



**Universidade de Brasília  
Faculdade de Tecnologia**

**Uma investigação sobre metamateriais  
na amplificação mecânica para  
sensoriamento em dutos**

Lucas Mauro Silva

**PROJETO DE GRADUAÇÃO  
ENGENHARIA MECÂNICA**

Brasília  
2023

**Universidade de Brasília  
Faculdade de Tecnologia**

**Uma investigação sobre metamateriais  
na amplificação mecânica para  
sensoriamento em dutos**

Lucas Mauro Silva

Projeto de graduação submetido como requi-  
sito parcial para obtenção do grau de Enge-  
nheiro Mecânico

Orientador: Prof. Dr. Adriano Todorovic Fabro

Brasília  
2023

S000u Silva, Lucas Mauro.  
Uma investigação sobre metamateriais na amplificação mecânica para sensoriamento em dutos / Lucas Mauro Silva; orientador Adriano Todorovic Fabro. -- Brasília, 2023.  
87 p.

Projeto de Graduação (Engenharia Mecânica) -- Universidade de Brasília, 2023.

1. Metamaterial. 2. Simulação numérica. 3. Método do elemento Espectral. 4. Dutos. I. Fabro, Adriano Todorovic, orient.  
II. Título

**Universidade de Brasília  
Faculdade de Tecnologia**

**Uma investigação sobre metamateriais  
na amplificação mecânica para  
sensoriamento em dutos**

Lucas Mauro Silva

Projeto de graduação submetido como requisito parcial para obtenção do grau de Engenheiro Mecânico

Trabalho aprovado. Brasília, 27 de novembro de 2023:

---

**Prof. Dr. Adriano Todorovic Fabro,**  
**UnB/FT/ENM**  
Orientador

---

**Dra. Lais Bittencourt Visnadi,**  
**UnB/FT/PCMEC**  
Examinador interno

---

**Prof. Dr. Alberto Carlos Guimarães  
Castro Diniz, UnB/FT/ENM**  
Examinador interno

Brasília  
2023

*Este trabalho é dedicado às crianças adultas que,  
quando pequenas, sonharam em se tornar cientistas.*

# Agradecimentos

Primeiramente, gostaria de expressar meu profundo agradecimento aos meus pais, Fernando e Renata, à minha irmã, Kelly, e à minha namorada, Lorrany, por seu constante incentivo e apoio incondicional ao longo desta jornada. Não posso deixar de mencionar meus amigos, Carlos e Eduarda, pela companhia e apoio durante meu percurso acadêmico.

Por último, mas não menos importante, quero estender minha gratidão ao meu orientador, o Prof. Dr. Adriano Todorovic Fabro, por aceitar o desafio de me orientar neste trabalho, bem como pela dedicação e paciência ao longo desse processo.

*“If you find that you’re spending almost all your time on theory,  
start turning some attention to practical things;  
it will improve your theories.  
If you find that you’re spending almost all your time on practice,  
start turning some attention to theoretical things;  
it will improve your practice.”  
(Donald Knuth)*

# Resumo

A utilização de ressonadores fabricados com metamateriais parece ser fundamental para alcançar altas taxas de amplificação. Este estudo investiga a aplicação de metamateriais de índice gradiente (GRIN) na amplificação mecânica de vibrações, visando aprimorar a detecção em dutos. Inicialmente, é conduzida uma revisão abrangente dos princípios teóricos fundamentais, fornecendo a base para esta pesquisa. Em seguida, simulações numéricas são realizadas utilizando o método do elemento espectral para explorar o comportamento das ondas mecânicas em dutos, abordando diversas condições, com destaque para a composição parcial de metamaterial. Por fim, os resultados obtidos são minuciosamente analisados e discutidos, oferecendo insights significativos para futuras investigações.

**Palavras-chave:** Metamaterial. Simulação numérica. Método do elemento Espectral. Dutos.

# Abstract

The use of resonators manufactured with metamaterials appears to be crucial in achieving high amplification rates. This study investigates the application of gradient index metamaterials (GRIN) in the mechanical amplification of vibrations, aiming to enhance detection in ducts. Initially, a comprehensive review of fundamental theoretical principles is conducted, providing the groundwork for this research. Subsequently, numerical simulations are performed using the spectral element method to explore the behavior of mechanical waves in ducts, addressing various conditions, particularly focusing on partial metamaterial composition. Finally, the obtained results are thoroughly analyzed and discussed, offering significant insights for future investigations.

**Keywords:** Metamaterial. Numeric simulation. Spectral element method. Pipes.

## Lista de figuras

Figura 1.1	Esquemático do modelo estudado por (Chen <i>et al.</i> , 2016) . . . . .	17
Figura 2.1	Esquemático do metamaterial apresentado por (Shelby; Smith; Schultz, 2001) . . . . .	19
Figura 2.2	Esquemático do metamaterial proposto por (Chen <i>et al.</i> , 2016) . . . . .	20
Figura 2.3	Fluxograma geral do método do elemento espectral. . . . .	25
Figura 2.4	Movimento de uma partícula . . . . .	26
Figura 2.5	Sólido genérico . . . . .	29
Figura 2.6	Diferencial de sólido . . . . .	29
Figura 2.7	DCL de um diferencial de duto . . . . .	32
Figura 2.8	DCL de um diferencial de fluido . . . . .	32
Figura 2.9	Convenção de sinal para o duto. . . . .	39
Figura 3.1	Esquemático de uma configuração de duto padrão. . . . .	42
Figura 3.2	Disposição dos pontos de controle. . . . .	43
Figura 3.3	Esquemático da configuração do final do duto com ressonadores. . . . .	43
Figura 3.4	Distâncias entre os elementos ilustrados no esquemático final. . . . .	44
Figura 3.5	Esquemático de um elemento de duto. . . . .	44
Figura 3.6	Esquemático da união de dois elementos de duto. . . . .	44
Figura 3.7	Matriz de rigidez no caso de união de dois elementos. . . . .	45
Figura 3.8	Esquemático da união de dois elemento de duto com um ressonador entre eles. . . . .	45
Figura 3.9	Sistema massa-mola com 2 graus de liberdade. . . . .	46
Figura 3.10	Esquemático dos parâmetros concentrados. . . . .	47
Figura 3.11	Matriz de rigidez global para o caso de duto com ressonador. . . . .	48
Figura 3.12	Gráfico do pulso no domínio do tempo. . . . .	49
Figura 3.13	Gráfico do pulso no domínio da frequência. . . . .	49
Figura 3.14	Pulso janelado no domínio do tempo. . . . .	49
Figura 3.15	Pulso janelado no domínio da frequência. . . . .	49
Figura 3.16	Amplitude em frequência ao pulso nos pontos de controle. . . . .	51
Figura 3.17	Resposta no tempo ao pulso nos pontos de controle. . . . .	51
Figura 3.18	Resposta no tempo ampliado. . . . .	51
Figura 3.19	Contorno fixo. . . . .	52
Figura 3.20	Deslocamento nos pontos de entrada e saída do duto sem ressonador. Tempo de reflexões diretamente derivadas do pulso (primárias) são destacados com linhas transversais tracejadas. . . . .	53

Figura 3.21	Deslocamento nos pontos de entrada e saída do duto sem ressonador. Tempo de reflexões geradas pelo efeito de contorno (secundárias) são destacados com linhas transversais tracejadas. . . . .	54
Figura 3.22	Diagrama tempo $\times$ espaço da propagação do pulso ao longo do duto sem ressonadores. . . . .	54
Figura 3.23	Amplitude da resposta ao pulso em função da frequência para o caso duto com ressonadores periódicos. . . . .	56
Figura 3.24	Amplitude em frequência ao pulso no ponto contendo o primeiro ressonador. . . . .	57
Figura 3.25	Amplitude em frequência ao pulso no ponto contendo o segundo ressonador.	57
Figura 3.26	Amplitude em frequência ao pulso no ponto contendo o terceiro ressonador.	57
Figura 3.27	Amplitude em frequência ao pulso no ponto contendo o quarto ressonador.	57
Figura 3.28	Amplitude em frequência ao pulso no ponto contendo o quinto ressonador.	57
Figura 3.29	Resposta no tempo ao pulso na saída para o caso duto com ressonadores periódicos. . . . .	58
Figura 3.30	Descontinuidade móvel. . . . .	58
Figura 3.31	Propagação da onda ao longo do duto com ressonadores periódicos. . .	59
Figura 3.32	Amplitude em frequência ao pulso em frequência para o caso duto com ressonadores de índice gradiente. . . . .	62
Figura 3.33	Amplitude em frequência ao pulso no ponto contendo o primeiro ressonador. . . . .	63
Figura 3.34	Amplitude em frequência ao pulso no ponto contendo o segundo ressonador.	63
Figura 3.35	Amplitude em frequência ao pulso no ponto contendo o terceiro ressonador.	63
Figura 3.36	Amplitude em frequência ao pulso no ponto contendo o quarto ressonador.	63
Figura 3.37	Amplitude em frequência ao pulso no ponto contendo o quinto ressonador.	63
Figura 3.38	Amplitude em frequência ao pulso no ponto contendo o primeiro ressonador. . . . .	64
Figura 3.39	Amplitude em frequência ao pulso no ponto contendo o segundo ressonador.	64
Figura 3.40	Amplitude em frequência ao pulso no ponto contendo o terceiro ressonador.	64
Figura 3.41	Amplitude em frequência ao pulso no ponto contendo o quarto ressonador.	64
Figura 3.42	Amplitude em frequência ao pulso no ponto contendo o quinto ressonador.	64
Figura 3.43	Amplitude no tempo ao pulso na saída para o caso duto com ressonadores de índice gradiente. . . . .	65
Figura 3.44	Amplitude em frequência ao pulso na frequência do pulso para velocidade de escoamento nula. . . . .	67
Figura 3.45	Amplitude em frequência ao pulso na frequência do pulso para velocidade de escoamento não nula. . . . .	67
Figura 3.46	Resposta no tempo para duto com velocidade de escoamento não nula, caso sem ressonadores. . . . .	68

Figura 3.47	Resposta no tempo para duto com velocidade de escoamento não nula, caso ressonadores periódicos. . . . .	68
Figura 3.48	Resposta no tempo para duto com velocidade de escoamento não nula, caso ressonadores de índice gradiente. . . . .	68
Figura 3.49	Relação de dispersão para o nó contendo o primeiro ressonador. . . . .	70
Figura 3.50	Relação de dispersão para o nó contendo o segundo ressonador. . . . .	70
Figura 3.51	Relação de dispersão para o nó contendo o terceiro ressonador. . . . .	70
Figura 3.52	Relação de dispersão para o nó contendo o quarto ressonador. . . . .	70
Figura 3.53	Relação de dispersão para o nó contendo o quinto ressonador. . . . .	70
Figura 3.54	Resposta ao pulso no tempo sem ressonadores. . . . .	71
Figura 3.55	Resposta ao pulso no tempo com ressonadores do tipo índice variável. .	71

## Lista de tabelas

Tabela 3.1	Parâmetros de simulação para o caso duto sem ressonadores. . . . .	50
Tabela 3.2	Parâmetros de simulação para o caso duto com ressonadores periódicos.	55
Tabela 3.3	Parâmetros de simulação para o caso duto com ressonadores de índice gradiente. . . . .	61
Tabela 3.4	Parâmetros de simulação para o caso duto com ressonadores de índice gradiente e velocidade de escoamento não nula. . . . .	66

## Lista de abreviaturas e siglas

$\ddot{u}$	Aceleração . . . . .	22
$\delta u$	Deslocamento virtual . . . . .	30
$\delta$	Variacional . . . . .	30
$\mathcal{L}$	Lagrangiano . . . . .	26
$\Pi$	Coordenada generalizada . . . . .	26
$\mu$	Permeabilidade magnética . . . . .	19
$\omega$	Frequência angular . . . . .	23
$\bar{N}$	Força axial média . . . . .	32
$\rho$	Densidade . . . . .	29
$\sigma_{ij,j}$	Tensor de tensões . . . . .	29
$\epsilon$	Deformação longitudinal . . . . .	32
$\epsilon$	Permissividade elétrica . . . . .	19
$c$	Velocidade de escoamento . . . . .	36
$f$	Fator de atrito - Diagrama de Moody . . . . .	36
$f$	Forçamento externo . . . . .	46
$f$	Frequência . . . . .	22
$f_i$	Forças inerciais . . . . .	29
$F_N$	Força normal . . . . .	35
$f_R$	Frequência do ressonador . . . . .	55
$F_T$	Força tangencial . . . . .	35
$g$	Aceleração da gravidade . . . . .	36
$I_p$	Segundo momento de área . . . . .	32
$k$	Constante de rigidez de mola . . . . .	46
$k$	Número de onda . . . . .	23
$L$	Comprimento do duto . . . . .	33
$M$	Momento fletor . . . . .	35
$m$	Massa . . . . .	46
$m_p$	Massa do duto . . . . .	33
$mu_R$	Função razão de massa ressonador–duto . . . . .	59
$N$	Esforço normal . . . . .	35
$p$	Pressão do fluido . . . . .	36
$Q$	Esforço cortante . . . . .	35
$S$	Ação . . . . .	26
$T$	Energia cinética . . . . .	32
$T$	Energia potencial . . . . .	32
$T_i$	Vetor de tensões de Cauchy . . . . .	29

$u$	Deslocamento.....	22
$w$	Deslocamento vertical.....	33
$W_E$	Trabalho das forças externas.....	30
GRIN	Índice gradiente.....	17

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>17</b>
1.1	Motivação	17
1.2	Objetivos	17
1.3	Metodologia	18
1.4	Estrutura do trabalho	18
<b>2</b>	<b>Fundamentação teórica</b>	<b>19</b>
2.1	Uma introdução aos metamateriais	19
2.2	Transformada de Fourier contínua e discreta	21
2.3	Formulação geral do método espectral	22
2.4	Princípio de Hamilton	26
2.4.1	Princípio de Hamilton para sólidos deformáveis	29
2.4.2	Equação do movimento para o duto	31
2.4.3	Dinâmica de fluidos	36
2.5	Equações governantes para dinâmica de dutos	36
2.6	Modelagem do elemento espectral	37
2.6.1	Equações governantes no domínio da frequência	37
2.6.2	Formulação espectral de um duto	38
2.6.3	Funções de forma dinâmicos	39
<b>3</b>	<b>Propagação de ondas em dutos transportando fluidos</b>	<b>42</b>
3.1	Construção dos dutos	42
3.1.1	Configuração do duto simples	42
3.1.2	Configuração do duto com ressonadores	43
3.1.3	Elemento de duto e composição de elementos	44
3.2	Construção do forçamento de entrada	48
3.3	Simulação e verificação duto sem ressonadores	50
3.4	Simulação e verificação duto com ressonadores periódicos	54
3.5	Simulação e verificação duto com ressonadores de índice gradiente	59
3.6	Efeito dinâmico da velocidade de escoamento não nula	65
3.7	Condição de amplificação para o caso de índice gradiente	68
<b>4</b>	<b>Conclusão e considerações finais</b>	<b>72</b>
	<b>Referências</b>	<b>73</b>

<b>Apêndices</b>	<b>75</b>
<b>Apêndice A Códigos de programação . . . . .</b>	<b>76</b>
A.1 Código utilizado para simulação numérica do duto. . . . .	76

# 1 Introdução

## 1.1 Motivação

A motivação central por trás deste estudo reside nos desafios encontrados nos limites de detecção dos sensores de vibração convencionais, buscando solucionar tal questão por meio da aplicação de metamateriais. A medição de vibrações em estruturas possui uma relevância significativa, apresentando diversas aplicações práticas, como a análise da integridade estrutural e a prevenção de falhas mecânicas, entre outras.

Este estudo específico se concentra na análise das vibrações em dutos com escoamento interno, visando aprimorar o sensoriamento através da implementação de um metamaterial de índice gradiente conhecido como GRIN. A proposta de utilizar este metamaterial como um meio para amplificar as características mecânicas surgiu de pesquisas anteriores, como aquela conduzida por (Chen *et al.*, 2016), a qual investigou o uso do GRIN para aprimorar a detecção de vibrações em vigas. A Figura (1.1) apresenta o conceito central do trabalho de Chen.

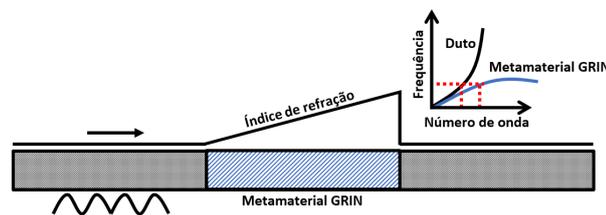


Figura 1.1 – Esquemático do modelo estudado por (Chen *et al.*, 2016)

A proposta deste trabalho consiste em adaptar a abordagem proposta por (Chen *et al.*, 2016) e estender sua aplicabilidade para dutos. Tal adaptação envolverá a substituição dos dispositivos piezoelétricos e do circuito de controle por ressonadores mecânicos, mantendo o conceito fundamental de amplificação de sinal. Pretende-se contribuir para aplicações que demandam sensoriamento em dutos, como a estimativa de fração de vazios, abrangendo um amplo espectro de possíveis aplicações. No entanto, este tema não será o foco principal deste trabalho, não sendo detalhadamente explorado. Serão utilizados trabalhos nesta área para validar algumas das simulações realizadas ao longo deste estudo.

## 1.2 Objetivos

O principal objetivo deste trabalho consiste em investigar o uso de metamateriais para a amplificação mecânica de vibrações em dutos para sensoriamento. Sensores baseados em vibrações podem ter seu desempenho comprometido quando o sinal mecânico é da mesma

ordem de grandeza que o de ruído de medição, ou seja, baixo SNR (*Signal do Noise Ratio*). Para alcançar esse propósito, foram estabelecidas metas específicas.

### 1.3 Metodologia

Para se alcançar o objetivo proposto, propõe-se a seguinte metodologia. Inicialmente, serão realizadas simulações numéricas utilizando o método do elemento espectral para compreender como as ondas mecânicas se propagam em um duto homogêneo, transportando fluido monofásico com velocidade constante. Esta análise permitirá obter ideias sobre o comportamento dessas ondas ao longo do duto. Posteriormente, serão investigados os impactos do uso de metamateriais nessa propagação. A expectativa é compreender como esses impactos podem ser utilizados para amplificar vibrações, ou seja, em última instância, o metamaterial deve se comportar como um ressonador mecânico.

- Análise de propagação de ondas e resposta forçada em dutos homogêneos. Neste etapa, o comportamento das ondas de flexão em um duto homogêneo transportando um fluido monofásico com vazão constante é analisado. São definidos os parâmetros de um sistema base, e um pulso no tempo com uma frequência central. O modelo é validado a partir dos tempos de reflexão do pulso e a velocidade de grupo correspondente.
- Análise de propagação de ondas em dutos com ressonadores periódicos. Nesta etapa, são adicionados ressonadores periódicos ao longo do duto. O comportamento dinâmico do duto é analisado em termos do espectro da resposta e da propagação e reflexões do pulso.
- Análise de propagação de ondas em dutos com ressonadores gradientes. Nesta etapa, a abordagem GRIN é investigada. Propõe-se um perfil gradiente de ressonadores de modo a se criar um possível perfil de amplificação do pulso. Os resultados são também discutidos em termos do espectro da resposta, propagação e reflexões do duto. Os desafios de implementação e investigação da abordagem são apresentados e discutidos.

### 1.4 Estrutura do trabalho

Este trabalho está organizado em quatro capítulos. O primeiro capítulo, destinado à introdução, tem como objetivo contextualizar o leitor sobre a motivação e relevância do projeto. O segundo capítulo tem o propósito de apresentar a fundamentação teórica que servirá como base para o desenvolvimento do estudo. No terceiro capítulo, serão conduzidas simulações dos dutos para diferentes cenários. Por fim, o quarto capítulo abrigará as considerações finais e conclusões deste trabalho.

## 2 Fundamentação teórica

### 2.1 Uma introdução aos metamateriais

Um metamaterial é um tipo de material com propriedades físicas incomuns, podendo ser criado artificialmente ou por meio da combinação de materiais convencionais. Suas aplicações abrangem áreas como óptica, acústica e resistência dos materiais, oferecendo possibilidades inovadoras. Na óptica, os metamateriais são usados para fabricar lentes especiais e processadores fotônicos, explorando suas características singulares. Na acústica, têm aplicações tanto para atenuação quanto para aprimoramento do isolamento acústico.

O primeiro exemplo de metamaterial a ser abordado é o proposto por (Veselago, 1968) em seu artigo de 1968. Nele, (Veselago, 1968) investigou substâncias que demonstram valores negativos simultâneos de permissividade elétrica ( $\epsilon$ ) e permeabilidade magnética ( $\mu$ ). Essas substâncias, chamadas metamateriais, não existem naturalmente e foram objeto de estudo. O trabalho explorou as propriedades incomuns dessas substâncias, como a refração negativa, que poderia ser usada na fabricação de lentes perfeitas. O artigo de (Veselago, 1968) foi fundamental para impulsionar a pesquisa e o desenvolvimento dos metamateriais, desempenhando um papel crucial na área.

O segundo exemplo de metamaterial abordado neste trabalho é a primeira verificação experimental de um metamaterial com índice de refração negativo, essa verificação pioneira foi descrita no artigo de (Shelby; Smith; Schultz, 2001). O metamaterial em questão é composto por ressonadores de cobre dispostos em uma matriz de fibra de vidro. O artigo também teoriza sobre como esse metamaterial pode ser utilizado na fabricação de uma lente perfeita, capaz de focalizar a luz além do limite de difração. Um esquema desse metamaterial é ilustrado na Figura (2.1).

