1
ϵ	Excentricidade
Γ	Região entre as duas semicircunferências
λ	Razão de aspecto
μ	Viscosidade dinâmica
ϕ	Função transcendente de Lerch
ρ	Massa específica
τ, σ	Coordenadas bipolares
θ	Coordenada tangencial polar
∇^2	Laplaciano

Símbolos latinos

g	Aceleração gravitacional
u	Campo vetorial de velocidade
\bar{w}	Velocidade média

A	Área da seção transversal do tubo
a	Raio da semicircunferência menor
b	Raio da semicircunferência maior
c	Focos das semicircunferências
d	Distância entre os centros das semicircunferências
D_h	Diâmetro hidráulico
P	Perímetro molhado
p	Campo escalar de pressão
Q	Vazão
r	Coordenadas radial polar
w	Velocidade longitudinal
x, y, z	Coordenadas cartesianas

Capítulo 1

Introdução

1.1 Motivação

A modelagem de escoamentos viscosos em canais delgados, comandados por gradientes de pressão, desempenha papel importante em diversas áreas de desenvolvimento científico e tecnológico. Na biotecnologia, por exemplo, canais delgados são amplamente utilizados para o monitoramento da hemostasia¹, como demonstrado na Figura 1.1 (Jain et al., 2016), e em tecnologias microfluídicas para aplicações de câncer e biópsia líquida (Kulasinghe et al., 2018). Na agricultura, eles desempenham um papel crucial no monitoramento de patógenos e toxinas em alimentos e água (Neethirajan et al., 2011). Na engenharia, os canais delgados têm aplicações diversas, incluindo a conexão de dispositivos, sistemas de refrigeração de chips de computador, cabeçotes de impressão a jato de tinta e detectores infravermelhos (Alassar, 2011).

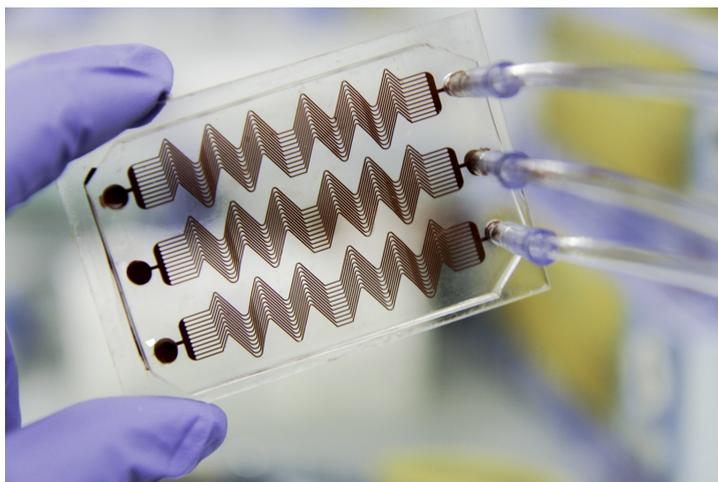


Figura 1.1: Três microdispositivos de monitoramento de hemostasia. Retirado de Jain et al. (2016).

¹Hemostasia - Série complexa de fenômenos biológicos que ocorre em imediata resposta à lesão de um vaso sanguíneo com objetivo de deter a hemorragia.

No caso do escoamento de um fluido newtoniano, incompressível e induzido por gradiente de pressão constante em um canal de seção transversal uniforme, conhecido como escoamento de Hagen-Poiseuille, apesar da formulação matemática relativamente simples envolvendo a equação de Poisson com um termo de fonte constante e condições de contorno de Dirichlet homogêneas, soluções analíticas são escassas. A importância das soluções analíticas, conforme abordado por Wang (1991), reside na possibilidade de estudar de forma mais aprofundada os fenômenos descritos pelas equações, assim como estabelecer padrões para verificar a precisão de métodos experimentais e numéricos. As equações de Navier-Stokes, que governam a mecânica dos fluidos, são intrinsecamente não lineares e não possuem uma solução geral. No entanto, um pequeno número de soluções exatas foi descoberto. Essas soluções representam escoamentos fundamentais da dinâmica dos fluidos e permitem um estudo mais detalhado dos fenômenos descritos pelas equações. Além disso, elas servem como referência para avaliar a precisão de métodos aproximados, sejam eles numéricos, assintóticos ou empíricos. Com os avanços na tecnologia computacional, a integração numérica completa das equações de Navier-Stokes torna-se mais viável, mas a comparação com uma solução exata ainda é necessária para verificar a precisão dos resultados. A Figura 1.2, retirada de White e Majdalani (2006), apresenta algumas seções transversais de tubos que possuem solução analítica para o escoamento de Hagen-Poiseuille.

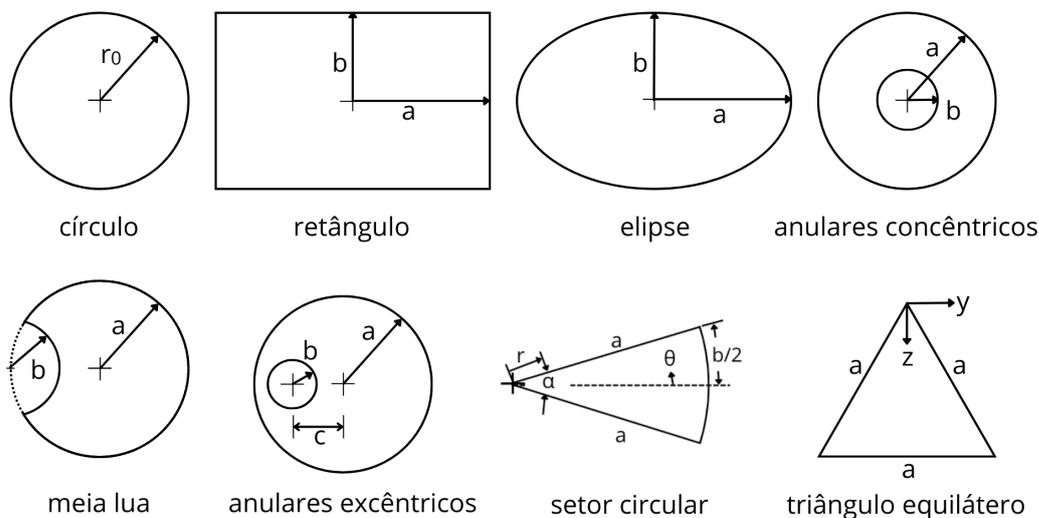


Figura 1.2: Exemplos de diferentes geometrias utilizadas em dutos. Adaptado de White e Majdalani (2006).

Este trabalho busca desenvolver soluções analíticas exatas para dutos semicilíndricos anulares. Esses casos possuem amplas aplicações tanto em nível microscópico quanto macroscópico. Por exemplo, é possível observar a presença de tubos semicilíndricos em tubulações obstruídas (Figura 1.3) e no fluxo sanguíneo reduzido (Figura 1.4). Um estudo realizado por Lin, Wang e Tao (2000) ressalta a utilização de tubos anulares de múltiplas passagens no intercooler de compressores de gás para resfriamento de gás pressurizado, além de trocador-

res de calor de tubo duplo. Adicionalmente, Wang, Liu e Chang (2008) exemplifica o uso de tubos de seção transversal semicircular em microusinagem dura com corrosão isotrópica.



Figura 1.3: Tubulação obstruída. Retirado de: <<https://www.oatey.com/faqs-blog-videos-case-studies/blog/four-reasons-why-diy-drain-cleaning-could-be-bad-idea>>. Acesso em 11 de janeiro de 2024.

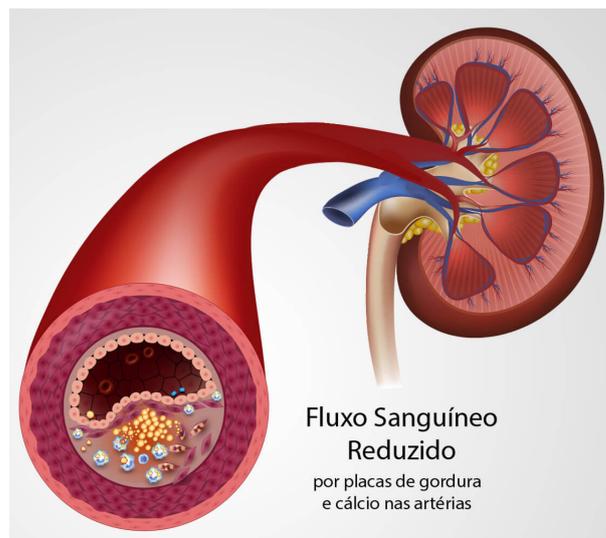


Figura 1.4: Fluxo sanguíneo reduzido. Retirado de: <<https://www.vidavascular.com.br/doenca-renovascular/>>. Acesso em 11 de janeiro de 2024.

1.2 Objetivos

Este trabalho tem como objetivo desenvolver soluções analíticas exatas para dutos semi-anulares, tanto no caso concêntrico quanto no caso excêntrico. Busca-se a obtenção de soluções matemáticas para o escoamento de Hagen-Poiseuille nesse contexto, visando contribuir para o avanço científico nessa área e sua aplicabilidade prática. Cabe ressaltar que a solução para o caso concêntrico já é conhecida por Sparrow, Chen e Jonsson; Kyritsi-Yiallourou

e Georgiou (1964, 2018), enquanto a solução para o caso excêntrico é uma novidade na literatura.

A partir do objetivo geral apresentado, tem-se os seguintes objetivos específicos:

- Apresentar as equações governantes e as condições de contorno para o escoamento de Hagen-Poiseuille em um duto semianular com configuração concêntrica ou excêntrica, utilizando os sistemas de coordenadas ortogonais adequados para cada caso.
- Adimensionalizar as equações governantes do problema;
- Obter a solução analítica para um duto semianular concêntrico em coordenadas polares pelo método da separação de variáveis;
- Obter a solução analítica para um duto semianular excêntrico em coordenadas bipolares pelo método da separação de variáveis;
- Apresentar expressões analíticas para a vazão e o produto do fator de atrito de Fanning pelo número de Reynolds (número de Poiseuille).

1.3 Estrutura do trabalho

O seguinte trabalho está dividido em oito capítulos. Dessa forma, pode-se explicitar o conteúdo presente em cada uma das partes:

- **Capítulo 2:** é feita uma revisão da literatura, com foco nos trabalhos conduzidos para casos similares ao que será desenvolvidos. Nesta seção serão apresentadas informações relevantes sobre as teorias e pesquisas realizadas nesse campo específico.
- **Capítulo 3:** desenvolve-se a formulação genérica do escoamento de Hagen-Poiseuille ao longo de um duto de seção semianular constante. É realizada a adimensionalização do problema e a apresentação das coordenadas que serão utilizadas na solução: polares (caso concêntrico) e bipolares (caso excêntrico).
- **Capítulo 4:** refere-se ao desenvolvimento do problema do escoamento entre dois semicilindros concêntricos. Primeiramente, soluciona-se o problema através do método de separação de variáveis e, em seguida, faz-se o cálculo da vazão e do número de Poiseuille para o caso apresentado.
- **Capítulo 5:** serão apresentados os resultados do estudo. As tabelas e gráficos obtidos serão discutidos e analisados criticamente, contribuindo para a compreensão do comportamento do escoamento laminar e validação do modelo proposto.

- **Capítulo 6:** aborda-se o desenvolvimento do caso excêntrico do problema. Assim como no Capítulo 4, utiliza-se o método de separação de variáveis para obter a solução analítica exata para a velocidade e faz-se o cálculo da vazão.
- **Capítulo 7:** expõe-se os resultados do estudo. É realizada uma análise minuciosa das tabelas e dos gráficos apresentados, evidenciando as disparidades obtidas para diferentes excentricidades e contribuindo para uma compreensão mais profunda do comportamento do escoamento em semicilindros excêntricos.
- **Capítulo 8:** neste capítulo é realizada uma síntese do trabalho, destacando-se os principais pontos e as conclusões obtidas através da análise dos resultados.

Capítulo 2

Revisão de literatura

2.1 Contextualização

Devido à diversidade de aplicações mencionadas no Capítulo 1, tem havido um crescente interesse no estudo de dutos anulares. Isso se torna evidente ao observar a Figura 2.1, que ilustra o número de artigos publicados sobre escoamentos anulares ao longo dos anos. Apesar desse aumento de interesse, é possível notar uma lacuna nos estudos existentes, uma vez que a solução analítica para dutos semicilíndricos excêntricos ainda não foi abordada na literatura. Devido a essa falta de publicações, a revisão bibliográfica deste trabalho será concentrada em artigos que apresentem soluções para seções transversais semelhantes.

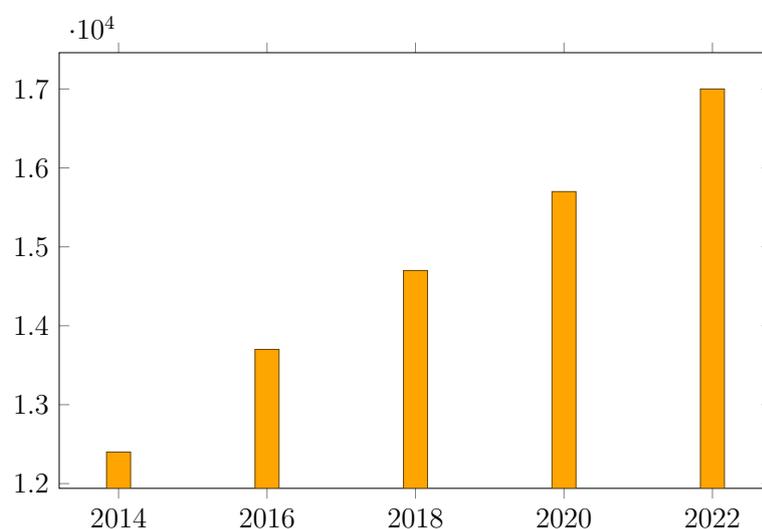


Figura 2.1: Número de artigos sobre dutos de seção anular desde 2014 (Pesquisa no site Google Acadêmico, palavras-chave: “annulus” e “flow”).

A Tabela 2.1 a seguir mostra alguns dos estudos desenvolvidos sobre escoamentos internos ao longo dos anos. É importante ressaltar que buscou-se dar destaque aqueles que tratam sobre seções anulares.

Tabela 2.1: Estudos importantes organizados cronologicamente

Referência	Título	Observação
Boussinesq (1868)	“Mémoire sur l’influence des frottements dans les mouvements réguliers des fluides”	solução analítica
Shah e London (1978)	“Laminar flow forced convection in ducts: a source book for compact heat exchanger analytical data”	compilação de resultados analíticos e numéricos
Etemad e Mujumdar (1995)	“Effects of variable viscosity and viscous dissipation on laminar convection heat transfer of a power law fluid in the entrance region of a semi-circular duct”	solução numérica
Lin, Tao e Lue (1995)	“Study on Friction Factor of Developing and Developed Laminar Flow in Annular-Sector Ducts”	solução numérica
Lin, Wang e Tao (2000)	“Developing Laminar Flow and Heat Transfer in Annular-Sector Ducts”	solução numérica
Wang, Liu e Chang (2008)	“Analytical solution of electro-osmotic flow in a semicircular microchannel”	solução analítica
Alassar (2011)	“Hagen-Poiseuille flow in tubes of semi-circular cross-section”	solução analítica
Kyritsi-Yiallourou e Georgiou (2018)	“Newtonian Poiseuille flow in ducts of annular-sector cross-sections with Navier slip”	solução analítica
Kundu e Sarkar (2022)	“Analytical and numerical investigation of Poiseuille flow through semi-elliptic annulus”	solução analítica e numérica
Lopes e Siqueira (2022)	“Couette–Poiseuille Flow in Semi-Elliptic Channels”	solução analítica

Observa-se que os diversos estudos conduzidos com o objetivo de abordar o problema em questão se diferenciam nas abordagens utilizadas. Alguns trabalhos se dedicaram a desenvolver soluções analíticas para descrever o fenômeno, visando fornecer uma compreensão teórica precisa e fundamentada do problema. Por outro lado, outros autores optaram por utilizar simulações numéricas, as quais oferecem uma abordagem complementar às soluções analíticas.

2.2 Seções setoriais

A lei fundamental que descreve o fluxo laminar em tubos foi descoberta por G.H.L. Hagen e J.L.M. Poiseuille. Conhecida como a lei de Hagen-Poiseuille, essa lei estabelece uma relação fundamental entre o fluxo de um fluido viscoso e incompressível em um tubo de seção transversal circular constante. Essa lei foi estabelecida experimentalmente por Hagen (1839) e Poiseuille (1840) em estudos independentes. Posteriormente, em 1845, Stokes apresentou uma justificativa teórica para a lei.

No trabalho pioneiro de [Boussinesq \(1868\)](#), intitulado *Mémoire sur l'influence des frottements dans les mouvements réguliers des fluides*¹, foram apresentadas pela primeira vez as equações que descrevem o perfil de velocidade e a vazão volumétrica para o escoamento de Hagen-Poiseuille em tubos retangulares, assim como em tubos de seção transversal triangular equilátera e elíptica.

Em 2011, [Alassar](#) foi o primeiro a desenvolver uma solução exata para o escoamento de Hagen-Poiseuille em canais de seção semicircular. A fim de obter essa solução, o autor considerou um fluxo laminar completamente desenvolvido e aplicou a condição de não deslizamento. Além disso, ele utilizou coordenadas polares cilíndricas como base para sua análise. No ano seguinte, o autor publicou um artigo seguindo o mesmo procedimento, mas para uma seção semi-elíptica ([Alassar e Abushoshah, 2012](#)).

Por sua vez, [Wang](#) estudou o escoamento laminar em dutos semi-elípticos. O objetivo do trabalho era obter uma solução analítica exata para esse caso de escoamento, tendo a semi-eixo menor como parede reta. Esse resultado complementou a solução obtida por ([Alassar e Abushoshah, 2012](#)).

Além disso, [Lopes e Siqueira \(2022\)](#) obteve a solução analítica para o escoamento de Couette de fluidos newtonianos incompressíveis em canais com seção transversal semi-elíptica. Os autores empregaram o método de Fourier para obter essa solução e compararam os resultados com os obtidos por [Alassar e Abushoshah \(2012\)](#).

Por fim, [Bacelar et al. \(2023\)](#) desenvolveu a solução analítica exata para o escoamento de Hagen-Poiseuille em um duto quarto-elíptico. Foi utilizado o método de separação de variáveis para obtenção da expressão da vazão volumétrica e o número de Poiseuille.

¹Dissertação sobre a influência do atrito nos movimentos regulares dos fluidos

2.3 Seção anular concêntrica

Diferentemente da seção anterior ([Seção 2.2](#)), as soluções analíticas para seções anulares concêntricas são mais limitadas, embora sejam igualmente importantes. Com o objetivo de destacar a relevância desse tipo de geometria, uma compilação de estudos analíticos, experimentais e numéricos foi realizada.

