



**Universidade de Brasília
Faculdade do Gama**

Estudo analítico dos pontos de Lagrange

Beatriz Carvalho Wang

**TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO
ENGENHARIA AEROESPACIAL**

Brasília
2024

**Universidade de Brasília
Faculdade do Gama**

Estudo analítico dos pontos de Lagrange

Beatriz Carvalho Wang

Trabalho de Conclusão de Curso submetido
como requisito parcial para obtenção do título
de Bacharel em Engenharia Aeroespacial

Orientador: Prof. Dr. William Reis Silva

Brasília
2024

W246e Wang, Beatriz Carvalho.
Estudo analítico dos pontos de Lagrange / Beatriz Carvalho
Wang; orientador William Reis Silva. -- Brasília, 2024.
153 p.

Trabalho de Conclusão de Curso (Engenharia Aeroespacial)
-- Universidade de Brasília, 2024.

1. Problema de n -corpos. Problema circular restrito de três corpos. 2. Pontos de Lagrange. 3. Integral de Jacobi. 4. Estabilidade linear. I. Silva, William Reis, orient. II. Título

Universidade de Brasília
Faculdade do Gama

Estudo analítico dos pontos de Lagrange

Beatriz Carvalho Wang

Trabalho de Conclusão de Curso submetido
como requisito parcial para obtenção do título
de Bacharel em Engenharia Aeroespacial

Trabalho aprovado. Brasília, 2 de agosto de 2024:

Prof. Dr. William Reis Silva, UnB/FGA
Orientador

**Prof. Dr. Ronni Geraldo Gomes de
Amorim, UnB/FGA**
Examinador interno

Prof. Dr. Renato Alves Borges,
UnB/FT/ENE
Examinador interno

Brasília
2024

*Este trabalho é dedicado aos estudantes que,
assim como eu, já sonharam em desvendar os mistérios do universo.*

Agradecimentos

Este trabalho é fruto de uma longa trajetória de estudo e dedicação e muitas pessoas foram importantes para a conclusão deste projeto. Por isso, gostaria de expressar as minha sincera gratidão a todos que contribuíram direta ou indiretamente para a minha formação acadêmica, desde o ensino básico ao superior.

Em primeiro lugar, gostaria de agradecer à minha família, que sempre me apoiou incondicionalmente e foi de fundamental importância para a conclusão deste trabalho. Assim, agradeço aos meus pais, Paulo Tsai Wang e Adelaide Monique Arruda Marinho de Carvalho, e à minha irmã Isabela Carvalho Wang, que, além de ter sido a minha motivação diária para a finalização deste projeto, participou das adaptações e produções de todas as figuras deste trabalho.

Meu interesse neste tema surgiu de um trabalho de revisão bibliográfica produzido para o 27º Congresso de Iniciação Científica da UnB, intitulado “O problema de três corpos na gravitação e os pontos lagrangianos”, dos autores Rafael Jucá Pinheiro e Wytler Cordeiro dos Santos. Agradeço a eles por terem me apresentado a área que foi, exclusivamente, meu tópico de estudo durante os últimos 10 meses. Sem esse trabalho, eu não teria conhecimento da riqueza e do potencial de exploração desse tema.

Agradeço também aos meus amigos Emanuel Couto Brenag, Fernando Barroso Vasconcelos Mendes, Pedro Akira Yoshida Cavalcante, Rafael Jucá Pinheiro, Mateus Santa’Anna e Tales Soares Brandão, que me fizeram companhia durante minha jornada acadêmica. Alguns deles são meus amigos desde o ensino fundamental. Muito obrigada pelo apoio e pela companhia durante esses anos. Em especial, agradeço ao Emanuel e ao Rafael pela ajuda incansável na escolha do tema de estudo e por estarem ao meu lado durante todo o projeto. Serei eternamente grata pelas conversas, risadas e momentos de alegria que foram proporcionados por eles.

Ao meu orientador, William Reis Silva, agradeço por ter acreditado na minha proposta de projeto e por ter criado um ambiente de aprendizado acolhedor durante essa jornada. Sua orientação e a liberdade concedida para que eu pudesse explorar meus interesses de pesquisa foram de fundamental importância para a concretização deste trabalho.

Por fim, aos meus demais professores da Faculdade do Gama, obrigada pelo suporte acadêmico e pelas discussões enriquecedoras em sala de aula. Dos vários professores excelentes que tive na faculdade, destaco Manuel Nascimento Dias Barcelos Júnior, Sergio Henrique da Silva Carneiro e Ronni Geraldo Gomes de Amorim, que foi meu primeiro professor da FGA e também meu orientador de PIBIC, guiando-me nos meus primeiros passos na pesquisa científica.

“It is quite a three pipe problem.”
(Arthur Conon Doyle)

Resumo

O problema de três corpos é, e sempre foi, objeto de curiosidade de astrônomos e matemáticos. Além de possuir diversas aplicações práticas, foi com o estudo do problema que foram descobertos os pontos de Lagrange – pontos de equilíbrio entre a força gravitacional devido a dois corpos e a pseudoforça centrífuga. Os pontos lagrangianos são amplamente utilizados no contexto atual, podendo ser selecionados como posições para observatórios espaciais, além de serem utilizados como pontos intermediários em missões interplanetárias. Este trabalho é uma compilação de demonstrações analíticas relacionadas ao problema de n -corpos, pontos de Lagrange e suas aplicações. Para isso, é discutido, em detalhes, o problema de n -corpos e, em seguida, são realizados os cálculos relevantes à teoria dos pontos de Lagrange, como constante de Jacobi, zonas proibidas e estabilidade dos pontos lagrangianos. O objetivo principal deste trabalho é a compilação e a organização da teoria em um documento didático e autocontido, servindo de contato inicial àqueles interessados no tema. Alinhado a isso, as seções iniciais são dedicadas à fundamentação teórica necessária para o entendimento do restante do trabalho. Nesse sentido, o trabalho visa a esclarecer passos matemáticos pouco explicados na literatura, tornando a teoria acessível para estudantes de graduação.

Palavras-chave: Problema de n -corpos. Problema circular restrito de três corpos. Pontos de Lagrange. Integral de Jacobi. Estabilidade linear.

Abstract

The three-body problem has long been an object of curiosity for astronomers and mathematicians. Besides having direct applications to orbital mechanics, it was by studying the problem that the Lagrange points were first formulated. The Lagrange points are points where the gravitational pull of two massive bodies, combined with the pseudo centrifugal force, results in a null net force. The Lagrange points are largely applied in the field of astrodynamics, being, for example, used for the positioning of space telescopes and serving as intermediate points for space missions. In this work, we explore the analytical derivations related to the n -body problem, as well as conduct calculations related to the Lagrange points and their applications (i.e. the Jacobi constant, forbidden regions and linear stability of the Lagrange points). The primary goal of this work is to compile and organize the theory into a comprehensive and self-contained document, serving as a potential introduction for those interested in learning this topic. To achieve this, the initial sections are dedicated to the theoretical foundation required for a thorough understanding of the topic. Therefore, this work aims to clarify some derivation steps that are rarely explained in the literature, making this theory more accessible to undergraduate students.

Keywords: n -Body Problem. Circular Restricted Three-Body Problem. Lagrange Points. Jacobi Integral. Linear Stability.

Lista de ilustrações

Figura 1.1 – Ilustração do telescópio James Webb	15
Figura 1.2 – Pontos de Lagrange do sistema Terra-Sol	16
Figura 1.3 – Asteroides troianos	16
Figura 1.4 – Organização do trabalho	20
Figura 2.5 – Esquemático da primeira lei de Kepler	22
Figura 2.6 – Esquemático da segunda lei de Kepler	22
Figura 2.7 – Referencial inercial $OXYZ$	24
Figura 2.8 – Representação das forças no problema de dois corpos	25
Figura 2.9 – Trajetórias de m_1 e m_2 em relação ao sistema referencial inercial	26
Figura 2.10–Trajetórias de m_1 e m_2 em relação ao centro de massa	27
Figura 2.11–Sistema referencial em coordenadas polares	30
Figura 2.12–Esquemático da anomalia verdadeira em uma órbita elíptica	33
Figura 3.13–Distâncias relativas do problema generalizado de três corpos	39
Figura 3.14–Esquemático da solução de Euler	42
Figura 3.15–Esquemático da solução de Lagrange	46
Figura 3.16–Ilustração do referencial não inercial $O\xi\eta\zeta$ em azul	48
Figura 3.17–Ilustração dos vetores \mathbf{x}_j e \mathbf{r}_j	49
Figura 3.18–Ilustração dos vetores posição nas coordenadas jacobianas	50
Figura 3.19–Ilustração do referencial não inercial $O\xi\eta\zeta$ em azul para o problema restrito	53
Figura 3.20–Esquemático do movimento circular das massas primárias no plano orbital	55
Figura 3.21–Esquemático da rotação de um vetor \mathbf{A} em torno de um eixo	57
Figura 4.22–Pontos L4 e L5 que constituem dois triângulos equiláteros com as massas primárias	65
Figura 4.23–Pontos posições de L1, L2 e L3 nas regiões 1, 2, e 3, respectivamente	65
Figura 4.24–Pontos de Lagrange	67
Figura 5.25–Superfície de velocidade zero	76
Figura 5.26–Zonas de Hill para $C_J > C_1$ considerando $\mu = 0,1$	77
Figura 5.27–Zonas de Hill para $C_J = C_1$ considerando $\mu = 0,1$	77
Figura 5.28–Zonas de Hill para $C_J = C_2$ considerando $\mu = 0,1$	78
Figura 5.29–Zonas de Hill para $C_J = C_3$ considerando $\mu = 0,1$	80
Figura 5.30–Zonas de Hill para $C_4 < C_J < C_3$ considerando $\mu = 0,1$	80
Figura 5.31–Posição vetorial ξ dos pontos colineares de Lagrange	82
Figura 5.32–Pontos de Lagrange para o sistema Terra-Lua em unidades normalizadas	84
Figura 5.33–Superfícies de velocidade zero no espaço tridimensional definido em (ξ, η, ζ) para $\mu = 0,1$ e $C_J = 4,0$	85

Figura 5.34–Superfícies de velocidade zero no espaço tridimensional definido em (ξ, η, ζ) para $\mu = 0,1$ e $C_J = 3,56$	85
Figura 5.35–Superfícies de velocidade zero no espaço tridimensional definido em (ξ, η, ζ) para $\mu = 0,1$ e $C_J = 2,5$	86
Figura 6.36–Valores de α para $0 < \mu < 0,5$	100
Figura 6.37– $f_1(\alpha)$ e $f_2(\alpha)$ para $1 < \alpha < 8$	102
Figura 6.38–Missão Lucy para observação dos asteroides troianos	109
Figura 6.39–Órbita do JWST	110
Figura 6.40–Órbita <i>halo</i> do SOHO	110
Figura 6.41–Trajetória de escape da influência do sistema Terra-Lua e transferência para Marte	111
Figura 7.42–Coreografias de n -corpos	114
Figura A.43–Seções cônicas	122
Figura A.44–Elementos da elipse	123
Figura A.45–Elementos da hipérbole	123
Figura A.46–Elementos da parábola	123
Figura A.47– a, b e c da elipse	125
Figura A.48– a, b e c da hipérbole	125
Figura A.49–Diretrizes da elipse	125
Figura A.50–Diretrizes da hipérbole	125
Figura A.51–Esquemático para demonstração de $p = a(1 - e^2)$ para a elipse	126
Figura A.52–Esquemático para demonstração de $p = a(e^2 - 1)$ para a hipérbole	126
Figura A.53–Parábola em coordenadas polares	127
Figura A.54–Órbita do cometa de Halley	131
Figura A.55–Vetor posição para o afélio e periélio da elipse	132
Figura A.56–Gráfico da energia específica em função de r	133
Figura B.57–Analogia de números complexos para rotação de vetores	134
Figura B.58–Esquemático da rotação de um número complexo \mathbf{z}	135
Figura B.59–Rotação de \mathbf{v} (exemplo)	136

Lista de tabelas

Tabela 5.1 – Valores da constante de Jacobi referente aos pontos de Lagrange	83
Tabela A.2 – Propriedades geométricas das seções cônicas	124
Tabela A.3 – Relação entre excentricidade e energia específica	130
Tabela A.4 – Excentricidade das órbitas dos planetas do sistema solar	131

Sumário

1	Introdução	15
1.1	Contextualização	15
1.2	Motivação	16
1.3	Objetivos	17
1.3.1	Objetivos Gerais	17
1.3.2	Objetivos Específicos	17
1.4	Organização do Trabalho	18
2	Problema de n-corpos geral	21
2.1	Leis de Kepler	21
2.2	Lei da Gravitação Universal de Newton: o problema de dois corpos	23
2.2.1	Integral de energia	28
2.2.2	Integral do momento angular	29
2.2.3	Vetor Laplace-Runge-Lenz	31
2.2.4	Equação da trajetória	32
2.3	Formulação do problema de n -corpos	34
3	Problema de três corpos	38
3.1	Problema de três corpos geral	38
3.2	Abordagens de Euler e Lagrange	42
3.2.1	Solução de Euler	42
3.2.2	Solução de Lagrange	45
3.3	Problema restrito de três corpos	47
3.3.1	Definição das coordenadas jacobianas	48
3.3.2	Equação de movimento da partícula secundária	51
3.4	Problema circular restrito de três corpos	55
3.4.1	Movimento em um referencial não inercial	55
3.4.2	Equação da força efetiva da partícula secundária	58
4	Cálculo dos pontos lagrangianos	60
4.1	Demonstração da coplanaridade	60
4.2	Cálculo da velocidade angular das massas primárias	62
4.3	Cálculo dos pontos de Lagrange	63
4.3.1	Pontos $L4$ e $L5$	63
4.3.2	Pontos $L1$, $L2$ e $L3$	64

5	Energia da partícula secundária	68
5.1	Normalização das unidades	68
5.2	Equação da energia potencial da partícula secundária	70
5.3	Integral de Jacobi	74
5.4	Curvas de velocidade nula e zonas proibidas	75
5.4.1	Estudo de caso: sistema Terra-Lua	81
5.4.2	Regiões acessíveis no espaço tridimensional	84
6	Estabilidade dos pontos lagrangianos	87
6.1	Conceito de estabilidade unidimensional	88
6.2	Estabilidade no eixo- ζ	89
6.3	Estabilidade no plano orbital	90
6.3.1	Representação em espaço de estados	90
6.3.2	Estudo da estabilidade dos pontos lagrangianos colineares	97
6.3.3	Estudo da estabilidade dos pontos lagrangianos triangulares	103
6.4	Aplicações relacionadas à estabilidade dos pontos de Lagrange	108
7	Conclusão e Trabalhos Futuros	112
7.1	Considerações Finais	112
7.2	Trabalhos Futuros	113
	Referências	116
	Apêndices	121
	Apêndice A Seções cônicas e geometria da órbita	122
A.1	Definição das seções cônicas	122
A.2	Relação entre a energia, momento angular e geometria da órbita	128
	Apêndice B Rotação de vetores com auxílio de números complexos	134
	Apêndice C Códigos MATLAB	138
C.1	Códigos referentes ao Capítulo 5	138
C.1.1	Código principal para o cálculo dos pontos de Lagrange e constantes de Jacobi	138
C.1.2	Dados iniciais para cálculo dos pontos de Lagrange	139
C.1.3	Função para cálculo da constante de Jacobi	140
C.1.4	Plot dos pontos de Lagrange para o sistema Terra-Lua	140
C.2	Códigos referentes ao Capítulo 6	141
C.2.1	Código principal para o cálculo de α em função de μ para os pontos colineares de Lagrange	142

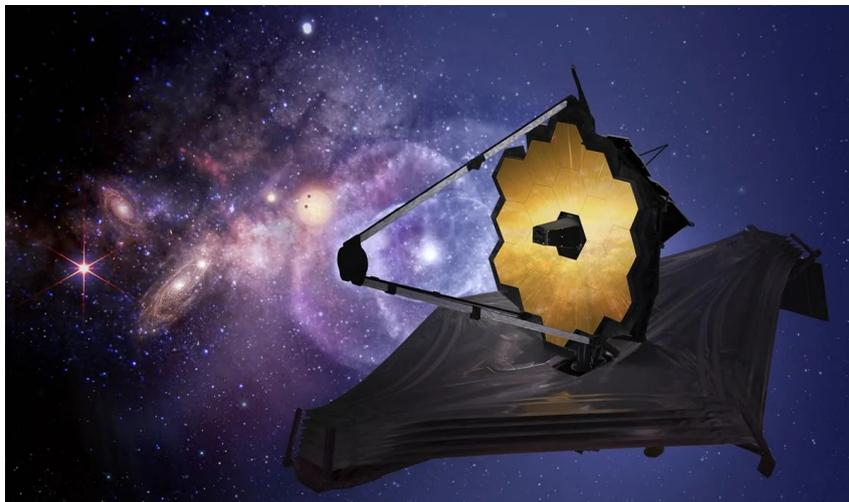
C.2.2	Função para cálculo dos valores de $\alpha(\mu)$	142
C.2.3	<i>Plot</i> de $\alpha(\mu)$ para os pontos colineares de Lagrange	143
C.2.4	<i>Plot</i> para a análise de $f(\alpha)$	144
C.3	Código MATLAB referente ao Apêndice C	144
Anexos		146
Anexo A	Códigos MATLAB para o problema de dois corpos	147

1 Introdução

1.1 Contextualização

O telescópio James Webb (JWST) é, sem dúvida, um dos experimentos científicos mais ambiciosos já construídos. O JWST foi projetado para identificar luz infravermelha, sendo possível observar através de nuvens de gás. Desde seu lançamento no natal de 2021, o telescópio tem se mostrado ser um verdadeiro guia do universo, buscando responder às maiores perguntas da ciência (NASA, 2023a): Como o universo funciona e como se formou? Estamos sozinhos no universo? Como ocorre a evolução de galáxias? Como é o nascimento das estrelas? Além disso, em seu primeiro ano, o telescópio já identificou a composição de diversos exoplanetas, produziu imagens da formação de estrelas e galáxias, permitindo até acompanhar, pela primeira vez, o desenvolvimento de planetas em alta resolução, dentre outras contribuições para a ciência (GOWRAN, 2022).

Figura 1.1 – Ilustração do telescópio James Webb



Fonte: (NASA, 2023b)

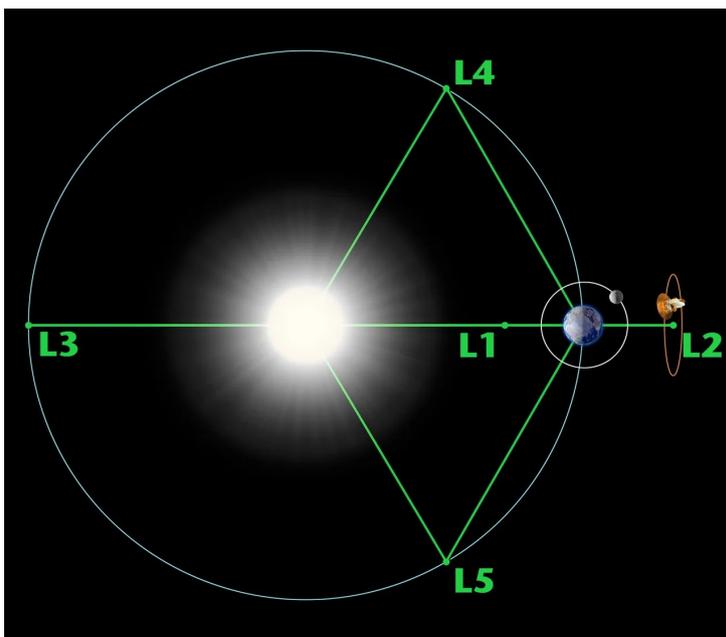
Diferentemente do Telescópio Espacial Hubble, o James Webb não está orbitando a Terra. O JWST foi posicionado em um local estratégico, o ponto lagrangiano L_2 . Os pontos de Lagrange são pontos em que a atração gravitacional de duas massas, combinada à pseudoforça centrífuga, resultam em uma força efetiva nula (NASA, 2023d). Em outras palavras, são pontos de equilíbrio devido a duas massas em movimento orbital. A Figura 1.2 ilustra os pontos de Lagrange do sistema Terra-Sol, destacando a posição do JWST no ponto L_2 . Os pontos L_1 , L_2 e L_3 são pontos colineares à reta que liga os corpos principais, chamados

de massas primárias, e os pontos $L4$ e $L5$ formam triângulos equiláteros com as massas primárias.

Enquanto o ponto $L1$ é interessante para a observação do Sol, o ponto $L2$ é ideal para observações astronômicas de espaço profundo, por não ter nem o Sol, Lua ou Terra no caminho de análise. Além disso, é um ponto que está suficientemente perto da Terra, tornando possível a comunicação com o telescópio.

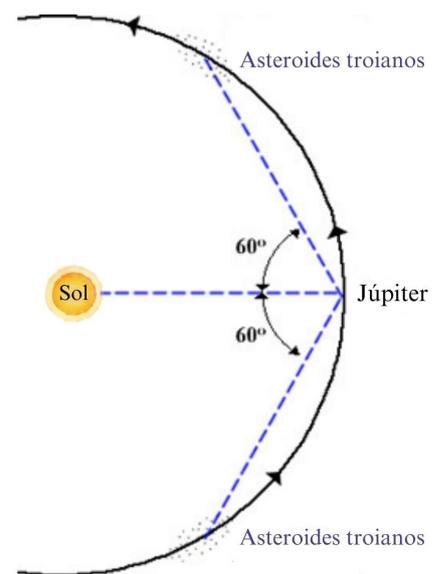
O grande atrativo dos pontos de Lagrange para a dinâmica orbital é que, por serem pontos de equilíbrio, requerem menos propelente para manterem-se em uma posição fixa (no referencial girante) (NASA, 2023d). Na prática, não é possível manter um objeto exatamente no ponto de equilíbrio, de forma que são necessárias correções de órbita. No entanto, essas correções são minimizadas nas redondezas dos pontos de Lagrange. Além disso, o tipo de equilíbrio (estável ou instável) é de grande relevância para esse tipo de estudo prático.

Figura 1.2 – Pontos de Lagrange do sistema Terra-Sol



Fonte: NASA (2023d)

Figura 1.3 – Asteroides troianos



Fonte: Adaptada de Swinburne (2023)

Além de observações astronômicas, outro exemplo prático de pontos de Lagrange são os asteroides troianos, aprisionados nas regiões dos pontos $L4$ e $L5$ do sistema Sol-Júpiter, mostrados na Figura 1.3. Em novembro de 2023, foi possível observar o primeiro asteroide dessa região pela missão Lucy (NASA, 2023c).

1.2 Motivação

A justificativa fundamental para a concepção deste trabalho nasce do fato de que, apesar de esses serem os tópicos mais estudados da dinâmica orbital, não existem muitos documentos que explicam essas teorias de forma detalhada e didática. Assim, este trabalho

visa a esclarecer todas as equações em um documento autocontido, dedicado à análise do problema de n -corpos e pontos lagrangianos.

1.3 Objetivos

1.3.1 Objetivos Gerais

A fim de cumprir com a demanda mencionada na Seção 1.2, este trabalho tem como objetivo principal a investigação e a documentação do desenvolvimento das equações, de forma íntegra, desde o problema de dois corpos até o cálculo dos pontos de Lagrange, bem como realizar a análise da estabilidade dos pontos lagrangianos, apresentando possíveis aplicações da teoria. Além disso, também busca-se esclarecer, de forma didática, os passos de desenvolvimento matemático, adicionando etapas intermediárias não frequentemente encontradas na literatura.

OBJETIVOS GERAIS

Em suma, tem-se por objetivos gerais:

1. A compilação da teoria relevante para o desenvolvimento matemático e a análise dos pontos de Lagrange em um documento único;
2. Esclarecer os passos de desenvolvimento matemático, a fim de produzir um documento didático e autoexplicativo, de forma a tornar esse conteúdo teórico acessível para estudantes de graduação.

1.3.2 Objetivos Específicos

Para cumprir os objetivos gerais – principalmente o primeiro Objetivo Geral, mostrado na caixa explicativa – este trabalho inclui a revisão de tópicos mais básicos, como as Leis de Kepler e a Lei da Gravitação de Newton, antes de partir para desenvolvimentos mais complexos. Isso permite que o leitor se familiarize e/ou revise os conceitos necessários para o entendimento da teoria principal.

Para formalizar adequadamente a teoria dos pontos lagrangianos, abordaremos o problema de dois corpos e discutiremos a complexidade envolvida na generalização do problema de n -corpos, atendendo, assim, ao segundo Objetivo Geral apresentado na caixa explicativa. Além disso, serão mostrados os cálculos dos pontos de Lagrange, dando ênfase ao cálculo analítico quando possível e desenvolvendo códigos em MATLAB quando necessário. Após o cálculo dos pontos de Lagrange, será apresentada uma importante aplicação da teoria: curvas de velocidade zero e regiões proibidas, que serão calculadas a partir da energia

potencial de uma partícula sob influência gravitacional das massas primárias. Por fim, serão apresentados, em detalhes, os cálculos relacionados à estabilidade dos pontos de Lagrange.

Nesse sentido, busca-se responder às perguntas centrais do tema: Por que o problema de dois corpos possui solução analítica e o problema de três corpos geral não? O que são as soluções geométricas de Euler e Lagrange? Qual a relação entre os pontos de Lagrange e o problema de três corpos? O que são as curvas de velocidade nula e qual a relação delas com os pontos de Lagrange? Como podemos aplicar a teoria das regiões proibidas em contextos de missões? Os pontos de Lagrange são pontos de equilíbrio estável ou instável?

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Em suma, tem-se por objetivos específicos:

1. A revisão de tópicos como Leis de Kepler e Lei da Gravitação Universal e familiarização com os conceitos introdutórios relacionados;
2. Dar destaque à relevância do problema de dois corpos para o entendimento pleno do problema de três corpos e seus derivados;
3. Mostrar o motivo da impossibilidade em se obter uma solução analítica para o problema de n -corpos (para $n > 2$). Em outras palavras, esclarecer a incongruência entre o número de integrais de movimento e a ordem das equações diferenciais para $n > 2$;
4. Desenvolver, de forma clara, as soluções geométricas de Euler e de Lagrange;
5. Elucidar a relação entre os pontos de Lagrange e o problema de três corpos;
6. Calcular os pontos de Lagrange;
7. Relacionar a energia potencial às equações de movimento no problema circular restrito de três corpos;
8. Apresentar e interpretar os gráficos das zonas proibidas e curvas de velocidade nula;
9. Realizar o cálculo de estabilidade dos pontos de Lagrange;
10. Abordar aplicações da teoria dos pontos de Lagrange e do problema de três corpos.

1.4 Organização do Trabalho

No Capítulo 2, é apresentada uma breve fundamentação teórica, que consiste nas Leis de Kepler e na Lei da Gravitação Universal. Em seguida, é apresentado o problema de dois

corpos, o qual é a base para o entendimento do problema de três corpos (Capítulo 3). Ainda no Capítulo 2, é mostrada a generalização para n -corpos, ressaltando a impossibilidade de se obter uma solução analítica fechada. Esse capítulo possui como bibliografias principais os livros de Curtis (2015) e Fernandes e Zanardi (2018a).

No Capítulo 3, é apresentado o problema de três corpos geral e as soluções analíticas dos casos particulares de Euler e de Lagrange. Em seguida, os problemas restrito (Seção 3.3) e circular restrito (Seção 3.4) são apresentados. Para esse capítulo, as bibliografias principais utilizadas foram os livros de Hestenes (2002) e Fernandes e Zanardi (2018b).

No Capítulo 4, é mostrado o cálculo dos pontos lagrangianos, bem como a demonstração de que eles são coplanares. Esse capítulo possui como bibliografia principal o trabalho de Westra (2017).

No Capítulo 5, é apresentada a normalização das unidades (Seção 5.1) e o cálculo da energia potencial no contexto do problema circular restrito de três corpos (Seção 5.2). Em seguida, na Seção 5.3, é introduzida a constante de Jacobi, única constante de movimento do problema. Na Seção 5.4, a partir da equação de energia potencial, são apresentadas as definições de curvas de velocidade zero e regiões proibidas. Para esse capítulo, foram utilizados os livros de Fitzpatrick (2012) e Murray e Dermott (2000) como referências bibliográficas principais.

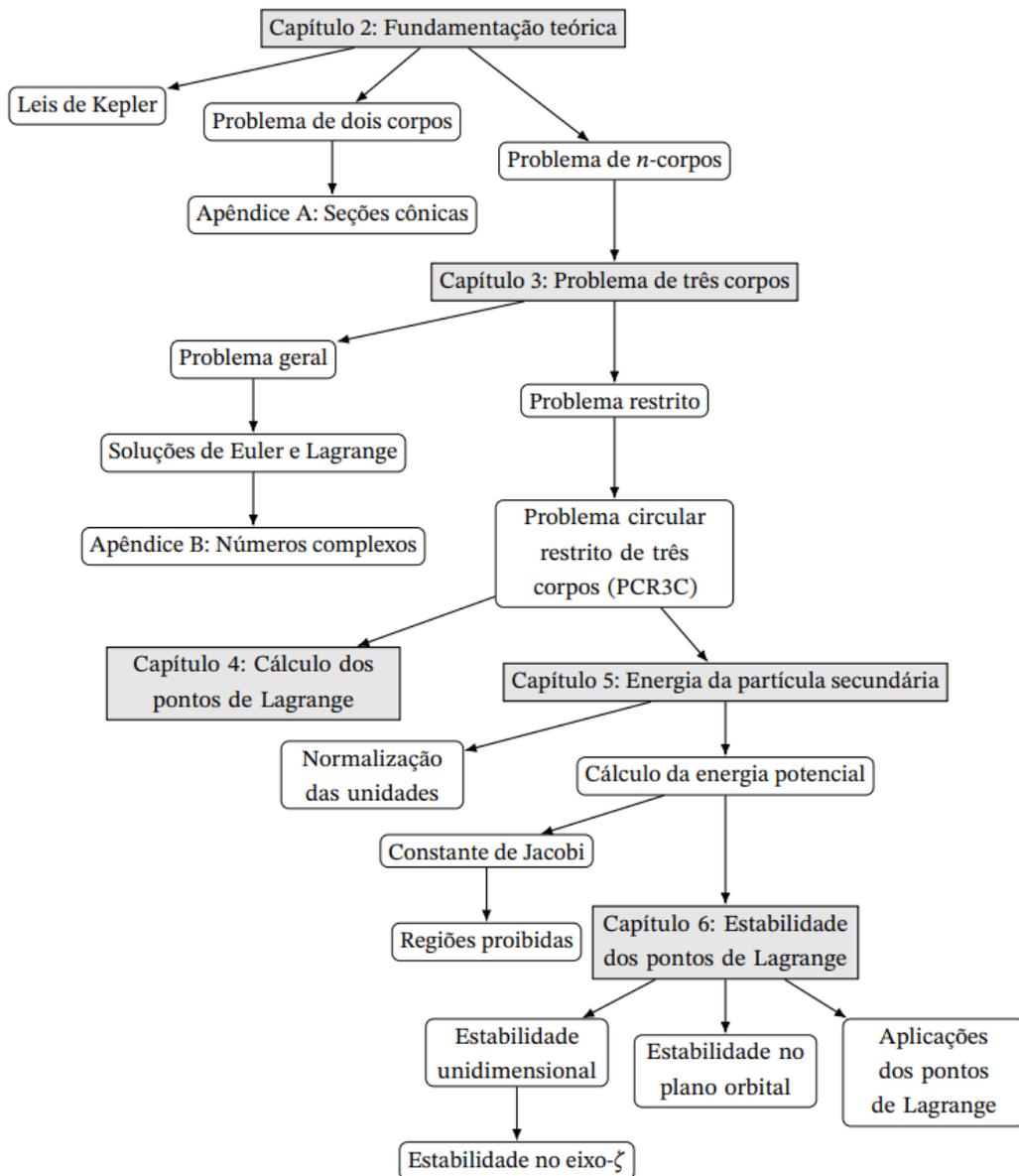
No Capítulo 6, é estudada a estabilidade dos pontos de Lagrange, tanto no plano orbital quanto no eixo perpendicular ao movimento das massas primárias. Dessa forma, na Seção 6.1, é apresentado o conceito de estabilidade unidimensional, utilizado para demonstrar a estabilidade no eixo perpendicular ao movimento, a qual é discutida na Seção 6.2. Na Seção 6.3, é demonstrado que, pela teoria de estabilidade linear, os pontos de Lagrange L_1 , L_2 e L_3 são instáveis e que, para os pontos L_4 e L_5 , a estabilidade depende da proporção entre as massas primárias. Em seguida, na Seção 6.4, são sumarizadas as aplicações relacionadas aos pontos de Lagrange. Para esse capítulo, as referências principais utilizadas foram as de Fernandes e Zanardi (2018b) e Fitzpatrick (2012).

No Capítulo 7, as devidas conclusões do trabalho são delineadas, retomando os objetivos propostos neste capítulo. Ademais, são propostos temas para trabalhos futuros relacionados ao tópico. Assim, os possíveis temas foram cuidadosamente selecionados para contemplar pesquisas a nível de graduação, mestrado e doutorado, bem como tópicos teóricos e práticos.

No final do documento encontram-se os apêndices e o anexo. Durante o documento, os apêndices estão referenciados para indicar ao leitor o momento ideal para a leitura desses materiais adicionais. Para este trabalho, foram escritos três apêndices. Os dois primeiros, Apêndices A e B, são complementos teóricos e servem de apoio para os capítulos principais do texto. Nesse sentido, o Apêndice A aborda os fundamentos das seções cônicas e amplia

a teoria desenvolvida no Capítulo 2, e o Apêndice B esclarece a utilização de números complexos no Capítulo 3. O Apêndice C disponibiliza os códigos autorais produzidos em MATLAB, enquanto o Anexo A reúne os códigos da bibliografia de Curtis (2015) produzidos para solução do problema de dois corpos, o qual é formalizado no Capítulo 2.

Figura 1.4 – Organização do trabalho



Fonte: Elaborada pela autora

Congruente a isso, a Figura 1.4 apresenta o fluxograma dos capítulos e seções do trabalho, ilustrando as interconexões entre os temas abordados. A partir da figura, fica evidente que o problema circular restrito de três corpos, discutido no Capítulo 3, é um tema central do documento, uma vez que é utilizado para o cálculo dos pontos de Lagrange e é ponto de partida para os resultados dos Capítulos 5 e 6.

2 Problema de n -corpos geral

O problema de n -corpos descreve o movimento de n -corpos sob atuação gravitacional mútua. Neste capítulo, será visto que o problema consiste em um conjunto de equações diferenciais acopladas que, para $n > 2$, não possuem solução analítica para o caso geral, ou seja, sem simplificações ou aproximações. Entretanto, existem algumas configurações geométricas que podem ser assumidas e que permitem a obtenção de uma solução analítica para o problema de três corpos - essas são as soluções de Euler e de Lagrange.

O problema de dois corpos é o caso mais simples de interação gravitacional. O entendimento desse problema é de suma importância para esse trabalho, uma vez que as tentativas de solução do problema de três corpos consistem em meros artifícios matemáticos para tornar as equações do problema de três corpos análogas às do problema de dois corpos. Assim, é necessário entender qual é o formato geral da equação de dois corpos e o motivo pelo qual é possível obter soluções analíticas para o problema de dois corpos e não para $n > 2$.

Nesse sentido, inicialmente, na Seção 2.1, são apresentadas as Leis de Kepler, as quais foram precursoras da generalização do problema de dois corpos. Em seguida, na Seção 2.2, é apresentado o desenvolvimento matemático para redução da equação diferencial que descreve o problema de dois corpos por meio das integrais primeiras. Por fim, na Seção 2.3, é mostrada a formulação do problema de n -corpos e é detalhada a razão pela qual, para $n > 2$, não é possível realizar a mesma redução das equações diferenciais.

2.1 Leis de Kepler

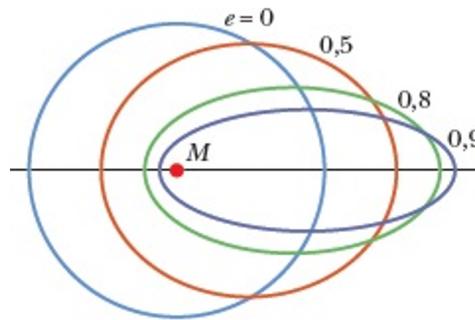
Em 1600, Kepler se mudou para Praga, onde começou seus trabalhos como aprendiz do renomado astrônomo Tycho Brahe. Kepler ficou encarregado de investigar o movimento de Marte, que aparentava não estar de acordo com o modelo geocêntrico de Ptolomeu, teoria assumida na época. Após apenas um ano de colaboração, Tycho Brahe faleceu e Kepler passou a conduzir os trabalhos no observatório com base nos extensos e minuciosos dados coletados por Tycho Brahe (PANNEKOEK, 1989).

Após quatro anos de estudos, Kepler concluiu que o modelo circular e heliocêntrico de Copérnico contemplava, com precisão, os dados astronômicos. Porém, esse modelo não explicava por completo a órbita de Marte. Kepler, então, assumiu órbitas elípticas, não circulares. Dessa forma, além de desafiar o modelo geocêntrico, Kepler ainda propôs, corretamente, o lugar geométrico das órbitas (FERNANDES; ZANARDI, 2018a). Dessa forma, em 1609, Kepler publicou suas duas primeiras leis para o movimento dos planetas e, em 1619, publicou a terceira lei.

PRIMEIRA LEI DE KEPLER: LEI DAS ÓRBITAS

Os planetas descrevem órbitas elípticas, nas quais o Sol se encontra em um dos focos.

Figura 2.5 – Esquemático da primeira lei de Kepler

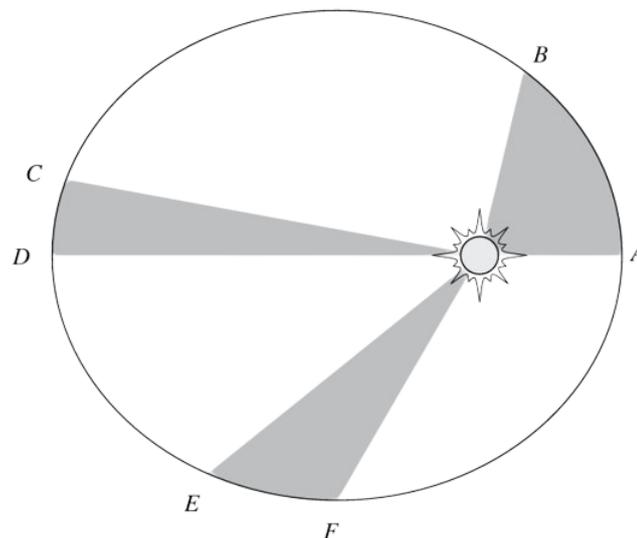


Fonte: Halliday, Resnick e Walker (2010, p. 345)

SEGUNDA LEI DE KEPLER: LEI DAS ÁREAS

A lei das áreas, também conhecida como lei harmônica, afirma que os vetores posição dos planetas em relação ao Sol varrem áreas iguais em tempos iguais. Assim, a velocidade dos planetas não é constante ao longo da órbita.

Figura 2.6 – Esquemático da segunda lei de Kepler



Fonte: Adaptada de Karttunen et al. (2003, p. 119)

TERCEIRA LEI DE KEPLER: LEI DOS PERÍODOS

Sendo C é uma constante que possui o mesmo valor para todos os planetas do sistema solar, a relação entre o período da órbita T e o raio médio R é descrita por

$$\frac{T^2}{R^3} = C. \quad (2.1)$$

Apesar de terem sido inicialmente formuladas para descrever o movimento dos planetas ao redor do Sol, é importante notar que as Leis de Kepler descrevem o problema de dois corpos considerando que uma massa é muito maior que a outra. A massa do Sol equivale a 99,9% da massa do sistema solar. Sendo assim, como a massa do Sol é muito maior do que a massa dos planetas, é válido assumir que o centro de massa se encontra no centro do Sol. Entretanto, na realidade, o Sol também está orbitando o centro de massa do sistema solar.

Em contrapartida, para um sistema binário, ou seja, um sistema de duas massas, as quais possuem ordem de grandeza semelhante, tal aproximação não é possível. Sendo assim, é necessário o estudo do problema de dois corpos, o qual consiste na obtenção das equações de movimento de duas massas sob influência gravitacional mútua.

2.2 Lei da Gravitação Universal de Newton: o problema de dois corpos

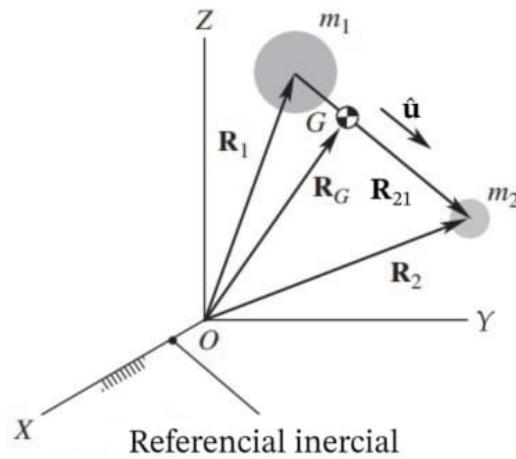
Seja o referencial cartesiano fixo em relação às estrelas $OXYZ$ mostrado na Figura 2.7, considerando duas massas m_1 e m_2 de vetores posição $\mathbf{R}_1 = X_1\hat{\mathbf{I}} + Y_1\hat{\mathbf{J}} + Z_1\hat{\mathbf{K}}$ e $\mathbf{R}_2 = X_2\hat{\mathbf{I}} + Y_2\hat{\mathbf{J}} + Z_2\hat{\mathbf{K}}$, a posição do centro de massa (CG) do sistema é dada por

$$\mathbf{R}_{CG} = \frac{m_1\mathbf{R}_1 + m_2\mathbf{R}_2}{m_1 + m_2}. \quad (2.2)$$

Ainda, sendo $\mathbf{R}_{21} = \mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1$ é possível definir o vetor unitário $\hat{\mathbf{u}}$ que aponta de m_1 para m_2 de acordo com

$$\hat{\mathbf{u}} = \frac{\mathbf{R}_{21}}{R_{21}} = \frac{(X_2 - X_1)\hat{\mathbf{I}} + (Y_2 - Y_1)\hat{\mathbf{J}} + (Z_2 - Z_1)\hat{\mathbf{K}}}{\sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2 + (Z_2 - Z_1)^2}}. \quad (2.3)$$

Figura 2.7 – Referencial inercial OXYZ



Fonte: Adaptada de Curtis (2015, p. 60)

LEI DA GRAVITAÇÃO UNIVERSAL

Sendo \mathbf{F}_{12} a força exercida em m_1 devido a m_2 , \mathbf{F}_{12} pode ser calculada por

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{Gm_1m_2}{R_{21}^2} \hat{\mathbf{u}}. \quad (2.4)$$

Analogamente, pela terceira lei de Newton, temos a força \mathbf{F}_{21} atuante em m_2 devido a m_1 , dada por

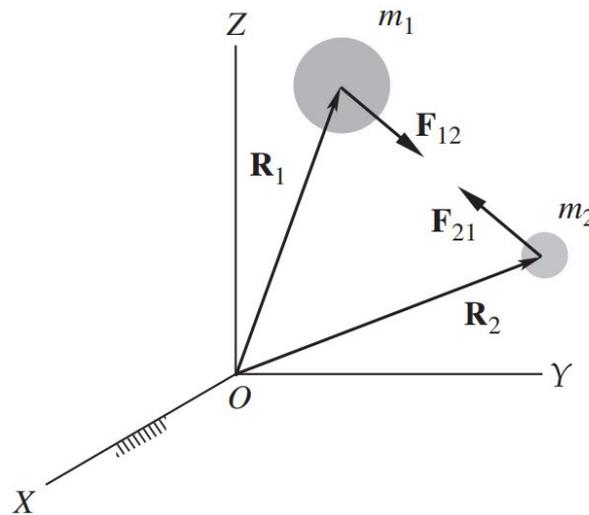
$$\mathbf{F}_{21} = -\frac{Gm_1m_2}{R_{21}^2} \hat{\mathbf{u}}. \quad (2.5)$$

Além disso, pela segunda lei de Newton, sabemos que $\mathbf{F}_{12} = m_1 \ddot{\mathbf{R}}_1$ e $\mathbf{F}_{21} = m_2 \ddot{\mathbf{R}}_2$. Assim, os vetores aceleração $\ddot{\mathbf{R}}_1$ e $\ddot{\mathbf{R}}_2$ são dados por

$$\ddot{\mathbf{R}}_1 = \frac{Gm_2}{R_{21}^2} \hat{\mathbf{u}} = \frac{Gm_2}{R_{21}^3} \mathbf{R}_{21} = Gm_2 \frac{\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1}{|\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1|^3} \quad \text{e} \quad (2.6)$$

$$\ddot{\mathbf{R}}_2 = -\frac{Gm_1}{R_{21}^2} \hat{\mathbf{u}} = -\frac{Gm_1}{R_{21}^3} \mathbf{R}_{21} = -Gm_1 \frac{\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1}{|\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1|^3}. \quad (2.7)$$

Figura 2.8 – Representação das forças no problema de dois corpos



Fonte: Adaptada de Curtis (2015, p. 60)

Sendo assim, é possível expressar o problema de dois corpos como um sistema de equações diferenciais acopladas, conforme mostrado pela Equação (2.8). Dessa forma, sabendo as condições iniciais $\mathbf{R}_1(0)$, $\mathbf{R}_2(0)$, $\dot{\mathbf{R}}_1(0)$, $\dot{\mathbf{R}}_2(0)$, é possível, de forma numérica, resolver o sistema de equações, obtendo as posições $\mathbf{R}_1(t)$ e $\mathbf{R}_2(t)$ das partículas. Em seguida, se desejado, os vetores velocidade e aceleração das massas podem ser calculados a partir das derivadas segundas de \mathbf{R}_1 e \mathbf{R}_2 dadas por

$$\begin{cases} \ddot{\mathbf{R}}_1 = Gm_2 \frac{\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1}{|\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1|^3} \\ \ddot{\mathbf{R}}_2 = -Gm_1 \frac{\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1}{|\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1|^3} \end{cases} \quad (2.8)$$

Após o cálculo de \mathbf{R}_1 e \mathbf{R}_2 com os códigos MATLAB inseridos no Anexo A, é possível obter as trajetórias das partículas, conforme mostrado na Figura 2.9.