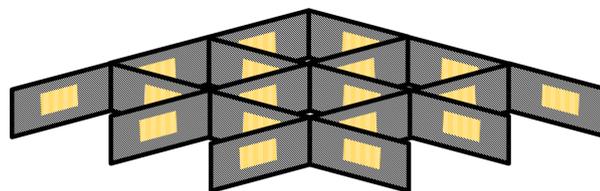


Figura 2.1 – Esquemático do metamaterial apresentado por (Shelby; Smith; Schultz, 2001)

O terceiro exemplo, que também é o último e motivador deste trabalho, são os metamateriais GRIN, ou metamateriais de índice gradiente. Esses metamateriais apresentam, como o próprio nome sugere, um índice de refração gradualmente variável, o que permite a manipulação da propagação de ondas ópticas, acústicas ou elásticas, resultando em uma

variedade de efeitos, como refração negativa, focalização, atenuação, amplificação de ondas, entre outros. Esses metamateriais são relativamente fáceis de serem implementados e podem ser construídos por meio de estruturas periódicas.

Um artigo relevante que trata desse tipo específico de metamaterial é o trabalho publicado por (Chen *et al.*, 2016). Neste estudo, é discutido o uso desses metamateriais no contexto da amplificação de ondas mecânicas em uma viga, com o intuito de aprimorar o sensoriamento de vibrações, fator crucial na previsão de falhas e na análise da integridade estrutural de elementos mecânicos. É sabido que a presença de trincas pode alterar a resposta dinâmica da estrutura, dentre outras questões relevantes.

O metamaterial abordado por (Chen *et al.*, 2016) consiste em um sistema de auto sensoriamento piezoelétrico com gradiente, o qual, quando ajustado adequadamente, melhora a qualidade dos dados medidos. O artigo demonstra, inclusive, que esse sistema é capaz de alcançar mais de duas ordens de magnitude na amplificação de ondas flexurais, superando, assim, o limite de detecção. Um esquema do modelo estudado por (Chen *et al.*, 2016) é ilustrado na Figura (2.2).

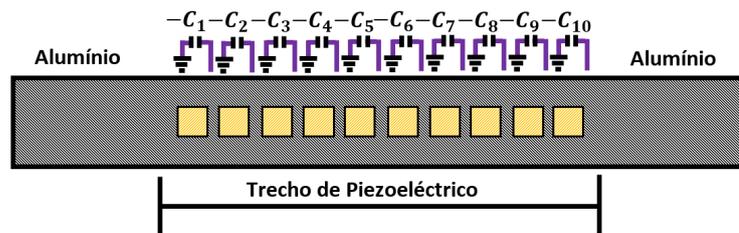


Figura 2.2 – Esquemático do metamaterial proposto por (Chen *et al.*, 2016)

Sabe-se que as ondas mecânicas requerem um meio para se propagarem, e as características desse meio determinam a maneira como a onda se comportará ao se propagar. Ao observar a propagação de uma onda de um meio para outro, um fenômeno interessante se torna evidente. Se o meio de origem possui uma impedância menor do que o novo meio, uma parte significativa da onda é refletida, enquanto a parcela que se propaga no novo meio tem uma amplitude menor. Por outro lado, se a impedância do meio de origem é maior do que a do novo meio, apenas uma pequena porção da onda é refletida, enquanto a maior parte é propagada no novo meio com uma amplitude superior à da origem. É relevante destacar que a impedância representa a resistência oferecida pelo meio à propagação da onda.

Dessa forma, pode-se intuir que o papel do piezoelétrico é precisamente reduzir a impedância do meio e, conseqüentemente, aumentar a amplitude da onda nessa seção.

O propósito deste trabalho é adaptar o estudo de (Chen *et al.*, 2016), substituindo a parte do piezoelétrico por ressonadores mecânicos e a viga por um duto que transporta fluido. Esse objetivo visa avaliar os resultados obtidos nessa nova configuração e compará-los com os resultados apresentados por (Chen *et al.*, 2016). Para alcançar esse intento, será necessário introduzir uma base teórica adequada que permita a simulação do duto e dos ressonadores. Essa base teórica será abordada nos próximos tópicos deste capítulo.

## 2.2 Transformada de Fourier contínua e discreta

A Transformada de Fourier é um recurso matemático usado para realizar mudanças de domínio, semelhante a outras transformadas como a Transformada de Laplace e a Transformada Z. Em geral, essas transformadas permitem transitar do domínio físico, onde resolver certos problemas pode ser mais desafiador, para um domínio abstrato mais fácil de ser trabalhado. A Transformada de Fourier, ao contrário de outras transformadas, desempenha um papel fundamental no processamento e na análise de sinais, equações diferenciais e mantém o significado físico do problema original. Ela possibilita a transição de um domínio, como o tempo, que tem um significado físico, para o domínio da frequência, também dotado de significado físico. Frequentemente, a análise no domínio da frequência complementa a análise de um problema, sendo usada ao longo deste trabalho para solucionar equações diferenciais e como ferramenta complementar na análise dos resultados. A transformada de Fourier na forma contínua é dada por:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i2\pi ft} dt \quad (2.1)$$

Também é possível definir uma transformada inversa de Fourier, que opera no sentido oposto da transformada original, permitindo a transição do domínio da frequência de volta para o domínio do tempo. Essa transformada inversa é fundamental, pois complementa a Transformada de Fourier, possibilitando a análise de sinais nos domínios do tempo e da

frequência. A Transformada de Fourier converte um sinal do domínio do tempo para o domínio da frequência, decompondo-o em suas componentes de frequência, enquanto a sua inversa facilita o retorno dessas informações do domínio da frequência para o domínio do tempo. Essa díade de transformadas é essencial em várias áreas, incluindo engenharia, física e processamento de sinais, oferecendo uma ferramenta poderosa para compreensão e manipulação de sinais e fenômenos em diferentes domínios. A transformada inversa é definida pela seguinte expressão:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{i2\pi ft} dt \quad (2.2)$$

No contexto numérico, é necessário defini-las também na forma discretizada, uma vez que os computadores operam com representações limitadas de números e não lidam diretamente com números reais. Em virtude disso, possuem uma quantidade finita de bits para representar os dados. Portanto, a seguir, estão apresentadas a transformada e sua inversa na forma discretizada.

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-i(2\pi/N)nk} \\ x(n) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)e^{i(2\pi/N)nk} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Essa discretização acarreta na periodicidade do sinal no tempo e na frequência.

## 2.3 Formulação geral do método espectral

Para a formulação geral do método do elemento espectral, basearemos nossa abordagem no livro escrito por (Lee, 2009), o qual explora o método de forma mais detalhada. Inicialmente, partiremos de uma abordagem que estabelece a relação entre força e deslocamento, utilizando um exemplo relativamente simples de estruturas genéricas sujeitas a vibração forçada. Uma estrutura desse tipo pode ser simbolicamente representada por:

$$\mathcal{L}\mathbf{u}(x,t) + \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(x,t) = \mathbf{p}(x,t) \quad (2.4)$$

Onde  $\mathcal{L}$  é um operador linear diferencial que descreve as propriedades da estrutura no tempo e no espaço, de maneira análoga à constante de rigidez em sistemas simples, como o sistema massa-mola. O termo  $\ddot{\mathbf{u}}$  representa o campo de aceleração,  $\mathbf{u}$  representa o campo de deslocamento e, por fim,  $\mathbf{p}$  representa o forçamento. Assume-se um forçamento na seguinte forma:

$$\mathbf{p}(x,t) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \mathbf{P}_n(x; \omega_n)e^{i\omega_n t} \quad (2.5)$$

Da mesma maneira, pode-se propor um campo de deslocamento de forma similar.

$$\mathbf{u} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \mathbf{U}_n(x; \omega_n) e^{i\omega_n t} \quad (2.6)$$

Basicamente, as funções foram escritas em suas formas de transformada discreta de Fourier. Ao substituir essas funções modificadas na Eq. (2.4) e ao considerar que as componentes espectrais  $\mathbf{U}_n$  e  $\mathbf{P}_n$  satisfazem a Eq. (2.4) para todas as frequências, é possível expressá-la como:

$$\mathbf{L}\mathbf{U}_n(x; \omega_n) - \omega_n^2 \mathbf{M}\mathbf{U}_n(x; \omega_n) = \mathbf{P}_n(x; \omega_n) \quad (2.7)$$

Em que  $\mathbf{L}$  é o operador linear diferencial no domínio espacial. A frequência depende das funções de forma, que são denominadas funções de forma dinâmicas as quais são utilizadas para formulação da matriz de elementos espectrais, e são obtidas a partir da equação homogênea.

$$\mathbf{L}\mathbf{U}_n(x) - \omega_n^2 \mathbf{M}\mathbf{U}_n(x) = 0 \quad (2.8)$$

Uma solução para esta equação pode ser dada na forma:

$$\mathbf{U}(\mathbf{x}) = \mathbf{c}e^{-ikx} \quad (2.9)$$

Aqui,  $\mathbf{c}$  representa um vetor constante e  $k$  é o número de onda. Ao realizar a substituição dessa solução na Eq. (2.8), é possível expressar a equação como um problema de autovalores e autovetores, conforme será demonstrado a seguir.

$$\mathbf{A}(k; \omega) \mathbf{c} = 0 \quad (2.10)$$

Para a existência de uma solução não trivial, tem-se que:

$$\det \mathbf{A}(k; \omega) = 0 \quad (2.11)$$

Tal determinante produz a equação característica para o número de onda na forma:

$$k^p + \alpha_{(p-1)}(\omega)k^{(p-1)} + \alpha_{(p-2)}(\omega)k^{(p-2)} + \dots + \alpha_1(\omega)k + \alpha_0(\omega) = 0 \quad (2.12)$$

A esta equação característica dá-se o nome de relação de dispersão. Se as raízes  $k_1, k_2, \dots, k_p$  forem todas distintas em uma frequência discreta  $\omega$ , pode-se expressar um autovetor  $\mathbf{c}_i$  como:

$$\mathbf{c}_i = \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ \beta_i \end{array} \right\} = a_i \boldsymbol{\varphi}_i \quad (i = 1, 2, \dots, p) \quad (2.13)$$

Em que  $\mathbf{c}_i$  é o autovetor normalizado. Uma vez que temos  $\mathbf{c}_i$  e os números de onda,  $k_i$ , podemos escrever a solução Eq.(2.9) como:

$$\mathbf{U}_n(x) = \sum_{i=1}^p \boldsymbol{\varphi}_i e^{-ik_i(\omega)x} a_i \equiv \mathbf{E}(x; \omega) \mathbf{a} \quad (2.14)$$

Onde,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(x; \omega) &= \left[ \boldsymbol{\varphi}_1 \ \boldsymbol{\varphi}_2 \ \boldsymbol{\varphi}_3 \ \dots \ \boldsymbol{\varphi}_p \right] \boldsymbol{\Lambda}(x; \omega) \\ \boldsymbol{\Lambda} &= \text{diag} \left[ e^{ik_i(\omega)x} \right] \\ \mathbf{a} &= \{a_1 \ a_2 \ a_3 \ \dots \ a_p\} \end{aligned} \quad (2.15)$$

Os campos de deslocamento podem ser relacionados pela seguinte equação:

$$\mathbf{D}(x) = \mathbf{L}_{GB} \mathbf{U}(x) \quad (2.16)$$

No qual  $\mathbf{L}_{GB}$  representa um operador diferencial linear para as condições de contorno geométricas. Ao substituir a equação acima na Eq. (2.14), obtém-se que o deslocamento espectral dos nós pode ser expresso por:

$$\mathbf{d} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{D}(0) \\ \mathbf{D}(L) \end{array} \right\} = \left[ \begin{array}{c} \mathbf{L}_{GB} \mathbf{E}(x; \omega) \Big|_{x=0} \\ \mathbf{L}_{GB} \mathbf{E}(x; \omega) \Big|_{x=L} \end{array} \right] \mathbf{a} = \mathbf{H}(\omega) \mathbf{a} \quad (2.17)$$

Eliminando o vetor  $\mathbf{a}$  da Eq.(2.14) usando a equação Eq.(2.17) a solução geral pode ser reescrita como:

$$\mathbf{U}(x) = \mathbf{N}(x; \omega) \mathbf{d} \quad (2.18)$$

Em que,

$$\mathbf{N}(x; \omega) = \mathbf{E}(x; \omega) \mathbf{H}^{-1}(\omega) \quad (2.19)$$

As forças e momentos internos podem ser escritos de forma generalizadas como:

$$\mathbf{F}(x) = \mathbf{L}_{NB} \mathbf{U}(x) \quad (2.20)$$

Na forma nodal, tem-se:

$$\mathbf{f}_c \equiv \begin{Bmatrix} -\mathbf{F}(0) \\ \mathbf{F}(L) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\mathbf{L}_{\text{NB}}\mathbf{N}(x; \omega) \Big|_{x=0} \\ \mathbf{L}_{\text{NB}}\mathbf{N}(x; \omega) \Big|_{x=L} \end{Bmatrix} \mathbf{d} \equiv \mathbf{S}(\omega)\mathbf{d} \quad (2.21)$$

onde

$$\mathbf{S}(\omega) = \begin{Bmatrix} -\mathbf{L}_{\text{NB}}\mathbf{N}(x; \omega) \Big|_{x=0} \\ \mathbf{L}_{\text{NB}}\mathbf{N}(x; \omega) \Big|_{x=L} \end{Bmatrix} = \mathbf{G}(\omega)\mathbf{H}_{-1}(\omega) \quad (2.22)$$

sendo

$$\mathbf{G}(\omega) = \begin{Bmatrix} -\mathbf{L}_{\text{NB}}\mathbf{E}(x; \omega) \Big|_{x=0} \\ \mathbf{L}_{\text{NB}}\mathbf{E}(x; \omega) \Big|_{x=L} \end{Bmatrix} \quad (2.23)$$

Por fim, apresenta-se um fluxograma com os passos necessários para a formulação do elemento espectral. Os passos estão organizados sequencialmente, resumindo todo o processo realizado.

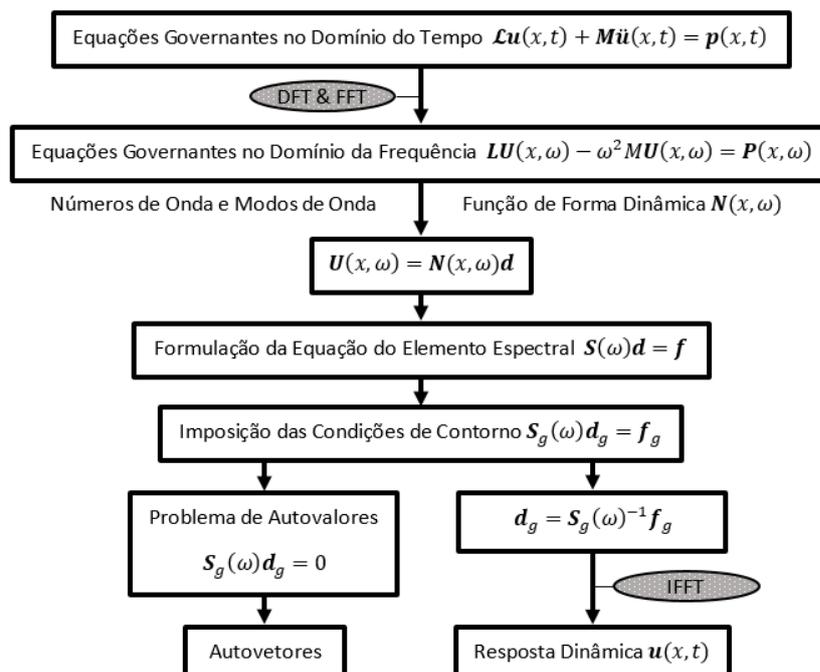


Figura 2.3 – Fluxograma geral do método do elemento espectral.

## 2.4 Princípio de Hamilton

O princípio de Hamilton, em termos simplificados, pode ser definido em uma única frase: uma partícula que se move de um ponto a outro em seu espaço de configuração escolhe o caminho que minimiza sua ação, ou seja, o caminho com a menor energia possível. Embora essa frase transmita a ideia geral do princípio, é importante ressaltar que sua formalização matemática requer uma base sólida. Será introduzido um pouco mais de rigor por meio de um exemplo envolvendo cálculo variacional, abordagem matemática usada para definir formalmente o princípio de Hamilton.

Imagine uma partícula se deslocando de um ponto a outro no plano durante um intervalo de tempo. O objetivo é determinar o caminho percorrido pela partícula, considerando que a energia gasta para percorrer esse trajeto deve ser mínima. A princípio, há infinitos caminhos possíveis, como ilustrado na Figura (2.4).

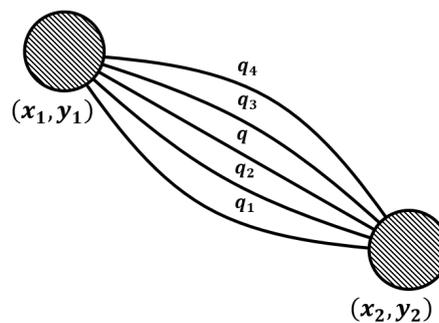


Figura 2.4 – Movimento de uma partícula

Pode-se calcular a energia total consumida em cada ponto e somar as contribuições por meio de uma integral, conforme demonstrado na Eq. (2.24).

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) dt \quad (2.24)$$

Deseja-se considerar a energia em todos os possíveis caminhos. Uma estratégia para englobar todas as possibilidades é definir uma função como sendo a solução, ou seja, o caminho que minimiza o gasto de energia, acrescentando outros termos que possam variar para representar cada variação desse termo como um possível caminho.

$$q_n(t) = q(t) + \alpha \eta(t) \quad (2.25)$$

Onde  $q$  representa a solução do nosso problema,  $\alpha$  é uma constante real e  $\eta$  é uma função que abrange todos os possíveis trajetos. É importante observar que, para que  $q_n$  realmente abarque todos os possíveis caminhos, é necessário impor uma condição em  $\eta$ . Essa condição é a seguinte:

$$\eta(t_1) = \eta(t_2) = 0 \quad (2.26)$$

Com essa restrição, pode-se garantir que, independentemente do caminho entre  $t_1$  e  $t_2$ , a partícula estará na posição definida. Após a definição da função  $q$ , é possível reescrever a Eq. (2.24) como:

$$\bar{S} = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q + \alpha\eta, \dot{q} + \alpha\dot{\eta}) dt. \quad (2.27)$$

Perceba que, dessa maneira,  $\bar{S}$  se torna uma função exclusiva de  $\alpha$ . Portanto, para encontrar os extremos da função  $\bar{S}$ , basta derivar em relação a  $\alpha$  e calcular  $\alpha = 0$ , ou seja,

$$\left. \frac{d\bar{S}}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = \frac{d}{d\alpha} \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q + \alpha\eta, \dot{q} + \alpha\dot{\eta}) dt = 0. \quad (2.28)$$

Como a integral é em  $t$  a derivada pode entrar dentro da integral, de modo que:

$$\left. \frac{d\bar{S}}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{d\alpha} (\mathcal{L}(q + \alpha\eta, \dot{q} + \alpha\dot{\eta})) dt = 0. \quad (2.29)$$

Ao aplicar a regra da cadeia, obtém-se:

$$\left. \frac{d\bar{S}}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \eta + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \dot{\eta} \right) dt = 0. \quad (2.30)$$

É possível reescrever a equação acima como:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \eta + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \dot{\eta} \right) dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \eta dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \dot{\eta} dt. \quad (2.31)$$

Ao resolver por partes a segunda integral do lado direito da equação, obtém-se:

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \dot{\eta} dt = \left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \eta \right|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) \eta dt. \quad (2.32)$$

Ao substituir na Eq. (2.31), obtém-se:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \eta + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \dot{\eta} \right) dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \eta dt + \left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \eta \right|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) \eta dt \quad (2.33)$$

Perceba que a função  $\eta$  foi definida de modo que em  $t_1$  e  $t_2$  ela é nula, sendo assim:

$$\left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \eta \right|_{t_1}^{t_2} = 0. \quad (2.34)$$

Portanto,

$$\int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \eta + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \dot{\eta} \right) dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \eta dt - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) \eta dt, \quad (2.35)$$

que pode ser reescrita como:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \eta + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \dot{\eta} \right) dt = \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) \right) \eta dt = 0. \quad (2.36)$$

Como equação anterior deve ser válida qualquer que seja  $\eta$ , então.

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) = 0 \quad (2.37)$$

Essa equação representa a Euler-Lagrange, a qual é derivada diretamente do princípio de Hamilton. Nesse contexto,  $S$ , denominada energia total, é postulada por Hamilton como sendo mínima, enquanto  $\mathcal{L}$  representa o lagrangiano, definido como a diferença entre a energia cinética e a potencial de um sistema. Outra abordagem possível é a definição de todas as ações como:

$$\bar{S} = S + \delta S \quad (2.38)$$

Em que,

$$\delta S = \alpha \eta \quad (2.39)$$

Se ação é mínima então,  $\delta S$  é nula, sendo assim dizer que a ação é mínima é o mesmo que dizer que:

$$\delta S = 0 \quad (2.40)$$

Logo basta que,

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt = 0 \quad (2.41)$$

Ou ainda,

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} (\delta V - \delta T) dt = 0 \quad (2.42)$$

A equação acima expressa o princípio de Hamilton em termos matemáticos. No entanto, algumas informações foram omitidas na última parte, e é importante mencionar o motivo pelo qual  $\delta S$  é zero quando  $S$  é mínimo. Essa condição está relacionada ao fato

de que  $\delta S$  representa a variação de primeira ordem do funcional  $S$ , e uma propriedade dos pontos estacionários é que as variações de primeira ordem nesses pontos são nulas.

### 2.4.1 Princípio de Hamilton para sólidos deformáveis

Antes de deduzir o princípio de Hamilton aplicado a sólidos deformáveis, é importante abordar a aplicação da segunda Lei de Newton a corpos contínuos. É sabido que as leis de Newton se aplicam apenas a partículas e não podem ser diretamente estendidas a corpos contínuos. Portanto, para avançar nessa dedução, é necessário adotar uma abordagem alternativa, considerando um elemento diferencial desse sólido, que se assemelha a uma partícula, e, somente então, aplicar a segunda Lei de Newton. Para facilitar a compreensão visual desse conceito, as Figuras (2.5) e (2.6) apresentam uma representação gráfica de um sólido genérico e uma projeção bidimensional do elemento diferencial de volume desse sólido.

