



PROJETO DE GRADUAÇÃO 2

**ESCOAMENTO DE POISEUILLE E COUETTE  
EM UM CANAL SEMIELÍPTICO**

**Henrique Carvalho Ferreira**

**Brasília, Novembro de 2021**

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA**

FACULDADE DE TECNOLOGIA

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
Faculdade de Tecnologia  
Departamento de Engenharia Mecânica

PROJETO DE GRADUAÇÃO 2  
**ESCOAMENTO DE POISEUILLE E COUETTE  
EM UM CANAL SEMIELÍPTICO**

**Henrique Carvalho Ferreira**

*Projeto de Graduação 2 submetido ao Departamento de Engenharia  
Mecânica como requisito parcial para obtenção  
do grau de Engenheiro Mecânico*

Banca Examinadora

Prof. André von Borries Lopes, Ph.D, FT/UnB  
*Orientador*

\_\_\_\_\_

Prof. Edgar Amaral Silveira, Ph.D, FT/UnB  
*Examinador Interno*

\_\_\_\_\_

Prof. Rafael Gabler Gontijo, Ph.D, FT/UnB  
*Examinador Interno*

\_\_\_\_\_

Ivan Rosa de Siqueira, M.Sc., Rice University  
*Examinador Externo*

\_\_\_\_\_

## FICHA CATALOGRÁFICA

FERREIRA, HENRIQUE

ESCOAMENTO DE POISEUILLE E COUETTE EM UM CANAL SEMIELÍPTICO [Distrito Federal] 2021.

xvi, 78 p., 210 x 297 mm (ENM/FT/UnB, Engenheiro, Engenharia Mecânica, 2021).

Projeto de Graduação 2 - Universidade de Brasília, Faculdade de Tecnologia.

Departamento de Engenharia Mecânica

- |                             |                                  |
|-----------------------------|----------------------------------|
| 1. escoamento de Couette    | 2. Método das diferenças finitas |
| 3. escoamento de Poiseuille | 4. Método de Fourier             |
| I. ENM/FT/UnB               | II. Título (série)               |

## REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

FERREIRA, H.C. (2021). *ESCOAMENTO DE POISEUILLE E COUETTE EM UM CANAL SEMIELÍPTICO*. Projeto de Graduação 2, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 78 p.

## CESSÃO DE DIREITOS

AUTOR: Henrique Carvalho Ferreira

TÍTULO: ESCOAMENTO DE POISEUILLE E COUETTE EM UM CANAL SEMIELÍPTICO.

GRAU: Engenheiro Mecânico ANO: 2021

É concedida à Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias deste Projeto Final de Graduação e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte desse Projeto Final de Graduação pode ser reproduzida sem autorização por escrito do autor.

---

Henrique Carvalho Ferreira

Depto. de Engenharia Mecânica (ENM) - FT

Universidade de Brasília (UnB)

Campus Darcy Ribeiro

CEP 70919-970 - Brasília - DF - Brasil

## **Agradecimentos**

Primeiramente, gostaria de agradecer a oportunidade que me foi dada de poder trabalhar num assunto o qual sempre tive receio e medo. É possível dizer, inclusive, que consegui vencê-los e perceber que a vida é mais simples do que aquela que você pensa. Estendo meus agradecimentos a meus familiares sobretudo a meus pais, João Henrique e Regina que sempre me apoiaram e me incentivaram para seguir e concluir mais essa caminhada. Agradeço, também, as minhas irmãs, Isabela e Ana Luísa por serem a base de sustentação dos meus objetivos. Deixo meu longo agradecimento a minha eterna namorada Gabriela por ter a paciência e amor necessários para enfrentar mais esta etapa.

Gostaria, também, de deixar uma mensagem de gratidão as pessoas da Universidade de Brasília que me fizeram ser um estudante melhor como meu querido orientador/professor/amigo, André Lopes. Agradeço, também, aos meus amigos engenheiros de caminhada que sempre estiveram comigo ao longo destes anos de altos e baixos, Luís e Felipe.

Ademais, gostaria de demonstrar minha gratidão a Deus e sobretudo a oportunidade que me foi dada de poder presenciar o que me foi aprendido e executado.

Com amor, *Henrique Carvalho Ferreira.*

---

## RESUMO

Aplicações referentes às modelagens de escoamentos podem ser encontradas em diversas indústrias mecânicas, pesquisas acadêmicas e implementações computacionais. Além disso, a capacidade de otimização de novos sistemas, o retrofit de sistemas existentes e a descoberta de novas aplicações permeiam a necessidade e a busca de estudos pautados na mecânica dos fluidos. Nesta direção, este projeto se propõe a exibir e averiguar um desfecho clássico da fluidodinâmica para escoamentos em canais de seção transversal semielíptica. Usando as equações de Navier-Stokes e as hipóteses restritivas de incompressibilidade, bidimensionalidade, unidirecionalidade e considerando um escoamento de *Poiseuille* que seja laminar e completamente desenvolvido, a modelagem utiliza do método de Fourier e por uma descrição em coordenadas elípticas para resolver analiticamente a problemática. Em conjuntura com as ideias apresentadas, se faz, também, um estudo com o Método das Diferenças Finitas para validar a solução analítica obtida. Além disso, propõe-se, também, uma nova solução analítica na literatura para o caso de um escoamento de *Couette* em uma seção semielíptica.

---

## ABSTRACT

Applications related to flow modeling can be found in several mechanical industries, academic research, and computational implementations. In addition, the ability to optimize new systems, retrofit existing systems, and discover new applications permeate the need and search for studies based on fluid mechanics. In this direction, this project aims to exhibit and ascertain a classic outcome of fluid dynamics for flows in channels of semi-elliptical cross-section. Using the Navier-Stokes equations and the restrictive hypotheses of incompressibility, two-dimensionality, unidirectionality, and considering a fully developed *Poiseuille* flow, the modeling uses the Fourier method and the description in elliptical coordinates to solve the problem analytically. In conjunction with the ideas presented, a study is also carried out using the Finite Differences Method to validate the analytic solution obtained. In addition, a new analytical solution is presented for the case of a *Couette* flow in a semi-elliptical cross-section.

# SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> .....	<b>1</b>
1.1	CONTEXTUALIZAÇÃO .....	1
<b>2</b>	<b>REVISÃO BIBLIOGRÁFICA</b> .....	<b>6</b>
2.1	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA .....	6
2.2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA .....	8
2.2.1	NÚMERO DE REYNOLDS, ESCOAMENTO LAMINAR E TURBULENTO.....	8
2.2.2	ESCOAMENTO DESENVOLVIDO .....	9
2.2.3	ESCOAMENTO PLANO DE COUETTE.....	10
2.2.4	ESCOAMENTO DE HAGEN-POISEUILLE .....	10
2.2.5	FATOR DE ATRITO DE FANNING .....	11
2.3	OBJETIVOS DO TRABALHO .....	13
2.3.1	OBJETIVO PRINCIPAL.....	13
2.3.2	OBJETIVOS INTERMEDIÁRIOS.....	13
2.4	ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO.....	14
<b>3</b>	<b>FORMULAÇÃO DO PROBLEMA</b> .....	<b>15</b>
3.1	ESCOAMENTO EM UM CANAL SEMI-ELÍPTICO .....	15
3.2	COORDENADAS ELÍPTICAS .....	18
3.3	MANIPULAÇÃO DA EQUAÇÃO DE POISSON E IMPLEMENTAÇÃO DA SOLUÇÃO ANALÍTICA .....	21
<b>4</b>	<b>SOLUÇÃO ANALÍTICA DO PROBLEMA</b> .....	<b>25</b>
4.1	SOLUÇÃO ANALÍTICA VIA MÉTODO DE FOURIER .....	25
4.2	VELOCIDADE MÉDIA E VAZÃO .....	34
4.3	FATOR DE ATRITO DE FANNING .....	37
<b>5</b>	<b>SOLUÇÃO NUMÉRICA DO PROBLEMA</b> .....	<b>41</b>
5.1	O MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS .....	41
5.2	SOLUÇÃO NUMÉRICA VIA MDF.....	44
5.3	IMPLEMENTAÇÃO.....	46
5.3.1	PRIMEIROS PARÂMETROS NECESSÁRIOS .....	46
5.3.2	IMPLEMENTAÇÃO DA MATRIZ DOS COEFICIENTES.....	47
5.3.3	IMPLEMENTAÇÃO DO VETOR RESPONSÁVEL PELAS CONDIÇÕES DE CONTORNO .....	48
5.3.4	OBTENÇÃO DO VETOR INCÓGNITA .....	49
5.3.5	ARRANJO DO VETOR INCÓGNITA .....	49

5.3.6	TRATAMENTO DOS DADOS DE SAÍDA .....	50
5.4	DETERMINAÇÃO DA VELOCIDADE MÉDIA .....	51
5.4.1	REGRA DOS TRAPÉZIOS .....	51
5.4.2	IMPLEMENTAÇÃO DA REGRA DOS TRAPÉZIOS PARA DETERMINAÇÃO DA VELOCIDADE MÉDIA.....	53
5.4.3	DETERMINAÇÃO DOS VALORES DE VELOCIDADE MÉDIA MÁXIMA PARA VALIDAÇÃO DA ROTINA .....	55
5.4.4	DETERMINAÇÃO DO FATOR DE ATRITO DE FANNING PARA VALIDAÇÃO DA ROTINA .....	55
5.5	VALIDAÇÃO PARA O MDF DO ESCOAMENTO DE POISEUILLE .....	56
<b>6</b>	<b>SOLUÇÃO DE UM NOVO PROBLEMA: O ESCOAMENTO DE COUETTE.....</b>	<b>60</b>
6.1	INTRODUÇÃO AO PROBLEMA.....	60
6.2	RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE LAPLACE PARA O ESCOAMENTO DE COUETTE .....	62
6.3	VELOCIDADE MÉDIA E VAZÃO DO ESCOAMENTO DE COUETTE .....	69
6.4	IMPLEMENTAÇÃO PARA O ESCOAMENTO DE COUETTE .....	71
6.5	IMPLEMENTAÇÃO DA VELOCIDADE MÉDIA DO ESCOAMENTO DE COUETTE .....	72
6.6	VALIDAÇÃO PARA MDF DO ESCOAMENTO DE COUETTE .....	73
<b>7</b>	<b>CONCLUSÕES .....</b>	<b>75</b>
7.1	CONSIDERAÇÕES FINAIS .....	75
	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....</b>	<b>76</b>

## LISTA DE FIGURAS

1.1	Equipamento para análise de escoamento de sangue. ....	1
1.2	Esquema de perfuração de petróleo utilizando dutos ovalizados.....	2
1.3	Exemplo de seções clássicas .....	3
1.4	Exemplo de seções não clássicas, a esquerda seção trapezoidal e a direita seção elíptica .....	3
1.5	Exemplo do uso de microcanais, imagem de um sistema montado para observação. ....	4
2.1	Analogias das variações das equações de Poisson em diferentes aplicações físicas .	7
2.2	Exemplo das variações e flutuações na velocidade em um escoamento turbulento...	9
2.3	Exemplificação de um escoamento completamente desenvolvido.....	10
2.4	Exemplificação do escoamento plano de <i>Couette</i> .....	10
2.5	Exemplificação do escoamento plano de <i>Hagen-Poiseuille</i> .....	11
3.1	Geometria do problema .....	15
3.2	Seção do canal semi-elíptico.....	16
3.3	Representação das coordenadas $\xi$ (verde) e $\theta$ (rosa) no plano $xy$ .....	19
3.4	Seção semi-elíptica nas coordenadas elípticas .....	19
4.1	Campo de velocidade do escoamento de <i>Poiseuille</i> para $b/a = 0.5$ no domínio retangular em coordenadas elípticas .....	30
4.2	Campo de velocidade do escoamento de <i>Poiseuille</i> para $b/a = 0.5$ no domínio elíptico em coordenadas cartesianas .....	30
4.3	Distribuição de Velocidades para o caso $b/a = 0.5$ .....	31
4.4	Campo de velocidade do escoamento de <i>Poiseuille</i> para $b/a = 0.95$ no domínio retangular em coordenadas elípticas .....	31
4.5	Campo de velocidade do escoamento de <i>Poiseuille</i> para $b/a = 0.95$ no domínio semi-elíptico em coordenadas cartesianas .....	32
4.6	Campo de velocidade do escoamento de <i>Poiseuille</i> para $b/a = 0.2$ no domínio retangular em coordenadas elípticas .....	33
4.7	Campo de velocidade do escoamento de <i>Poiseuille</i> para $b/a = 0.2$ no domínio semi-elíptico em coordenadas cartesianas .....	33
4.8	Velocidade média e máxima em função da razão de aspecto $b/a$ .....	37
4.9	Diagrama esquemático da tensão atuante na seção semielíptica .....	38
4.10	Tabela com a compilação de diversos autores do valor do número de <i>Poiseuille</i> ( $Po$ ) para uma seção semi-circular .....	40
4.11	Fator $fRe_{\sqrt{A}}$ em função da razão de aspecto $b/a$ .....	40
5.1	Exemplo de domínio retangular discretizado para MDF para o caso analisado. ....	41
5.2	Exemplo de saída de dados da rotina do MDF do MATLAB.....	50