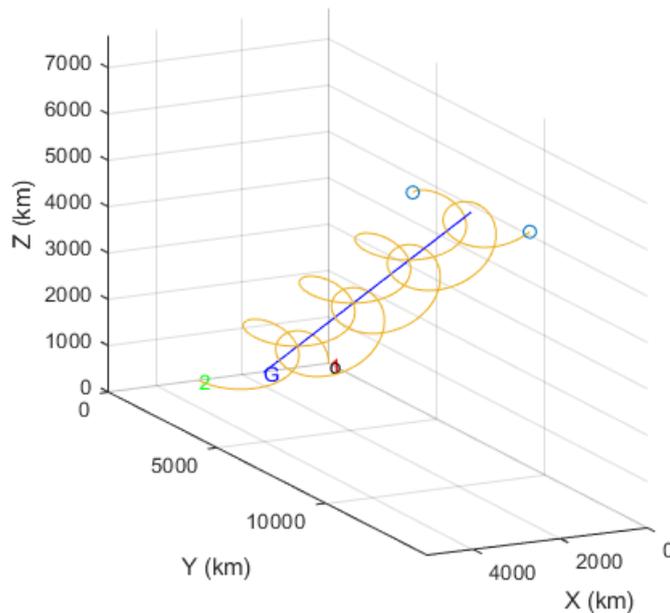
Ademais, a partir da Equação (2.2), obtemos a equação da aceleração do centro de massa

$$\ddot{\mathbf{R}}_{CG} = \frac{m_1 \ddot{\mathbf{R}}_1 + m_2 \ddot{\mathbf{R}}_2}{m_1 + m_2}. \quad (2.9)$$

Pelas Equações (2.4) e (2.5), sabemos que $\mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{21} = \mathbf{0}$. Portanto,

$$m_1 \ddot{\mathbf{R}}_1 + m_2 \ddot{\mathbf{R}}_2 = \mathbf{0}. \quad (2.10)$$

Figura 2.9 – Trajetórias de m_1 e m_2 em relação ao sistema referencial inercial



Fonte: Adaptada de Curtis (2015, p. 65)

Assim, das Equações (2.9) e (2.10), é possível concluir que a aceleração do centro de massa é igual a zero, ou seja, $\ddot{\mathbf{R}}_{CG} = \mathbf{0}$ e, por esse motivo, o centro de massa pode ser escolhido como origem de um referencial inercial. Além disso, devido à ausência de forças externas ao sistema, pela primeira lei de Newton, o centro de massa irá seguir uma trajetória retilínea e com velocidade constante em relação a um sistema de referência inercial. Tais resultados são de extrema importância para os passos seguintes. Dessa forma, iremos adotar um novo sistema referencial $Oxyz$, cuja origem é o centro de massa.

Em particular, este trabalho obtém as equações de movimento das massas em relação ao centro de massa. Porém, uma grande parcela da literatura demonstra o movimento de uma massa em relação à outra. Ambas as demonstrações são análogas. Nesse sentido, definindo os vetores posição $\mathbf{r}_1 = x_1\hat{\mathbf{i}} + y_1\hat{\mathbf{j}} + z_1\hat{\mathbf{k}}$ e $\mathbf{r}_2 = x_2\hat{\mathbf{i}} + y_2\hat{\mathbf{j}} + z_2\hat{\mathbf{k}}$ das massas m_1 e m_2 , como o centro de massa é a origem do sistema referencial, é possível escrever a equação do centro de massa de acordo com

$$m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{r}_1 = -\frac{m_2}{m_1}\mathbf{r}_2. \quad (2.11)$$

Por consequência, o vetor posição de m_1 em relação a m_2 é dado por

$$\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 = \left(-\frac{m_2}{m_1}\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_2 \right) = -\left(\frac{m_2}{m_1} + 1 \right)\mathbf{r}_2 = -\left(\frac{m_1 + m_2}{m_1} \right)\mathbf{r}_2. \quad (2.12)$$

Analogamente para \mathbf{r}_{21} ,

$$\mathbf{r}_{21} = -\left(\frac{m_1 + m_2}{m_2}\right)\mathbf{r}_1. \quad (2.13)$$

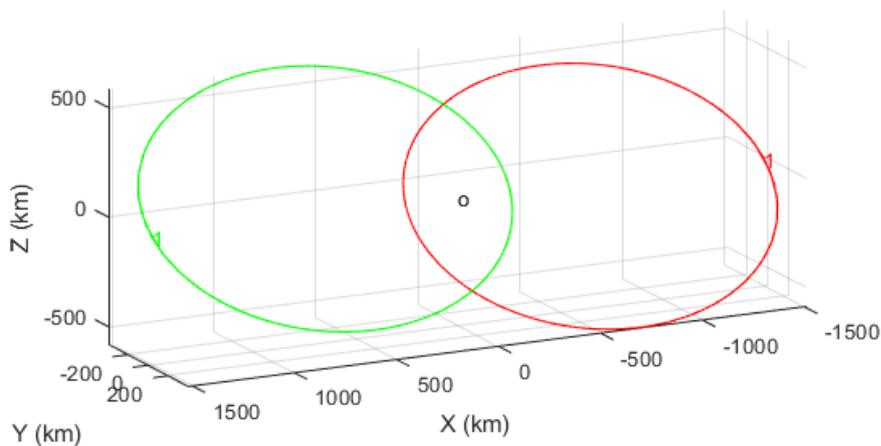
Para $\bar{\mu}_1 = \frac{Gm_2^3}{(m_1 + m_2)^2}$ e $\bar{\mu}_2 = \frac{Gm_1^3}{(m_1 + m_2)^2}$, as equações de movimento, definidas pela Equação (2.8), podem ser reescritas para o novo sistema de referência, de acordo com

$$\begin{cases} \ddot{\mathbf{r}}_1 = -\frac{Gm_2^3}{(m_1 + m_2)^2} \frac{\mathbf{r}_1}{r_1^3} \Rightarrow \ddot{\mathbf{r}}_1 = -\frac{\bar{\mu}_1}{r_1^3} \mathbf{r}_1 \\ \ddot{\mathbf{r}}_2 = -\frac{Gm_1^3}{(m_1 + m_2)^2} \frac{\mathbf{r}_2}{r_2^3} \Rightarrow \ddot{\mathbf{r}}_2 = -\frac{\bar{\mu}_2}{r_2^3} \mathbf{r}_2 \end{cases}. \quad (2.14)$$

Como $\bar{\mu}_1$ e $\bar{\mu}_2$ são constantes, as equações são classificadas como equações diferenciais ordinárias não lineares de segunda ordem.

Analogamente, é possível, com os códigos do Anexo A, obter as trajetórias em relação ao centro de massa (Figura 2.10). Para obter a solução analítica, serão calculadas as integrais primeiras nas Seções 2.2.1 a 2.2.3. As integrais primeiras são quantidades constantes ao longo da trajetória que auxiliam na redução da ordem da equação diferencial do movimento, permitindo evidenciar uma solução analítica.

Figura 2.10 – Trajetórias de m_1 e m_2 em relação ao centro de massa



Fonte: Adaptada de Curtis (2015, p. 65)

2.2.1 Integral de energia

A integral de energia, também conhecida como Integral *Vis-Viva*, é a equação da energia mecânica específica ao longo da trajetória. Com a ausência de forças externas, esse valor permanece constante. Para um vetor posição \mathbf{r} qualquer, sabendo que $r^2 = \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}$ e da propriedade da derivada do produto escalar, temos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}r^2 &= \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) \\ 2r \frac{dr}{dt} &= 2(\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}}) \\ \frac{dr}{dt} &= \frac{1}{r} \mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}}\end{aligned}\quad (2.15)$$

e

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}}) &= 2(\dot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}}) \\ \dot{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{r}} &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt}(\dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}}).\end{aligned}\quad (2.16)$$

Portanto, da Equação (2.15), temos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\right) &= -\frac{1}{r^2} \frac{dr}{dt} \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\right) &= -\frac{1}{r^3}(\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}}).\end{aligned}\quad (2.17)$$

Fazendo o produto escalar da equação de movimento de $\ddot{\mathbf{r}}_1$ por $\dot{\mathbf{r}}_1$ e utilizando as propriedades das Equações (2.16) e (2.17), é possível obter a integral de energia para m_1 de acordo com

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{r}}_1 &= -\frac{\bar{\mu}_1}{r_1^3} \mathbf{r}_1 \\ \dot{\mathbf{r}}_1 \cdot \ddot{\mathbf{r}}_1 &= -\frac{\bar{\mu}_1}{r_1^3}(\dot{\mathbf{r}}_1 \cdot \mathbf{r}_1) \\ \frac{1}{2} \frac{d}{dt}(\dot{\mathbf{r}}_1 \cdot \dot{\mathbf{r}}_1) &= \frac{d}{dt}\left(\frac{\bar{\mu}_1}{r_1}\right) \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{r}_1^2}{2} - \frac{\bar{\mu}_1}{r_1}\right) &= 0 \\ \epsilon_1 &= \frac{\dot{r}_1^2}{2} - \frac{\bar{\mu}_1}{r_1}.\end{aligned}\quad (2.18)$$

INTEGRAL VIS-VIVA

Sendo v_i o módulo da velocidade do corpo i , em que $i = \{1,2\}$, a equação da vis-viva pode ser escrita como

$$\epsilon = \frac{v_i^2}{2} - \frac{\bar{\mu}_i}{r_i}. \quad (2.19)$$

A expressão acima se refere à energia mecânica específica e é uma quantidade que se conserva ao longo da trajetória. Note que o primeiro termo está relacionado à energia cinética específica e o segundo termo à energia potencial específica.

2.2.2 Integral do momento angular

Realizando passos semelhantes aos anteriores, porém, utilizando o produto vetorial, temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) &= \dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}} + \mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} \\ \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) &= \mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Fazendo $\mathbf{r} \times$ pela esquerda em ambos os lados da equação de movimento de m_1 , é possível obter o vetor momento angular específico \mathbf{h}_1 , de acordo com

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 \times \ddot{\mathbf{r}}_1 &= -\frac{\bar{\mu}_1}{r_1^3} \mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_1 \\ \frac{d}{dt}(\mathbf{r}_1 \times \dot{\mathbf{r}}_1) &= \mathbf{0} \\ \mathbf{r}_1 \times \dot{\mathbf{r}}_1 &= \mathbf{h}_1. \end{aligned} \quad (2.21)$$

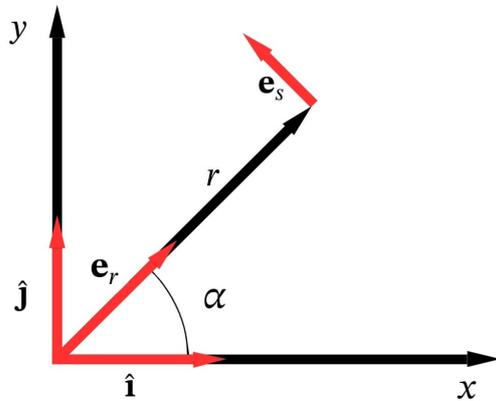
O resultado da Equação (2.21) possui um significado físico importante: o vetor momento angular específico \mathbf{h}_1 é perpendicular a \mathbf{r}_1 e $\dot{\mathbf{r}}_1$ e é uma constante de integração. Assim, devido à ausência de momentos externos ao sistema, foi possível demonstrar que o momento angular é constante. Como \mathbf{h}_1 é um vetor constante, a direção do vetor posição e do vetor velocidade permanecerão constantes. Isso significa que o movimento está restrito a um plano, conhecido como plano de órbita.

Para calcular o valor do módulo do vetor \mathbf{h}_1 , é interessante escrever o vetor posição \mathbf{r}_1 em coordenadas polares. Considere $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_s, \mathbf{e}_w)$ como sendo a base ortonormal para o sistema em coordenadas polares mostrado na Figura 2.11. Como \mathbf{e}_r é a direção radial, temos que $\mathbf{e}_r = \cos \alpha \hat{\mathbf{i}} + \sin \alpha \hat{\mathbf{j}}$. A derivada temporal de \mathbf{e}_r é calculada de acordo com

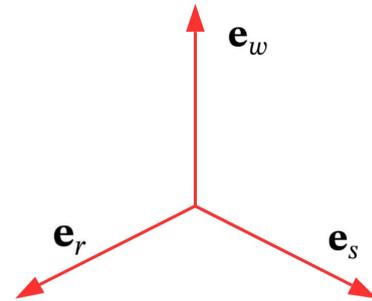
$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}}_r &= -\dot{\alpha} \sin \alpha \hat{\mathbf{i}} + \dot{\alpha} \cos \alpha \hat{\mathbf{j}} = \dot{\alpha}(-\sin \alpha \hat{\mathbf{i}} + \cos \alpha \hat{\mathbf{j}}) \\ \frac{\dot{\mathbf{e}}_r}{\dot{\alpha}} &= -\sin \alpha \hat{\mathbf{i}} + \cos \alpha \hat{\mathbf{j}}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Figura 2.11 – Sistema referencial em coordenadas polares

(a) Sistema referencial em coordenadas polares no plano orbital



(b) Versores do sistema referencial em coordenadas polares



Fonte: Elaborada pela autora

Observe que o vetor da Equação (2.22) é um vetor unitário e perpendicular a \mathbf{e}_r . Portanto, definiremos $\mathbf{e}_s = -\sin \alpha \hat{\mathbf{i}} + \cos \alpha \hat{\mathbf{j}}$. Sabendo \mathbf{e}_r e \mathbf{e}_s é possível definir $\mathbf{e}_w = \hat{\mathbf{k}}$.

Realizando a derivada temporal de $\mathbf{r}_1 = r_1 \mathbf{e}_r$, obtemos o vetor velocidade de m_1 de acordo com

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}}_1 &= \dot{r}_1 \mathbf{e}_r + r_1 \dot{\mathbf{e}}_r = \dot{r}_1 \mathbf{e}_r + r_1 \dot{\alpha} \mathbf{e}_s \\ \mathbf{v}_1 &= \dot{r}_1 \mathbf{e}_r + r_1 \dot{\alpha} \mathbf{e}_s. \end{aligned} \quad (2.23)$$

O vetor momento angular específico é dado por $\mathbf{h}_1 = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{v}_1$. Realizando esse cálculo, obtemos o valor de \mathbf{h}_1 . Assim, temos

$$\mathbf{h}_1 = r_1^2 \dot{\alpha} \mathbf{e}_w. \quad (2.24)$$

INTEGRAL DO MOMENTO ANGULAR

Em suma, o vetor momento angular específico de uma partícula é dado por

$$\mathbf{h}_i = \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i = r_i^2 \dot{\alpha} \mathbf{e}_w. \quad (2.25)$$

Sua direção define o plano orbital e seu módulo é constante.

2.2.3 Vetor Laplace-Runge-Lenz

A última integral primeira calculada nesse desenvolvimento é o vetor Laplace-Runge-Lenz. Como \mathbf{h}_1 é um vetor constante, $\dot{\mathbf{h}}_1 = \mathbf{0}$. Assim, temos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\dot{\mathbf{r}}_1 \times \mathbf{h}_1) &= \ddot{\mathbf{r}}_1 \times \mathbf{h}_1 + \dot{\mathbf{r}}_1 \times \dot{\mathbf{h}}_1 \\ \frac{d}{dt}(\dot{\mathbf{r}}_1 \times \mathbf{h}_1) &= \ddot{\mathbf{r}}_1 \times \mathbf{h}_1.\end{aligned}\quad (2.26)$$

Além disso, pela definição $\mathbf{h} = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$, pela propriedade da Equação (2.15) e pela identidade do duplo produto vetorial $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{a}$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{r_1^3}(\mathbf{h}_1 \times \mathbf{r}_1) &= \frac{1}{r_1^3}[(\mathbf{r}_1 \times \dot{\mathbf{r}}_1) \times \mathbf{r}_1] = \frac{1}{r_1^3}[(\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_1)\dot{\mathbf{r}}_1 - (\mathbf{r}_1 \cdot \dot{\mathbf{r}}_1)\mathbf{r}_1] \\ \frac{1}{r_1^3}(\mathbf{h}_1 \times \mathbf{r}_1) &= \frac{1}{r_1}\dot{\mathbf{r}}_1 - \frac{\dot{r}_1}{r_1^2}\mathbf{r}_1.\end{aligned}\quad (2.27)$$

Além disso,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\frac{\mathbf{r}_1}{r_1}\right) &= \frac{\dot{\mathbf{r}}_1 r_1 - \dot{r}_1 \mathbf{r}_1}{r_1^2} \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\mathbf{r}_1}{r_1}\right) &= \frac{1}{r_1}\dot{\mathbf{r}}_1 - \frac{\dot{r}_1}{r_1^2}\mathbf{r}_1.\end{aligned}\quad (2.28)$$

Assim, das Equações (2.27) e (2.28), temos

$$\frac{1}{r_1^3}(\mathbf{h}_1 \times \mathbf{r}_1) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\mathbf{r}_1}{r_1}\right).\quad (2.29)$$

Portanto, aplicando produto vetorial da equação de movimento por \mathbf{h}_1 pela direita, das Equações (2.26) e (2.29), é possível definir o vetor constante Laplace-Runge-Lenz de acordo com

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{r}}_1 \times \mathbf{h}_1 &= -\frac{\bar{\mu}_1}{r_1^3}\mathbf{r}_1 \times \mathbf{h}_1 \\ \frac{d}{dt}(\dot{\mathbf{r}}_1 \times \mathbf{h}_1) &= \bar{\mu}_1 \frac{d}{dt}\left(\frac{\mathbf{r}_1}{r_1}\right) \\ \frac{d}{dt}\left(\dot{\mathbf{r}}_1 \times \mathbf{h}_1 - \bar{\mu}_1 \frac{\mathbf{r}_1}{r_1}\right) &= \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_1 &= \dot{\mathbf{r}}_1 \times \mathbf{h}_1 - \bar{\mu}_1 \frac{\mathbf{r}_1}{r_1}.\end{aligned}\quad (2.30)$$

Note que ambos os termos da Equação (2.30) possuem direção perpendicular a \mathbf{h}_1 , portanto, podemos afirmar que $\mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{h}_1 = 0$.

VETOR LAPLACE-RUNGE-LENZ

Assim, sem perda de generalidade, o vetor Laplace-Runge-Lenz para uma partícula é dado por

$$\mathbf{B}_i = \dot{\mathbf{r}}_i \times \mathbf{h}_i - \bar{\mu}_i \frac{\mathbf{r}_i}{r_i}. \quad (2.31)$$

Lembrando que \mathbf{B}_i é perpendicular ao vetor unitário \mathbf{e}_w , portanto $\mathbf{B}_i \cdot \mathbf{h}_i = 0$.

2.2.4 Equação da trajetória

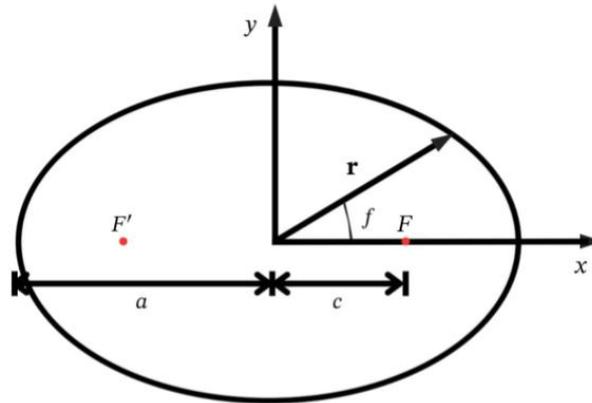
Fazendo o produto escalar de \mathbf{r}_1 por \mathbf{B}_1 e da propriedade $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$, é possível obter a solução analítica da equação diferencial do movimento da partícula de massa m_1 de acordo com

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{B}_1 &= \mathbf{r}_1 \cdot \left(\dot{\mathbf{r}}_1 \times \mathbf{h}_1 - \bar{\mu}_1 \frac{\mathbf{r}_1}{r_1} \right) \\ r_1 B_1 \cos f &= \mathbf{r}_1 \cdot (\dot{\mathbf{r}}_1 \times \mathbf{h}_1) - \bar{\mu}_1 \frac{\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_1}{r_1} \\ r_1 B_1 \cos f &= \mathbf{h}_1 \cdot (\mathbf{r}_1 \times \dot{\mathbf{r}}_1) - \bar{\mu}_1 \frac{r_1^2}{r_1} \\ r_1 B_1 \cos f &= \mathbf{h}_1 \cdot \mathbf{h}_1 - \bar{\mu}_1 r_1 \\ r_1 B_1 \cos f &= h_1^2 - \bar{\mu}_1 r_1 \\ r_1 &= \frac{h_1^2}{B_1 \cos f + \bar{\mu}_1} \\ r_1 &= \frac{h_1^2 / \bar{\mu}_1}{1 + (B_1 / \bar{\mu}_1) \cos f}. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Da equação, o valor de f , conhecido como anomalia verdadeira, é o ângulo entre o vetor posição e o vetor Laplace-Runge-Lenz.

Note que a equação possui formato de seção cônica e o tipo de cônica é definido pelo valor de excentricidade $e = B_1 / \bar{\mu}_1$. O caso da elipse está ilustrado na Figura 2.12. Os mesmos passos podem ser realizados para a m_2 para a obtenção de uma equação semelhante. No Apêndice A, o tema de seções cônicas foi aprofundado e foi descrito como a energia de um corpo está relacionada com a geometria de sua órbita.

Figura 2.12 – Esquemático da anomalia verdadeira em uma órbita elíptica



Fonte: Elaborada pela autora

EQUAÇÃO DA TRAJETÓRIA PARA O PROBLEMA DE DOIS CORPOS

Para uma partícula no problema de dois corpos, a trajetória pode ser escrita como uma cônica de *semi-latus rectum* $p = h_i^2/\bar{\mu}_i$ e excentricidade $e = B_i/\bar{\mu}_i$ de acordo com

$$r_i = \frac{h_i^2/\bar{\mu}_i}{1 + B_i/\bar{\mu}_i \cos f}. \quad (2.33)$$

O tipo de seção cônica está relacionado ao valor da excentricidade da seguinte forma:

- $e = 0$: circunferência;
- $0 < e < 1$: elipse;
- $e = 1$: parábola;
- $e > 1$: hipérbole.

Dessa forma, é possível concluir que o problema de dois corpos possui solução analítica geral, ou seja, foi possível obter uma expressão r_1 sem adotar nenhuma aproximação ou consideração geométrica. Por outro lado, será visto que, para resolver o problema de três corpos de forma analítica, é necessário fazer considerações geométricas como as feitas por Lagrange e Euler. Essas soluções serão vistas em detalhes nas Seções 3.2.1 e 3.2.2, respectivamente.

2.3 Formulação do problema de n -corpos

O princípio da superposição permite escrever a força resultante em uma partícula como a soma das forças que atuam nela de forma independente. Para o caso do problema de n -corpos, existirão $n - 1$ forças gravitacionais atuando em cada massa. Pela segunda lei de Newton e pela Lei da Gravitação Universal, para $i = 1, \dots, n$, podemos escrever a equação

$$m_i \ddot{\mathbf{R}}_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n G m_i m_j \frac{\mathbf{R}_j - \mathbf{R}_i}{|\mathbf{R}_j - \mathbf{R}_i|^3} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n G m_i m_j \frac{\mathbf{R}_{ji}}{R_{ji}^3}, \quad (2.34)$$

a qual representa a força resultante em cada partícula do sistema.

Para o problema de n -corpos, existem $3n$ equações diferenciais (uma para cada direção do espaço, isto é, $\ddot{R}_{i,X}$, $\ddot{R}_{i,Y}$ e $\ddot{R}_{i,Z}$), conforme mostrado pela Equação (2.34). Porém, pela teoria de equações diferenciais, para esse sistema de equações diferenciais de segunda ordem, são necessárias duas constantes para cada equação. Portanto, é necessário estabelecer $6n$ constantes para a resolução do sistema (HESTENES, 2002).

Quando não é possível obter, diretamente, a solução em função das condições iniciais (vetores posição e velocidade inicial), é possível utilizar as integrais primeiras para reduzir a ordem do sistema para zero (MCCLAIN; VALLADO, 2001), conforme foi executado para o problema de dois corpos. É importante notar que o problema de n -corpos é resolvível numericamente, visto que as constantes podem ser, simplesmente, os valores de posição e velocidade inicial dos corpos. Para o problema de três corpos, por exemplo, seriam necessárias $6 \times 3 = 18$ constantes para a solução e existem 18 valores iniciais para o problema - posições e velocidades nas três componentes para cada um dos corpos. Porém, por outro lado, para obter uma expressão analítica para a trajetória das partículas, é necessário reduzir a ordem do sistema com o auxílio de constantes de movimento.

Nesse sentido, para $n > 2$, não é possível obter uma solução analítica de forma semelhante ao problema de dois corpos neste capítulo. Isso se dá pelo fato de que são conhecidas apenas 10 integrais de movimento para esse tipo de problema (FERNANDES; ZANARDI, 2018b), número insuficiente para a redução do sistema. São elas:

- seis constantes referentes aos vetores posição inicial e velocidade do centro de massa;
- três constantes referentes à conservação do momento angular;
- uma constante para a conservação da energia mecânica.

Para deduzir as integrais primeiras do problema de n -corpos, é necessário definir o centro de massa, de acordo com

$$\mathbf{R}_{CG} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{R}_i}{\sum_{i=1}^n m_i}. \quad (2.35)$$

De forma análoga ao problema de dois corpos, a análise dos Equação (2.34) resulta em

$$\sum_{i=1}^n m_i \ddot{\mathbf{R}}_i = \mathbf{0}. \quad (2.36)$$

Integrando a Equação (2.36) duas vezes, é possível obter os vetores \mathbf{a} e \mathbf{b} , os quais equivalem a seis constantes de integração. Assim, temos

$$\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{R}_i = \mathbf{a}t + \mathbf{b}. \quad (2.37)$$

Das Equações (2.35) e (2.37), obtemos a equação da trajetória do centro de massa

$$\mathbf{R}_{CG} = \frac{\mathbf{a}t + \mathbf{b}}{\sum_{i=1}^n m_i}. \quad (2.38)$$

Novamente, da Equação (2.38), conclui-se que o centro de massa se move em movimento retilíneo e uniforme, em que a velocidade é dada por $\frac{\mathbf{a}}{\sum_{i=1}^n m_i}$ e a posição inicial é $\frac{\mathbf{b}}{\sum_{i=1}^n m_i}$.

Realizado o produto vetorial $\mathbf{R}_i \times m_i \ddot{\mathbf{R}}_i$, a partir da Equação (2.34) e fazendo o somatório para $i = \{1, \dots, n\}$, podemos escrever

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{R}_i \times m_i \ddot{\mathbf{R}}_i = \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n G m_i m_j \frac{\mathbf{R}_i \times \mathbf{R}_{ji}}{R_{ji}^3}. \quad (2.39)$$

Manipulando $\mathbf{R}_i \times \mathbf{R}_{ji}$, temos

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_i \times \mathbf{R}_{ji} &= \mathbf{R}_i \times (\mathbf{R}_j - \mathbf{R}_i) = \mathbf{R}_i \times \mathbf{R}_j = -\mathbf{R}_j \times \mathbf{R}_i = -\mathbf{R}_j \times (\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j) = -\mathbf{R}_j \times \mathbf{R}_{ij} \\ \mathbf{R}_i \times \mathbf{R}_{ji} &= -\mathbf{R}_j \times \mathbf{R}_{ij}. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Da Equação (2.40), é possível concluir que

$$\sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n G m_i m_j \frac{\mathbf{R}_i \times \mathbf{R}_{ji}}{R_{ji}^3} = \mathbf{0}. \quad (2.41)$$

Aplicando esse resultado na Equação (2.39), temos

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{R}_i \times m_i \ddot{\mathbf{R}}_i = \mathbf{0}. \quad (2.42)$$

Pela propriedade da derivada do produto vetorial,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\mathbf{R}_i \times \dot{\mathbf{R}}_i) &= \dot{\mathbf{R}}_i \times \dot{\mathbf{R}}_i + \mathbf{R}_i \times \ddot{\mathbf{R}}_i \\ \frac{d}{dt}(\mathbf{R}_i \times \dot{\mathbf{R}}_i) &= \mathbf{R}_i \times \ddot{\mathbf{R}}_i. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Portanto, do resultado da Equação (2.43) e integrando a Equação (2.42), é possível obter o vetor momento angular total do sistema \mathbf{h}_{sys} de acordo com

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{R}_i \times m_i \dot{\mathbf{R}}_i = \mathbf{h}_{\text{sys}}. \quad (2.44)$$

Como \mathbf{h}_{sys} é uma constante que pertence ao \mathbb{R}^3 , portanto, \mathbf{h}_{sys} equivale a três constantes de integração. Ademais, vale comentar que o esse vetor define o plano invariante de Laplace.

Para encontrar o valor da energia mecânica, de forma análoga ao procedimento realizado pro problema de dois corpos, temos

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} v_i^2 \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \dot{\mathbf{R}}_i \cdot \dot{\mathbf{R}}_i \right) = \dot{\mathbf{R}}_i \cdot \ddot{\mathbf{R}}_i. \quad (2.45)$$

Utilizando a Equação (2.17) como resultado, é possível obter

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{R_{ij}} \right) &= -\frac{1}{R_{ij}^3} \mathbf{R}_{ij} \cdot \dot{\mathbf{R}}_{ij} = -\frac{1}{R_{ij}^3} (\dot{\mathbf{R}}_i - \dot{\mathbf{R}}_j) \cdot \mathbf{R}_{ij} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{R_{ij}} \right) &= -\frac{1}{R_{ij}^3} (\dot{\mathbf{R}}_i \cdot \mathbf{R}_{ij} - \dot{\mathbf{R}}_j \cdot \mathbf{R}_{ij}) \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{R_{ij}} \right) &= -\frac{1}{R_{ij}^3} (\dot{\mathbf{R}}_i \cdot \mathbf{R}_{ij} + \dot{\mathbf{R}}_j \cdot \mathbf{R}_{ji}). \end{aligned} \quad (2.46)$$

Aplicando o produto escalar por $\dot{\mathbf{R}}_i$ na Equação (2.34) e fazendo a soma das equações para $i = \{1, \dots, n\}$, temos

$$\sum_{i=1}^n \dot{\mathbf{R}}_i \cdot m_i \ddot{\mathbf{R}}_i = - \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n G m_i m_j \frac{\dot{\mathbf{R}}_i \cdot \mathbf{R}_{ij}}{R_{ij}^3}. \quad (2.47)$$

Das Equação (2.45) e da simetria da Equação (2.46), é possível manipular a Equação (2.47) de acordo com

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v_i^2 \right) &= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} G \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{m_i m_j}{R_{ij}} \right) \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v_i^2 - \frac{1}{2} G \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{m_i m_j}{R_{ij}} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Ao integrar a Equação (2.48), é obtida a equação da energia mecânica do sistema dada por

$$\underbrace{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v_i^2}_{E_K} - \frac{1}{2} G \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{m_i m_j}{R_{ij}} = E \quad (2.49)$$

$$\underbrace{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v_i^2}_{E_K} + \underbrace{\left(- \frac{1}{2} G \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{m_i m_j}{R_{ij}} \right)}_U = E. \quad (2.50)$$

Note que a energia mecânica total é escrita em função da energia cinética total E_K e energia potencial do sistema U .

Por fim, adicionalmente às 10 integrais primeiras mencionadas, o problema de dois corpos ainda possui constantes derivadas das Leis de Kepler. Então, para o problema de dois corpos, é possível reduzir a ordem do sistema para zero. Porém, para $n \geq 3$, não existem análogos às Leis de Kepler, portanto, a ordem do sistema resulta em $6n - 10$. Assim, para $n \geq 3$, não é possível manipular o sistema de equações diferenciais e obter uma solução fechada.

Nesse sentido, no capítulo seguinte, as equações de movimento serão desenvolvidas para $n = 3$, porém, será mostrado que equações analíticas fechadas só podem ser obtidas para casos particulares.

3 Problema de três corpos

3.1 Problema de três corpos geral

Durante o curso da ciência, muitos astrônomos e matemáticos tentaram resolver o problema de três corpos analiticamente, porém, sem sucesso. Um dos grandes atrativos do problema era o fato de que existia uma solução para o problema de dois corpos, porém, com a adição de apenas um corpo extra, o desafio se tornava aparentemente impossível de resolver (MUSIELAK; QUARLES, 2014). Foi esse cenário que motivou o rei Oscar II da Suécia e Noruega, em 1890, a propor um prêmio para quem fosse capaz de resolver o problema de três corpos analiticamente (BARROW-GREEN, 1994).

O trabalho vencedor da competição foi o de Henri Poincaré que, apesar de não ter resolvido o problema de três corpos analiticamente, provou que esse tipo de solução não é possível para $n > 2$ e que o problema de três corpos é extremamente sensível às condições iniciais do problema (WALTER, 2012). Nesse sentido, Poincaré afirmou em suas análises que, como não existem integrais de movimento suficientes, não é possível obter uma solução analítica fechada para o problema de três corpos geral (CHENCINER, 2015). Assim, não é possível obter uma solução analítica similar à que foi demonstrada neste trabalho para o problema de dois corpos. Esse estudo foi um ponto notável para o desenvolvimento dessa área e também foi um precursor para as primeiras ideias da teoria do caos, que seria elaborada no século seguinte (MUSIELAK; QUARLES, 2014). Contudo, vale comentar que, em 1912, Sundman obteve uma solução em série para o problema de três corpos geral (MUSIELAK; QUARLES, 2014). No entanto, essa não é considerada uma solução analítica fechada. Além disso, a solução converge de forma muito lenta e não possui utilidade prática e, por isso, é pouco comentada e estudada (FERNANDES; ZANARDI, 2018b).

Conforme foi dito, fazendo considerações geométricas, é possível obter soluções analíticas particulares para o problema de três corpos. Sendo assim, na Seção 3.2, serão detalhadas as soluções de Euler e Lagrange. O método utilizado neste trabalho será baseado no desenvolvimento de Hestenes (2002), o qual utiliza as distâncias relativas entre os corpos para reescrever as equações de movimento e para facilitar a obtenção dos resultados de Euler e Lagrange.

Sendo assim, fazendo o caso particular da Equação (2.34) para $n = 3$ e tomando o centro de massa como origem do sistema de coordenadas, a aceleração de cada corpo pode ser escrita como mostrado no sistema de equações

$$\begin{cases} \ddot{\mathbf{r}}_1 = Gm_2 \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} + Gm_3 \frac{\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1|^3} \\ \ddot{\mathbf{r}}_2 = Gm_1 \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} + Gm_3 \frac{\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2|^3} \\ \ddot{\mathbf{r}}_3 = Gm_1 \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3|^3} + Gm_2 \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3|^3} \end{cases} \quad (3.1)$$

Adotando $M = Gm$, é possível reduzir o sistema para

$$\begin{cases} \ddot{\mathbf{r}}_1 = M_2 \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} + M_3 \frac{\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1|^3} \\ \ddot{\mathbf{r}}_2 = M_1 \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} + M_3 \frac{\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2|^3} \\ \ddot{\mathbf{r}}_3 = M_1 \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3|^3} + M_2 \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3|^3} \end{cases} \quad (3.2)$$

Pela definição do centro de massa e sabendo que ele é a origem do sistema referencial, temos

$$m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 + m_3 \mathbf{r}_3 = \mathbf{0}. \quad (3.3)$$

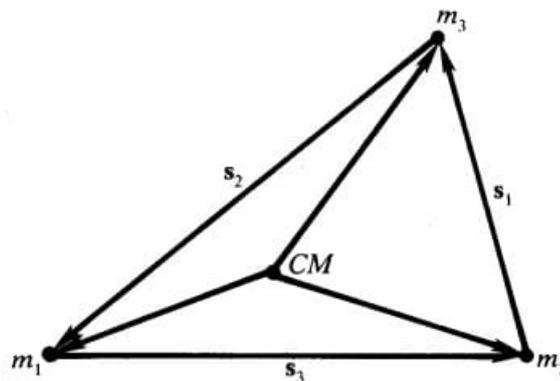
Com base na Figura 3.13, é possível definir as distâncias relativas \mathbf{s}_1 , \mathbf{s}_2 e \mathbf{s}_3 dadas pelas equações

$$\mathbf{s}_1 = \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2, \quad (3.4)$$

$$\mathbf{s}_2 = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3 \quad \text{e} \quad (3.5)$$

$$\mathbf{s}_3 = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1. \quad (3.6)$$

Figura 3.13 – Distâncias relativas do problema generalizado de três corpos



Fonte: Adaptada de Hestenes (2002, p. 401)

Por inspeção da Figura 3.13, das Equações (3.4) a (3.6), é possível afirmar que

$$\mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2 + \mathbf{s}_3 = \mathbf{0}. \quad (3.7)$$

Derivando duas vezes a Equação (3.7), temos

$$\ddot{\mathbf{s}}_1 + \ddot{\mathbf{s}}_2 + \ddot{\mathbf{s}}_3 = \mathbf{0}. \quad (3.8)$$

Reescrevendo a Equação (3.2) e utilizando as distâncias relativas \mathbf{s}_1 , \mathbf{s}_2 e \mathbf{s}_3 , é obtida o sistema de equações

$$\begin{cases} \ddot{\mathbf{r}}_1 = M_2 \frac{\mathbf{s}_3}{s_3} - M_3 \frac{\mathbf{s}_2}{s_2} \\ \ddot{\mathbf{r}}_2 = -M_1 \frac{\mathbf{s}_3}{s_3} + M_3 \frac{\mathbf{s}_1}{s_1} \\ \ddot{\mathbf{r}}_3 = M_1 \frac{\mathbf{s}_2}{s_2} - M_2 \frac{\mathbf{s}_1}{s_1} \end{cases}. \quad (3.9)$$

Sendo $m = m_1 + m_2 + m_3$ e substituindo os valores de \mathbf{r}_2 e \mathbf{r}_3 , a partir das Equações (3.5) e (3.6) na Equação (3.3), temos

$$\begin{aligned} m_1 \mathbf{r}_1 + m_2(\mathbf{r}_1 + \mathbf{s}_3) + m_3(\mathbf{r}_1 - \mathbf{s}_2) &= \mathbf{0} \\ (m_1 + m_2 + m_3)\mathbf{r}_1 &= m_3 \mathbf{s}_2 - m_2 \mathbf{s}_3 \\ m\mathbf{r}_1 &= m_3 \mathbf{s}_2 - m_2 \mathbf{s}_3. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Analogamente,

$$\begin{aligned} m_1(\mathbf{r}_2 - \mathbf{s}_3) + m_2 \mathbf{r}_2 + m_3(\mathbf{r}_2 + \mathbf{s}_1) &= \mathbf{0} \\ (m_1 + m_2 + m_3)\mathbf{r}_2 &= m_1 \mathbf{s}_3 - m_3 \mathbf{s}_1 \\ m\mathbf{r}_2 &= m_1 \mathbf{s}_3 - m_3 \mathbf{s}_1 \end{aligned} \quad (3.11)$$

e

$$\begin{aligned} m_1(\mathbf{r}_3 + \mathbf{s}_2) + m_2(\mathbf{r}_3 - \mathbf{s}_1) + m_3 \mathbf{r}_3 &= \mathbf{0} \\ (m_1 + m_2 + m_3)\mathbf{r}_3 &= m_2 \mathbf{s}_1 - m_1 \mathbf{s}_2 \\ m\mathbf{r}_3 &= m_2 \mathbf{s}_1 - m_1 \mathbf{s}_2. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Diferenciando as Equações (3.10), (3.11) e (3.12), obtemos o sistema de equações

$$\begin{cases} m\ddot{\mathbf{r}}_1 = m_3\ddot{\mathbf{s}}_2 - m_2\ddot{\mathbf{s}}_3 \Rightarrow \ddot{\mathbf{r}}_1 = \frac{m_3}{m}\ddot{\mathbf{s}}_2 - \frac{m_2}{m}\ddot{\mathbf{s}}_3 \\ m\ddot{\mathbf{r}}_2 = m_1\ddot{\mathbf{s}}_3 - m_3\ddot{\mathbf{s}}_1 \Rightarrow \ddot{\mathbf{r}}_2 = \frac{m_1}{m}\ddot{\mathbf{s}}_3 - \frac{m_3}{m}\ddot{\mathbf{s}}_1 \\ m\ddot{\mathbf{r}}_3 = m_2\ddot{\mathbf{s}}_1 - m_1\ddot{\mathbf{s}}_2 \Rightarrow \ddot{\mathbf{r}}_3 = \frac{m_2}{m}\ddot{\mathbf{s}}_1 - \frac{m_1}{m}\ddot{\mathbf{s}}_2 \end{cases} \quad (3.13)$$

Das Equações (3.9) e (3.13), temos

$$\begin{cases} \frac{m_3}{m}\ddot{\mathbf{s}}_2 - \frac{m_2}{m}\ddot{\mathbf{s}}_3 = M_2\frac{\mathbf{s}_3}{s_3^3} - M_3\frac{\mathbf{s}_2}{s_2^3} \\ \frac{m_1}{m}\ddot{\mathbf{s}}_3 - \frac{m_3}{m}\ddot{\mathbf{s}}_1 = -M_1\frac{\mathbf{s}_3}{s_3^3} + M_3\frac{\mathbf{s}_1}{s_1^3} \\ \frac{m_2}{m}\ddot{\mathbf{s}}_1 - \frac{m_1}{m}\ddot{\mathbf{s}}_2 = M_1\frac{\mathbf{s}_2}{s_2^3} - M_2\frac{\mathbf{s}_1}{s_1^3} \end{cases} \quad (3.14)$$

Combinando as duas últimas equações do sistema e sabendo que $\ddot{\mathbf{s}}_2 + \ddot{\mathbf{s}}_3 = -\ddot{\mathbf{s}}_1$, pela Equação (3.8), temos

$$\begin{aligned} \frac{m_2 + m_3}{m}\ddot{\mathbf{s}}_1 - \frac{m_1}{m}\underbrace{(\ddot{\mathbf{s}}_2 + \ddot{\mathbf{s}}_3)}_{-\ddot{\mathbf{s}}_1} &= M_1\left(\frac{\mathbf{s}_2}{s_2^3} + \frac{\mathbf{s}_3}{s_3^3}\right) - (M_2 + M_3)\frac{\mathbf{s}_1}{s_1^3} \\ \frac{m_1 + m_2 + m_3}{m}\ddot{\mathbf{s}}_1 &= M_1\left(\frac{\mathbf{s}_2}{s_2^3} + \frac{\mathbf{s}_3}{s_3^3}\right) - (M_2 + M_3)\frac{\mathbf{s}_1}{s_1^3} \\ \ddot{\mathbf{s}}_1 &= M_1\left(\frac{\mathbf{s}_2}{s_2^3} + \frac{\mathbf{s}_3}{s_3^3}\right) - (M_2 + M_3)\frac{\mathbf{s}_1}{s_1^3}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Adicionando e subtraindo $M_1\frac{\mathbf{s}_1}{s_1^3}$ na Equação (3.15),

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{s}}_1 &= M_1\left(\frac{\mathbf{s}_2}{s_2^3} + \frac{\mathbf{s}_3}{s_3^3}\right) - (M_2 + M_3)\frac{\mathbf{s}_1}{s_1^3} + M_1\frac{\mathbf{s}_1}{s_1^3} - M_1\frac{\mathbf{s}_1}{s_1^3} \\ \ddot{\mathbf{s}}_1 &= M_1\left(\frac{\mathbf{s}_1}{s_1^3} + \frac{\mathbf{s}_2}{s_2^3} + \frac{\mathbf{s}_3}{s_3^3}\right) - (M_1 + M_2 + M_3)\frac{\mathbf{s}_1}{s_1^3}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Sendo $\mathbf{S} = \frac{\mathbf{s}_1}{s_1^3} + \frac{\mathbf{s}_2}{s_2^3} + \frac{\mathbf{s}_3}{s_3^3}$ e $M = M_1 + M_2 + M_3$, realizando o mesmo processo para $\ddot{\mathbf{s}}_2$ e $\ddot{\mathbf{s}}_3$, temos

$$\begin{cases} \ddot{\mathbf{s}}_1 = M_1 \mathbf{S} - M \frac{\mathbf{s}_1}{s_1^3} \\ \ddot{\mathbf{s}}_2 = M_2 \mathbf{S} - M \frac{\mathbf{s}_2}{s_2^3} \\ \ddot{\mathbf{s}}_3 = M_3 \mathbf{S} - M \frac{\mathbf{s}_3}{s_3^3} \end{cases} \quad (3.17)$$

A Equação (3.17), então, descreve o movimento das três partículas para o caso geral em função das distâncias relativas apresentadas. Vale notar que as equações são acopladas pelo termo \mathbf{S} . Será visto nas Seções 3.2.1 e 3.2.2 que as abordagens geométricas de Euler e Lagrange buscam manipular o termo de acoplamento \mathbf{S} para permitir uma solução semelhante à solução para o problema de dois corpos.