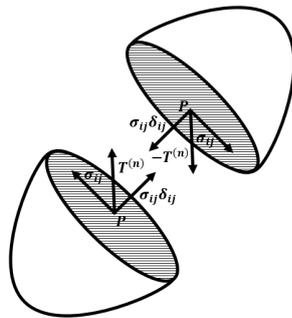


Figura 2.5 – Sólido genérico

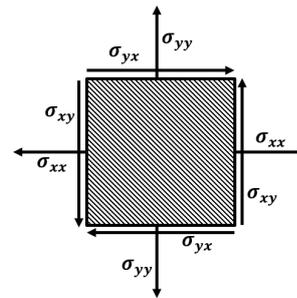


Figura 2.6 – Diferencial de sólido

Aplicando a segunda lei de Newton ao elemento diferencial de sólido é possível chegar na equação:

$$\sigma_{ij,j} + f_i = \rho \ddot{u}_i \quad (2.43)$$

Onde  $\sigma_{ij,j}$  representa o divergente do tensor de tensões, e está relacionado aos esforços internos,  $f_i$  é a componente que contabiliza as forças externas por unidade de volume que atuam sobre o sólido, e por fim  $\rho \ddot{u}_i$  que é a força resultante, novamente por unidade de volume. A fórmula de Cauchy define um vetor de tensões,  $T_i$ , como:

$$T_i = \sigma_{ij} n_j \quad (2.44)$$

O vetor de tensor é justamente o divergente do tensor de tensões, de modo que pode-se substituí-lo na Eq.(2.43), a fim de reescrevê-la na forma:

$$T_i + f_i = \rho \ddot{u}_i \quad (2.45)$$

Uma vez conhecida todas as forças que atuam sobre este elemento diferencial de volume, pode-se então calcular o trabalho virtual realizado por cada uma delas, sendo assim tem-se que o trabalho virtual será dado por:

$$\delta W_E = \int_S T_i \delta u_i dS + \int_V f_i \delta u_i dV \quad (2.46)$$

Pode-se aplicar o teorema de divergência de Gauss para escrever a Eq.(2.46) em termos do volume. Aplicando o teorema na primeira integral obtemos:

$$\int_S T_i \delta u_i dS = \int_s \sigma_{ij} n_j \delta u_i dS = \int_V (\sigma_{ij} \delta u_i)_{,j} dV \quad (2.47)$$

Aplicando-se a regra do produto na equação anterior, tem-se:

$$\int_V (\sigma_{ij} \delta u_i)_{,j} dV = \int_V (\sigma_{ij,j} \delta u_i + \sigma_{ij} \delta u_{i,j}) dV \quad (2.48)$$

Substituindo este resultado na Eq.(2.46),

$$\delta W_E = \int_V (\sigma_{ij,j} + f_i) \delta u_i + \sigma_{ij} \delta u_{i,j} dV \quad (2.49)$$

O argumento da primeira integral pode ser interpretado como o trabalho realizado pela força resultante, de modo que o trabalho virtual pode ser escrito como:

$$\delta W_E = \int_V \rho \ddot{u}_i \delta u_i + \sigma_{ij} \delta u_{i,j} dV \quad (2.50)$$

O divergente do deslocamento virtual é nada mais, nada menos que a deformação virtual, sendo assim:

$$\delta W_E = \int_V \rho \ddot{u}_i \delta u_i + \sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij} dV \quad (2.51)$$

Na forma como está escrita a segunda integral pode-se associa-la ao variacional da energia de deformação, que na região elástica de deformação pode ser entendida como energia potencial, uma vez que nesta região a forças superficiais são conservativas, logo:

$$\delta W_E = \int_V \rho \ddot{u}_i \delta u_i dV + \delta V \quad (2.52)$$

Ao transferir  $\delta V$  para o outro lado e ao realizar a integração de ambos os lados da equação em relação ao tempo, tem-se:

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta W_E - \delta V) dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_V \rho \ddot{u}_i \delta u_i dV dt \quad (2.53)$$

Realizando uma integração por partes na integral a direita da equação acima, obtém-se:

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta W_E - \delta V) dt = \int_V \rho \dot{u}_i \delta u_i dV \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \int_V \rho \dot{u}_i \delta \dot{u}_i dV dt \quad (2.54)$$

Considerando que  $\delta u_i$  é definida como nula em  $t_1$  e  $t_2$ , a primeira integral do lado direito da igualdade se torna zero, de modo que:

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta W_E - \delta V) dt = - \int_{t_1}^{t_2} \int_V \rho \dot{u}_i \delta \dot{u}_i dV dt \quad (2.55)$$

É possível escrever o argumento da integral a direita como:

$$\rho \dot{u}_i \delta \dot{u}_i = \delta \left( \frac{1}{2} \rho u_i u_i \right) \quad (2.56)$$

Substituindo na Eq.(2.55),obtemos:

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta W_E - \delta V) dt = - \int_{t_1}^{t_2} \delta \int_V \frac{1}{2} \rho u_i u_i dV dt \quad (2.57)$$

Agora percebe-se que realizar essa mudança permitiu aparecer com a energia cinética. Sendo assim, reescreve-se a equação acima como:

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta W_E - \delta V) dt = - \int_{t_1}^{t_2} \delta T dt \quad (2.58)$$

Como todas as integrais são com respeito ao tempo, pode-se unir os argumentos em um única integral, a qual terá a forma de:

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta W_E - \delta V + \delta T) dt = 0 \quad (2.59)$$

Está equação é o equivalente ao princípio de Hamilton aplicado a um sólido deformável, e será utilizada para a modelagem dinâmica do duto.

## 2.4.2 Equação do movimento para o duto

Utilizaremos como referência as Figuras (2.7) e (2.8), adaptadas do livro (Lee, 2009).

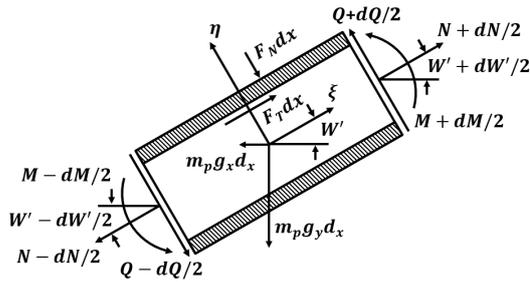


Figura 2.7 – DCL de um diferencial de duto

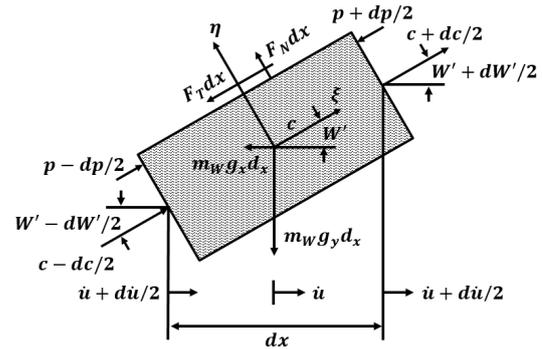


Figura 2.8 – DCL de um diferencial de fluido

A partir do princípio de Hamilton, como enunciado pela Eq. (2.59), é possível obter a equação de movimento para o duto. Note que, este princípio é válido somente para sistemas de massa constante (Guttner; Pesce, 2017), o que pode não ser o caso para escoamentos transientes, muito embora seja utilizado na literatura. Para isso, é necessário obter expressões para  $\delta V$ ,  $\delta T$  e  $\delta W$ . Inicialmente, é necessário definir a energia cinética para um duto. Percebe-se que existem apenas duas direções possíveis para o deslocamento do duto,  $u$  e  $w$ . Dessa forma, para cada direção, há uma energia cinética associada. Portanto:

$$T = \frac{1}{2} m_p \int_0^L (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) dx \quad (2.60)$$

Em relação à energia potencial, o duto pode sofrer deformações tanto longitudinalmente quanto verticalmente. Assim, é possível definir a energia potencial para o duto como:

$$V = \frac{1}{2} \int_0^L EA_p (\epsilon_{T_0} + \epsilon_x)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L EI_p w''^2 dx \quad (2.61)$$

Onde,

$$\epsilon_{T_0} = \frac{\bar{N}}{EA_p}, \quad \epsilon_x = u' + \frac{1}{2} u'^2 + \frac{1}{2} w'^2 \quad (2.62)$$

Em que  $\bar{N}$  é uma força axial constante. A primeira integral está relacionada as deformações longitudinais, já a segunda integral está relacionada a flexão do duto. Podemos aplicar o operador  $\delta$  em ambos os lados da Eq.(2.60) de modo que:

$$\delta T = \frac{1}{2} m_p \delta \int_0^L (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) dx. \quad (2.63)$$

Desenvolvendo a equação acima, obtém-se:

$$\delta T = \frac{1}{2} m_p \int_0^L (2\dot{u}\delta\dot{u} + 2\dot{w}\delta\dot{w}) dx. \quad (2.64)$$

Simplificando,

$$\delta T = m_p \int_0^L (\dot{u}\delta\dot{u} + \dot{w}\delta\dot{w}) dx. \quad (2.65)$$

Podemos abrir a integral, de modo que:

$$\delta T = m_p \int_0^L \dot{u}\delta\dot{u} dx + m_p \int_0^L \dot{w}\delta\dot{w} dx. \quad (2.66)$$

Resolvendo ambas integrais por partes iremos chegar em

$$\delta T = m_p \dot{u}\delta u \Big|_0^L - m_p \int_0^L \ddot{u}\delta u dx + \dot{w}\delta w \Big|_0^L - m_p \int_0^L \ddot{w}\delta w dx. \quad (2.67)$$

ou seja,

$$\delta T = -m_p \int_0^L (\ddot{u}\delta u + \ddot{w}\delta w) dx + A, \quad (2.68)$$

onde,

$$A = m_p \dot{u}\delta u \Big|_0^L + m_p \dot{w}\delta w \Big|_0^L. \quad (2.69)$$

Pode-se seguir o mesmo procedimento para o  $\delta V$ , mas antes vamos reescreva-la substituindo a Eq.(2.62) em (2.61), feito isso, tem-se:

$$V = \frac{1}{2} \int_0^L \left[ \bar{N} (2u' + u'^2 + w'^2) + EA_p u'^2 \right] dx + \frac{1}{2} \int_0^L EI_p w''^2 dx. \quad (2.70)$$

Vale dizer que durante a substituição alguns termos de alta ordem foram desprezados. Repetindo o procedimento análogo ao realizado para a obtenção do  $\delta T$ , tem-se que:

$$\delta V = \frac{1}{2} \int_0^L \left[ \bar{N} (2\delta u' + 2u'\delta u' + 2w'\delta w') + 2EA_p u'\delta u' \right] dx + \frac{1}{2} \int_0^L 2EI_p w''\delta w'' dx, \quad (2.71)$$

ou ainda,

$$\delta V = \int_0^L \left[ \bar{N} (\delta u' + u'\delta u' + w'\delta w') + EA_p u'\delta u' \right] dx + \int_0^L EI_p w''\delta w'' dx. \quad (2.72)$$

Pode-se dividir a integral na forma:

$$\delta V = \int_0^L \bar{N}u' \delta u' dx + \int_0^L \bar{N} \delta u' dx + \int_0^L \bar{N}w' \delta w' dx + \int_0^L EA_p u' \delta u' dx + \int_0^L EI_p w'' \delta w'' dx. \quad (2.73)$$

Veja que,

$$\int_0^L \bar{N} \delta u' dx = \bar{N} \delta u \Big|_0^L \quad (2.74)$$

Veja também que,

$$\int_0^L \bar{N}u' \delta u' dx = \bar{N}u' \delta u \Big|_0^L - \int_0^L \bar{N}u'' \delta u dx, \quad (2.75)$$

$$\int_0^L \bar{N}w' \delta w' dx = \bar{N}w' \delta w \Big|_0^L - \int_0^L \bar{N}w'' \delta w dx, \quad (2.76)$$

$$\int_0^L EA_p u' \delta u' dx = EA_p u' \delta u \Big|_0^L - \int_0^L EA_p u'' \delta u dx, \quad (2.77)$$

Por fim,

$$\int_0^L EI_p w'' \delta w'' dx = EI_p w'' \delta w' \Big|_0^L - EI_p w''' \delta w \Big|_0^L + \int_0^L EI_p w'''' \delta w dx. \quad (2.78)$$

Substituindo todos esses resultados na Eq.(2.73), obtém-se que:

$$\delta V = \int_0^L \left( -\bar{N}u'' - EA_p u'' \right) \delta u + \left( -\bar{N}w'' + EI_p w'''' \right) \delta w + B \quad (2.79)$$

Onde,

$$B = \bar{N} \delta u \Big|_0^L + \bar{N}u' \delta u \Big|_0^L + EA_p u' \delta u \Big|_0^L + EI_p w'' \delta w' \Big|_0^L - EI_p w''' \delta w \Big|_0^L. \quad (2.80)$$

Pode-se calcular o último termo que aparece no princípio de Hamilton, o trabalho virtual. O cálculo do trabalho virtual é relativamente simples. Para isso, consideram-se os esquemas mostrados na Figura (2.7) e aplica-se um deslocamento virtual  $\delta u$  e  $\delta w$ . Ao fazer isso, é possível encontrar a seguinte expressão para o trabalho virtual:

$$\delta W_E = \int_0^L \left[ (F_T + F_N w') \delta u + (F_T w' - F_N) \delta w \right] dx + C, \quad (2.81)$$

onde,

$$C = M_1 \delta w' \Big|_0^L + M_2 \delta w' \Big|_0^L + Q_1 \delta w \Big|_0^L + Q_2 \delta w \Big|_0^L + N_1 \delta u \Big|_0^L + N_2 \delta u \Big|_0^L. \quad (2.82)$$

Ao reunir todos os resultados, obtém-se que o argumento da integral que aparece no princípio de Hamilton é dado por:

$$\int_0^L \left[ (EA_{eff} u'' - m_p \ddot{u} + F_N w' + F_T) \delta u + (EI_p w'''' - \bar{N} w'' + m_p \ddot{w} - F_T w' - F_N) \delta w \right] dx + D, \quad (2.83)$$

no qual,

$$EA_{eff} = EA_p + \bar{N} \quad (2.84)$$

e

$$D = A + B + C. \quad (2.85)$$

Integrando em relação ao tempo, o princípio de Hamilton nos dará as seguintes equações do movimento:

$$EA_{eff} u'' - m_p \ddot{u} + F_N w' + F_T = 0 \quad (2.86)$$

$$EI_p w'''' - \bar{N} w'' + m_p \ddot{w} - F_T w' - F_N = 0 \quad (2.87)$$

Com as seguintes condições de contorno:

$$\begin{aligned} M(0,t) &= -M_1(t), & w'(0,t) &= \theta_1(t) \\ Q(0,t) &= -Q_1(t) - \bar{N} w'(0,t), & w(0,t) &= w_1(t) \\ N(0,t) &= -N_1(t) - \bar{N}, & u(0,t) &= u_1(t) \\ M(L,t) &= M_2(t), & w'(L,t) &= \theta_2(t) \\ Q(L,t) &= Q_2(t) - \bar{N} w'(L,t), & w(L,t) &= w_2(t) \\ N(L,t) &= N_2 - \bar{N}, & u(L,t) &= u_2(t) \end{aligned} \quad (2.88)$$

A primeira equação representa a equação que governa o movimento axial do duto, enquanto a segunda é responsável por descrever o movimento transversal do duto. A determinação das forças  $F_N$  e  $F_T$  será apresentada na próxima seção.

### 2.4.3 Dinâmica de fluidos

Utiliza-se como referência primária a Figura (2.7) e, em seguida, aplica-se a segunda lei de Newton para o elemento fluido. Antes disso, é importante notar que a velocidade  $c$  representada na figura é a velocidade do escoamento em relação ao duto. Portanto, a velocidade real é a soma da velocidade do duto com a velocidade do escoamento. Considerando isso, as seguintes equações são derivadas a partir do equilíbrio de forças do elemento diferencial de fluido (Figura (2.8)) e do duto (Figura (2.7)), respectivamente.

$$(pA)' + F_N w' + F_T + m_w(g_x + \ddot{u} + \dot{c} + c\dot{u}' + cc') = 0, \quad (2.89)$$

$$(pAw')' + F_T w' - F_N + m_w(g_y + \ddot{w} + 2c\dot{w}' + c^2 w'' + \dot{c}w' + cc'w') = 0. \quad (2.90)$$

A Força  $F_T$  pode ser obtida por meio da equação de Darcy para o fator de atrito.

$$F_T = m_w \frac{f}{2D} |c|c = m_w f_D |c|c. \quad (2.91)$$

Combinando as Eqs.(2.89) e (2.90) e ignorando os termos de mais alta ordem é possível sintetizar toda a informação contidas nessas duas equações em apenas uma.

$$p'A + m_w g_y w' + m_w f_D |c|c + m_w(g_x + \ddot{u} + \dot{c} + c\dot{u}' + cc') = 0. \quad (2.92)$$

Pode-se assumir que tanto a velocidade do fluido, quanto a pressão são constantes, representadas por,  $c_0$  e  $p_0$ , respectivamente. De modo que a Eq.(2.92) pode ser escrita na forma na forma:

$$m_w g_y w' + m_w f_D c_0^2 + m_w g_x + m_w \ddot{u} + m_w c\dot{u}' = 0. \quad (2.93)$$

É possível reescrever também as Eqs.(2.89) e (2.90) como:

$$F_N w' + F_T + m_w(g_x + \ddot{u} + c\dot{u}') = 0, \quad (2.94)$$

e

$$p_0 A w'' + F_T w' - F_N + m_w(g_y + \ddot{w} + 2c\dot{w}' + c^2 w'') = 0. \quad (2.95)$$

## 2.5 Equações governantes para dinâmica de dutos

Somando as Eqs.(2.95) e (2.87) e subtraindo (2.94) de (2.86), ficamos com as seguintes equações:

$$EA_{eff}u'' - m\ddot{u} - m_w c\dot{u}' - m_w g_x = 0, \quad (2.96)$$

e

$$EI_p w'''' + m\ddot{w} - \bar{N}w'' + pAw'' + m_w (2c\dot{w}' + c^2 w'') + m_w g_y = 0, \quad (2.97)$$

onde,

$$m = m_p + m_w. \quad (2.98)$$

Utilizar a Eq.(2.93) permite escrever a equação (2.96) como:

$$EA_{eff}u'' - m_p \ddot{u} + m_w g_y w' + m_w f_D c_0^2 = 0. \quad (2.99)$$

De forma semelhante, pode-se utilizar Eq.(2.93) para escrever a Eq.(2.97) na forma:

$$EI_p w'''' + m\ddot{w} + 2m_w c\dot{w}' - \bar{N}w'' + p_0 A w'' + m_w c_0^2 w'' - m_w f_D c_0^2 w' = 0. \quad (2.100)$$

Definindo uma constante  $T_0$ , como:

$$T_0 = \bar{N} - p_0 A - m_w c_0^2, \quad (2.101)$$

De modo que:

$$EI_p w'''' + m\ddot{w} - T_0 w'' - m_w f_D c_0^2 w' + 2m_w c\dot{w}' = 0. \quad (2.102)$$

## 2.6 Modelagem do elemento espectral

### 2.6.1 Equações governantes no domínio da frequência

Pode-se representar a resposta dinâmica do duto na forma espectral como:

$$w(x,t) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N W_n(x) e^{i\omega_n t}, \quad u(x,t) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N U_n(x) e^{i\omega_n t} \quad (2.103)$$

Da mesma maneira é possível representar as condições de contorno de força e momentos na forma espectral utilizando a serie discreta de Fourier. Substituindo as Eqs.(2.103) em (2.99) e (2.102) reescreve-se as equações governantes como:

$$\begin{aligned}
EA_{eff}U'' + w^2m_pU + m_w g_y W' + m_w f_D c_0^2 N \delta_{0n} &= 0 \\
EI_p W'''' - T_0 W'' - m_w f_D c_0^2 W' + 2i\omega m_w c_0 W' - w^2 m W &= 0
\end{aligned} \tag{2.104}$$

Onde as condições de contorno são dadas por:

$$\begin{aligned}
M(0,t) &= -M_1(t), & w'(0,t) &= \theta_1(t) \\
Q(0,t) &= -Q_1(t) - \bar{N}w'(0,t), & w(0,t) &= w_1(t) \\
N(0,t) &= -N_1(t) - \bar{N}, & u(0,t) &= u_1(t) \\
M(L,t) &= M_2(t), & w'(L,t) &= \theta_2(t) \\
Q(L,t) &= Q_2(t) - \bar{N}w'(L,t), & w(L,t) &= w_2(2) \\
N(L,t) &= N_2 - \bar{N}, & u(L,t) &= u_2(t)
\end{aligned} \tag{2.105}$$

Em que

$$Q(x) = -EIW''(x), \quad M(x) = EI_p W''(x), \quad N(x) = EA_{eff}U'(x) \tag{2.106}$$

## 2.6.2 Formulação espectral de um duto

Escrevendo o vetor deslocamento nodal para o duto como:

$$d = \{W_1 \ \theta_1 \ U_1 \ W_2 \ \theta_2 \ U_2\}^T \tag{2.107}$$

Ou ainda,

$$d = \{W(0) \ \theta(0) \ U(0) \ W(L) \ \theta(L) \ U(L)\}^T \tag{2.108}$$

Definindo o vetor de força e momentos nodais como:

$$\mathbf{f}_c = \{-Q_1 \ M_1 \ N_1 \ Q_2 \ M_2 \ N_2\}^T \tag{2.109}$$

Ou na forma:

$$\mathbf{f}_c = \left\{ -Q(0) - W'(0) \quad -\bar{N} - M(0) \quad -N(0) - \bar{N}N\delta_{0n} \quad Q(L) + \bar{N}W'(L) \quad M(L) \quad N(L)\bar{N} + N\delta_{0n} \right\}^T \tag{2.110}$$

A convenção de sinais utilizadas está ilustrada pela Figura (2.9).