[Sparrow, Chen e Jonsson \(1964\)](#) publicou um artigo em que ele desenvolvia a solução analítica exata para um fluxo laminar completamente desenvolvido entre dutos de seção transversal circular. Além disso, o autor realizou uma análise da queda de pressão em passagens de fluxo anular. Para isso, ele utiliza o método de separação de variáveis para desenvolver a equação governante junto com as condições de contorno.

[Murakawa \(1960\)](#) abordou teoricamente a transferência de calor nessa configuração específica, focando no comprimento hidrodinâmico de entrada de tubos duplos verticais. Para alcançar tal objetivo, o autor empregou uma combinação de técnicas matemáticas, incluindo a transformada de Hankel, a transformada finita de Fourier, a transformada de Laplace e as funções de Bessel. A partir disso [Shah e London \(1978\)](#) publicaram uma monografia que apresenta as diversas soluções analíticas disponíveis para fluxo de fluido laminar e transferência de calor por convecção forçada para geometrias anulares concêntricas e excêntricas.

Em seguida, [Rehme \(1974\)](#) estudou experimentalmente um fluxo turbulento totalmente desenvolvido através de três anéis concêntricos. Ele realizou medições da queda de pressão, posições de tensão de cisalhamento zero e da velocidade máxima e a distribuição de velocidade em anéis de diferentes razões de raio.

Por sua vez, [Chung, Rhee e Sung \(2001\)](#), fizeram simulações numéricas para um fluxo turbulento concêntrico em tubos anulares de duas razões de raios diferentes. O foco do trabalho era analisar o efeito da curvatura transversal em estruturas turbulentas. Os resultados mostraram que as estruturas turbulentas perto da parede externa são mais fortes do que aqueles perto das paredes internas.

Além disso, [Kyritsi-Yiallourou e Georgiou \(2018\)](#) estudou o escoamento de Newton-Poiseuille em dutos de seção transversal anular. Eles fizeram uma solução analítica geral, permitindo o estudo dos efeitos do ângulo de abertura, da razão dos raios e do número de escoamento nos contornos de velocidade, vazão volumétrica e número de Poiseuille. No seu trabalho, ele cita várias vezes o artigo de [Sparrow, Chen e Jonsson \(1964\)](#), comparando muitos dos seus resultados com o do pesquisador.

Por fim, [Kundu e Sarkar \(2022\)](#) conduziu um estudo sobre o escoamento laminar totalmente desenvolvido através de uma seção semi-elíptica concêntrica. O autor utilizou coordenadas cilíndricas para derivar expressões analíticas que descrevem a distribuição de velocidade, a taxa de fluxo volumétrico, o cisalhamento e o número de Poiseuille nessa geometria. Além disso, o autor realizou uma análise numérica para validar os resultados obtidos, demonstrando uma concordância precisa entre os resultados dos dois métodos.

2.4 Seção circular excêntrica

A quantidade de estudos relacionados aos escoamentos em dutos de seção transversal semicircular excêntrica é limitada, devido à ausência de uma solução analítica exata para esse caso específico. No entanto, existem artigos que abordam diferentes aspectos dos setores anulares excêntricos, proporcionando uma compreensão parcial desse fenômeno complexo.

[Macdonald \(1893\)](#), em “*On the torsional strength of a hollow shaft*”², foi um dos primeiros autores a abordar o caso de excentricidade. Nesse estudo, ele utilizou as coordenadas isométricas bipolares e bicirculares para obter uma expressão para o momento de torção em um anel excêntrico. Seu trabalho contribuiu para a realização de diversos estudos futuros.

[Heyda \(1959\)](#) determinou a função de Green em coordenadas bipolares para a equação do potencial em uma região anular não concêntrica. Essa abordagem permitiu resolver a equação de Poisson para a velocidade pontual em um escoamento laminar incompressível entre cilindros circulares não concêntricos.

A partir disso, [Guckes \(1975\)](#) derivou as equações de vazão volumétrica para o escoamento estacionário de fluidos em anéis excêntricos obedecendo às leis de potência e comportamento plástico de Bingham. Para obter essas relações, o autor integrou numericamente o perfil de velocidade resultante de uma solução por diferenças finitas das equações de continuidade e movimento, após a transformação das coordenadas para o sistema bipolares. Os resultados foram comparados com outros artigos previamente publicados, permitindo a validação da técnica utilizada.

O trabalho de [MacDonald \(1982\)](#) introduziu, pela primeira vez, fórmulas exatas que relacionavam a taxa de fluxo de massa com o gradiente de pressão axial constante em um escoamento totalmente desenvolvido entre cilindros excêntricos. Além disso, o autor derivou as fórmulas exatas para a tensão de atrito na parede e a resistência viscosa por unidade de comprimento.

No estudo de [Haciislamoglu e Langlinais \(1990\)](#), a equação governante do fluxo laminar é resolvida numericamente por meio de uma técnica de diferenças finitas, com o intuito de obter perfis de velocidade e viscosidade para fluidos com comportamento de lei de rendimento-potência. Em seguida, ele integrou o perfil de velocidade para determinar a vazão. Os resultados obtidos revelam que o perfil de velocidade é modificado quando o setor anular não é mais concêntrico.

Por fim, [Saad e Mahfouz \(2023\)](#) obteve uma solução exata para a equação de condução de calor em invólucros anulares com geração de calor interno uniforme. O autor considerou a geometria de dois cilindros excêntricos e obteve soluções em termos das distribuições de temperatura e fluxo de calor ao longo das paredes interna e externa do tubo.

Devido as lacunas observadas nos estudos, torna-se evidente a relevância do estudo es-

²Resistência à torção de um eixo oco

coamento em dutos de geometrias não convencionais. É importante ressaltar que o presente trabalho tem o objetivo de desenvolver a solução analítica exata para dois cenários, sendo o caso excêntrico ainda não abordado na literatura. Tais investigações não apenas expandem o entendimento teórico do escoamento nas configurações estudadas, mas também têm aplicações práticas em diversas áreas da engenharia e da ciência.

Capítulo 3

Formulação

Neste capítulo, a formulação do escoamento de Hagen-Poiseuille em um duto semianular é desenvolvida tanto para o caso concêntrico quanto para o caso excêntrico. Primeiramente, serão apresentadas as equações governantes e as condições de contorno comuns aos dois casos. Em seguida, é realizada a adimensionalização do problema e são apresentadas as coordenadas apropriadas para cada caso particular: coordenadas polares para o caso concêntrico e coordenadas bipolares para o caso excêntrico. Por fim, as equações governantes são reescritas em ambos os sistemas de coordenadas, preparando o problema para ser solucionado nos Capítulos 4 e 6.

3.1 Escoamento entre dois semicilindros

Considere o escoamento laminar, bidimensional e unidirecional em regime permanente, caracterizado por um fluido newtoniano incompressível que se encontra em estado isotérmico. Este escoamento está sujeito a um gradiente de pressão constante na região delimitada por dois tubos semicilíndricos infinitamente longos (concêntricos ou excêntricos) de raios a e b (painéis (a) e (b) da Figura 3.1). A distância entre os centros dos semicilindros é denotada por d . Por fim, é importante ressaltar que não são consideradas as ações da gravidade ou outras de forças externas.

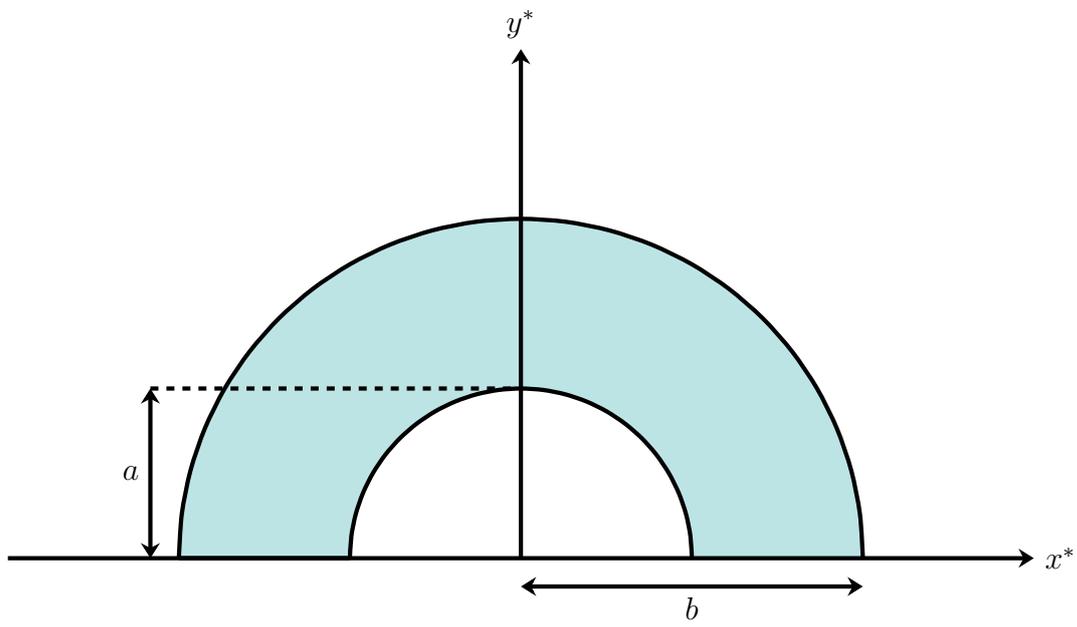
As equações governantes do problema são a equação da continuidade

$$\nabla^* \cdot \mathbf{u}^* = 0, \quad (3.1)$$

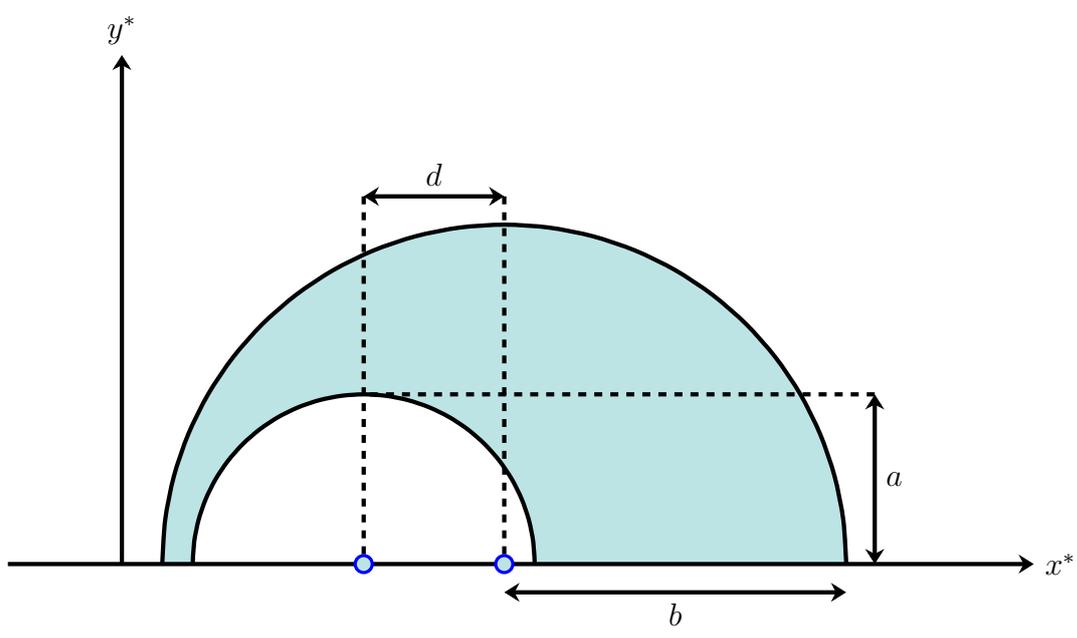
e a equação de Navier-Stokes em regime permanente

$$\rho (\mathbf{u}^* \cdot \nabla^*) \mathbf{u}^* = -\nabla^* p^* + \mu \nabla^{*2} \mathbf{u}^*, \quad (3.2)$$

onde ρ é a massa específica, \mathbf{u}^* é o campo vetorial de velocidade, p^* é o campo escalar de pressão e μ é o coeficiente de viscosidade dinâmica do fluido.



(a)



(b)

Figura 3.1: Duto semianular (a) concêntrico e (b) excêntrico, onde os pontos são os centros das circunferências

Supondo que o escoamento é unidirecional na direção positiva z , podemos expressar o vetor velocidade como $\mathbf{u}^* = (0, 0, w^*)$. Dessa forma, a equação da continuidade (3.1) é simplificada para

$$\frac{\partial w^*}{\partial z^*} = 0, \quad (3.3)$$

ou seja,

$$w^* = w^*(x^*, y^*). \quad (3.4)$$

Portanto, além de unidirecional o escoamento é bidimensional.

Escrevendo agora a equação de Navier-Stokes (3.2) em coordenadas cartesianas e aplicando todas as suposições feitas, tem-se que

$$\nabla^{*2} w^* = \frac{1}{\mu} \frac{dp^*}{dz^*}, \quad (3.5)$$

onde

$$\nabla^{*2} = \frac{\partial^2}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2}{\partial y^{*2}} \quad (3.6)$$

é o operador de Laplace no plano x^*y^* . A equação (3.5) é um caso especial da equação de Poisson. É importante notar que o lado esquerdo da igualdade depende exclusivamente das variáveis x^* e y^* , enquanto o lado direito poderia depender apenas de z^* . Portanto, para que a igualdade seja válida, é necessário que ambos os lados sejam iguais a uma constante.

Denotando a região entre as duas semicircunferências como Γ^* e impondo a condição de não deslizamento, tem-se que

$$w^* = 0 \quad (3.7)$$

em $\partial\Gamma^*$.

A vazão pode ser obtida integrando-se sobre a seção transversal do tubo, assim como apresentado na equação a seguir.

$$Q^* = \iint_{\Gamma^*} w^* dA^*. \quad (3.8)$$

onde A^* representa a área da seção transversal do tubo.

3.2 Adimensionalização

Após apresentar as equações governantes, é de extrema importância realizar a adimensionalização do problema. Essa etapa é essencial antes de iniciar qualquer análise matemática de um modelo, pois permite obter as proporções relativas dos diferentes termos presentes nas equações e avaliar se é possível realizar aproximações adequadas (Ockendon e Ockendon, 1995). Seguindo Shah e London (1978), propõe-se

$$\begin{aligned}
x &= \frac{x^*}{b}, & y &= \frac{y^*}{b}, & w &= \frac{w^*}{\frac{b^2 dp^*}{\mu dz^*}}, & Q &= \frac{Q^*}{\frac{b^4 dp^*}{\mu dz^*}}, & \lambda &= \frac{a}{b}, & \epsilon &= \frac{d}{b-a}, \\
A &= \frac{A^*}{b^2}, & \nabla^2 &= b^2 \nabla^{*2},
\end{aligned} \tag{3.9}$$

onde x , y , w , Q , A e ∇^2 representam, respectivamente, a componente x , a componente y , a velocidade, a vazão, a área da seção transversal do tubo e o operador de Laplace adimensionalizados. Os parâmetros adimensionais restantes, λ e ϵ , referem-se à razão de aspecto e à excentricidade. Por definição, é importante observar que os parâmetros adimensionais ϵ e λ estão restritos aos seguintes intervalos: $0 \leq \epsilon \leq 1$ e $0 \leq \lambda \leq 1$. Ademais, é importante ressaltar que, com essa adimensionalização, o raio do semicírculo menor se torna λ , enquanto o raio do semicírculo maior se torna 1.

A partir da adimensionalização proposta, torna-se possível reescrever as equações (3.5) e (3.6) na forma adimensional

$$\nabla^2 w = -1, \tag{3.10}$$

onde

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \tag{3.11}$$

Denotando a região adimensional entre os dois semicírculos como Γ , pode-se reescrever a equação (3.7) na forma adimensional

$$w = 0 \tag{3.12}$$

em $\partial\Gamma$.

Por fim, a vazão, antes representada por (3.8), pode ser escrita adimensionalmente da seguinte forma:

$$Q = \iint_{\Gamma} w \, dA. \tag{3.13}$$

É importante ressaltar que mesmo que o problema tenha sido originalmente formulado em coordenadas cartesianas, a utilização de coordenadas polares para o caso concêntrico e coordenadas bipolares para o caso excêntrico é mais apropriada para a aplicação do método de separação de variáveis, como veremos nos capítulos a seguir.

3.3 Coordenadas polares

Podemos estabelecer a relação entre as coordenadas polares (r, θ) e as coordenadas cartesianas (x, y) a partir das relações equações

$$x = r \cos \theta \quad (3.14)$$

e

$$y = r \sen \theta, \quad (3.15)$$

em que $r > 0$ e $\theta \in [0, 2\pi)$. Reciprocamente,

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (3.16)$$

e

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right). \quad (3.17)$$

Por conseguinte, as curvas que possuem valores constantes de r correspondem a circunferências, enquanto as curvas que possuem valores constantes de θ são semi-retas (Figura 3.2).