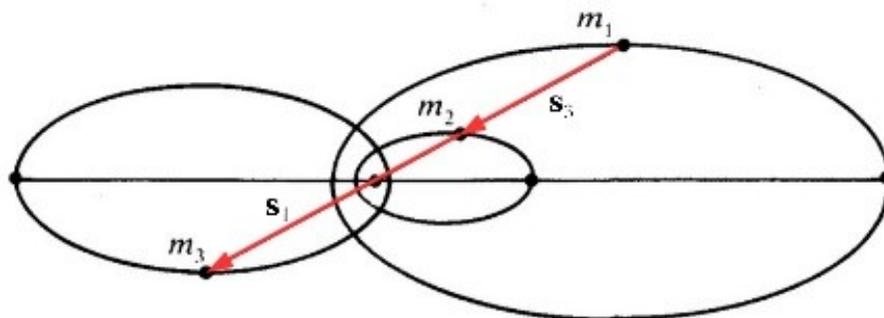
3.2 Abordagens de Euler e Lagrange

3.2.1 Solução de Euler

A solução particular descrita por Euler assume as seguintes condições:

1. As partículas são colineares;
2. As distâncias entre as partículas são valores constantes.

Figura 3.14 – Esquemático da solução de Euler



Fonte: Adaptada de [Hestenes \(2002, p. 404\)](#)

Seja λ uma constante real e positiva, com auxílio da Figura 3.14, a segunda premissa pode ser interpretada matematicamente por $\mathbf{s}_1 = \lambda \mathbf{s}_3$. Assim, a partir da Equação (3.7), é possível escrever \mathbf{s}_1 e \mathbf{s}_2 em função de \mathbf{s}_3 , de acordo com

$$\mathbf{s}_1 = \lambda \mathbf{s}_3 \quad \text{e} \quad (3.18)$$

$$\mathbf{s}_2 = -(1 + \lambda) \mathbf{s}_3. \quad (3.19)$$

Isolando \mathbf{S} na terceira linha da Equação (3.17),

$$\mathbf{S} = \frac{\ddot{\mathbf{s}}_3}{M_3} + \frac{M}{M_3} \frac{\mathbf{s}_3}{s_3^3}. \quad (3.20)$$

Substituindo o valor de \mathbf{S} encontrado no restante das equações de movimento,

$$\begin{cases} \ddot{\mathbf{s}}_1 = M_1 \left(\frac{\ddot{\mathbf{s}}_3}{M_3} + \frac{M}{M_3} \frac{\mathbf{s}_3}{s_3^3} \right) - M \frac{\mathbf{s}_1}{s_1^3} \Rightarrow \ddot{\mathbf{s}}_1 + M \frac{\mathbf{s}_1}{s_1^3} = M_1 \left(\frac{\ddot{\mathbf{s}}_3}{M_3} + \frac{M}{M_3} \frac{\mathbf{s}_3}{s_3^3} \right) \\ \ddot{\mathbf{s}}_2 = M_2 \left(\frac{\ddot{\mathbf{s}}_3}{M_3} + \frac{M}{M_3} \frac{\mathbf{s}_3}{s_3^3} \right) - M \frac{\mathbf{s}_2}{s_2^3} \Rightarrow \ddot{\mathbf{s}}_2 + M \frac{\mathbf{s}_2}{s_2^3} = M_2 \left(\frac{\ddot{\mathbf{s}}_3}{M_3} + \frac{M}{M_3} \frac{\mathbf{s}_3}{s_3^3} \right) \end{cases}. \quad (3.21)$$

Derivando as Equações (3.18) e (3.19) duas vezes e substituindo na Equação (3.21), temos

$$\begin{cases} \lambda \ddot{\mathbf{s}}_3 + M \frac{\mathbf{s}_3}{\lambda^2 s_3^3} = M_1 \left(\frac{\ddot{\mathbf{s}}_3}{M_3} + \frac{M}{M_3} \frac{\mathbf{s}_3}{s_3^3} \right) \\ -(1 + \lambda) \ddot{\mathbf{s}}_3 - M \frac{\mathbf{s}_3}{(1 + \lambda)^2 s_3^3} = M_2 \left(\frac{\ddot{\mathbf{s}}_3}{M_3} + \frac{M}{M_3} \frac{\mathbf{s}_3}{s_3^3} \right) \end{cases}. \quad (3.22)$$

Manipulando as equações,

$$\begin{cases} (\lambda M_3 - M_1) \ddot{\mathbf{s}}_3 = M \left(M_1 - \frac{M_3}{\lambda^2} \right) \frac{\mathbf{s}_3}{s_3^3} \\ [M_2 + M_3(1 + \lambda)] \ddot{\mathbf{s}}_3 = -M \left(\frac{M_3}{1 + \lambda^2} + M_2 \right) \frac{\mathbf{s}_3}{s_3^3} \end{cases}. \quad (3.23)$$

Dividindo uma equação pela outra,

$$\frac{M_2 + M_3(1 + \lambda)}{M_1 - \lambda M_3} = \frac{M_3(1 + \lambda)^{-2} + M_2}{M_1 - M_3 \lambda^{-2}}. \quad (3.24)$$

Dividindo ambos os lados da equação por $\lambda^2(1 + \lambda)^{-2}$,

$$\frac{M_2(1 + \lambda)^2 + M_3(1 + \lambda)^3}{\lambda^2 M_1 - \lambda^3 M_3} = \frac{M_3 + M_2(1 + \lambda)^2}{\lambda^2 M_1 - M_3}. \quad (3.25)$$

Abrindo os quadrados e cubo da soma,

$$\frac{M_2(1 + 2\lambda + \lambda^2) + M_3(1 + 3\lambda + 3\lambda^2 + \lambda^3)}{\lambda^2 M_1 - \lambda^3 M_3} = \frac{M_3 + M_2(1 + 2\lambda + \lambda^2)}{\lambda^2 M_1 - M_3}. \quad (3.26)$$

A Equação (3.26) pode ser expandida manualmente ou com o auxílio do MATLAB. Neste trabalho foi utilizada a janela de comando do MATLAB conforme mostrado abaixo.

```

1 >> syms L M1 M2 M3
2 >> A=M2*(1+2*L+L^2)+M3*(1+3*L+3*L^2+L^3);
3 >> B=(L^2)*M1-M3;
4 >> C=(L^2)*M1-(L^3)*M3;
5 >> D=M3+M2*(1+2*L+L^2);
6 >> left=A*B; right=C*D; eqn=expand(left-right)
7
8 eqn =
9
10 3*L^3*M1*M3 - M3^2 - 3*L^2*M3^2 - M2*M3 - 2*L*M2*M3 - L^2*M2*M3 -
    3*L*M3^2 + L^3*M2*M3 + 3*L^4*M1*M3 + 2*L^4*M2*M3 + L^5*M1*M3 +
    L^5*M2*M3
11
12 >>

```

Como $M_3 \neq 0$, podemos dividir o resultado encontrado por M_3 . Assim, obtemos

$$(M_1 + M_2)\lambda^5 + (3M_1 + 2M_2)\lambda^4 + (3M_1 + M_2)\lambda^3 - (M_2 + 3M_3)\lambda^2 - (2M_2 + 3M_3)\lambda - (M_2 + M_3) = 0. \quad (3.27)$$

Denominando o lado esquerdo da equação por $f(\lambda)$, a análise das raízes da Equação (3.27) é feita da seguinte forma:

- Como $f(0)$ é negativo e $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} f(\lambda)$ é positivo, é possível afirmar que existe pelo menos uma raiz real positiva;
- Pela regra de sinais de Descartes, o número de raízes positivas é o número de mudanças de sinal dos coeficientes (quando o polinômio está no formato de ordem decrescente do expoente da variável). Assim, como há apenas uma mudança de sinal, existe apenas uma raiz real positiva para a Equação (3.27).

Com isso, é possível concluir que existe uma solução para λ e ela é única, dados os valores de M_1 , M_2 e M_3 . Porém, isso não significa que o problema de Euler possui solução analítica. Até agora, foi mostrado apenas que, resolvendo a Equação (3.27) e encontrando λ , é possível determinar os vetores \mathbf{s}_1 e \mathbf{s}_2 , caso \mathbf{s}_3 seja conhecido.

Sendo assim, o problema se resume em provar que existe solução analítica para \mathbf{s}_3 . Para isso, é necessário analisar o formato das Equações (3.23). Para obter o vetor \mathbf{s}_3 , basta resolver qualquer uma das equações. Se for provado que existe solução analítica para alguma das equações, está provado que o problema de Euler possui solução analítica. Nesse sentido, é possível observar que ambas as equações possuem o mesmo formato das equações desacopladas para o problema de dois corpos, representadas pela Equação (2.14). Assim, é possível afirmar que \mathbf{s}_3 possui solução analítica e é uma cônica, semelhante à solução do problema de dois corpos, Equação (2.32).

Dessa forma, conforme foi dito, ao obter \mathbf{s}_3 , é possível calcular \mathbf{s}_1 e \mathbf{s}_2 . Em posse de \mathbf{s}_1 , \mathbf{s}_2 e \mathbf{s}_3 , se for de interesse, também é possível utilizar as Equações (3.10), (3.11) e (3.12) para obter os valores de \mathbf{r}_1 , \mathbf{r}_2 e \mathbf{r}_3 . Assim, substituindo as Equações (3.18) e (3.19) nas Equações (3.10), (3.11) e (3.12),

$$m\mathbf{r}_1 = -m_3(1 + \lambda)\mathbf{s}_3 - m_2\mathbf{s}_3, \quad (3.28)$$

$$m\mathbf{r}_2 = m_1\mathbf{s}_3 - m_3\lambda\mathbf{s}_3 \quad \text{e} \quad (3.29)$$

$$m\mathbf{r}_3 = m_2\lambda\mathbf{s}_3 + m_1(1 + \lambda)\mathbf{s}_3. \quad (3.30)$$

Manipulando as Equações (3.28), (3.29) e (3.30), obtemos os vetores posição em relação ao centro de massa, dados pelas Equações (3.31), (3.32) e (3.33).

$$\mathbf{r}_1 = -\frac{\mathbf{s}_3}{m}[m_2 + m_3(1 + \lambda)], \quad (3.31)$$

$$\mathbf{r}_2 = \frac{\mathbf{s}_3}{m}(m_1 - m_3\lambda) \quad \text{e} \quad (3.32)$$

$$\mathbf{r}_3 = \frac{\mathbf{s}_3}{m}[m_1(1 + \lambda) + m_2\lambda]. \quad (3.33)$$

3.2.2 Solução de Lagrange

A solução geométrica proposta por Lagrange assume que as partículas formam triângulos equiláteros em todos os momentos de suas trajetórias, conforme mostrado pela Figura 3.15. Em outras palavras, $s_1 = s_2 = s_3$. Assim, da definição de \mathbf{S} , temos

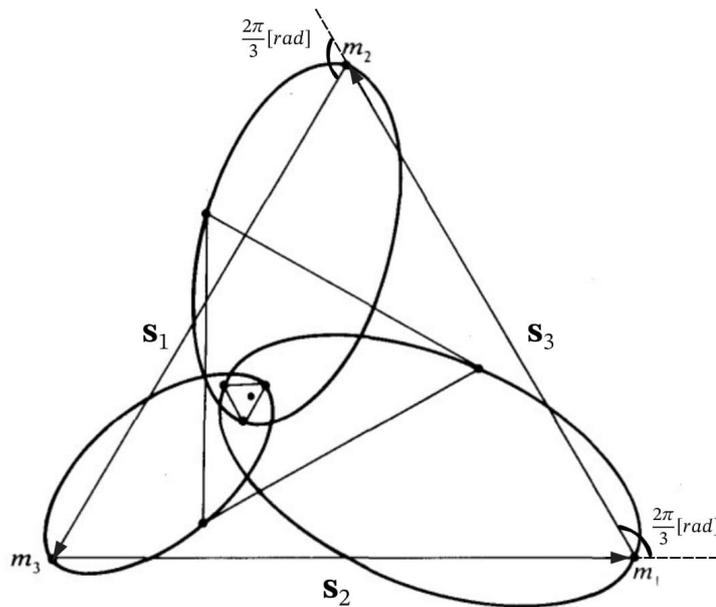
$$\mathbf{S} = \frac{\mathbf{s}_1}{s_1^3} + \frac{\mathbf{s}_2}{s_2^3} + \frac{\mathbf{s}_3}{s_3^3} = \frac{\mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2 + \mathbf{s}_3}{s_3^2} \quad \mathbf{S} = \mathbf{0}. \quad (3.34)$$

Note que ao tomar $s_1 = s_2 = s_3$, $\mathbf{S} = \mathbf{0}$, desacoplando as equações de movimento relativo das partículas m_1 , m_2 e m_3 . Dessa forma, fazendo $\mathbf{S} = \mathbf{0}$ na Equação (3.17), são obtidas as equações de movimento desacopladas para cada partícula, dadas por

$$\begin{cases} \ddot{\mathbf{s}}_1 = -M \frac{\mathbf{s}_1}{s_1^3} \\ \ddot{\mathbf{s}}_2 = -M \frac{\mathbf{s}_2}{s_2^3} \\ \ddot{\mathbf{s}}_3 = -M \frac{\mathbf{s}_3}{s_3^3} \end{cases} \quad (3.35)$$

Novamente, a Equação (3.35) possui a mesma solução do problema de dois corpos, visto que possui o mesmo formato da Equação (2.14). Em outras palavras, \mathbf{s}_1 , \mathbf{s}_2 e \mathbf{s}_3 possuem solução analítica.

Figura 3.15 – Esquemático da solução de Lagrange



Fonte: Adaptada de Hestenes (2002, p. 403)

Pela geometria do problema, os vetores se diferenciam apenas pela direção e sentido. Uma forma de representar isso é utilizando números complexos para rotacionar vetores. Ou seja, o vetor \mathbf{s}_1 é o vetor \mathbf{s}_3 rotacionado em $\frac{2\pi}{3}[\text{rad}]$ (no sentido trigonométrico). Analogamente, \mathbf{s}_2 pode ser interpretado como \mathbf{s}_3 rotacionado em $-\frac{2\pi}{3}[\text{rad}]$. Dessa forma, é possível escrever todos os vetores em função de \mathbf{s}_3 , conforme

$$\mathbf{s}_1 = \mathbf{s}_3 e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\mathbf{s}_3 \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \quad \text{e} \quad (3.36)$$

$$\mathbf{s}_2 = \mathbf{s}_3 e^{i\frac{-2\pi}{3}} = -\mathbf{s}_3 \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right). \quad (3.37)$$

Assim, se mais conveniente, é possível resolver apenas a equação diferencial para \mathbf{s}_3 e utilizar as Equações (3.36) e (3.37) para o cálculo de \mathbf{s}_1 e \mathbf{s}_2 .

Analogamente ao caso de Euler, é possível obter os vetores posição em relação ao centro de massa pela substituição dos valores de \mathbf{s}_1 e \mathbf{s}_2 encontrados nas Equações (3.36) e (3.37) nas Equações (3.10), (3.11) e (3.12). Assim, temos

$$m\mathbf{r}_1 = -m_3\mathbf{s}_3 \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) - m_2\mathbf{s}_3, \quad (3.38)$$

$$m\mathbf{r}_2 = m_1\mathbf{s}_3 + m_3\mathbf{s}_3 \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \quad \text{e} \quad (3.39)$$

$$m\mathbf{r}_3 = -m_2\mathbf{s}_3 \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) + m_1\mathbf{s}_3 \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right). \quad (3.40)$$

Manipulando as Equações (3.38), (3.39) e (3.40), temos

$$\mathbf{r}_1 = \frac{\mathbf{s}_3}{2m} \left[-2m_2 - m_3(1 + i\sqrt{3}) \right], \quad (3.41)$$

$$\mathbf{r}_2 = \frac{\mathbf{s}_3}{2m} \left[2m_1 + m_3(1 - i\sqrt{3}) \right] \quad \text{e} \quad (3.42)$$

$$\mathbf{r}_3 = \frac{\mathbf{s}_3}{2m} \left[m_1 - m_2 + i(m_1 + m_2)\sqrt{3} \right], \quad (3.43)$$

em que \mathbf{r}_1 , \mathbf{r}_2 e \mathbf{r}_3 são os vetores posição em relação ao centro de massa em função do vetor posição relativa \mathbf{s}_3 , o qual sabemos que possui solução analítica.

Para mais detalhes relacionados à utilização de números complexos para realizar a rotação dos vetores e esclarecimentos adicionais sobre o significado da unidade imaginária i nas equações desta seção, recomenda-se consultar o Apêndice B.

3.3 Problema restrito de três corpos

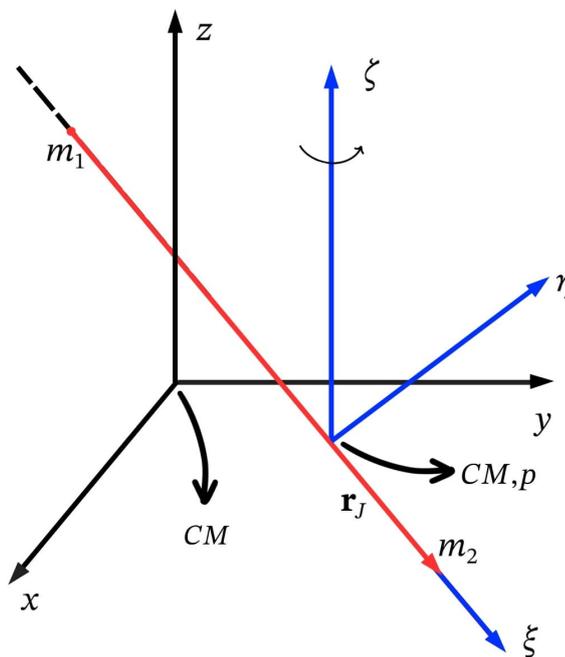
O problema restrito é o estudo do movimento das massas primárias m_1 e m_2 e da massa secundária m_3 considerando que $m_3 \ll m_1, m_2$. É de suma importância notar que, ao fazer essa consideração, estamos assumindo que o movimento da massa m_3 é diretamente influenciado pela atração gravitacional das massas m_1 e m_2 . Porém, como a massa da secundária é muito menor que as massas das primárias, os movimentos das partículas

primárias não são afetados pela massa m_3 . Dessa forma, intuitivamente, é possível perceber que o movimento das primárias será caracterizado pelo movimento de dois corpos e isso será provado matematicamente nesta seção.

3.3.1 Definição das coordenadas jacobianas

É comum utilizar coordenadas jacobianas para o desenvolvimento do problema restrito de três corpos. Esse sistema referencial $O\xi\eta\zeta$, de vetores unitários $\hat{\mathbf{i}}'$, $\hat{\mathbf{j}}'$ e $\hat{\mathbf{k}}'$, tem como origem o centro de massa das partículas primárias m_1 e m_2 . Seja o vetor posição relativa \mathbf{r}_J da partícula m_2 em relação à partícula m_1 , a direção e sentido do eixo ξ são os mesmos do vetor \mathbf{r}_J . Em seguida, a orientação do eixo ζ é a mesma que do eixo z . Por fim, o eixo η é obtido pelo complemento do sistema dextrogiro. Essas considerações estão ilustradas na Figura 3.16. Vale notar que o plano $\xi\eta$ é o plano orbital das massas primárias e irá girar com a mesma velocidade angular que as massas primárias. Assim, observa-se que esse novo sistema referencial é não inercial.

Figura 3.16 – Ilustração do referencial não inercial $O\xi\eta\zeta$ em azul

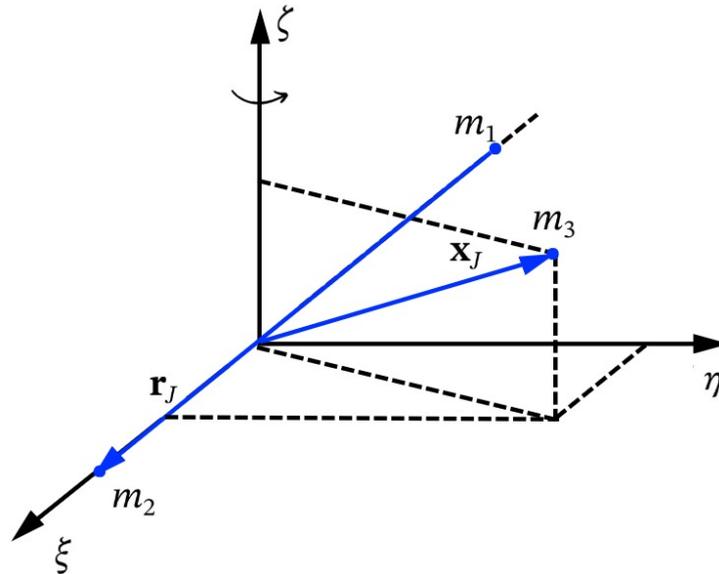


Fonte: Elaborada pela autora

Para este problema, é interessante, ainda, estabelecer \mathbf{x}_J como sendo o vetor posição da partícula secundária m_3 em relação ao centro de massa das partículas primárias m_1 e m_2 , a origem do sistema referencial. Assim, os vetores \mathbf{r}_J e \mathbf{x}_J podem ser visualizados na Figura 3.17. Essa fundamentação teórica será utilizada, principalmente, para estudo do problema

circular restrito de três corpos (Seção 3.4). Porém, é interessante ter em mente a existência dos dois referenciais.

Figura 3.17 – Ilustração dos vetores \mathbf{x}_J e \mathbf{r}_J



Fonte: Elaborada pela autora

Nesse sentido, o centro de massa das partículas primárias $\mathbf{r}_{CM,p}$ é escrito como

$$\mathbf{r}_{CM,p} = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}. \quad (3.44)$$

Como o centro de massa das três partículas é a origem do sistema referencial $Oxyz$, pela Equação (3.3), temos

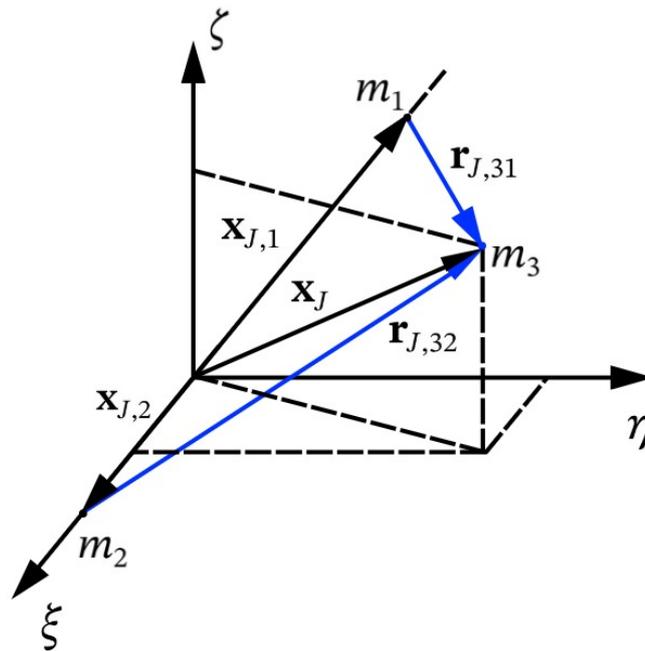
$$\mathbf{r}_{CM,p} = \frac{-m_3 \mathbf{r}_3}{m_1 + m_2}. \quad (3.45)$$

Além disso, como \mathbf{x}_J é a posição da partícula m_3 em relação ao centro de massa das primárias, $\mathbf{x}_J = \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_{CM,p}$. Definindo $m' = m_1 + m_2$, da Equação (3.45), temos

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_J &= \mathbf{r}_3 + \frac{m_3 \mathbf{r}_3}{m_1 + m_2} = \frac{m}{m_1 + m_2} \mathbf{r}_3 \\ \mathbf{x}_J &= \frac{m}{m'} \mathbf{r}_3. \end{aligned} \quad (3.46)$$

A Equação (3.46) é a representação do deslocamento da origem: ambos os vetores \mathbf{x}_J e \mathbf{r}_3 representam a posição da massa secundária m_3 , porém, \mathbf{x}_J é a posição de m_3 em relação a CM,p e \mathbf{r}_3 é em relação a CM . Para o problema restrito, $m' \approx m$, tornando $\mathbf{x}_J = \mathbf{r}_3$. Ao final das deduções do problema restrito, tal condição será considerada.

Figura 3.18 – Ilustração dos vetores posição nas coordenadas jacobianas



Fonte: Elaborada pela autora

Sejam $\mathbf{x}_{J,1}$ e $\mathbf{x}_{J,2}$ os vetores posição das partículas primárias no referencial girante, ilustrados na Figura 3.18. A partir do resultado da Equação (3.46) é possível obter expressões análogas para $\mathbf{x}_{J,1}$ e $\mathbf{x}_{J,2}$, de acordo com

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{J,1} &= \mathbf{r}_1 + \frac{m_3 \mathbf{r}_3}{m_1 + m_2} \\ \mathbf{x}_{J,1} &= \mathbf{r}_1 + \frac{m_3}{m} \mathbf{x}_J\end{aligned}\quad (3.47)$$

e

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{J,2} &= \mathbf{r}_2 + \frac{m_3 \mathbf{r}_3}{m_1 + m_2} \\ \mathbf{x}_{J,2} &= \mathbf{r}_2 + \frac{m_3}{m} \mathbf{x}_J.\end{aligned}\quad (3.48)$$

Novamente, nota-se que os resultados das Equações (3.47) e (3.48) estão coerentes com o esperado, uma vez que para $m_3 \ll m$, é possível considerar $\mathbf{x}_{J,1} = \mathbf{r}_1$ e $\mathbf{x}_{J,2} = \mathbf{r}_2$. Conforme mencionado anteriormente, o vetor \mathbf{r}_J é definido como a distância relativa entre as partículas primárias, mais especificamente, a posição de m_2 em relação à partícula m_1 . Das Equações (3.47) e (3.48), implica-se que

$$\mathbf{r}_J = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = \mathbf{x}_{J,2} - \mathbf{x}_{J,1}.\quad (3.49)$$

Como a origem do sistema referencial $O\xi\eta\zeta$ se encontra no centro de massa das partículas primárias,

$$m_1\mathbf{x}_{J,1} + m_2\mathbf{x}_{J,2} = \mathbf{0}. \quad (3.50)$$

Assim, a partir das Equações (3.49) e (3.50), é possível obter expressões para $\mathbf{x}_{J,1}$ e $\mathbf{x}_{J,2}$ em função de \mathbf{r}_J , de acordo com

$$\begin{aligned} m_1\mathbf{x}_{J,1} + m_2(\mathbf{r}_J + \mathbf{x}_{J,1}) &= \mathbf{0} \\ \mathbf{x}_{J,1} &= -\frac{m_2}{m_1 + m_2}\mathbf{r}_J \\ \mathbf{x}_{J,1} &= -\frac{m_2}{m'}\mathbf{r}_J \end{aligned} \quad (3.51)$$

e

$$\begin{aligned} m_1(\mathbf{x}_{J,2} - \mathbf{r}_J) + m_2\mathbf{x}_{J,2} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{x}_{J,2} &= \frac{m_1}{m_1 + m_2}\mathbf{r}_J \\ \mathbf{x}_{J,2} &= \frac{m_1}{m'}\mathbf{r}_J. \end{aligned} \quad (3.52)$$

Além disso, também é interessante definir os vetores posição $\mathbf{r}_{J,31}$ e $\mathbf{r}_{J,32}$ da partícula secundária em relação às partículas primárias. Assim, temos

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{J,31} &= \mathbf{x}_J - \mathbf{x}_{J,1} \\ \mathbf{r}_{J,31} &= \mathbf{x}_J + \frac{m_2}{m'}\mathbf{r}_J \end{aligned} \quad (3.53)$$

e

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{J,32} &= \mathbf{x}_J - \mathbf{x}_{J,2} \\ \mathbf{r}_{J,32} &= \mathbf{x}_J - \frac{m_1}{m'}\mathbf{r}_J. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Nesse sentido, as posições relativas $\mathbf{r}_{J,31}$ e $\mathbf{r}_{J,32}$ são calculadas pelas Equações (3.53) e (3.54).

3.3.2 Equação de movimento da partícula secundária

Com base nos resultados da seção anterior, é possível escrever a equação de movimento da partícula secundária m_3 . Como $\mathbf{r}_J = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, derivando duas vezes no referencial inercial, temos

$$\ddot{\mathbf{r}}_J = \ddot{\mathbf{r}}_2 - \ddot{\mathbf{r}}_1. \quad (3.55)$$

Note que essas derivações precisam ser realizadas no referencial inercial para que seja possível desconsiderar termos associados à rotação do referencial girante, conforme realizado na Equação (3.55). Na Seção 3.4.1, será detalhado o processo para obter as derivadas no referencial girante. Substituindo os valores de $\ddot{\mathbf{r}}_1$ e $\ddot{\mathbf{r}}_2$ calculados na Equação (3.2) na Seção 3.1 e definindo $M' = Gm'$,

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}}_J &= M_1 \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} + M_3 \frac{\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2|^3} - \left(M_2 \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} + M_3 \frac{\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1|^3} \right) \\ \ddot{\mathbf{r}}_J &= -(M_1 + M_2) \frac{\mathbf{r}_J}{r_J^3} + M_3 \left(\frac{\mathbf{r}_{J,32}}{r_{J,32}^3} - \frac{\mathbf{r}_{J,31}}{r_{J,31}^3} \right) \\ \ddot{\mathbf{r}}_J &= -M' \frac{\mathbf{r}_J}{r_J^3} + M_3 \left(\frac{\mathbf{r}_{J,32}}{r_{J,32}^3} - \frac{\mathbf{r}_{J,31}}{r_{J,31}^3} \right). \end{aligned} \quad (3.56)$$

Da transformação de coordenadas definida pela Equação (3.46), $\ddot{\mathbf{x}}_J$ é dado por

$$\ddot{\mathbf{x}}_J = \frac{m}{m'} \ddot{\mathbf{r}}_3. \quad (3.57)$$

Novamente, utilizando a Equação (3.2) e substituindo o valor de $\ddot{\mathbf{r}}_3$ em (3.57),

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{x}}_J &= \frac{m}{m'} \left(M_1 \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3|^3} + M_2 \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3|^3} \right) \\ \ddot{\mathbf{x}}_J &= -\frac{m}{m'} \left(M_1 \frac{\mathbf{r}_{J,31}}{r_{J,31}^3} + M_2 \frac{\mathbf{r}_{J,32}}{r_{J,32}^3} \right). \end{aligned} \quad (3.58)$$

Finalmente, aplicando a condição $M_3 \ll M_1, M_2$ do problema restrito na Equação (3.56), é possível eliminar o segundo termo, visto que $M_3 \ll M_1 + M_2 = M'$. Assim, $\ddot{\mathbf{r}}_J$ é expresso por

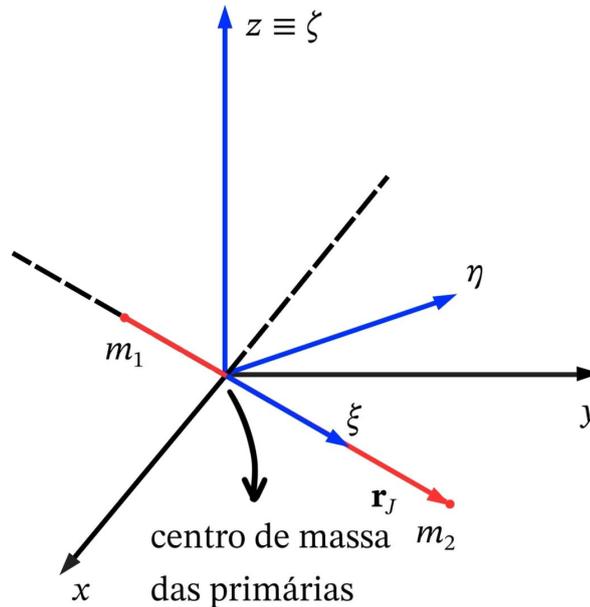
$$\ddot{\mathbf{r}}_J = -M' \frac{\mathbf{r}_J}{r_J^3}. \quad (3.59)$$

Novamente, aplicando a condição do problema restrito, $m' \approx m$ na Equação (3.58),

$$\ddot{\mathbf{x}}_J = -\left(M_1 \frac{\mathbf{r}_{J,31}}{r_{J,31}^3} + M_2 \frac{\mathbf{r}_{J,32}}{r_{J,32}^3} \right). \quad (3.60)$$

Vale notar também que, ao tornar o problema restrito, o centro de massa das primárias CM,p é equivalente ao centro de massa total CM . Assim, o sistemas referenciais são equivalentes ao ilustrado na Figura 3.19.

Figura 3.19 – Ilustração do referencial não inercial $O\xi\eta\zeta$ em azul para o problema restrito



Fonte: Elaborada pela autora

As Equações (3.59) e (3.60) representam o problema restrito de três corpos. A Equação (3.59) define o movimento relativo das partículas primárias e possui solução analítica conhecida, já que possui o mesmo formato da equação desacoplada do problema de dois corpos, Equação (2.14). Após o cálculo de \mathbf{r}_J , é possível utilizar as Equações (3.51) e (3.52) para obter as posições das massas m_1 e m_2 em relação ao centro do sistema referencial jacobiano. Por outro lado, a Equação (3.60) representa o movimento da partícula secundária e não possui solução analítica.

Se for de interesse, para obter os vetores posição em relação ao centro de massa das três massas, é possível utilizar as Equações (3.47) e (3.51) para escrever \mathbf{r}_1 em função de \mathbf{x}_J e \mathbf{r}_J . Assim, temos

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_1 + \frac{m_3}{m} \mathbf{x}_J &= -\frac{m_2}{m'} \mathbf{r}_J \\ \mathbf{r}_1 &= -\frac{m_3}{m} \mathbf{x}_J - \frac{m_2}{m'} \mathbf{r}_J \\ \mathbf{r}_1 &= -\frac{m_2}{m'} \mathbf{r}_J.\end{aligned}\tag{3.61}$$

Realizando o mesmo processo para \mathbf{r}_2 a partir das Equações (3.48) e (3.52),

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_2 + \frac{m_3}{m} \mathbf{x}_J &= \frac{m_1}{m'} \mathbf{r}_J \\
\mathbf{r}_2 &= -\frac{m_3}{m} \mathbf{x}_J + \frac{m_1}{m'} \mathbf{r}_J \\
\mathbf{r}_2 &= \frac{m_1}{m'} \mathbf{r}_J.
\end{aligned} \tag{3.62}$$

Por fim, diretamente da Equação (3.46) e aplicando a condição do caso restrito, temos

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_3 &= \frac{m'}{m} \mathbf{x}_J \\
\mathbf{r}_3 &= \mathbf{x}_J.
\end{aligned} \tag{3.63}$$

As Equações (3.61), (3.62) e (3.63) mostram que as posições das partículas em relação ao centro de massa estão diretamente relacionadas aos vetores \mathbf{x}_J e \mathbf{r}_J . Porém, conforme foi dito, não existe solução analítica para \mathbf{x}_J no problema restrito, portanto, não existe solução analítica para o problema restrito de três corpos.

PROBLEMA RESTRITO DE TRÊS CORPOS

Para resolver o problema restrito de três corpos, é necessário resolver as equações diferenciais

$$\ddot{\mathbf{r}}_J = -M' \frac{\mathbf{r}_J}{r_J^3} \quad \text{e} \tag{3.64}$$

$$\ddot{\mathbf{x}}_J = -\left(M_1 \frac{\mathbf{r}_{J,31}}{r_{J,31}^3} + M_2 \frac{\mathbf{r}_{J,32}}{r_{J,32}^3} \right). \tag{3.65}$$

Por sua vez, as posições das partículas \mathbf{r}_1 , \mathbf{r}_2 e \mathbf{r}_3 são calculadas a partir dos resultados de \mathbf{x}_J e \mathbf{r}_J de forma que

$$\mathbf{r}_1 = -\frac{m_2}{m'} \mathbf{r}_J, \tag{3.66}$$

$$\mathbf{r}_2 = \frac{m_1}{m'} \mathbf{r}_J \quad \text{e} \tag{3.67}$$

$$\mathbf{r}_3 = \mathbf{x}_J. \tag{3.68}$$

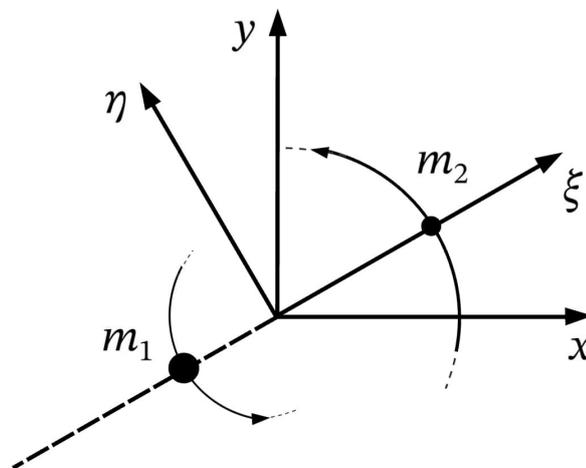
Dessa forma, como a Equação (3.65) não possui solução analítica, não é possível calcular a posição da partícula secundária \mathbf{r}_3 de forma analítica.

3.4 Problema circular restrito de três corpos

O problema de três corpos circular restrito faz a consideração que as partículas primárias se movem em órbitas circulares. Aqui é de suma importância notar que, quando fazemos problema ser circular, estamos tornando as posições das partículas primárias fixas no referencial girante. Isso é devido ao fato de que, para órbitas circulares, a distância entre as partículas primárias e o centro de massa (origem) é constante durante o movimento.

Em outras palavras, os lugares geométricos das posições das massas primárias no referencial inercial são circunferências. Porém, para o referencial não inercial, as posições das primárias são apenas vetores invariantes (tanto em módulo, quanto em orientação). Isso pode ser visualizado na Figura 3.20. Essa consideração é relevante pois permite que as regiões de equilíbrio (pontos de Lagrange) também sejam pontos fixos no referencial girante. Assim, é interessante trabalhar no referencial não inercial. Para isso, na Seção 3.4.1 serão deduzidos os conceitos necessários para compreender o movimento no referencial não inercial.

Figura 3.20 – Esquemático do movimento circular das massas primárias no plano orbital



Fonte: Elaborada pela autora

3.4.1 Movimento em um referencial não inercial

Sendo $\mathbf{\Omega} = \omega \hat{\mathbf{k}}$ o vetor velocidade angular das partículas primárias, o novo sistema referencial $O\xi\eta\zeta$ também possui velocidade angular $\mathbf{\Omega} = \omega \hat{\mathbf{k}}$. Assim, faz-se necessária a análise do movimento do referencial não inercial, começando pela demonstração da fórmula de Poisson no espaço tridimensional.

Considerando um vetor posição qualquer \mathbf{r} no referencial inercial em seu formato cartesiano $\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}} = x'\hat{\mathbf{i}}' + y'\hat{\mathbf{j}}' + z'\hat{\mathbf{k}}'$, o vetor velocidade no referencial inercial

pode ser calculado como

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{r}} &= \frac{d(x\hat{\mathbf{i}})}{dt} + \frac{d(y\hat{\mathbf{j}})}{dt} + \frac{d(z\hat{\mathbf{k}})}{dt} \\ \dot{\mathbf{r}} &= \frac{dx}{dt}\hat{\mathbf{i}} + x\frac{d\hat{\mathbf{i}}}{dt} + \frac{dy}{dt}\hat{\mathbf{j}} + y\frac{d\hat{\mathbf{j}}}{dt} + \frac{dz}{dt}\hat{\mathbf{k}} + z\frac{d\hat{\mathbf{k}}}{dt} \\ \dot{\mathbf{r}} &= \frac{dx}{dt}\hat{\mathbf{i}} + \frac{dy}{dt}\hat{\mathbf{j}} + \frac{dz}{dt}\hat{\mathbf{k}}.\end{aligned}\quad (3.69)$$

Realizando o mesmo processo para o vetor na base do sistema referencial não inercial $\mathbf{r} = x'\hat{\mathbf{i}}' + y'\hat{\mathbf{j}}' + z'\hat{\mathbf{k}}'$,

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{r}} &= \frac{d(x'\hat{\mathbf{i}}')}{dt} + \frac{d(y'\hat{\mathbf{j}}')}{dt} + \frac{d(z'\hat{\mathbf{k}}')}{dt} \\ \dot{\mathbf{r}} &= \frac{dx'}{dt}\hat{\mathbf{i}}' + x'\frac{d\hat{\mathbf{i}}'}{dt} + \frac{dy'}{dt}\hat{\mathbf{j}}' + y'\frac{d\hat{\mathbf{j}}'}{dt} + \frac{dz'}{dt}\hat{\mathbf{k}}' + z'\frac{d\hat{\mathbf{k}}'}{dt} \\ \dot{\mathbf{r}} &= \left.\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right|_{O\xi\eta\zeta} + x'\frac{d\hat{\mathbf{i}}'}{dt} + y'\frac{d\hat{\mathbf{j}}'}{dt} + z'\frac{d\hat{\mathbf{k}}'}{dt},\end{aligned}\quad (3.70)$$

em que

$$\left.\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right|_{O\xi\eta\zeta} = \frac{dx'}{dt}\hat{\mathbf{i}}' + \frac{dy'}{dt}\hat{\mathbf{j}}' + \frac{dz'}{dt}\hat{\mathbf{k}}'. \quad (3.71)$$

Das Equações (3.69) e (3.70), sendo \mathbf{v} o vetor velocidade no referencial inercial e \mathbf{v}' o vetor velocidade no referencial não inercial, temos

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + x'\frac{d\hat{\mathbf{i}}'}{dt} + y'\frac{d\hat{\mathbf{j}}'}{dt} + z'\frac{d\hat{\mathbf{k}}'}{dt}. \quad (3.72)$$

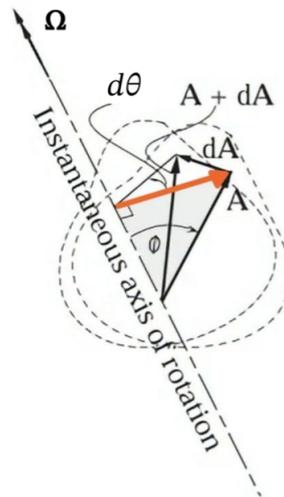
Para reduzir os termos $x'\frac{d\hat{\mathbf{i}}'}{dt}$, $y'\frac{d\hat{\mathbf{j}}'}{dt}$ e $z'\frac{d\hat{\mathbf{k}}'}{dt}$, é necessário fazer a análise a seguir.

Considere um vetor qualquer \mathbf{A} . Após uma rotação de $d\theta$ devido a uma velocidade angular $\boldsymbol{\Omega}$, o vetor \mathbf{A} torna-se o vetor $\mathbf{A} + d\mathbf{A}$, conforme mostrado na Figura 3.21.