5.3	Representação Gráfica da Regra dos Trapézios .....	51
5.4	Velocidade média em função da razão de aspecto $b/a$ em 100 pontos de malha.....	57
5.5	Velocidade média máxima em função da razão de aspecto $b/a$ em 100 pontos de malha. ....	58
5.6	Fator de atrito de <i>Fanning</i> em função da razão de aspecto $b/a$ em 100 pontos de malha. ....	59
6.1	Ideia do escoamento de <i>Couette</i> .....	60
6.2	Campo de velocidade do escoamento de <i>Couette</i> para $b/a = 0.5$ no domínio retangular em coordenadas elípticas. ....	66
6.3	Campo de velocidade do escoamento de <i>Couette</i> para $b/a = 0.5$ no domínio semi-elíptico em coordenadas cartesianas. ....	66
6.4	Campo de velocidade do escoamento de <i>Couette</i> para $b/a = 0.2$ no domínio retangular em coordenadas elípticas. ....	67
6.5	Campo de velocidade do escoamento de <i>Couette</i> para $b/a = 0.2$ no domínio elíptico em coordenadas cartesianas. ....	67
6.6	Campo de velocidade do escoamento de <i>Couette</i> para $b/a = 0.95$ no domínio retangular em coordenadas elípticas. ....	68
6.7	Campo de velocidade do escoamento de <i>Couette</i> para $b/a = 0.95$ no domínio retangular em coordenadas elípticas. ....	68
6.8	Velocidade média em função da razão de aspecto $b/a$ com número de pontos igual a 100. ....	73
6.9	Vazão em função da razão de aspecto $b/a$ com número de pontos igual a 100.....	74

# LISTA DE TABELAS

2.1	Tabela representativa dos tipos de escoamento em função do número de Reynolds para canais de seção circular.....	9
-----	--	---

# LISTA DE SÍMBOLOS

## Símbolos Latinos

$u$	Componente em $x$ do campo de velocidade	[m/s]
$v$	Componente em $y$ do campo de velocidade	[m/s]
$w$	Componente em $z$ do campo de velocidade	[m/s]
$U$	Velocidade característica	[m/s]
$D_h$	Diâmetro hidráulico	[m]
$A$	Área da seção	[m <sup>2</sup> ]
$p^*$	Perímetro da seção	[m]
$K_c$	Energia cinética por unidade de volume	[J/m <sup>3</sup> ]
$p$	Pressão atuante	[Pa]
$P$	Pressão modificada	[Pa]
$r_h$	Raio hidráulico	[m]
$C$	Comprimento característico	[m]
$L$	Distância arbitrária considerada	[m]
$b$	Distância do semi-eixo menor da semi-elipse	[m]
$a$	Distância do semi-eixo maior da semi-elipse	[m]
$c$	Distância focal da semi-elipse	[m]
$\mathbf{u}$	Campo de velocidade	[m/s]
$F$	Constante	[1/(m · s)]
$Q$	Vazão	[m <sup>3</sup> /s]

## Símbolos Gregos

$\rho$	Massa específica
$\mu$	Coefficiente de viscosidade
$\sigma$	Tensão cisalhante
$\sigma_x$	Tensão cisalhante axial local
$\nabla$	Operador diferencial nabla
$\nabla^2$	Operador diferencial laplaciano
$\pi$	Constante pi
$\xi_0$	Curva constante semi-elíptica
$\alpha$	Constante arbitrária positiva

## Grupos Adimensionais

$e$	Número de Euler
$Re$	Número de <i>Reynolds</i>
$f$	Fator de atrito de <i>Fanning</i>
$f_x$	Fator de atrito axial periférico
$f_{app}$	Fator de atrito aparente
$h_\xi$	Fator de escala para $\xi$
$h_\theta$	Fator de escala para $\theta$
$u^*$	Velocidade adimensional
$v^*$	Velocidade transformada adimensionalizada
$G(\xi)$	Função componente da separação de variável
$H(\theta)$	Função componente da separação de variável
$k$	Constante arbitrária das equações diferenciais ordinárias
$C_1$	Constante arbitrária para solução específica
$C_2$	Constante arbitrária para solução específica
$C_3$	Constante arbitrária para solução específica
$C_4$	Constante arbitrária para solução específica
$C_n$	Constante arbitrária para solução geral
$D_n$	Constante arbitrária para solução geral
$E_n$	Constante arbitrária para solução geral
$m$	Variável de repetição
$n$	Variável de repetição
$t$	Índice de auxílio e variável de repetição
$R$	Razão geométrica auxiliar
$E(\kappa)$	Integral elíptica completa de segunda ordem
$fRe_{\sqrt{A}}$	Termo adimensional entre o fator de atrito de <i>Fanning</i> e o número de <i>Reynolds</i> baseado na raiz quadrada de $A$

## Subscritos

*Alassar* Referente aos valores encontrado na literatura de Alassar e Abushoshah (2012)

## Sobrescritos

· Variação temporal  
– Valor médio

## Siglas

3D	Três dimensões
SMX	...
PEPT	<i>Positron Emission Particle Tracking</i>
MRI	<i>Magnet Resonance Imaging</i>
EDO	Equação Diferencial Ordinária
EDP	Equação Diferencial Parcial
NESI	<i>Theta nano-electrospray ionization</i>
MDF	Método das Diferenças Finitas

# 1 INTRODUÇÃO

*Este capítulo apresenta uma breve contextualização das aplicações de escoamentos de Poiseuille em canais de seções não convencionais, sobretudo a seção semielíptica.*

## 1.1 CONTEXTUALIZAÇÃO

Canais de seção arbitrária são muito comuns no mundo contemporâneo. A aplicação desse tipo de estrutura é evidente quando se trata de uma rede de oleodutos ou uma instalação termomecânica. Assim, estudar o transporte de massa ao longo das seções é fundamental uma vez que se queira otimizá-los. Para abranger tamanhos de escala relativamente grandes como no caso dos dutos de passagem de ar em um sistema de refrigeração como em Stoecker e Jones (1985) ou um microcanal responsável pela análise do escoamento de sangue em um paciente, como demonstrado por Minamitani et al. (2004) (Figura 1.1), a formatação geométrica tem que ser analisada e estudada a fim de cumprir o principal objetivo diminuir a perda de energia ao longo do transporte.