Além das transformações mencionadas, a solução do problema requer a determinação do operador de Laplace e da matriz Jacobiana em coordenadas polares. Os fatores de escala h_r e h_θ , são dados por (Arfken e Weber, 1999)

$$h_r = \left| \left(\frac{\partial x}{\partial r}, \frac{\partial y}{\partial r} \right) \right| = |(\cos \theta, \sen \theta)| = \sqrt{\cos^2 \theta + \sen^2 \theta} = 1 \quad (3.18)$$

e

$$h_\theta = \left| \left(\frac{\partial x}{\partial \theta}, \frac{\partial y}{\partial \theta} \right) \right| = |(-r \sen \theta, r \cos \theta)| = \sqrt{r^2 (\sen^2 \theta + \cos^2 \theta)} = r. \quad (3.19)$$

O operador de Laplace, em termos de fatores de escala, é descrito como

$$\nabla^2 = \frac{1}{h_r h_\theta} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{h_\theta}{h_r} \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{h_r}{h_\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \right]. \quad (3.20)$$

Substituindo (3.18) e (3.19) em (3.20), tem-se

$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}. \quad (3.21)$$

O elemento de área, por sua vez, é dado por

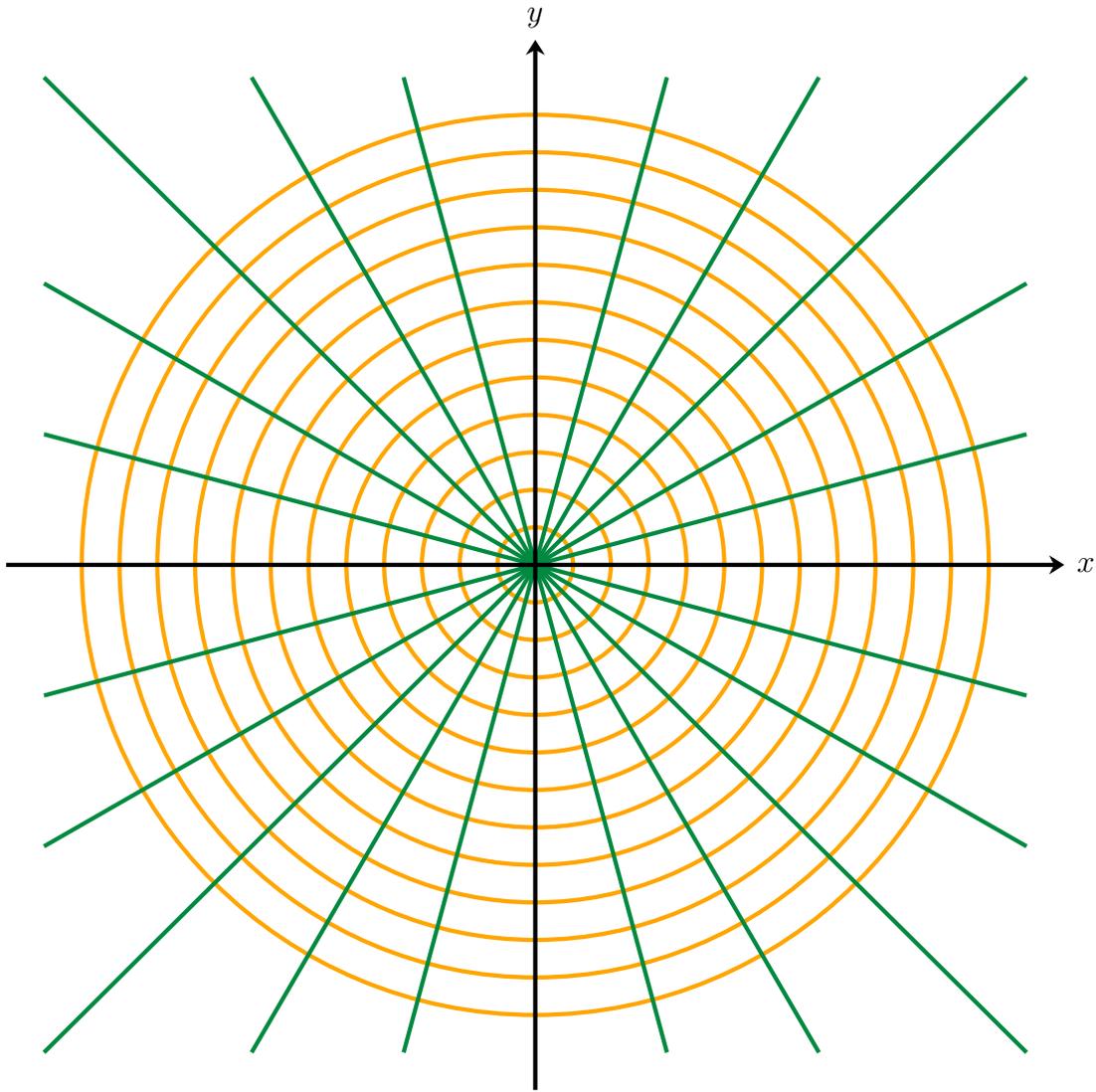


Figura 3.2: Curvas de r (laranja) e θ (verde) constantes

$$dA = h_r h_\theta dr d\theta = r dr d\theta, \quad (3.22)$$

em vista das equações (3.18) e (3.19).

Reescrevendo-se a equação (3.10) em coordenadas polares, tem-se

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial w}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} = -1, \quad (3.23)$$

com as seguintes condições de contorno

$$w(\lambda, \theta) = w(1, \theta) = w(r, 0) = w(r, \pi) = 0. \quad (3.24)$$

Por fim, é possível escrever a equação da vazão (3.13) nesse mesmo sistema de coorde-

nadas como

$$Q = \int_0^\pi \int_\lambda^1 r w \, dr d\theta. \quad (3.25)$$

3.4 Coordenadas bipolares

Para resolução do caso excêntrico, será necessário utilizar o sistema de coordenadas bipolar. Se os focos estão localizados em $(-c, 0)$ e $(c, 0)$ no plano xy , com $c > 0$, é possível fazer a seguinte correlação com as coordenadas cartesianas:

$$x = c \frac{\sinh \tau}{\cosh \tau - \cos \sigma} \text{ e } y = c \frac{\sin \sigma}{\cosh \tau - \cos \sigma}. \quad (3.26)$$

As curvas de τ e σ constantes correspondem a círculos não concêntricos, como ilustrado nas Figuras 3.3 e 3.4. Esses círculos são definidos pelas seguintes equações

$$x^2 + (y - c \cot \sigma)^2 = \frac{c^2}{\sin^2 \sigma} \quad (3.27)$$

e

$$y^2 + (x - c \coth \tau)^2 = \frac{c^2}{\sinh^2 \tau}. \quad (3.28)$$

O detalhamento para a obtenção de cada uma dessas equações encontram-se nos Apêndices A.1 e A.2.

Comparando as Figuras 3.1, 3.3 e 3.4, podemos perceber que as curvas de τ constante são adequadas para abordar o problema dos semicilindros excêntricos. Conforme discutido na Seção 3.2, o raio do semicírculo menor é representado por λ , enquanto o raio do semicírculo maior é igual a 1. Denotando as curvas correspondentes às circunferências de raio λ e 1 como α e β , respectivamente, podemos estabelecer as seguintes igualdades

$$\frac{c}{\sinh \alpha} = \lambda \quad (3.29)$$

e

$$\frac{c}{\sinh \beta} = 1. \quad (3.30)$$

Logo,

$$\alpha = \sinh^{-1} \frac{c}{\lambda} \quad (3.31)$$

e

$$\beta = \sinh^{-1} c. \quad (3.32)$$

A excentricidade, por sua vez, nos fornece a relação

$$\epsilon = \frac{d}{b-a} = \frac{c(\coth \beta - \coth \alpha)}{1-\lambda} = \frac{\sqrt{1+c^2} - \sqrt{\lambda^2+c^2}}{1-\lambda} \quad (3.33)$$

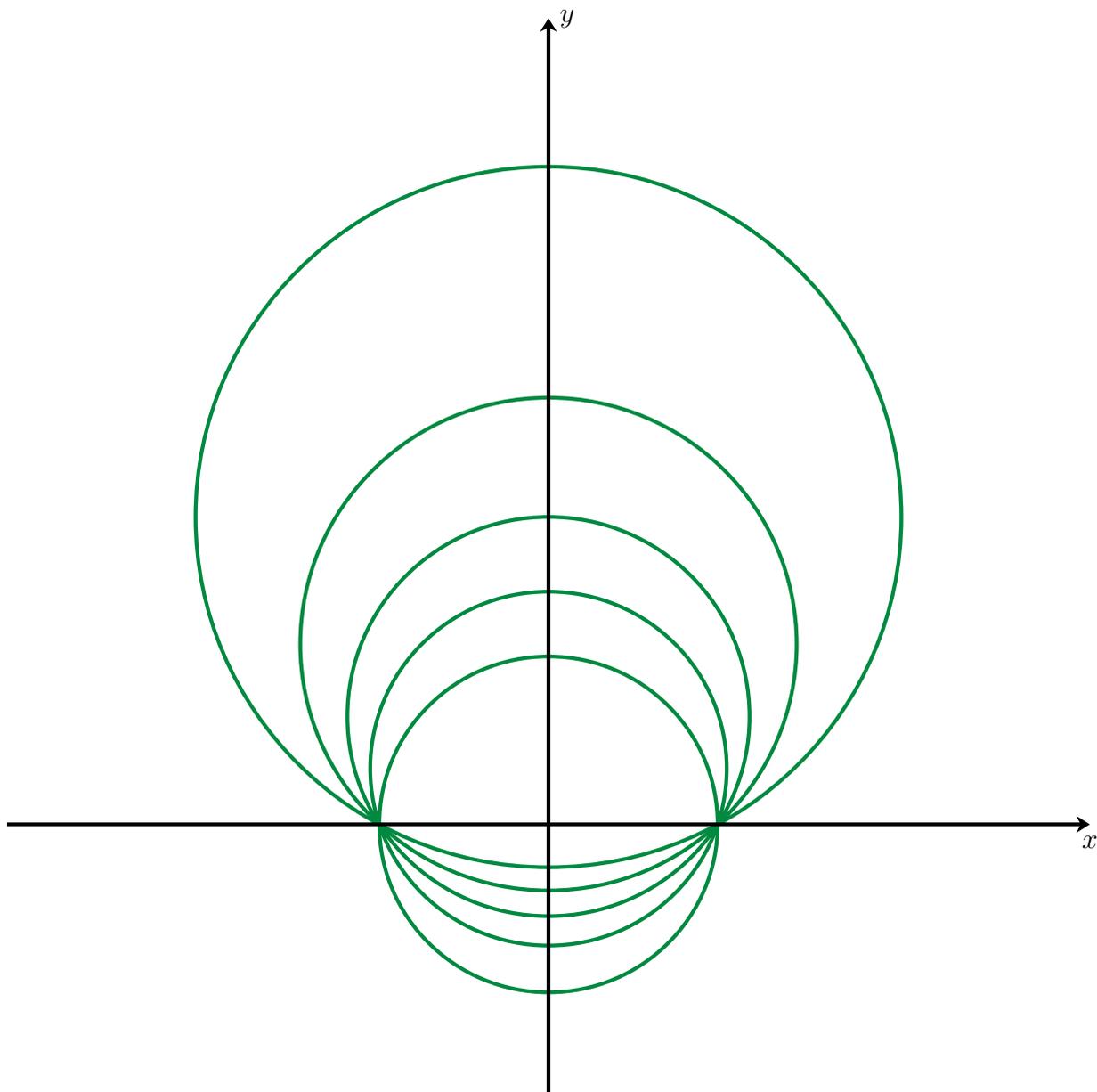


Figura 3.3: Curvas de σ constante

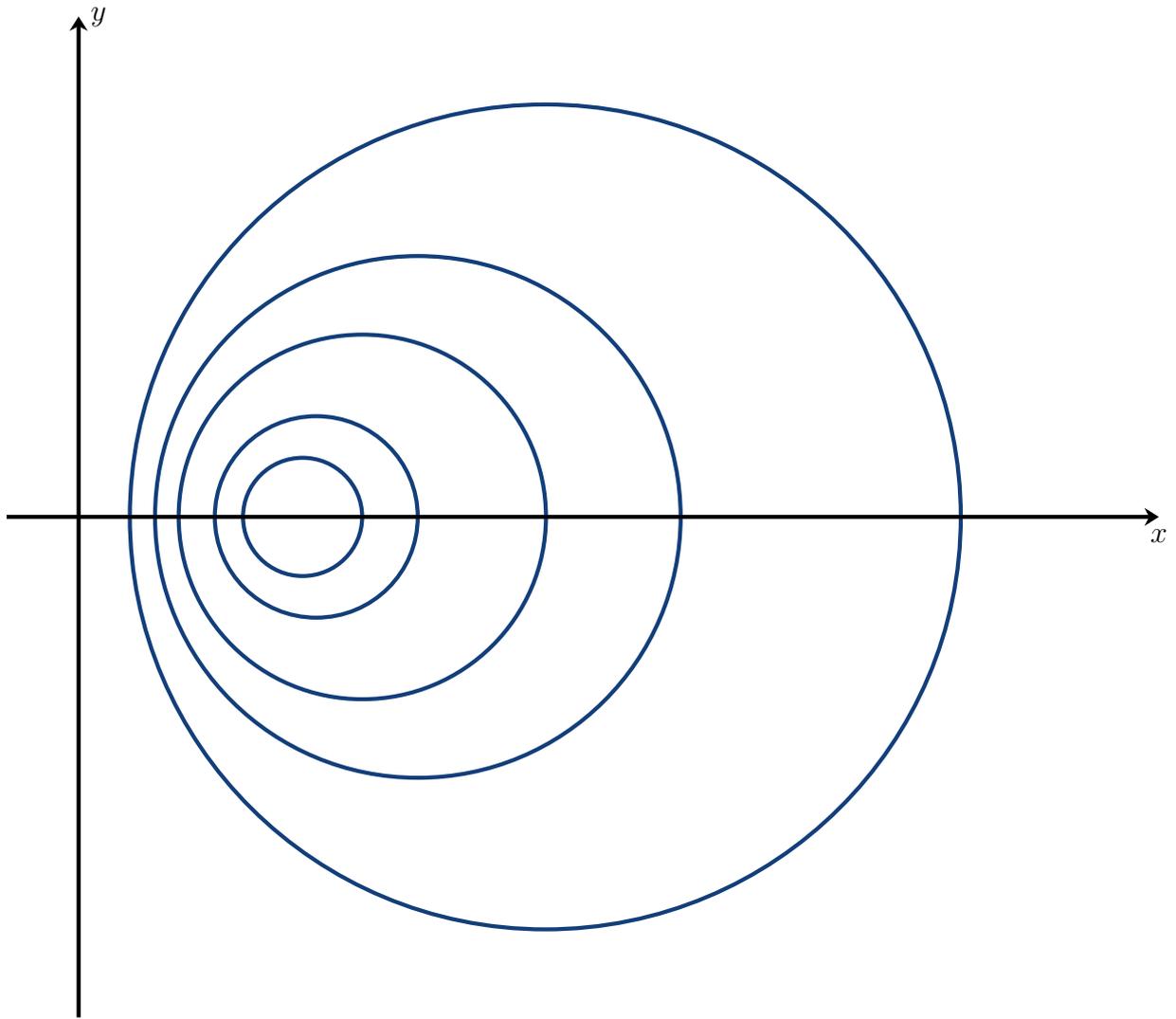


Figura 3.4: Curvas de τ constante.

ou, inversamente (vide A.3),

$$c = \left(\frac{1 - \lambda}{2\epsilon} \right) \sqrt{1 - \epsilon^2} \sqrt{\left(\frac{1 + \lambda}{1 - \lambda} \right)^2 - \epsilon^2}. \quad (3.34)$$

Assim como na última seção, também é necessário determinar o operador de Laplace e o elemento de área em coordenadas bipolares. Dessa forma, é necessário, primeiramente, determinar os fatores de escala h_r e h_θ . Eles são dados por

$$\begin{aligned} h_\tau &= \left| \left(\frac{\partial x}{\partial \tau}, \frac{\partial y}{\partial \tau} \right) \right| = \left| \left(\frac{c(1 - \cos \sigma \cosh \tau)}{(\cos \sigma - \cosh \tau)^2}, \frac{c \sin \sigma \sinh \tau}{(\cos \sigma - \cosh \tau)^2} \right) \right| \\ &= \frac{c}{(\cos \sigma - \cosh \tau)^2} |1 - \cos \sigma \cosh \tau, \sin \sigma \sinh \tau| \\ &= \frac{c}{(\cos \sigma - \cosh \tau)^2} \sqrt{(1 - \cos \sigma \cosh \tau)^2 + \sin^2 \sigma \sinh^2 \tau} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{c}{(\cos \sigma - \cosh \tau)^2} \sqrt{1 - 2 \cos \sigma \cosh \tau + \cos^2 \sigma \cosh^2 \tau + \underbrace{\underbrace{\text{sen}^2 \sigma}_{(1-\cos^2 \sigma)} \text{senh}^2 \tau}_{(1-\cos^2 \sigma)}} \\
&= \frac{c}{(\cos \sigma - \cosh \tau)^2} \sqrt{1 - 2 \cos \sigma \cosh \tau + \cos^2 \sigma \cosh^2 \tau + (1 - \cos^2 \sigma) \text{senh}^2 \tau} \\
&= \frac{c}{(\cos \sigma - \cosh \tau)^2} \sqrt{1 - 2 \cos \sigma \cosh \tau + \cos^2 \sigma \underbrace{(\cosh^2 \tau - \text{senh}^2 \tau)}_1 + \underbrace{\text{senh}^2 \tau}_{(\cosh^2 \tau - 1)}} \\
&= \frac{c}{(\cos \sigma - \cosh \tau)^2} \sqrt{\underbrace{\cos^2 \sigma - 2 \cos \sigma \cosh \tau + \cosh^2 \tau}_{(\cos \sigma - \cosh \tau)^2}} \\
&= \frac{c}{\cosh \tau - \cos \sigma} \tag{3.35}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
h_\sigma &= \left| \left(\frac{\partial x}{\partial \sigma}, \frac{\partial y}{\partial \sigma} \right) \right| = \left| \left(-\frac{c \text{sen} \sigma \text{senh} \tau}{(\cos \sigma - \cosh \tau)^2}, -\frac{c(1 - \cos \sigma \cosh \tau)}{(\cos \sigma - \cosh \tau)^2} \right) \right| \\
&= \frac{c}{(\cos \sigma - \cosh \tau)^2} |\text{sen} \sigma \text{senh} \tau, 1 - \cos \sigma \cosh \tau| \\
&= \frac{c}{(\cos \sigma - \cosh \tau)^2} \sqrt{\text{sen}^2 \sigma \text{senh}^2 \tau + (1 - \cos \sigma \cosh \tau)^2} \\
&= \frac{c}{(\cos \sigma - \cosh \tau)^2} \sqrt{\underbrace{\text{sen}^2 \sigma}_{(1-\cos^2 \sigma)} \text{senh}^2 \tau + 1 - 2 \cos \sigma \cosh \tau + \cos^2 \sigma \cosh^2 \tau} \\
&= \frac{c}{(\cos \sigma - \cosh \tau)^2} \sqrt{(1 - \cos^2 \sigma) \text{senh}^2 \tau + 1 - 2 \cos \sigma \cosh \tau + \cos^2 \sigma \cosh^2 \tau} \\
&= \frac{c}{(\cos \sigma - \cosh \tau)^2} \sqrt{\underbrace{\text{senh}^2 \tau}_{(\cosh^2 \tau - 1)} + 1 - 2 \cos \sigma \cosh \tau + \cos^2 \sigma \underbrace{(\cosh^2 \tau - \text{senh}^2 \tau)}_1} \\
&= \frac{c}{(\cos \sigma - \cosh \tau)^2} \sqrt{\underbrace{\cos^2 \sigma - 2 \cos \sigma \cosh \tau + \cosh^2 \tau}_{(\cos \sigma - \cosh \tau)^2}} \\
&= \frac{c}{\cosh \tau - \cos \sigma}. \tag{3.36}
\end{aligned}$$

Por conseguinte,

$$h_\tau = h_\sigma = \frac{c}{\cosh \tau - \cos \sigma}. \tag{3.37}$$

O operador de Laplace, em termos de fatores de escala, é descrito como

$$\nabla^2 = \frac{1}{h_\tau h_\sigma} \left[\frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{h_\sigma}{h_\tau} \frac{\partial}{\partial \tau} \right) + \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{h_\tau}{h_\sigma} \frac{\partial}{\partial \sigma} \right) \right]. \tag{3.38}$$

Substituindo (3.35) e (3.36) em (3.38), tem-se

$$\nabla^2 = \frac{(\cosh \tau - \cos \sigma)^2}{c^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} + \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right). \tag{3.39}$$

Além disso, assim como feito na seção anterior, o elemento de área é calculado por

$$dA = h_\tau h_\sigma d\tau d\sigma = \frac{c^2}{(\cosh \tau - \cos \sigma)^2} d\tau d\sigma. \quad (3.40)$$