Ao fazer a projeção do vetor \mathbf{A} no plano de rotação, é obtido o vetor vermelho (indicado na figura), cujo módulo é $A \sin \phi$. Em seguida, pela definição de ângulo em radiano, é possível escrever a relação

$$|d\mathbf{A}| = (A \sin \phi)d\theta. \quad (3.73)$$

Figura 3.21 – Esquemático da rotação de um vetor \mathbf{A} em torno de um eixo



Fonte: Adaptada de Curtis (2015, p. 24)

Observe que $d\mathbf{A}$ é perpendicular ao vetor \mathbf{A} e ao vetor $\boldsymbol{\Omega}$. Definindo a direção e sentido de $d\mathbf{A}$ pelo versor $\hat{\mathbf{n}}$ e que $d\theta = \Omega dt$, é possível escrever

$$d\mathbf{A} = (A \sin \phi) \Omega dt \hat{\mathbf{n}}. \quad (3.74)$$

Pela Figura 3.21, é possível observar que $\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{A} = \Omega A \sin \phi \hat{\mathbf{n}}$. Aplicando esse resultado na Equação (3.74),

$$\begin{aligned} d\mathbf{A} &= (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{A}) dt \\ \frac{d\mathbf{A}}{dt} &= \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{A}. \end{aligned} \quad (3.75)$$

Utilizando a definição da Equação (3.75) para os termos $x' \frac{d\hat{\mathbf{i}}'}{dt}$, $y' \frac{d\hat{\mathbf{j}}'}{dt}$ e $z' \frac{d\hat{\mathbf{k}}'}{dt}$ da Equação (3.72),

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \mathbf{v}' + x'(\boldsymbol{\Omega} \times \hat{\mathbf{i}}') + y'(\boldsymbol{\Omega} \times \hat{\mathbf{j}}') + z'(\boldsymbol{\Omega} \times \hat{\mathbf{k}}') \\ \mathbf{v} &= \mathbf{v}' + \boldsymbol{\Omega} \times (x' \hat{\mathbf{i}}' + y' \hat{\mathbf{j}}' + z' \hat{\mathbf{k}}') \\ \mathbf{v} &= \mathbf{v}' + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}. \end{aligned} \quad (3.76)$$

A Equação (3.76) é chamada de equação de Poisson. Aqui é importante notar que o vetor \mathbf{r} pode ser em relação a qualquer sistema de referência, visto que $\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}} = x'\hat{\mathbf{i}}' + y'\hat{\mathbf{j}}' + z'\hat{\mathbf{k}}'$. Além disso, em particular, foi utilizado o vetor \mathbf{r} na equação de Poisson, mas qualquer vetor pode ser aplicado na fórmula, inclusive o vetor \mathbf{v} . Assim, temos

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt}\Big|_{O_{xyz}} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}\Big|_{O_{\xi\eta\zeta}} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}. \quad (3.77)$$

Derivando a Equação (3.76) no tempo em relação ao referencial girante e considerando que $\boldsymbol{\Omega}$ é constante (problema circular), temos

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{v}}{dt}\Big|_{O_{\xi\eta\zeta}} &= \frac{d\mathbf{v}'}{dt}\Big|_{O_{\xi\eta\zeta}} + \boldsymbol{\Omega} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt}\Big|_{O_{\xi\eta\zeta}} \\ \frac{d\mathbf{v}}{dt}\Big|_{O_{\xi\eta\zeta}} &= \mathbf{a}' + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}'. \end{aligned} \quad (3.78)$$

Aplicando (3.76) e (3.78) em (3.77), temos

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{v}}{dt}\Big|_{O_{xyz}} &= \mathbf{a}' + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}' + \boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{v}' + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) \\ \mathbf{a} &= \mathbf{a}' + \underbrace{2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}'}_{\text{aceleração de Coriolis}} + \underbrace{\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})}_{\text{aceleração de centrípeta}}. \end{aligned} \quad (3.79)$$

A Equação (3.79) representa o vetor aceleração no referencial inercial \mathbf{a} como a soma da aceleração no referencial não inercial \mathbf{a}' , aceleração de Coriolis e aceleração centrípeta.

3.4.2 Equação da força efetiva da partícula secundária

Aplicando a Equação (3.79) para a a massa secundária m_3 , temos

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_3 &= \mathbf{a}'_3 + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}'_3 + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_3) \\ \mathbf{a}_3 - \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_3) &= \mathbf{a}'_3 + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}'_3. \end{aligned} \quad (3.80)$$

Assim como o problema restrito de três corpos, ainda não é possível obter uma solução analítica. A Equação (3.80) é a equação que relaciona a aceleração no referencial inercial e não inercial da partícula secundária. Para obter uma solução analítica é necessário fazer as considerações que a massa secundária se encontra estacionária no referencial girante. Essa solução resulta nos pontos lagrangianos.

Definindo o lado esquerdo como a aceleração efetiva \mathbf{a}_{ef} , temos

$$\underbrace{\mathbf{a}_3 - \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}_J)}_{\text{aceleração efetiva}} = \mathbf{a}'_3 + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}'_3. \quad (3.81)$$

Essa definição vem do conceito de pontos de Lagrange: são pontos \mathbf{x}_0 fixos no referencial girante, em que a aceleração no referencial inercial é equilibrada pela pseudoforça centrífuga. Como são pontos estacionários (equilíbrio estático) no referencial girante, $\mathbf{v}'_3 = \mathbf{0}$ e $\mathbf{a}'_3 = \mathbf{0}$. Da Equação (3.65) para o caso restrito, a força efetiva é escrita como

$$\mathbf{a}_{\text{ef}} = - \underbrace{\left(M_1 \frac{\mathbf{r}_{J,31}}{r_{J,31}^3} + M_2 \frac{\mathbf{r}_{J,32}}{r_{J,32}^3} \right)}_{\mathbf{a}_3 = \ddot{\mathbf{x}}_J} - \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}_0) = \mathbf{0}. \quad (3.82)$$

Assim, serão exploradas no Capítulo 4 as soluções \mathbf{x}_0 da Equação (3.82).

4 Cálculo dos pontos lagrangianos

No Capítulo 3, foi estudado o problema de três corpos e suas soluções particulares. Primeiramente, foram estudadas as soluções geométricas de Euler e Lagrange e, em seguida, foi apresentado o problema circular restrito de três corpos (PCR3C). Para este último, é considerado que um dos corpos, denominado massa secundária, possui uma massa pequena em comparação às massas primárias. Assim, a presença da massa secundária não altera a dinâmica das massas primárias e elas seguem o movimento esperado para o problema de dois corpos, estudado no Capítulo 2.

De acordo com o capítulo anterior, os pontos de Lagrange são pontos em que, no referencial girante (não inercial), um corpo de prova permanece em equilíbrio. Dessa forma, para o cálculo dos pontos de equilíbrio, é necessário considerar que a aceleração e velocidade do corpo de prova (nesse caso, massa secundária) são nulas. Tal consideração foi realizada na Equação (3.82), repetida aqui para a conveniência do leitor, dada por

$$\mathbf{a}_{\text{ef}} = -\left(M_1 \frac{\mathbf{r}_{J,31}}{r_{J,31}^3} + M_2 \frac{\mathbf{r}_{J,32}}{r_{J,32}^3}\right) - \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}_0) = \mathbf{0}. \quad (4.1)$$

Portanto, conforme explicado, para calcular a posição dos pontos lagrangianos \mathbf{x}_0 de forma analítica, é necessário fazer o estudo da Equação (4.1). Assim, na Seção 4.1, começaremos provando que os pontos de Lagrange são coplanares, ou seja, que os pontos de equilíbrio se encontram no mesmo plano das órbitas primárias (plano orbital). Em seguida, nas Seções 4.2 e 4.3, serão calculadas as posições de equilíbrio.

4.1 Demonstração da coplanaridade

Desenvolvendo o termo $\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}_0)$ da Equação (4.1), sabendo que $\boldsymbol{\Omega} = \omega \hat{\mathbf{k}}$, temos

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}_0 &= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ 0 & 0 & \omega \\ x_0 & y_0 & z_0 \end{vmatrix} = -\omega y_0 \hat{\mathbf{i}} + \omega x_0 \hat{\mathbf{j}} \\ \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}_0) &= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ 0 & 0 & \omega \\ -\omega y_0 & \omega x_0 & 0 \end{vmatrix} = -\omega^2 x_0 \hat{\mathbf{i}} - \omega^2 y_0 \hat{\mathbf{j}}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Da Equação (4.2), é possível interpretar que o termo $\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}_0)$ possui componentes referentes apenas ao plano orbital das massas primárias.

Ademais, das Equações (3.53) e (3.54), como \mathbf{r}_J é perpendicular a $\hat{\mathbf{k}}$, temos

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{r}_{J,31} &= \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{x}_0 + \boldsymbol{\Omega} \cdot \frac{m_2}{m'} \mathbf{r}_J \\ \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{r}_{J,31} &= \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{x}_0\end{aligned}\quad (4.3)$$

e

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{r}_{J,32} &= \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{x}_0 - \boldsymbol{\Omega} \cdot \frac{m_1}{m'} \mathbf{r}_J \\ \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{r}_{J,32} &= \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{x}_0.\end{aligned}\quad (4.4)$$

Aplicando o produto interno $\boldsymbol{\Omega} \cdot$ na Equação (4.2) e utilizando os resultados das Equações (4.2), (4.3) e (4.4),

$$\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{a}_{\text{ef}} = -\left(M_1 \frac{\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{x}_0}{r_{J,31}^3} + M_2 \frac{\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{x}_0}{r_{J,32}^3}\right) = 0. \quad (4.5)$$

Da Equação (4.5), é possível inferir que

$$\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{x}_0 = 0. \quad (4.6)$$

Da Equação (4.6), interpreta-se que os pontos lagrangianos \mathbf{x}_0 se encontram no plano orbital pois são perpendiculares ao vetor $\boldsymbol{\Omega}$. Assim, está demonstrado que os pontos lagrangianos são coplanares.

Dessa forma, reescrevendo a Equação (4.2), sabendo que $\mathbf{x}_0 = x_0 \hat{\mathbf{i}} + y_0 \hat{\mathbf{j}}$, o termo $\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}_0)$ pode ser escrito como

$$\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}_0) = -\omega^2 x_0 \hat{\mathbf{i}} - \omega^2 y_0 \hat{\mathbf{j}} = -\omega^2 \mathbf{x}_0. \quad (4.7)$$

Assim, substituindo o resultado da Equação (4.7) na Equação (4.1), temos

$$-\left(M_1 \frac{\mathbf{r}_{J,31}}{r_{J,31}^3} + M_2 \frac{\mathbf{r}_{J,32}}{r_{J,32}^3}\right) + \omega^2 \mathbf{x}_0 = \mathbf{0}. \quad (4.8)$$

Reorganizando a Equação (4.8), é obtida a posição dos pontos lagrangianos em função dos vetores posição relativa $\mathbf{r}_{J,31}$ e $\mathbf{r}_{J,32}$. Assim, se $\mathbf{r}_{J,31}$ e $\mathbf{r}_{J,32}$ forem escritos na base do referencial não inercial, o vetor \mathbf{x}_0 em função dos versores $\hat{\mathbf{i}}'$ e $\hat{\mathbf{j}}'$ é obtido de acordo com

$$\mathbf{x}_0 = \frac{M_1}{\omega^2} \frac{\mathbf{r}_{J,31}}{r_{J,31}^3} + \frac{M_2}{\omega^2} \frac{\mathbf{r}_{J,32}}{r_{J,32}^3}. \quad (4.9)$$

4.2 Cálculo da velocidade angular das massas primárias

Como a Equação (4.9) possui o fator ω^2 , é interessante calcular a velocidade angular ω em termo das massas das primárias e a distância entre elas. Esse cálculo pode ser feito pela terceira Lei de Kepler aplicada a um sistema binário. Pela Lei da Gravitação Universal de Newton, considerando a força gravitacional F_{12} em m_1 devido a m_2 ,

$$F_{12} = \frac{Gm_1m_2}{r_J^2}. \quad (4.10)$$

Como essa é a única força atuante na massa m_1 , considerando o movimento circular, é possível escrever

$$\begin{aligned} F_{12} &= \frac{Gm_1m_2}{r_J^2} = m_1\omega^2x_{J,1} \\ \frac{Gm_2}{r_J^2} &= \omega^2x_{J,1} \\ \omega^2 &= \frac{Gm_2}{r_J^2x_{J,1}}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Sabendo que $m_1\mathbf{x}_{J,1} + m_2\mathbf{x}_{J,2} = \mathbf{0}$ (relação do centro de massa), somando e subtraindo o termo $m_2\mathbf{x}_{J,1}$,

$$\begin{aligned} m_1\mathbf{x}_{J,1} - m_2\mathbf{x}_{J,1} + m_2\mathbf{x}_{J,2} + m_2\mathbf{x}_{J,1} &= \mathbf{0} \\ m_1\mathbf{x}_{J,1} + m_2\mathbf{x}_{J,1} &= m_2\mathbf{x}_{J,1} - m_2\mathbf{x}_{J,2}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Aplicando o módulo,

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2)|\mathbf{x}_{J,1}| &= m_2|\mathbf{x}_{J,1} - \mathbf{x}_{J,2}| \\ \frac{m_2}{|\mathbf{x}_{J,1}|} &= \frac{m_1 + m_2}{|\mathbf{x}_{J,1} - \mathbf{x}_{J,2}|}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Das Equações (4.11) e (4.13),

$$\begin{aligned} \omega^2 &= \frac{G(m_1 + m_2)}{r_J^2|\mathbf{x}_{J,1} - \mathbf{x}_{J,2}|} \\ \omega^2 &= \frac{M'}{r_J^3}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Vale notar que a Equação (4.14) é uma aplicação da Equação (2.1) (terceira lei de Kepler), a qual também pode ser escrita como

$$\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \frac{M'}{r_J^3}$$

$$\frac{T^2}{r_J^3} = \frac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)}. \quad (4.15)$$

Assim, para um sistema binário, a constante na terceira lei de Kepler é $\frac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)}$.

4.3 Cálculo dos pontos de Lagrange

4.3.1 Pontos $L4$ e $L5$

Das definições $\mathbf{r}_{J,31} = \mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_{J,1}$ e $\mathbf{r}_{J,32} = \mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_{J,2}$ e da Equação (4.9), temos

$$\mathbf{x}_0 = \frac{M_1}{\omega^2} \frac{\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_{J,1}}{|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_{J,1}|^3} + \frac{M_2}{\omega^2} \frac{\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_{J,2}}{|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_{J,2}|^3}. \quad (4.16)$$

Simplificando a notação por $p = \frac{M_1}{\omega^2 |\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_{J,1}|^3}$ e $q = \frac{M_2}{\omega^2 |\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_{J,2}|^3}$,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_0 &= p(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_{J,1}) + q(\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_{J,2}) \\ (p + q)\mathbf{x}_0 - p\mathbf{x}_{J,1} - q\mathbf{x}_{J,2} &= \mathbf{x}_0 \\ (p + q - 1)\mathbf{x}_0 &= p\mathbf{x}_{J,1} + q\mathbf{x}_{J,2}. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Da Equação (4.17), é possível concluir que os vetores \mathbf{x}_0 e $p\mathbf{x}_{J,1} + q\mathbf{x}_{J,2}$ são paralelos. Assim, é possível separar o problema em dois casos:

1. $p\mathbf{x}_{J,1} + q\mathbf{x}_{J,2} = \mathbf{0}$ (caso trivial);
2. As soluções \mathbf{x}_0 (pontos lagrangianos) se encontram na reta que liga as massas primárias.

Analisando o primeiro caso, descrito por

$$p\mathbf{x}_{J,1} + q\mathbf{x}_{J,2} = \mathbf{0}, \quad (4.18)$$

com base na relação do centro de massa $m_1\mathbf{x}_{J,1} + m_2\mathbf{x}_{J,2} = \mathbf{0}$, dividindo as equações, é possível concluir que

$$\frac{p\mathbf{x}_{J,1}}{m_1\mathbf{x}_{J,1}} = \frac{-q\mathbf{x}_{J,2}}{-m_2\mathbf{x}_{J,2}}$$

$$\frac{p}{q} = \frac{m_1}{m_2}. \quad (4.19)$$

Das definições de p e q ,

$$\frac{p}{q} = \frac{m_1|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_{J,2}|^3}{m_2|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_{J,1}|^3}. \quad (4.20)$$

Para satisfazer ambas as condições das Equações (4.19) e (4.20),

$$|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_{J,2}|^3 = |\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_{J,1}|^3$$

$$|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_{J,2}| = |\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_{J,1}| = L. \quad (4.21)$$

Da Equação (4.21), é possível concluir que, nesse caso, os pontos lagrangianos se encontram equidistantes das massas primárias. Substituindo o valor da distância L na Equação (4.16) e da definição do valor de ω^2 encontrado na Equação (4.14),

$$\frac{M'}{r_J^3}\mathbf{x}_0 = M_1\frac{\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_{J,1}}{L^3} + M_2\frac{\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_{J,2}}{L^3}$$

$$\frac{M'}{r_J^3}\mathbf{x}_0 = \frac{1}{L^3}[(M_1 + M_2)\mathbf{x}_0 - \underbrace{G(m_1\mathbf{x}_{J,1} + m_2\mathbf{x}_{J,2})}_{=0 \text{ (centro de massa)}]}$$

$$\frac{M'}{r_J^3}\mathbf{x}_0 = \frac{M'\mathbf{x}_0}{L^3}$$

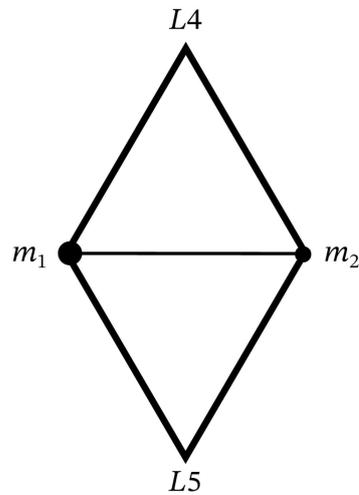
$$r_J = L. \quad (4.22)$$

Assim, é possível concluir que a solução da Equação (4.18) configura dois triângulos equiláteros. Nesse sentido, as massas primárias e os pontos lagrangianos L_4 e L_5 (soluções) formam dois triângulos equiláteros, conforme ilustrado na Figura 4.22.

4.3.2 Pontos L_1 , L_2 e L_3

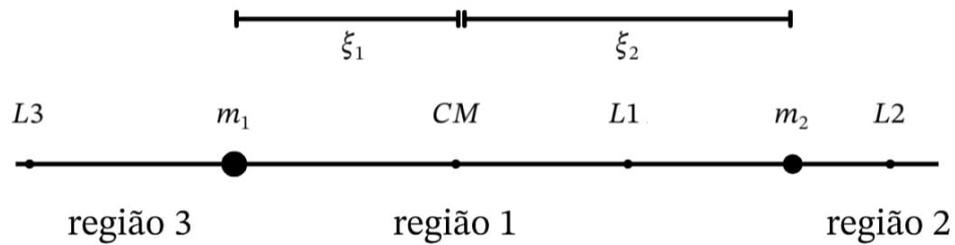
Para encontrar o restante dos pontos de Lagrange, é necessário analisar o segundo caso, evidenciado na Seção 4.3.1, em que as soluções se encontram na reta que liga as massas primárias. Separando o problema em três regiões, mostradas na Figura 4.23, é possível

Figura 4.22 – Pontos L4 e L5 que constituem dois triângulos equiláteros com as massas primárias



Fonte: Elaborada pela autora

Figura 4.23 – Pontos posições de L1, L2 e L3 nas regiões 1, 2, e 3, respectivamente



Fonte: Elaborada pela autora

escrever três equações em \mathbb{R} - uma para cada região. Assim, sendo ξ a distância entre o ponto de Lagrange correspondente e a origem do sistema $O\xi\eta\zeta$ ($\xi > 0$), reescrevendo a Equação (4.9) para as regiões 1, 2 e 3, temos, respectivamente,

$$\omega^2\xi = \frac{M_1}{(\xi + \xi_1)^2} - \frac{M_2}{(\xi - \xi_2)^2} \text{ (região 1),} \quad (4.23)$$

$$\omega^2\xi = \frac{M_1}{(\xi + \xi_1)^2} + \frac{M_2}{(\xi - \xi_2)^2} \text{ (região 2)} \quad \text{e} \quad (4.24)$$

$$\omega^2\xi = \frac{M_1}{(\xi - \xi_1)^2} + \frac{M_2}{(\xi + \xi_2)^2} \text{ (região 3),} \quad (4.25)$$

em que

$$\omega^2 = \frac{M'}{(\xi_1 + \xi_2)^3}. \quad (4.26)$$

As soluções das Equações (4.23), (4.24) e (4.25) correspondem aos pontos $L1$, $L2$ e $L3$. Não existe solução analítica fechada para essas equações no formato generalizado. No entanto, existem soluções analíticas considerando uma massa muito maior que a outra, por exemplo $m_1 \gg m_2$, conforme descrito por [Westra \(2017\)](#).

Os códigos em MATLAB abaixo resolvem as equações mostradas, obtendo os valores de ξ para cada região.

```

1 % initial_data.m
2
3 % constants
4 %G=6.6743e-11; %[SI]
5 G=1; % em unidades normalizadas
6
7 % input
8 %m1=5.974e24; %kg
9 %m2=7.348e22; %kg
10 m2=0.01215; % em unidades normalizadas
11 m1=1-m2; % em unidades normalizadas
12
13 xi1=m2; %em módulo
14 xi2=1-m2; %em módulo
15
16 % calculations
17 M1=G*m1;
18 M2=G*m2;
19 omega_sqrd=(M1+M2)/(xi1+xi2)^3;
20
21 mu=m2/(m1+m2);

```

```

1 %lagrange_points.m
2
3 initial_data
4
5 syms xi
6
7 % region 1
8 region1=omega_sqrd*xi-(M1/(xi+xi1)^2)+(M2/(xi-xi2)^2)==0;
9 L1=vpasolve(region1,xi);
10 L1=real(L1(imag(L1) == 0));
11

```

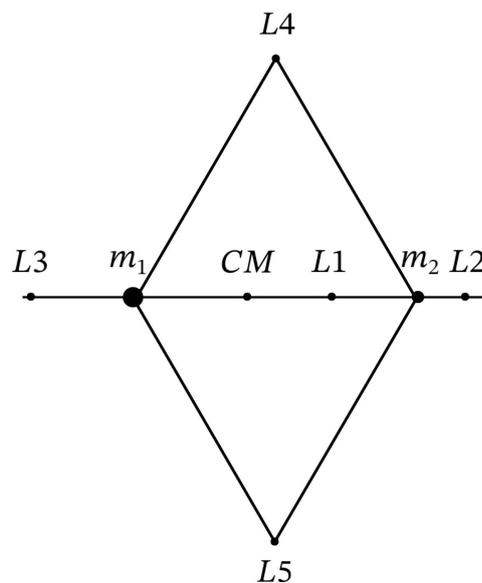
```

12 % region 2
13 region2=omega_sqr*d*xi-(M1/(xi+xi1)^2)-(M2/(xi-xi2)^2)==0;
14 L2=vpasolve(region2,xi);
15 L2=real(L2(imag(L2) == 0));
16
17 % region 3
18 region3=omega_sqr*d*xi-(M1/(xi-xi1)^2)-(M2/(xi+xi2)^2)==0;
19 L3=vpasolve(region3,xi);
20 L3=real(L3(imag(L3) == 0));
21
22 % m1, m2 positions
23 coord_m1=[-mu,0];
24 coord_m2=[1-mu,0];
25
26 % coord Lagrange points
27 coord_L1=[L1,0]
28 coord_L2=[L2,0]
29 coord_L3=[-L3,0]
30 coord_L4=[0.5*(coord_m2(1)+coord_m1(1)),(xi2+xi1)*sqrt(3)/2]
31 coord_L5=[0.5*(coord_m2(1)+coord_m1(1)),-(xi2+xi1)*sqrt(3)/2]

```

Assim, foram contemplados os cálculos referentes às posições de todos os pontos de Lagrange no contexto do PCR3C. Na Figura 4.24, pode ser visualizado o esquemático do conjunto dos pontos calculados.

Figura 4.24 – Pontos de Lagrange



Fonte: Elaborada pela autora

5 Energia da partícula secundária

Diversas análises podem ser realizadas a partir da energia da partícula secundária m_3 . A primeira delas, abordada neste capítulo, é o cálculo das zonas proibidas. Será demonstrado que, devido às forças gravitacionais e pseudoforças sentidas no referencial não inercial no problema circular restrito de três corpos, certas regiões do espaço, denominadas regiões proibidas, são inacessíveis à partícula secundária.

Ao longo do capítulo, será visto que as possíveis configurações dessas regiões dependem da energia da partícula e da razão de entre as massas primárias. Por esse motivo, na Seção 5.1, será realizada uma normalização das unidades, um artifício frequentemente utilizado no estudo do problema de três corpos a fim de generalizar as soluções. Em seguida, na Seção 5.2, será derivada a equação da energia da partícula secundária no referencial não inercial. Após isso, na Seção 5.3, definiremos a constante de Jacobi, que é a única integral de movimento para a partícula secundária no referencial não inercial. Em seguida, na Seção 5.4, serão mostradas as regiões proibidas, calculadas a partir da constante de Jacobi. Finalmente, uma segunda análise da equação da energia será apresentada no Capítulo 6, onde será apresentado o conceito de estabilidade linear dos pontos de Lagrange.

5.1 Normalização das unidades

Como mencionado, a normalização oferece diversas vantagens para o estudo do problema de três corpos. Uma dessas é a simplificação e redução da complexidade matemática. Além disso, a normalização também é interessante para comparar e analisar as soluções de forma qualitativa. Assim, por exemplo, é possível analisar como a razão entre as massas primárias influencia a dinâmica da partícula secundária. Ademais, a normalização viabiliza o cálculo de constantes adimensionais que determinam características importantes para o movimento dos corpos, como a constante de Jacobi, fundamental para o cálculo das regiões proibidas.

Assim, sem perda de generalidade, adotando o sistema de unidades canônicas, temos que a distância entre as massas primárias é dada por $\xi_1 + \xi_2 = 1$, $G = 1$. Para $m_1 + m_2 = 1$ (normalização das massas), definindo μ como

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{m_2}{m_1 + m_2} \\ \mu &= m_2. \end{aligned} \tag{5.1}$$

De $m_1 + m_2 = 1$, temos

$$m_1 = 1 - \mu. \quad (5.2)$$

Como o problema é restrito, o movimento das massas primárias não é afetado pela partícula secundária. Portanto, é possível utilizar a Equação (2.11), definida no problema de dois corpos, para calcular a razão entre ξ_1 e ξ_2 , as quais são as distâncias (em módulo) entre as massas primárias m_1 e m_2 e a origem, respectivamente. Assim, temos

$$\begin{aligned} \frac{\xi_1}{\xi_2} &= \frac{m_2}{m_1} \\ \frac{\xi_1}{\xi_2} &= \frac{\mu}{1 - \mu}. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Da normalização $\xi_1 + \xi_2 = 1$, temos

$$\begin{aligned} \frac{\xi_1}{1 - \xi_1} &= \frac{\mu}{1 - \mu} \\ \xi_1 &= \mu \end{aligned} \quad (5.4)$$

e

$$\xi_2 = 1 - \mu. \quad (5.5)$$

Além disso, a partir da Equação (4.26),

$$\begin{aligned} \omega^2 &= \frac{M'}{(\xi_1 + \xi_2)^3} \\ \omega^2 &= 1. \end{aligned} \quad (5.6)$$

RESUMO DA NORMALIZAÇÃO DAS UNIDADES

Para o sistema de unidades canônicas, temos

$$G = 1; \quad (5.7)$$

$$m_2 = \xi_1 = \mu; \quad (5.8)$$

$$m_1 = \xi_2 = 1 - \mu; \quad (5.9)$$

$$\omega^2 = 1. \quad (5.10)$$

5.2 Equação da energia potencial da partícula secundária

Para obter a equação da energia potencial, é necessário analisar a equação de movimento da partícula secundária em sua forma completa, descrita pela Equação (3.80), repetida aqui para conveniência do leitor:

$$\mathbf{a}'_3 + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}'_3 = \mathbf{a}_3 - \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_3). \quad (5.11)$$

Vale ressaltar que, como não estamos calculando os pontos de equilíbrio e estão sendo considerados todos os pontos do espaço tridimensional. Portanto, neste caso, $\mathbf{v}'_3 \neq \mathbf{0}$ e $\mathbf{a}'_3 \neq \mathbf{0}$. Seguindo com os cálculos, assim como feito na Seção 3.4.2, a partir da Equação (3.65), utilizando as unidades canônicas definidas na Seção 5.1, temos

$$\mathbf{a}'_3 + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}'_3 = -(1 - \mu) \frac{\mathbf{r}_{J,31}}{r_{J,31}^3} - \mu \frac{\mathbf{r}_{J,32}}{r_{J,32}^3} - \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_3), \quad (5.12)$$

em que,

$$\mathbf{r}_{J,31} = \underbrace{\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix}}_{\mathbf{r}_3} - \underbrace{\begin{bmatrix} -\xi_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{r}_1} = \begin{bmatrix} \xi + \xi_1 \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad (5.13)$$

$$\mathbf{r}_{J,32} = \underbrace{\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix}}_{\mathbf{r}_3} - \underbrace{\begin{bmatrix} \xi_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{r}_2} = \begin{bmatrix} \xi - \xi_2 \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix}. \quad (5.14)$$

O termo $2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}'_3$ é calculado de acordo com

$$2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}'_3 = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ 0 & 0 & 2\omega \\ \dot{\xi} & \dot{\eta} & \dot{\zeta} \end{vmatrix} = -2\omega\dot{\eta}\hat{\mathbf{i}} + 2\omega\dot{\xi}\hat{\mathbf{j}}. \quad (5.15)$$

Analogamente, o termo $\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_3)$ é calculado como

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_3 &= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ 0 & 0 & \omega \\ \xi & \eta & \zeta \end{vmatrix} = -\omega\eta\hat{\mathbf{i}} + \omega\xi\hat{\mathbf{j}} \\ \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}_0) &= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ 0 & 0 & \omega \\ -\omega\eta & \omega\xi & 0 \end{vmatrix} = -\omega^2\xi\hat{\mathbf{i}} - \omega^2\eta\hat{\mathbf{j}}.\end{aligned}\quad (5.16)$$

Assim, é possível escrever a Equação (5.12) no formato de três equações escalares que representam o movimento no referencial não inercial de acordo com

$$\ddot{\xi} - 2\omega\dot{\eta} = -(1 - \mu)\frac{\xi + \xi_1}{\rho_1^3} - \mu\frac{\xi - \xi_2}{\rho_2^3} + \omega^2\xi, \quad (5.17)$$

$$\ddot{\eta} + 2\omega\dot{\xi} = -(1 - \mu)\frac{\eta}{\rho_1^3} - \mu\frac{\eta}{\rho_2^3} + \omega^2\eta \quad \text{e} \quad (5.18)$$

$$\ddot{\zeta} = -(1 - \mu)\frac{\zeta}{\rho_1^3} - \mu\frac{\zeta}{\rho_2^3}. \quad (5.19)$$

Ainda, nas Equações (5.17), (5.18) e (5.19) foi também utilizado $\rho_1 = r_{J,31}$ e $\rho_2 = r_{J,32}$ para simplificação da notação.

Seja o potencial U , dado por

$$U = \frac{1 - \mu}{\rho_1} + \frac{\mu}{\rho_2} + \frac{\omega^2}{2}(\xi^2 + \eta^2), \quad (5.20)$$

resultante do potencial gravitacional e potencial centrífugo, que surge do referencial não inercial, pela regra da cadeia, temos

$$U_\xi = \frac{\partial U}{\partial \xi} = -\frac{1 - \mu}{\rho_1^2} \frac{\partial \rho_1}{\partial \xi} - \frac{\mu}{\rho_2^2} \frac{\partial \rho_2}{\partial \xi} + \omega^2\xi. \quad (5.21)$$

Calculando as derivadas parciais $\frac{\partial \rho_1}{\partial \xi}$ e $\frac{\partial \rho_2}{\partial \xi}$, em que $\rho_1 = \sqrt{(\xi + \xi_1)^2 + \eta^2 + \zeta^2}$ e $\rho_2 = \sqrt{(\xi - \xi_2)^2 + \eta^2 + \zeta^2}$, temos

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho_1}{\partial \xi} &= \frac{\xi + \xi_1}{\sqrt{(\xi + \xi_1)^2 + \eta^2 + \zeta^2}} \\ \frac{\partial \rho_1}{\partial \xi} &= \frac{\xi + \xi_1}{\rho_1}\end{aligned}\quad (5.22)$$

e

$$\frac{\partial \rho_2}{\partial \xi} = \frac{\xi - \xi_2}{\sqrt{(\xi - \xi_2)^2 + \eta^2 + \zeta^2}}$$

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial \xi} = \frac{\xi - \xi_2}{\rho_2}. \quad (5.23)$$

Das Equações (5.22) e (5.23),

$$U_\xi = -\frac{1-\mu}{\rho_1^3}(\xi + \xi_1) - \frac{\mu}{\rho_2^3}(\xi - \xi_2) + \omega^2 \xi. \quad (5.24)$$

Analogamente para U_η e U_ζ , temos

$$U_\eta = \frac{\partial U}{\partial \eta} = -\frac{1-\mu}{\rho_1^2} \frac{\partial \rho_1}{\partial \eta} - \frac{\mu}{\rho_2^2} \frac{\partial \rho_2}{\partial \eta} + \omega^2 \eta \quad e \quad (5.25)$$

$$U_\zeta = \frac{\partial U}{\partial \zeta} = -\frac{1-\mu}{\rho_1^2} \frac{\partial \rho_1}{\partial \zeta} - \frac{\mu}{\rho_2^2} \frac{\partial \rho_2}{\partial \zeta}. \quad (5.26)$$

Calculando as derivadas parciais $\frac{\partial \rho_1}{\partial \eta}$, $\frac{\partial \rho_2}{\partial \eta}$, $\frac{\partial \rho_1}{\partial \zeta}$ e $\frac{\partial \rho_2}{\partial \zeta}$, temos

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial \eta} = \frac{\eta}{\sqrt{(\xi + \xi_1)^2 + \eta^2 + \zeta^2}} = \frac{\eta}{\rho_1}, \quad (5.27)$$

$$\frac{\partial \rho_2}{\partial \eta} = \frac{\eta}{\sqrt{(\xi - \xi_2)^2 + \eta^2 + \zeta^2}} = \frac{\eta}{\rho_2}, \quad (5.28)$$

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial \zeta} = \frac{\zeta}{\sqrt{(\xi + \xi_1)^2 + \eta^2 + \zeta^2}} = \frac{\zeta}{\rho_1} \quad e \quad (5.29)$$

$$\frac{\partial \rho_2}{\partial \zeta} = \frac{\zeta}{\sqrt{(\xi - \xi_2)^2 + \eta^2 + \zeta^2}} = \frac{\zeta}{\rho_2}. \quad (5.30)$$

Portanto, a partir das derivadas parciais apresentadas pelas Equações (5.27) a (5.30), U_η e U_ζ são dados por

$$U_\eta = \frac{\partial U}{\partial \eta} = -\frac{1-\mu}{\rho_1^3} \eta - \frac{\mu}{\rho_2^3} \eta + \omega^2 \eta \quad e \quad (5.31)$$

$$U_\zeta = \frac{\partial U}{\partial \zeta} = -\frac{1-\mu}{\rho_1^3} \zeta - \frac{\mu}{\rho_2^3} \zeta. \quad (5.32)$$

Ao comparar as Equações (5.17) a (5.19) e as derivadas parciais da função U , dadas pelas Equações (5.21), (5.31) e (5.32), é possível escrever as relações de movimento em função das derivadas parciais do potencial U conforme mostrado em

$$\ddot{\xi} - 2\omega\eta = \frac{\partial U}{\partial \xi}, \quad (5.33)$$

$$\ddot{\eta} + 2\omega\dot{\xi} = \frac{\partial U}{\partial \eta} \quad \text{e} \quad (5.34)$$

$$\ddot{\zeta} = \frac{\partial U}{\partial \zeta}. \quad (5.35)$$

EQUAÇÃO DA ENERGIA POTENCIAL E SUAS DERIVADAS PRIMEIRAS

A equação do pseudo-potencial referente à partícula secundária e suas derivadas primeiras são dadas por

$$U = \frac{1-\mu}{\rho_1} + \frac{\mu}{\rho_2} + \frac{\omega^2}{2}(\xi^2 + \eta^2), \quad (5.36)$$

$$U_\xi = -\frac{1-\mu}{\rho_1^3}(\xi + \xi_1) - \frac{\mu}{\rho_2^3}(\xi - \xi_2) + \omega^2\xi, \quad (5.37)$$

$$U_\eta = -\frac{1-\mu}{\rho_1^3}\eta - \frac{\mu}{\rho_2^3}\eta + \omega^2\eta \quad \text{e} \quad (5.38)$$

$$U_\zeta = -\frac{1-\mu}{\rho_1^3}\zeta - \frac{\mu}{\rho_2^3}\zeta. \quad (5.39)$$

Utilizando a definição da função pseudo-potencial U , as equações de movimento da partícula secundária são dadas por

$$\ddot{\xi} - 2\omega\eta = \frac{\partial U}{\partial \xi}, \quad (5.40)$$

$$\ddot{\eta} + 2\omega\dot{\xi} = \frac{\partial U}{\partial \eta} \quad \text{e} \quad (5.41)$$

$$\ddot{\zeta} = \frac{\partial U}{\partial \zeta}. \quad (5.42)$$

Neste momento, é interessante esclarecer que algumas referências bibliográficas utilizam a convenção em que o potencial U é negativo. Porém, neste trabalho está sendo utilizada a convenção celestial (MURRAY; DERMOTT, 2000), em que U é um valor positivo. Assim, caso seja necessário, é possível facilmente transformar as equações mostradas considerando $U^* = -U$, em que U^* segue a convenção tradicional da física (energia potencial negativa). Além disso, é importante ressaltar que o potencial U não é um potencial verdadeiro, visto

que sua derivação inclui pseudoforças (termos de Coriolis $-2\omega\dot{\eta}$ e $+2\omega\dot{\xi}$). Assim, o potencial U é, na realidade, um pseudo-potencial.

Como visto na Equação (5.42), o termo U_ζ está diretamente relacionado à aceleração no eixo- ζ . Por esse motivo, para o estudo da estabilidade nessa direção, é possível realizar uma análise mais simples, apenas examinando a curva de energia potencial na direção ζ . Na Seção 6.2, será mostrada a relação entre o potencial, aceleração e estabilidade.

Por outro lado, é possível notar, a partir das Equações (5.40) e (5.41), que os vetores aceleração $\ddot{\xi}$ e $\ddot{\eta}$ da partícula secundária não possuem relações diretas com U_ξ e U_η devido aos termos de Coriolis $-2\omega\dot{\eta}$ e $+2\omega\dot{\xi}$. Por consequência, não é possível realizar a análise de estabilidade pela curva de energia potencial. Portanto, será necessário utilizar a teoria de estabilidade linear para as direções ξ e η do plano orbital, desenvolvida na Seção 6.3.

5.3 Integral de Jacobi

Além das integrais primeiras demonstradas na Seção 2.3 para o problema geral de n -corpos (constantes relacionadas ao centro de massa, momento angular total e energia mecânica do sistema), para o problema circular restrito de três corpos existe uma integral de movimento chamada Integral de Jacobi. A partir da Equação (5.36), utilizando a regra da cadeia para derivadas parciais, obtemos a derivada de U em função do tempo

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\partial U}{\partial \xi} \frac{d\xi}{dt} + \frac{\partial U}{\partial \eta} \frac{d\eta}{dt} + \frac{\partial U}{\partial \zeta} \frac{d\zeta}{dt}. \quad (5.43)$$

Substituindo os resultados das Equações (5.40), (5.41) e (5.42) na Equação (5.43), temos

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dt} &= \ddot{\xi}\dot{\xi} - 2\omega\dot{\xi}\dot{\eta} + \dot{\eta}\dot{\eta} + 2\omega\dot{\xi}\dot{\eta} + \dot{\zeta}\dot{\zeta} \\ \frac{dU}{dt} &= \ddot{\xi}\dot{\xi} + \dot{\eta}\dot{\eta} + \dot{\zeta}\dot{\zeta}. \end{aligned} \quad (5.44)$$

Integrando a Equação (5.44), temos

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2}\dot{\xi}^2 + \frac{1}{2}\dot{\eta}^2 + \frac{1}{2}\dot{\zeta}^2 + \frac{C_J}{2} \\ C_J &= 2U - \underbrace{(\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + \dot{\zeta}^2)}_{v^2}, \end{aligned} \quad (5.45)$$

em que C_J , constante de Jacobi, está relacionada à constante de integração. Pela definição de U , dada pela Equação (5.36), a constante de Jacobi também pode ser escrita como

$$C_J = \frac{2(1-\mu)}{\rho_1} + \frac{2\mu}{\rho_2} + \omega^2(\xi^2 + \eta^2) - \underbrace{(\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + \dot{\zeta}^2)}_{v^2}. \quad (5.46)$$

É importante notar que, para o problema circular restrito de três corpos, devido à ausência de forças e momentos externos ao sistema, a energia mecânica total e o momento angular total do sistema são conservados. No entanto, ao se considerar o referencial não inercial, surgem forças fictícias (força inercial de Coriolis) que não são conservativas. Por esse motivo, a energia mecânica e o momento angular da massa secundária m_3 não são conservados nesse referencial. Nesse caso, a única constante de movimento referente a m_3 no referencial não inercial é a constante de Jacobi (MURRAY; DERMOTT, 2000). No referencial inercial, no entanto, onde as únicas forças atuantes em m_3 são as forças gravitacionais, tanto a energia mecânica quanto o momento angular da massa secundária são conservados, pois essas forças são conservativas. Nesse sentido, a equação

$$C_J = 2U - v^2 \quad (5.47)$$

é chamada Integral da Energia Relativa ou Integral de Jacobi (ROY, 2005).

5.4 Curvas de velocidade nula e zonas proibidas

Da Equação (5.47), como $v^2 \geq 0$,

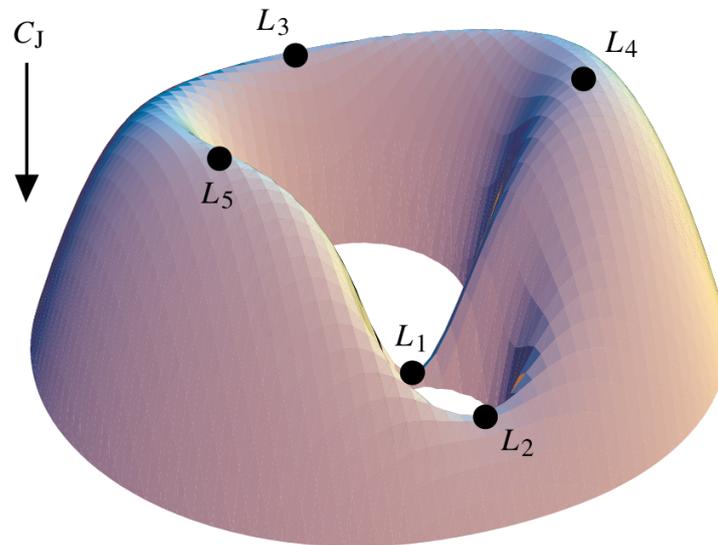
$$2U - C_J \geq 0. \quad (5.48)$$

Para o caso limite em que a velocidade é nula ($2U = C_J$), é definida uma superfície de velocidade nula, mostrada na Figura 5.25. Vale notar que as superfícies $2U = C_J$ estão sempre associadas a um valor de μ , já que $U = \frac{1-\mu}{\rho_1} + \frac{\mu}{\rho_2} + \frac{\omega^2}{2}(\xi^2 + \eta^2)$. No caso representado na figura, $\mu = 0,2$.

Nesse momento, é importante perceber que as superfícies de velocidade zero são graficamente representadas para $\zeta = 0$ e o aspecto tridimensional da Figura 5.25 é proveniente da variação do valor de C_J . Em outras palavras, a superfície representa o valor de C_J para cada posição de m_3 no plano orbital, dado um valor fixo de μ .

Em seguida, é necessário determinar a região em que $2U - C_J > 0$, ou seja, região que satisfaz a Equação (5.48). Observando a direção que corresponde ao aumento de C_J , ilustrada na figura, é possível inferir que, acima da superfície, os valores de C_J são menores que abaixo

Figura 5.25 – Superfície de velocidade zero



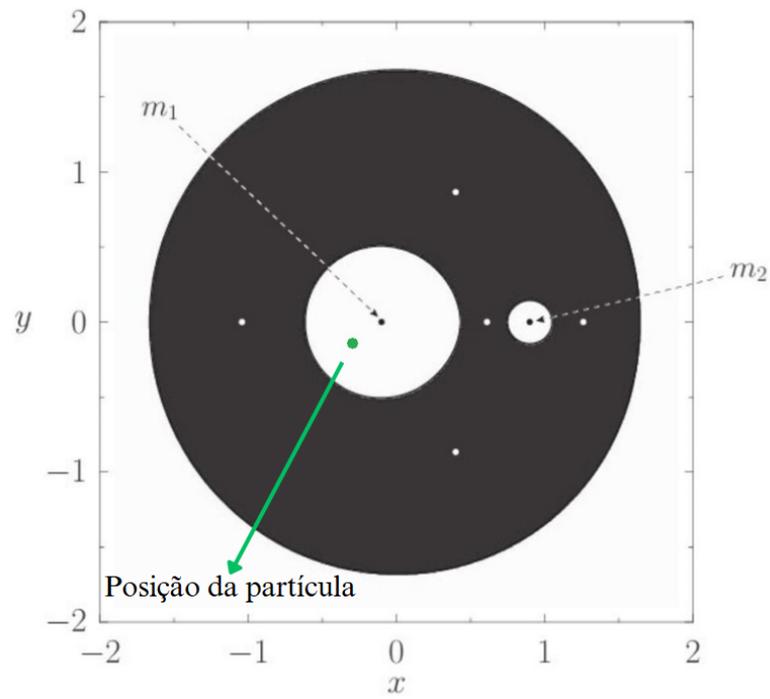
Fonte: Murray e Dermott (2000, p. 81)

da superfície. Para $C_J > 2U$, o valor de $2U - C_J$ se torna negativo e isso corresponde à região abaixo da superfície e, analogamente, $C_J < 2U$ corresponde à região acima superfície, atendendo a condição da Equação (5.48). Em outras palavras, a região acima da superfície corresponde aos valores possíveis para a Integral da Energia; esta é chamada de região acessível ou região de Hill. Por conseguinte, a região abaixo da superfície é chamada de zona proibida.