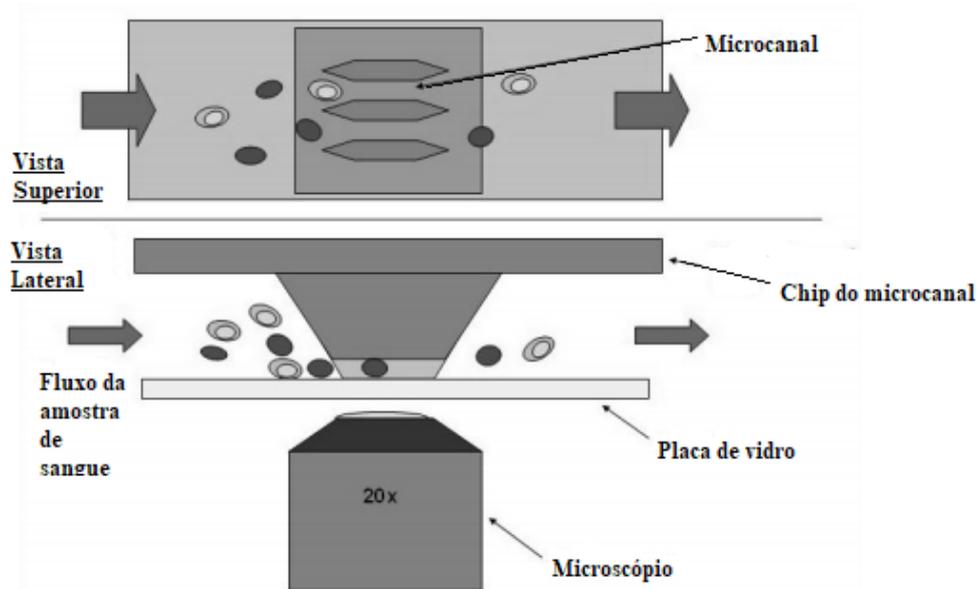


Figura 1.1: Equipamento para análise de escoamento de sangue.

Fonte: Minamitani et al. (2004).

Outras aplicações que fizeram uso da utilização de canais ou dutos de seções arbitrárias são as industriais como no caso das indústrias alimentícias, as petroquímicas e as farmacêuticas. Nessas indústrias se encontram diversas aplicações referentes ao escoamento em seções arbitrárias, por exemplo, na utilização de seções elípticas em detrimento de seções circulares em trocadores

de calor aletados como em (Zhu et al., 2004) e ainda, segundo Alegria (2011), na atividade de perfuração de poços de petróleo muitas das vezes se trabalha com geometrias anulares circulares e elípticas para passagem do petróleo vide a Figura 1.2.

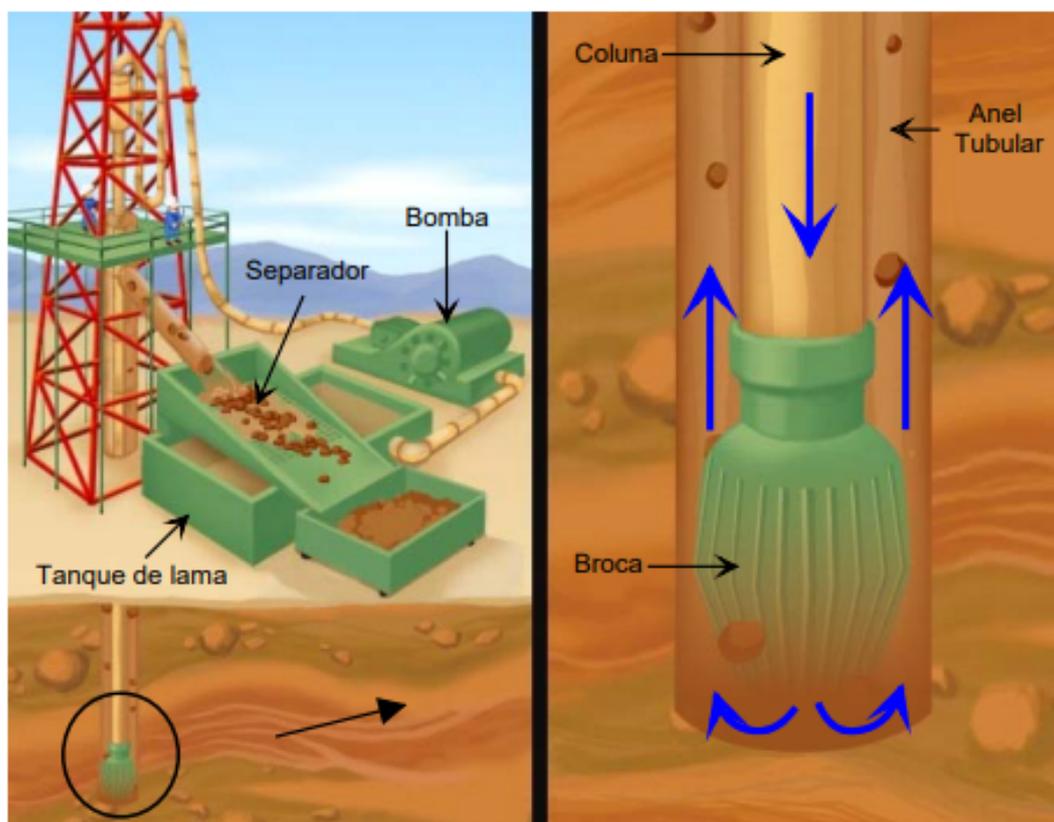


Figura 1.2: Esquema de perfuração de petróleo utilizando dutos ovalizados.

Fonte: Alegria (2011).

Com essa perspectiva, é de se esperar que as seções convencionais, como na Figura 1.3, correspondem por quase a totalidade das aplicações e soluções de engenharia adotadas atualmente. Porém, há um grande responsável por exigir a adoção de seções não clássicas (Figura 1.4), os microcanais.