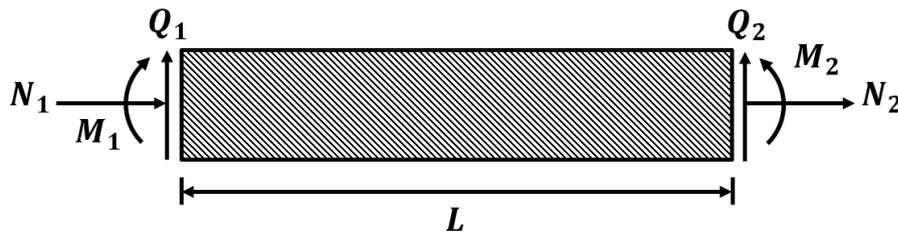


Figura 2.9 – Convenção de sinal para o duto.

### 2.6.3 Funções de forma dinâmicas

Assumindo uma solução do tipo Eq.(2.111) para as equações governantes.

$$W(x) = \beta a e^{-ikx}, \quad U(x) = a e^{-ikx} \quad (2.111)$$

Substituindo a Eq.(2.111) nas Eqs.(2.105) de forma a obter o seguinte problema de autovalor e autovetor.

$$\begin{bmatrix} K_{12} & 0 \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.112)$$

Onde,

$$\begin{aligned} K_{11} &= EI_p k^2 + T_0 k^2 + i(m_c f_D c_0^2 - 2i\omega m_w c_0)k - \omega^2 m = 0 \\ K_{21} &= i m_w g_y k \\ K_{22} &= EA_{eff} k^2 - \omega^2 m_p \end{aligned} \quad (2.113)$$

E em que a relação de dispersão é dada por:

$$EI_p k^4 + T_0 k^2 + i(m_w f_D c_0^2 - 2i\omega m_w c_0)k - \omega^2 m = 0 \quad (2.114)$$

E

$$EA_{eff} k^2 - \omega^2 m_p = 0 \quad (2.115)$$

Deve-se resolver as equações numericamente para obter os números de onda  $k_1, k_2, k_3, k_4, k_5$  e  $k_6$ . Da Eq.(2.115), tem-se:

$$k_5 = -k_6 = \omega \sqrt{\frac{m_p}{EA_{eff}}} \quad (2.116)$$

Para cada número de onda  $k_j (j = 1, 2, \dots, 6)$ , escrevendo  $\beta_j$  como:

$$\beta_j = \begin{cases} \frac{EA_{eff}k_j^2 - \omega^2 m_p}{ik_j m_w g_y} & (j = 1,2,3,4) \\ 0 & (j = 5,6) \end{cases} \quad (2.117)$$

Definindo a matriz diagonal como:

$$\mathbf{B} = \text{diag} [\beta_j] \quad (j = 1,2, \dots, 6) \quad (2.118)$$

Pode-se então escrever a solução geral na forma:

$$W(x) = \sum_{j=1}^6 \beta_j a_j e^{-ik_j x} = \mathbf{e}(x) \mathbf{B} \mathbf{a} \quad (2.119)$$

$$U(x) = \sum_{j=1}^6 a_j e^{-ik_j x} = \mathbf{e}(x) \mathbf{a} \quad (2.120)$$

Em que

$$\mathbf{e}(x; \omega) = [e^{-ik_1 x} \quad e^{-ik_2 x} \quad e^{-ik_3 x} \quad e^{-ik_4 x} \quad e^{-ik_5 x} \quad e^{-ik_6 x}] \quad (2.121)$$

E

$$\mathbf{a} = \{a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \quad a_5 \quad a_6\}^T \quad (2.122)$$

Isso permite escrever os deslocamentos nodais como:

$$\mathbf{d} = \mathbf{H}(\omega) \mathbf{a} \quad (2.123)$$

Onde

$$\mathbf{H}(\omega) = \begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & 0 & 0 \\ -ik_1 \beta_1 & -ik_2 \beta_2 & -ik_3 \beta_3 & -ik_4 \beta_4 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \beta_1 e_1 & \beta_2 e_2 & \beta_3 e_3 & \beta_4 e_4 & 0 & 0 \\ -ik_1 \beta_1 e_1 & -ik_2 \beta_2 e_2 & -ik_3 \beta_3 e_3 & -ik_4 \beta_4 e_4 & 0 & 0 \\ e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{bmatrix} \quad (2.124)$$

Em que

$$e_j = e^{-ik_j L} \quad (j = 1,2, \dots, 6) \quad (2.125)$$

Usando a Eq.2.123 em Eq.2.119 e Eq.2.120, tem-se:

$$W(x) = \mathbf{N}_w(x; \omega) \mathbf{d}, \quad U(x) = \mathbf{N}_u(x; \omega) \mathbf{d} \quad (2.126)$$

No qual

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_w(x; \omega) &= \mathbf{e}(x) \mathbf{B} \mathbf{H}^{-1}(\omega) \\ \mathbf{N}_u(x; \omega) &= \mathbf{e}(x) \mathbf{H}^{-1}(\omega) \end{aligned} \quad (2.127)$$

Partindo de todas essas definições pode-se escrever a matriz de rigidez dinâmica como:

$$\mathbf{S}(\omega) = \mathbf{H}^T(\omega) \mathbf{D}(\omega) \mathbf{H}^{-1}(\omega) \quad (2.128)$$

Onde

$$\begin{aligned} \mathbf{D}(\omega) &= EI_p \mathbf{B} \mathbf{K}^2 \mathbf{E} \mathbf{K}^2 \mathbf{B} - T_0 \mathbf{B} \mathbf{K} \mathbf{E} \mathbf{K} \mathbf{B} + im_w f_D c_0^2 \mathbf{B} \mathbf{E} \mathbf{K} \mathbf{B} - \omega^2 m \mathbf{B} \mathbf{E} \mathbf{B} \\ &+ \omega m_w c_0 \mathbf{B} (\mathbf{E} \mathbf{K} - \mathbf{K} \mathbf{E}) \mathbf{B} - EA_{eff} \mathbf{K} \mathbf{E} \mathbf{K} - \omega^2 m_p \mathbf{E} + im_w g_y \mathbf{E} \mathbf{K} \mathbf{B} \\ &+ i\omega m_w c_0 \mathbf{B} \bar{\mathbf{E}} \mathbf{E} + i(T_0 - \bar{N}) \mathbf{B} \bar{\mathbf{E}} \mathbf{K} \mathbf{B} \end{aligned} \quad (2.129)$$

Em que

$$\mathbf{E}(\omega) = [E_{rs}(\omega)] \quad (2.130)$$

$$\bar{\mathbf{E}}(\omega) = [\bar{E}_{rs}(\omega)] \quad (2.131)$$

com

$$E_{rs} = \begin{cases} \frac{i}{K_r + K_s} \bar{E}_{rs} & \text{se } K_r + K_s \neq 0 \\ L & \text{se } K_r + K_s = 0 \end{cases} \quad (2.132)$$

$$\bar{E}_{rs} = e^{-i(k_r + k_s)L} - 1 \quad (2.133)$$

E

$$\mathbf{K} = \text{diag}[K_i], \quad \mathbf{K}^2 = \text{diag}[K_i^2] \quad (2.134)$$

Pode-se ainda após obtenção da matriz de rigidez dinâmica escrever os deslocamentos nodais, já com as condições de contorno como:

$$\mathbf{d}_g = \mathbf{f}_g \mathbf{S}_g^{-1}(\omega) \quad (2.135)$$

Onde  $\mathbf{f}_g$  é o vetor global de forças nodais.

## 3 Propagação de ondas em dutos transportando fluidos

Neste capítulo, abordar-se-á a metodologia adotada para conduzir as simulações, com foco nas adaptações realizadas no algoritmo de elemento espectral de duto para incorporar a presença de ressonadores. Além disso, serão detalhados os métodos de validação utilizados para as simulações.

### 3.1 Construção dos dutos

O modelo numérico do elemento espectral de duto, discutido e apresentado no capítulo anterior, foi implementado em Python, uma linguagem de programação de alto nível. A partir deste algoritmo, foram realizadas as simulações. Entretanto, é importante, preliminarmente, discutir alguns aspectos, como as configurações consideradas na simulação, para que, a partir delas, seja possível aprofundar a análise dos resultados.

#### 3.1.1 Configuração do duto simples

Foi selecionada uma configuração que melhor se aproxima da realidade de uso de dutos em geral, ou seja, uma configuração bi-apoiada com apoios do tipo simples. Nessa configuração, a única restrição cinemática imposta ao duto é a ausência de deslocamentos verticais nas extremidades apoiadas. Um esquema dessa configuração pode ser observado na Figura (3.1).

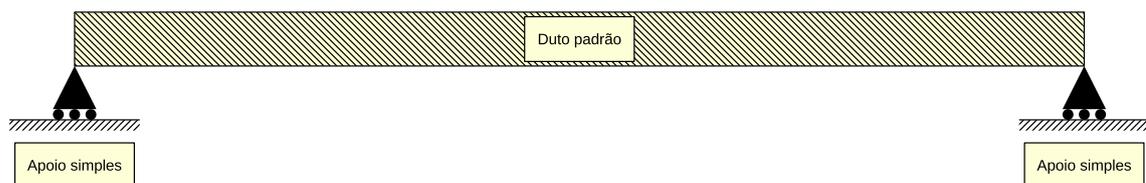


Figura 3.1 – Esquemático de uma configuração de duto padrão.

Após a definição dessa configuração, foram estabelecidos dois pontos essenciais: um ponto à esquerda do ponto de apoio à direita para aplicação do forçamento e outro ponto para observar a resposta do duto ao forçamento aplicado, localizado à esquerda do ponto de apoio à direita. Nesse contexto, é possível compreender o sistema como um modelo LTI (Linear Time-Invariant), no qual a entrada é o forçamento aplicado e a saída é a resposta do duto a esse forçamento específico. Por este motivo esses pontos foram representados justamente como entrada e saída no sistema na Figura (3.2).

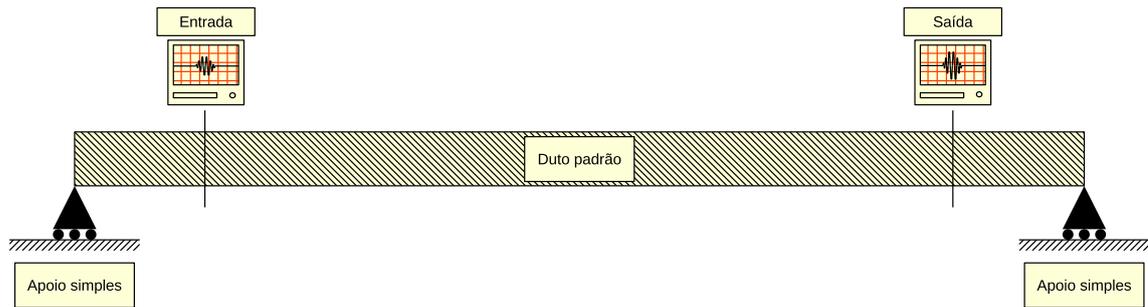


Figura 3.2 – Disposição dos pontos de controle.

### 3.1.2 Configuração do duto com ressonadores

Considerando que o propósito final deste trabalho é investigar o uso de um metamaterial que consiste na integração de ressonadores ao duto, é crucial definir claramente sua configuração. Esta subseção pode ser vista como um complemento à seção anterior, já que incorpora parte da estrutura definida anteriormente para incluir os ressonadores. Portanto, elementos como os apoios simples e os pontos de controle permanecerão na configuração do duto com ressonadores. A principal diferença é que nessa configuração também estão presentes os ressonadores, ampliando a estrutura

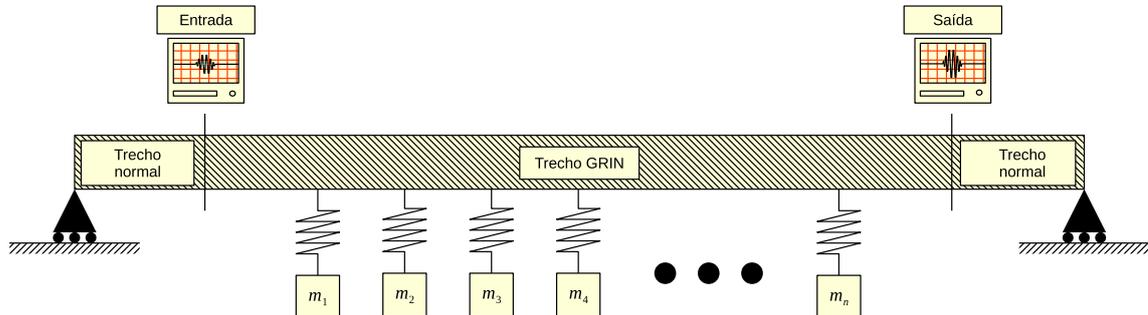


Figura 3.3 – Esquemático da configuração do final do duto com ressonadores.

Na Figura (3.3), a primeira observação notável é a representação dos ressonadores como massa-mola. Essa abordagem é uma forma relativamente simples de implementação e será detalhada mais adiante. Neste momento, a ênfase está na definição de aspectos geométricos, como o posicionamento de cada elemento. Aproveitando essa etapa, determinaram-se algumas distâncias cruciais, como a distância em relação aos apoios para cada ponto de controle, a distância do primeiro e último ressonador em relação aos pontos de controle e a distância entre cada ressonador. Essas medidas serão fundamentais para estabelecer o tamanho de cada elemento do duto, uma informação essencial na implementação computacional do método de elemento espectral para o duto. A Figura (3.4) oferece uma visualização dessas distâncias.

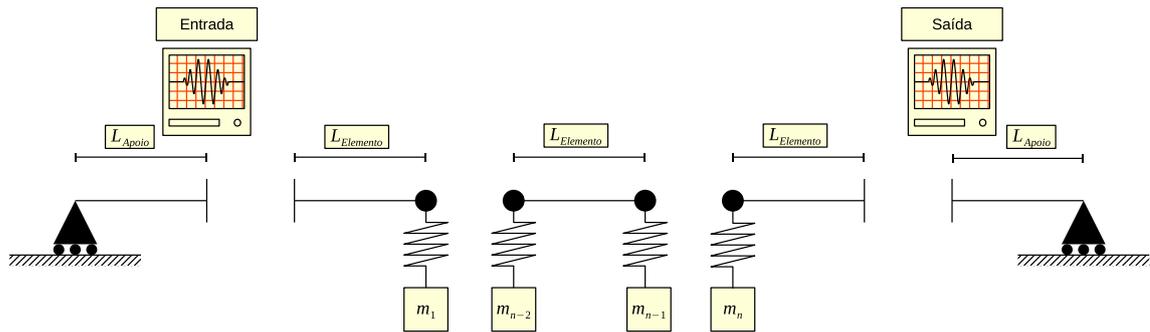


Figura 3.4 – Distâncias entre os elementos ilustrados no esquemático final.

### 3.1.3 Elemento de duto e composição de elementos

Para a representação numérica do duto, o mesmo será dividido em elementos, cada um composto por dois nós, como ilustrado na Figura (3.5).

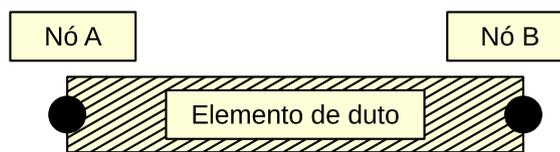


Figura 3.5 – Esquemático de um elemento de duto.

O duto será constituído pela junção desses elementos individuais, assemelhando-se à composição de dutos menores. A combinação de dois elementos de dutos está ilustrada na Figura (3.6).

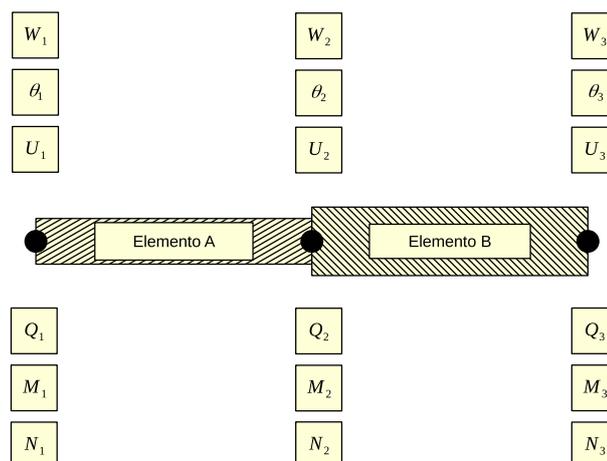


Figura 3.6 – Esquemático da união de dois elementos de duto.

A representação dessa união pode ser observada na matriz de rigidez, conforme demonstrado na Figura (3.7).

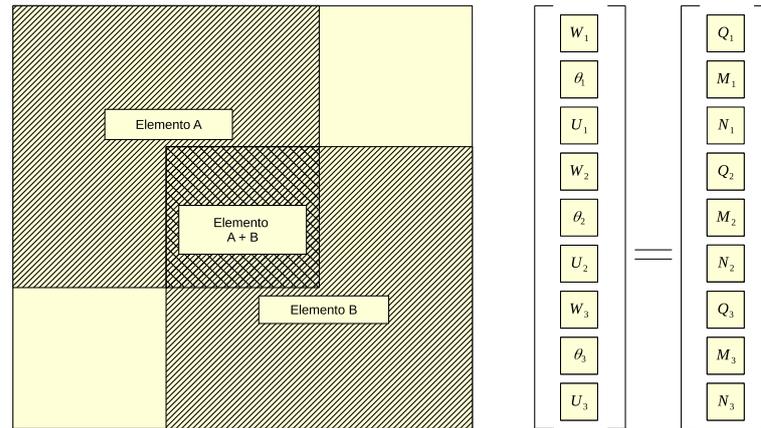


Figura 3.7 – Matriz de rigidez no caso de união de dois elementos.

Na seção onde há ressonadores, considera-se uma junção conforme ilustrada na Figura (3.8).

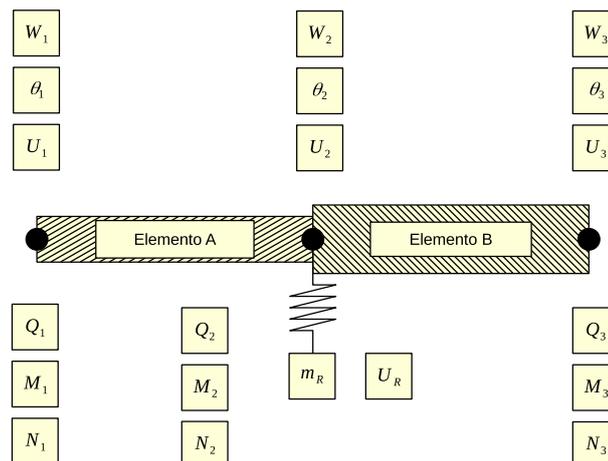


Figura 3.8 – Esquemático da união de dois elemento de duto com um ressonador entre eles.

Antes de mostrar como a presença dos ressonadores influencia a matriz de rigidez global, é fundamental realizar a modelagem adequada. Através dela, torna-se possível visualizar com maior clareza as implicações dos ressonadores no sistema duto-ressonador. O propósito principal é comunicar de maneira precisa e clara todas as etapas do processo de simulação. Para representar o ressonador na forma de massa-mola, utiliza-se um sistema análogo ao ilustrado na Figura (3.9).

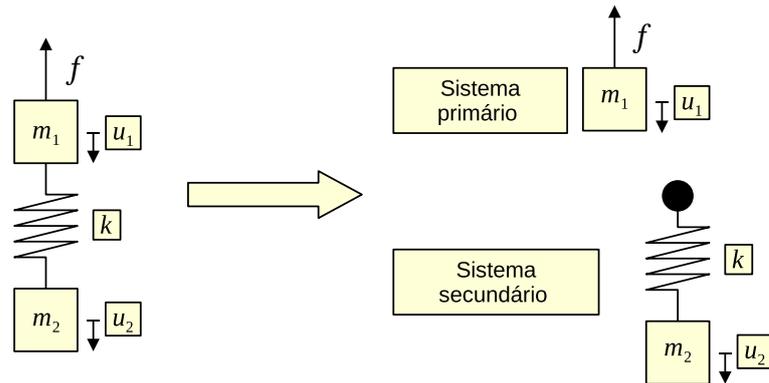


Figura 3.9 – Sistema massa-mola com 2 graus de liberdade.

Ao aplicar a segunda lei de Newton ao sistema mencionado anteriormente, é possível derivar as seguintes equações de movimento:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{u}_1 - k(u_1 - u_2) &= f \\ m_2 \ddot{u}_2 - k(u_2 - u_1) &= 0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

Simplificando,

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{u}_1 - k u_1 + k u_2 &= f \\ m_2 \ddot{u}_2 - k u_2 + k u_1 &= 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

No modelo de elemento espectral, em que o domínio das equações é a frequência, é necessário aplicar a transformada de Fourier em ambos os lados das equações. Ao realizar essa operação, obtemos:

$$\begin{aligned} -m_1 \omega^2 U_1 - k U_1 + k U_2 &= F \\ -m_2 \omega^2 U_2 - k U_2 + k U_1 &= 0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

Colocando em evidência os deslocamentos, tem-se:

$$\begin{aligned} (-m_1 \omega^2 - k) U_1 + k U_2 &= F \\ (-m_2 \omega^2 - k) U_2 + k U_1 &= 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

Na forma matricial, o sistema pode ser representado da seguinte maneira:

$$\begin{bmatrix} -m_1 \omega^2 - k & k \\ k & -m_2 \omega^2 - k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Onde a matriz de rigidez global do sistema é representada pela matriz,

$$k_{\text{Global}} = \begin{bmatrix} -m_1 \omega^2 - k & k \\ k & -m_2 \omega^2 - k \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

É possível realizar uma separação na matriz global, distinguindo a parcela correspondente à contribuição do sistema primário e a parcela relacionada à contribuição do sistema secundário.

$$k_{\text{Global}} = k_{\text{Primário}} + k_{\text{Secundário}} \quad (3.7)$$

Onde o sistema primário é dado por:

$$k_{\text{Primário}} = \begin{bmatrix} -m_1\omega^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

E o sistema secundário por:

$$k_{\text{Secundário}} = \begin{bmatrix} -k & k \\ k & -m_2\omega^2 - k \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

A matriz de rigidez secundária pode ser expressa em termos de parâmetros concentrados, onde um está relacionado a dois nós associados à rigidez da mola e outro parâmetro de um nó associado à massa, como ilustrado pela Figura 3.10.