Também é possível utilizar uma representação por curvas de nível. Existem quatro valores notáveis para C_J (C_1, C_2, C_3 e $C_4 = C_5$), referentes às posições dos pontos de Lagrange, que delimitam as configurações possíveis para as curvas de nível. Assim, C_i são calculados a partir das posições dos pontos de Lagrange pela equação $C_i = 2U(\xi_i, \eta_i)$. Como os pontos de Lagrange são pontos de equilíbrio, na condição de equilíbrio estável, a velocidade de m_3 nesses pontos é nula. Por esse motivo, quando $C_J = C_i$, o ponto de Lagrange correspondente deve ser parte das curvas de velocidade zero, conforme será visto nas Figuras 5.27 a 5.29.

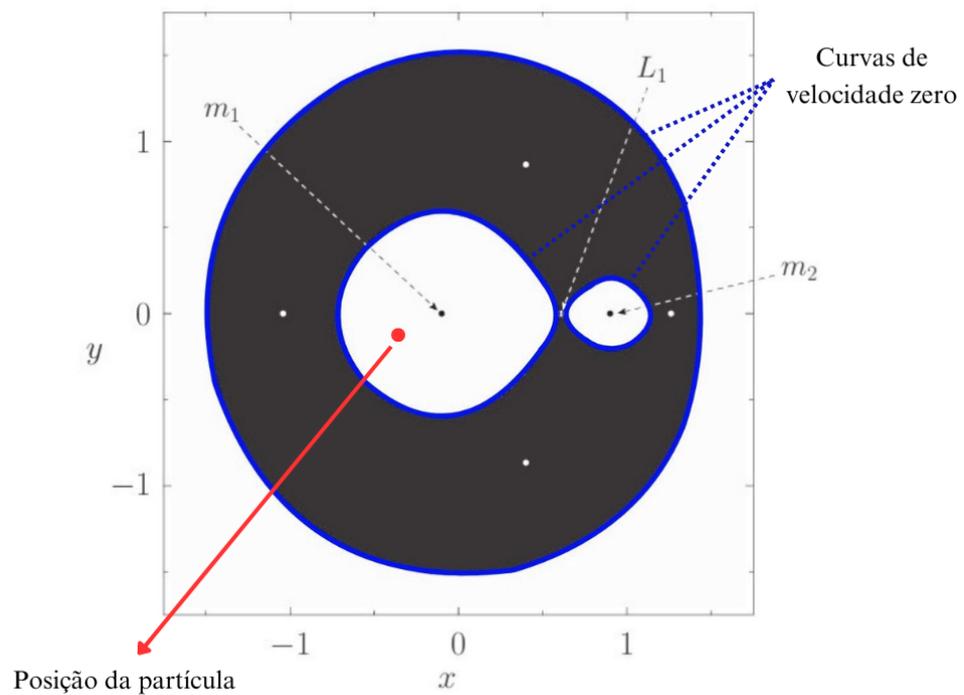
Analisando o caso para $C_J > C_1$, mostrado na Figura 5.26, é possível notar que a partícula m_3 pode se encontrar nas redondezas das massas primárias ou além da influência delas. Além disso, como $C_J \neq C_1$, observa-se também que as curvas que delimitam a zona proibida (região escura) não passam pelos pontos de Lagrange, representados pelos pontos brancos. Ademais, a Figura 5.26 evidencia que, quando a partícula m_3 possui uma energia potencial equivalente a $C_J > C_1$, não é possível que ela se desloque de m_1 para m_2 , por exemplo. Isso demonstra uma aplicação fundamental do estudo dos pontos de Lagrange e regiões de Hill no contexto de missões espaciais.

Figura 5.26 – Zonas de Hill para $C_J > C_1$ considerando $\mu = 0,1$



Fonte: Adaptada de Fitzpatrick (2012, p. 159)

Figura 5.27 – Zonas de Hill para $C_J = C_1$ considerando $\mu = 0,1$



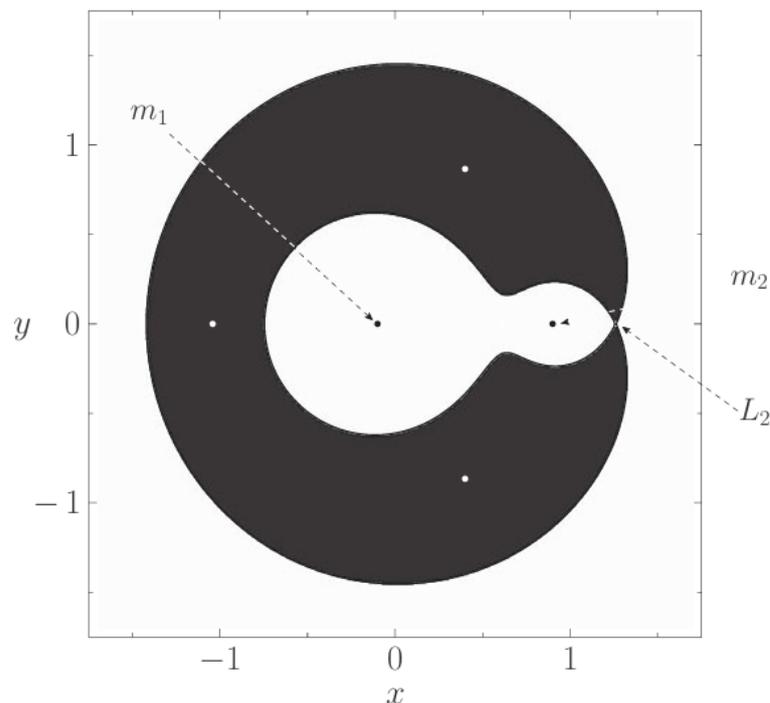
Fonte: Adaptada de Fitzpatrick (2012, p. 160)

A Figura 5.27 mostra que para $C_J = C_1$, as curvas de velocidade nula passam pelo ponto de Lagrange L_1 . Para esclarecer o conceito de curvas de velocidade zero e zonas acessíveis, considere uma partícula no ponto vermelho indicado. Essa partícula terá velocidade e posição equivalentes a $C_1 = 2U_1 - v^2$. Porém, quanto mais a partícula se aproximar da região proibida, mais sua velocidade irá diminuir, até que se anule ao atingir a curva de velocidade nula (destacada em azul), de forma que $C_1 = 2U$.

Caso uma partícula seja posicionada no limite entre as regiões proibidas e acessíveis (situação hipotética inviável em um contexto real de missão), ela terá velocidade inicial zero, mas a força atuante nela não será nula e, portanto, irá sair da curva, retornando à região acessível. Por outro lado, se a partícula fosse posicionada no ponto de Lagrange L_1 , como é um ponto de equilíbrio, a força atuante nesse ponto é nula. Assim, nesse caso, a partícula, teoricamente, permaneceria em L_1 . O estudo da estabilidade dos pontos de equilíbrio, detalhado no Capítulo 6, analisa se existe uma tendência a partícula em retornar ao ponto de equilíbrio caso sofra alguma pequena perturbação.

Assim, de acordo com esse raciocínio, conclui-se que uma partícula na posição do ponto verde da Figura 5.26, por exemplo, não possui energia suficiente para sair da influência do campo gravitacional de m_1 , pois sempre que atingir a curva de velocidade nula, toda a energia mecânica se converte em energia potencial no instante em que atinge a curva e, em seguida, e ela irá adquirir velocidade e retornar para a região de Hill.

Figura 5.28 – Zonas de Hill para $C_J = C_2$ considerando $\mu = 0,1$



Para $C_J = C_2$, nota-se da Figura 5.28, que as curvas de velocidade nula passam pelo ponto de Lagrange $L2$, conforme explicado anteriormente. Para $C_2 < C_J < C_1$, a realização de uma missão de m_1 para m_2 é possível devido ao gargalo entre as duas massas, mostrado na Figura 5.28. Porém, nesse caso, a partícula ainda não conseguiria escapar da atração gravitacional das massas primárias. Esse tipo de análise é frequentemente realizada em fases iniciais de projetos de missão espacial.

Como C_J é uma constante, as regiões acessíveis (e, conseqüentemente, regiões proibidas), serão determinadas com base na velocidade e posição inicial. Portanto, caso seja necessário que a partícula m_3 se desloque de m_1 para m_2 , é necessário ajustar a velocidade inicial de forma a obter $C_2 < C_J < C_1$. Assim, uma missão para a Lua, por exemplo, em que a Terra é m_1 e a Lua é m_2 , é escolhida uma velocidade inicial (sendo a posição inicial a posição da Terra) que faz com que a energia da partícula m_3 resulte em uma constante de Jacobi entre os valores de C_2 e C_1 .

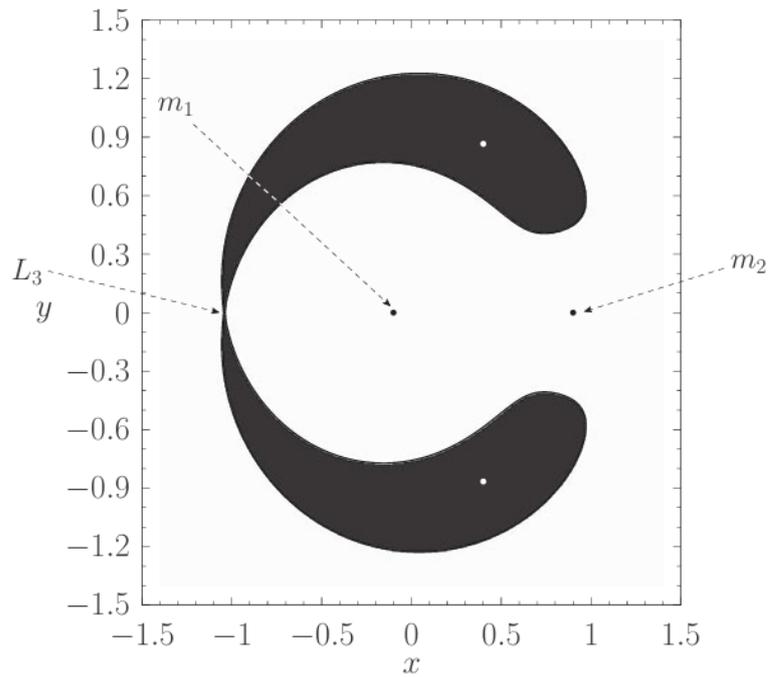
Da Figura 5.29, é possível inferir que, caso a partícula possua uma energia que equivale a $C_3 < C_J < C_2$, a partícula secundária pode se mover entre as passas primárias, além de conseguir escapar da interação gravitacional das massas primárias pela vizinhança de m_2 (pela convenção adotada que $m_1 > m_2$). No caso de $C_J = C_3$, mostrado na Figura 5.29, observa-se, novamente, que as curvas de velocidade nula passam pelo ponto de Lagrange $L3$.

Ademais, pela Figura 5.25 observa-se que para $C_J < C_4$, não existem regiões proibidas. Assim, de acordo com as figuras mostradas, infere-se que, para aumentar as regiões acessíveis, é necessário diminuir o valor de C_J . Analisando a equação da constante de Jacobi,

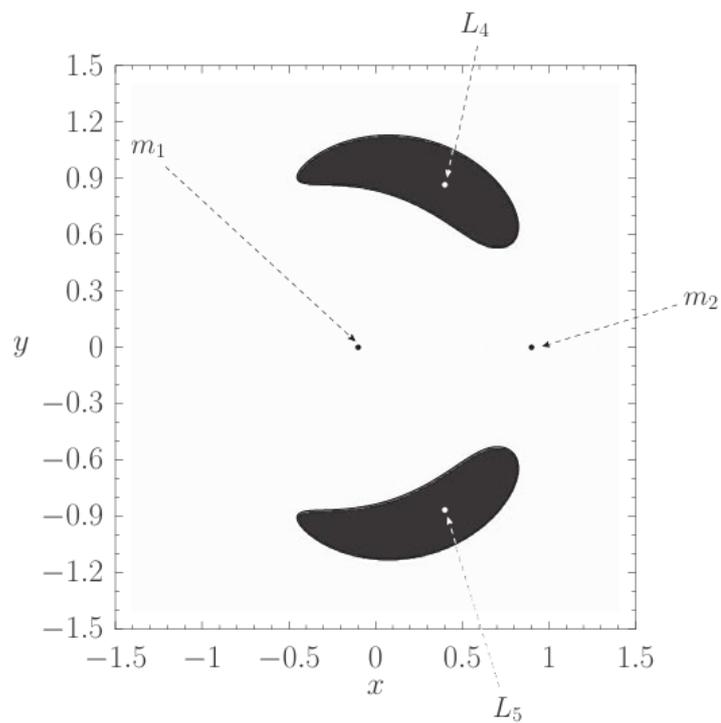
$$C_J = \frac{2(1 - \mu)}{\rho_1} + \frac{2\mu}{\rho_2} + \omega^2(\xi^2 + \eta^2) - v^2, \quad (5.49)$$

em um contexto de missão, por exemplo, em que a posição inicial é fixa, a única forma de diminuir o valor de C_J é aumentando o valor de v^2 , ou seja, aumentando a velocidade inicial. Isso está coerente com a intuição de que, para que a partícula consiga escapar da interação gravitacional das massas primárias é necessário uma alta velocidade inicial.

Por esse motivo, ainda relacionado a missões, para o caso em que $C_3 < C_J < C_2$, C_3 equivale ao caminho que resulta em uma velocidade inicial máxima, ou seja, energia cinética máxima e C_2 equivale ao mínimo de energia cinética. Assim, para que uma partícula consiga escapar do sistema Terra-Lua, por exemplo, existem diversos valores possíveis de velocidade inicial (diversas constantes de Jacobi equivalentes). No entanto, para uma trajetória de mínima energia, a partícula terá C_J próximo de C_2 , por consequência, passando pela vizinhança da Lua (FERNANDES; ZANARDI, 2018b). Essas interpretações, novamente, evidenciam a relevância do estudo dos pontos de Lagrange e constante de Jacobi no contexto de missões espaciais.

Figura 5.29 – Zonas de Hill para $C_J = C_3$ considerando $\mu = 0,1$ 

Fonte: Fitzpatrick (2012, p. 161)

Figura 5.30 – Zonas de Hill para $C_4 < C_J < C_3$ considerando $\mu = 0,1$ 

Fonte: Fitzpatrick (2012, p. 161)

Continuando as análises, da Figura 5.30, para $C_4 < C_J < C_3$, observa-se que a partícula não pode passar pelas redondezas dos pontos de Lagrange $L4$ e $L5$. Além disso, surge um segundo gargalo pelo qual uma partícula poderia passar. Assim, para o sistema Terra-Lua, uma partícula poderia escapar do sistema através da região em torno de $L3$, por exemplo. Tal trajetória não é possível para $C_3 < C_J < C_2$, conforme visto anteriormente. No entanto, como mencionado, a energia cinética equivalente a C_3 é maior. Portanto, é necessária uma energia cinética maior para que seja possível o escape de uma partícula m_3 por um caminho próximo a $L3$.

Devido à simetria do problema, de acordo com a Equação (5.49), $C_4 = C_5$. Isso pode também ser visualizado na Figura 5.25. Assim, para $C_J < C_4 = C_5$, a partícula possui uma energia tal que pode se locomover em qualquer região do plano orbital. Em outras palavras, não existem regiões proibidas.

5.4.1 Estudo de caso: sistema Terra-Lua

Para o sistema Terra-Lua, $m_1 = 5,974 \times 10^{24}$ kg e $m_2 = 7,348 \times 10^{22}$ kg. Assim, o valor de μ é dado por

$$\mu = \frac{m_2}{m_1 + m_2} = \frac{7,348}{597,4 + 7,348}$$

$$\mu = 0,01215. \quad (5.50)$$

De acordo com o desenvolvimento realizado na Seção 5.1, pela Equação (5.8), $\mu = \xi_1 = 0,01215$, ou seja, a distância entre o centro de massa e m_1 é de 0,01215 nas unidades normalizadas. Assim, a posição dos pontos de Lagrange $L4$ e $L5$ no eixo- ξ ($\xi_{L4,5}$) é dada por

$$\xi_{L4,5} = \frac{-\xi_1 + \xi_2}{2}$$

$$\xi_{L4,5} = \frac{-\mu + (1 - \mu)}{2}$$

$$\xi_{L4,5} = 0,48785. \quad (5.51)$$

Note que se a Terra estivesse localizada no centro de massa do sistema (consideração que pode ser realizada para o Sol, por exemplo), $\xi_{4,5}$ seria simplesmente 0,5. Assim, essa diferença é devido à massa considerável da Lua. Por fim, as posições η_4 e η_5 dos pontos $L4$ e $L5$ são encontrados diretamente pela altura do triângulo equilátero. Portanto,

$$\eta_{L4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (5.52)$$

$$\eta_{L5} = -\frac{\sqrt{3}}{2}. \quad (5.53)$$

Utilizando o códigos disponibilizados no Apêndice C.1 (`lagrange_points.m` cujos códigos auxiliares são `initial_data.m`, `JacobiConstant.m` e `lagrange_points_plot.m`), são encontradas as posições de $L1$, $L2$ e $L3$ para as unidades normalizadas. Assim, tem-se que as posições dos cinco pontos de Lagrange são

$$L1 = (0,836915; 0), \quad (5.54)$$

$$L2 = (1,155681; 0), \quad (5.55)$$

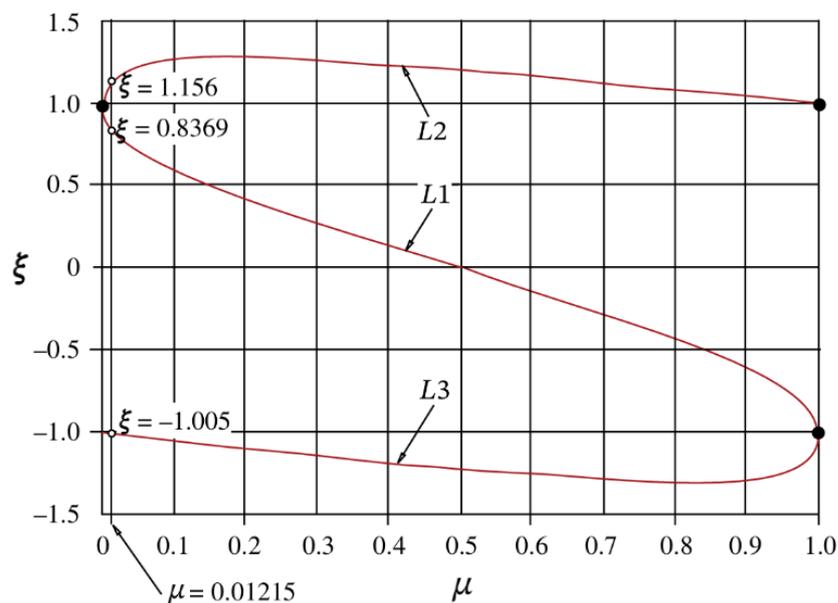
$$L3 = (-1,005062; 0), \quad (5.56)$$

$$L4 = \left(0,48785; \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad e \quad (5.57)$$

$$L5 = \left(0,48785; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right). \quad (5.58)$$

Alternativamente, seja ξ a posição vetorial dos pontos colineares de Lagrange, é possível obter a posição vetorial ξ da massa secundária em função de μ , de acordo com a Figura 5.31 disponibilizada pela bibliografia de Curtis (2015). Observe do gráfico que os valores de ξ para $\mu = 0,01215$ são as posições calculadas para os pontos colineares. Portanto, a figura valida os cálculos realizados.

Figura 5.31 – Posição vetorial ξ dos pontos colineares de Lagrange



Fonte: Adaptada de Curtis (2015, p. 129)

Aplicando as coordenadas dos pontos de Lagrange encontradas nas equações correspondentes, C_i são calculados como

$$C_1 = \frac{2(1-\mu)}{\xi_1 + \xi_{L1}} + \frac{2\mu}{\xi_2 - \xi_{L1}} + \omega^2(\xi_{L1}^2 + \eta_{L1}^2), \quad (5.59)$$

$$C_2 = \frac{2(1-\mu)}{\xi_1 + \xi_{L1}} + \frac{2\mu}{\xi_2 + \xi_{L1}} + \omega^2(\xi_{L2}^2 + \eta_{L2}^2), \quad (5.60)$$

$$C_3 = \frac{2(1-\mu)}{\xi_{L3} - \xi_1} + \frac{2\mu}{\xi_{L3} + \xi_2} + \omega^2(\xi_{L3}^2 + \eta_{L3}^2) \quad (5.61)$$

e

$$C_4 = \frac{2(1-\mu)}{1} + \frac{2\mu}{1} + \omega^2(\xi_{L4}^2 + \eta_{L4}^2)$$

$$C_4 = 2 + \omega^2(\xi_{L4}^2 + \eta_{L4}^2). \quad (5.62)$$

Com auxílio dos códigos mencionados, os valores das constante de Jacobi são facilmente calculados para os pontos de Lagrange. Assim, considerando o sistema Terra-Lua, são obtidos os valores de C_i mostrados na Tabela 5.1. Além disso, também foram obtidas as posições dos pontos de Lagrange, bem como as posições dos corpos primários (neste caso, Terra e Lua), representados graficamente pela Figura 5.32.

Tabela 5.1 – Valores da constante de Jacobi referente aos pontos de Lagrange

Ponto de Lagrange	Posição	Constante de Jacobi
L1	(0,836915; 0)	$C_1 = 3,188336$
L2	(1,155681; 0)	$C_2 = 3,172156$
L3	(-1,005062; 0)	$C_3 = 3,012147$
L4	$\left(0,48785; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	$C_4 = 2,987998$
L5	$\left(0,48785; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	$C_4 = C_5 = 2,987998$

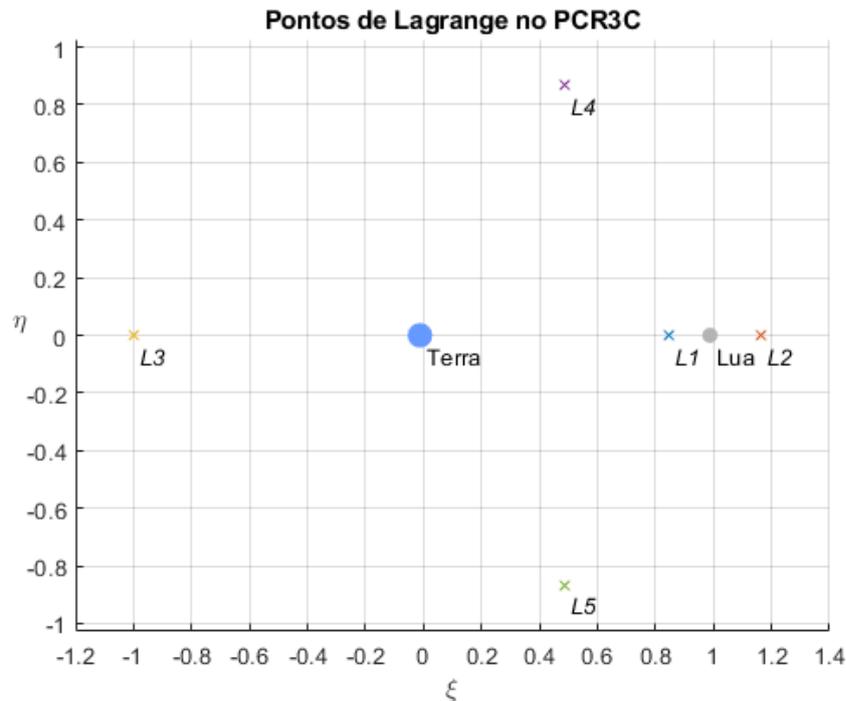
Fonte: Elaborada pela autora

Fazendo uma análise mais aprofundada com os valores do sistema Terra-Lua mostrados na tabela, se a energia da partícula equivale a $C_J = C_2 = 3,172156$, por exemplo, a partícula pode estar em três condições fundamentais:

1. A partícula está localizada no ponto de Lagrange $L2$ com velocidade nula e em equilíbrio (força atuante na partícula é nula);
2. A partícula está localizada em alguma curva de velocidade zero com velocidade nula, porém, não está em equilíbrio. Assim, a força atuante nela não é nula e esse estado de velocidade nula é uma condição momentânea;

3. Em qualquer ponto das regiões acessíveis (mostradas na Figura 5.28) com uma velocidade não nula.

Figura 5.32 – Pontos de Lagrange para o sistema Terra-Lua em unidades normalizadas



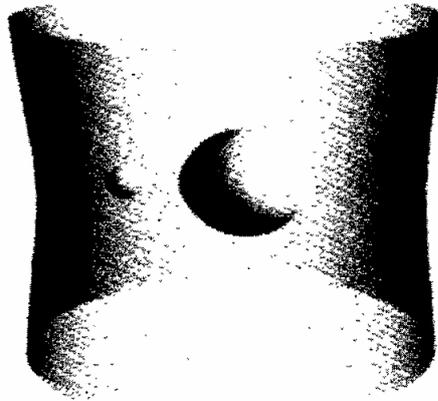
Fonte: Elaborada pela autora

5.4.2 Regiões acessíveis no espaço tridimensional

Conforme foi mencionado, as Figuras 5.25 a 5.30 são representações das zonas proibidas em função da constante de Jacobi para plano orbital, ou seja, para $\zeta, \dot{\zeta} = 0$. No entanto, é possível também obter representações tridimensionais das regiões proibidas em que se considera o eixo- ζ , conforme feito por Lundberg et al. (1985).

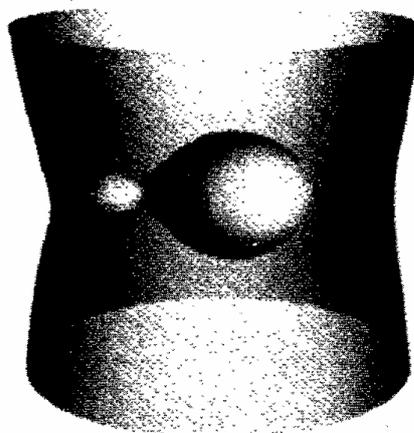
Para o espaço tridimensional, a representação de zonas proibidas considera o eixo- ζ como terceira dimensão, enquanto na representação mostrada na Figura 5.25 considera o valor de C_J como “terceira dimensão”. Sendo assim, ao fazer $\zeta, \dot{\zeta} \neq 0$, não é possível obter uma representação análoga à da Figura 5.25 (em que é possível observar a variação das regiões acessíveis em função da constante de Jacobi), visto que isso criaria uma representação no hiperespaço. Assim, é necessário indicar o valor da constante de Jacobi para cada configuração de regiões proibidas no espaço em \mathbb{R}^3 , definido pelas coordenadas (ξ, η, ζ) , conforme mostrado nas Figuras 5.33 a 5.35.

Figura 5.33 – Superfícies de velocidade zero no espaço tridimensional definido em (ξ, η, ζ) para $\mu = 0,1$ e $C_J = 4,0$



Fonte: Lundberg et al. (1985, p. 198)

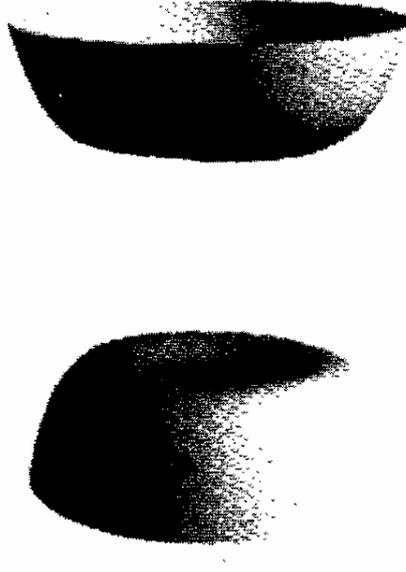
Figura 5.34 – Superfícies de velocidade zero no espaço tridimensional definido em (ξ, η, ζ) para $\mu = 0,1$ e $C_J = 3,56$



Fonte: Lundberg et al. (1985, p. 200)

É interessante notar que, para $C_J = 2,5 < C_4$, não existem regiões proibidas no plano orbital, como foi discutido neste capítulo. No entanto, as figuras tridimensionais oferecem uma informação adicional importante: há regiões proibidas no espaço tridimensional para $C_J = 2,5$, delimitadas pelas superfícies de velocidade nula mostradas na Figura 5.35. Isso ressalta a importância de se ter cautela ao analisar os gráficos de curva de nível. Assim, é necessário lembrar que as representações das regiões de Hill (Figuras 5.26 a 5.30) são referentes ao plano orbital e que existem representações possíveis para o espaço tridimensional que podem mostrar regiões proibidas não identificadas pela análise bidimensional.

Figura 5.35 – Superfícies de velocidade zero no espaço tridimensional definido em (ξ, η, ζ) para $\mu = 0,1$ e $C_J = 2,5$



Fonte: [Lundberg et al. \(1985, p. 204\)](#)

6 Estabilidade dos pontos lagrangianos

Como mencionado no Capítulo 5, o estudo da estabilidade dos pontos de Lagrange visa a determinar se existe uma tendência de movimento para afastar ou retornar a partícula ao ponto de equilíbrio caso ocorram pequenas perturbações. No caso de equilíbrio estável, ao causar um pequeno deslocamento da partícula em relação à sua posição de equilíbrio, ela retorna ao ponto de Lagrange correspondente após adquirir uma velocidade. Em contrapartida, para o caso de equilíbrio instável, um pequeno deslocamento causa um afastamento da partícula em relação ao ponto de equilíbrio.

Para recapitular o que foi realizado, no Capítulo 4, foram calculadas as posições dos pontos de Lagrange, definindo, na equação de movimento de m_3 que a aceleração e velocidade no referencial não inercial são nulas (condição referente ao equilíbrio estático). Em seguida, no Capítulo 5, foi derivada a equação da energia potencial da partícula secundária, Equação (5.36), que diz respeito a qualquer ponto do espaço tridimensional, portanto, não foi realizada a mesma consideração de velocidade e aceleração nulas.

Para o estudo da estabilidade, note que, ao deslocar a partícula de seu ponto de equilíbrio, não é possível considerar que a velocidade e aceleração dessa partícula são nulas no referencial girante, pois, de fato, haverá um afastamento do ponto de equilíbrio (equilíbrio instável) ou retorno ao ponto de equilíbrio (equilíbrio estável). Por esse motivo, os resultados do Capítulo 5, em especial, a equação do pseudo-potencial de m_3 , são essenciais para o estudo da estabilidade.

Dessa forma, primeiramente, na Seção 6.1, será explicado o conceito de estabilidade unidimensional, critério utilizado para a análise de estabilidade no eixo- ζ . Após isso, na Seção 6.2, será apresentada a demonstração da estabilidade no eixo- ζ a partir do critério estabelecido. Por fim, na Seção 6.3, será utilizada a teoria de estabilidade linear para a análise da estabilidade no plano orbital. Para isso, a equação de movimento da partícula secundária será obtida em sua representação em espaço de estados e, em seguida, será linearizada. Assim, será visto que os pontos de Lagrange colineares ($L1$, $L2$ e $L3$) são instáveis e que os pontos de Lagrange triangulares ($L4$ e $L5$) são condicionalmente estáveis pela teoria de estabilidade linear. O desenvolvimento deste capítulo possui como principais referências bibliográficas os livros de Fitzpatrick (2012), Murray e Dermott (2000) e Fernandes e Zanardi (2018b).

6.1 Conceito de estabilidade unidimensional

Sabemos que, para uma força conservativa unidimensional $f(x)$, sendo U^* a energia potencial no referencial convencional da física conforme explicado na Seção 5.2,

$$f(x) = -\frac{dU^*}{dx}. \quad (6.1)$$

Para o equilíbrio, é necessário que a aceleração seja nula. Assim, o equilíbrio ocorre para

$$\frac{dU^*}{dx} = 0. \quad (6.2)$$

Em outras palavras, os pontos de equilíbrio são equivalentes aos pontos de máximo e mínimo da curva de energia potencial. Para um ponto de equilíbrio estável devido a uma força unidimensional $f(x)$, por exemplo, temos que, no ponto de equilíbrio x_0 ,

$$\left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x_0} < 0. \quad (6.3)$$

Assim, o sentido da força é contrário ao movimento e a partícula terá tendência de voltar para o ponto de equilíbrio (efeito de uma força restauradora). Por outro lado, caso

$$\left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x_0} > 0, \quad (6.4)$$

o ponto de equilíbrio x_0 é um ponto de equilíbrio instável, em que, ao se aplicar uma força, o sentido do deslocamento é o mesmo da força, de forma a afastar a partícula de seu ponto de equilíbrio. Assim, para que o ponto de equilíbrio seja **estável**, a partir das Equações (6.1) e (6.3), tendo em mente a convenção tradicional de sinais,

$$\left. \frac{d^2U^*(x)}{dx^2} \right|_{x_0} > 0. \quad (6.5)$$

Em outras palavras, os pontos de equilíbrio correspondem aos pontos de mínimo e máximos locais no gráfico da energia potencial U^* , de forma que os pontos de **mínimo local** correspondem aos pontos de equilíbrio estável. Note que, ao utilizar a notação celestial para a energia potencial U , como $U^* = -U$, a condição de **equilíbrio estável** é dada por

$$\left. \frac{d^2U(x)}{dx^2} \right|_{x_0} < 0. \quad (6.6)$$

6.2 Estabilidade no eixo- ζ

Note que a relação $\mathbf{F} = -\nabla U^*$ não pode ser aplicada diretamente devido à presença dos termos de Coriolis (não conservativos) nas direções do plano orbital (ξ e η). Assim, no referencial não inercial, a força resultante na partícula secundária não é conservativa. No entanto, na direção ζ , a relação dada pela Equação (5.42) evidencia que a aceleração é, de fato, proporcional à derivada do potencial na direção ζ , de acordo com

$$\ddot{\zeta} = \frac{\partial U}{\partial \zeta}. \quad (6.7)$$

Por esse motivo, é possível realizar a análise de estabilidade na direção ζ utilizando a curvatura de U , de acordo com a explicação da Seção 6.1. Por outro lado, para as direções do plano orbital, os termos de Coriolis inviabilizam a análise da estabilidade pela curvatura da energia potencial. Sendo assim, na Seção 6.3, será realizado outro procedimento para determinar a condição de estabilidade dos pontos de Lagrange.

Assim, para a direção ζ , derivando a Equação (6.7) para a obtenção da derivada segunda de U , temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial \zeta} &= -\frac{1-\mu}{\rho_1^3} \zeta - \frac{\mu}{\rho_2^3} \zeta \\ \frac{\partial^2 U}{\partial \zeta^2} &= -\frac{1-\mu}{\rho_1^3} + 3\frac{1-\mu}{\rho_1^4} \frac{\partial \rho_1}{\partial \zeta} \zeta - \frac{\mu}{\rho_2^3} + 3\frac{\mu}{\rho_2^4} \frac{\partial \rho_2}{\partial \zeta} \zeta. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Das Equações (5.29) e (5.30), temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial \zeta^2} &= -\frac{1-\mu}{\rho_1^3} + 3\frac{1-\mu}{\rho_1^5} \zeta^2 - \frac{\mu}{\rho_2^3} + 3\frac{\mu}{\rho_2^5} \zeta^2 \\ \frac{\partial^2 U}{\partial \zeta^2} &= -\frac{1-\mu}{\rho_1^3} - \frac{\mu}{\rho_2^3} + 3\zeta^2 \left(\frac{1-\mu}{\rho_1^5} + \frac{\mu}{\rho_2^5} \right), \end{aligned} \quad (6.9)$$

em que $\rho_1 = \sqrt{(\xi + \xi_1)^2 + \eta^2}$ e $\rho_2 = \sqrt{(\xi - \xi_2)^2 + \eta^2}$.

Como todos os pontos de Lagrange se encontram no plano orbital, $\zeta = 0$. Portanto,

$$\left. \frac{\partial^2 U}{\partial \zeta^2} \right|_{\zeta=0} = -\frac{1-\mu}{\rho_1^3} - \frac{\mu}{\rho_2^3}. \quad (6.10)$$

Como $\frac{1-\mu}{\rho_1^3}$ e $\frac{\mu}{\rho_2^3}$ são valores positivos,

$$\left. \frac{\partial^2 U}{\partial \zeta^2} \right|_{\zeta=0} = - \left(\frac{1-\mu}{\rho_1^3} + \frac{\mu}{\rho_2^3} \right) < 0, \quad (6.11)$$

o que, de acordo com a Equação (6.6), indica estabilidade. Dessa forma, está demonstrado que todos os pontos de Lagrange são pontos de **equilíbrio estável na direção ζ** . Assim, caso uma partícula, localizada em qualquer ponto de Lagrange, seja deslocada do equilíbrio na direção ζ , contando que seja uma pequena perturbação, surgirá uma força restauradora que retorna a partícula à sua posição de equilíbrio.

Como os termos de Coriolis nas Equações (5.40) e (5.41) fazem com que a aceleração não possua uma simples relação proporcional com as respectivas derivadas do potencial U , será necessário analisar os autovalores associados ao plano orbital. Isso será realizado na Seção 6.3.

6.3 Estabilidade no plano orbital

6.3.1 Representação em espaço de estados

Para o estudo da estabilidade no plano orbital, serão aplicados os conceitos de estabilidade linear. Para isso, é interessante obter as Equações (5.40) a (5.42), referentes à partícula m_3 , utilizando a representação em espaço de estados. Assim, será possível analisar os autovalores e determinar as condições de estabilidade linear. Sendo o vetor dos estados \mathbf{x} , dado por

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \\ \nu_\xi \\ \nu_\eta \\ \nu_\zeta \end{bmatrix}, \quad (6.12)$$

em que $\nu_\xi = \dot{\xi}$, $\nu_\eta = \dot{\eta}$ e $\nu_\zeta = \dot{\zeta}$, temos

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \nu_\xi \\ \nu_\eta \\ \nu_\zeta \\ \dot{\nu}_\xi \\ \dot{\nu}_\eta \\ \dot{\nu}_\zeta \end{bmatrix}. \quad (6.13)$$

Das Equações (5.40) a (5.42),

$$\dot{v}_\xi = 2\omega v_\eta + \frac{\partial U}{\partial \xi}, \quad (6.14)$$

$$\dot{v}_\eta = -2\omega v_\xi + \frac{\partial U}{\partial \eta} \quad \text{e} \quad (6.15)$$

$$\dot{v}_\zeta = \frac{\partial U}{\partial \zeta}. \quad (6.16)$$

Assim, a partir das Equações (6.14) a (6.16), a representação do sistema dinâmico em espaço de estados é dada por

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}, \quad (6.17)$$

em que as matrizes \mathbf{A} e \mathbf{b} são, respectivamente,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.18)$$

e

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\partial U}{\partial \xi} \\ \frac{\partial U}{\partial \eta} \\ \frac{\partial U}{\partial \zeta} \end{bmatrix}. \quad (6.19)$$

Note que \mathbf{b} depende dos estados, ou seja, está sendo avaliada em \mathbf{x} , visto que $\frac{\partial U(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \xi}$, $\frac{\partial U(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \eta}$ e $\frac{\partial U(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \zeta}$ são valores em função da posição da partícula (ξ, η, ζ) . Para o vetor de estados \mathbf{x} referente a um estado próximo ao estado de equilíbrio estático inicial \mathbf{x}_0 , temos

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \delta\mathbf{x}, \quad (6.20)$$

de forma que $\delta\mathbf{x}$ representa uma pequena perturbação em relação ao equilíbrio estático, tanto em posição, quanto em velocidade. Derivando a Equação (6.20) para obter $\dot{\mathbf{x}}$, sabendo que para o equilíbrio $\dot{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{0}$, temos

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \underbrace{\dot{\mathbf{x}}_0}_{=\mathbf{0}} + \delta\dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{x}} &= \delta\dot{\mathbf{x}}. \end{aligned} \quad (6.21)$$

Assim, a partir do resultado da Equação (6.21), avaliando a Equação (6.17) para a condição de um estado próximo ao equilíbrio \mathbf{x} , representada pela Equação (6.20), temos

$$\delta\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(\mathbf{x}_0 + \delta\mathbf{x}) + \mathbf{b}|_{\mathbf{x}_0 + \delta\mathbf{x}}. \quad (6.22)$$

Para obter a matriz \mathbf{b} aplicada ao estado próximo ao estado de equilíbrio, é necessário utilizar a expansão de Taylor dada por

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n. \quad (6.23)$$

Dessa forma, aplicando a expansão de Taylor para a $\mathbf{b}|_{\mathbf{x}_0 + \delta\mathbf{x}}$, temos

$$\mathbf{b}|_{\mathbf{x}_0 + \delta\mathbf{x}} = \mathbf{b}|_{\mathbf{x}_0} + \left. \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_0} \delta\mathbf{x} + \mathcal{O}^2, \quad (6.24)$$

em que \mathcal{O}^2 representa os termos de ordem quadrática e superior e o termo $\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial \mathbf{x}}$ é definido pela matriz Jacobiana de \mathbf{b} . Nesse sentido, seja uma matriz $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ definida por

$$f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{bmatrix}, \quad (6.25)$$

sua matriz Jacobiana de f é calculada por

$$J_f = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}. \quad (6.26)$$

Aplicando essa definição na matriz \mathbf{b} do problema, temos que sua Jacobiana é dada por

$$\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial U_\xi}{\partial \xi} & \frac{\partial U_\xi}{\partial \eta} & \frac{\partial U_\xi}{\partial \zeta} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial U_\eta}{\partial \xi} & \frac{\partial U_\eta}{\partial \eta} & \frac{\partial U_\eta}{\partial \zeta} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial U_\zeta}{\partial \xi} & \frac{\partial U_\zeta}{\partial \eta} & \frac{\partial U_\zeta}{\partial \zeta} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ U_{\xi\xi} & U_{\xi\eta} & U_{\xi\zeta} & 0 & 0 & 0 \\ U_{\eta\xi} & U_{\eta\eta} & U_{\eta\zeta} & 0 & 0 & 0 \\ U_{\zeta\xi} & U_{\zeta\eta} & U_{\zeta\zeta} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (6.27)$$

Pelo teorema de Clairaut (THOMAS et al., 2009), se uma função $f(x,y)$ e suas derivadas parciais f_x , f_y , f_{xy} e f_{yx} são definidas e contínuas em uma pequena região aberta ao redor do ponto (a,b) , então

$$f_{xy}(a,b) = f_{yx}(a,b). \quad (6.28)$$

Isso quer dizer que, para a função U ,

$$U = \frac{1-\mu}{\rho_1} + \frac{\mu}{\rho_2} + \frac{\omega^2}{2}(\xi^2 + \eta^2), \quad (6.29)$$

é válido assumir que as derivadas parciais mistas de U são equivalentes. Embora U possua descontinuidades quando ρ_1 ou ρ_2 são iguais a zero, para que isso acontecesse, a partícula secundária teria que estar localizada no centro das massas primárias, o que não é fisicamente possível. Dessa forma, os pontos de descontinuidade referentes a $\rho_1 = 0$ e $\rho_2 = 0$ estão excluídos da pequena região aberta definida ao redor de qualquer ponto (a, b) da trajetória da partícula secundária e, portanto, podemos aplicar o teorema de Clairaut nesse caso.