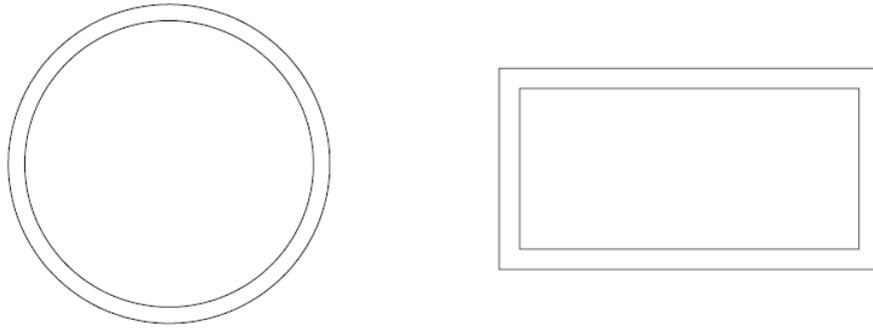


Figura 1.3: Exemplo de seções clássicas

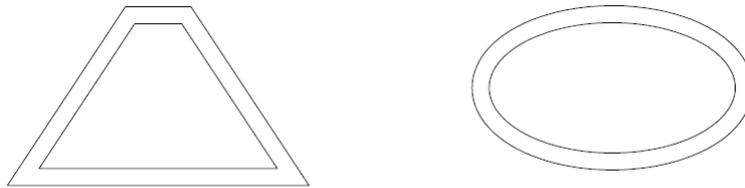


Figura 1.4: Exemplo de seções não clássicas, a esquerda seção trapezoidal e a direita seção elíptica

Os microcanais (Figura 1.5) são tubos com dimensões equivalente ao fio de cabelo humano que são caracterizadas pela alta relação entre a área de superfície e seu volume, altos coeficientes de transferência de calor e baixas resistências térmicas (Yang, 2003). Com essas características, são muito utilizados na aplicação de separação de partículas físicas, cabeçotes de impressão à tinta, detectores de infravermelho, diodos de lasers, resfriamento de chips de computadores e muitas outras aplicações que difere e promove uma grande melhoria em cada área aplicada.

Em questão aos microcanais, Bahrami, Yovanovich e Culham (2007) propuseram um modelo aproximado de resoluções das quedas de pressões em função apenas das geometrias das seções arbitrarias. Assim como Mortensen, Okkels e Bruus (2005), que reavaliaram exclusivamente o escoamento de Hagen-Poiseuille e a dependência do formato geométrico da seção. Outras aplicações para os microcanais podem ser encontradas em campos de estudos da biologia utilizando de técnicas com escoamentos em microcanais para observar a infecção de uma bactéria específica em células do corpo humano (Zhang, 2018).

Visto a importância das aplicações que os microcanais podem fornecer a diferentes áreas de estudos acadêmicos, observa-se a influência que as técnicas de fabricação implementadas na obtenção de microcanais de seções clássicas e não clássicas. Neste sentido, é possível encontrar estudos pautados na construção de microcanais de natureza orgânica como em Wang et al. (2007) e Ziaie et al. (2004).

Em princípio, as aplicações mostram uma dependência muito grande em estudos de escoamento em seções arbitrarias. Porém, encontrar soluções de seções não clássicas tem sido com-

plexo e definir o comportamento das propriedades do escoamento nestas seções não é fácil. Shah e London (1978) compilaram diversos resultados para estas situações com diferentes geometrias que vão de seções clássicas a seções não convencionais. Entretanto, não se obteve uma solução analítica exata para a seção semi-elíptica encontrada apenas mais recentemente por Alassar e Abushoshah (2012). Posteriormente o mesmo Alassar desenvolveu ramificações neste núcleo central de pesquisa, variando casos de seções distintas em diferentes situações como: convecções forçadas completamente desenvolvidas em seções semicirculares (Alassar, 2014), e seções semi-elípticas (Alassar, 2016). Além de uma solução de um escoamento de *Poiseuille* motivado pelo escorregamento de dois cilindros excêntricos (Alassar, 2017).

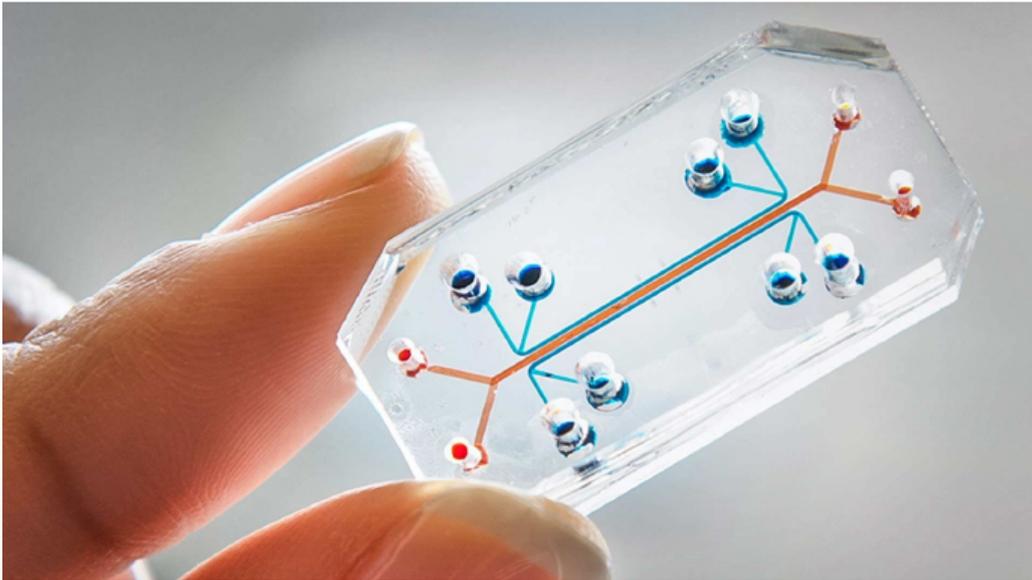


Figura 1.5: Exemplo do uso de microcanais, imagem de um sistema montado para observação.

Fonte: Carvalho, 2018.

A importância do desenvolvimento destas equações governantes com as condições de contorno pautadas para caso semi-elíptico, é fundamental para o desenvolvimento do campo acadêmico. Sobretudo, no estudos de reologia e mecânica dos fluidos com o desenvolvimento de viscosímetros mais precisos, como o viscosímetro de Couette citado por Papanastasiou, Georgiou e Alexandrou (1999). Além disso, é de se observar que na literatura voltada especialmente para aplicação de manufatura 3D, há estudos para pesquisa de microcanais semi-elípticos para desenvolvimentos de microestruturas (Dahlberg et al., 2018).