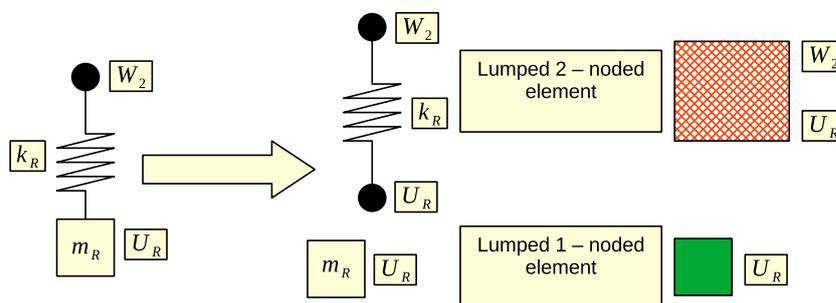


Figura 3.10 – Esquemático dos parâmetros concentrados.

Conforme ilustrado na figura acima, é possível decompor o sistema secundário em parâmetros concentrados, cada um deles com uma matriz de rigidez associada, representadas por:

$$k_{\text{Elemento 2 - nós}} = \begin{bmatrix} -k & k \\ k & -k \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

E o outro parâmetro dado por:

$$k_{\text{Elemento 1 - nó}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -m_2\omega^2 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

No duto, a abordagem é semelhante: a matriz de rigidez do sistema primário é obtida através do método de elementos espectrais. A incorporação da matriz de rigidez do sistema

secundário, representado pelos ressonadores, é a única modificação necessária. Dessa forma, para o caso ilustrado na Figura (3.8), a matriz de rigidez global pode ser representada conforme ilustrado na Figura (3.11).

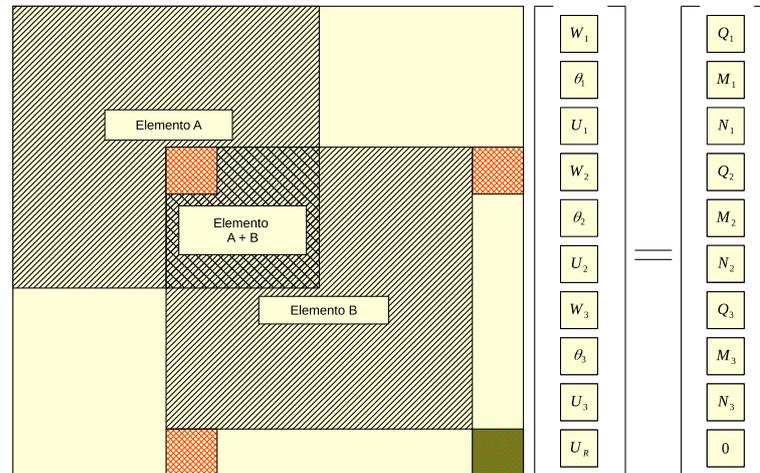


Figura 3.11 – Matriz de rigidez global para o caso de duto com ressonador.

Outra implicação da incorporação dos ressonadores é a adição de mais um grau de liberdade ao sistema.

## 3.2 Construção do forçamento de entrada

Para simular o comportamento dinâmico do duto e obter uma resposta adequada, é essencial aplicar uma excitação externa, ou seja, um forçamento. A escolha desse forçamento desempenha um papel crucial na identificação da resposta desejada. Portanto, é importante selecionar um tipo de forçamento que permita uma visualização rápida e facilite a análise do comportamento do sistema. Escolher a forma correta de forçamento ajuda na compreensão mais clara e na análise eficiente da resposta dinâmica do duto. Em função dessas características, optou-se por utilizar um forçamento do tipo pulso, o qual é definido como:

$$f(t) = \begin{cases} A \sin(2\pi f_c t), & 0 \leq t \leq T_{\text{Pulso}} \\ 0, & t > T_{\text{Pulso}} \end{cases} \quad (3.12)$$

Em que

$$T_{\text{Pulso}} = \frac{N_{\text{períodos}}}{f_c} \quad (3.13)$$

Onde  $A$  representa a amplitude,  $f_c$  é a frequência central do pulso e  $N_{\text{períodos}}$  é o número de períodos do pulso. Considerando um pulso com amplitude de 1 kN, frequência de 1500 Hz e número de períodos igual a 10, é possível obter o seguinte gráfico, Figuras (3.12), (3.13) no domínio do tempo e da frequência.

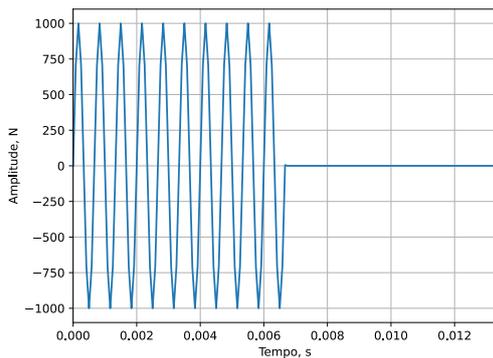


Figura 3.12 – Gráfico do pulso no domínio do tempo.

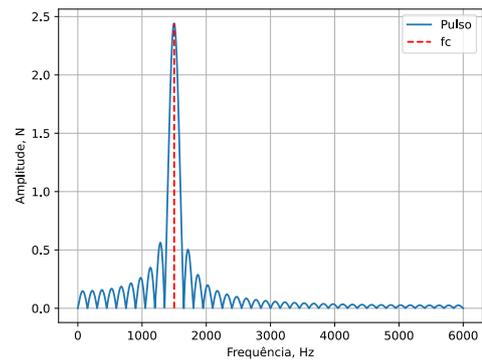


Figura 3.13 – Gráfico do pulso no domínio da frequência.

Observa-se uma dispersão relativamente significativa no domínio da frequência, indicando a presença de um vazamento substancial, ou "leakage". Uma estratégia para reduzir essa interferência indesejada é centralizar o sinal na frequência de interesse, que corresponde à frequência do pulso. Uma abordagem comum para mitigar esse vazamento é a utilização de janelamento, um processo que ajuda a concentrar o sinal em torno da frequência desejada.

Existem várias funções de janelamento disponíveis para este propósito. Neste trabalho, será utilizada a janela "hann", fornecida pela biblioteca SciPy do Python. A aplicação desta janela deve ser realizada antes da transformação para o domínio da frequência. Essa abordagem implica em algumas alterações no sinal. O sinal janelado pode ser visualizado através das figuras, Figuras (3.14), (3.15) a seguir.

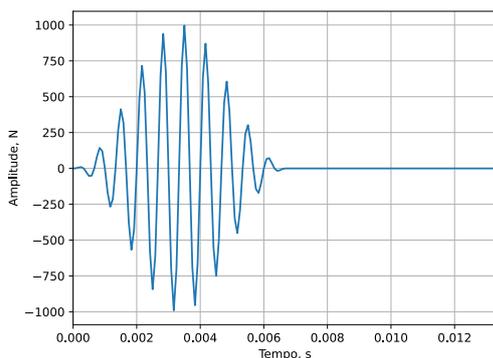


Figura 3.14 – Pulso janelado no domínio do tempo.

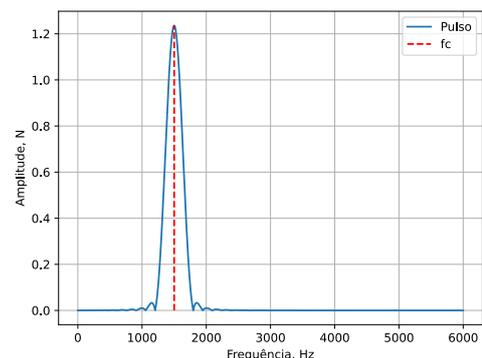


Figura 3.15 – Pulso janelado no domínio da frequência.

Ficou claro que essa estratégia se mostrou efetiva para alcançar o objetivo desejado, já que resultou em uma redução considerável do "leakage" presente no sinal.

### 3.3 Simulação e verificação duto sem ressonadores

Após estabelecer um modelo para o duto e determinar a natureza da força aplicada, o próximo passo é realizar a simulação para validar os resultados obtidos. Isso implica na definição precisa de vários parâmetros associados ao duto, incluindo propriedades físicas, dimensões e outros fatores relevantes para o modelo de elementos espectrais conforme explicado anteriormente. O objetivo é verificar se os resultados da simulação condizem com o comportamento esperado e se são consistentes com as previsões teóricas ou experimentais, todos os parâmetros utilizados na simulação estão disponíveis na Tabela (3.1).

Parâmetros	Valores
Módulo de elasticidade (E)	210 GPa
Densidade do duto ( $\rho_p$ )	7500 kg/m <sup>3</sup>
Densidade do fluido ( $\rho_f$ )	1 kg/m <sup>3</sup>
Amortecimento estrutural ( $\eta$ )	1e-3
Raio interno do duto ( $r_i$ )	25 mm
Raio externo do duto ( $r_o$ )	30 mm
Velocidade de escoamento (c)	0 m/s
Tração axial média ao longo do duto ( $\bar{N}$ )	1 kN
Pressão interna do duto ( $p_0$ )	1 Pa
Aceleração da gravidade (g)	9.81 m/s <sup>2</sup>
Inclinação do duto ( $\theta$ )	0 rad
Fator de atrito (f)	.01
Comprimento dos apoios ( $L_{\text{Apoio}}$ )	10 m
Comprimento dos elementos ( $L_{\text{Elemento}}$ )	10 m
Número de elementos	8
Comprimento total do duto ( $L_{\text{Total}}$ )	80 m
Frequência central do pulso	1500 Hz

Tabela 3.1 – Parâmetros de simulação para o caso duto sem ressonadores.

A escolha de uma densidade de fluido igual a 1 se deve à estratégia de aproximar o comportamento do duto ao máximo de uma viga. Isso possibilita a utilização de resultados conhecidos na literatura associados a vigas. Além disso, foram definidas a velocidade nula de escoamento e uma pressão interna baixa. Com base nesses parâmetros, os resultados obtidos podem ser visualizados nas Figuras a seguir.

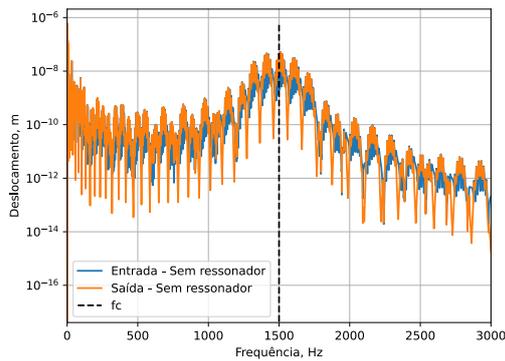


Figura 3.16 – Amplitude em frequência ao pulso nos pontos de controle.

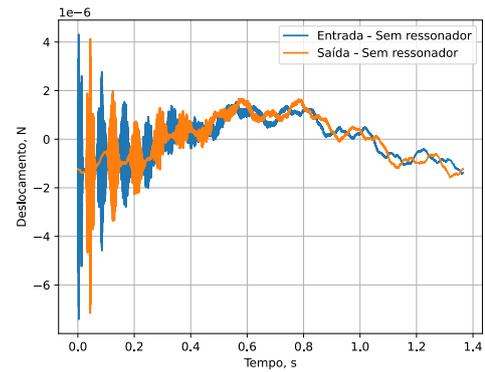


Figura 3.17 – Resposta no tempo ao pulso nos pontos de controle.

Os primeiros indicadores relevantes para validar essa simulação são encontrados nos domínios da frequência e do tempo. No domínio da frequência, a presença de um salto na frequência central do pulso, conforme ilustrado na Figura 3.16, indica a formação adequada do pulso, sugerindo que a simulação está captando de forma adequada o comportamento desejado. No domínio do tempo, observamos que a resposta gradativamente converge para zero ao longo do tempo, devido ao amortecimento estrutural e à dissipação progressiva de energia. Além disso, outro ponto significativo no domínio do tempo pode ser analisado com mais detalhes por meio de uma imagem complementar, a qual está disponível abaixo.

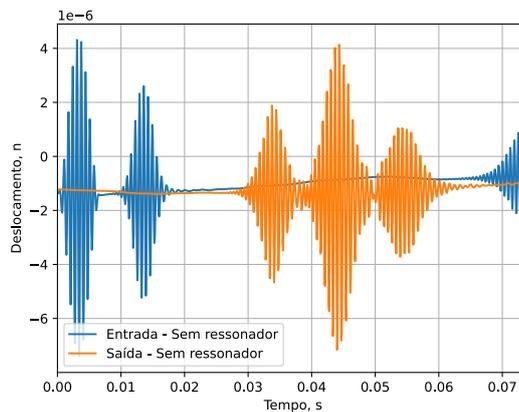


Figura 3.18 – Resposta no tempo ampliado.

Na figura apresentada, evidencia-se uma consequência significativa da condição bi-apoiada do duto. Nota-se a ocorrência de pulsos, tanto antes de sua chegada à saída quanto após a sua passagem por esta. Essa observação está completamente alinhada com as expectativas, e a razão subjacente a esse padrão será esclarecida adiante. Quando uma onda percorre uma estrutura e se depara com uma descontinuidade, apenas uma porção dela continua sua propagação, enquanto o restante é decomposto em uma parte refletida e

outra evanescente.

A porção transmitida é definida como aquela capaz de penetrar na descontinuidade e continuar sua propagação, ao passo que a porção refletida representa a parte da onda incapaz de incidir na descontinuidade e, portanto, retorna à sua origem. Por sua vez, a porção evanescente corresponde àquela presente exclusivamente na interface meio-descontinuidade, sem se propagar ativamente na descontinuidade.

Quanto aos tipos de descontinuidades, também referidas como contornos, estas podem ser classificadas em dois tipos: fixas e móveis. Será abordado a seguir o tipo fixo, Figura 3.19, seguido por uma subsequente explanação sobre o tipo móvel, mas esta somente na subseção seguinte onde a mesma se fará necessária.

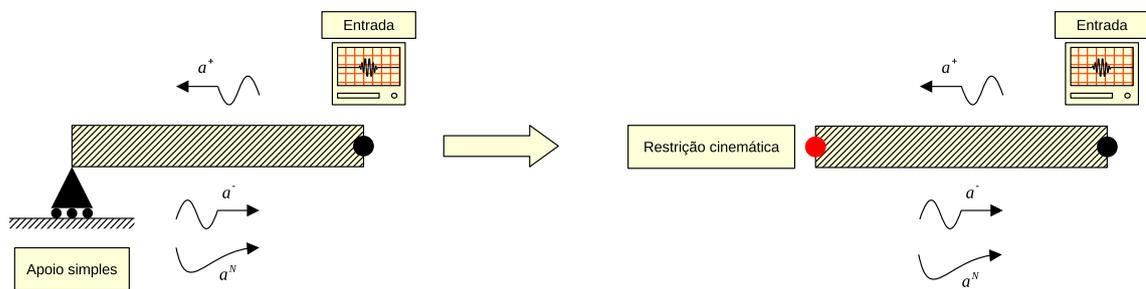


Figura 3.19 – Contorno fixo.

As variáveis  $a^+$ ,  $a^-$  e  $a^N$  representam, respectivamente, as parcelas incidente, refletida e evanescente. A verificação de serem reflexões pode ser realizada ao calcular o tempo necessário para a onda percorrer o trajeto do ponto de entrada até o ponto de apoio e retornar ao ponto de entrada. Isso pode ser feito ao determinar a velocidade de grupo da onda propagada em um elemento do duto, que, com base nos parâmetros utilizados, pode ser estimada pela fórmula de propagação de ondas de flexão em vigas, dada por (Graff, 1991):

$$v_{\text{Grupo}} = 2\sqrt[4]{\frac{EI\omega^2}{\rho A}} \quad (3.14)$$

Aproveitando a fórmula, é possível verificar também se a formação do primeiro pulso na saída ocorreu no tempo correto. Considerando que a distância entre o apoio e o ponto de entrada é denotada por  $L_{\text{Apoio}}$ , o tempo que a onda leva para ser refletida e percebida pelo ponto de entrada é dado por:

$$t_{\text{Refletida}} = 2\frac{L_{\text{Apoio}}}{v_{\text{Grupo}}} \quad (3.15)$$

Enquanto o tempo necessário para que a onda vá do ponto de entrada ao ponto de saída é dado por:

$$t_{\text{Total}} = \frac{L_{\text{Elemento}}}{v_{\text{Grupo}}} (N_e - 2) \quad (3.16)$$

Ao calcular esses tempos e plotá-los juntamente com a resposta ao pulso no tempo, obtém-se:

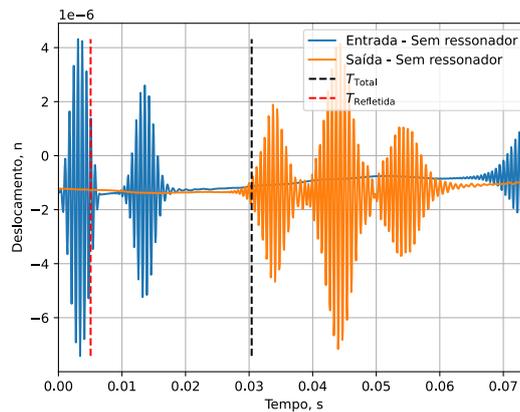


Figura 3.20 – Deslocamento nos pontos de entrada e saída do duto sem ressonador. Tempo de reflexões diretamente derivadas do pulso (primárias) são destacados com linhas transversais tracejadas.

A segunda onda formada na saída corresponde à reflexão da onda ao passar por esse ponto, alcançar o apoio à direita e retornar ao ponto de saída. Já a terceira onda é gerada pela reflexão da onda original no ponto de entrada, alcançando posteriormente o ponto de saída. Ambas podem ser calculadas de maneira analítica utilizando as equações a seguir, respectivamente.

$$\begin{aligned} t_{\text{Refletida-Saída}} &= t_{\text{Total}} + t_{\text{Refletida}} \\ t_{\text{Refletida-Entrada}} &= t_{\text{Total}} + 2t_{\text{Refletida}} \end{aligned} \quad (3.17)$$

Ao calcular esses tempos e plotá-los junto com a resposta temporal ao pulso, obtemos:

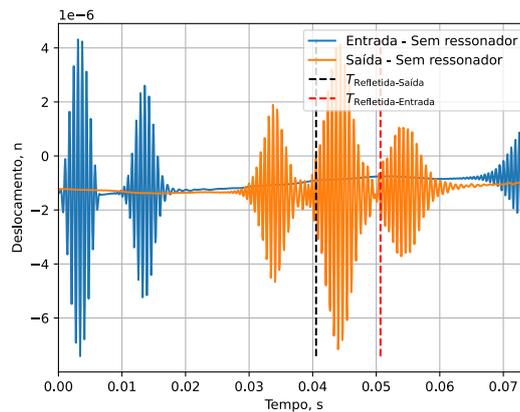


Figura 3.21 – Deslocamento nos pontos de entrada e saída do duto sem ressonador. Tempo de reflexões geradas pelo efeito de contorno (secundárias) são destacados com linhas transversais tracejadas.

A convergência dos resultados obtidos para o valor teórico, utilizando as fórmulas de velocidade de grupo para vigas, representa mais uma evidência da validade da simulação realizada. Isso reforça a premissa de que a condição análoga à viga também é válida, para os parâmetros utilizados. De modo geral, a propagação ao longo do duto pode ser acompanhada integralmente pela Figura (3.22), nela é possível observar a onda indo de um ponto a outro..

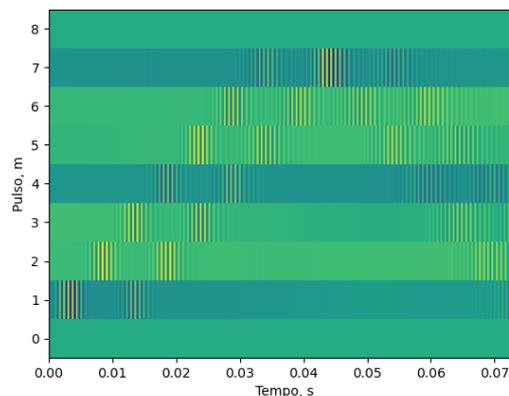


Figura 3.22 – Diagrama tempo  $\times$  espaço da propagação do pulso ao longo do duto sem ressonadores.

### 3.4 Simulação e verificação duto com ressonadores periódicos

Na simulação da configuração do duto com ressonadores periódicos, serão utilizados os mesmos parâmetros que foram empregados na configuração anterior sem os ressonadores. Desta vez, ao incorporar os ressonadores, foi tomado o cuidado de garantir o mesmo número de elementos, assim como o mesmo comprimento total e comprimento de elementos. Abaixo, segue uma tabela contendo todos os parâmetros utilizados na realização da simulação.

Parâmetros	Valores
Módulo de elasticidade (E)	210 GPa
Densidade do duto ( $\rho_p$ )	7500 kg/m <sup>3</sup>
Densidade do fluido ( $\rho_f$ )	1 kg/m <sup>3</sup>
Amortecimento estrutural ( $\eta$ )	1e-3
Raio interno do duto ( $r_i$ )	25 mm
Raio externo do duto ( $r_o$ )	30 mm
Velocidade de escoamento (c)	0 m/s
Tração axial média ao longo do duto ( $\bar{N}$ )	1 kN
Pressão interna do duto ( $p_0$ )	1 Pa
Aceleração da gravidade (g)	9.81 m/s <sup>2</sup>
Inclinação do duto ( $\theta$ )	0 rad
Fator de atrito (f)	.01
Comprimento dos apoios ( $L_{\text{Apoio}}$ )	10 m
Comprimento dos elementos ( $L_{\text{Elemento}}$ )	10 m
Número de elementos	8
Comprimento total do duto ( $L_{\text{Total}}$ )	80 m
Número de ressonadores	5
Frequência dos ressonadores ( $f_R$ )	1500 Hz
Frequência central do pulso ( $f_c$ )	1500 Hz
Razão de massa ( $m_R/m_{\text{Duto}}$ )	0.1

Tabela 3.2 – Parâmetros de simulação para o caso duto com ressonadores periódicos.