Assim, utilizando o teorema de Clairaut, a matriz Jacobiana é reduzida para

$$\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ U_{\xi\xi} & U_{\xi\eta} & U_{\xi\zeta} & 0 & 0 & 0 \\ U_{\xi\eta} & U_{\eta\eta} & U_{\eta\zeta} & 0 & 0 & 0 \\ U_{\xi\zeta} & U_{\eta\zeta} & U_{\zeta\zeta} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (6.30)$$

Primeiramente, calculando o termo $U_{\xi\xi}$ a partir de U_{ξ} , dado pela Equação (5.37), temos

$$\begin{aligned} U_{\xi\xi} &= \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} = -(1-\mu) \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\xi + \xi_1}{\rho_1^3} \right) - \mu \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\xi - \xi_2}{\rho_2^3} \right) + \omega^2 \\ U_{\xi\xi} &= -\frac{(1-\mu)}{\rho_1^6} \left[\rho_1^3 - 3(\xi + \xi_1)\rho_1^2 \frac{\partial \rho_1}{\partial \xi} \right] - \frac{\mu}{\rho_2^6} \left[\rho_2^3 - 3(\xi - \xi_2)\rho_2^2 \frac{\partial \rho_2}{\partial \xi} \right] + \omega^2. \end{aligned} \quad (6.31)$$

Substituindo os valores de $\frac{\partial \rho_1}{\partial \xi}$ e $\frac{\partial \rho_2}{\partial \xi}$ dadas pelas Equações (5.22) e (5.23), temos

$$\begin{aligned} U_{\xi\xi} &= -\frac{(1-\mu)}{\rho_1^6} \left[\rho_1^3 - 3(\xi + \xi_1)^2 \rho_1 \right] - \frac{\mu}{\rho_2^6} \left[\rho_2^3 - 3(\xi - \xi_2)^2 \rho_2 \right] + \omega^2 \\ U_{\xi\xi} &= -\frac{(1-\mu)}{\rho_1^3} + \frac{3(1-\mu)(\xi + \xi_1)^2}{\rho_1^5} - \frac{\mu}{\rho_2^3} + \frac{3\mu(\xi - \xi_2)^2}{\rho_2^5} + \omega^2 \\ U_{\xi\xi} &= \omega^2 - \frac{(1-\mu)}{\rho_1^3} - \frac{\mu}{\rho_2^3} + \frac{3(1-\mu)(\xi + \xi_1)^2}{\rho_1^5} + \frac{3\mu(\xi - \xi_2)^2}{\rho_2^5}. \end{aligned} \quad (6.32)$$

Analogamente para $U_{\eta\eta}$, a partir dos valores de $\frac{\partial \rho_1}{\partial \eta}$ e $\frac{\partial \rho_2}{\partial \eta}$ dados pelas Equações (5.27) e (5.28), respectivamente, temos

$$\begin{aligned} U_{\eta\eta} &= \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} = -(1-\mu) \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\eta}{\rho_1^3} \right) - \mu \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\eta}{\rho_2^3} \right) + \omega^2 \\ &= -\frac{(1-\mu)}{\rho_1^6} \left[\rho_1^3 - 3\eta\rho_1^2 \frac{\partial \rho_1}{\partial \eta} \right] - \frac{\mu}{\rho_2^6} \left[\rho_2^3 - 3\eta\rho_2^2 \frac{\partial \rho_2}{\partial \eta} \right] + \omega^2 \\ &= -\frac{(1-\mu)}{\rho_1^6} \left[\rho_1^3 - 3\eta^2 \rho_1 \right] - \frac{\mu}{\rho_2^6} \left[\rho_2^3 - 3\eta^2 \rho_2 \right] + \omega^2 \\ &= -\frac{(1-\mu)}{\rho_1^3} + \frac{3(1-\mu)\eta^2}{\rho_1^5} - \frac{\mu}{\rho_2^3} + \frac{3\mu\eta^2}{\rho_2^5} + \omega^2 \\ &= \omega^2 - \frac{(1-\mu)}{\rho_1^3} - \frac{\mu}{\rho_2^3} + \frac{3(1-\mu)\eta^2}{\rho_1^5} + \frac{3\mu\eta^2}{\rho_2^5}. \end{aligned} \quad (6.33)$$

Para o cálculo de $U_{\zeta\zeta}$, temos

$$\begin{aligned} U_{\zeta\zeta} &= \frac{\partial^2 U}{\partial \zeta^2} = -(1-\mu) \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{\zeta}{\rho_1^3} \right) - \mu \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{\zeta}{\rho_2^3} \right) \\ &= -\frac{(1-\mu)}{\rho_1^6} \left[\rho_1^3 - 3\zeta \rho_1^2 \frac{\partial \rho_1}{\partial \zeta} \right] - \frac{\mu}{\rho_2^6} \left[\rho_2^3 - 3\zeta \rho_2^2 \frac{\partial \rho_2}{\partial \zeta} \right]. \end{aligned} \quad (6.34)$$

Para os valores de $\frac{\partial \rho_1}{\partial \zeta}$ e $\frac{\partial \rho_2}{\partial \zeta}$, dados pelas Equações (5.29) e (5.30), temos

$$\begin{aligned} U_{\zeta\zeta} &= -\frac{(1-\mu)}{\rho_1^6} \left[\rho_1^3 - 3\zeta^2 \rho_1 \right] - \frac{\mu}{\rho_2^6} \left[\rho_2^3 - 3\zeta^2 \rho_2 \right] \\ &= -\frac{(1-\mu)}{\rho_1^3} + \frac{3(1-\mu)\zeta^2}{\rho_1^5} - \frac{\mu}{\rho_2^3} + \frac{3\mu\zeta^2}{\rho_2^5} \\ &= -\frac{(1-\mu)}{\rho_1^3} - \frac{\mu}{\rho_2^3} + \frac{3(1-\mu)\zeta^2}{\rho_1^5} + \frac{3\mu\zeta^2}{\rho_2^5}. \end{aligned} \quad (6.35)$$

De forma análoga, para as derivadas parciais mistas $U_{\xi\eta}$, $U_{\xi\zeta}$ e $U_{\eta\zeta}$, temos

$$\begin{aligned} U_{\xi\eta} &= \frac{\partial}{\partial \eta} \left(-\frac{1-\mu}{\rho_1^3} (\xi + \xi_1) - \frac{\mu}{\rho_2^3} (\xi - \xi_2) + \omega^2 \xi \right) \\ &= -(1-\mu)(\xi + \xi_1) \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{\rho_1^3} \right) - \mu(\xi - \xi_2) \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{\rho_2^3} \right) \\ &= \frac{3(1-\mu)(\xi + \xi_1)}{\rho_1^4} \frac{\partial \rho_1}{\partial \eta} + \frac{3\mu(\xi - \xi_2)}{\rho_2^4} \frac{\partial \rho_2}{\partial \eta} \\ &= \frac{3\eta(1-\mu)(\xi + \xi_1)}{\rho_1^5} + \frac{3\eta\mu(\xi - \xi_2)}{\rho_2^5}, \end{aligned} \quad (6.36)$$

$$\begin{aligned} U_{\xi\zeta} &= \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(-\frac{1-\mu}{\rho_1^3} (\xi + \xi_1) - \frac{\mu}{\rho_2^3} (\xi - \xi_2) + \omega^2 \xi \right) \\ &= -(1-\mu)(\xi + \xi_1) \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{1}{\rho_1^3} \right) - \mu(\xi - \xi_2) \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{1}{\rho_2^3} \right) \\ &= \frac{3(1-\mu)(\xi + \xi_1)}{\rho_1^4} \frac{\partial \rho_1}{\partial \zeta} + \frac{3\mu(\xi - \xi_2)}{\rho_2^4} \frac{\partial \rho_2}{\partial \zeta} \\ &= \frac{3\zeta(1-\mu)(\xi + \xi_1)}{\rho_1^5} + \frac{3\zeta\mu(\xi - \xi_2)}{\rho_2^5} \end{aligned} \quad (6.37)$$

$$\begin{aligned}
U_{\eta\zeta} &= \frac{\partial}{\partial\zeta} \left(-\frac{1-\mu}{\rho_1^3}\eta - \frac{\mu}{\rho_2^3}\eta + \omega^2\eta \right) \\
&= -\eta(1-\mu)\frac{\partial}{\partial\zeta} \left(\frac{1}{\rho_1^3} \right) - \eta\mu\frac{\partial}{\partial\zeta} \left(\frac{1}{\rho_2^3} \right) \\
&= \frac{3\eta(1-\mu)}{\rho_1^4} \frac{\partial\rho_1}{\partial\zeta} + \frac{3\eta\mu}{\rho_2^4} \frac{\partial\rho_2}{\partial\zeta} \\
&= \frac{3\eta\zeta(1-\mu)}{\rho_1^5} + \frac{3\eta\zeta\mu}{\rho_2^5}.
\end{aligned} \tag{6.38}$$

Assim, as derivadas parciais de segunda ordem $U_{\xi\xi}$, $U_{\eta\eta}$, $U_{\zeta\zeta}$, $U_{\xi\eta}$, $U_{\xi\zeta}$ e $U_{\eta\zeta}$ podem ser escritas como

$$U_{\xi\xi} = \omega^2 - \alpha + \frac{3(1-\mu)(\xi + \xi_1)^2}{\rho_1^5} + \frac{3\mu(\xi - \xi_2)^2}{\rho_2^5} \tag{6.39}$$

$$U_{\eta\eta} = \omega^2 - \alpha + \beta\eta^2 \tag{6.40}$$

$$U_{\zeta\zeta} = -\alpha + \beta\zeta^2 \tag{6.41}$$

$$U_{\xi\eta} = \gamma\eta \tag{6.42}$$

$$U_{\xi\zeta} = \gamma\zeta \tag{6.43}$$

$$U_{\eta\zeta} = \beta\eta\zeta \tag{6.44}$$

em que

$$\alpha = \frac{(1-\mu)}{\rho_1^3} + \frac{\mu}{\rho_2^3} \tag{6.45}$$

$$\beta = \frac{3(1-\mu)}{\rho_1^5} + \frac{3\mu}{\rho_2^5} \tag{6.46}$$

$$\gamma = \frac{3(1-\mu)(\xi + \xi_1)}{\rho_1^5} + \frac{3\mu(\xi - \xi_2)}{\rho_2^5}. \tag{6.47}$$

Calculados os termos de $\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial \mathbf{x}}$, é necessário linearizar a Equação (6.24). A linearização consiste em negligenciar os termos de ordem superior \mathcal{O}^2 . Portanto,

$$\mathbf{b}|_{\mathbf{x}_0+\delta\mathbf{x}} \approx \mathbf{b}|_{\mathbf{x}_0} + \left. \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_0} \delta\mathbf{x}. \tag{6.48}$$

Por fim, avaliando a Equação (6.17) no equilíbrio ($\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$),

$$\begin{aligned}
\underbrace{\dot{\mathbf{x}}_0}_{=\mathbf{0}} &= \mathbf{A}\mathbf{x}_0 + \mathbf{b}|_{\mathbf{x}_0} \\
\mathbf{A}\mathbf{x}_0 + \mathbf{b}|_{\mathbf{x}_0} &= \mathbf{0}.
\end{aligned} \tag{6.49}$$

Dessa forma, aplicando os resultados das Equações (6.48) e (6.49) na Equação (6.22),

$$\begin{aligned} \delta \dot{\mathbf{x}} &\approx \underbrace{\mathbf{A}\mathbf{x}_0 + \mathbf{b}|_{\mathbf{x}_0}}_{=0} + \mathbf{A}\delta\mathbf{x} + \left. \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_0} \delta\mathbf{x} \\ \delta \dot{\mathbf{x}} &\approx \mathbf{A}\delta\mathbf{x} + \left. \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_0} \delta\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (6.50)$$

Portanto, a equação linearizada torna-se

$$\delta \dot{\mathbf{x}} \approx \mathbf{M}\delta\mathbf{x}, \quad (6.51)$$

em que

$$\mathbf{M} = \mathbf{A} + \left. \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_0}. \quad (6.52)$$

6.3.2 Estudo da estabilidade dos pontos lagrangianos colineares

Para os pontos colineares de Lagrange, $\eta, \zeta = 0$, o que resulta em $\rho_1 = |\xi + \xi_1|$ e $\rho_2 = |\xi - \xi_2|$. Portanto, os valores de α , β e γ para os pontos de Lagrange $L1$, $L2$ e $L3$ são dados por

$$\alpha = \frac{(1-\mu)}{|\xi + \xi_1|^3} + \frac{\mu}{|\xi - \xi_2|^3} \quad (6.53)$$

$$\beta = \frac{3(1-\mu)}{|\xi + \xi_1|^5} + \frac{3\mu}{|\xi - \xi_2|^5} \quad \text{e} \quad (6.54)$$

$$\gamma = \frac{3(1-\mu)(\xi + \xi_1)}{|\xi + \xi_1|^5} + \frac{3\mu(\xi - \xi_2)}{|\xi - \xi_2|^5}. \quad (6.55)$$

A partir dos valores de α , β e γ calculados, $U_{\xi\xi}$ para os pontos colineares de Lagrange é calculado como

$$\begin{aligned} U_{\xi\xi} &= \omega^2 - \alpha + \frac{3(1-\mu)(\xi + \xi_1)^2}{|\xi + \xi_1|^5} + \frac{3\mu(\xi - \xi_2)^2}{|\xi - \xi_2|^5} \\ U_{\xi\xi} &= \omega^2 - \alpha + 3 \left[\underbrace{\frac{(1-\mu)}{|\xi + \xi_1|^3} + \frac{\mu}{|\xi - \xi_2|^3}}_{\alpha} \right] \\ U_{\xi\xi} &= \omega^2 + 2\alpha. \end{aligned} \quad (6.56)$$

Analogamente para as demais derivadas parciais de segunda ordem, das Equações (6.40) a (6.44), aplicando as condições referentes aos pontos $L1$, $L2$ e $L3$ ($\eta, \zeta = 0$), temos

$$U_{\eta\eta} = \omega^2 - \alpha, \quad (6.57)$$

$$U_{\zeta\zeta} = -\alpha \quad \text{e} \quad (6.58)$$

$$U_{\xi\eta} = U_{\xi\zeta} = U_{\eta\zeta} = 0. \quad (6.59)$$

Assim, a matriz \mathbf{M} para os pontos de Lagrange $L1$, $L2$ e $L3$ é calculada como

$$\mathbf{M} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \omega^2 + 2\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega^2 - \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\left. \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_0}} \quad (6.60)$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \omega^2 + 2\alpha & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & \omega^2 - \alpha & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Da Equação (6.60), é possível notar que os termos referente ao eixo- ζ podem ser desacoplados dos termos relacionados ao plano $\xi\eta$. Tal resultado é esperado visto que foi possível, na Seção 6.2, analisar a estabilidade no eixo- ζ separadamente. Assim, podemos desacoplar a Equação (6.51) de acordo com

$$\delta \dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{M}_1 \delta \mathbf{x}_1 \quad \text{e} \quad (6.61)$$

$$\delta \dot{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{M}_2 \delta \mathbf{x}_2, \quad (6.62)$$

em que \mathbf{M}_1 e \mathbf{M}_2 são dados por

$$\mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \omega^2 + 2\alpha & 0 & 0 & 2 \\ 0 & \omega^2 - \alpha & -2 & 0 \end{bmatrix} \text{ e} \quad (6.63)$$

$$\mathbf{M}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha & 0 \end{bmatrix}, \quad (6.64)$$

e os estados são dados por

$$\delta \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} \delta \xi \\ \delta \eta \\ \delta \dot{\xi} \\ \delta \dot{\eta} \end{bmatrix} \text{ e} \quad (6.65)$$

$$\delta \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} \delta \zeta \\ \delta \dot{\zeta} \end{bmatrix}. \quad (6.66)$$

Assim, para a análise da estabilidade no plano orbital, é necessário considerar o sistema linearizado da Equação (6.61). Tendo em mente que, de acordo com a Equação (5.6), para as unidades normalizadas, $\omega^2 = 1$. Portanto, a equação característica da matriz \mathbf{M}_1 é dada por

$$\det(\mathbf{M}_1 - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 1 \\ 1 + 2\alpha & 0 & -\lambda & 2 \\ 0 & 1 - \alpha & -2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (6.67)$$

O determinante indicado na Equação (6.67) pode ser calculado pelo método dos cofatores ou pelo código MATLAB abaixo:

```

1 syms A L
2
3 M1=[0 0 1 0
4     0 0 0 1
5     1+2*A 0 0 2
6     0 1-A -2 0];
7 M1_modif=M1-L*eye(4)
8 det(M1_modif)

```

Assim, temos

$$\det(\mathbf{M}_1 - \lambda \mathbf{I}) = \lambda^4 + (2 - \alpha)\lambda^2 + (1 + \alpha - 2\alpha^2) = 0, \quad (6.68)$$

em que as raízes λ_i da Equação (6.68) são os autovalores da matriz \mathbf{M}_1 .

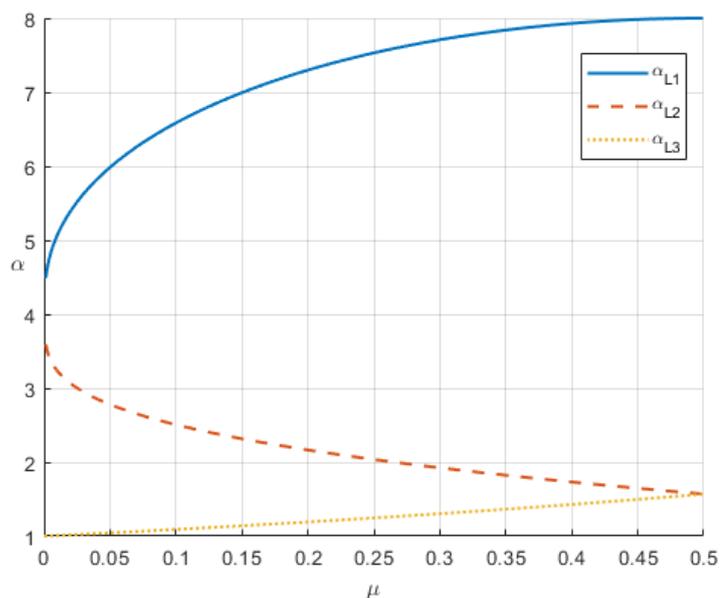
Conforme demonstrado pelo livro de Braun (1993):

1. Todas as soluções de $\delta \mathbf{x}$ são estáveis se todos os autovalores possuem parte real negativa;
2. Todas as soluções serão instáveis se houver pelo menos um autovalor com parte real positiva.

Isso é válido para a teoria de estabilidade linear, que é a análise realizada neste trabalho. Como o valor de α é de suma importância para o cálculo dos autovalores, foi utilizado um código MATLAB, o qual se encontra no Apêndice C.2, para que sejam visualizados todos os valores possíveis de α para cada ponto de Lagrange colinear em função dos valores de μ . É importante notar que, assumindo $m_1 > m_2$, é suficiente considerar $0 < \mu < 0,5$.

Assim, a Figura 6.36 representa graficamente os valores de α_{L1} , α_{L2} e α_{L3} , os quais são os valores de α referentes aos pontos de Lagrange $L1$, $L2$ e $L3$, respectivamente, em função de μ . Portanto, da figura, interpreta-se que $1 < \alpha < 8$ para os pontos de Lagrange colineares.

Figura 6.36 – Valores de α para $0 < \mu < 0,5$



Fonte: Elaborada pela autora

Calculando o discriminante da Equação (6.68), temos

$$\begin{aligned}\Delta &= (2 - \alpha)^2 - 4(1 + \alpha - 2\alpha^2) \\ \Delta &= 4 - 4\alpha + \alpha^2 - 4 - 4\alpha + 8\alpha^2 \\ \Delta &= 9\alpha^2 - 8\alpha.\end{aligned}\tag{6.69}$$

Como a equação $\Delta(\alpha) = 0$ possui raízes iguais a 0 e $8/9$ e $\Delta(\alpha)$ é uma parábola que possui concavidade positiva, para os valores possíveis $1 < \alpha < 8$ (Figura 6.36), temos que

$$\Delta = 9\alpha^2 - 8\alpha > 0.\tag{6.70}$$

Dando continuidade ao cálculo das raízes da equação bi-quadrada, temos

$$\lambda^2 = \frac{-(2 - \alpha) \pm \sqrt{9\alpha^2 - 8\alpha}}{2}.\tag{6.71}$$

Note que, como o discriminante é positivo, os valores de λ^2 são reais. Sendo $f(\alpha) = -(2 - \alpha) \pm \sqrt{9\alpha^2 - 8\alpha}$, podemos analisar o sinal de $f(\alpha)$ separando o problema em dois casos:

1. $f_1(\alpha) = -(2 - \alpha) + \sqrt{9\alpha^2 - 8\alpha}$;
2. $f_2(\alpha) = -(2 - \alpha) - \sqrt{9\alpha^2 - 8\alpha}$.

Analisando o primeiro caso, $f_1(\alpha) = -2 + \alpha + \sqrt{9\alpha^2 - 8\alpha}$, como $f_1(\alpha)$ é estritamente crescente no intervalo aberto $(1, 8)$ de interesse para α , temos

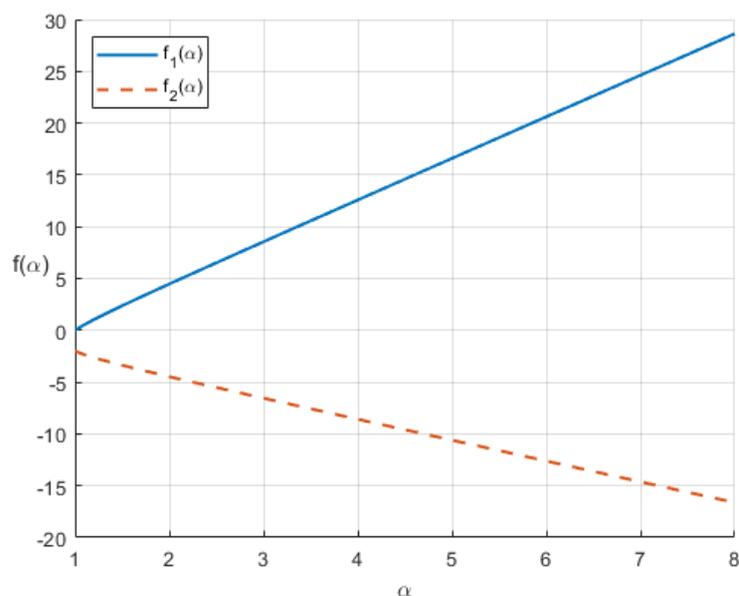
$$\begin{aligned}f_1(1) &< f_1(\alpha) < f_1(8) \\ 0 &< f_1(\alpha) < 6 + 16\sqrt{2} \\ f_1(\alpha) &> 0.\end{aligned}\tag{6.72}$$

Analogamente, para o segundo caso, temos que $f_2(\alpha) = -2 + \alpha - \sqrt{9\alpha^2 - 8\alpha}$ é uma função estritamente decrescente no intervalo de interesse, portanto,

$$\begin{aligned}f_2(8) &< f_2(\alpha) < f_2(1) \\ 6 - 16\sqrt{2} &< f_2(\alpha) < -2 \\ f_2(\alpha) &< 0.\end{aligned}\tag{6.73}$$

Dessa forma, conclui-se analiticamente que $f_1(\alpha) > 0$ e $f_2(\alpha) < 0$ para $1 < \alpha < 8$. De forma alternativa, essa análise também pode ser realizada pelo gráfico de $f_1(\alpha)$ e $f_2(\alpha)$ para $1 < \alpha < 8$, conforme mostrado pela Figura 6.37.

Figura 6.37 – $f_1(\alpha)$ e $f_2(\alpha)$ para $1 < \alpha < 8$



Fonte: Elaborada pela autora

Sendo assim, a partir da Equação (6.71), os pares de autovalores que correspondem a f_1 e f_2 são, respectivamente, dados por

$$|\lambda_1| = \sqrt{\frac{f_1}{2}}$$

$$\lambda_1 = \pm \sqrt{\frac{f_1}{2}} \quad (6.74)$$

e

$$|\lambda_2| = \sqrt{\frac{f_2}{2}}$$

$$\lambda_2 = \pm \sqrt{\frac{f_2}{2}}. \quad (6.75)$$

Assim, das Equações (6.74) e (6.75), sabendo que $f_1(\alpha) > 0$ e $f_2(\alpha) < 0$, é possível concluir que os quatro autovalores da matriz \mathbf{M}_1 são compostos por um par de raízes reais de mesmo módulo e sinais opostos e um par de raízes imaginárias puras conjugadas. Portanto, existe autovalor com parte real positiva ($\lambda = \sqrt{0,5f_1}$), o que indica que todas as soluções da equação linearizada são instáveis. Assim, conclui-se que, pela teoria de estabilidade linear, **os pontos colineares de Lagrange são instáveis.**

6.3.3 Estudo da estabilidade dos pontos lagrangianos triangulares

Para os pontos triangulares de Lagrange, $\rho_1 = \rho_2 = 1$. Assim, de acordo com as Equações (6.45), (6.46) e (6.47), os valores de α , β e γ são, respectivamente

$$\alpha = \frac{(1-\mu)}{\rho_1^3} + \frac{\mu}{\rho_2^3} = \frac{(1-\mu)}{1} + \frac{\mu}{1}$$

$$\alpha = 1, \quad (6.76)$$

$$\beta = \frac{3(1-\mu)}{\rho_1^5} + \frac{3\mu}{\rho_2^5} = \frac{3(1-\mu)}{1} + \frac{3\mu}{1}$$

$$\beta = 3 \quad (6.77)$$

e

$$\gamma = \frac{3(1-\mu)(\xi + \xi_1)}{\rho_1^5} + \frac{3\mu(\xi - \xi_2)}{\rho_2^5} = \frac{3(1-\mu)(\xi + \xi_1)}{1} + \frac{3\mu(\xi - \xi_2)}{1}$$

$$\gamma = 3(\xi + \underbrace{\xi_1}_{\mu}) - 3\mu(\underbrace{\xi_1 + \xi_2}_1)$$

$$\gamma = 3\xi. \quad (6.78)$$

Para $\omega^2 = 1$, aplicando os novos valores de α , β e γ , utilizando os resultados da normalização de unidades, $\xi_1 = \mu$ e $\xi_2 = 1 - \mu$, para $U_{\xi\xi}$, temos

$$U_{\xi\xi} = 1 - \alpha + \frac{3(1-\mu)(\xi + \xi_1)^2}{\rho_1^5} + \frac{3\mu(\xi - \xi_2)^2}{\rho_2^5} = (3 - 3\mu)(\xi + \mu)^2 + 3\mu(\xi - 1 + \mu)^2$$

$$U_{\xi\xi} = (3 - 3\mu)(\xi^2 + \mu^2 + 2\xi\mu) + 3\mu(\xi^2 + \mu^2 + 1 - 2\xi + 2\xi\mu - 2\mu)$$

$$U_{\xi\xi} = 3(\xi^2 + \mu^2 + 2\xi\mu) + 3\mu(1 - 2\xi - 2\mu) = 3(\xi^2 - \mu^2 + \mu). \quad (6.79)$$

Conforme mostrado anteriormente pelo desenvolvimento da Equação (5.51), a posição $\xi_{L4,5}$ para os pontos de Lagrange $L4$ e $L5$ será dada pela posição do ponto médio da reta que liga as massas primárias. Portanto, nesse caso, temos

$$\xi_{L4,5} = \frac{-\xi_1 + \xi_2}{2} = \frac{-\mu + (1-\mu)}{2}$$

$$\xi_{L4,5} = \frac{1}{2} - \mu. \quad (6.80)$$

Aplicando esse resultado na Equação (6.79),

$$U_{\xi\xi} = 3 \left[\left(\frac{1}{2} - \mu \right)^2 - \mu^2 + \mu \right] = 3 \left[\left(\frac{1}{4} + \mu^2 - \mu \right) - \mu^2 + \mu \right]$$

$$U_{\xi\xi} = \frac{3}{4}. \quad (6.81)$$

Realizando o mesmo desenvolvimento para das demais derivadas parciais de segunda ordem de U , sabendo que $\zeta = 0$ para os pontos de Lagrange e $\eta_{L4,5} = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$ no PCR3C,

$$U_{\eta\eta} = 1 - \alpha + \beta\eta^2 = 3 \left(\pm \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2$$

$$U_{\eta\eta} = \frac{9}{4}, \quad (6.82)$$

$$U_{\zeta\zeta} = -\alpha + \beta\zeta^2$$

$$U_{\zeta\zeta} = -1, \quad (6.83)$$

$$U_{\xi\eta} = 3\xi \left(\pm \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 3 \left(\frac{1}{2} - \mu \right) \left(\pm \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$U_{\xi\eta} = \pm \frac{3\sqrt{3}}{4} (1 - 2\mu), \quad (6.84)$$

$$U_{\xi\zeta} = \gamma\zeta$$

$$U_{\xi\zeta} = 0, \quad (6.85)$$

e

$$U_{\eta\zeta} = \beta\eta\zeta$$

$$U_{\eta\zeta} = 0. \quad (6.86)$$

Assim, para os pontos triangulares de Lagrange,

$$\mathbf{M} = \mathbf{A} + \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ U_{\xi\xi\xi} & U_{\xi\eta} & U_{\xi\zeta} & 0 & 2 & 0 \\ U_{\xi\eta} & U_{\eta\eta} & U_{\eta\zeta} & -2 & 0 & 0 \\ U_{\xi\zeta} & U_{\eta\zeta} & U_{\zeta\zeta} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{3}{4} & \pm \frac{3\sqrt{3}}{4}(1-2\mu) & 0 & 0 & 2 & 0 \\ \pm \frac{3\sqrt{3}}{4}(1-2\mu) & \frac{9}{4} & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (6.87)$$

Analogamente ao desenvolvimento realizado na Seção 6.3.2, é possível desacoplar as equações linearizadas de acordo com

$$\delta \dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{M}_1 \delta \mathbf{x}_1 \quad \text{e} \quad (6.88)$$

$$\delta \dot{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{M}_2 \delta \mathbf{x}_2, \quad (6.89)$$

em que \mathbf{M}_1 e \mathbf{M}_2 são dados por

$$\mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{3}{4} & \pm \frac{3\sqrt{3}}{4}(1-2\mu) & 0 & 2 \\ \pm \frac{3\sqrt{3}}{4}(1-2\mu) & \frac{9}{4} & -2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad (6.90)$$

$$\mathbf{M}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (6.91)$$

Assim, para a análise da estabilidade linear no plano orbital, é necessário, novamente, calcular os autovalores da matriz \mathbf{M}_1 . Realizando esse cálculo com auxílio do código MATLAB mostrado abaixo, temos que a equação característica é igual para os pontos L_4 e L_5 e é dada por

$$\det(\mathbf{M}_1 - \lambda \mathbf{I}) = \lambda^4 + \lambda^2 + \frac{27}{4}\mu(1 - \mu) = 0. \quad (6.92)$$

```

1 syms A L mu
2
3 M1_L4=[0 0 1 0
4         0 0 0 1
5         3/4 3*sqrt(3)*(1-2*mu)/4 0 2
6         3*sqrt(3)*(1-2*mu)/4 9/4 -2 0];
7 M1_modif_L4=M1_L4-L*eye(4);
8 det(M1_modif_L4)
9
10 M1_L5=[0 0 1 0
11         0 0 0 1
12         3/4 3*sqrt(3)*(1-2*mu)/4 0 2
13         3*sqrt(3)*(1-2*mu)/4 9/4 -2 0];
14 M1_modif_L5=M1_L5-L*eye(4);
15 det(M1_modif_L5)

```

Assim, calculando as raízes da equação bi-quadrada, temos

$$\lambda^2 = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 27\mu(1 - \mu)}}{2}$$

$$|\lambda| = \sqrt{\frac{-1 \pm \sqrt{1 - 27\mu(1 - \mu)}}{2}}$$

$$\lambda = \pm \sqrt{\frac{-1 \pm \sqrt{1 - 27\mu(1 - \mu)}}{2}}. \quad (6.93)$$

Note que, caso o valor de λ^2 seja positivo, haverá λ_i com parte real positiva. Portanto, para a estabilidade, é necessário que o valor de λ^2 seja um valor **real negativo**, de forma que os quatro autovalores λ_i serão constituídos por dois pares distintos de raízes imaginárias puras conjugadas. Assim, de acordo com a teoria linear (OGATA, 2002), esse sistema dinâmico é classificado como marginalmente estável. Portanto, para a estabilidade, é necessário que

$$-1 \pm \sqrt{1 - 27\mu(1 - \mu)} < 0 \quad \text{e} \quad (6.94)$$

$$1 - 27\mu(1 - \mu) > 0, \quad (6.95)$$

em que as Equações (6.94) e (6.95) garantem, respectivamente, que os valores de λ^2 são valores negativos e reais distintos. Pela primeira condição, dada pela Equação (6.94), temos

$$\begin{aligned} -1 \pm \sqrt{1 - 27\mu(1 - \mu)} &< 0 \\ \pm \sqrt{1 - 27\mu(1 - \mu)} &< 1. \end{aligned} \quad (6.96)$$

A partir da segunda condição, dada pela Equação (6.95), o caso para o sinal negativo $-\sqrt{1 - 27\mu(1 - \mu)} < 1$ é trivialmente satisfeito. Assim, analisando o caso positivo, temos

$$\begin{aligned} \sqrt{1 - 27\mu(1 - \mu)} &< 1 \\ 1 - 27\mu(1 - \mu) &< 1 \\ 27\mu^2 - 27\mu &< 0 \\ 0 < \mu &< 1. \end{aligned} \quad (6.97)$$

No entanto, a condição da Equação (6.97) é automaticamente satisfeita por definição, visto que $0 < \mu < 0,5$. Assim, basta considerar a restrição imposta pela Equação (6.95). Dessa forma, analisando a segunda condição, temos

$$\begin{aligned} 1 - 27\mu(1 - \mu) &> 0 \\ 1 - 27\mu + 27\mu^2 &> 0. \end{aligned} \quad (6.98)$$

Como as raízes de $1 - 27\mu + 27\mu^2 = 0$ são $\mu = 0,0387$ e $\mu = 0,961$ e, por definição $0 < \mu < 0,5$, a estabilidade ocorre para

$$\mu < 0,0387. \quad (6.99)$$

Sendo assim, os pontos de Lagrange $L4$ e $L5$ são **condicionalmente estáveis**. Em outras palavras, os pontos triangulares de Lagrange são marginalmente estáveis pela teoria de estabilidade linear caso $\mu < 0,0387$. Se o valor de μ não for satisfeito, esses pontos são instáveis.

6.4 Aplicações relacionadas à estabilidade dos pontos de Lagrange

Nas seções anteriores, foi utilizada a teoria de estabilidade linear para determinar qual é o tipo de equilíbrio de cada ponto de Lagrange no plano orbital. Assim, foi determinado que os pontos colineares de Lagrange são instáveis. No entanto, os pontos colineares de Lagrange são condicionalmente estáveis e essa estabilidade depende do valor de μ . Além disso, foi provado que todos os pontos de Lagrange são estáveis no eixo- ζ .

É importante mencionar que existem diversas análises e métodos utilizados para verificar a estabilidade utilizando a teoria não linear. Em outras palavras, é possível realizar análises em que os termos de ordem quadrática não são negligenciados. Na realidade, tanto a análise linear, quanto a análise não linear irão impactar o sistema real. Neste trabalho, foi escolhida a análise de estabilidade linear pela sua simplicidade e aplicabilidade. Porém, caso seja de interesse do leitor, existem trabalhos dedicados exclusivamente ao estudo não linear. Tais análises, devido à complexidade matemática, estão fora do escopo deste trabalho.

ESTABILIDADE LINEAR DOS PONTOS DE LAGRANGE

Neste capítulo, foi demonstrado que

- Os pontos de Lagrange são estáveis no eixo perpendicular ao plano orbital;
- Pela estabilidade linear, os pontos de Lagrange L_1 , L_2 e L_3 são instáveis;
- Pela estabilidade linear, os pontos de Lagrange L_4 e L_5 são condicionalmente estáveis, em que a condição de estabilidade é $\mu < 0,0387$.

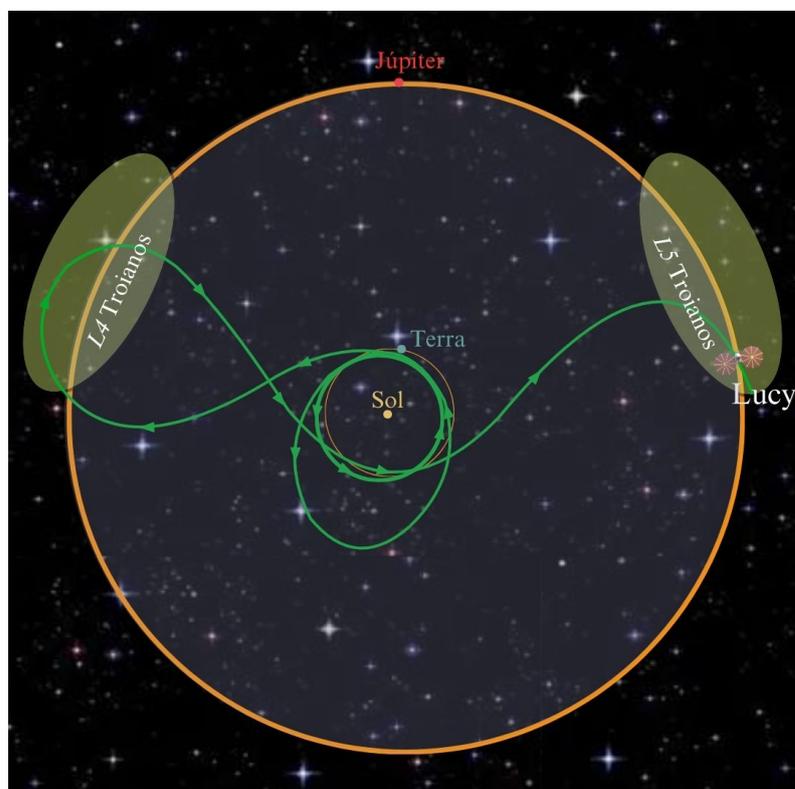
Uma evidência da aplicabilidade da estabilidade linear dos pontos de Lagrange é a presença de asteroides, denominados asteroides troianos, nos pontos de Lagrange L_4 e L_5 do sistema Sol-Júpiter. Sendo a massa de Júpiter $m_J = 1,898 \times 10^{24}$ kg e massa do Sol $m_S = 1,989 \times 10^{30}$ kg, μ é dada por

$$\mu = \frac{m_J}{m_S + m_J} = \frac{1,898 \times 10^{24}}{1,989 \times 10^{30} + 1,898 \times 10^{24}} \quad \mu = 9,542 \times 10^{-7}. \quad (6.100)$$

Portanto, para o par Sol-Júpiter, o valor de μ atende ao critério de estabilidade definido. Dessa forma, os pontos de Lagrange L_4 e L_5 do sistema Sol-Júpiter são estáveis pela teoria de estabilidade linear, fato apoiado pela existência dos asteroides troianos nessas regiões. O estudo dos asteroides troianos é crucial para o estudo da formação do nosso sistema solar. Congruente a isso, a missão Lucy (NASA), ilustrada na Figura 6.38, tem como objetivo

coletar informações relacionadas à composição dos asteroides, bem como mapear a superfície deles, coletando informações essenciais para o entendimento da formação do sistema solar (LEVISON et al., 2021).

Figura 6.38 – Missão Lucy para observação dos asteroides troianos



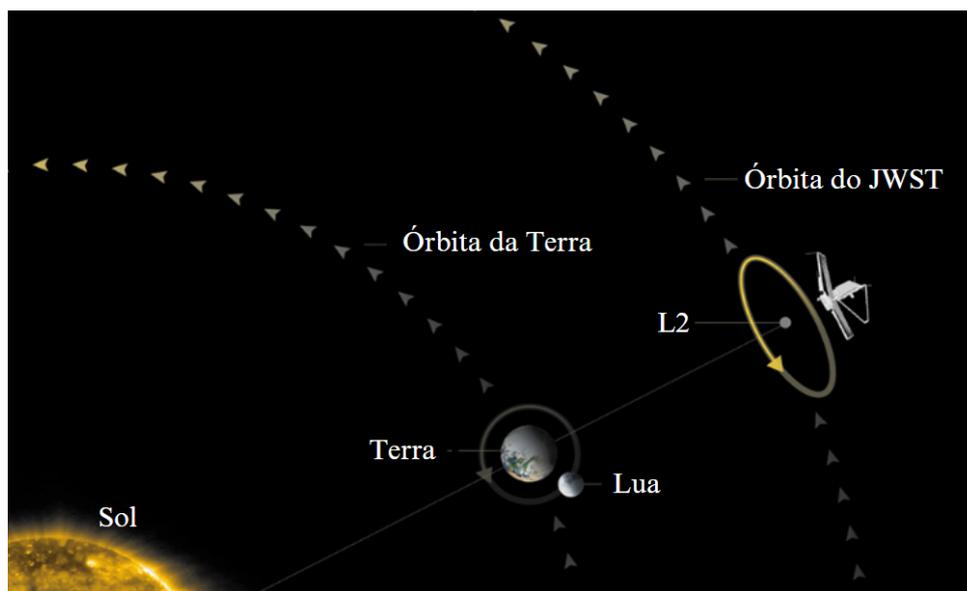
Fonte: Adaptada de NASA (2024)

Vale mencionar que existem outros objetos “troianos” encontrados nos pontos de Lagrange $L4$ e $L5$ de diferentes pares no sistema solar e já foram encontrados asteroides troianos nas órbitas de seis planetas (Vênus, Terra, Marte, Júpiter, Urano e Netuno) (HILLE, 2016). No sistema Sol-Terra, por exemplo, já foram identificados dois asteroides troianos; o primeiro (2010 TK7) identificado pelo projeto NEOWISE da NASA (HILLE, 2016) e o segundo (2020 XL5) descoberto com auxílio do telescópio *Southern Astrophysical Research* (SOAR), localizado no Chile (SANTANA-ROS et al., 2022).

Ademais, o local escolhido para o telescópio James Webb (JWST) também foi um ponto de Lagrange, conforme ilustrado na Figura 6.39. Por se tratar de um ponto de Lagrange instável, ainda são necessárias correções de órbita para que se mantenha nas redondezas do ponto $L2$ (CABETTE; ALMEIDA PRADO, 2007). De acordo com o que foi explicado na introdução (Seção 1.1), o local do telescópio foi escolhido estrategicamente devido a proximidade com a Terra para fins de telecomunicação, oferecendo uma visão ideal do universo de forma contínua. Além disso, o ponto $L2$ se encontra em uma posição termicamente favorável,

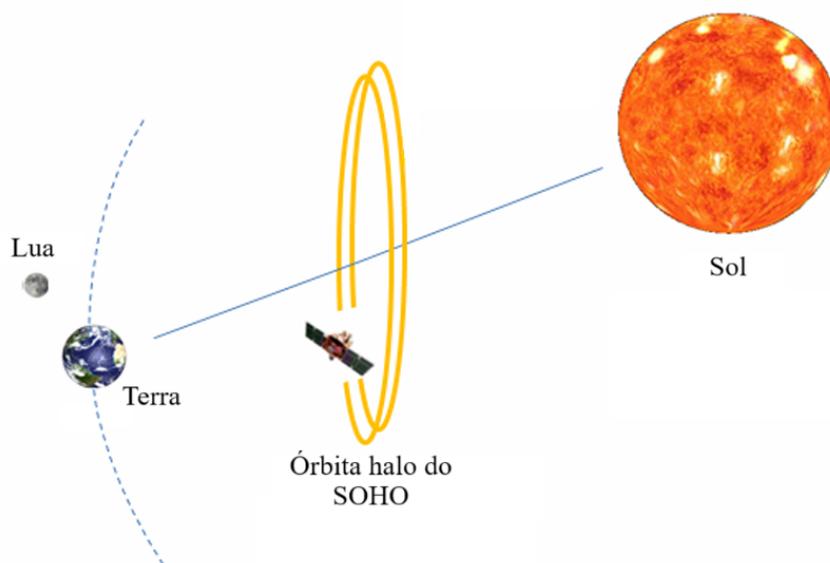
evitando ao máximo interferências providas do Sol e da Terra (GAL-EDD; FATIG, 2004). Por outro lado, o ponto $L1$ é ideal para observações solares. Dessa forma, o observatório solar *Solar and Heliospheric Observatory Satellite* (SOHO), lançado pela NASA em colaboração com a ESA em 1995, foi posicionado no ponto de Lagrange $L1$ (NASA, 2023d), de acordo com a Figura 6.40.

Figura 6.39 – Órbita do JWST



Fonte: Adaptada de NASA (2016)

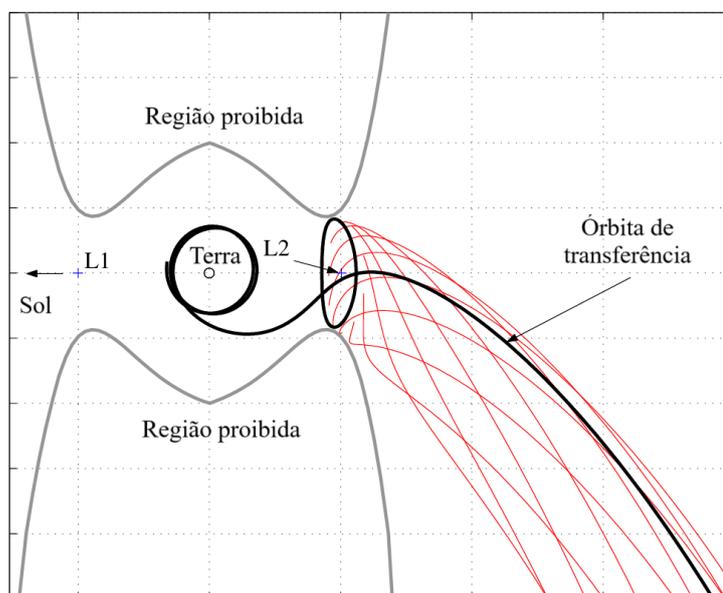
Figura 6.40 – Órbita *halo* do SOHO



Fonte: Adaptada de NASA (2008)

Além de serem destino de observatórios e telescópios espaciais, os pontos de Lagrange também são utilizados como pontos intermediários em missões espaciais. Na Seção 5.4, foi dado um exemplo de como os pontos de Lagrange podem ser utilizados como caminhos de energia mínima. Nesse sentido, o artigo publicado por [Topputo, Vasile e Bernelli-Zazzera \(2005\)](#) analisa como os pontos $L1$ e $L2$ podem ser utilizados para órbitas de transferência com economia de energia. Dessa forma, a Figura 6.41 ilustra uma possível estratégia de missão para Marte, utilizando o ponto $L2$ como ponto de transferência orbital. Ademais, a tese de doutorado de [Chupin \(2016\)](#) examina, em detalhes, as diversas aplicações do estudo dos pontos de Lagrange do ponto de vista de otimização de trajetórias.