Agora será realizado o mesmo procedimento feito na seção anterior, porém em coordenadas bipolares. Nesse caso, a equação Poisson (3.10) pode ser reescrita da seguinte forma

$$\frac{(\cosh \tau - \cos \sigma)^2}{c^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \sigma^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} \right) = -1 \quad (3.41)$$

com as seguintes condições de contorno

$$w(\alpha, \sigma) = w(\beta, \sigma) = w(\tau, 0) = w(\tau, \pi) = 0. \quad (3.42)$$

Por fim, é possível escrever a equação da vazão (3.13) nesse mesmo sistema de coordenadas:

$$Q = \iint_{\Gamma} \frac{c^2}{(\cosh \tau - \cos \sigma)^2} w d\sigma d\tau. \quad (3.43)$$

Capítulo 4

Escoamento entre dois semicilindros concêntricos

4.1 Método de separação de variáveis

Para solucionar o problema apresentado na Seção 3.3, será utilizado o método da separação de variáveis. Esta é uma técnica utilizada na resolução de equações diferenciais, onde uma solução é buscada na forma de um produto de funções que dependem de diferentes variáveis independentes. A ideia é separar as variáveis e resolver equações diferenciais parciais ou ordinárias por etapas, obtendo soluções parciais que são combinadas para formar a solução geral. Seguindo Alassar (2011), procedemos inicialmente com a introdução da seguinte transformação de variáveis:

$$w(r, \theta) = -\frac{r^2 \operatorname{sen}^2 \theta}{2} + W(r, \theta). \quad (4.1)$$

Substituindo (4.1) em (3.23), obtemos

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial W}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} = 0, \quad (4.2)$$

ou seja, transformamos a equação de Poisson (3.23) em uma equação de Laplace (4.2), uma equação diferencial parcial separável. As condições de contorno, por sua vez, tornam-se

$$W(\lambda, \theta) = \frac{\lambda^2 \operatorname{sen}^2 \theta}{2}, \quad (4.3)$$

$$W(1, \theta) = \frac{\operatorname{sen}^2 \theta}{2} \quad (4.4)$$

e

$$W(r, 0) = W(r, \pi) = 0. \quad (4.5)$$

Agora, assumimos que o termo W presente na equação (4.2) pode ser expresso como o produto de uma função unicamente dependente de r e uma função unicamente dependente de θ , de modo que

$$W(r, \theta) = R(r) \Theta(\theta). \quad (4.6)$$

Substituindo a (4.6) em (4.2), tem-se

$$r\Theta(rR'' + R) + R\Theta'' = 0, \quad (4.7)$$

ou seja,

$$-\frac{\Theta''}{\Theta} = \frac{R''r^2 + R'r}{R}. \quad (4.8)$$

Ao analisar a equação (4.8), é evidente que o lado esquerdo depende exclusivamente de θ , enquanto o lado direito depende exclusivamente de r . Portanto, para preservar a igualdade, é necessário que ambos os lados sejam iguais a uma constante (chamada constante de separação), denominada L^2 . Logo,

$$-\frac{\Theta''}{\Theta} = \frac{R''r^2 + R'r}{R} = L^2, \quad (4.9)$$

ou seja,

$$\Theta'' + L^2\Theta = 0 \quad (4.10)$$

e

$$r^2R'' + rR' - L^2R = 0. \quad (4.11)$$

Note que a equação (4.11) é uma equação de Cauchy-Euler. De acordo com [Boyce e DiPrima \(2010\)](#), as soluções das equações (4.10) e (4.11) são dadas, respectivamente, por

$$\Theta(\theta) = c_1 \sin L\theta + c_2 \cos L\theta \quad (4.12)$$

e

$$R(r) = c_3 r^{-L} + c_4 r^L, \quad (4.13)$$

onde c_1, c_2, c_3 e c_4 são constantes de integração. Pelas equações (4.5) e (4.6), segue

$$R(r) \Theta(0) = R(r) \Theta(\pi) = 0 \quad (4.14)$$

e, portanto,

$$\Theta(0) = \Theta(\pi) = 0. \quad (4.15)$$

Utilizando a primeira condição de contorno, é possível obter o valor de uma das constantes apresentadas em (4.12). Dessa forma, fazendo a substituição, tem-se

$$c_2 = 0. \quad (4.16)$$

A segunda condição de contorno mostra que

$$\Theta(\pi) = c_1 \text{sen } L\pi = 0. \quad (4.17)$$

Logo, $c_1 = 0$ ou $\text{sen } L\pi = 0$. Com o intuito de obter uma solução não trivial, consideraremos que $c_1 \neq 0$. Isso implica que o segundo termo terá que satisfazer a condição definida, ou seja,

$$\text{sen } L\pi = 0. \quad (4.18)$$

Os autovalores do problema são determinados por

$$L = n, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (4.19)$$

e as autofunções correspondentes, por sua vez, são dadas por

$$\Theta(\theta) = c_2 \text{sen } n\pi, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (4.20)$$

Da equação (4.13), segue que

$$W_n = (A_n r^{-n} + B_n r^n) \text{sen } n\theta, \quad (4.21)$$

onde $c_1 c_3$ e $c_1 c_4$ foram substituídos, respectivamente, por A_n e B_n .

Pelo princípio da superposição, podemos escrever

$$W(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n r^{-n} + B_n r^n) \text{sen } n\theta. \quad (4.22)$$

Agora é necessário descobrir os coeficientes A_n e B_n . Para isso, vamos primeiramente aplicar as condições de contorno (4.3) e (4.4). Daí, obtemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} (A_n \lambda^{-n} + B_n \lambda^n) \text{sen } n\theta = \frac{\lambda^2 \text{sen}^2 \theta}{2}, \quad (4.23)$$

para condição de contorno em $r = \lambda$, e

$$\sum_{n=1}^{\infty} (A_n + B_n) \text{sen } n\theta = \frac{\text{sen}^2 \theta}{2}, \quad (4.24)$$

para a condição de contorno em $r = 1$.

Para isolar B_n na equação (4.24), vamos utilizar a seguinte relação de ortogonalidade da função seno:

$$\int_0^\pi \text{sen } m\theta \text{ sen } n\theta \, d\theta = \begin{cases} 0, & \text{se } m \neq n, \\ \frac{\pi}{2}, & \text{se } m = n. \end{cases} \quad (4.25)$$

Desta maneira, multiplicando ambos os lados da equação (4.24) por $\text{sen } n\theta$ e integrando de 0 até π , obtemos

$$(A_n + B_n) \int_0^\pi \text{sen}^2 n\theta \, d\theta = \frac{1}{2} \int_0^\pi \text{sen}^2 \theta \text{ sen } n\theta \, d\theta. \quad (4.26)$$

Mas,

$$\int_0^\pi \text{sen}^2 \theta \text{ sen } n\theta \, d\theta = \begin{cases} -\frac{4}{n(n^2 - 4)}, & \text{se } n = 1, 3, 5, \dots, \\ 0, & \text{se } n = 2, 4, 6, \dots \end{cases} \quad (4.27)$$

e

$$\int_0^\pi \text{sen}^2 n\theta \, d\theta = \frac{\pi}{2}. \quad (4.28)$$

Consequentemente,

$$B_n = \begin{cases} -\frac{4}{\pi n(n^2 - 4)} - A_n, & \text{se } n = 1, 3, 5, \dots, \\ -A_n, & \text{se } n = 2, 4, 6, \dots \end{cases} \quad (4.29)$$

Similarmente, multiplicando ambos os lados da equação (4.23) por $\text{sen } n\theta$ e integrando de 0 até π , vemos que

$$-\frac{\lambda^2}{2} \int_0^\pi \text{sen}^2 \theta \text{ sen } n\theta \, d\theta + (A_n \lambda^{-n} + B_n \lambda^n) \int_0^\pi \text{sen}^2 n\theta \, d\theta = 0. \quad (4.30)$$

Usando as relações (4.27) e (4.28), a equação anterior reduz-se a

$$B_n = \begin{cases} -\frac{4\lambda^{2-n}}{\pi n(n^2 - 4)} - A_n \lambda^{-2n}, & \text{se } n = 1, 3, 5, \dots, \\ -A_n \lambda^{-2n}, & \text{se } n = 2, 4, 6, \dots \end{cases} \quad (4.31)$$

Igualando os lados direito das equações (4.29) e (4.31) e realizando algumas manipulações algébricas, concluímos que

$$A_n = \begin{cases} -\frac{4(\lambda^{n+2} - \lambda^{2n})}{\pi(1 - \lambda^{2n})n(n^2 - 4)}, & \text{se } n = 1, 3, 5, \dots, \\ 0, & \text{se } n = 2, 4, 6, \dots \end{cases} \quad (4.32)$$

e, em decorrência disso,

$$B_n = -\frac{4(1 - \lambda^{n+2})}{\pi(1 - \lambda^{2n})n(n^2 - 4)}. \quad (4.33)$$

Assim, a equação (4.22) pode ser escrita na forma

$$W(r, \theta) = -\frac{4}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{[(\lambda^{n+2} - \lambda^{2n}) r^{-n} + (1 - \lambda^{n+2}) r^n] \operatorname{sen} n\theta}{n(n^2 - 4)(1 - \lambda^{2n})}. \quad (4.34)$$

Substituindo 4.34 em 4.1 , pode-se escrever a equação da seguinte forma:

$$w(r, \theta) = -\frac{r^2 \operatorname{sen}^2 \theta}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{[(\lambda^{n+2} - \lambda^{2n}) r^{-n} + (1 - \lambda^{n+2}) r^n] \operatorname{sen} n\theta}{n(n^2 - 4)(1 - \lambda^{2n})} \quad (4.35)$$

ou, simplesmente,

$$w(r, \theta) = -\frac{1}{2} r^2 \operatorname{sen}^2 \theta - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(\lambda^{2n+1} - \lambda^{4n-2}) r^{-2n+1} + (1 - \lambda^{2n+1}) r^{2n-1}] \operatorname{sen} (2n - 1) \theta}{(2n - 3)(2n - 1)(2n + 1)(1 - \lambda^{4n-2})}. \quad (4.36)$$

É importante ressaltar que a equação (4.36) está de acordo com a equação (38) apresentada por [Kyritsi-Yiallourou e Georgiou \(2018\)](#).

Note que, quando $\lambda = 0$, tem-se

$$w(r, \theta) = -\frac{r^2 \operatorname{sen}^2 \theta}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^{2n-1} \operatorname{sen} (2n - 1) \theta}{(2n - 3)(2n - 1)(2n + 1)}, \quad (4.37)$$

que está em concordância com a solução analítica do escoamento de Hagen-Poiseuille em um tubo de seção semicircular ([Alassar, 2011](#)).

4.2 Vazão

A partir da solução apresentada na seção anterior, torna-se possível realizar o cálculo da vazão. Na seção 3.3, vimos que a vazão em coordenadas polares é dada por

$$Q = \int_0^\pi \int_\lambda^1 r w \operatorname{dr} d\theta. \quad (4.38)$$

Substituindo (4.37) em (4.38), temos

$$Q = \int_0^\pi \int_\lambda^1 r \left\{ -\frac{r^2 \operatorname{sen}^2 \theta}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(\lambda^{2n+1} - \lambda^{4n-2}) r^{-2n+1} + (1 - \lambda^{2n+1}) r^{2n-1}] \operatorname{sen} (2n - 1) \theta}{(2n - 3)(2n - 1)(2n + 1)(1 - \lambda^{4n-2})} \right\} \operatorname{dr} d\theta. \quad (4.39)$$

Para simplificar a solução, resolveremos a integral anterior em duas etapas. A primeira parte é dada por

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \int_\lambda^1 r \left(-\frac{r^2 \operatorname{sen}^2 \theta}{2} \right) dr d\theta &= -\frac{1}{2} \times \int_0^\pi \operatorname{sen}^2 \theta d\theta \times \int_\lambda^1 r^3 dr \\ &= -\frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} \times \frac{(1 - \lambda^4)}{4} \\ &= -\frac{\pi(1 - \lambda^4)}{16}. \end{aligned} \quad (4.40)$$

A segunda parte, por sua vez, é dada por

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \int_\lambda^1 r \left\{ -\frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(\lambda^{2n+1} - \lambda^{4n-2}) r^{-2n+1} + (1 - \lambda^{2n+1}) r^{2n-1}] \operatorname{sen} (2n - 1) \theta}{(2n - 3)(2n - 1)(2n + 1)(1 - \lambda^{4n-2})} \right\} dr d\theta \\ = -\frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n - 3)(2n - 1)(2n + 1)(1 - \lambda^{4n-2})} \\ \times \int_0^\pi \int_\lambda^1 (\lambda^{2n+1} - \lambda^{4n-2}) r^{-2n+2} + (1 - \lambda^{2n+1}) r^{2n} \operatorname{sen} (2n - 1) \theta dr d\theta. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Analisando a integral apresentada na expressão acima (4.41), é possível decompô-la em duas partes distintas:

$$\int_0^\pi \int_\lambda^1 (\lambda^{2n+1} - \lambda^{4n-2}) r^{-2n+2} \operatorname{sen} (2n - 1) \theta dr d\theta \quad (4.42)$$

e

$$\int_0^\pi \int_\lambda^1 (1 - \lambda^{2n+1}) r^{2n} \operatorname{sen} (2n - 1) \theta dr d\theta. \quad (4.43)$$

A resolução das integrais nas partes (4.42) e (4.43) é relativamente semelhante. Para (4.42), temos

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \int_\lambda^1 (\lambda^{2n+1} - \lambda^{4n-2}) r^{-2n+2} \operatorname{sen} (2n - 1) \theta dr d\theta \\ = (\lambda^{2n+1} - \lambda^{4n-2}) \int_0^\pi \int_\lambda^1 r^{-2n+2} \operatorname{sen} (2n - 1) \theta dr d\theta \\ = (\lambda^{2n+1} - \lambda^{4n-2}) \times \int_0^\pi \operatorname{sen} (2n - 1) \theta d\theta \times \int_\lambda^1 r^{-2n+2} dr. \end{aligned} \quad (4.44)$$

Mas,

$$\int_0^\pi \operatorname{sen} (2n - 1) \theta d\theta = \frac{2}{2n - 1} \quad (4.45)$$

e

$$\int_\lambda^1 r^{-2n+2} dr = -\frac{(1 - \lambda^{-2n+3})}{2n - 3}. \quad (4.46)$$

Logo,

$$\begin{aligned}
& \int_0^\pi \int_\lambda^1 (\lambda^{2n+1} - \lambda^{4n-2}) r^{-2n+2} \sin(2n-1)\theta \, dr \, d\theta \\
&= -\frac{2}{(2n-3)(2n-1)} (\lambda^{2n+1} - \lambda^{4n-2}) (1 - \lambda^{-2n+3}) \\
&= -\frac{2(2\lambda^{2n+1} - \lambda^{4n-2} - \lambda^4)}{(2n-3)(2n-1)}. \quad (4.47)
\end{aligned}$$

Similarmente, para a equação (4.43), é possível mostrar que

$$(1 - \lambda^{2n+1}) \int_0^\pi \int_\lambda^1 r^{2n} \sin(2n-1)\theta \, dr \, d\theta = \frac{2(1 - \lambda^{2n+1})^2}{(2n-1)(2n+1)}. \quad (4.48)$$

O resultado da equação (4.41) é obtido pela soma dos resultados encontrados em (4.47) e (4.48). Portanto,

$$\begin{aligned}
& -\frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-3)(2n-1)(2n+1)(1 - \lambda^{4n-2})} \\
& \times \int_0^\pi \int_\lambda^1 r [(\lambda^{2n+1} - \lambda^{4n-2}) r^{-2n+1} + (1 - \lambda^{2n+1}) r^{2n-1}] \sin(2n-1)\theta \, dr \, d\theta \\
&= \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-3)^2 (2n-1)^2 (2n+1)^2 (1 - \lambda^{4n-2})} \\
& \times \left[(2n+1)(2\lambda^{2n+1} - \lambda^{4n-2} - \lambda^4) - (2n-3)(1 - \lambda^{2n+1})^2 \right]. \quad (4.49)
\end{aligned}$$

A vazão será dada, portanto, pela soma dos dois resultados encontrados em (4.40) e (4.49). Assim, tem-se:

$$\begin{aligned}
Q &= -\frac{\pi}{16} (1 - \lambda^4) + \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-3)^2 (2n-1)^2 (2n+1)^2 (1 - \lambda^{4n-2})} \\
& \times \left[(2n+1)(2\lambda^{2n+1} - \lambda^{4n-2} - \lambda^4) - (2n-3)(1 - \lambda^{2n+1})^2 \right]. \quad (4.50)
\end{aligned}$$

É importante destacar que a equação (4.50) é congruente com a equação (39) apresentada por [Kyritsi-Yiallourou e Georgiou \(2018\)](#).

Quando $\lambda = 0$, a equação anterior simplifica-se para

$$\begin{aligned}
Q &= -\frac{\pi}{16} - \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-3)(2n-1)^2(2n+1)^2} \\
&= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{\pi}. \quad (4.51)
\end{aligned}$$

Ao dividirmos o valor mencionado pela área adimensional da seção transversal, calculamos a velocidade média adimensional (\bar{w}) para $\lambda = 0$. Neste contexto, dado que a área da seção transversal equivale a $\pi/2$ (ou seja, metade da área de um círculo unitário), resulta na seguinte expressão:

$$\bar{w} = \frac{Q}{A} = \frac{\frac{\pi}{8} - \frac{1}{\pi}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4} - \frac{2}{\pi^2}. \quad (4.52)$$

O valor obtido em (4.52) coincide com o reportado por [Alassar \(2011\)](#), conforme esperado.

4.3 Número de Poiseuille

No contexto de escoamentos internos, dois parâmetros adimensionais desempenham um papel crucial na descrição dos fenômenos envolvidos: o número de Poiseuille e o número de Nusselt. O número de Poiseuille está diretamente relacionado à perda de pressão causada pela fricção no escoamento, enquanto o número de Nusselt quantifica a transferência de calor ao longo das superfícies de um sistema ([Shah e London, 1978](#)). Dado que o foco deste estudo é um escoamento isotérmico, apenas o número de Poiseuille é relevante. Ele é determinado pela multiplicação do número de Reynolds pelo fator de atrito de Fanning.

Primeiramente, para determinar o número de Poiseuille para o caso apresentado, é necessário determinar a área e o perímetro molhado da geometria em análise. Observando-se a [Figura 4.1](#), fica simples de perceber que a área e o perímetro molhado serão dados, respectivamente, por

$$A = \frac{\pi(1 - \lambda^2)}{2} \quad (4.53)$$

e

$$P = 2(1 - \lambda) + \pi(1 + \lambda). \quad (4.54)$$

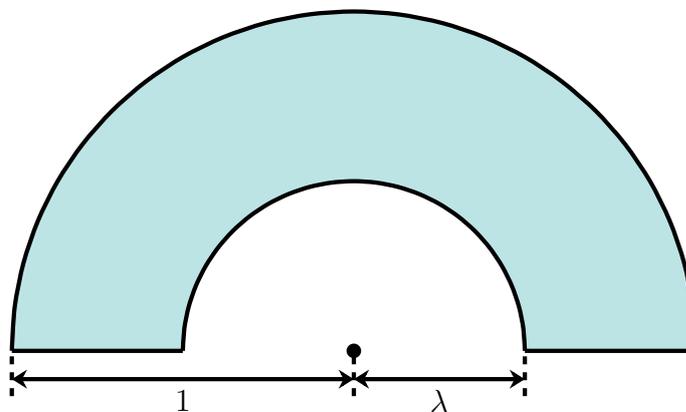


Figura 4.1: Geometria do problema na forma adimensional.