Como resultado da simulação, com base nos parâmetros descritos na Tabela (3.2), foi gerado o seguinte gráfico:

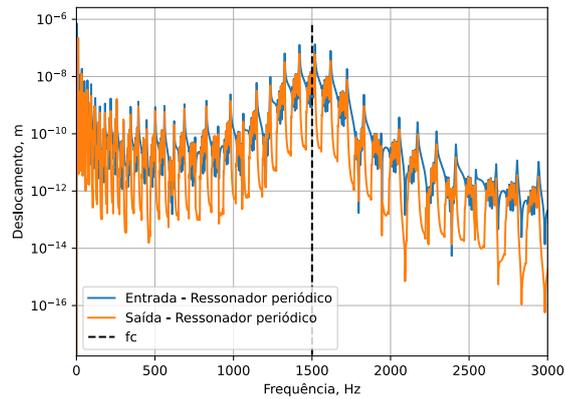


Figura 3.23 – Amplitude da resposta ao pulso em função da frequência para o caso duto com ressonadores periódicos.

Primeiramente, é possível observar uma resposta dinâmica distinta daquela apresentada pela Figura (3.16). Essa diferença é esperada, uma vez que a presença dos ressonadores deveria influenciar as características de propagação de ondas no duto, como a alteração das frequências de ressonância, entre outras. Portanto, inicialmente, essa divergência é um indicativo positivo. No entanto, não é suficiente para tirar conclusões definitivas. Como complemento, foram gerados gráficos adicionais que demonstram a resposta em frequência ao pulso em cada ponto contendo um ressonador. Espera-se que nesses pontos, na frequência do ressonador, ocorram fenômenos de anti-ressonância. Dado que a frequência dos ressonadores foi escolhida como a mesma frequência central do pulso, prevê-se que eles atuem como absorvedores dinâmicos de vibração, resultando em curvas características de anti-ressonância nessa frequência. Os gráficos gerados podem ser visualizados abaixo.

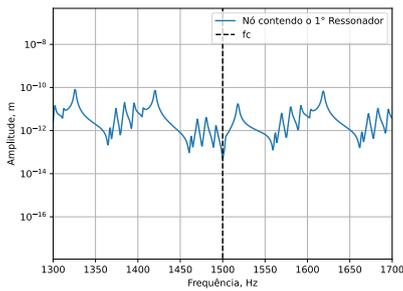


Figura 3.24 – Amplitude em frequência ao pulso no ponto contendo o primeiro ressonador.

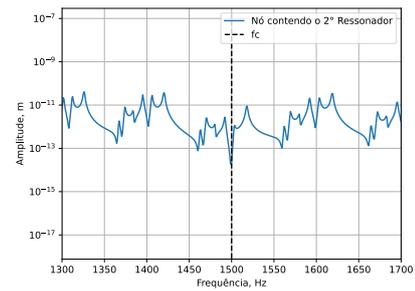


Figura 3.25 – Amplitude em frequência ao pulso no ponto contendo o segundo ressonador.

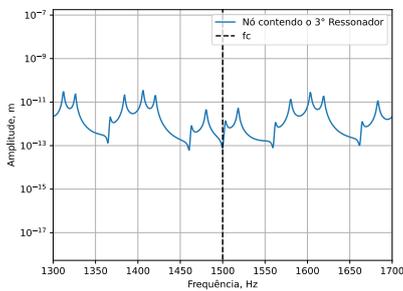


Figura 3.26 – Amplitude em frequência ao pulso no ponto contendo o terceiro ressonador.

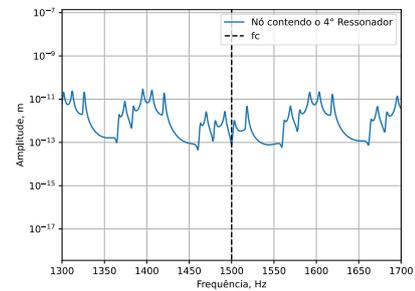


Figura 3.27 – Amplitude em frequência ao pulso no ponto contendo o quarto ressonador.

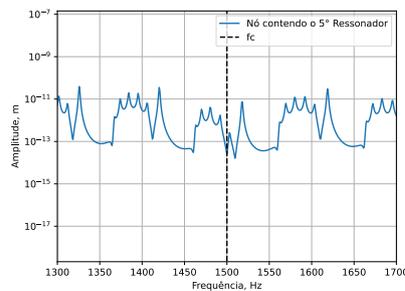


Figura 3.28 – Amplitude em frequência ao pulso no ponto contendo o quinto ressonador.

Observa-se que, de fato, obtém-se o resultado esperado. Na frequência do ressonador, observam-se antirressonâncias formadas, o que se manifesta como uma redução significativa no sinal de saída. O gráfico da resposta no tempo ao pulso na saída está representado na Figura (3.29).

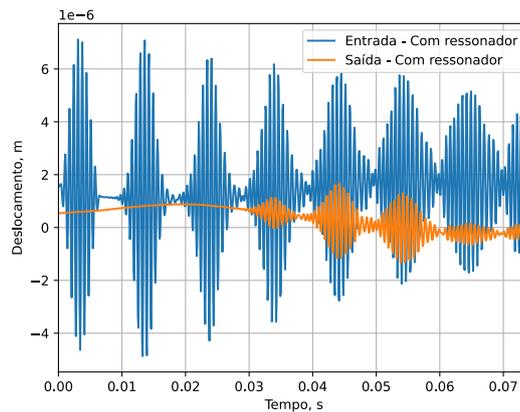


Figura 3.29 – Resposta no tempo ao pulso na saída para o caso duto com ressonadores periódicos.

Na figura acima, dois pontos distintos divergem do resultado obtido no caso sem ressonadores. O primeiro ponto refere-se ao efeito de atenuação do pulso, previsto devido à igualdade das frequências dos ressonadores e do pulso, os quais, para esta situação, atuam como absorvedores dinâmicos de vibrações. Outra observação é a presença de múltiplas ondas formadas, em quantidade significativamente maior do que no caso anterior. Esse fenômeno é atribuído à presença do segundo tipo de descontinuidade, denominado de tipo móvel. Esta descontinuidade é responsável por gerar um maior número de reflexões; ao adentrar a seção, cada ressonador gera uma descontinuidade, resultando em uma multiplicidade de fontes de reflexão.

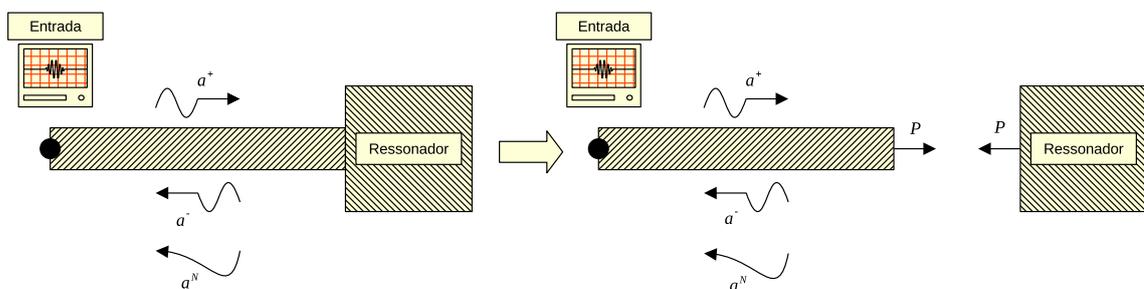


Figura 3.30 – Descontinuidade móvel.

Dado que o meio de propagação continua sendo o duto e os ressonadores são meras pontualidades, o tempo de reflexão também pode ser aproximado pela equação de velocidade de grupo para uma viga, assim como no caso anterior sem ressonadores. A única diferença neste caso é a presença de um maior número de descontinuidades.

Outra questão plausível surge: por que ainda há amplitude de vibração na saída se os ressonadores estão atuando como absorvedores dinâmicos de vibrações? Algumas hipóteses foram levantadas: a primeira é que o número de ressonadores não foi suficiente para impedir a propagação da onda; a segunda hipótese é que algum fenômeno local ocorre no elemento de

saída, possivelmente atingindo algum ponto de ressonância local ou algo similar. A imagem a seguir fornecerá mais evidências para a segunda hipótese, e o motivo será explicado em seguida.

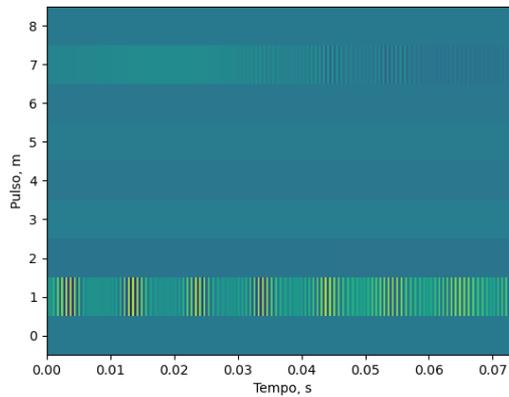


Figura 3.31 – Propagação da onda ao longo do duto com ressonadores periódicos.

Observe que nos nós intermediários não há amplitude, enquanto no nó de saída há. Ou seja, os ressonadores foram suficientes para atuar no pulso, e a amplitude observada na saída é proveniente de algum evento local.

### 3.5 Simulação e verificação duto com ressonadores de índice gradiente

Antes de apresentar a tabela com os parâmetros de simulação, é crucial discutir o conceito do gradiente, pois este desempenha um papel fundamental no modelo do duto com ressonadores de índice gradiente (GRIN). Nesse modelo, cada ressonador possui uma razão de massa distinta, mantendo-se uma rigidez fixa. Assim, uma mudança na massa não afeta a rigidez, mas influencia a frequência do ressonador. A variação da razão de massa é representada por uma curva linear simples, descrita por:

$$\mu_R = \left( \frac{\mu_{R_{\max}} - \mu_{R_{\min}}}{n_r - 1} \right) n + \mu_{R_{\min}} \quad (3.18)$$

Nesta equação,  $\mu_R$  representa a razão de massa, enquanto  $n$  é o índice do ressonador. Vale ressaltar que essa abordagem considera um número de ressonadores superior a um. Como dito anteriormente a rigidez é fixa e dada por:

$$k_R = \mu_{R_{\min}} m_{\text{viga}} \omega^2 \quad (3.19)$$

Em que

$$\omega = 2\pi f_{R_{\text{base}}} \quad (3.20)$$

Onde  $f_{R_{\text{base}}}$  é a frequência do primeiro ressonador. Desta forma, se a razão de massa aumenta, a frequência do ressonador diminui; por outro lado, se a razão de massa diminui, a frequência do ressonador aumenta. A ideia é que, por meio da variação da curva da razão de massa, seja possível amplificar ou absorver a vibração de forma mais eficiente. A opção por uma curva linear foi feita como um ponto de partida inicial, no entanto, não há restrição para o uso de outras formas de curvas, inclusive serve de motivação para trabalhos futuros. Após a explicação de alguns detalhes importantes, agora podemos apresentar a tabela com os parâmetros de simulação utilizados.

Parâmetros	Valores
Módulo de elasticidade (E)	210 GPa
Densidade do duto ( $\rho_p$ )	7500 kg/m <sup>3</sup>
Densidade do fluido ( $\rho_f$ )	1 kg/m <sup>3</sup>
Amortecimento estrutural ( $\eta$ )	1e-3
Raio interno do duto ( $r_i$ )	25 mm
Raio externo do duto ( $r_o$ )	30 mm
Velocidade de escoamento (c)	0 m/s
Tração axial média ao longo do duto ( $\bar{N}$ )	1 kN
Pressão interna do duto ( $p_0$ )	1 Pa
Aceleração da gravidade (g)	9.81 m/s <sup>2</sup>
Inclinação do duto ( $\theta$ )	0 rad
Fator de atrito (f)	.01
Comprimento dos apoios ( $L_{\text{Apoio}}$ )	10 m
Comprimento dos elementos ( $L_{\text{Elemento}}$ )	10 m
Número de elementos	8
Comprimento total do duto ( $L_{\text{Total}}$ )	80 m
Número de ressonadores	5
Frequência central do pulso ( $f_c$ )	1500 Hz
Frequência do primeiro ressonador ( $f_{R_{\text{base}}}$ )	1500 Hz
Razão de massa mínima ( $mu_{R_{\text{min}}}$ )	0.5
Razão de massa máxima ( $mu_{R_{\text{max}}}$ )	0.1

Tabela 3.3 – Parâmetros de simulação para o caso duto com ressonadores de índice gradiente.

Os resultados da simulação para os parâmetros apresentados na Tabela (3.3) estão disponíveis abaixo:

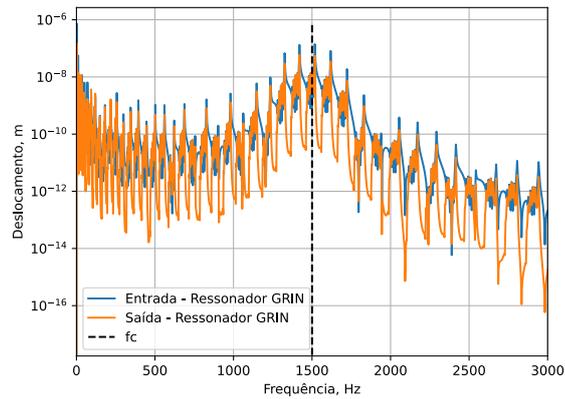


Figura 3.32 – Amplitude em frequência ao pulso em frequência para o caso duto com ressonadores de índice gradiente.

Este gráfico não fornece muitas informações novas, pois se assemelha muito ao caso anterior com ressonadores periódicos. Portanto, foram gerados gráficos complementares para cada nó que contém um ressonador. Agora, espera-se observar pontos de anti-ressonância nas frequências dos ressonadores. Como os ressonadores possuem frequências distintas, espera-se identificar essas anti-ressonâncias em frequências diferentes para cada um. Além disso, espera-se que a frequência de cada ressonador aumente, uma vez que  $\mu_{R_{\max}} < \mu_{R_{\max}}$ , indicando uma diminuição na razão de massa e, conseqüentemente, um aumento na frequência para manter a rigidez constante. Os gráficos complementares estão disponíveis abaixo:

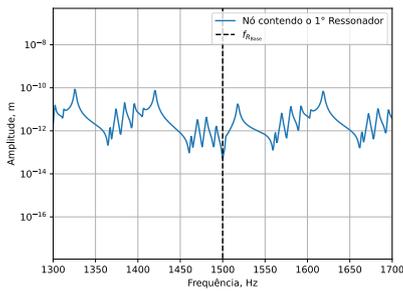


Figura 3.33 – Amplitude em frequência ao pulso no ponto contendo o primeiro ressonador.

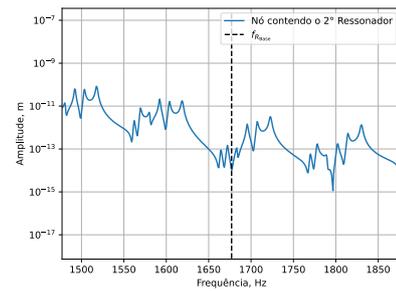


Figura 3.34 – Amplitude em frequência ao pulso no ponto contendo o segundo ressonador.

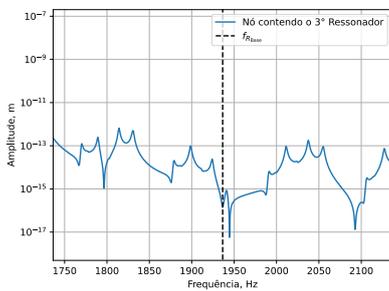


Figura 3.35 – Amplitude em frequência ao pulso no ponto contendo o terceiro ressonador.

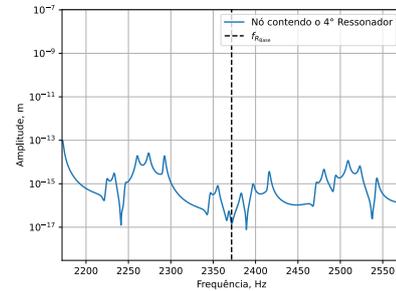


Figura 3.36 – Amplitude em frequência ao pulso no ponto contendo o quarto ressonador.

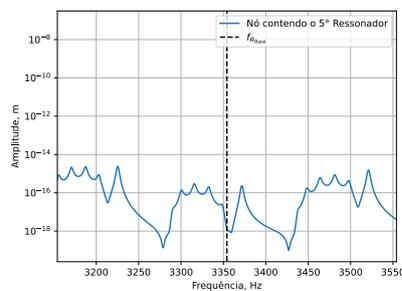


Figura 3.37 – Amplitude em frequência ao pulso no ponto contendo o quinto ressonador.

Precisamente como previsto, a frequência do primeiro ressonador é exatamente a frequência base  $f_{R_{base}}$ ; à medida que a razão de massa diminui, as frequências dos ressonadores aumentam. Como resultado, as anti-ressonâncias começam a se formar em frequências progressivamente mais altas. Pode-se inverter as razões de massa máxima e mínima para verificar se, nesse caso, a frequência dos ressonadores realmente diminuirá, os resultados podem ser checados abaixo:

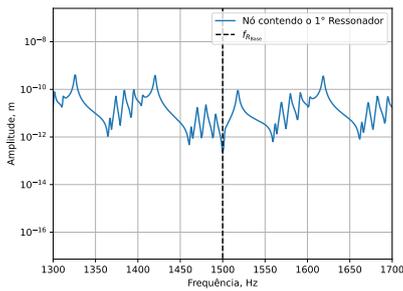


Figura 3.38 – Amplitude em frequência ao pulso no ponto contendo o primeiro ressonador.

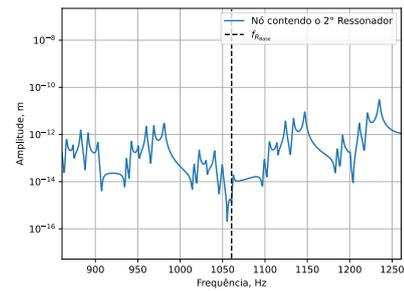


Figura 3.39 – Amplitude em frequência ao pulso no ponto contendo o segundo ressonador.

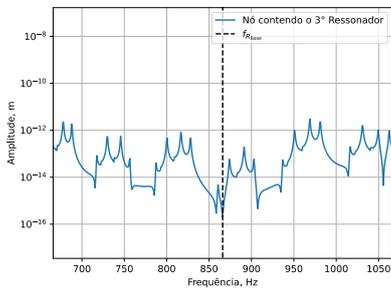


Figura 3.40 – Amplitude em frequência ao pulso no ponto contendo o terceiro ressonador.

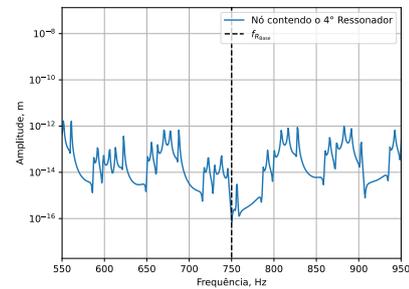


Figura 3.41 – Amplitude em frequência ao pulso no ponto contendo o quarto ressonador.

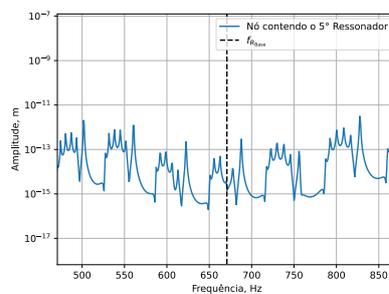


Figura 3.42 – Amplitude em frequência ao pulso no ponto contendo o quinto ressonador.

Novamente, o resultado foi conforme o esperado, como previsto. Também é possível observar a resposta no tempo para este caso.

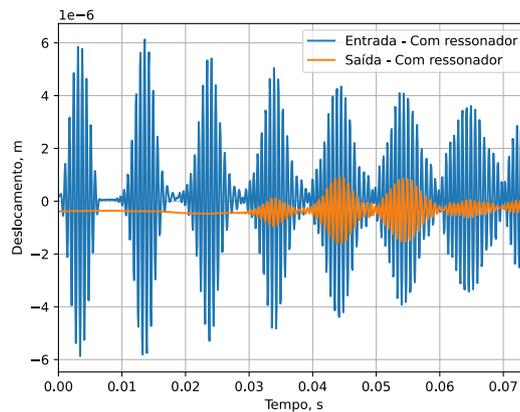


Figura 3.43 – Amplitude no tempo ao pulso na saída para o caso duto com ressonadores de índice gradiente.

Não houve grandes diferenças visuais entre os casos periódico e de índice gradiente. Isso é esperado devido aos valores relativamente próximos de razão de massa mínima e máxima.

### 3.6 Efeito dinâmico da velocidade de escoamento não nula

Até o momento, partia-se de uma condição irrealista do ponto de vista do contexto de uso de dutos, pois considerava-se a velocidade de escoamento como nula, o que, de modo geral, não é de forma alguma comum. Dito isso, segue uma tabela, Tabela (3.4) contendo os parâmetros de simulação para velocidade de escoamento não nula.

Parâmetros	Valores
Módulo de elasticidade (E)	210 GPa
Densidade do duto ( $\rho_p$ )	7500 kg/m <sup>3</sup>
Densidade do fluido ( $\rho_f$ )	1000 kg/m <sup>3</sup>
Amortecimento estrutural ( $\eta$ )	1e-3
Raio interno do duto ( $r_i$ )	25 mm
Raio externo do duto ( $r_o$ )	30 mm
Velocidade de escoamento (c)	5 m/s
Tração axial média ao longo do duto ( $\bar{N}$ )	1 kN
Pressão interna do duto ( $p_0$ )	1 Pa
Aceleração da gravidade (g)	9.81 m/s <sup>2</sup>
Inclinação do duto ( $\theta$ )	0 rad
Fator de atrito (f)	.01
Comprimento dos apoios ( $L_{\text{Apoio}}$ )	10 m
Comprimento dos elementos ( $L_{\text{Elemento}}$ )	10 m
Número de elementos	8
Comprimento total do duto ( $L_{\text{Total}}$ )	80 m
Número de ressonadores	5
Frequência central do pulso ( $f_c$ )	1500 Hz
Frequência do primeiro ressonador ( $f_{R_{\text{base}}}$ )	1500 Hz
Razão de massa mínima ( $mu_{R_{\text{min}}}$ )	0.5
Razão de massa máxima ( $mu_{R_{\text{max}}}$ )	0.1

Tabela 3.4 – Parâmetros de simulação para o caso duto com ressonadores de índice gradiente e velocidade de escoamento não nula.