Figura 6.41 – Trajetória de escape da influência do sistema Terra-Lua e transferência para Marte



Fonte: Adaptada de [Topputo, Vasile e Bernelli-Zazzera \(2005\)](#)

7 Conclusão e Trabalhos Futuros

7.1 Considerações Finais

O presente trabalho é uma compilação das demonstrações matemáticas referentes à teoria do problema de três corpos e pontos lagrangianos. Tinha-se como principal objetivo estabelecer uma base teórica para o entendimento desses tópicos de forma integral. Para isso, foram introduzidas a Lei da Gravitação Universal de Newton e as Leis de Kepler. A partir desses conceitos básicos, foi definido, na Seção 2.2, o problema de dois corpos e, em seguida, o problema foi generalizado para n -corpos (Seção 2.3). Assim, no Capítulo 2, foi introduzido o conceito de integrais primeiras, relacionando-as com a solução analítica do problema de dois corpos. Dessa forma, foi possível criar o embasamento necessário para o estudo do problema de três corpos no capítulo seguinte.

Além disso, na Seção 2.3, o trabalho esclareceu como o número de integrais de movimento impacta na derivação de uma solução analítica para o problema de três corpos. Assim, foi feita a comparação entre os problemas de dois e de três corpos, mostrando que, para $n > 2$, não é possível reduzir a ordem das equações diferenciais devido à inexistência de integrais de movimento suficientes.

Buscando mostrar o contexto histórico da busca pela solução analítica para o problema de três corpos, na Seção 3.2, foi mostrada a dedução das soluções geométricas de Lagrange e de Euler a partir do método das distâncias relativas (Seção 3.1). Um diferencial deste trabalho é o esclarecimento dos passos de solução, mostrando um desenvolvimento mais completo em relação à literatura base de Hestenes (2002). Em seguida, utilizando o sistema referencial sinódico (não inercial), foi introduzido ao leitor o problema circular restrito de três corpos (PCR3C), sempre explicando detalhadamente o motivo da ausência de soluções analíticas. Dessa forma, foi mostrada a relação entre o problema circular restrito de três corpos e os pontos de Lagrange.

No Capítulo 4, a partir da equação de movimento estabelecida no estudo do problema circular restrito de três corpos, foram calculadas, de forma analítica, as posições dos pontos lagrangianos L_4 e L_5 , e códigos MATLAB foram produzidos para o cálculo dos pontos L_1 , L_2 e L_3 . Além disso, foi demonstrado que, para essas condições, os pontos de Lagrange encontram-se no plano orbital das massas primárias.

A fim de estudar as aplicações da teoria referente aos pontos de Lagrange, no Capítulo 5, foi desenvolvida a equação da energia potencial (pseudo-potencial) da partícula secundária no referencial sinódico, explicando detalhadamente a normalização utilizada no problema. Assim, a partir do potencial, foi mostrado o cálculo das regiões proibidas e curvas

de velocidade nula, dando ênfase às possíveis aplicações das regiões de Hill no contexto de missões espaciais. Nesse sentido, foi explicado como é possível aproveitar o potencial gravitacional do problema para reduzir custos de missão, adequando a constante de Jacobi e minimizando a energia cinética inicial. Ademais, foi mostrada a importância de considerar os gráficos tridimensionais das zonas proibidas.

Por fim, no Capítulo 6, foi realizado o estudo da estabilidade dos pontos de Lagrange de acordo com a teoria de estabilidade linear. Assim, foi demonstrado que todos os pontos de Lagrange são estáveis no eixo- ζ . Ademais, foi provado que os pontos de Lagrange $L1$, $L2$ e $L3$ são instáveis e que os pontos $L4$ e $L5$ são condicionalmente estáveis, de forma que, para a estabilidade, é necessário que as massas primárias respeitem a proporção $\mu < 0,0387$. Adicionalmente, também foi escrita uma seção dedicada a relacionar a teoria descrita com aplicações reais em astrodinâmica. Portanto, foi cumprido o objetivo de produzir um documento autocontido para o estudo desses tópicos.

7.2 Trabalhos Futuros

Essa área da mecânica celeste oferece diversas oportunidades para pesquisas futuras. No caso deste trabalho, optou-se por uma pesquisa teórica e de revisão bibliográfica, com o objetivo de adaptar e simplificar o conteúdo para estudantes de graduação em engenharia. No entanto, neste tema, é possível realizar tanto trabalhos teóricos quanto práticos, a nível de graduação, mestrado ou doutorado.

Para trabalhos de graduação, é possível realizar estudos teóricos e práticos relacionados ao método de aproximação *patched-conic*, em que são necessários impulsos para a realização da manobra orbital (FERNANDES; ZANARDI, 2018b). No entanto, os impulsos mencionados conferem alto consumo energético e, conseqüentemente, altas velocidades. Assim, além do gasto energético, a alta velocidade pode ser uma desvantagem para algumas missões de observação – *flyby*, por exemplo –, em que o tempo curto muitas vezes implica em tempo insuficiente de observação.

Nesse sentido, um tema com bastante potencial para ser explorado, a nível de mestrado ou doutorado, é o de órbitas de transferência com baixo consumo utilizando as propriedades do problema de três corpos e pontos de Lagrange. Para trajetórias de baixo empuxo, como a velocidade é baixa, métodos como o de *patched-conic* não são considerados boas aproximações e são necessários métodos alternativos, por exemplo, o estudo do *Interplanetary Transport Network* (ITN).

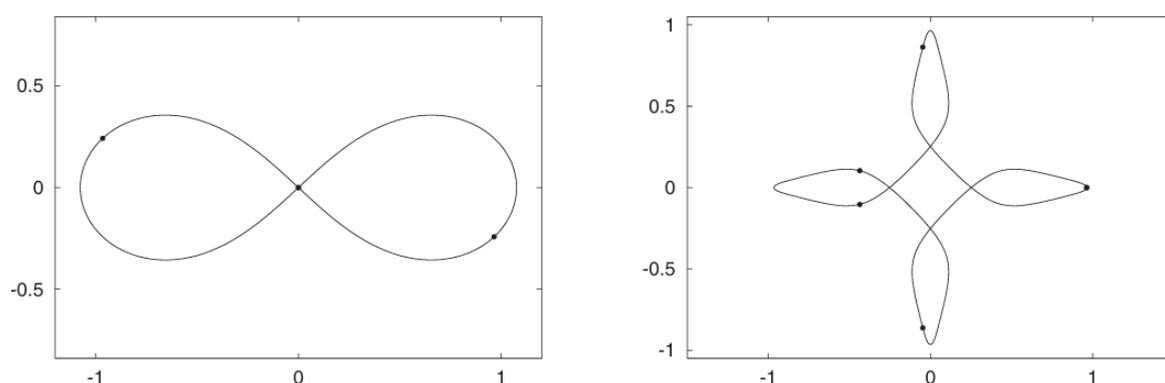
O *Interplanetary Transport Network* é um conjunto de “tubos” gravitacionais (chamados de tubos de Conley-McGee) que, em teoria, um objeto segue balisticamente, isto é, sem correções de trajetória (ROSS, S. D., 2006). Dessa forma, a utilização do ITN para missões interplanetárias reduz consideravelmente o gasto energético e aumenta o tempo de missão.

O comportamento desses “tubos” está diretamente associado às propriedades do problema de três corpos, pontos de Lagrange e órbitas periódicas ao redor dos pontos de Lagrange $L1$ e $L2$ (MARS DEN; ROSS, S., 2006). Nesse sentido, na tese de doutorado de Chupin (2016), por exemplo, são estudados os tubos de Conley-McGee para transferências de baixo empuxo, de modo a reduzir o consumo de propelente.

Nessa perspectiva, outro assunto relacionado é a investigação de soluções periódicas ou quase periódicas, que são temas de suma importância para o estudo do ITN (BELBRUNO, 2004). Sendo assim, a análise teórica dessas soluções é um potencial tema teórico para futuras dissertações de graduação. Essas soluções incluem:

- Coreografias de n -corpos: soluções periódicas em que n -corpos de massas equivalentes, distanciadas por fases constantes, seguem a mesma trajetória, conforme ilustrado na Figura 7.42. Relacionado a isso, a solução de Lagrange para o problema de três corpos, mencionada neste trabalho, é um exemplo de coreografia de três corpos (CHENCINER et al., 2002);
- Órbitas *Lyapunov*, *Halo* e *Lissajous*: órbitas ao redor dos pontos colineares de Lagrange. O entendimento da dinâmica ao redor dos pontos de Lagrange é crucial para missões em que os pontos de Lagrange são destino final, como missões de posicionamento de instrumentos espaciais – por exemplo, SOHO e JWST – ou pontos de transferência orbital. Para esse tópico, recomenda-se a literatura de Celletti, Pucacco e Stella (2015).

Figura 7.42 – Coreografias de n -corpos



Fonte: Chenciner et al. (2002)

Adicionalmente, é possível realizar trabalhos semelhantes a este, porém trabalhando a estabilidade não linear. O desenvolvimento detalhado do estudo da estabilidade não linear dos pontos de Lagrange pode ser encontrado em trabalhos como o de Marimon (2021), o qual é uma excelente base teórica para esse tópico.

Ademais, outra variação possível do presente trabalho é a utilização de diferentes formulações matemáticas para o problema. Neste trabalho, foi utilizada a mecânica Newtoniana para descrever as equações de movimento. Nesse sentido, como sugestão de tema, podem ser apresentadas aos estudantes de graduação de engenharia as formulações Hamiltoniana e Lagrangiana do problema de três corpos.

RESUMO DAS PROPOSTAS PARA TRABALHOS FUTUROS

De acordo com as propostas delineadas neste capítulo, sugerem-se abaixo os possíveis temas para trabalhos futuros:

- Estudo e aplicações das soluções periódicas e quase periódicas do problema circular restrito de três corpos;
- Análise da estabilidade não linear dos pontos de Lagrange;
- Estudo dos pontos de Lagrange e do problema de três corpos utilizando a formulação Hamiltoniana/Lagrangiana;
- *Design* de trajetórias por aproximação de *patched-conic*;
- Estudo do *Interplanetary Transport Network* (ITN) e suas aplicações.

Referências

- BARROW-GREEN, J. Oscar II's Prize Competition and the Error in Poincaré's Memoir on the Three Body Problem. **Archive for History of Exact Sciences**, Springer, v. 48, n. 2, p. 107–131, 1994. ISSN 00039519, 14320657. Disponível em: <<http://www.jstor.org/stable/41133989>>. Acesso em: 14 set. 2023. Citado na p. 38.
- BATE, R.; MUELLER, D.; WHITE, J. **Fundamentals of Astrodynamics**. Dover Publications, 1971. (Dover Books on Aeronautical Engineering Series). ISBN 9780486600611. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=UtJK8cetqGkC>>. Citado nas pp. 122, 123.
- BELBRUNO, E. **Capture Dynamics and Chaotic Motions in Celestial Mechanics: With Applications to the Construction of Low Energy Transfers**. Princeton University Press, 2004. ISBN 9780691094809. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=dK-f10KrOEIC>>. Citado na p. 114.
- BRAUN, M. **Differential Equations and Their Applications: An Introduction to Applied Mathematics**. Springer New York, 1993. (Texts in Applied Mathematics). ISBN 9780387978949. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=USWV3PP3b08C>>. Citado na p. 100.
- CABETTE, R. E. S.; ALMEIDA PRADO, A. F. B. de. Orbital Maneuvers Using The Lagrangian Points. **International Congress of Mechanical Engineering**, COBEM, n. 19, 2007. Disponível em: <<https://abcm.org.br/app/webroot/anais/cobem/2007/pdf/COBEM2007-1600.pdf>>. Acesso em: 4 jun. 2024. Citado na p. 109.
- CELLETTI, A.; PUCACCO, G.; STELLA, D. Lissajous and Halo Orbits in the Restricted Three-Body Problem. **Journal of Nonlinear Science**, v. 25, n. 2, p. 343–370, abr. 2015. ISSN 1432-1467. DOI: [10.1007/s00332-015-9232-2](https://doi.org/10.1007/s00332-015-9232-2). Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s00332-015-9232-2>>. Citado na p. 114.
- CHENCINER, A. Poincaré and the Three-Body Problem. In: **Henri Poincaré, 1912–2012: Poincaré Seminar 2012**. Edição: Bertrand Duplantier e Vincent Rivasseau. Basel: Springer Basel, 2015. P. 51–149. ISBN 978-3-0348-0834-7. DOI: [10.1007/978-3-0348-0834-7_2](https://doi.org/10.1007/978-3-0348-0834-7_2). Disponível em: <https://doi.org/10.1007/978-3-0348-0834-7_2>. Citado na p. 38.
- CHENCINER, A.; GERVER, J.; MONTGOMERY, R.; SIMÓ, C. Simple Choreographic Motions of N Bodies: A Preliminary Study. In: **Geometry, Mechanics, and Dynamics**. Edição: Paul Newton, Philip Holmes e Alan Weinstein. New York, NY: Springer New York, 2002. P. 287–308. ISBN 978-0-387-21791-8. DOI: [10.1007/0-387-21791-6_9](https://doi.org/10.1007/0-387-21791-6_9).

- Disponível em: <https://doi.org/10.1007/0-387-21791-6_9>. Citado na p. 114.
- CHUPIN, M. **Interplanetary transfers with low consumption using the properties of the restricted three body problem**. 2016. Tese (Doutorado) – Université Pierre et Marie Curie - Paris VI. Disponível em: <<https://hal.science/tel-01389197>>. Citado nas pp. 111, 114.
- CURTIS, H. **Orbital Mechanics: For Engineering Students**. Elsevier Science, 2015. ISBN 9780080470542. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=6a09aGNBAgIC>>. Citado nas pp. 19, 20, 24–27, 57, 82, 147.
- FERNANDES, S. S.; ZANARDI, M. C. **Fundamentos de Astronáutica e suas Aplicações**. Editora UFABC, 2018a. v. 1. ISBN 9788568576762. Citado nas pp. 19, 21.
- FERNANDES, S. S.; ZANARDI, M. C. **Fundamentos de Astronáutica e suas Aplicações**. Editora UFABC, 2018b. v. 2. ISBN 9788568576779. Citado nas pp. 19, 34, 38, 79, 87, 113.
- FITZPATRICK, R. **An Introduction to Celestial Mechanics**. Cambridge University Press, 2012. Citado nas pp. 19, 77, 78, 80, 87.
- GAL-EDD, J.; FATIG, C. L2-James Webb Space Telescope operationally friendly environment? **2004 IEEE Aerospace Conference Proceedings**, v. 1, p. 110, 2004. DOI: [10.1109/AERO.2004.1367595](https://doi.org/10.1109/AERO.2004.1367595). Acesso em: 3 jun. 2024. Citado na p. 110.
- GOWRAN, L. M. **What has the James Webb Space Telescope discovered so far?** 2022. Disponível em: <<https://www.siliconrepublic.com/innovation/james-webb-space-telescope-discoveries-universe-images>>. Acesso em: 3 nov. 2023. Citado na p. 15.
- HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J. **Fundamentals of Physics Extended**. John Wiley & Sons, 2010. ISBN 9780470469088. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=RzkdZMDZ1r0C>>. Citado na p. 22.
- HESTENES, D. **New Foundations for Classical Mechanics**. Springer Netherlands, 2002. (Fundamental Theories of Physics). ISBN 9789400948020. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=-mzyCAAQBAJ>>. Citado nas pp. 19, 34, 38, 39, 42, 46, 112, 137.
- HILLE, K. B. **NASA Mission to Search for Rare Asteroids**. 2016. Disponível em: <<https://www.nasa.gov/solar-system/nasa-mission-to-search-for-rare-asteroids/>>. Acesso em: 4 jun. 2024. Citado na p. 109.
- KARTTUNEN, H.; KRÖGER, P.; OJA, H.; POUTANEN, M.; DONNER, K. **Fundamental Astronomy**. Springer Berlin Heidelberg, 2003. (Physics and Astronomy Online Library). ISBN 9783540001799. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=0EhHqwW-kgQC>>. Citado na p. 22.

- LEITHOLD, L. **Calculo com geometria analitica**. Harbra, 1994. ISBN 9788529400945. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=6csjAAAACAAJ>>. Citado nas pp. 124, 125, 127.
- LEVISON, H. F.; OLKIN, C. B.; NOLL, K. S.; MARCHI, S.; III, J. F. B.; BIERHAUS, E.; BINZEL, R.; BOTTKE, W.; BRITT, D.; BROWN, M.; BUIE, M.; CHRISTENSEN, P.; EMERY, J.; GRUNDY, W.; HAMILTON, V. E.; HOWETT, C.; MOTTOLA, S.; PÄTZOLD, M.; REUTER, D.; SPENCER, J.; STATLER, T. S.; STERN, S. A.; SUNSHINE, J.; WEAVER, H.; WONG, I. Lucy Mission to the Trojan Asteroids: Science Goals. **The Planetary Science Journal**, The American Astronomical Society, v. 2, n. 5, p. 171, ago. 2021. DOI: 10.3847/PSJ/abf840. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.3847/PSJ/abf840>>. Citado na p. 109.
- LUNDBERG, J.; SZEBEHELY, V.; NEREM, R. S.; BEAL, B. Surfaces of zero velocity in the restricted problem of three bodies. **Celestial mechanics**, v. 36, n. 2, p. 191–205, jun. 1985. ISSN 1572-9478. DOI: 10.1007/BF01230651. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/BF01230651>>. Acesso em: 22 abr. 2024. Citado nas pp. 84–86.
- MARIMON, P. R. **On the stability of the Lagrangian points in the restricted circular 3-body problem**. 2021. Departament de Matemàtiques i Informàtica, Universitat de Barcelona, Barcelona. Citado na p. 114.
- MARSDEN, J.; ROSS, S. New methods in celestial mechanics and mission design. **Bulletin of the American Mathematical Society**, v. 43, p. 43, jan. 2006. DOI: 10.1090/S0273-0979-05-01085-2. Citado na p. 114.
- MCCLAIN, W.; VALLADO, D. **Fundamentals of Astrodynamics and Applications**. Springer Netherlands, 2001. (Space Technology Library). ISBN 9780792369035. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=PJL1WzMBKjkC>>. Citado nas pp. 34, 132.
- MURRAY, C.; DERMOTT, S. **Solar System Dynamics**. Cambridge University Press, 2000. ISBN 9781139936156. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=I_8LBAAAQBAJ>. Citado nas pp. 19, 73, 75, 76, 87.
- MUSIELAK, Z.; QUARLES, B. The three-body problem. **Reports on Progress in Physics**, v. 77, p. 065901, jun. 2014. DOI: 10.1088/0034-4885/77/6/065901. Citado na p. 38.
- NASA. **Early Universe**. Disponível em: <<https://webb.nasa.gov/content/science/firstLight.html>>. Acesso em: 3 nov. 2023. Citado na p. 15.
- NASA. **James Webb Space Telescope**. Disponível em: <<https://science.nasa.gov/mission/webb/>>. Acesso em: 3 nov. 2023. Citado na p. 15.
- NASA. **Lucy**. Disponível em: <<https://science.nasa.gov/mission/lucy/>>. Acesso em: 3 nov. 2023. Citado na p. 16.

- NASA. **Navigating NASA's First Mission to the Trojan Asteroids**. Disponível em: <<http://science.nasa.gov/solar-system/asteroids/navigating-nasas-first-mission-to-the-trojan-asteroids/>>. Acesso em: 10 jul. 2024. Citado na p. 109.
- NASA. The Million Mile Rescue. **System Failure Case Studies**, v. 2, n. 9, nov. 2008. Acesso em: 10 jul. 2024. Citado na p. 110.
- NASA. **Webb's Orbit**. Mai. 2016. Disponível em: <<https://webbtelescope.org/contents/media/images/4201-Image>>. Acesso em: 10 jul. 2024. Citado na p. 110.
- NASA. **What is a Lagrange Point?** 2023d. Disponível em: <<https://science.nasa.gov/resource/what-is-a-lagrange-point/#acf-downloads>>. Acesso em: 3 nov. 2023. Citado nas pp. 15, 16, 110.
- OGATA, K. **Modern Control Engineering**. Prentice-Hall, 2002. ISBN 9780130432452. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=H8YnmwEACAAJ>>. Citado na p. 106.
- PANNEKOEK, A. **A History of Astronomy**. Dover Publications, 1989. (Dover Books). ISBN 9780486659947. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=I1LGdDe0NYcC>>. Citado na p. 21.
- RIDDLE, D. **Analytic Geometry**. Wadsworth Publishing Company, 1982. ISBN 9780534010300. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=UkPWAAAAMAAJ>>. Citado nas pp. 125, 126.
- ROSS, S. D. The Interplanetary Transport Network: Some mathematical sophistication allows spacecraft to be maneuvered over large distances using little or no fuel. **American Scientist**, Sigma Xi, The Scientific Research Society, v. 94, n. 3, p. 230–237, 2006. ISSN 00030996. Disponível em: <<http://www.jstor.org/stable/27858771>>. Acesso em: 10 jun. 2024. Citado na p. 113.
- ROY, A. **Orbital Motion, Fourth Edition**. Taylor & Francis, 2005. ISBN 9780750310154. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=xk0jngEACAAJ>>. Citado na p. 75.
- SANTANA-ROS, T.; MICHELI, M.; FAGGIOLI, L.; CENNAMO, R.; DEVOGÈLE, M.; ALVAREZ-CANDAL, A.; OSZKIEWICZ, D.; RAMÍREZ, O.; LIU, P.-Y.; BENAVIDEZ, P. G.; CAMPO BAGATIN, A.; CHRISTENSEN, E. J.; WAINSCOAT, R. J.; WERYK, R.; FRAGA, L.; BRICEÑO, C.; CONVERSI, L. Orbital stability analysis and photometric characterization of the second Earth Trojan asteroid 2020 XL5. **Paris Communications**, v. 13, n. 1, p. 447, fev. 2022. ISSN 2041-1723. DOI: 10.1038/s41467-022-27988-4. Disponível em: <<https://doi.org/10.1038/s41467-022-27988-4>>. Acesso em: 4 jun. 2024. Citado na p. 109.

-
- SEEDS, M.; BACKMAN, D. **Foundations of Astronomy**. Cengage Learning, 2019. ISBN 9780357687093. Disponível em: <<https://www.cengage.com/c/foundations-of-astronomy-14e-seeds-backman/9781337399920/>>. Citado na p. 131.
- SWINBURNE. **Trojan Asteroids**. Disponível em: <<https://astronomy.swin.edu.au/cosmos/T/Trojan+Asteroids>>. Acesso em: 3 nov. 2023. Citado na p. 16.
- THOMAS, G.; THOMAS, G.; WEIR, M.; HASS, J. **Thomas' Calculus: Multivariable**. Addison-Wesley, 2009. (MyMathLab Series). ISBN 9780321643698. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=1HBLPgAACAAJ>>. Citado na p. 93.
- TOPPUTO, F.; VASILE, M.; BERNELLI-ZAZZERA, F. Low Energy Interplanetary Transfers Exploiting Invariant Manifolds of the Restricted Three-Body Problem. **Journal of the Astronautical Sciences**, v. 53, p. 353–372, out. 2005. DOI: 10.1007/BF03546358. Citado na p. 111.
- URI, J. **955 Years Ago: Halley's Comet and the Battle of Hastings**. 2021. Disponível em: <<https://www.nasa.gov/history/955-years-ago-halleys-comet-and-the-battle-of-hastings/>>. Acesso em: 24 jun. 2024. Citado na p. 131.
- WALTER, U. **Astronautics: The Physics of Space Flight**. Wiley, 2012. (Physics textbook). ISBN 9783527410651. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=V4_s91-Vun4C>. Citado na p. 38.
- WESTRA, D. **Lagrangian Points**. 2017. Disponível em: <<https://www.mat.univie.ac.at/~westra/lagrangepoints.pdf>>. Acesso em: 27 out. 2023. Citado nas pp. 19, 66.
- WILLIAMS, D. R. **Comet Fact Sheet**. 2016. Disponível em: <<https://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/cometfact.html>>. Acesso em: 24 jun. 2024. Citado na p. 131.

Apêndices

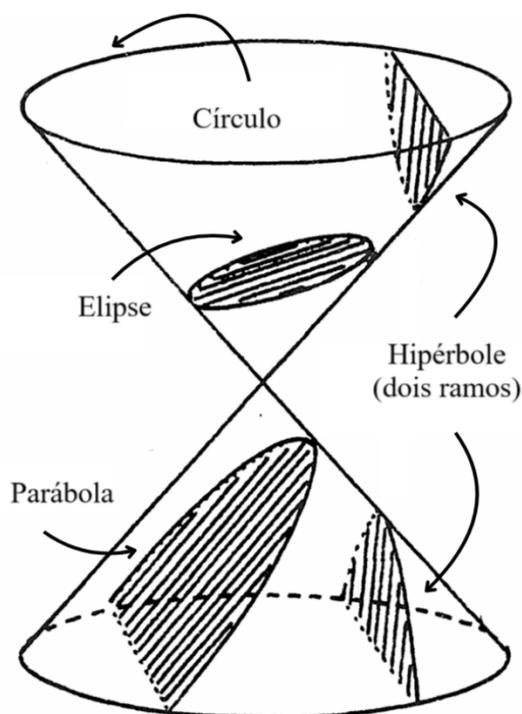
Apêndice A – Seções cônicas e geometria da órbita

Conforme explicado na Seção 2.2.4, a solução do problema de dois corpos é matematicamente idêntica à equação de uma cônica em coordenadas polares. Neste apêndice, serão revisados os conceitos relacionados às cônicas e os parâmetros que determinam o formato da órbita, ou seja, o tipo de seção cônica da trajetória.

A.1 Definição das seções cônicas

As seções cônicas são obtidas geometricamente pela interseção de planos com um cone circular reto de duas folhas, conforme mostrado na Figura A.43. Na figura, estão esquematizados os três tipos de seções cônicas (considerando que a circunferência é um caso especial de elipse).

Figura A.43 – Seções cônicas

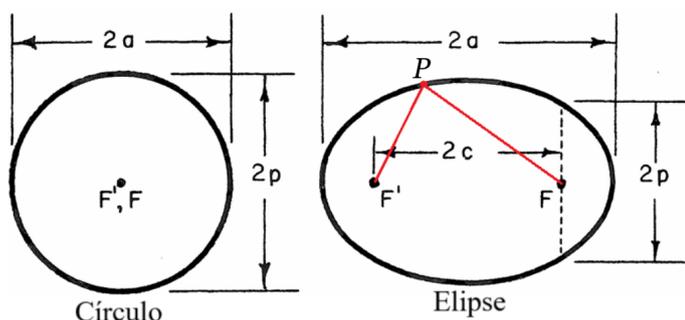


Fonte: Adaptada de Bate, Mueller e White (1971, p. 22)

As definições formais das seções cônicas são:

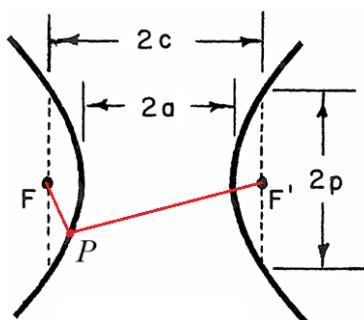
- **Elipse:** ilustrada na Figura A.44, a elipse é o conjunto de pontos P referentes ao lugar geométrico que satisfaz a condição $\overline{PF} + \overline{PF'} = 2a$. Em outras palavras, a soma das distâncias até os focos F e F' de todos os pontos pertencentes à elipse é uma constante. O círculo, também representado na figura, é um caso especial de elipse, no qual os focos se encontram na mesma posição e, conseqüentemente, $c = 0$;
- **Hipérbole:** a hipérbole é o conjunto de pontos que satisfazem a condição $|\overline{PF} - \overline{PF'}| = 2a$. Note que a hipérbole possui dois ramos simétricos correspondentes a $\overline{PF'} - \overline{PF} = 2a$ (ramo esquerdo) e $\overline{PF} - \overline{PF'} = 2a$ (ramo direito);
- **Parábola:** seja a reta d a uma distância p do foco F , mostrada na Figura A.46, a parábola é o conjunto de pontos P para os quais a distância \overline{PF} é congruente à distância entre P e a reta d . Assim, como P' e V' são, respectivamente, as projeções do ponto P e do vértice V na reta d , temos que, para a parábola $PF = PP'$. Por consequência, $\overline{VF} = \overline{VV'} = p/2$, visto que V faz parte da parábola.

Figura A.44 – Elementos da elipse



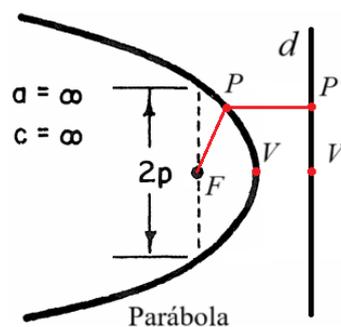
Fonte: Adaptada de Bate, Mueller e White (1971, p. 23)

Figura A.45 – Elementos da hipérbole



Fonte: Adaptada de Bate, Mueller e White (1971, p. 23)

Figura A.46 – Elementos da parábola



Fonte: Adaptada de Bate, Mueller e White (1971, p. 23)

As cônicas possuem dois focos F e F' . Para a elipse e hipérbole, a distância entre os focos é $2c$. Para a parábola, o segundo foco F' se encontra no infinito à esquerda do foco F ilustrado na Figura A.46, portanto, $c = \infty$. As distâncias pontilhadas, congruentes a $2p$, mostradas nas Figuras A.44 a A.46 são denominadas *latus rectum*. O tamanho da corda (segmento de reta que que liga um ponto da curva a outro) na direção que passa pelos focos é $2a$ para a hipérbole e elipse. Novamente, para o caso limite da parábola, $a = \infty$.

Por definição, a razão entre a distância de um ponto P (pertencente à curva) a um ponto fixo e a distância de P a uma reta fixa (que não contém o ponto fixo) é uma constante positiva, chamada de excentricidade e . Para o caso da parábola, é imediato perceber que o ponto fixo e a reta fixa mencionados são, respectivamente, o foco F e a reta d (diretriz), ambas mostradas na Figura A.46. Assim, a excentricidade da parábola é calculada por

$$e_{\text{parábola}} = \frac{PF}{PP'} = 1. \quad (\text{A.1})$$

Pode ser demonstrado que, a partir da definição de excentricidade, para as demais seções cônicas, a excentricidade e é calculada por

$$e = \frac{c}{a}. \quad (\text{A.2})$$

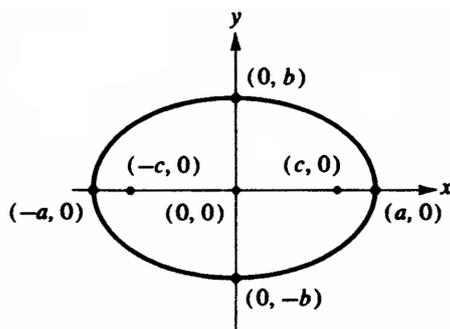
Além disso, a partir das definições dadas para cada seção cônica, é possível escrever as equações reduzidas de cada uma. Para mais detalhes relacionados a essas demonstrações, recomenda-se a leitura de uma referência dedicada ao estudo de geometria analítica como, por exemplo, a bibliografia de [Leithold \(1994\)](#), utilizada como base para a escrita deste apêndice. Assim, a partir dos valores de a e c discutidos para as seções cônicas, foi organizada a Tabela A.2.

Tabela A.2 – Propriedades geométricas das seções cônicas

Seção cônica	Equação reduzida	Relação notável	Excentricidade e
Elipse	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$b^2 = a^2 - c^2$	$0 < e < 1$
Círculo	$x^2 + y^2 = a^2$	$a = b$	$e = 0$
Hipérbole	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$b^2 = c^2 - a^2$	$e > 1$
Parábola	$y^2 = 2px$	$\overline{VF} = \overline{VV'} = \frac{p}{2}$	$e = 1$

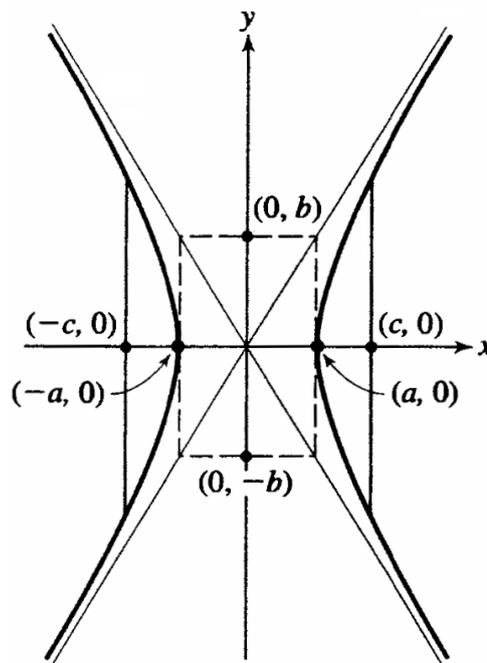
Os valores de a , b e c para a elipse e hipérbole estão ilustrados nas Figuras A.47 e A.48 respectivamente.

Figura A.47 – a , b e c da elipse



Fonte: Riddle (1982, p. 163)

Figura A.48 – a , b e c da hipérbole



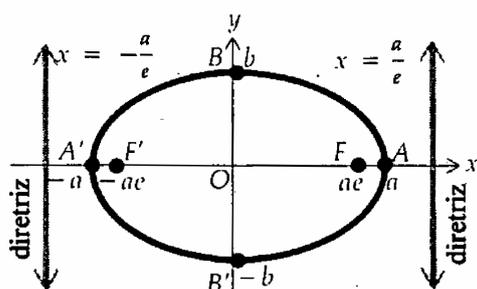
Fonte: Riddle (1982, p. 175)

As equações reduzidas da elipse e hipérbole podem ser generalizadas para uma equação única, dada por

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1 - e^2)} = 1, \quad (\text{A.3})$$

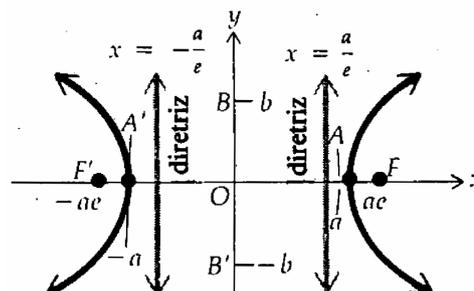
em que, sendo $a > 0$, as posições das diretrizes são $x = a/e$ e $x = -a/e$, associadas, respectivamente, aos focos nas posições $(ae, 0)$ e $(-ae, 0)$, conforme mostrado nas Figuras A.49 e A.50.

Figura A.49 – Diretrizes da elipse



Fonte: Leithold (1994, p. 633)

Figura A.50 – Diretrizes da hipérbole

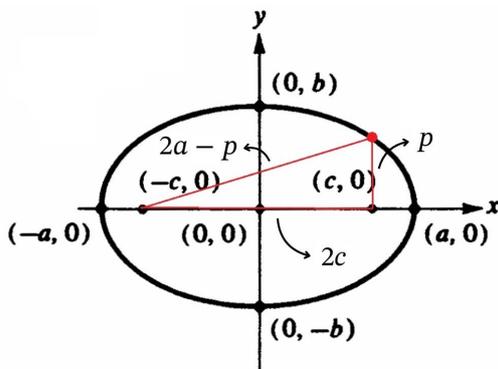


Fonte: Leithold (1994, p. 633)

Além disso, para a elipse e hipérbole, é possível provar que as relações $p = a_e(1 - e^2)$ e $p = a_h(e^2 - 1)$, respectivamente, são válidas. Para a elipse, temos a seguinte demonstração:

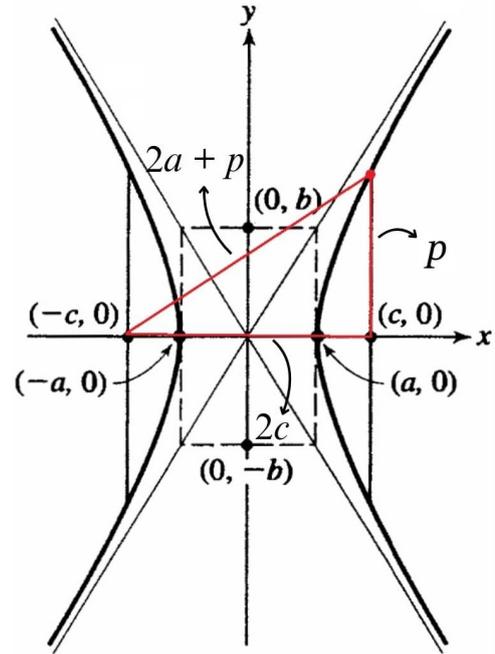
Considere o triângulo retângulo mostrado na Figura A.51. Note que a hipotenusa é calculada pela definição da elipse dada anteriormente ($\overline{PF} + \overline{PF'} = 2a$).

Figura A.51 – Esquemático para demonstração de $p = a(1 - e^2)$ para a elipse



Fonte: Adaptada de Riddle (1982, p. 163)

Figura A.52 – Esquemático para demonstração de $p = a(e^2 - 1)$ para a hipérbole



Fonte: Adaptada de Riddle (1982, p. 175)

Aplicando o teorema de Pitágoras, sabendo que $e = c/a$, temos

$$\begin{aligned} (2a - p)^2 &= p^2 + (2c)^2 \\ 4a^2 - 4ap + p^2 &= p^2 + 4c^2 \\ 4ap &= 4a^2 - 4e^2a^2 \\ p &= a_e(1 - e^2), \end{aligned} \tag{A.4}$$

em que a_e se refere ao semi-eixo maior da elipse.

Para a hipérbole, a demonstração é semelhante, porém, como $|\overline{PF} - \overline{PF'}| = 2a$, a hipotenusa é $2a + p$. Portanto, analogamente, para a hipérbole, temos

$$\begin{aligned} (2a + p)^2 &= p^2 + (2c)^2 \\ p &= a_h(e^2 - 1), \end{aligned} \tag{A.5}$$

em que a_h se refere ao semi-eixo maior da hipérbole.

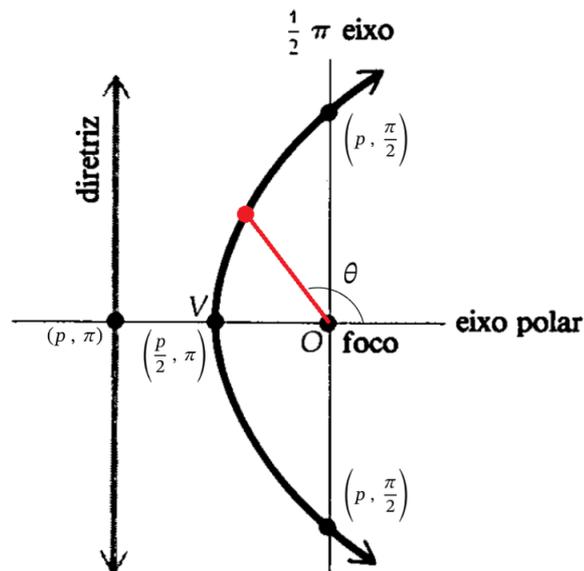
Ademais, pode ser demonstrado que todos os três tipos de cônicas possuem a mesma equação em coordenadas polares (LEITHOLD, 1994). Essa equação é dada por

$$r = \frac{p}{1 \pm e \cos \theta}, \quad (\text{A.6})$$

em que p (*semi-latus rectum*) é metade do valor da corda que passa pelo foco e é paralela à diretriz, e é o valor da excentricidade e θ é o ângulo a partir do foco. Vale mencionar que a equação é válida tanto quando a diretriz está perpendicular, quanto paralela ao eixo polar. O sinal positivo de $\cos \theta$ é considerado quando a diretriz se encontra à direita do foco correspondente (para o caso em que a diretriz é perpendicular ao eixo polar).

Para esclarecer a utilização da Equação (A.6), considere a parábola da Figura A.53. Como a diretriz se encontra à esquerda do foco, é utilizado o sinal negativo de $\cos \theta$, conforme explicado.

Figura A.53 – Parábola em coordenadas polares



Fonte: Adaptada de Leithold (1994, p. 636)

Da equação, sabe-se que para $\theta = \frac{\pi}{2}$, $r(\pi/2)$ é calculado por

$$\begin{aligned} r(\pi/2) &= \frac{p}{1 - \cos(\pi/2)} \\ r(\pi/2) &= p. \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Portanto, para a parábola, o raio medido a partir do foco para o ângulo $\theta = \pi/2$ é igual ao valor do *semi-latus rectum* p . Analogamente, para $\theta = \pi$, o valor $r(\pi) = p/2$ é facilmente calculado pela Equação (A.6).

A.2 Relação entre a energia, momento angular e geometria da órbita

Já foi estabelecido na Seção 2.2.4 que a trajetória de um corpo no problema de dois corpos em coordenadas polares, para $i = 1, 2$, é dada por

$$r_i = \frac{h_i^2 / \bar{\mu}_i}{1 + (B_i / \bar{\mu}_i) \cos f_i}, \quad (\text{A.8})$$

em que h_i é o módulo do momento angular específico, B_i é o módulo do vetor Laplace-Runge-Lenz, f_i é o ângulo que a massa faz com o eixo polar (anomalia verdadeira) e $\bar{\mu}_i$ é calculado por

$$\bar{\mu}_i = \frac{G(M - m_i)^3}{M^2}, \quad \text{para } M = m_1 + m_2. \quad (\text{A.9})$$

Ao comparar a Equação (A.8) com a Equação (A.6), temos

$$e = \frac{B_i}{\bar{\mu}_i} \quad \text{e} \quad (\text{A.10})$$

$$p = \frac{h_i^2}{\bar{\mu}_i}. \quad (\text{A.11})$$

Assim, a geometria da órbita irá depender do fator $e = \frac{B_i}{\bar{\mu}_i}$. Nesta seção será explorada essa relação.

Seja o vetor Laplace-Runge-Lenz para m_i dado por

$$\mathbf{B}_i = \mathbf{v}_i \times \mathbf{h}_i - \bar{\mu}_i \frac{\mathbf{r}_i}{r_i}, \quad (\text{A.12})$$

seu módulo ao quadrado B_i^2 é calculado por

$$\begin{aligned} B_i^2 &= \mathbf{B}_i \cdot \mathbf{B}_i = \left(\mathbf{v}_i \times \mathbf{h}_i - \bar{\mu}_i \frac{\mathbf{r}_i}{r_i} \right) \cdot \left(\mathbf{v}_i \times \mathbf{h}_i - \bar{\mu}_i \frac{\mathbf{r}_i}{r_i} \right) \\ B_i^2 &= |\mathbf{v}_i \times \mathbf{h}_i|^2 + \frac{\bar{\mu}_i^2}{r_i^2} (\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_i) - \frac{2\bar{\mu}_i}{r_i} \mathbf{r}_i \cdot (\mathbf{v}_i \times \mathbf{h}_i). \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Como \mathbf{h}_i é perpendicular a \mathbf{v}_i , $|\mathbf{v}_i \times \mathbf{h}_i| = v_i h_i$. Portanto,

$$B_i^2 = v_i^2 h_i^2 + \bar{\mu}_i^2 - \frac{2\bar{\mu}_i}{r_i} \mathbf{r}_i \cdot (\mathbf{v}_i \times \mathbf{h}_i). \quad (\text{A.14})$$

A partir da definição de $\mathbf{h}_i = \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i$, h_i^2 pode ser calculado por

$$h_i^2 = (\mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i) \cdot \mathbf{h}_i. \quad (\text{A.15})$$

Da propriedade $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$, temos

$$h_i^2 = \mathbf{r}_i \cdot (\mathbf{v}_i \times \mathbf{h}_i). \quad (\text{A.16})$$

Aplicando o resultado da Equação (A.16) na Equação (A.14), temos

$$B_i^2 = v_i^2 h_i^2 + \bar{\mu}_i^2 - \frac{2\bar{\mu}_i}{r_i} h_i^2. \quad (\text{A.17})$$

Da Integral *Vis-Viva*, dada pela Equação (2.19), temos

$$\begin{aligned} \epsilon_i &= \frac{v_i^2}{2} - \frac{\bar{\mu}_i}{r_i} \\ v_i^2 &= 2\epsilon_i + \frac{2\bar{\mu}_i}{r_i}. \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

Substituindo o resultado da Equação (A.18) na Equação (A.17),

$$\begin{aligned} B_i^2 &= 2\epsilon_i h_i^2 + \bar{\mu}_i^2 \\ \frac{B_i^2}{\bar{\mu}_i^2} &= 1 + \frac{2\epsilon_i h_i^2}{\bar{\mu}_i^2}. \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

Da excentricidade, dada pela Equação (A.10),

$$\begin{aligned} e_i^2 &= 1 + \frac{2\epsilon_i h_i^2}{\bar{\mu}_i^2} \\ \epsilon_i &= \frac{\bar{\mu}_i^2}{2h_i^2} (e_i^2 - 1). \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

A partir da Equação (A.20), é possível inferir que a energia mecânica específica ϵ está relacionada à excentricidade e : para uma órbita parabólica ($e = 1$), a energia específica é nula; para uma órbita hiperbólica ($e > 1$), a energia específica é positiva; e para uma órbita elíptica ($0 \leq e < 1$), a energia é negativa. Essas interpretações da Equação (A.20) estão resumidas na Tabela A.3.