É importante lembrar que o número de Reynolds é dado por

$$Re = \frac{\rho \bar{w}^* D_h^*}{\mu}, \quad (4.55)$$

enquanto o fator de atrito de Fanning é dado por

$$f = \frac{2\tau_w^*}{\rho \bar{w}^{*2}} \quad (4.56)$$

onde τ_w é a tensão de cisalhamento na parede do duto. Sabendo-se que a queda de pressão modificada para o escoamento totalmente desenvolvido em um duto é dada por:

$$-\frac{dp^*}{dz} = f \frac{2\rho \bar{w}^{*2}}{D_h^*} \quad (4.57)$$

onde D_h^* é o diâmetro hidráulico. Pode-se reescrever, portanto, o fator de atrito de Fanning como:

$$f = -\frac{D_h^*}{2\rho \bar{w}^{*2}} \frac{dp^*}{dz}. \quad (4.58)$$

Multiplicando número de Reynolds pelo fator de atrito de Fanning, tem-se

$$Po = fRe = -\frac{D_h^{*2}}{2\mu \bar{w}^*} \frac{dp^*}{dz^*}, \quad (4.59)$$

onde Po é o número de Poiseuille. Para o caso apresentado, a velocidade média é dada por

$$\bar{w}^* = \frac{Q^*}{A^*}. \quad (4.60)$$

Já o diâmetro hidráulico pode ser obtido por

$$D_h^* = \frac{4A^*}{P^*}. \quad (4.61)$$

Ao substituir as equações (4.60) e (4.61) em (4.59), obtemos

$$Po = -\frac{8A^{*3}}{\mu P^{*2} Q^*} \frac{dp^*}{dz^*}. \quad (4.62)$$

Em seguida, para que os termos adimensionais sejam utilizados no número de Poiseuille, é necessário relembrar as seguintes relações da [Seção 3.2](#):

$$Q = \frac{Q^*}{\frac{b^4 dp^*}{\mu dz^*}}, \quad A = \frac{A^*}{b^2}, \quad P = \frac{P^*}{b}. \quad (4.63)$$

Substituindo (4.63) em (4.62), tem-se

$$Po = \frac{8A^3}{P^2Q}. \quad (4.64)$$

ou, simplesmente,

$$Po = \frac{\pi^3(1 - \lambda^2)^3}{[2(1 - \lambda) + \pi(1 + \lambda)]^2Q}. \quad (4.65)$$

Por fim, para realizar a análise dos resultados no próximo capítulo, é necessário calcular os casos extremos do número de Poiseuille. Para isso, será realizado o cálculo quando $\lambda = 0$ e quando $\lambda \rightarrow 1$. Quando $\lambda = 0$, tem-se

$$A = \frac{\pi}{2}, \quad (4.66)$$

$$P = 2 + \pi \quad (4.67)$$

e

$$Q = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{\pi}, \quad (4.68)$$

conforme demonstrado na seção anterior. Por conseguinte,

$$Po = \frac{8\pi^4}{(\pi + 2)^2(\pi^2 - 8)} \cong 15.767. \quad (4.69)$$

É importante ressaltar que o valor encontrado acima (4.69) está em conformidade com a equação (61) apresentada por [Kyritsi-Yiallourou e Georgiou \(2018\)](#). Já quando $\lambda \rightarrow 1$, tem-se

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow 1} Po &= \lim_{\lambda \rightarrow 1} \left\{ \frac{\pi^3(1 - \lambda^2)^3}{[2(1 - \lambda) + \pi(1 + \lambda)]^2} \right. \\ &\quad \times \left\{ -\frac{\pi}{16} (1 - \lambda^4) + \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n - 3)^2 (2n - 1)^2 (2n + 1)^2 (1 - \lambda^{4n-2})} \right. \\ &\quad \left. \left. \times \left[(2n + 1) (2\lambda^{2n+1} - \lambda^{4n-2} - \lambda^4) - (2n - 3) (1 - \lambda^{2n+1})^2 \right] \right\}^{-1} \right\} = 24. \quad (4.70) \end{aligned}$$

Este resultado, notavelmente, ainda não foi reportado na literatura.

Capítulo 5

Análise dos resultados- caso concêntrico

Com base nos resultados obtidos no [Capítulo 4](#), é possível construir a [Tabela 5.1](#). Nessa tabela, são apresentadas informações relativas à área, ao perímetro molhado, à vazão e ao número de Poiseuille (conforme discutido por [Shah e London \(1978\)](#) e abordado neste trabalho), em relação à razão de aspecto (λ). É pertinente enfatizar que os valores marcados com um asterisco são exatos, conforme exposto na [Seção 4.3](#).

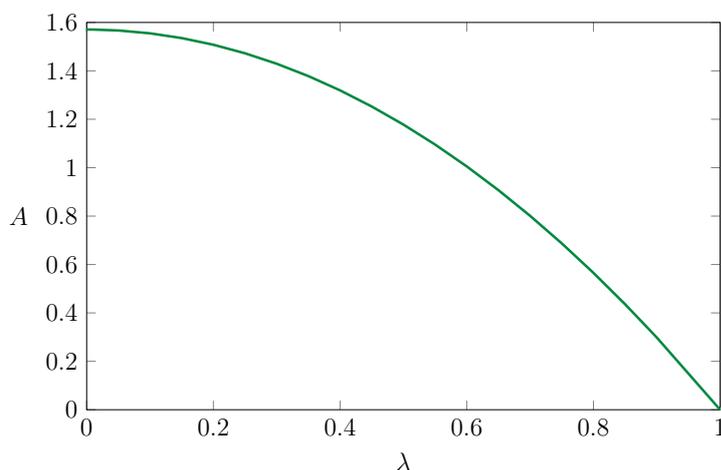
Tabela 5.1: Parâmetro analisados

λ	A	P	Q	Po Shah e London (1978)	Po Presente trabalho
0	1.571	5.142	0.0744	15.767	15.767*
0.01	1.571	5.153	0.0743	15.704	15.704
0.05	1.567	5.199	0.0731	15.575	15.575
0.1	1.555	5.256	0.0697	15.616	15.615
0.15	1.535	5.313	0.0649	15.806	15.805
0.2	1.508	5.370	0.0591	16.095	16.095
0.25	1.473	5.427	0.0527	16.455	16.454
0.3	1.429	5.484	0.0461	16.863	16.863
0.35	1.378	5.541	0.0394	17.307	17.306
0.4	1.319	5.598	0.0330	17.776	17.775
0.45	1.253	5.655	0.0269	18.264	18.263
0.5	1.178	5.712	0.0214	18.764	18.764
0.55	1.096	5.769	0.0164	19.275	19.274
0.6	1.005	5.826	0.0121	19.793	19.791
0.65	0.907	5.883	0.0085	20.315	20.314
0.7	0.801	5.941	0.0056	20.841	20.839
0.75	0.687	5.998	0.0034	21.369	21.366
0.8	0.565	6.055	0.0018	21.9	21.894
0.85	0.435	6.112	0.0008	22.436	22.422

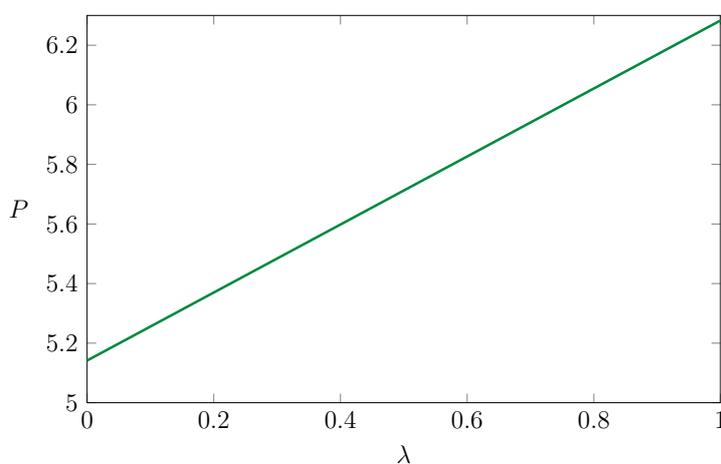
Tabela 5.1: Parâmetro analisados

λ	A	P	Q	Po	Po
				Shah e London (1978)	Presente trabalho
0.9	0.298	6.169	0.0002	23	22.949
1	0	6.283	0	-	24*

Primeiramente, foi realizada uma avaliação da variação da área e do perímetro da geometria em relação à razão de aspecto. Essa avaliação se mostra fundamental, uma vez que serve como base para a análise subsequente da vazão e das curvas de velocidade e validação das mesmas. Ao plotar os gráficos correspondentes (Figura 5.1), verificou-se que a área, dada pela equação (4.53), variava no intervalo de 0 a $\pi/2$, exibiu um comportamento quadrático, diminuindo à medida que a razão de aspecto aumentava. Por outro lado, o perímetro molhado, dado pela equação (4.54), variava de $2 + \pi$ a 2π , apresentava um comportamento linear, aumentando conforme a razão de aspecto cresce.



(a)



(b)

Figura 5.1: Representação gráfica de (a) área (A) e (b) perímetro molhado (P) em função da razão de aspecto (λ).

Na sequência, plotou-se o gráfico da vazão (Figura 5.2). A curva segue a equação (4.50) e a vazão varia de 0 a $\pi/8 - 1/\pi$, respeitando o limite assintótico estabelecido na equação (4.68). Nota-se que esta apresenta comportamento decrescente, devido a diminuição da área com o aumento da razão de aspecto, e não linear.

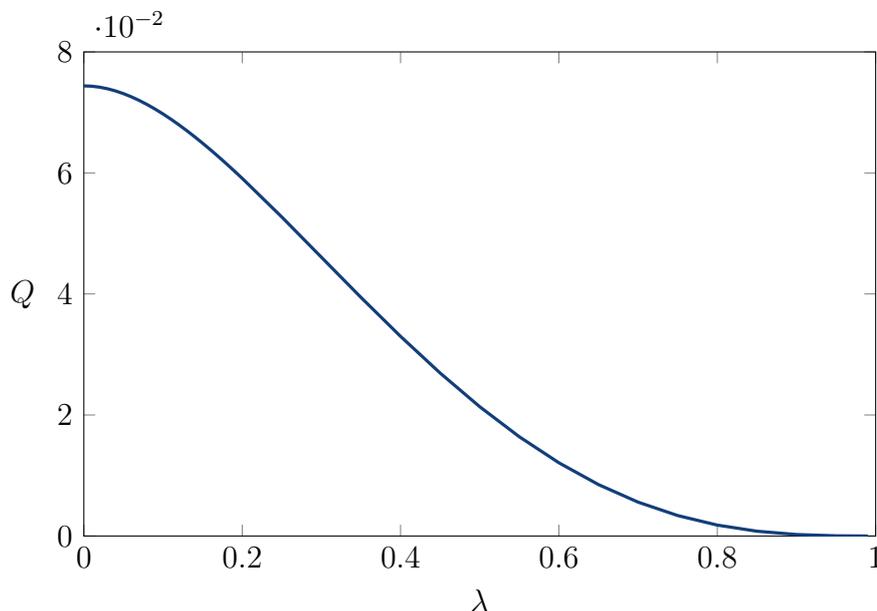


Figura 5.2: Representação gráfica da vazão (Q) em função da razão de aspecto (λ).

Os painéis (a), (b), (c) e (d) da Figura 5.3 representam os campos de velocidade adimensional na seção semicilíndrica concêntrica correspondentes às razões de aspecto de $\lambda = 0$, $\lambda = 0.25$, $\lambda = 0.5$ e $\lambda = 0.75$, respectivamente. Para todas as representações, foram traçadas 5 linhas de contorno igualmente espaçadas, variando de forma normalizada de 0.1 até 0.9, em incrementos de 0.2. É relevante destacar que o painel (a) da Figura 5.3 já havia sido resolvido por Alassar (2011), representa o caso onde há apenas um semicilindro e está de acordo com a Figura 2 apresentada no artigo. Ademais, os painéis (a), (b), (c) e (d) estão consistentes com Kyritsi-Yiallourou e Georgiou (2018), nos quais os resultados estão ilustrados na Figura 5.4. Além disso, as velocidades mais baixas são observadas em proximidade das regiões das paredes, devido à condição de não-deslizamento. Consequentemente, a maior velocidade é identificada na região central da seção do tubo, ou seja, quando $\theta = 90^\circ$, no sistema polar de coordenadas. Por fim, a velocidade adimensional diminui conforme a razão de aspecto aumenta, as velocidades máximas para os casos apresentados foram de aproximadamente: (a) 0.1, (b) 0.07, (c) 0.035 e (d) 0.008. Isso ocorre devido à redução da área disponível e, por conseguinte, da vazão, além dos efeitos mais intensos das paredes, que se encontram cada vez mais próximas.

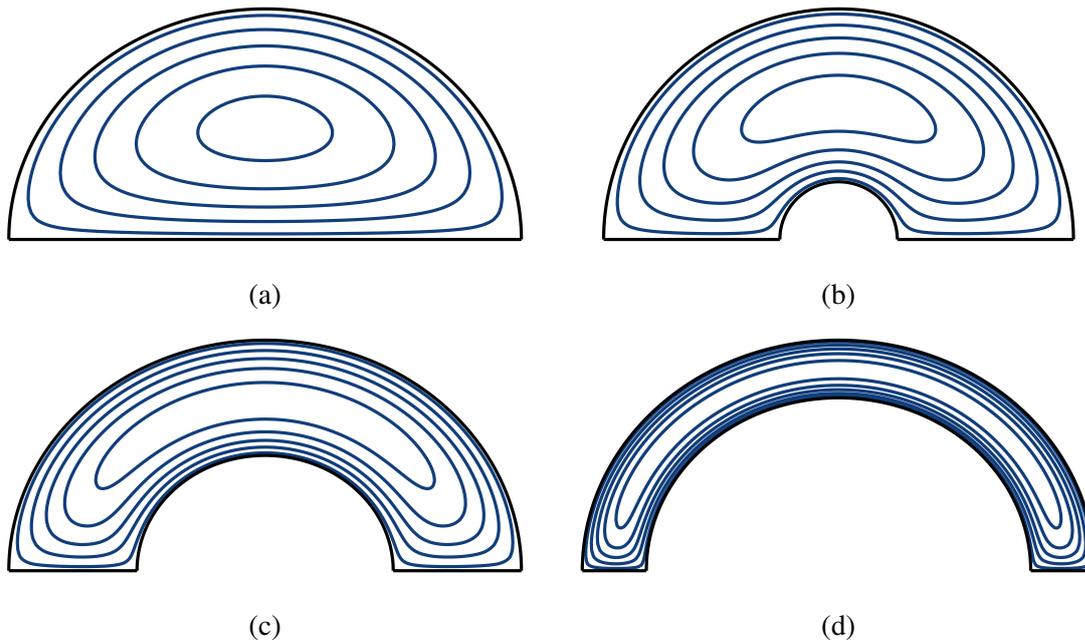


Figura 5.3: Campos de velocidades adimensionais em coordenadas cartesianas para dutos semicilíndricos concêntricos com valores de λ iguais a (a) 0, (b) 0.25, (c) 0.5 e (d) 0.75.

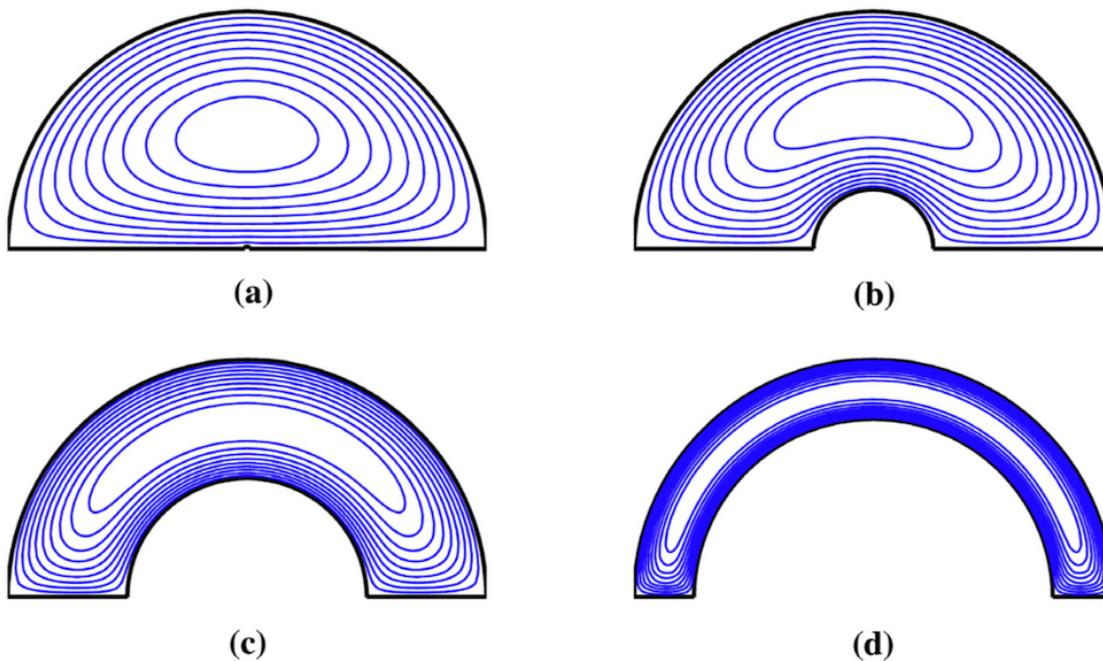


Figura 5.4: Contornos de velocidade no caso de deslizamento para vários valores de λ : (a) $\lambda = 0$, (b) $\lambda = 0.25$, (c) $\lambda = 0.5$, (d) $\lambda = 0.75$. Retirado de [Kyritsi-Yiallourou e Georgiou \(2018\)](#)

No que se refere ao número de Poiseuille, utilizou-se o suporte do software Maple 2023 para efetuar os cálculos. Ao utilizar-se o comando *evalf* do *software*, ele realiza o cálculo do somatório para infinitos pontos. Porém, já observava-se uma convergência ao utilizar-se

o somatório com 256. Por exemplo, para $\lambda = 0.9$, para diferentes valores de n , tem-se:

$$\begin{aligned} n = 16 &\rightarrow Po = 22.90446056 \\ n = 32 &\rightarrow Po = 22.90446056 \\ n = 64 &\rightarrow Po = 22.94958811 \\ n = 128 &\rightarrow Po = 22.94976154 \\ n = 256 &\rightarrow Po = 22.94977284 \\ n = 512 &\rightarrow Po = 22.94977284 \\ n = 1024 &\rightarrow Po = 22.94977284 \end{aligned}$$

Além disso, uma convergência entre os resultados obtidos de forma analítica neste trabalho e os resultados expostos por [Shah e London \(1978\)](#) pôde ser observada, com o maior erro relativo ocorrendo em $\lambda = 0.9$, aproximadamente equivalente a 0.2%. É importante destacar que discrepâncias leves foram identificadas para valores de razão de aspecto próximos de 1. Essas discrepâncias podem ser atribuídas ao fato de que a vazão nessas condições tende a zero, tornando as imprecisões numéricas mais suscetíveis devido aos valores extremamente pequenos. No entanto, a fim de validar os resultados, percebemos que ao verificar o limite teórico para λ se aproximando de 1 (onde Po tende a 24), como demonstrado na equação (4.70), obtemos um indicador de que nossa solução é precisa. Por exemplo, para $\lambda = 0.95$, obtivemos um valor aproximado de Po de 23.475. Por fim, foi gerado um gráfico número de Poiseuille em função da razão de aspecto. A curva segue a equação (4.65) e apresenta um comportamento crescente, não linear e o número de Poiseuille variou de $8\pi^4 / [(\pi + 3)^2 (\pi^2 - 8)]$ a 24, conforme ditado pelas equações (4.69) e (4.70).