Considerando que a verificação ocorreu na seção anterior, os resultados para os três casos serão apresentados de maneira mais direta, seguidos por uma discussão sobre algumas peculiaridades desses resultados. Antes de prosseguir, um detalhe importante: a densidade do fluido foi aumentada, pois o que se espera observar são os efeitos do escoamento. A densidade do fluido influencia diretamente; em uma densidade muito baixa, como a utilizada anteriormente, parâmetros como a pressão dinâmica seriam extremamente baixos, e esse é um fator importante a ser considerado nesta análise. Para esta análise, será introduzido um novo gráfico: a amplitude de resposta em frequência ao pulso na frequência do pulso em cada nó.

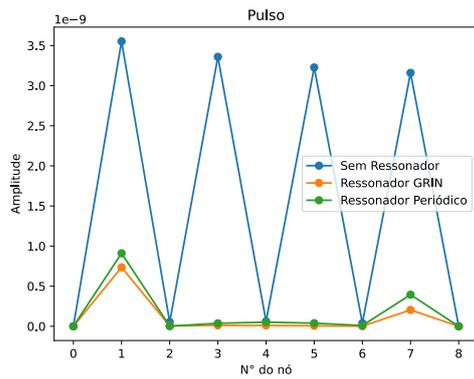


Figura 3.44 – Amplitude em frequência ao pulso na frequência do pulso para velocidade de escoamento nula.

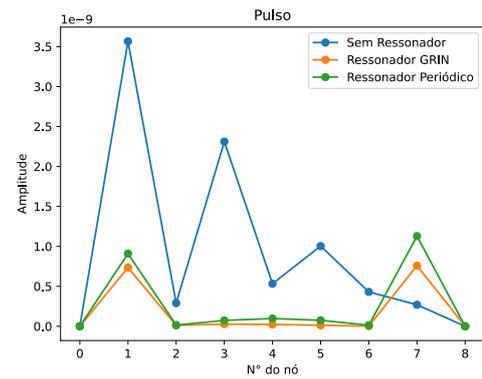


Figura 3.45 – Amplitude em frequência ao pulso na frequência do pulso para velocidade de escoamento não nula.

Observa-se nas Figura (3.44) e (3.45) que a velocidade de escoamento provoca uma diminuição na resposta em frequência ao pulso ao longo do duto. Isso se deve ao fato de que a existência de uma velocidade não nula altera a equação governante deduzida. Todos os termos que envolvem a velocidade passam a ser considerados, como a força de atrito, que surge devido à fricção do fluido com as paredes do duto. Essa força se opõe à direção de propagação da onda, conforme estabelecido na formulação do problema, resultando na perda de amplitude. Entretanto, essa mudança no tempo não é tão facilmente observada, como demonstrado pelas Figuras (3.46), (3.47) e (3.48).

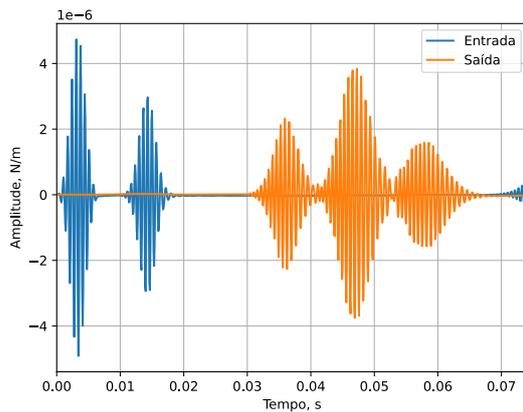


Figura 3.46 – Resposta no tempo para duto com velocidade de escoamento não nula, caso sem ressonadores.

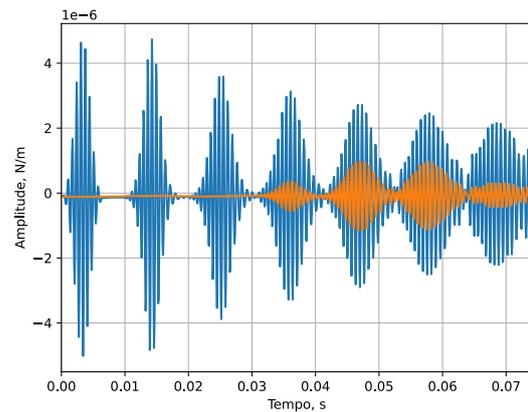


Figura 3.47 – Resposta no tempo para duto com velocidade de escoamento não nula, caso ressonadores periódicos.

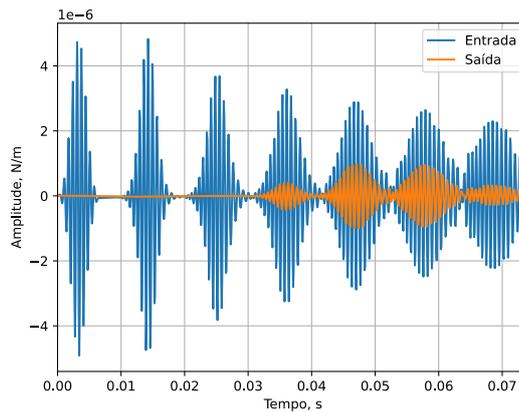


Figura 3.48 – Resposta no tempo para duto com velocidade de escoamento não nula, caso ressonadores de índice gradiente.

Observe que, quando comparadas com as Figuras (3.18), (3.29) e (3.43), há poucas mudanças visuais além das decorrentes do aumento da densidade do fluido e da discretização. Foi necessário compará-las usando código Python e, de fato, há diferenças, porém, elas estão na ordem da nona casa decimal. Em outras palavras, a influência da velocidade na resposta no tempo é mínima. Vale dizer que no caso periódico a razão de massa de todos os ressonadores é igual a mínima razão de massa do caso de índice variável.

### 3.7 Condição de amplificação para o caso de índice gradiente

Para obter a condição de amplificação, ou melhor, tentar alcançá-la, busca-se estudar uma condição tal como ilustrada por (Chen *et al.*, 2016), por meio da relação de dispersão entre o modelo de viga sem metamaterial e com metamaterial. A razão de amplificação é determinada pela diferença entre a relação do modelo com ressonador e sem ressonador. Se

a diferença for positiva, isso implica em amplificação, enquanto que, no caso contrário, há atenuação. Para estimar o número de onda para modelo de duto com ressonadores, utiliza-se a fórmula a seguir, retirada do artigo de (Souza *et al.*, 2020).

$$k_{rb} = \sqrt[4]{\frac{\rho A}{EI} \omega^2 \left( 1 + \epsilon \frac{1}{1 - \Omega_r^2} \right)} \quad (3.21)$$

Em que  $\Omega_r$  é a razão entre a frequência de excitação e a frequência do ressonador. Como cada ressonador tem uma frequência própria, haverá uma curva para cada ressonador. A condição mencionada foi obtida para uma frequência mínima de 10 kHz e uma razão de massa linearmente variável de 0.1 a 0.5. Sob essas condições e utilizando os demais parâmetros iguais aos até então utilizados, obtém-se as seguintes curvas de dispersão:

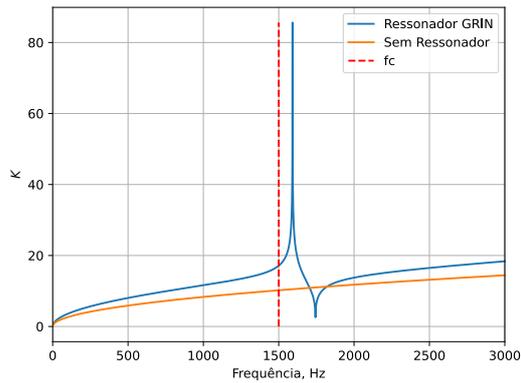


Figura 3.49 – Relação de dispersão para o nó contendo o primeiro ressonador.

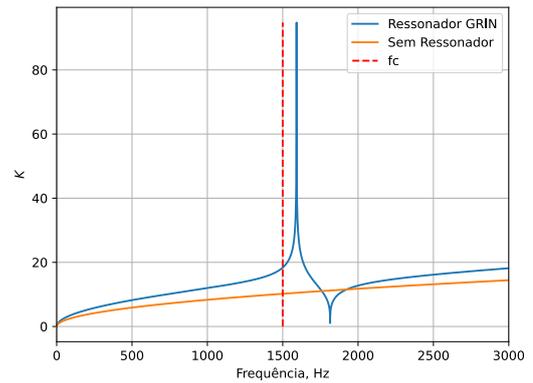


Figura 3.50 – Relação de dispersão para o nó contendo o segundo ressonador.

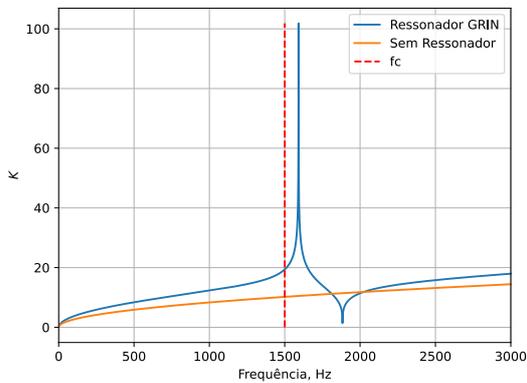


Figura 3.51 – Relação de dispersão para o nó contendo o terceiro ressonador.

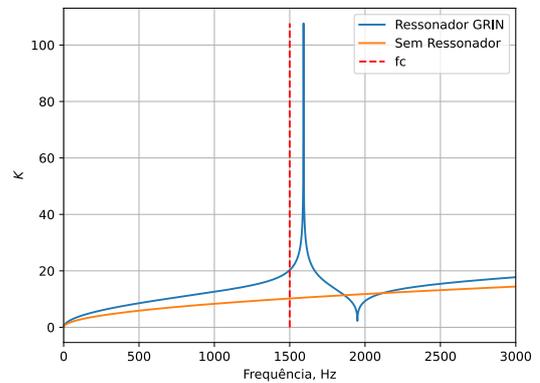


Figura 3.52 – Relação de dispersão para o nó contendo o quarto ressonador.

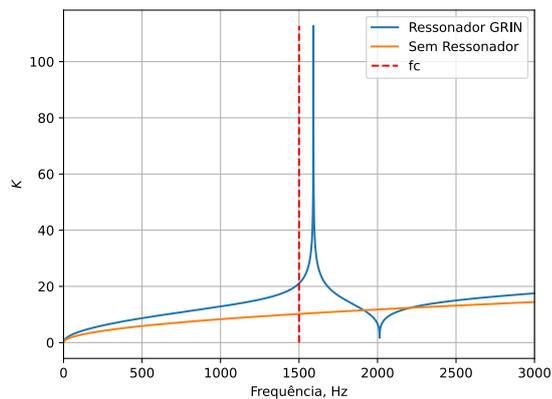


Figura 3.53 – Relação de dispersão para o nó contendo o quinto ressonador.

Como a razão de massa variou pouco, os pontos apresentados estão relativamente próximos. No entanto, o mais importante aqui é estar anterior ao ponto de máximo da curva do número de onda para o metamaterial. Seguindo o artigo de (Chen *et al.*, 2016),

seria esperado observar amplificação nesta região. No entanto, o gráfico, Figuras (3.54) e (3.55) a seguir demonstrará que isso não ocorre, indicando que essa abordagem pode não ser a solução ou metodologia adequada para buscar parâmetros de amplificação. Portanto, é necessário investigar outras vias para alcançar ou demonstrar a impossibilidade de atingir condições de amplificação utilizando o modelo de metamaterial apresentado neste estudo. Devido à limitação de tempo, esta investigação será deixada para trabalhos futuros.

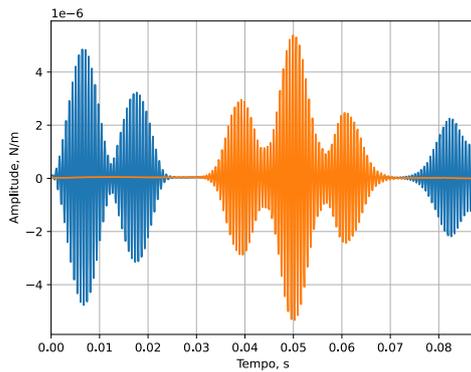


Figura 3.54 – Resposta ao pulso no tempo sem ressonadores.

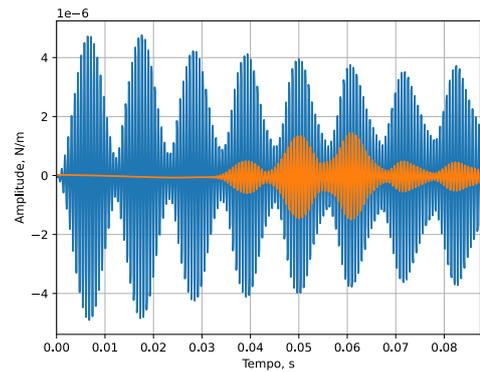


Figura 3.55 – Resposta ao pulso no tempo com ressonadores do tipo índice variável.

## 4 Conclusão e considerações finais

Ao longo deste trabalho, foram conduzidas revisões teóricas abrangentes para compreender o conteúdo necessário para realizar as simulações. Infelizmente, a condição de amplificação não foi alcançada. No entanto, este estudo pode ser útil para futuros alunos do curso de Engenharia Mecânica que buscarem esse objetivo. Apesar de não ter atingido o objetivo final, foi desenvolvida uma ferramenta valiosa: um código funcional para simulações de dutos em diferentes condições e propósitos variados. Além disso, foi possível observar as consequências da inclusão de ressonadores no duto e conduzir análises detalhadas sobre a propagação de ondas em estruturas.

## Referências

- CHEN, Y. Y.; ZHU, R.; BARNHART, M. V.; HUANG, G. L. Enhanced flexural wave sensing by adaptive gradient-index metamaterials. **Scientific Reports**, v. 6, n. 1, p. 35048, Oct 2016. ISSN 2045-2322. Disponível em: <https://doi.org/10.1038/srep35048>. Citado nas pp. 9, 17, 20, 21, 68 e 70.
- FLORES, A. P. X. **Cálculo Variacional: aspectos teóricos e aplicações**. 2011. [https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/94375/flores\\_apx\\_me\\_rcla.pdf;jsessionid=38FECB62CB0EC4BE21101F0C35C8E8A0?sequence=1](https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/94375/flores_apx_me_rcla.pdf;jsessionid=38FECB62CB0EC4BE21101F0C35C8E8A0?sequence=1). Nenhuma citação no texto.
- GRAFF, K. F. **Wave motion in elastic solids**. [S.l.]: Dover, 1991. ISBN 0-486-66745-6. Citado na p. 52.
- GUTTNER, W. C.; PESCE, C. P. On hamilton's principle for discrete systems of variable mass and the corresponding lagrange's equations. **Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering**, Springer Verlag, v. 39, p. 1969–1976, 6 2017. ISSN 18063691. Disponível em: <https://link.springer.com/article/10.1007/s40430-016-0625-4>. Citado na p. 32.
- LEE, U. **Spectral Element Method in Structural Dynamics**. John Wiley and Sons, 2009. 1-454 p. ISBN 9780470823743. Disponível em: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/book/10.1002/9780470823767>. Citado nas pp. 22 e 31.
- LEITÃO, A. **Cálculo Variacional e Controle do Ótimo**. 2001. [https://impa.br/wp-content/uploads/2017/04/23\\_CBM\\_01\\_02.pdf](https://impa.br/wp-content/uploads/2017/04/23_CBM_01_02.pdf). Nenhuma citação no texto.
- M, N. T. **Estudo sobre a teoria de vínculos de Hamilton-Jac**. 2013. <https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/132007/000852795.pdf?sequence=1>. Nenhuma citação no texto.
- MATOS, P. H.; NEVES, D. A. das; VIEIRA, S. C.; GEEST, C. V. der; ICERI, D. M.; CASTRO, M. S.; FABRO, A. T. Analytical and experimental investigation of flexural waves in horizontal pipes conveying two-phase periodic intermittent flow. **Applied Acoustics**, Elsevier, v. 192, p. 108714, 4 2022. ISSN 0003-682X. Nenhuma citação no texto.
- SHELBY, R. A.; SMITH, D. R.; SCHULTZ, S. Experimental verification of a negative index of refraction. **Science**, v. 292, n. 5514, p. 77–79, 2001. Disponível em: <https://www.science.org/doi/abs/10.1126/science.1058847>. Citado nas pp. 9 e 19.
- SOUZA, M. R.; BELI, D.; FERGUSON, N. S.; de F. Arruda, J. R.; FABRO, A. T. A bayesian approach for wavenumber identification of metamaterial beams possessing variability. **Mechanical Systems and Signal Processing**, v. 135, p. 106437, 2020.

ISSN 0888-3270. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0888327019306582>. Citado na p. 69.

VESELAGO, V. G. The electrodynamics of substances with simultaneously negative values of  $\epsilon$  and  $\mu$ . **Soviet Physics Uspekhi**, v. 10, n. 4, p. 509, Apr 1968. ISSN 0038-5670. Disponível em: <https://dx.doi.org/10.1070/PU1968v010n04ABEH003699>. Citado na p. 19.

# Apêndices

# Apêndice A – Códigos de programação

## A.1 Código utilizado para simulação numérica do duto.

Código A.1 – Código de Python

```

1 import numpy as np
2 from multiprocessing import Pool, cpu_count
3 from scipy import fft, signal
4 from scipy.optimize import fsolve
5 from scipy.linalg import eig
6 from scipy.sparse.linalg import spsolve
7 import matplotlib.pyplot as plt
8 from matplotlib.collections import PolyCollection
9 from mpl_toolkits.mplot3d import axes3d
10 import seaborn as sns
11 from matplotlib import cm
12 from numba import njit
13
14 #Definição de uma função elemento de duto
15 @njit
16 def inv(H):
17     return np.linalg.inv(H)
18 @njit
19 def transpose(Hinv):
20     return Hinv.transpose()
21 def DutoElem(E, rhop, rhof, eta, ri, ro, Le, v, Nbarra, p0, g, theta,
22     friction, omega):
23 #Retorna matrix elemento espectral duto
24 #Entrada:
25 # E: - cdouble, módulo de elasticidade, Pa
26 # rhop: - double, densidade do duto, kg/m3
27 # rhof: - double, densidade do fluido, kg/m3
28 # ri: - double, raio interno do duto, m
29 # re: - double, raio externo do duto, m
30 # Le: - double, tamanho do elemento, m
31 # v: - double, velocidade do escoamento, m/s
32 # Nbarra: - double, tração axial no duto, N
33 # p0: - double, pressão interna fluido, Pa
34 # g: - double, gravidade local, m/s2
35 # theta: - double, inclinação do duto, rad
36 # friction: - double, Darcy friction factor - Moody diagram
37 # omega: - double, frequencia circular, rad/s
38 #
39 #Saida:
40 # S: - np.array, matrix 6x6 SEM EB
41 #
42 # Refer ncia SEM - Cap. 6.2
43 # U Lee, 2009. SPECTRAL ELEMENT METHOD IN STRUCTURAL DYNAMICS. Wiley

```

```

43 #
44 # Adriano T. Fabro - Outubro 2021
45
46 E = E*(1+1j*eta)
47
48 #Densidade linear duto e fluido
49 mp = rhop*Ap #kg/m
50 mf = rhof*Ai #kg/m
51 mT = mp + mf
52
53 #Parametros axiais
54 EAeff = E*Ap + Nbarra
55 gY = g*np.cos(theta)
56 T0 = Nbarra - p0*Ai - mf*v**2
57 fD = friction/(4*ri) #coeficiente de arrasto para força viscosa do
    fluido na parede do duto
58
59 #Numero de onda de flexão
60 kp = np.zeros(6, dtype = 'cdouble')
61 raizes = np.array([E*Ip, 0, T0, 1J*(mf*fD*v**2 - 2*1J*omega*mf*v), -
    omega**2*mT], dtype='cdouble')
62 kp[0:4] = np.roots(raizes)
63 #Numero de onda axial
64 kp[4] = omega*np.sqrt(mp/EAeff, dtype = 'cdouble')
65 kp[5] = - kp[4]
66
67 beta = np.zeros(6, dtype = 'cdouble')
68 beta[0:4] = -(EAeff*kp[0:4]**2 - omega**2*mp)/(1J*kp[0:4]*mf*gY)
69 beta[4], beta[5] = 0, 0
70 BETA = np.diag(beta)
71
72 K = np.diag(kp)
73 K2 = np.diag(kp**2)
74
75 e = np.exp(-1J*kp*Le)
76
77 H = np.array([[beta[0], beta[1], beta[2], beta[3], 0, 0],
78               [-1J*kp[0]*beta[0], -1J*kp[1]*beta[1],
79                 -1J*kp[2]*beta[2], -1J*kp[3]*beta[3], 0, 0],
80               [1, 1, 1, 1, 1, 1],
81               [e[0]*beta[0], e[1]*beta[1], e[2]*beta[2], e[3]*beta[3],
82                 0, 0],
83               [-1J*kp[0]*beta[0]*e[0], -1J*kp[1]*beta[1]*e[1],
84                 -1J*kp[2]*beta[2]*e[2], -1J*kp[3]*beta[3]*e[3], 0, 0],
85               [e[0], e[1], e[2], e[3], e[4], e[5]]])
86
87 Eb = np.zeros((6,6), dtype = 'cdouble')
88 Ee = np.zeros((6,6), dtype = 'cdouble')
89
90 for rr in range(6):
91     for ss in range(6):
92         Eb[rr,ss] = np.exp(-1J*(kp[rr] + kp[ss])*Le) - 1
93         if (kp[rr] + kp[ss]) != 0 :