Pode-se também citar diversos outros estudos baseados no artigo de Alassar e Abushoshah (2012) sob a influência do escoamento em seções semi-elípticas aplicadas em diferentes contextos. Entre eles:

- O estudo da multiplicidade de soluções de transferência de convecção natural e geração de entropia em invólucros semi-elípticos (Sarkar, Biswas e Öztop, 2021)
- A influência da convecção laminar forçada em lei de potência e a viscosidade de plásticos

fluidos de *Bingham* segundo Mukherjee, Gupta e Chhabra (2017)

- Misturadores do tipo *static SMX* por meio de duas técnicas: positron emission particle tracking (PEPT) e magnet resonance imaging (MRI) (Mihailova et al., 2015)
- Estudo da solidificação viscosa em duas dimensões a partir de um escoamento incompressível estagnado e no caso estudado na tese de Radionova (2019)

Além do desenvolvimento das equações governantes, é necessário observar as soluções implementadas para cada caso. Dentre todas as soluções, as analíticas exatas são fundamentais e configuram poucas soluções fechadas que conseguem entregar os campos de velocidade e pressão nas equações de balanço de quantidade de movimento. Com sua importância, as soluções analíticas exatas tem sua aplicação baseada principalmente na determinação e validação de códigos computacionais na dinâmica dos fluidos computacional. Por exemplo, Taylor e Green (1937), em seu trabalho, desenvolveram analiticamente uma solução exata para o caso de um decaimento de um vórtice transiente, posteriormente, sua solução é utilizada em diversos trabalhos para validação de códigos como em Fontes, Padilla e Filho (2013).

Dentre as seções não convencionais, para este trabalho, destacam as seções semielípticas como fontes de estudo recentes no âmbito de soluções analíticas exatas e numéricas. Além disso, evidencia-se um aprofundamento e uma aplicação de escoamentos *Couette* e *Poiseuille* neste caso específico aproveitando o desenvolvimento feito por recentes literaturas.

Em síntese, em um mundo microscópico, percebe-se a necessidade de desenvolvimentos de microcanais semielípticos para diversas aplicações. Estudar escoamentos incompressíveis, unidirecionais, laminares, completamente desenvolvidos em fluidos newtonianos é uma demanda de aplicações reais tanto acadêmicas quanto industriais. A obtenção de soluções analíticas exatas para casos novos consolida a função do presente trabalho e amplia a literatura nesta área, que apesar de recente, vem se desenvolvendo a medida que as descrições matemáticas e computacionais se convergem.

## 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

*Este capítulo apresenta a teoria necessária para desenvolvimento e desenrolar sobre a abordagem necessária para entendimento inicial do problema, assim como, os objetivos a serem alcançados no presente trabalho.*

### 2.1 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Primeiramente, estudos voltados para a observação de soluções analíticas exatas em geometria semi-elíptica são baseados em aplicações referentes a transferência de calor e de massa. O intuito principal destes estudos está, principalmente, na capacidade da influência das geometrias distintas em parâmetros fundamentais físicos que podem otimizar sistemas tais como trocadores de calores e microcanais.

Sendo assim, ao analisar a literatura precedente verifica-se que soluções analíticas exatas são obtidas sobre tudo a partir de exceções impostas a um caso mais geral (Jog, 2015). Neste sentido, os casos do escoamento de Couette e do escoamento de Hagen-Poiseuille (Poiseuille, 1847) se enquadram exatamente em soluções exatas a partir de assunções feitas através do balanço de quantidade de movimento (Papanastasiou, Georgiou e Alexandrou, 1999). Ademais, ao se aprofundar na análise destas soluções percebe-se uma infinidade de possibilidades de soluções em função da geometria aplicada. Assim, ao se preocupar exclusivamente com geometrias elípticas e semi-elípticas, encontra-se bons trabalhos que representam esta tentativa de descrever o escoamento.

Portanto, ao se buscar no âmbito acadêmico é possível encontrar múltiplas convergências dessas ideias e assim apontar autores que, de fato, resolveram para problemas específicos de seções semi-elípticas. No certame dos trocadores de calor, Shah e London (1978) mostram diversas aplicações de soluções analíticas exatas para geometrias convencionais e não convencionais. Por trás desta compilação está a busca por seções e áreas com altas taxas de transferências de calor que possam ser aplicadas na prática.

Outros autores que buscam, do ponto de vista do balanço da quantidade de movimento, soluções analíticas exatas para o caso exclusivamente semi-elíptico são Alassar e Abushoshah (2012) e Wang (2015). O desenvolvimento das soluções exatas para o caso de um escoamento de Hagen-Poiseuille em seções semi-elípticas se deve ao Alassar e Abushoshah (2012), Wang (2015) promoveu um complemento a partir das soluções obtidas e formulou diversos resultados para casos em que a geometria da semi-elipse variava entre os semi-eixos maiores e menores. A partir destes dois autores, é possível perceber a influencia da geometria nos campos de velocidade obtidos e com isso realizar a otimização dos microcanais.

Do ponto de vista matemático, ao estudar as soluções analíticas exatas, Bazant (2016) cita

outras 17 analogias (Figura 2.1) referentes ao problema destas soluções, que matematicamente são descritas por equações de *Poisson* com condições de *Dirichlet*. No geral, esses problemas são uma tentativa de descrever a realidade física em notações matemáticas, desta forma é possível perceber uma recorrência destes modelos como o resolvido por Saint-Venant (1844) referente a a torção elástica de vigas com geometrias complexas e outros, como na magnetostática, a descoberta da analogia entre a autoindução de um fio blindado e a torção de vigas (Heaviside, 1887).