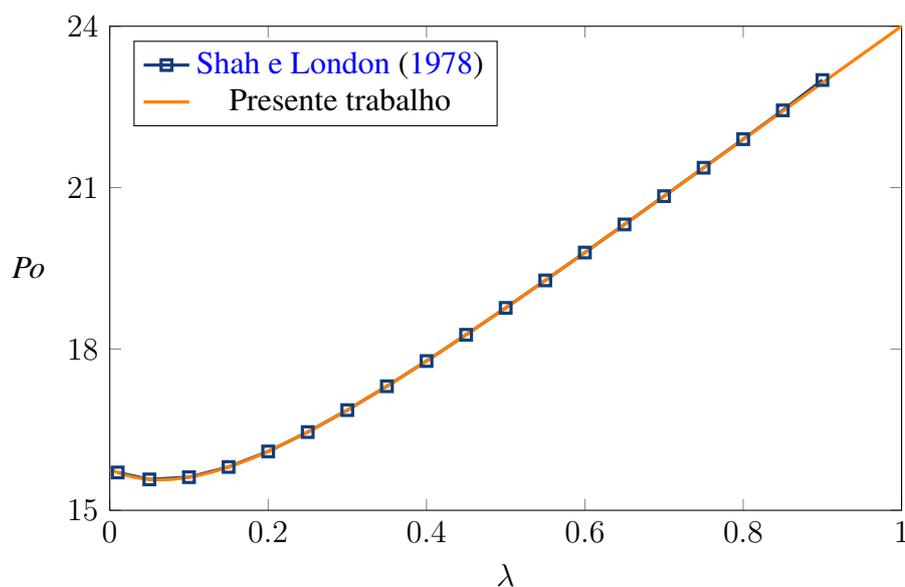


Figura 5.5: Representação gráfica do número de Poiseuille (Po) em função da razão de aspecto (λ).

Capítulo 6

Escoamento entre dois semicilindros excêntricos

6.1 Método de separação de variáveis

Para resolver o problema apresentado na Seção 3.4, primeiramente será necessário realizar uma análise da geometria do mesmo em coordenadas bipolares. Diferentemente do sistema de coordenadas utilizado para o caso concêntrico, as coordenadas bipolares não são tão intuitivas, tornando esta etapa crucial para a compreensão adequada do problema.

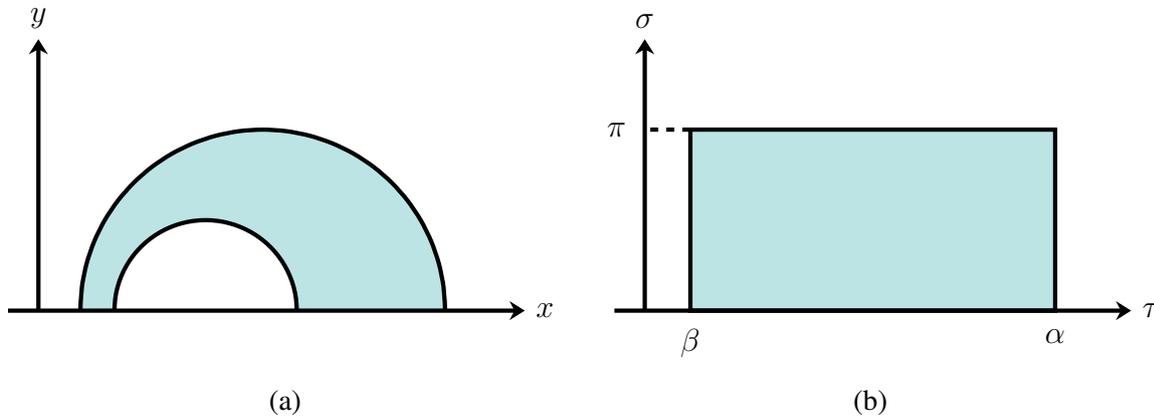


Figura 6.1: Escoamento entre dois semicilindros excêntricos: (a) coordenadas cartesianas (b) coordenadas bipolares

Observando-se a Figura 6.1, note-se que, quando as coordenadas bipolares são aplicadas, o problema do escoamento entre dois semicilindros excêntricos é transformado em um problema equivalente de escoamento dentro de um retângulo. Assim como mostrado anteriormente (Seção 3.4), a equação governante dada por

$$\frac{(\cosh \tau - \cos \sigma)^2}{c^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \sigma^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} \right) = -1 \quad (6.1)$$

com as seguintes condições de contorno

$$w(\alpha, \sigma) = w(\beta, \sigma) = w(\tau, 0) = w(\tau, \pi) = 0. \quad (6.2)$$

A equação (6.1) é uma equação de Poisson, o que inviabiliza a aplicação do método de separação de variáveis. Portanto, é necessário realizar uma transformação de variáveis para transformá-la em uma equação de Laplace. Assim,

$$w(\tau, \sigma) = W(\tau, \sigma) - \frac{c^2}{2} \frac{\text{sen}^2 \sigma}{(\cosh \tau - \cos \sigma)^2} \quad (6.3)$$

Substituindo-se (6.3) em (6.1), tem-se

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial \sigma^2} = 0. \quad (6.4)$$

As condições de contorno, por sua vez, tornam-se

$$W(\alpha, \sigma) = \frac{c^2}{2} \frac{\text{sen}^2 \sigma}{(\cosh \alpha - \cos \sigma)^2}, \quad (6.5)$$

$$W(\beta, \sigma) = \frac{c^2}{2} \frac{\text{sen}^2 \sigma}{(\cosh \beta - \cos \sigma)^2} \quad (6.6)$$

e

$$W(\tau, 0) = W(\tau, \pi) = 0. \quad (6.7)$$

Agora o problema pode ser resolvido utilizando-se o método de separação de variáveis e a solução pode ser encontrada a partir do problema de Dirichlet para um retângulo. Dessa forma, tem-se

$$W(\tau, \sigma) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \text{senh}[n(\tau - \beta)] \text{sen}(n\sigma) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \text{senh}[n(\alpha - \tau)] \text{sen}(n\sigma) \quad (6.8)$$

onde

$$A_n = \frac{2}{\pi \text{senh}[n(\alpha - \beta)]} \int_0^{\pi} W(\alpha, \sigma) \text{sen}(n\sigma) d\sigma \quad (6.9)$$

e

$$B_n = \frac{2}{\pi \text{senh}[n(\alpha - \beta)]} \int_0^{\pi} W(\beta, \sigma) \text{sen}(n\sigma) d\sigma. \quad (6.10)$$

Substituindo (6.5) em (6.9) e (6.6) em (6.10), tem-se

$$A_n = \frac{c^2}{\pi \sinh [n(\alpha - \beta)]} \int_0^\pi \frac{\sigma \sin^2 \sigma \sin(n\sigma)}{(\cosh \alpha - \cos \sigma)^2} d\sigma \quad (6.11)$$

e

$$B_n = \frac{c^2}{\pi \sinh [n(\alpha - \beta)]} \int_0^\pi \frac{\sigma \sin^2 \sigma \sin(n\sigma)}{(\cosh \beta - \cos \sigma)^2} d\sigma. \quad (6.12)$$

É importante destacar a relação trigonométrica dada por

$$\cos(a + b) - \cos(a - b) = -2 \sin a \sin b. \quad (6.13)$$

Se $a = b$, tem-se

$$\cos(2a) - 1 = -2 \sin^2 a. \quad (6.14)$$

A partir dessa relação, torna-se possível manipular o denominador dos integrandos nas equações (6.11) e (6.12):

$$\sigma \sin^2 \sigma \sin(n\sigma) = \frac{1 - \cos(2\sigma)}{2} \sin(n\sigma) = \frac{\sin(n\sigma)}{2} - \frac{\cos(2\sigma) \sin(n\sigma)}{2}. \quad (6.15)$$

Fazendo $a = n\sigma$ e $b = 2\sigma$ na fórmula de prostaferese

$$\sin a \cos b = \frac{\sin(a + b) + \sin(a - b)}{2} \quad (6.16)$$

e substituindo na equação (6.15), tem-se

$$\sigma \sin^2 \sigma \sin(n\sigma) = \frac{\sin(n\sigma)}{2} - \frac{\sin(n + 2)\sigma + \sin(n - 2)\sigma}{4}. \quad (6.17)$$

Agora, torna-se possível fazer a substituição de (6.17) em (6.11) e (6.12).

$$A_n = \frac{c^2}{2\pi \sinh [n(\alpha - \beta)]} \int_0^\pi \left[\frac{\sin(n\sigma)}{(\cosh \alpha - \cos \sigma)^2} - \frac{\sin(n + 2)\sigma + \sin(n - 2)\sigma}{2(\cosh \alpha - \cos \sigma)^2} \right] d\sigma \quad (6.18)$$

e

$$B_n = \frac{c^2}{2\pi \sinh [n(\alpha - \beta)]} \int_0^\pi \left[\frac{\sin(n\sigma)}{(\cosh \beta - \cos \sigma)^2} - \frac{\sin(n + 2)\sigma + \sin(n - 2)\sigma}{(\cosh \beta - \cos \sigma)^2} \right] d\sigma. \quad (6.19)$$

Considerando-se que

$$I_n(\tau) = \int_0^\pi \frac{\text{sen}(n\sigma)}{(\cosh \tau - \cos \sigma)^2} d\sigma, \quad (6.20)$$

é possível substituir (6.20) em (6.18) e (6.19). Dessa forma, tem-se

$$A_n = \frac{c^2}{2\pi \text{senh}[n(\alpha - \beta)]} \left[I_n(\alpha) - \frac{I_{n+2}(\alpha) + I_{n-2}(\alpha)}{2} \right] \quad (6.21)$$

e

$$B_n = \frac{c^2}{2\pi \text{senh}[n(\alpha - \beta)]} \left[I_n(\beta) - \frac{I_{n+2}(\beta) + I_{n-2}(\beta)}{2} \right]. \quad (6.22)$$

Para solucionar o problema, é possível escrever a integral apresentada na Equação (6.20) em termos da função transcendente de Lerch $\Phi(z, s, \nu)$ ¹:

$$I_n(\tau) = \frac{8e^{2\tau} \left[\Phi\left(e^{-2\tau}, 1, \frac{1+n}{2}\right) (\cosh \tau - n \text{senh } \tau) - \Phi\left(e^{-2\tau}, 1, \frac{1-n}{2}\right) (\cosh \tau + n \text{senh } \tau) \right]}{(e^{2\tau} - 1)^3} \quad (6.23)$$

se n é par e

$$I_n(\tau) = \frac{8e^\tau}{n(e^{2\tau} - 1)^3} \left[n\Phi\left(e^{-2\tau}, 1, \frac{2+n}{2}\right) (\cosh \tau - n \text{senh } \tau) - n\Phi\left(e^{-2\tau}, 1, \frac{2-n}{2}\right) (\cosh \tau + n \text{senh } \tau) + e^\tau + e^{3\tau} \right] \quad (6.24)$$

se n é ímpar.

Vale observar que a função transcendente de Lerch (Bateman, 1953) é definida por:

$$\phi(z, s, \alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n + \alpha)^2}. \quad (6.25)$$

Assim, a solução analítica da velocidade para o problema descrito é dada por:

$$w(\tau, \sigma) = -\frac{c^2}{2} \frac{\text{sen}^2 \sigma}{(\cosh \tau - \cos \sigma)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \text{senh}[n(\tau - \beta)] \text{sen}(n\sigma) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \text{senh}[n(\alpha - \tau)] \text{sen}(n\sigma). \quad (6.26)$$

¹A solução dessa integral foi obtida pelo Professor Rajar S. Alassar da King Fahd University of Petroleum and Minerals com o auxílio do software Wolfram Matemática.

6.2 Vazão

Com base na solução apresentada na seção anterior, é possível realizar o cálculo da vazão. Anteriormente, na seção 3.4, foi visto que a equação da vazão, em coordenadas bipolares, é dada por

$$Q = \iint_{\Gamma} \frac{c^2}{(\cosh \tau - \cos \sigma)^2} w \, d\sigma d\tau. \quad (6.27)$$

Substituindo-se (6.26) em (6.27), tem-se

$$Q = - \iint_{\Gamma} \frac{c^2}{(\cosh \tau - \cos \sigma)^2} \left[\frac{c^2}{2} \frac{\text{sen}^2 \sigma}{(\cosh \tau - \cos \sigma)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \text{senh} [n(\tau - \beta)] \text{sen}(n\sigma) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \text{senh} [n(\alpha - \tau)] \text{sen}(n\sigma) \right] d\sigma d\tau. \quad (6.28)$$

Sabendo-se que

$$\int_{\beta}^{\alpha} \int_0^{\pi} \frac{\text{sen}^2 \sigma}{(\cosh \tau - \cos \sigma)^4} d\sigma d\tau = \frac{\pi}{2} \int_{\beta}^{\alpha} \frac{\cosh \tau}{\text{senh}^5 \tau} d\tau = -\frac{\pi}{8} (\text{csch}^4 \alpha - \text{csch}^4 \beta), \quad (6.29)$$

$$\int_{\beta}^{\alpha} \int_0^{\pi} \frac{\text{senh} [n(\tau - \beta)] \text{sen}(n\sigma)}{(\cosh \tau - \cos \sigma)^2} d\sigma d\tau = \int_{\beta}^{\alpha} \text{senh} [n(\tau - \beta)] I_n(\tau) d\tau, \quad (6.30)$$

e

$$\int_{\beta}^{\alpha} \int_0^{\pi} \frac{\text{senh} [n(\alpha - \tau)] \text{sen}(n\sigma)}{(\cosh \tau - \cos \sigma)^2} d\sigma d\tau = \int_{\beta}^{\alpha} \text{senh} [n(\alpha - \tau)] I_n(\tau) d\tau, \quad (6.31)$$

tem-se

$$Q = c^2 \sum_{n=1}^{\infty} [A_n S_n(\beta) - B_n S_n(\alpha)] + \frac{\pi c^4}{16} (\text{csch}^4 \alpha - \text{csch}^4 \beta), \quad (6.32)$$

onde

$$S_n(\tau') = \int_{\beta}^{\alpha} \text{senh} [n(\tau - \tau')] I_n d\tau. \quad (6.33)$$

6.3 Número de Poiseuille

Nessa seção, será retomada a atenção para o número de Poiseuille, conforme previamente definido na Seção 4.3. Este parâmetro também será importante para a descrição dos fenômenos envolvidos no escoamento interno entre dois semicilindros excêntricos. Apesar das alterações na posição do semicilindro menor, é importante notar que a geometria (área e perímetro) permanecerão inalteradas (Figura 6.2). Nesse contexto, torna-se possível aplicar a Equação 4.64, que foi desenvolvida anteriormente para o caso de semicilindros concêntricos.

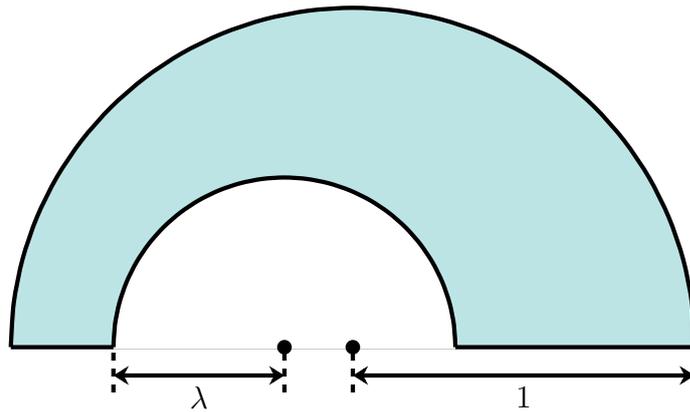


Figura 6.2: Geometria do problema na forma adimensional.

Retomando a fórmula apresentada anteriormente, tem-se:

$$Po = \frac{8A^3}{P^2Q}. \quad (6.34)$$

onde

$$A = \frac{\pi(1 - \lambda^2)}{2} \quad (6.35)$$

e

$$P = 2(1 - \lambda) + \pi(1 + \lambda). \quad (6.36)$$

Capítulo 7

Análise dos resultados- caso excêntrico

Com base nos resultados obtidos anteriormente, é possível elaborar uma tabela com os principais dados obtidos através das equações (6.32) e (6.34), ao se variar a excentricidade e a razão de aspecto. Essa tabela apresenta os valores da vazão (Q) e do número de Poiseuille (Po).