Tabela A.3 – Relação entre excentricidade e energia específica

Excentricidade	Energia específica	Geometria da órbita
$0 \leq e < 1$	$\epsilon < 0$	Órbita elíptica
$e = 1$	$\epsilon = 0$	Órbita parabólica
$e > 1$	$\epsilon > 0$	Órbita hiperbólica

Fonte: Elaborada pela autora

Outra derivação interessante relacionada à elipse e à parábola é relacionar o semi-eixo maior a à energia específica ϵ . Assim, das Equações (A.4), (A.11) e (A.20), para a órbita elíptica, temos

$$\begin{aligned}\epsilon_i &= \frac{\bar{\mu}_i^2}{2h_i^2}(e_i^2 - 1) \\ \epsilon_i &= \frac{\bar{\mu}_i}{2p}(e_i^2 - 1) \\ \epsilon_i &= -\frac{\bar{\mu}_i}{2a_e}.\end{aligned}\tag{A.21}$$

Analogamente, para a hipérbole, das Equações (A.5), (A.11) e (A.20), temos

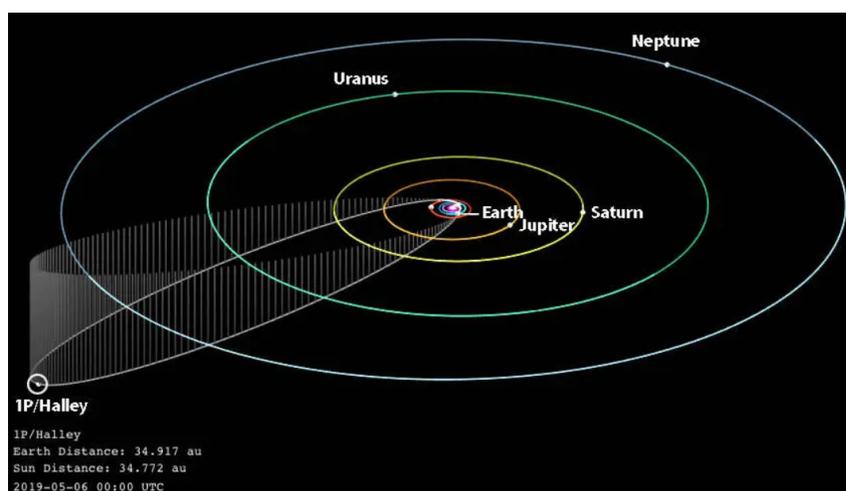
$$\begin{aligned}\epsilon_i &= \frac{\bar{\mu}_i^2}{2h_i^2}(e_i^2 - 1) \\ \epsilon_i &= \frac{\bar{\mu}_i}{2p}(e_i^2 - 1) \\ \epsilon_i &= \frac{\bar{\mu}_i}{2a_h}.\end{aligned}\tag{A.22}$$

Note das Equações (A.21) e (A.22) que a energia específica da órbita elíptica é negativa e da órbita hiperbólica é positiva, conforme esperado. Analisando esses resultados qualitativamente, infere-se da Integral *Vis-Viva* que a energia específica da órbita ser negativa significa que a energia cinética não foi suficiente para superar o potencial gravitacional. Nesse sentido, a energia mínima de escape da influência gravitacional de um corpo massivo está relacionada a uma órbita parabólica ($\epsilon = 0$). Por fim, de forma análoga, quando a energia cinética supera o valor da energia potencial gravitacional (em módulo), a trajetória é hiperbólica ($\epsilon > 0$).

Uma curiosidade interessante relacionada a isso é que, apesar de a trajetória de um objeto lançado balisticamente na superfície da Terra como, por exemplo, uma bola de futebol, ser considerada uma trajetória parabólica, é, na realidade, um arco de elipse, em que um dos focos da elipse se encontra no centro da Terra. Assim, a Terra “intercepta” a trajetória do objeto, impedindo que ele realize a órbita elíptica completa. No entanto, nesses casos, como a distância percorrida é muito pequena e o campo gravitacional é considerado uniforme, a aproximação de trajetória em formato de parábola é ideal para o escopo do problema.

Outro exemplo de órbita elíptica é a órbita do cometa de Halley, ilustrada na Figura A.54, que possui o Sol como um dos focos e excentricidade $e = 0,967$ (WILLIAMS, 2016). Como o cometa possui um período orbital de aproximadamente 76 anos, está, portanto, orbitando o Sol e sua energia específica é negativa.

Figura A.54 – Órbita do cometa de Halley



Fonte: Uri (2021)

Ademais, outras órbitas elípticas notáveis são as órbitas dos planetas do sistema solar. Suas excentricidades, para efeito de comparação, estão organizadas na Tabela A.4.

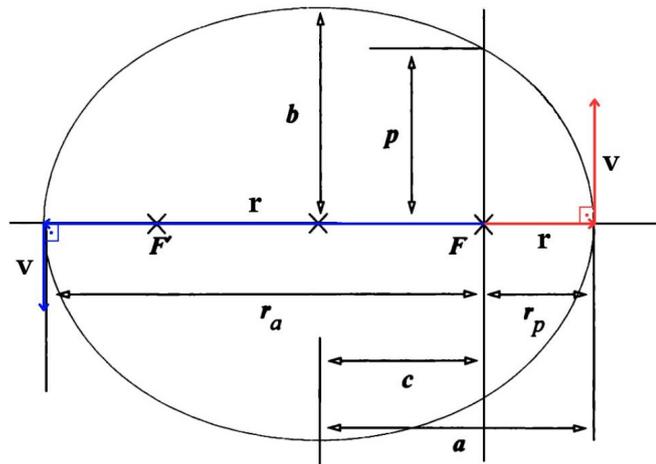
Tabela A.4 – Excentricidade das órbitas dos planetas do sistema solar

Planeta	Excentricidade da órbita
Mercúrio	0,206
Vênus	0,007
Terra	0,017
Marte	0,093
Júpiter	0,048
Saturno	0,056
Urano	0,047
Netuno	0,009

Fonte: Seeds e Backman (2019, A-7)

A análise do formato da órbita em função da energia também é realizada pela interpretação do gráfico $\epsilon(r)$. Considere uma posição \mathbf{r} tal que $h_i = |\mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i| = r_i v_i$. O significado físico da posição que satisfaz essa condição é, para a elipse, o periélio ou afélio e, para a parábola e hipérbole, é a posição dos vértices, uma vez que $|\sin \theta| = 1$. Para exemplificação, o caso da elipse está ilustrada na Figura A.55, em que as posições do afélio e periélio são, respectivamente, definidas por \mathbf{r}_a e \mathbf{r}_p .

Figura A.55 – Vetor posição para o afélio e periélio da elipse



Fonte: Adaptada de McClain e Vallado (2001, p. 15)

Para a Integral *Vis-Viva*, temos

$$\begin{aligned} \epsilon_i &= \frac{v_i^2}{2} - \frac{\bar{\mu}_i}{r_i} \Rightarrow \epsilon_i = \frac{h_i^2}{2r_i^2} - \frac{\bar{\mu}_i}{r_i} \\ \epsilon_i &= \frac{p\bar{\mu}_i}{2r_i^2} - \frac{\bar{\mu}_i}{r_i}. \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

Utilizando unidades normalizadas, considerando $p = 1$ e $\bar{\mu}_i = 1$, para avaliar o comportamento da equação da energia $\epsilon(r)$, temos

$$\epsilon(r) = \frac{1}{2r^2} - \frac{1}{r}. \quad (\text{A.24})$$

Para a parábola, $\epsilon = 0$. Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2r^2} - \frac{1}{r} &= 0 \\ r &= 0,5 \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

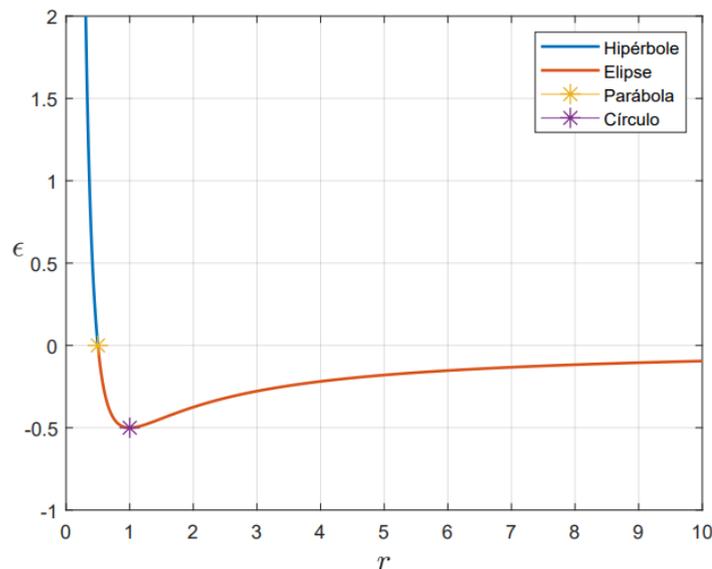
em unidades normalizadas.

Para a elipse, cada nível de energia corresponde à duas posições, afélio e periélio, conforme explicado. No entanto, para o círculo, caso especial da elipse, $r_a = r_p = r$. Assim, r é um valor tal que $\frac{d\epsilon}{dr} = 0$, de forma que existe apenas um valor de r correspondente àquele nível de energia. Portanto,

$$\begin{aligned}\frac{d\epsilon}{dr} &= \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{2r^2} - \frac{1}{r} \right) = 0 \\ -r^{-3} + r^{-2} &= 0 \\ r &= 1\end{aligned}\tag{A.26}$$

para o círculo em unidades normalizadas. Assim, finalmente, o gráfico da Equação (A.24) foi calculado a partir do código que se encontra na Seção C.3 e está ilustrado na Figura A.56.

Figura A.56 – Gráfico da energia específica em função de r



Fonte: Elaborada pela autora

Na figura, de acordo com a legenda, estão diferenciadas as geometrias orbitais (hipérbole, parábola, elipse e círculo) referentes a cada nível de energia. Por sua vez, cada valor de ϵ está associado a um valor de excentricidade, de acordo com a Equação (A.20). Assim, da Equação (A.20), é possível perceber que

- Para a menor excentricidade possível $e = 0$ (órbitas circulares), temos o valor mínimo de energia;
- A energia equivalente a $e \gg 1$ (órbitas hiperbólicas) é alta.

Portanto, o gráfico da Figura A.56 apresenta o comportamento esperado e está de acordo com os resultados da análise da Equação (A.20).

Apêndice B – Rotação de vetores com auxílio de números complexos

Na Seção 3.2.2, foram utilizados números complexos para simplificar o cálculo de rotação de vetores. Por esse motivo, como material adicional, neste apêndice, a propriedade de rotação de números complexos será detalhada.

Seja um vetor posição em \mathbb{R}^2 dado por $\mathbf{v} = (x, y)$, cujo módulo é $v = \sqrt{x^2 + y^2}$. Sua representação análoga, no plano de Argand-Gauss, é dada por $\mathbf{z} = x + iy$, em que i é a unidade imaginária, dado que $i^2 = -1$. Um número complexo na sua representação polar é dada por

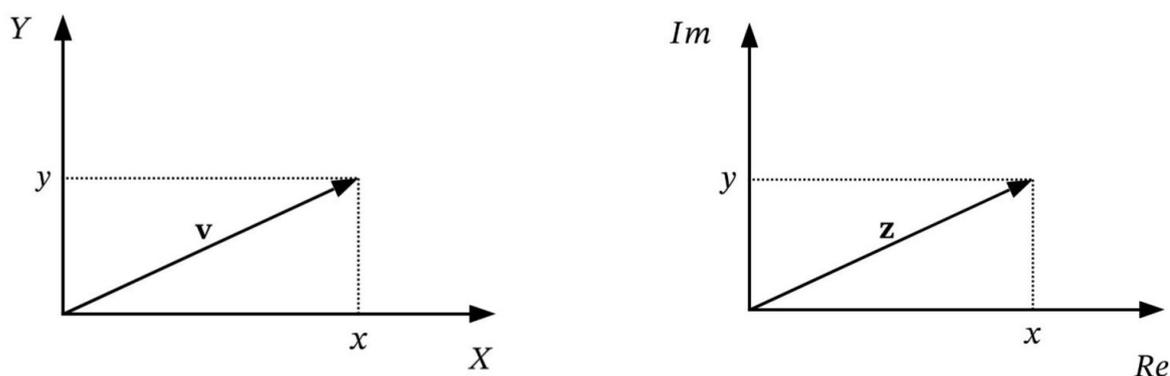
$$\mathbf{z} = x + iy = z(\cos \alpha + i \sin \alpha), \quad (\text{B.1})$$

em que α é o ângulo que \mathbf{z} faz com o eixo real e z é o módulo de \mathbf{z} , conforme mostrado na Figura B.57.

Figura B.57 – Analogia de números complexos para rotação de vetores

(a) Vetor em \mathbb{R}^2

(b) Análogo complexo



Fonte: Elaborada pela autora

Para realizar a rotação de um número complexo em um ângulo θ [rad] no sentido trigonométrico, é necessário multiplicá-lo por $e^{i\theta}$, que em seu formato cartesiano é dado por

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta, \quad (\text{B.2})$$

de acordo com a fórmula de Euler.

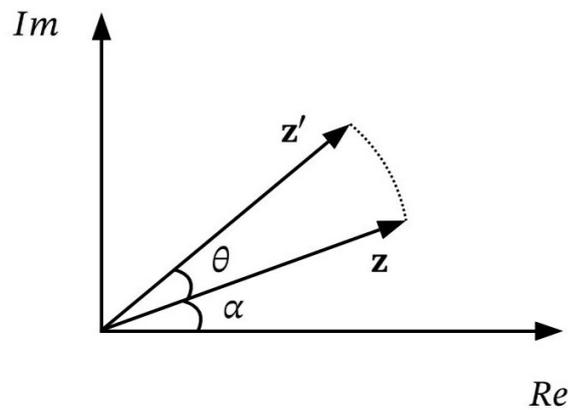
Dessa forma, a partir das Equações (B.1) e (B.2), a representação polar de \mathbf{z} é dada por

$$\mathbf{z} = ze^{i\alpha}. \quad (\text{B.3})$$

Assim, seja \mathbf{z}' o número complexo \mathbf{z} rotacionado em θ no sentido trigonométrico, conforme mostrado na Figura B.58, temos

$$\mathbf{z}' = ze^{i\theta}. \quad (\text{B.4})$$

Figura B.58 – Esquemático da rotação de um número complexo \mathbf{z}



Fonte: Elaborada pela autora

A multiplicação da Equação (B.4) pode ser realizada tanto na representação cartesiana, quanto polar. No caso do cálculo na representação polar, segue a propriedade

$$e^{i\alpha} \cdot e^{i\theta} = e^{i(\alpha+\theta)}. \quad (\text{B.5})$$

Dessa forma, \mathbf{z}' é dado por

$$\begin{aligned} \mathbf{z}' &= ze^{i\alpha} \cdot e^{i\theta} \\ \mathbf{z}' &= ze^{i(\alpha+\theta)}. \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

Em coordenadas cartesianas, podemos realizar a multiplicação como

$$\begin{aligned} \mathbf{z}' &= (x + iy)(\cos \theta + i \sin \theta) \\ \mathbf{z}' &= x \cos \theta - y \sin \theta + i(x \sin \theta + y \cos \theta), \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

em que \mathbf{z}' é o número complexo \mathbf{z} rotacionado em θ [rad] no sentido trigonométrico. Assim, para obter o vetor original em \mathbb{R}^2 rotacionado em θ [rad], é necessário, novamente, utilizar a analogia da Figura B.57. Portanto, temos que o vetor \mathbf{v}' rotacionado é dado por

$$\mathbf{v}' = \begin{bmatrix} x \cos \theta - y \sin \theta \\ x \sin \theta + y \cos \theta \end{bmatrix}. \quad (\text{B.8})$$

É importante notar que esse processo é o mesmo que realizar a multiplicação da matriz de rotação pelo vetor de interesse, em que a matriz de rotação é dada por

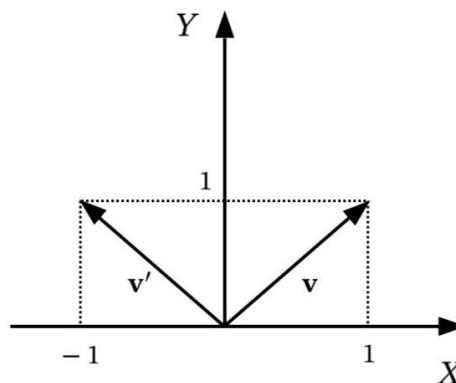
$$\mathbf{M}_R = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}. \quad (\text{B.9})$$

Exemplo: para um vetor $\mathbf{v} = (1,1)$, seu análogo em números complexos é $\mathbf{z} = 1 + i$. Para uma rotação de 90° , temos

$$\begin{aligned} \mathbf{z}' &= (1 + i)e^{i\frac{\pi}{2}} \\ \mathbf{z}' &= (1 + i)(\cos \pi/2 + i \sin \pi/2) = (1 + i)i \\ \mathbf{z}' &= -1 + i. \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

Assim, número complexo $\mathbf{z}' = -1 + i$ equivale a $\mathbf{v}' = (-1,1)$ em \mathbb{R}^2 (Figura B.59).

Figura B.59 – Rotação de \mathbf{v} (exemplo)



Fonte: Elaborada pela autora

Para o caso da solução geométrica proposta por Lagrange para o problema de três corpos, trabalhada na Seção 3.2.2, o vetor a ser rotacionado é o vetor posição relativa \mathbf{s}_3 , que não é um vetor constante. Assim, as soluções foram deixadas em seu formato complexo em coordenadas cartesianas, com a multiplicação pendente. No entanto, é importante ressaltar que esse formato de solução por complexos é apenas uma ferramenta proposta pela bibliografia de Hestenes (2002) e ainda seria necessário realizar o produto indicado pelas Equações (3.41) a (3.43) e retornar essa solução para \mathbb{R}^2 , conforme o procedimento descrito neste apêndice. Assim, após realizadas as multiplicações, o significado físico da parte imaginária torna-se, de fato, o valor da coordenada y do problema, de acordo com a analogia apresentada na Figura B.57.

Nesse sentido, outra solução proposta, sem a utilização da analogia por números complexos seria a multiplicação do vetor posição relativa \mathbf{s}_3 pelas matrizes de rotação equivalentes à rotação de $\frac{2\pi}{3}$ [rad] e $\frac{-2\pi}{3}$ [rad]. Assim, alternativamente

$$\begin{aligned}\mathbf{s}_1 &= \begin{bmatrix} \cos 2\pi/3 & -\sin 2\pi/3 \\ \sin 2\pi/3 & \cos 2\pi/3 \end{bmatrix} \mathbf{s}_3 \\ \mathbf{s}_1 &= \begin{bmatrix} -0,5 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -0,5 \end{bmatrix} \mathbf{s}_3\end{aligned}\tag{B.11}$$

e

$$\begin{aligned}\mathbf{s}_2 &= \begin{bmatrix} \cos(-2\pi/3) & -\sin(-2\pi/3) \\ \sin(-2\pi/3) & \cos(-2\pi/3) \end{bmatrix} \mathbf{s}_3 \\ \mathbf{s}_2 &= \begin{bmatrix} -0,5 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & -0,5 \end{bmatrix} \mathbf{s}_3.\end{aligned}\tag{B.12}$$

Apêndice C – Códigos MATLAB

C.1 Códigos referentes ao Capítulo 5

No Capítulo 5, foi utilizado o *script* `lagrange_points.m` para o cálculo dos pontos de Lagrange, cálculo das constantes de Jacobi referentes a eles e *plot* dos pontos, juntamente com os corpos primários. Esse *script* possui códigos auxiliares que são:

1. `initial_data.m`: utilizado para inserir os dados iniciais do problema;
2. `JacobiConstant.m`: função que calcula o valor da constante de Jacobi a partir de μ ;
3. `lagrange_points_plot.m`: código utilizado para o *plot* da Figura 5.32 (referente ao sistema Terra-Lua).

Para utilização do código, é necessário apenas configurar o valor de μ no *script* `initial_data.m` e executar o código principal `lagrange_points.m`. Além disso, caso o sistema de interesse não seja o sistema Terra-Lua, ainda é necessário modificar as legendas no código `lagrange_plot_plot.m`, adicionando os nomes dos corpos do problema estudado.

C.1.1 Código principal para o cálculo dos pontos de Lagrange e constantes de Jacobi

```

1 %lagrange_points.m
2
3 initial_data
4
5 syms xi
6
7 % region 1
8 region1=omega_sqr*d*xi-(M1/(xi+xi1)^2)+(M2/(xi-xi2)^2)==0;
9
10 L1=vpasolve(region1,xi);
11 L1=real(L1(imag(L1) == 0));
12
13
14 % region 2
15 region2=omega_sqr*d*xi-(M1/(xi+xi1)^2)-(M2/(xi-xi2)^2)==0;
16
17 L2=vpasolve(region2,xi);
18 L2=real(L2(imag(L2) == 0));
19

```

```

20
21 % region 3
22 region3=omega_sqr*d*xi-(M1/(xi-xi1)^2)-(M2/(xi+xi2)^2)==0;
23
24 L3=vpasolve(region3,xi);
25 L3=real(L3(imag(L3)==0));
26
27 % m1, m2 positions
28 coord_m1=[-mu,0];
29 coord_m2=[1-mu,0];
30
31 % coord Lagrange points
32 coord_L1=[L1,0]
33 coord_L2=[L2,0]
34 coord_L3=[-L3,0]
35 coord_L4=[0.5*(coord_m2(1)+coord_m1(1)),(xi2+xi1)*sqrt(3)/2]
36 coord_L5=[0.5*(coord_m2(1)+coord_m1(1)),-(xi2+xi1)*sqrt(3)/2]
37
38 % Jacobi constants
39 C1=JacobiConstant(mu,0,omega_sqr*d,coord_m1,coord_m2,coord_L1)
40 C2=JacobiConstant(mu,0,omega_sqr*d,coord_m1,coord_m2,coord_L2)
41 C3=JacobiConstant(mu,0,omega_sqr*d,coord_m1,coord_m2,coord_L3)
42 C4=JacobiConstant(mu,0,omega_sqr*d,coord_m1,coord_m2,coord_L4)
43 C5=JacobiConstant(mu,0,omega_sqr*d,coord_m1,coord_m2,coord_L5)
44
45 % Lagrange points and m1, m2 plot
46 lagrange_points_plot

```

C.1.2 Dados iniciais para cálculo dos pontos de Lagrange

```

1 % initial_data.m
2
3 % constants
4 G=1; % em unidades normalizadas
5
6 % input
7 m2=0.01215; % em unidades normalizadas
8 m1=1-m2; % em unidades normalizadas
9
10 xi1=m2; %em módulo (unidades normalizadas)
11 xi2=1-m2; %em módulo (unidades normalizadas)
12
13 % calculations
14 M1=G*m1;
15 M2=G*m2;
16 omega_sqr*d=(M1+M2)/(xi1+xi2)^3;
17
18 mu=m2/(m1+m2);

```

C.1.3 Função para cálculo da constante de Jacobi

```

1 % JacobiConstant.m
2
3 function C=JacobiConstant(mu, v, omega_sqrd,
4     coord_m1, coord_m2, coord_m3)
5 rho1=norm(coord_m3-coord_m1);
6 rho2=norm(coord_m3-coord_m2);
7
8 U=((1-mu)/rho1)+(mu/rho2)+0.5*omega_sqrd*sum(coord_m3.^2);
9
10 C=2*U-v^2;

```

C.1.4 Plot dos pontos de Lagrange para o sistema Terra-Lua

```

1 %lagrange_points_plot
2
3 figure;
4 grid on; hold on
5
6 % Lagrange points plot
7 plot(coord_L1(1), coord_L1(2), 'x')
8 plot(coord_L2(1), coord_L2(2), 'x')
9 plot(coord_L3(1), coord_L3(2), 'x')
10 plot(coord_L4(1), coord_L4(2), 'x')
11 plot(coord_L5(1), coord_L5(2), 'x')
12
13 % m1 and m2 plot
14 plot(coord_m1(1), coord_m1(2), 'o', 'MarkerEdgeColor', '[0.4 0.6
15     1]', 'MarkerFaceColor', '[0.4 0.6 1]', 'MarkerSize', 10)
16 plot(coord_m2(1), coord_m2(2), 'o', 'MarkerEdgeColor', '[0.7 0.7
17     0.7]', 'MarkerFaceColor', '[0.7 0.7 0.7]')
18
19 hold off
20
21 xlabel('\xi')
22 ylabel('\eta', 'Rotation', 0)
23
24 % Define the offset
25 offset = 0.02; % offset
26
27 % Add text labels with offsets
28 text(coord_L1(1) + offset, coord_L1(2) - offset, 'L1',
29     'FontAngle', 'italic', 'HorizontalAlignment', 'left',
30     'VerticalAlignment', 'top');

```

```

27 text(coord_L2(1) + offset, coord_L2(2) - offset, 'L2',
    'FontAngle', 'italic', 'HorizontalAlignment', 'left',
    'VerticalAlignment', 'top');
28 text(coord_L3(1) + offset, coord_L3(2) - offset, 'L3',
    'FontAngle', 'italic', 'HorizontalAlignment', 'left',
    'VerticalAlignment', 'top');
29 text(coord_L4(1) + offset, coord_L4(2) - offset, 'L4',
    'FontAngle', 'italic', 'HorizontalAlignment', 'left',
    'VerticalAlignment', 'top');
30 text(coord_L5(1) + offset, coord_L5(2) - offset, 'L5',
    'FontAngle', 'italic', 'HorizontalAlignment', 'left',
    'VerticalAlignment', 'top');
31
32 text(coord_m1(1) + offset, coord_m1(2) - offset, 'Terra',
    'HorizontalAlignment', 'left', 'VerticalAlignment', 'top');
33 text(coord_m2(1) + offset, coord_m2(2) - offset, 'Lua',
    'HorizontalAlignment', 'left', 'VerticalAlignment', 'top');
34
35 % Plot adjustments
36 title('Pontos de Lagrange no PCR3C');
37 xlim([-1.2 1.4])
38 xticks(-1.2:0.2:1.4)
39 axis equal;

```

C.2 Códigos referentes ao Capítulo 6

Os códigos MATLAB do Capítulo 6 foram escritos para a análise da estabilidade dos pontos de Lagrange $L1$, $L2$ e $L3$ no plano orbital. O principal deles, `alpha_colin.m`, possui outros dois códigos auxiliares, `calc_pts_colin.m` e `plot_alpha_colin.m`, cujos papéis são:

1. `calc_pts_colin.m`: realizar o cálculo dos valores de α a partir das posições dos pontos de Lagrange $L1$, $L2$ e $L3$ para $0 < \mu < 0,5$;
2. `plot_alpha_colin.m`: gerar o *plot* dos valores de α , diferenciando as curvas relacionadas aos pontos $L1$, $L2$ e $L3$.

Note que não é necessário modificar os códigos, uma vez que estão sendo calculados todos os valores possíveis de α . Assim, basta analisar o resultado da Figura 6.36. Para gerar a figura, basta executar o código `alpha_colin.m`.

Além disso, ainda na Seção 6.3.2, foi utilizado o *script* `f1_f2_plot.m` para verificar os sinais da função $f(\alpha) = -(2 - \alpha) \pm \sqrt{9\alpha^2 - 8\alpha}$ por meio da produção da Figura 6.37. Analogamente, não é necessária nenhuma modificação adicional do código, visto que a figura é referente a uma análise pontual da função em questão.

C.2.1 Código principal para o cálculo de α em função de μ para os pontos colineares de Lagrange

```

1 %alpha_colin.m
2
3 i=0;
4 inc=0.01215/10;
5
6 for mu=0:inc:0.5
7     i=i+1;
8     xi1=-mu;
9     xi2=1-mu;
10    L_colin=calc_pts_colin(mu);
11    rho1=abs(L_colin-xi1); rho2=abs(L_colin-xi2);
12    alpha(i,:)=[mu ((1-mu)./(rho1.^3))+(mu./rho2.^3)];
13 end
14
15 plot_alpha_colin

```

C.2.2 Função para cálculo dos valores de $\alpha(\mu)$

```

1 %calc_pts_colin
2
3 function [L_colin]=calc_pts_colin(m2)
4 syms xi
5
6 % constants
7 G=1;
8
9 % input
10 m1=1-m2;
11
12 xi1=m2;
13 xi2=1-m2;
14
15 % calculations
16 M1=G*m1;
17 M2=G*m2;
18 omega_sqrd=(M1+M2)/(xi1+xi2)^3;
19
20 mu=m2/(m1+m2);
21
22 % region 1
23 region1=omega_sqrd*xi-(M1/(xi+xi1)^2)+(M2/(xi-xi2)^2)==0;
24
25 L1=vpasolve(region1,xi);
26 L1=real(L1(imag(L1) == 0));

```

```

27
28 % region 2
29 region2=omega_sqrd*xi-(M1/(xi+xi1)^2)-(M2/(xi-xi2)^2)==0;
30
31 L2=vpasolve(region2,xi);
32 L2=real(L2(imag(L2) == 0));
33
34 % region 3
35 region3=omega_sqrd*xi-(M1/(xi-xi1)^2)-(M2/(xi+xi2)^2)==0;
36
37 L3=vpasolve(region3,xi);
38 L3=real(L3(imag(L3) == 0));
39
40 % m1, m2 positions
41 coord_m1=[-mu,0];
42 coord_m2=[1-mu,0];
43
44 % coord Lagrange points
45 coord_L1=[L1,0];
46 coord_L2=[L2,0];
47 coord_L3=[-L3,0];
48
49 L_colin=[coord_L1(1),coord_L2(1),coord_L3(1)];

```

C.2.3 Plot de $\alpha(\mu)$ para os pontos colineares de Lagrange

```

1 % plot_alpha_colin
2
3 figure(1);
4 hold on
5 plot(alpha(:,1), alpha(:,2), 'LineWidth',1.5)
6 plot(alpha(:,1), alpha(:,3), '--', 'LineWidth',1.5)
7 plot(alpha(:,1), alpha(:,4), ':', 'LineWidth',1.5)
8 hold off
9 legend('\alpha_{L1}', '\alpha_{L2}', '\alpha_{L3}', 'Location',
10        'northeast');
11 lgd=legend;
12 lgd_pos=lgd.Position;
13 lgd.Position=[lgd_pos(1),lgd_pos(2)-0.03,lgd_pos(3),lgd_pos(4)];
14 xlabel('\mu')
15 ylabel('\alpha', 'Rotation',0)
16 grid on
17
18 figure(2)
19 hold on
20 plot(alpha(:,1), log10(alpha(:,2)), 'LineWidth',1.5)
21 plot(alpha(:,1), log10(alpha(:,3)), '--', 'LineWidth',1.5)
22 plot(alpha(:,1), log10(alpha(:,4)), ':', 'LineWidth',1.5)
23 hold off

```

```

23 legend('log_{10}\alpha_{L1}', 'log_{10}\alpha_{L2}',
        'log_{10}\alpha_{L3}', 'Location', 'northeast');
24 lgd=legend;
25 lgd_pos=lgd.Position;
26 lgd.Position=[lgd_pos(1),lgd_pos(2)-0.05,lgd_pos(3),lgd_pos(4)];
27 xlabel('\mu')
28 ylabel('log_{10}\alpha','Rotation',0)
29 grid on

```

C.2.4 Plot para a análise de $f(\alpha)$

```

1 %f1_f2_plot
2
3 alpha_int=1:0.01:8;
4 f1=-2+alpha_int+sqrt(9*alpha_int.^2-8*alpha_int);
5 f2=-2+alpha_int-sqrt(9*alpha_int.^2-8*alpha_int);
6
7 figure(1)
8 hold on
9 plot(alpha_int, f1,'LineWidth',1.5)
10 plot(alpha_int, f2, '--','LineWidth',1.5)
11 hold off
12
13 legend('f_1(\alpha)', 'f_2(\alpha)', 'Location', 'northwest');
14 xlabel('\alpha')
15 ylabel('f(\alpha)','Rotation',0)
16 grid on

```

C.3 Código MATLAB referente ao Apêndice C

O código MATLAB referente ao Apêndice A foi escrito para a produção da Figura A.56. Não é necessário modificar o código. Para gerar a figura, basta executar o código `specific_energy.m`.

```

1 % specific_energy.m
2
3 % Constantes normalizadas
4 p=1; %semi-latus rectum
5
6 % Calculo do r para a parabola (epsilon=0)
7 rp=p/2;
8
9 % Hiperbole (epsilon>0)
10 % Criando o vetor r

```

```
11 r1 = linspace(0.1,rp,2000);
12 % Calculo da energia especifica
13 epsilon1 = -1./r1 + p./(2*r1.^2);
14
15 % Elipse (epsilon<0)
16 % Criando o vetor r
17 r2 = linspace(rp,10,2000);
18 % Calculo da energia especifica
19 epsilon2 = -1./r2 + p./(2*r2.^2);
20
21 % Parábola (epsilon=0)
22 r3=rp;
23 epsilon3=0;
24
25 % Circulo (epsilon=min)
26 r4=p;
27 epsilon4=-p/2;
28
29 % Plot
30 figure;
31 plot(r1, epsilon1, 'LineWidth', 1.5); %hiperbole
32 hold on;
33 plot(r2, epsilon2, 'LineWidth', 1.5); %elipse
34 hold on;
35 plot(r3, epsilon3, '-*', 'MarkerSize', 10); %parabola
36 hold on;
37 plot(r4, epsilon4, '-*', 'MarkerSize', 10); %circulo
38 hold on;
39 legend('Hipérbole', 'Elipse', 'Parábola', 'Círculo', 'Location',
        'northeast');
40
41 xlabel('$r$', 'fontsize', 16, 'Interpreter', 'latex')
42 ylabel('\epsilon', 'Rotation', 0, 'fontsize', 16);
43 grid on;
44 xlim([0 10]);
45 ylim([-1 2]);
```

Anexos

Anexo A – Códigos MATLAB para o problema de dois corpos

Os códigos mostrados foram retirados da bibliografia Curtis (2015) para gerar as Figuras 2.9 e 2.10.

```

1 % ~~~~~
2 function [tout, yout] = rkf45(ode_function, tspan, y0, tolerance)
3 % ~~~~~
4 %{
5 This function uses the Runge-Kutta-Fehlberg 4(5) algorithm to
6 integrate a system of first-order differential equations
7  $dy/dt = f(t,y)$ .
8
9 y          - column vector of solutions
10 f          - column vector of the derivatives  $dy/dt$ 
11 t          - time
12 a          - Fehlberg coefficients for locating the six
13             solution
14             points (nodes) within each time interval.
15 b          - Fehlberg coupling coefficients for computing the
16             derivatives at each interior point
17 c4         - Fehlberg coefficients for the fourth-order
18             solution
19 c5         - Fehlberg coefficients for the fifth-order
20             solution
21 tol        - allowable truncation error
22 ode_function - handle for user M-function in which the
23             derivatives f
24             are computed
25 tspan      - the vector [t0 tf] giving the time interval for
26             the
27             solution
28 t0         - initial time
29 tf         - final time
30 y0        - column vector of initial values of the vector y
31 tout      - column vector of times at which y was evaluated
32 yout      - a matrix, each row of which contains the
33             components of y
34             evaluated at the corresponding time in tout
35 h         - time step
36 hmin      - minimum allowable time step
37 ti        - time at the beginning of a time step
38 yi        - values of y at the beginning of a time step
39 t_inner   - time within a given time step

```

```

34 y_inner      - values of y within a given time step
35 te          - truncation error for each y at a given time step
36 te_allowed  - allowable truncation error
37 te_max      - maximum absolute value of the components of te
38 ymax       - maximum absolute value of the components of y
39 tol        - relative tolerance
40 delta      - fractional change in step size
41 eps        - unit roundoff error (the smallest number for
              which
42              1 + eps > 1)
43 eps(x)     - the smallest number such that x + eps(x) = x
44
45 User M-function required: ode_function
46 %}
47 % -----
48
49 a = [0 1/4 3/8 12/13 1 1/2];
50
51 b = [ 0 0 0 0 0
52      1/4 0 0 0 0
53      3/32 9/32 0 0 0
54      1932/2197 -7200/2197 7296/2197 0 0
55      439/216 -8 3680/513 -845/4104 0
56      -8/27 2 -3544/2565 1859/4104 -11/40];
57
58 c4 = [25/216 0 1408/2565 2197/4104 -1/5 0 ];
59 c5 = [16/135 0 6656/12825 28561/56430 -9/50 2/55];
60
61 if nargin < 4
62     tol = 1.e-8;
63 else
64     tol = tolerance;
65 end
66
67 t0 = tspan(1);
68 tf = tspan(2);
69 t = t0;
70 y = y0;
71 tout = t;
72 yout = y';
73 h = (tf - t0)/100; % Assumed initial time step.
74
75 while t < tf
76     hmin = 16*eps(t);
77     ti = t;
78     yi = y;
79     %...Evaluate the time derivative(s) at six points within the
80     % interval:
81     for i = 1:6
82         t_inner = ti + a(i)*h;
83         y_inner = yi;

```

```

84     for j = 1:i-1
85         y_inner = y_inner + h*b(i,j)*f(:,j);
86     end
87     f(:,i) = feval(ode_function, t_inner, y_inner);
88 end
89
90 %...Compute the maximum truncation error:
91 te      = h*f*(c4' - c5'); % Difference between 4th and
92                                % 5th order solutions
93 te_max = max(abs(te));
94
95 %...Compute the allowable truncation error:
96 ymax   = max(abs(y));
97 te_allowed = tol*max(ymax,1.0);
98
99 %...Compute the fractional change in step size:
100 delta = (te_allowed/(te_max + eps))^(1/5);
101
102 %...If the truncation error is in bounds, then update the
103     solution:
104     if te_max <= te_allowed
105         h      = min(h, tf-t);
106         t      = t + h;
107         y      = yi + h*f*c5';
108         tout   = [tout;t];
109         yout   = [yout;y'];
110     end
111
112 %...Update the time step:
113 h = min(delta*h, 4*h);
114 if h < hmin
115     fprintf(['\n\n Warning: Step size fell below its
116             minimum\n'...
117             ' allowable value (%g) at time %g.\n\n'], hmin, t)
118     return
119 end
120 end
121 % ~~~~~

```

```

1 % ~~~~~
2 function twobody3d_edit
3 % ~~~~~
4 %{
5     This function solves the inertial two-body problem in three
6     dimensions
7     numerically using the RKF4(5) method.
8
9     G          - universal gravitational constant (km^3/kg/s^2)
10    m1,m2       - the masses of the two bodies (kg)
11    m           - the total mass (kg)

```

```

11  t0          - initial time (s)
12  tf          - final time (s)
13  R1_0,V1_0  - 3 by 1 column vectors containing the components
              of the
14              initial position (km) and velocity (km/s) of m1
15  R2_0,V2_0  - 3 by 1 column vectors containing the components
              of the
16              initial position (km) and velocity (km/s) of m2
17  y0         - 12 by 1 column vector containing the initial
              values
18              of the state vectors of the two bodies:
19              [R1_0; R2_0; V1_0; V2_0]
20  t          - column vector of the times at which the solution
              is found
21  X1,Y1,Z1   - column vectors containing the X,Y and Z
              coordinates (km)
22              of m1 at the times in t
23  X2,Y2,Z2   - column vectors containing the X,Y and Z
              coordinates (km)
24              of m2 at the times in t
25  VX1, VY1, VZ1 - column vectors containing the X,Y and Z
              components
26              of the velocity (km/s) of m1 at the times in t
27  VX2, VY2, VZ2 - column vectors containing the X,Y and Z
              components
28              of the velocity (km/s) of m2 at the times in t
29  y          - a matrix whose 12 columns are, respectively,
30              X1,Y1,Z1; X2,Y2,Z2; VX1,VY1,VZ1; VX2,VY2,VZ2
31  XG,YG,ZG   - column vectors containing the X,Y and Z
              coordinates (km)
32              the center of mass at the times in t
33
34  User M-function required:  rkf45
35  User subfunctions required: rates, output
36  %}
37  % -----
38  clc; clear all; close all
39  G = 6.67259e-20;
40
41  %...Input data:
42  m1 = 1.e26;
43  m2 = 1.e26;
44  t0 = 0;
45  tf = 480;
46
47  R1_0 = [ 0; 0; 0];
48  R2_0 = [3000; 0; 0];
49
50  V1_0 = [ 10; 20; 30];
51  V2_0 = [ 0; 40; 0];
52  %...End input data
53

```

```

54 y0 = [R1_0; R2_0; V1_0; V2_0];
55
56 %...Integrate the equations of motion:
57 [t,y] = rkf45(@rates, [t0 tf], y0);
58
59 %...Output the results:
60 output
61
62 return
63
64 % ~~~~~~
65 function dydt = rates(t,y)
66 % ~~~~~~
67 %{
68     This function calculates the accelerations in Equations 2.19
69
70     t        - time
71     y        - column vector containing the position and velocity
72               vectors
73               of the system at time t
74     R1, R2   - position vectors of m1 & m2
75     V1, V2   - velocity vectors of m1 & m2
76     r        - magnitude of the relative position vector
77     A1, A2   - acceleration vectors of m1 & m2
78     dydt     - column vector containing the velocity and acceleration
79               vectors of the system at time t
80 %}
81 % -----
82 R1 = [y(1); y(2); y(3)];
83 R2 = [y(4); y(5); y(6)];
84
85 V1 = [y(7); y(8); y(9)];
86 V2 = [y(10); y(11); y(12)];
87
88 r = norm(R2 - R1);
89
90 A1 = G*m2*(R2 - R1)/r^3;
91 A2 = G*m1*(R1 - R2)/r^3;
92
93 dydt = [V1; V2; A1; A2];
94
95 end %rates
96 % ~~~~~~
97 % ~~~~~~
98 function output
99 % ~~~~~~
100 %{
101     This function calculates the trajectory of the center of mass and
102     plots
103     (a) the motion of m1, m2 and G relative to the inertial frame
104     (b) the motion of m2 and G relative to m1

```

```

105 (c) the motion of m1 and m2 relative to G
106
107 User sub function required: common_axis_settings
108 %}
109 % -----
110
111 %...Extract the particle trajectories:
112 X1 = y(:,1); Y1 = y(:,2); Z1 = y(:,3);
113 X2 = y(:,4); Y2 = y(:,5); Z2 = y(:,6);
114
115 %...Locate the center of mass at each time step:
116 XG = []; YG = []; ZG = [];
117 for i = 1:length(t)
118     XG = [XG; (m1*X1(i) + m2*X2(i))/(m1 + m2)];
119     YG = [YG; (m1*Y1(i) + m2*Y2(i))/(m1 + m2)];
120     ZG = [ZG; (m1*Z1(i) + m2*Z2(i))/(m1 + m2)];
121 end
122
123 %...Plot the trajectories:
124 figure (1)
125 %title('Figure 2.3: Motion relative to the inertial frame')
126 hold on
127 plot3(X1, Y1, Z1, '-r')
128 plot3(X2, Y2, Z2, '-g')
129 plot3(XG, YG, ZG, '-b')
130
131
132 comet3(X1, Y1, Z1);
133 comet3(X2, Y2, Z2);
134
135
136 text(X1(1), Y1(1), Z1(1), '1', 'color', 'r')
137 text(X2(1), Y2(1), Z2(1), '2', 'color', 'g')
138 text(XG(1), YG(1), ZG(1), 'G', 'color', 'b')
139
140 common_axis_settings
141
142 figure (2)
143 title('Figure 2.4a: Motion of m2 and G relative to m1')
144 hold on
145 plot3(X2 - X1, Y2 - Y1, Z2 - Z1, '-g')
146 plot3(XG - X1, YG - Y1, ZG - Z1, '-b')
147
148
149 text(X2(1)-X1(1), Y2(1)-Y1(1), Z2(1)-Z1(1), '2', 'color', 'g')
150 text(XG(1)-X1(1), YG(1)-Y1(1), ZG(1)-Z1(1), 'G', 'color', 'b')
151
152 common_axis_settings
153
154 figure (3)
155 %title('Figure 2.4b: Motion of m1 and m2 relative to G')
156 hold on

```

```
157 plot3(X1 - XG, Y1 - YG, Z1 - ZG, '-r')
158 plot3(X2 - XG, Y2 - YG, Z2 - ZG, '-g')
159
160 text(X1(1)-XG(1), Y1(1)-YG(1), Z1(1)-ZG(1), '1', 'color', 'r')
161 text(X2(1)-XG(1), Y2(1)-YG(1), Z2(1)-ZG(1), '1', 'color', 'g')
162
163 common_axis_settings
164
165 % ~~~~~~
166 function common_axis_settings
167 % ~~~~~~
168 %{
169     This function establishes axis properties common to the several
170     plots
171 %}
172 % -----
173 text(0, 0, 0, 'o')
174 axis('equal')
175 view([2,4,1.2])
176 grid on
177 axis equal
178 xlabel('X (km)')
179 ylabel('Y (km)')
180 zlabel('Z (km)')
181 end %common_axis_settings
182
183 end %output
184 end %twobody3d
185 % ~~~~~~
```