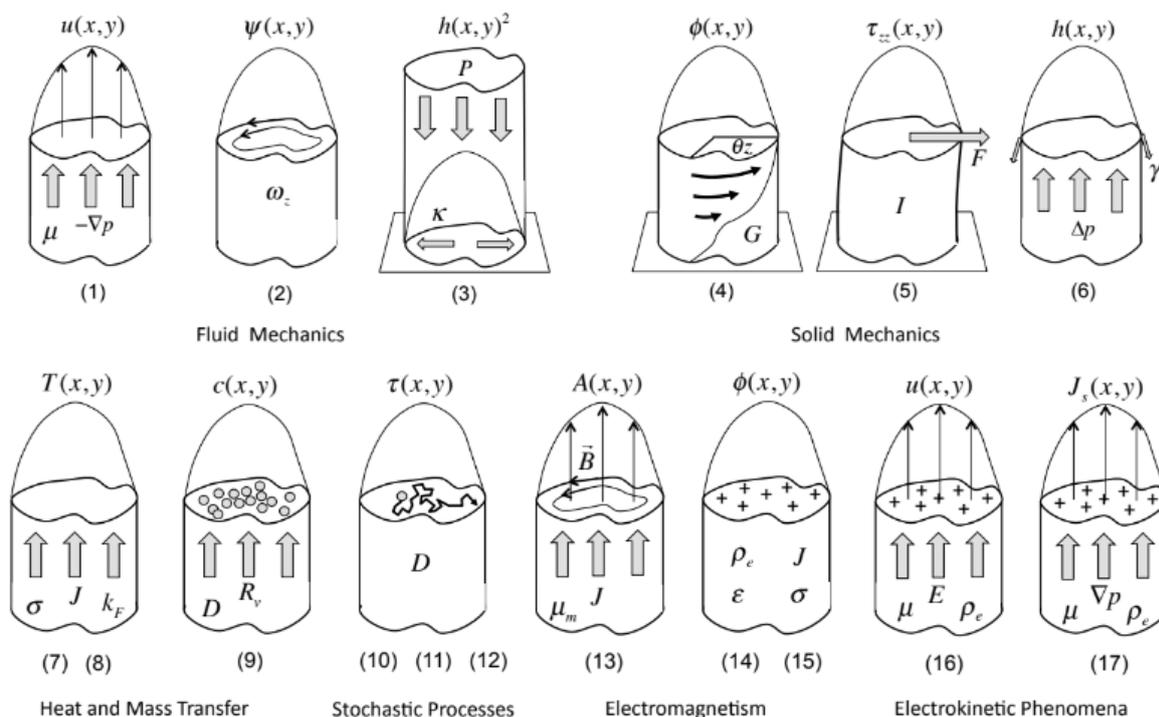


Figura 2.1: Analogias das variações das equações de Poisson em diferentes aplicações físicas

Fonte: Bazant (2016)

Diante disso, o problema de um escoamento laminar, desenvolvido, permanente, incompressível, unidirecional de um fluido newtoniano sob uma seção semielíptica tem por deflagrar a necessidade multidisciplinar das aplicações das equações de Poisson com as condições de Dirichlet. Assim, ao compilar as informações, a influência das ideias centrais tem uma convergência no desenvolvimento tanto das construções e resoluções matemáticas quanto das aplicações de diferentes geometrias. E portanto, a descrição do problema neste trabalho tem por motivação a busca por um aprofundamento de um caso análogo importante na diretriz da mecânica dos fluidos, os escoamentos em seções geométricas semielípticas.

## 2.2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

### 2.2.1 Número de Reynolds, escoamento laminar e turbulento

O número de Reynolds é um número adimensional usado em mecânica dos fluidos para tratar a razão entre as forças inerciais e as forças viscosas. Além disso, no geral, o número de Reynolds permite avaliar as condições do escoamento em diferentes geometrias, ou seja, tipificá-lo como escoamento laminar, de transição e escoamento turbulento. Segundo White (1962), números de Reynolds muito baixos indicam escoamentos lentos, já Reynolds moderados implicam entre escoamento laminar e de transição, enquanto Reynolds alto, geralmente, indica escoamentos turbulentos,

$$Re = \frac{\rho UC}{\mu} \quad (2.1)$$

onde  $\rho$  representa a massa específica do fluido,  $U$  a velocidade característica do fluido,  $C$  o comprimento característico do escoamento e  $\mu$  o coeficiente de viscosidade. Para seções circulares, o comprimento característico usado neste caso é o diâmetro  $D$  da seção circular e em geral utiliza-se a velocidade média ( $\bar{u}$ ) como velocidade característica segundo as consequências do princípio da aderência e a relação fluido-parede.

Já para seções não circulares, na prática, utiliza-se o diâmetro hidráulico, como uma espécie representativa de diâmetro a partir da geometria da seção analisada. Com isso, o cálculo do diâmetro hidráulico se dá por:

$$D_h = \frac{4A}{p^*} \quad (2.2)$$

em que  $A$  representa a área da seção geométrica e  $p^*$  o seu perímetro.

Segundo Brunetti (2008), o escoamento laminar é aquele em que as partículas se deslocam em lâminas individualizadas, sem trocas de massa entre elas. Assim, o escoamento laminar não computa variações de velocidades transversais internas entre as partículas o que não gera variações e aleatoriedades ao movimento.

O escoamento de transição é um escoamento em que a ocorrência das flutuações de velocidade não é o suficiente para declarar o escoamento nem laminar nem turbulento.

Ademais, o escoamento turbulento é aquele responsável por apresentar variações de velocidades tangenciais em relação ao movimento geral e com isso irá apresentar flutuações ao longo do tempo na velocidade das partículas como na Figura 2.2. Assim, como em Çengel e Cimbala (2007), as flutuações de velocidade imprimidas ao longo do escoamento refletem um aumento nas taxas de transferência de energia e de quantidade de movimento.

Para efeitos de projetos, determina-se valores pré-definidos para o número de *Reynolds* nos quais se enquadram escoamentos laminares, em transição e turbulentos segundo Tabela 2.1.

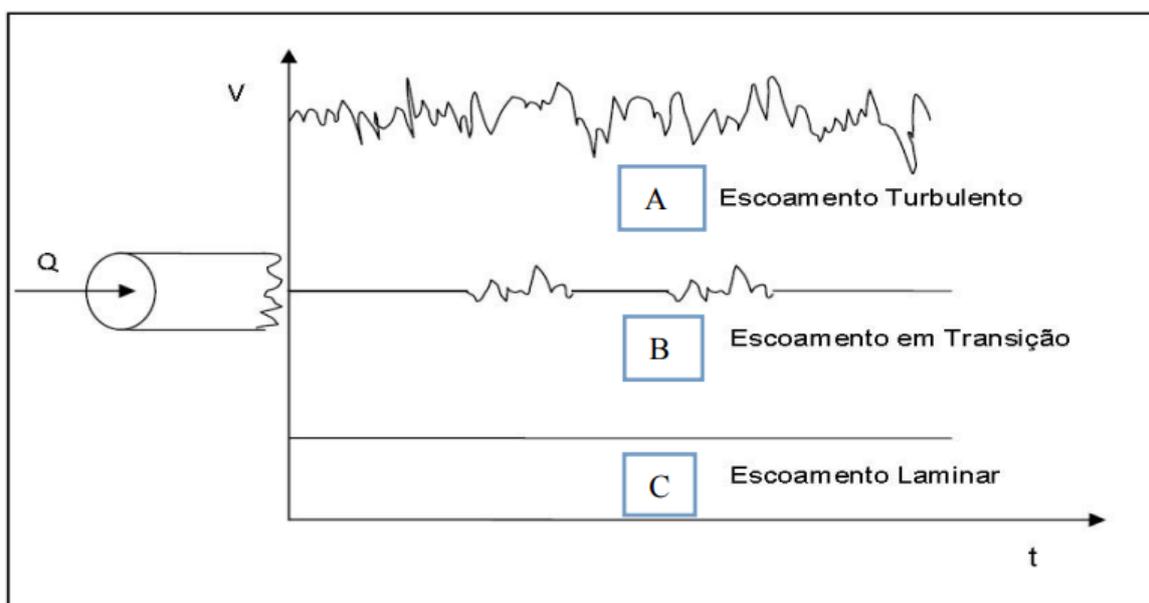


Figura 2.2: Exemplo das variações e flutuações na velocidade em um escoamento turbulento