Tabela 7.1: Parâmetro analisados

ϵ	0.1		0.2		0.3	
λ	Q	Po	Q	Po	Q	Po
0.1	0.0698	15.6049	0.0699	15.5723	0.0702	15.5186
0.2	0.0592	16.0591	0.0596	15.9519	0.0603	15.7781
0.3	0.0463	16.7931	0.0468	16.5875	0.0478	16.2593
0.4	0.0332	17.6668	0.0338	17.3492	0.0348	16.8496
0.5	0.0215	18.6133	0.0221	18.1770	0.0229	17.4997
0.6	0.0122	19.5983	0.0126	19.0416	0.0132	18.1871
0.7	0.0057	20.6033	0.0058	19.9277	0.0062	18.9005
0.8	0.0018	21.61684541	0.0019	20.8265	0.0020	19.6338
0.9	0.0002	22.6322	0.0003	21.7311	0.0003	20.3825
ϵ	0.4		0.5		0.6	
λ	Q	Po	Q	Po	Q	Po
0.1	0.0705	15.4450	0.0709	15.3529	0.0714	15.2447
0.2	0.0612	15.5445	0.0623	15.2603	0.0637	14.9368
0.3	0.0491	15.8281	0.0507	15.3179	0.0527	14.7550
0.4	0.0362	16.2067	0.0379	15.4651	0.0400	14.6688
0.5	0.0241	16.6438	0.0256	15.6772	0.0273	14.6625
0.6	0.0140	17.1234	0.0150	15.9429	0.0163	14.7262
0.7	0.0066	17.6378	0.0072	16.2564	0.0078	14.8537
0.8	0.0022	18.1829	0.0024	16.6143	0.0026	15.0411

0.9	0.0003	18.7553	0.0003	17.0134	0.0004	15.2841
ϵ	0.7		0.8		0.9	
λ	Q	Po	Q	Po	Q	Po
0.1	0.07202	15.1233	0.0726	14.9937	0.0733	14.860
0.2	0.0652	14.587	0.0669	14.2259	0.0686	13.870
0.3	0.0548	14.166	0.0572	13.5752	0.0597	13.005
0.4	0.0423	13.857	0.0449	13.0631	0.0476	12.310
0.5	0.0294	13.651	0.0316	12.6793	0.0341	11.772
0.6	0.0177	13.534	0.0193	12.4083	0.0211	11.371
0.7	0.0086	13.500	0.0095	12.2371	0.0105	11.087
0.8	0.0029	13.540	0.0032	12.1561	0.0036	10.907
0.9	0.0004	13.650	0.0005	12.1554	0.0005	10.807

A partir dos dados apresentados na Tabela 7.1, plotou-se o gráfico da vazão (Q) em função da razão de aspecto (λ) para nove valores de excentricidade: 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8 e 0.9 (Figura 7.1). A curva obedece a equação (6.32) e observa-se um comportamento decrescente e não linear para todas as excentricidades. A tendência observada é a mesma daquela obtida no caso concêntrico, onde a vazão varia de 0 a $\pi/8 - 1/\pi$, respeitando o limite assintótico estabelecido na equação (4.68). Essa variação é resultante da diminuição da área, em ambos os casos, com o aumento da razão de aspecto. Por fim, nota-se também a diminuição da vazão com o decrescimento da excentricidade. Esse fenômeno é atribuído a assimetria gerada pelo deslocamento do semicilindro interno para um dos lados. Essa assimetria gera uma disparidade de espaço, onde um dos lados apresenta uma maior separação entre as paredes. Isso possibilita que o fluido desenvolva velocidades mais elevadas, resultando em uma vazão mais expressiva.

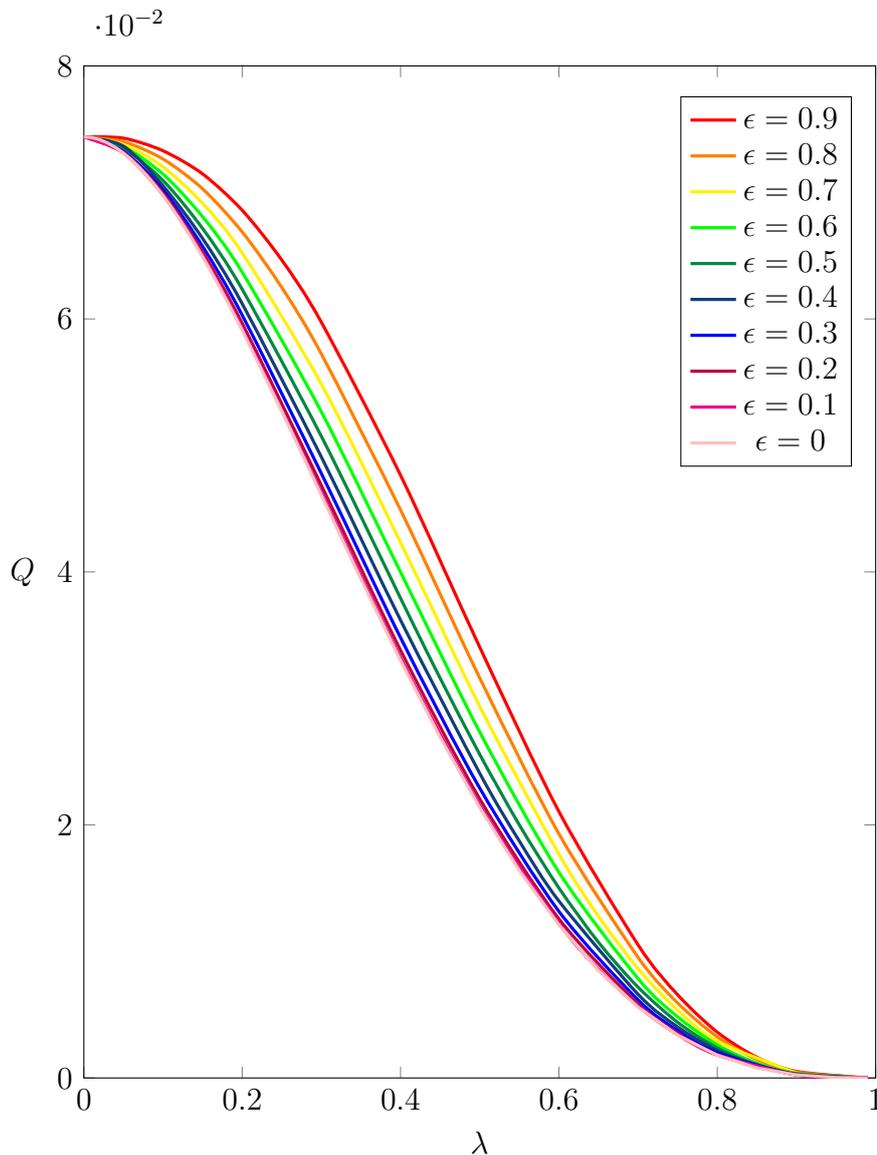


Figura 7.1: Representação gráfica da vazão (Q) em função da razão de aspecto (λ). As curvas variam de 0 a 0.9 com incrementos de 0.1 de cima para baixo.

Em seguida, plotou-se os campos de velocidade adimensionais na para diferentes seções semicilíndricas excêntricas correspondentes às excentricidades $\epsilon = 0.2$, $\epsilon = 0.4$, $\epsilon = 0.6$ e $\epsilon = 0.8$. Os painéis (a), (b), (c) e (d) das Figuras 7.2, 7.3, 7.4 e 7.5 representam, respectivamente, as razões de aspecto $\lambda = 0$, $\lambda = 0.25$, $\lambda = 0.5$ e $\lambda = 0.75$. É importante lembrar que o painel (a) já havia sido resolvido anteriormente no Capítulo 5, onde há apenas um semicilindro.

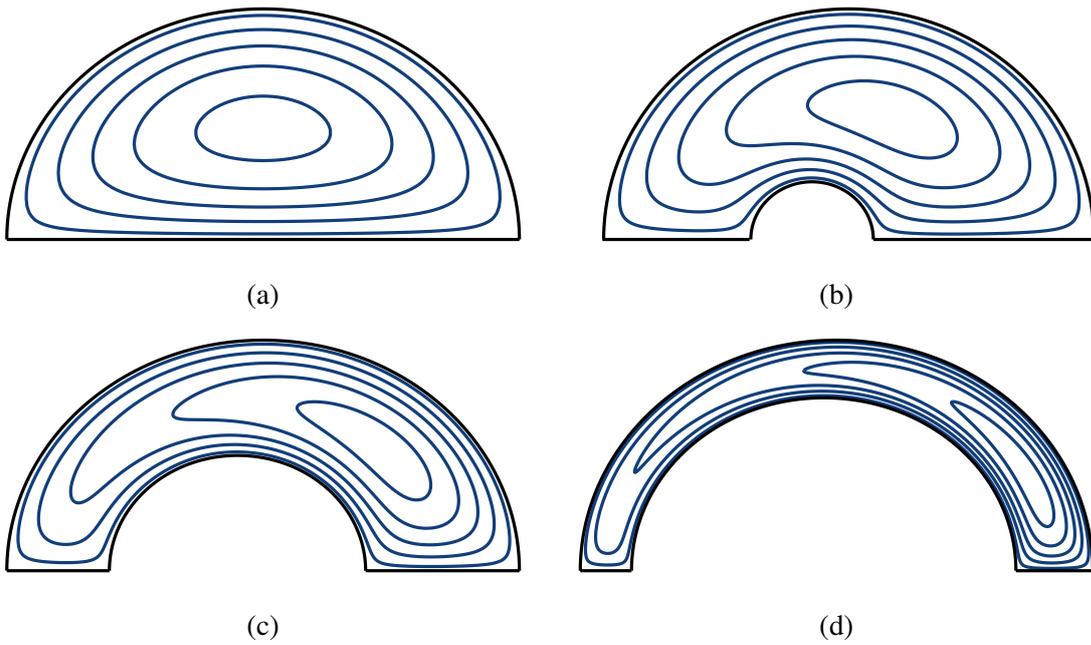


Figura 7.2: Campos de velocidades adimensionais em coordenadas bipolares para dutos semicilíndricos com excentricidade $\epsilon = 0.2$ e valores de λ iguais a (a) 0, (b) 0.25, (c) 0.5 e (d) 0.75.

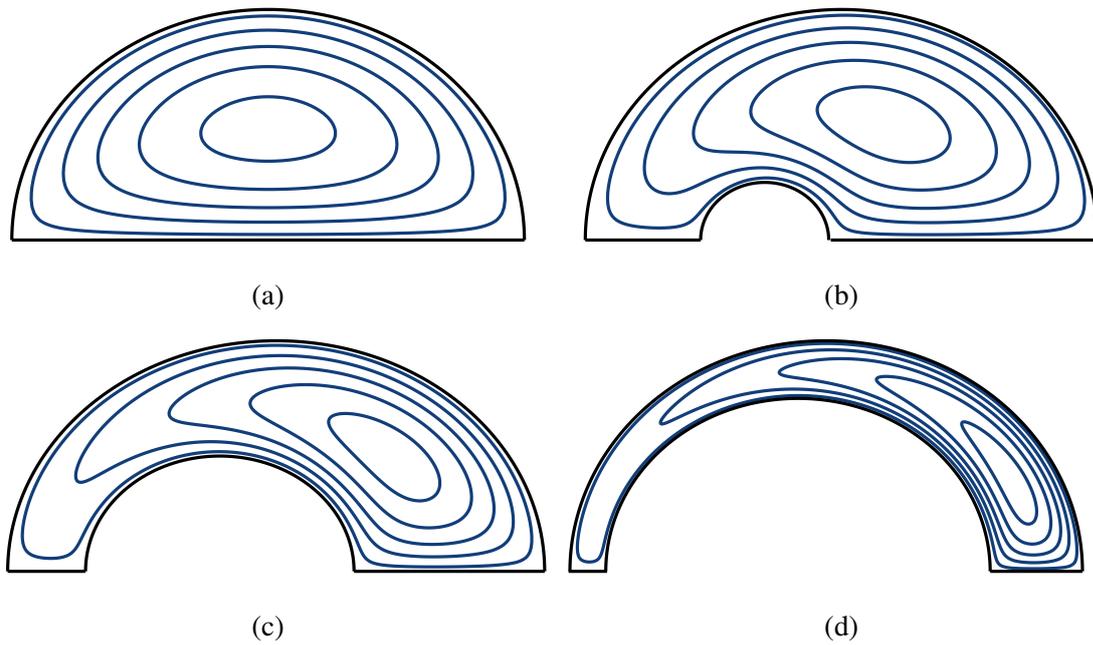


Figura 7.3: Campos de velocidades adimensionais em coordenadas bipolares para dutos semicilíndricos com excentricidade $\epsilon = 0.4$ e valores de λ iguais a (a) 0, (b) 0.25, (c) 0.5 e (d) 0.75.

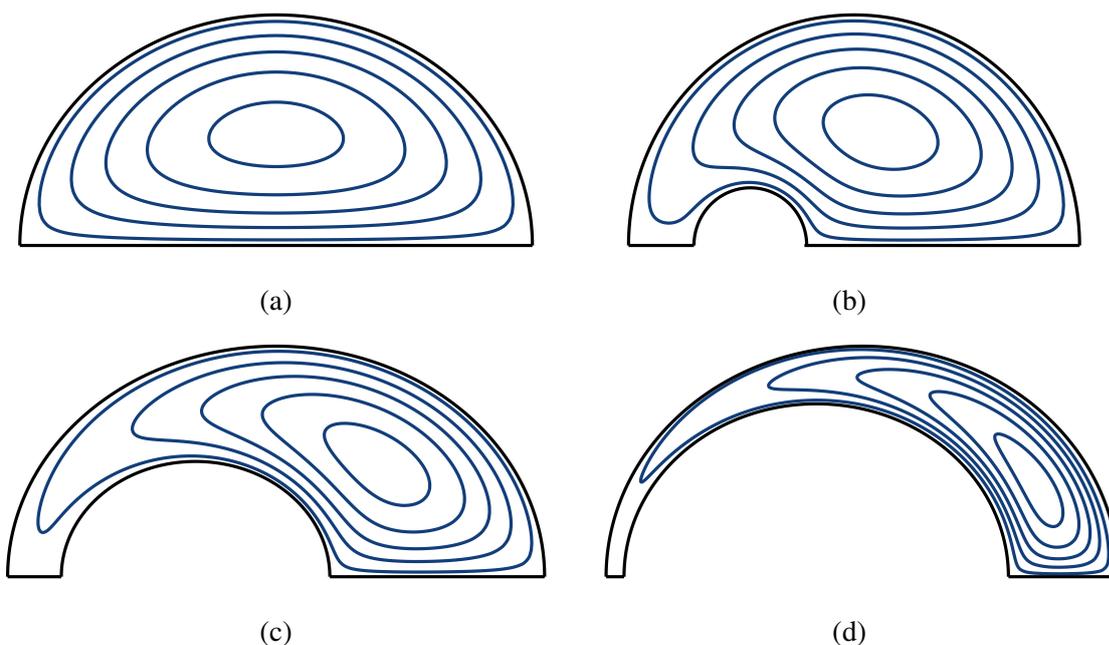


Figura 7.4: Campos de velocidades adimensionais em coordenadas bipolares para dutos semicilíndricos com excentricidade $\epsilon = 0.6$ e valores de λ iguais a (a) 0, (b) 0.25, (c) 0.5 e (d) 0.75.

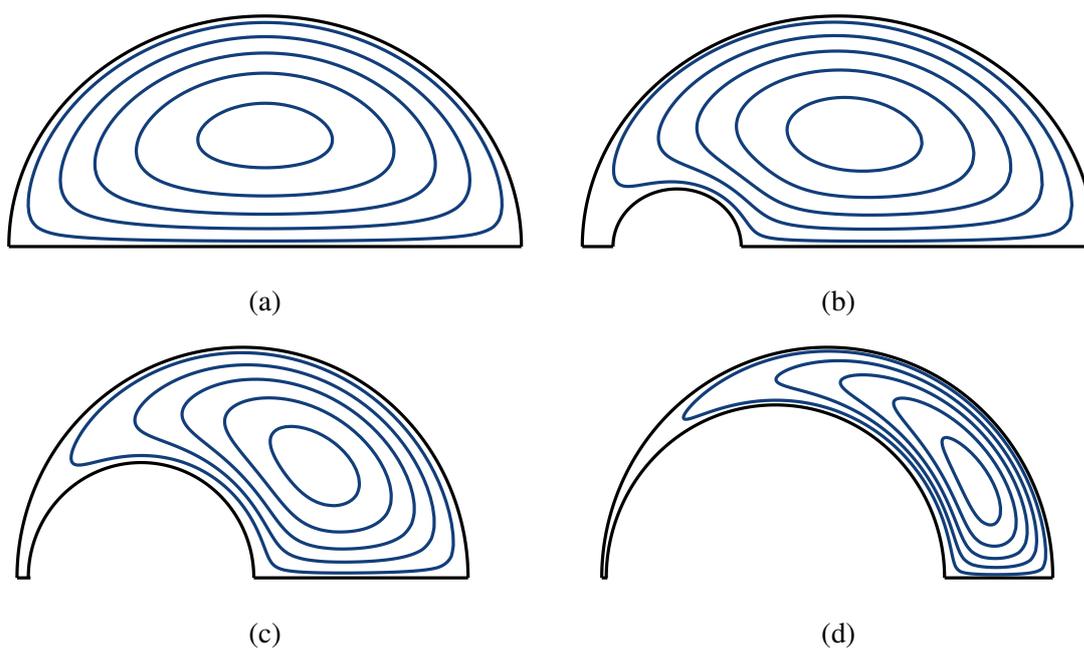


Figura 7.5: Campos de velocidades adimensionais em coordenadas bipolares para dutos semicilíndricos com excentricidade $\epsilon = 0.8$ e valores de λ iguais a (a) 0, (b) 0.25, (c) 0.5 e (d) 0.75.

Em todas as representações, foram traçadas 5 linhas de contorno igualmente espaçadas, variando de forma normalizada de 0.1 até 0.9, em incrementos de 0.2. Observa-se que as velocidades mais baixas estão concentradas em regiões mais próximas às paredes, devido à condição de não deslizamento. Além disso, ao contrário do caso concêntrico, as maiores

velocidades não são encontradas na região central da seção do tubo. Elas seguem a tendência da excentricidade como se tivessem sido deslocadas. Esse comportamento sugere que, ao movimentar o semicilindro interno, ocorre uma redistribuição do campo de velocidade, intensificando o fluxo nas regiões em que as paredes estão mais separadas. As velocidades máximas adimensionais para cada uma das excentricidades e razão de aspecto são mostradas na tabela a seguir (Tabela 7.2).

λ/ϵ	0.2	0.4	0.6	0.8
0.0	0.1	0.1	0.1	0.1
0.25	0.08	0.0810	0.0869	0.0915
0.5	0.0384	0.0464	0.0544	0.0619
0.75	0.0106	0.0138	0.0173	0.0210

Tabela 7.2: Velocidades máximas adimensionais

Para calcular o número de Poiseuille, utilizou-se o auxílio do software Maple 2023 para realizar os cálculos seguindo a Equação (6.34). Foram utilizados 100 pontos para realizar o cálculo do somatório para a maioria das excentricidades e razões de aspecto. Porém, já era possível observar uma convergência em 40 pontos em 3 casas decimais. Por exemplo, para $\epsilon = 0.2$ e $\lambda = 0.5$, para diferentes valores de n , tem-se:

$$\begin{aligned}
 n = 10 &\rightarrow Po = 18.140 \\
 n = 20 &\rightarrow Po = 18.174 \\
 n = 40 &\rightarrow Po = 18.177 \\
 n = 80 &\rightarrow Po = 18.177 \\
 n = 100 &\rightarrow Po = 18.177 \\
 n = 150 &\rightarrow Po = 18.177
 \end{aligned}$$

Por fim, foi gerado um gráfico número de Poiseuille em função da razão de aspecto para diferentes excentricidades. Nota-se que a função possui um comportamento monótono decrescente para excentricidades 0.7, 0.8 e 0.9. Para os outros valores de excentricidade, é possível observar que a função apresenta comportamento inicialmente decrescente, possuindo um ponto de inflexão para razões de aspecto próximas de zero e depois apresentando um comportamento crescente. Além disso, vale ressaltar que comparando razões de aspecto iguais, quanto maior a excentricidade, menor o número de Poiseuille. As curvas seguem a mesma tendência apresentada no caso concêntrico, convergindo para a Equação (4.69) quando a razão de aspecto se aproxima de zero.