```

```

91     Ee[rr,ss] = 1J*Eb[rr,ss]/(kp[rr] + kp[ss])
92     else:
93         Ee[rr,ss] = Le
94
95     D = (E*Ip*BETA@K2@Ee@K2@BETA - T0*BETA@K@Ee@K@BETA +
96         1J*mf*Fd*v**2*BETA@Ee@K@BETA - omega**2*mT*BETA@Ee@BETA +
97         omega*mf*v*BETA@(Ee@K-K@Ee)@BETA - EAeff*K@Ee@K - omega**2*mp*Ee
98         +
99         1J*mf*gY*Ee@K@BETA + 1J*omega*mf*v*BETA@Eb@BETA + 1J*(T0 -
100         Nbarra)*BETA@Eb@K@BETA)
101
102     Hinv = inv(H)
103
104     S = transpose(Hinv)@D@Hinv
105
106     return S
107
108 @njit
109 def linSolve(Sc, fext):
110     return np.linalg.solve(Sc, fext)
111
112 def DutoSemRessonador(kk):
113     #Alocação de memoria
114     Fext = np.zeros(GDLS, dtype='cdouble')
115     SGD = np.zeros((GDLS, GDLS), dtype='cdouble')
116     #Cria vetor de condição de contorno cinematico
117     cc = [i for i in range(GDLS)]
118     #Condição de apoiada a esquerda
119     cc.pop(0)
120     #Condição de apoiada a direita
121     cc.pop(-3)
122     #Frequencia circular, rad/s
123     omega = 2*np.pi*freq[kk]
124     #Crio o elemento a esquerda
125     SGD[0:6, 0:6] += DutoElem(E, rhop, rhof, eta, ri, ro, Lapoio, v,
126     Nbarra, p0, g, theta, friction, omega)
127     #Crio os elementos centrais
128     for ii in range(neInterno):
129         SGD[3+3*ii: 9+3*ii, 3+3*ii: 9+3*ii] += DutoElem(E, rhop, rhof,
130         eta, ri, ro, Le, v, Nbarra, p0, g, theta, friction, omega)
131     #Crio o elemeno a direita
132     SGD[3+3*neInterno: 9+3*neInterno, 3+3*neInterno: 9+3*neInterno] +=
133     DutoElem(E, rhop, rhof, eta, ri, ro, Lapoio, v, Nbarra, p0, g,
134     theta, friction, omega)
135     #Aplico o forçamento
136     Fext[3] = P[kk]
137     #Aplico as condições de contorno dinâmicos
138     fext = Fext[cc]
139     Sc = SGD[np.ix_(cc, cc)]
140     #Resolvo o sistema linear
141     Resp = np.zeros(GDLS, dtype='cdouble')
142     Resp[cc] = linSolve(Sc, fext)
143     return Resp

```

```

137 def DutoGRIN(kk):
138     #Alocação de memoria
139     Fext = np.zeros(GDLC, dtype='cdouble')
140     SGD = np.zeros((GDLC,GDLC), dtype='cdouble')
141     #Cria vetor de condição de contorno cinemático
142     cc = [i for i in range(GDLC)]
143     #Condição de apoiada a esquerda
144     cc.pop(0)
145     #Condição de apoiada a direita
146     cc.pop(-(3+nr))
147     #Frequencia circular, rad/s
148     omega = 2*np.pi*freq[kk]
149     #Crio o elemento a esquerda
150     SGD[0:6, 0:6] += DutoElem(E, rhop, rhof, eta, ri, ro, Lapoio, v,
        Nbarra, p0, g, theta, friction, omega)
151     #Crio os elementos centrais
152     for ii in range(neInterno):
153         SGD[3+3*ii: 9+3*ii, 3+3*ii: 9+3*ii] += DutoElem(E, rhop, rhof,
        eta, ri, ro, Le, v, Nbarra, p0, g, theta, friction, omega)
154     #Crio o elemeno a direita
155     SGD[3+3*neInterno: 9+3*neInterno, 3+3*neInterno: 9+3*neInterno] +=
        DutoElem(E, rhop, rhof, eta, ri, ro, Lapoio, v, Nbarra, p0, g,
        theta, friction, omega)
156     kR = muRmin*mduto*(2*np.pi*freqRbase)**2
157     kR = kR*(1+1j*etaR)
158     for rr in range(nr):
159         mR = muR[rr]*mduto
160         SGD[3*rr+6, 3*rr+6] += kR
161         SGD[3*rr+6, -(rr+1)] += -kR
162         SGD[-(rr+1), 3*rr+6] += -kR
163         SGD[-(rr+1), -(rr+1)] += kR
164         SGD[-(rr+1), -(rr+1)] += -mR*omega**2
165     #Aplico o forçamento
166     Fext[3] = P[kk]
167     #Aplico as condições de contorno dinâmicos
168     fext = Fext[cc]
169     Sc = SGD[np.ix_(cc,cc)]
170     #Resolvo o sistema linear
171     Resp = np.zeros(GDLC, dtype='cdouble')
172     Resp[cc] = linSolve(Sc, fext)
173     return Resp
174
175 def inverseFourier(a,N):
176     a = np.block([0,a[1:N//2],0,np.flip(a[1:N//2].conjugate())])
177     return fft.ifft(a).real*N
178
179 global E
180 global rhop
181 global rhof
182 global eta
183 global ri
184 global ro
185 global Lapoio

```

```
186 global v
187 global Nbarra
188 global p0
189 global g
190 global theta
191 global friction
192 global nr
193 global neInterno
194 global neTotal
195 global Le
196 global Lapoio
197 global freq
198 global P
199 global muR
200 global mduto
201 global Ai
202 global Ap
203 global Ip
204 global etaR
205 global GDLS
206 global GDLC
207
208 #Frequencia central do pulso, Hz
209 fc = 1500
210 #Taxa de amostragem, Hz -> Deve ser no mínimo o dobro da frequência do
    pulso
211 fs = 8*fc
212 #Tempo total do sinal, s
213 tf = 1
214 #Número de períodos
215 Nperiodos = 10
216 #Passo no tempo, s
217 dt = 1/fs
218 #Número de pontos no vetor de tempo
219 N = int(tf/dt)
220 #Vetor de tempo, s
221 t = np.linspace(0,tf,N)
222 #Tempo do pulso, s
223 tp = Nperiodos/fc
224 #Número de pontos do pulso
225 Np = int(tp/dt+1)
226 #Amplitude do pulso, N
227 Apulso = 1000
228 #Alocamento do vetor pulso
229 pulso = np.zeros(N)
230 #Janela que será aplicada ao sinal
231 janela = signal.get_window('hann', Np)
232 #Preenchimento do vetor pulso
233 pulso[0:Np] = Apulso*np.sin(2*np.pi*fc*t[0:Np])*janela
234 #Definir o número de pontos da fft com sendo a próxima potência de 2
235 Nfft = int(2*np.ceil(np.log2(N)))
236 #Mudar o número de pontos altera o tempo total do sinal
237 tf_fft = Nfft*dt
```

```
238 #Recria o vetor de tempo
239 tfft = np.arange(0,Nfft)*dt
240 #Aplica a FFT - Zero Padding
241 P = fft.fft(pulso, Nfft)/Nfft
242 #Passo na frequencia
243 df = 1/tf_fft
244 #Cria o vetor da frequencia
245 freq = np.arange(Nfft)*df
246 #Plotagem no sinal no tempo
247 plt.figure()
248 plt.plot(t,pulso)
249 #plt.plot(tfft, fft.ifft(P).real*Nfft, '--')
250 plt.xlim(0,2*tp)
251 plt.xlabel('Tempo, s')
252 plt.ylabel('Amplitude, N')
253 plt.grid()
254 plt.savefig(f"PulsoTempo.svg")
255 plt.show()
256 #Plota o sinal da frequencia
257 plt.plot(freq[0:Nfft//2], abs(P[0:Nfft//2]), label='Pulso')
258 plt.vlines(x=fc, ymin= 0 ,ymax=max(abs(P[0:Nfft//2])), color='red',
           linestyle='dashed', label='fc')
259 plt.xlabel('Frequencia, Hz')
260 plt.ylabel('Amplitude, N')
261 plt.grid()
262 plt.legend()
263 plt.savefig(f"PulsoFreq.svg")
264 plt.show()
265 if (fc in freq): print('Okay!')
266 PulsoIndex = np.where(freq==fc)[0][0]
267
268 #Modulo de elasticidade, MPa
269 E = 210e9
270 #Densidade do duto, kg/m3
271 rhop = 7500
272 #Densidade do fluido, kg/m3
273 rhof = 1
274 #Amortecimento estrutural,
275 eta = 1e-3
276 #Raio interno do duto. m
277 ri = 0.025
278 #Raio externo do duto, m
279 ro = 0.030
280 #Velocidade do escoamento, m/s
281 v = 0
282 #Tração axial media ao longo do duto, N
283 Nbarra = 1e3
284 #Pressao interna do duto, Pa
285 p0 = 1
286 #Aceleração da gravidade, m/s2
287 g = 9.81
288 #Inclinação do duto, rad
289 theta = 0
```

```

290 #Darcy friction factor - Diagrama de Moody
291 friction = .01
292 #Area interna do duto, m2
293 Ai = np.pi*ri**2
294 #Area externa do duto, m2
295 Ap = np.pi*ro**2 - Ai
296 #2nd momento de area seção de duto, m4
297 Ip = np.pi/4*((ro)**4-(ri)**4)
298 #Numero de ressonadores
299 nr = 5
300 #Comprimento dos apoios, m
301 Lapoio = 10
302 #Comprimento da secao GRIN, m
303 Linterno = Lapoio*(nr+1)
304 #Comprimentp total do duto, m
305 Lt = 2*Lapoio + Linterno
306 #Numero de elementos internos
307 neInterno = nr + 1
308 #Numero de elementos total
309 neTotal = neInterno + 2
310 #Comprimento de cada elemento interno, m
311 Le = (Lt - 2*Lapoio)/neInterno
312 #Massa do duto, kg
313 mduto = rhop*Ap*Lt
314 #Calculo de velocidade de grupo e fase
315 vel_fase = (E*Ip/(rhop*Ap))**(1/4)*np.sqrt(2*np.pi*fc)
316 vel_grupo = 2*vel_fase
317 temp = (Lt-2*Lapoio)/vel_grupo
318 print(f'Tempo para ir até o ponto de controle: {temp}')
319 print(f'Velocidade de fase: {vel_fase}')
320 print(f'Velocidade de grupo: {vel_grupo}')
321 print(neTotal)
322 print(Lt)
323 print(Linterno/(neInterno))
324
325 #Frequencia base do ressoandor, Hz
326 freqRbase = fc
327 #Amortecimento dos ressonadores
328 etaR = 1e-3
329 #Razão de massa maximo
330 muRmax = 1
331 #Razão de massa minimo
332 muRmin = 0.1
333 #Definir um muR
334 if nr > 1:
335     coefang = (muRmax-muRmin)/(nr-1)
336 else:
337     coefang = 0
338 coeflin = muRmin
339 muR = [coefang*i + coeflin for i in range(nr)]
340
341 if __name__ == '__main__':
342     kk = [i for i in range(1, Nfft//2+1)]

```

```

343     #Numero de graus de liberdade para o caso sem ressoadores
344     GDLS = 3*(neTotal+1)
345     DispFreqSemRessonador = np.zeros((GDLS, Nfft//2+1), dtype='cdouble')
346     #Numero de garus de liberdade para o caso com ressoadores
347     GDLC = GDLS + nr
348     DispFreqGRIN = np.zeros((GDLC, Nfft//2+1), dtype='cdouble')
349     #Pega o numero de nucleos do processado
350     n_cores = cpu_count()
351     with Pool(processes=n_cores) as pool:
352         DispFreqSemRessonador[:,1:] =
353             np.array(pool.map(DutoSemRessonador, kk)).T
354         DispFreqGRIN[:,1:] = np.array(pool.map(DutoGRIN, kk)).T
355
356 x = fc
357 a = 100
358 maxValueEsq =
359     max(max(np.abs(DispFreqSemRessonador[3])),max(np.abs(DispFreqGRIN[3])))
360 plt.figure()
361 plt.title('Pulso - Esquerda')
362 plt.semilogy(freq[0:Nfft//2+1], np.abs(DispFreqSemRessonador[3]),
363     label='Esquerda - Sem ressonador')
364 plt.semilogy(freq[0:Nfft//2+1], np.abs(DispFreqGRIN[3]), label='Esquerda
365     - Ressonador GRIN')
366 plt.vlines(x=freqRbase, ymin=0, ymax=maxValueEsq, color='red',
367     linestyle='dashed',label='freqRbase')
368 plt.vlines(x=fc, ymin=0, ymax=maxValueEsq, color='black',
369     linestyle='dashed',label='fc')
370 plt.xlabel('Frequencia, Hz')
371 plt.ylabel('Amplitude, N/m')
372 plt.legend()
373 plt.xlim(x-a,x+a)
374 #plt.xlim(0,fc//2)
375 plt.grid()
376 plt.show()
377
378 maxValueDir =
379     max(max(np.abs(DispFreqSemRessonador[-6])),max(np.abs(DispFreqGRIN[-(6+nr)])))
380 plt.figure()
381 plt.title('Pulso - Direita')
382 plt.semilogy(freq[0:Nfft//2+1], np.abs(DispFreqSemRessonador[-6]),
383     label='Direita - Sem ressonador')
384 plt.semilogy(freq[0:Nfft//2+1], np.abs(DispFreqGRIN[-(6+nr)]),
385     label='Direita - Ressonador GRIN')
386 plt.vlines(x=freqRbase, ymin=0, ymax=maxValueEsq, color='red',
387     linestyle='dashed',label='freqRbase')
388 plt.vlines(x=fc, ymin=0, ymax=maxValueEsq, color='black',
389     linestyle='dashed',label='fc')
390 plt.xlabel('Frequencia, Hz')
391 plt.ylabel('Amplitude, N/m')
392 plt.legend()
393 plt.xlim(x-a,x+a)
394 #plt.xlim(0,fc//2)
395 plt.grid()
396 plt.show()

```

```

385 plt.figure()
386 plt.semilogy(freq[0:Nfft//2+1], np.abs(DispFreqSemRessonador[3]),
    label='Entrada - Sem ressonador')
387 plt.semilogy(freq[0:Nfft//2+1], np.abs(DispFreqSemRessonador[-6]),
    label='Saída - Sem ressonador')
388 plt.vlines(x=fc, ymin=0, ymax=maxValueEsq, color='black',
    linestyle='dashed',label='fc')
389 plt.xlabel('Frequência, Hz')
390 plt.ylabel('Deslocamento, m')
391 plt.legend()
392 plt.grid()
393 plt.xlim(0,2*fc)
394 plt.show()
395 plt.figure()
396 plt.semilogy(freq[0:Nfft//2+1], np.abs(DispFreqGRIN[3]), label='Entrada
    - Ressonador GRIN')
397 plt.semilogy(freq[0:Nfft//2+1], np.abs(DispFreqGRIN[-(6+nr)]),
    label='Saída - Ressonador GRIN')
398 plt.vlines(x=fc, ymin=0, ymax=maxValueEsq, color='black',
    linestyle='dashed',label='fc')
399 plt.xlabel('Frequência, Hz')
400 plt.ylabel('Deslocamento, m')
401 plt.legend()
402 plt.grid()
403 plt.xlim(0,2*fc)
404 plt.show()
405
406 #for i in range(1,neTotal):
407 for i in range(2,neTotal-1):
408     a = 200
409     kR = muRmin*mduto*(2*np.pi*freqRbase)**2
410     fr = np.sqrt(kR/(muR[i-2]*mduto*4*np.pi**2))
411     maxValue =
        max(max(np.abs(DispFreqSemRessonador[3*i])),max(np.abs(DispFreqGRIN[3*i])))
412     #plt.semilogy(freq[0:Nfft//2+1], np.abs(DispFreqSemRessonador[3*i]),
        label=f'n :{i}, Sem ressonador')
413     plt.semilogy(freq[0:Nfft//2+1], np.abs(DispFreqGRIN[3*i]),
        label=f'Nó contendo o {i-1} Ressonador')
414     plt.vlines(x=fr, ymin=0, ymax=maxValue, color='black',
        linestyle='dashed',label=r'$f_{R\_}\text{Base}$')
415     plt.ylabel('Amplitude, m')
416     plt.xlabel('Frequência, Hz')
417     plt.xlim(fr-a, fr+a)
418     plt.grid()
419     plt.legend()
420     plt.show()
421
422 #Pego o valor do deslocamento flexural de cada nó na frequência do pulso
423 NodeDispSemRessonadorPulso = np.zeros(neTotal+1, dtype='cdouble')
424 NodeDispRessonadorGrinPulso = np.zeros(neTotal+1, dtype='cdouble')
425 for ne in range(neTotal+1):
426     NodeDispSemRessonadorPulso[ne] = DispFreqSemRessonador[ne*3,
        PulsoIndex]

```

```

427     NodeDispRessonadorGrinPulso[ne] = DispFreqGRIN[ne*3, PulsoIndex]
428 #Gráficos de deslocamento em cada nó
429 plt.title('Pulso')
430 plt.plot(abs(NodeDispSemRessonadorPulso.real), '-o', label='Sem
    Ressonador')
431 plt.plot(abs(NodeDispRessonadorGrinPulso.real), '-o', label='Ressonador
    GRIN')
432 plt.ylabel('Amplitude')
433 plt.xlabel('N do nó')
434 plt.legend()
435 plt.grid()
436 plt.show()
437
438 #Sem Ressonadores
439 DeslocTempoSemRessonadorPulsoEsq =
    inverseFourier(DispFreqSemRessonador[3], Nfft)
440 DeslocTempoSemRessonadorPulsoDir =
    inverseFourier(DispFreqSemRessonador[-6], Nfft)
441 #Com Ressonadores GRIN
442 DeslocTempoRessonadorGrinPulsoEsq = inverseFourier(DispFreqGRIN[3], Nfft)
443 DeslocTempoRessonadorGrinPulsoDir =
    inverseFourier(DispFreqGRIN[-(6+nr)], Nfft)
444 #Sem Ressonador
445 # plt.title('Pulso - Sem Ressonador')
446 plt.plot(tfft, DeslocTempoSemRessonadorPulsoEsq, label='Entrada - Sem
    ressonador')
447 plt.plot(tfft, DeslocTempoSemRessonadorPulsoDir, label='Saída - Sem
    ressonador')
448 #plt.vlines(x=temp, ymin=min(DeslocTempoSemRessonadorPulsoEsq),
    ymax=max(DeslocTempoSemRessonadorPulsoEsq),
    color='black', linestyle='dashed')
449 plt.xlabel('Tempo, s')
450 plt.ylabel('Deslocamento, n')
451 plt.xlim(0, 2*temp+2*tp)
452 plt.grid()
453 plt.legend()
454 plt.show()
455 #Com Ressonador GRIN
456 # plt.title('Pulso - Ressonador GRIN')
457 plt.plot(tfft, DeslocTempoRessonadorGrinPulsoEsq, label='Entrada - Com
    ressonador')
458 plt.plot(tfft, DeslocTempoRessonadorGrinPulsoDir, label='Saída - Com
    ressonador')
459 plt.xlabel('Tempo, s')
460 plt.ylabel('Deslocamento, m')
461 plt.xlim(0, 2*temp+2*tp)
462 plt.grid()
463 plt.legend()
464 plt.show()
465
466 print(max(DeslocTempoRessonadorGrinPulsoDir))
467 print(max(DeslocTempoSemRessonadorPulsoDir))
468 print(max(DeslocTempoRessonadorGrinPulsoDir)-max(DeslocTempoSemRessonadorPulsoDir))

```

```

469
470 YsemRessonador = np.zeros((neTotal+1,Nfft))
471 YcomRessonador = np.zeros((neTotal+1,Nfft))
472 for i in range(neTotal+1):
473     YsemRessonador[i] = inverseFourier(DispFreqSemRessonador[3*i], Nfft)
474     YcomRessonador[i] = inverseFourier(DispFreqGRIN[3*i], Nfft)
475
476 plt.figure()
477 T, X = np.meshgrid(tfft, np.arange(neTotal+1))
478 plt.figure()
479 plt.pcolormesh(T,X,YsemRessonador , cmap='viridis')
480 plt.xlim(0,2*temp+2*tp)
481 plt.xlabel('Tempo, s')
482 plt.ylabel('Pulso, m')
483 plt.show()
484
485 plt.figure()
486 # plt.title('Ressonador GRIN')
487 plt.pcolormesh(T,X,YcomRessonador , cmap='viridis')
488 plt.xlim(0,2*temp+2*tp)
489 plt.xlabel('Tempo, s')
490 plt.ylabel('Pulso, m')
491 plt.show()
492
493 def plotWaterfall(array, tmin, tmax, neTotal, Nfft, a):
494     colors = cm.jet(np.linspace(0, 1, neTotal+1))
495     tplot = np.copy(t)
496     tplot[tplot<tmin] = np.nan
497     tplot[tplot>tmax] = np.nan
498     fig = plt.figure()
499     ax = fig.add_subplot(projection='3d')
500
501     verts = []
502     n = np.arange(neTotal+1)
503     maxys = []
504     minys = []
505     for i in range(neTotal+1):
506         ys = inverseFourier(array[3*i], Nfft)
507         maxys.append(max(ys))
508         minys.append(min(ys))
509         verts.append(list(zip(tplot, ys)))
510
511     facecolors = ['None' for i in range(neTotal+1)]
512     poly = PolyCollection(verts, facecolor=facecolors, edgecolors=colors)
513
514     ax.add_collection3d(poly, zs=n, zdir='y')
515     ax.set_title(a)
516     ax.set_xlabel('Tempo, s')
517     ax.set_xlim3d(tmin, tmax)
518     ax.set_ylabel('Nó')
519     ax.set_ylim3d(0, neTotal+1)
520     ax.set_zlabel('Amplitude')
521     ax.set_zlim3d(min(minys), max(maxys))

```

```
522     #plt.savefig(f"{a}.svg")
523 tmin = 0
524 tmax = 2*temp+2*tp
525 plotWaterfall(DispFreqSemRessonador , tmin , tmax , neTotal , Nfft , 'Sem
    Ressonador ')
526 plotWaterfall(DispFreqGRIN , tmin , tmax , neTotal , Nfft , 'Ressonador GRIN')
```