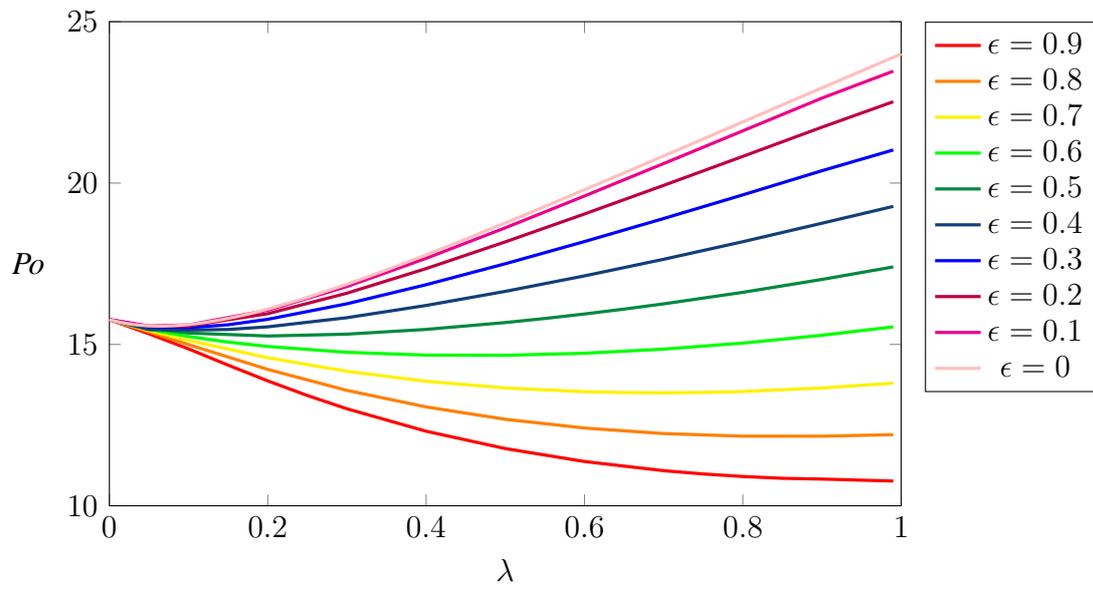


Figura 7.6: Representação gráfica do número de Poiseuille (Po) em função da razão de aspecto (λ). As curvas variam de 0 a 0.9 com incrementos de 0.1 de baixo para cima.

Capítulo 8

Conclusão

Neste trabalho, desenvolveram-se soluções analíticas exatas para dutos semianulares concêntricos e excêntricos. Primeiramente, foi realizada uma análise cuidadosa do sistema de coordenadas apropriado para cada caso, utilizando-se coordenadas polares e bipolares para os casos concêntrico e excêntrico, respectivamente. Em seguida, apresentaram-se as formulações matemáticas, adimensionalizando as equações governantes e utilizando o método de separação de variáveis. Isso permitiu a obtenção das expressões analíticas exatas para a velocidade, vazão e para o número de Poiseuille.

A partir da solução obtida, destacou-se a influência significativa da razão de aspecto em todos os parâmetros estudados: área, perímetro molhado, vazão volumétrica, velocidade de número de Poiseuille. A convergência dos parâmetros no caso excêntrico com os do caso concêntrico, à medida que a razão de aspecto se aproxima de zero, valida a consistência e das soluções obtidas. Essa convergência reforça a compreensão de que, com razões de aspecto muito pequenas, o sistema se assemelha ao caso mais simples, onde apenas um semicilindro está presente. Esse caso já havia sido resolvido por [Alassar \(2011\)](#) e a comparação entre os dois trabalhos ajudou na validação do método utilizado. Além disso, a aproximação dos resultados dos dois casos a medida que a excentricidade se aproxima de zero, valida as soluções propostas.

A solução analítica exata para o caso do escoamento entre dois semicilindros concêntricos já havia sido apresentada na literatura por [Shah e London \(1978\)](#) e [Kyritsi-Yiallourou e Georgiou \(2018\)](#). A análise comparativa com esses trabalhos, destaca a convergência dos resultados, embora pequenas discrepâncias tenham sido observadas quando λ tende a zero, visto que os valores obtidos para a vazão são muitos pequenos e as imprecisões numéricas tornam-se mais suscetíveis. Essas discrepâncias ressaltam a importância de uma análise cuidadosa para casos extremos.

Este trabalho se destaca por apresentar uma solução analítica exata inédita para o escoamento de Hagen-Poiseuille entre dois semicilindros excêntricos, utilizando a função transcendental de Lerch. Essa contribuição representa uma novidade na literatura científica, pro-

porcionando uma descrição detalhada e precisa do fenômeno. Por fim, esse estudo contribui com pesquisas futuras na obtenção de soluções por meio de outros métodos ou para geometrias semelhantes.

Referências Bibliográficas

- 1 JAIN, A. et al. A shear gradient-activated microfluidic device for automated monitoring of whole blood haemostasis and platelet function. *Nature Communications*, Nature Publishing Group UK London, v. 7, n. 1, p. 10176, 2016.
- 2 WHITE, F. M.; MAJDALANI, J. *Viscous Fluid Flow*. [S.l.]: McGraw-Hill New York, 2006.
- 3 KYRITSI-YIALLOUROU, S.; GEORGIU, G. C. Newtonian Poiseuille flow in ducts of annular-sector cross-sections with Navier slip. *European Journal of Mechanics - B/Fluids*, v. 72, p. 87–102, 2018. ISSN 0997-7546. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0997754618302279>.
- 4 KULASINGHE, A. et al. The use of microfluidic technology for cancer applications and liquid biopsy. *Micromachines*, MDPI, v. 9, n. 8, p. 397, 2018.
- 5 NEETHIRAJAN, S. et al. Microfluidics for food, agriculture and biosystems industries. *Lab on a Chip*, v. 11, p. 1574–86, 03 2011.
- 6 ALASSAR, R. Hagen-Poiseuille flow in tubes of semi-circular cross-sections. In: *IEEE. 2011 Fourth International Conference on Modeling, Simulation and Applied Optimization*. [S.l.], 2011. p. 1–2.
- 7 WANG, C. Exact solutions of the steady-state Navier-Stokes equations. *Annual Review of Fluid Mechanics*, v. 23, n. 1, p. 159–177, 1991.
- 8 LIN, M.; WANG, Q.; TAO, W. Developing laminar flow and heat transfer in annular-sector ducts. *Heat Transfer Engineering*, Taylor & Francis, v. 21, n. 2, p. 53–61, 2000.
- 9 WANG, C.-Y.; LIU, Y.-H.; CHANG, C. C. Analytical solution of electro-osmotic flow in a semicircular microchannel. *Physics of Fluids - PHYS FLUIDS*, v. 20, 06 2008.
- 10 SPARROW, E.; CHEN, T.; JONSSON, V. Laminar flow and pressure drop in internally finned annular ducts. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 7, n. 5, p. 583–585, 1964. ISSN 0017-9310. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0017931064900560>.
- 11 BOUSSINESQ, J. Mémoire sur l'influence des frottements dans les mouvements réguliers des fluides. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, v. 13, n. 2, p. 377–424, 1868.
- 12 SHAH, R. K.; LONDON, A. L. *Laminar Flow Forced Convection in Ducts: A Source Book for Compact Heat Exchanger Analytical Data*. [S.l.]: Academic Press, 1978.

- 13 ETEMAD, S. G.; MUJUMDAR, A. Effects of variable viscosity and viscous dissipation on laminar convection heat transfer of a power law fluid in the entrance region of a semi-circular duct. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Elsevier, v. 38, n. 12, p. 2225–2238, 1995.
- 14 LIN, M.; TAO, W.; LUE, S. Study on friction factor of developing and developed laminar flow in annular-sector ducts. *Journal of Thermal Science*, Springer, v. 4, p. 180–184, 1995.
- 15 KUNDU, K.; SARKAR, U. Analytical and numerical investigation of Poiseuille flow through semi-elliptic annulus. *Physics of Fluids*, AIP Publishing, v. 34, n. 8, 2022.
- 16 LOPES, A. v. B.; SIQUEIRA, I. Couette–Poiseuille flow in semi-elliptic channels. *Journal of Fluids Engineering*, American Society of Mechanical Engineers, v. 144, n. 10, p. 101302, 2022.
- 17 ALASSAR, R. S.; ABUSHOSHAH, M. *Hagen–Poiseuille flow in semi-elliptic microchannels*. [S.l.]: American Society of Mechanical Engineers, 2012.
- 18 WANG, C. On viscous flow in semi-elliptic ducts. *Journal of Fluids Engineering*, American Society of Mechanical Engineers, v. 137, n. 11, p. 114502, 2015.
- 19 BACELAR, M. D. et al. Hagen-poiseuille flow in a quarter-elliptic tube. *Fluids*, MDPI, v. 8, n. 9, p. 247, 2023.
- 20 MURAKAWA, K. Theoretical solutions of heat transfer in the hydrodynamic entrance length of double pipes. *Bulletin of JSME*, The Japan Society of Mechanical Engineers, v. 3, n. 11, p. 340–345, 1960.
- 21 REHME, K. Turbulent flow in smooth concentric annuli with small radius ratios. *Journal of Fluid Mechanics*, Cambridge University Press, v. 64, n. 2, p. 263–288, 1974.
- 22 CHUNG, S. Y.; RHEE, G. H.; SUNG, H. J. Direct numerical simulation of turbulent concentric annular pipe flow. In: BEGEL HOUSE INC. *Second Symposium on Turbulence and Shear Flow Phenomena*. [S.l.], 2001.
- 23 MACDONALD, H. On the torsional strength of a hollow shaft. In: *Proc. Cambridge Philos. Soc.* [S.l.: s.n.], 1893. v. 8, p. 62–68.
- 24 HEYDA, J. F. A Green's function solution for the case of laminar incompressible flow between non-concentric circular cylinders. *Journal of the Franklin Institute*, Elsevier, v. 267, n. 1, p. 25–34, 1959.
- 25 GUCKES, T. Laminar flow of non-Newtonian fluids in an eccentric annulus. 1975.
- 26 MACDONALD, D. Fully developed incompressible flow between non-coaxial circular cylinders. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik ZAMP*, Springer, v. 33, n. 6, p. 737–751, 1982.
- 27 HACIISLAMOGLU, M.; LANGLINAIS, J. Non-Newtonian flow in eccentric annuli. 1990.
- 28 SAAD, A. S.; MAHFOUZ, F. M. Heat conduction within eccentric annulus with internal heat generation. *ERJ. Engineering Research Journal*, Menoufia University, Faculty of Engineering, 2023.

- 29 OCKENDON, H.; OCKENDON, J. R. *Viscous Flow*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1995. (Cambridge Texts in Applied Mathematics).
- 30 ARFKEN, G. B.; WEBER, H. J. *Mathematical Methods for Physicists*. [S.l.]: American Association of Physics Teachers, 1999.
- 31 BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. *Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno*. [S.l.]: LTC Rio de Janeiro, 2010.
- 32 BATEMAN, H. *Higher transcendental functions [volumes i-iii]*. [S.l.]: McGRAW-HILL book company, 1953.

Apêndice A

Coordenadas bipolares

A.1 Curva com σ constante

Sabe-se que a transformação de coordenada cartesiana (x, y) para coordenadas bipolares é realizada através da seguinte relação

$$x = c \frac{\sinh \tau}{\cosh \tau - \cos \sigma} \quad (\text{A.1})$$

e

$$y = c \frac{\sin \sigma}{\cosh \tau - \cos \sigma}. \quad (\text{A.2})$$

A partir dessa relações, é fácil ver que

$$\sin \sigma = \frac{y}{x} \sinh \tau \quad (\text{A.3})$$

e

$$\cos \sigma = \cosh \tau - \frac{c \sinh \tau}{x}. \quad (\text{A.4})$$

Substituindo (A.3) e (A.4) na identidade trigonométrica fundamental

$$\sin^2 \sigma + \cos^2 \sigma = 1, \quad (\text{A.5})$$

tem-se

$$\left(\frac{y}{x} \sinh \tau\right)^2 + \left(\cosh \tau - \frac{c \sinh \tau}{x}\right)^2 = 1. \quad (\text{A.6})$$

Multiplicando, agora, ambos os lados da equação por x^2 , tem-se

$$(y \sinh \tau)^2 + (x \cosh \tau - c \sinh \tau)^2 = x^2, \quad (\text{A.7})$$

ou seja,

$$c^2 \sinh \tau^2 + y^2 \sinh \tau^2 - 2cx \sinh \tau \cosh \tau + \cosh \tau^2 x^2 - x^2 = 0. \quad (\text{A.8})$$

Pela relação fundamental da trigonometria hiperbólica,

$$\cosh \tau^2 = 1 - \sinh^2 \tau, \quad (\text{A.9})$$

temos que

$$c^2 \sinh \tau^2 + y^2 \sinh \tau^2 - 2cx \sinh \tau \cosh \tau + (1 - \sinh \tau^2)x^2 - x^2 = 0, \quad (\text{A.10})$$

ou seja,

$$\sinh \tau^2 x^2 + c^2 \sinh \tau^2 + y^2 \sinh \tau^2 - 2cx \sinh \tau \cosh \tau = 0. \quad (\text{A.11})$$

Dividindo ambos os lados por $\sinh^2 \tau$, tem-se

$$x^2 + c^2 + y^2 - 2cx \coth \tau = 0. \quad (\text{A.12})$$

Por fim, pode-se somar $\coth \tau^2 c^2 - c^2$ em ambos os lados das equação com o intuito de completar quadrados

$$x^2 - 2cx \coth \tau + \coth \tau^2 c^2 + y^2 = \coth \tau^2 c^2 - c^2, \quad (\text{A.13})$$

donde segue que

$$(x - c \coth \tau)^2 + y^2 = \frac{c^2}{\sinh^2 \tau}. \quad (\text{A.14})$$

A.2 Curva com τ constante

Pelas equações (A.3) e (A.4), obtem-se

$$\sinh \tau = \frac{x}{y} \operatorname{sen} \sigma \quad (\text{A.15})$$

e

$$\cosh \tau = \cos \sigma + \frac{c \operatorname{sen} \sigma}{y}. \quad (\text{A.16})$$

Ao substituírmos (A.15) e (A.16) na relação fundamental da trigonometria hiperbólica (A.9), tem-se

$$\left(\cos \sigma + \frac{c \operatorname{sen} \sigma}{y} \right)^2 - \frac{x^2}{y^2} \operatorname{sen}^2 \sigma = 1, \quad (\text{A.17})$$

Simplificando a equação, chega-se a

$$\cos^2 \sigma + \frac{2c \operatorname{sen} \sigma \cos \sigma}{y} + \frac{c^2 \operatorname{sen}^2 \sigma}{y^2} - \frac{x^2}{y^2} \operatorname{sen}^2 \sigma = 1. \quad (\text{A.18})$$

Multiplicando ambos os lados da equação por y^2 , encontra-se

$$y^2 \cos^2 \sigma + 2cy \operatorname{sen} \sigma \cos \sigma + c^2 \operatorname{sen}^2 \sigma - x^2 \operatorname{sen}^2 \sigma = y^2, \quad (\text{A.19})$$

Aplicando uma identidade trigonométrica fundamental (A.5), tem-se

$$-\operatorname{sen}^2 \sigma y^2 + 2cy \operatorname{sen} \sigma \cos \sigma + c^2 \operatorname{sen}^2 \sigma - x^2 \operatorname{sen}^2 \sigma = 0. \quad (\text{A.20})$$

Dividindo ambos os lados por $-\operatorname{sen}^2 \sigma$, obtém-se

$$x^2 + y^2 - 2cy \cot \sigma = c^2. \quad (\text{A.21})$$

Por fim, ao completar quadrados e reorganizar os termos, tem-se

$$x^2 + (y - \cot \sigma)^2 = \frac{c^2}{\operatorname{sen}^2 \sigma}. \quad (\text{A.22})$$

A.3 Excentricidade

Conforme demonstrado na [Seção 3.4](#), a excentricidade é dada por

$$\epsilon = \frac{\sqrt{1+c^2} - \sqrt{\lambda^2+c^2}}{1-\lambda}. \quad (\text{A.23})$$

Multiplicando tanto no numerador quanto no denominador da fração por $\sqrt{c^2+1} + \sqrt{c^2+\lambda^2}$, segue que

$$\epsilon = \frac{1+\lambda}{\sqrt{1+c^2} + \sqrt{\lambda^2+c^2}}. \quad (\text{A.24})$$

Ao manipular as equações (A.23) e (A.24), obtemos

$$\epsilon(1-\lambda) = \sqrt{1+c^2} - \sqrt{\lambda^2+c^2} \quad (\text{A.25})$$

e

$$\frac{1+\lambda}{\epsilon} = \sqrt{1+c^2} + \sqrt{\lambda^2+c^2}, \quad (\text{A.26})$$

respectivamente. Somando as equações (A.25) e (A.26), é fácil ver que

$$\epsilon(1-\lambda) + \frac{1+\lambda}{\epsilon} = 2\sqrt{1+c^2}. \quad (\text{A.27})$$

Elevando ambos os lados da equação anterior ao quadrado e realizando algumas manipula-

ções algébricas, obtemos

$$\frac{1}{4} \left[\epsilon^2(1-\lambda)^2 + 2(1-\lambda)(1+\lambda) + \left(\frac{1+\lambda}{\epsilon} \right)^2 - 4 \right] = c^2, \quad (\text{A.28})$$

ou seja,

$$c^2 = \frac{(1-\lambda)^2}{4\epsilon^2} \left[\epsilon^4 + 2 \left(\frac{1+\lambda}{1-\lambda} \right) \epsilon^2 + \left(\frac{1+\lambda}{1-\lambda} \right)^2 - \frac{4\epsilon^2}{(1-\lambda)^2} \right]. \quad (\text{A.29})$$

Mas,

$$2 \left(\frac{1+\lambda}{1-\lambda} \right) \epsilon^2 - \frac{4\epsilon^2}{(1-\lambda)^2} = -2\epsilon^2 \frac{(1+\lambda^2)}{(1-\lambda)^2} \quad (\text{A.30})$$

e

$$\epsilon^4 - 2\epsilon^2 \frac{(1+\lambda^2)}{(1-\lambda)^2} + \left(\frac{1+\lambda}{1-\lambda} \right)^2 = (1-\epsilon^2) \left[\left(\frac{1+\lambda}{1-\lambda} \right)^2 - \epsilon^2 \right]. \quad (\text{A.31})$$

Logo,

$$c^2 = \frac{(1-\lambda)^2}{4\epsilon^2} (1-\epsilon^2) \left[\left(\frac{1+\lambda}{1-\lambda} \right)^2 - \epsilon^2 \right]. \quad (\text{A.32})$$

Extraindo a raiz quadrada em ambos os lados, chegamos à

$$c = \left(\frac{1-\lambda}{2\epsilon} \right) \sqrt{1-\epsilon^2} \sqrt{\left(\frac{1+\lambda}{1-\lambda} \right)^2 - \epsilon^2}, \quad (\text{A.33})$$

como queríamos demonstrar.