Fonte: Silva et al. (2017)

Tabela 2.1: Tabela representativa dos tipos de escoamento em função do número de Reynolds para canais de seção circular

Número de Reynolds	Tipo de escoamento
$Re < 2000$	Laminar
$2000 < Re < 2400$	Transição
$Re > 2400$	Turbulento

### 2.2.2 Escoamento Desenvolvido

Um escoamento completamente desenvolvido é um escoamento em que não há variação da velocidade na direção ao longo do escoamento (Jog, 2015). Assim, há uma região de entrada onde o perfil inicial de velocidade não está desenvolvido, com isso, dar-se-á o nome de região de comprimento de entrada. Nessa região, as ações das forças viscosas das paredes do canal são ignoradas causando esse comportamento irregular da velocidade na entrada (Shah e London, 1978). Além disso, essa região também tem uma transição onde se computa o crescimento das camadas viscosas devido a presença de parede até chegar a região completamente desenvolvida como na Figura 2.3, onde as camadas viscosas estão completas e o perfil de velocidade está totalmente desenvolvido computando a ação dos efeitos devido a viscosidade.

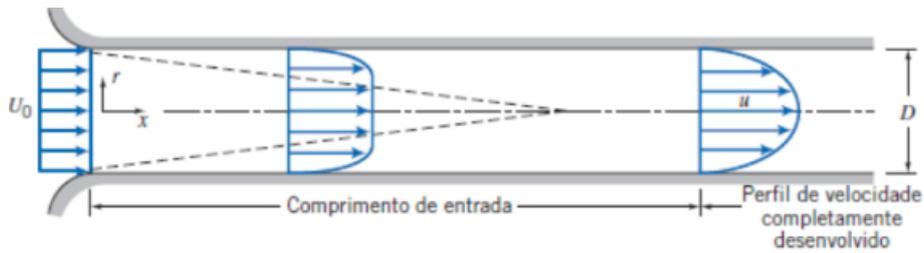


Figura 2.3: Exemplificação de um escoamento completamente desenvolvido

Fonte: Dutra (2015)

### 2.2.3 Escoamento plano de Couette

Dentre as soluções analíticas exatas estão escoamentos característicos que representam um compilado de informações referentes as hipóteses e características do escoamento na mecânica dos fluidos. Neste sentido, o escoamento plano de *Couette* é um desses escoamentos qualificados que se caracteriza por um escoamento realizado entre placas planas paralelas com as hipóteses de regime permanente, fluido newtoniano, unidirecional, bidimensional, dirigido pelo movimento relativo da placa superior e sem gradiente de pressão, como na Figura 2.4. Ao observar o escoamento, a relação linear do perfil de velocidade é sua marca característica e evidencia uma condição de contorno fundamental, a condição de não escorregamento (Papanastasiou, Georgiou e Alexandrou, 1999). Essa relação se deve a aderência molecular do fluido e a parede ocasionada pelas forças viscosas do fluido. Assim, a velocidade relativa neste ponto de interação é considerada nula.

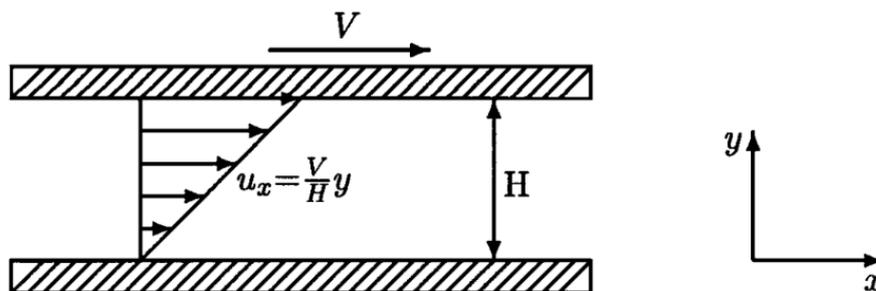


Figura 2.4: Exemplificação do escoamento plano de *Couette*

Fonte: Papanastasiou, Georgiou e Alexandrou (1999)

### 2.2.4 Escoamento de Hagen-Poiseuille

Ainda considerando alguns escoamentos característicos, o escoamento de *Hagen-Poiseuille* plano é um escoamento entre placas planas paralelas imóveis geridos por um gradiente de pressão através de uma bomba, o vácuo ou até a gravidade (Figura 2.5). Este escoamento possui caracte-

terísticas muito importantes que o torna significante na mecânica dos fluidos. A capacidade do escoamento ser gerenciado, exclusivamente, pelo gradiente de pressão atribui a este escoamento uma característica particular e denominamos escoamentos de Poiseuille.

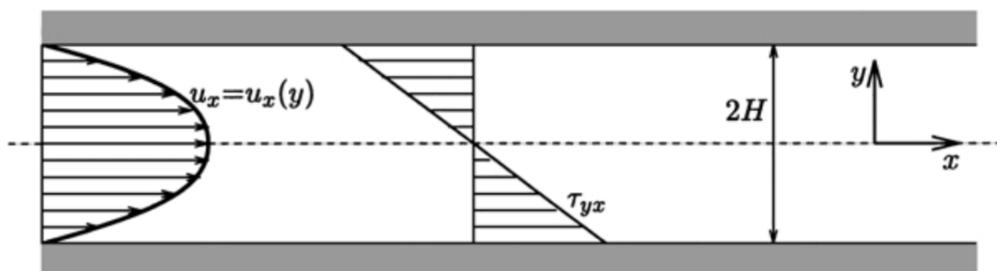


Figura 2.5: Exemplificação do escoamento plano de *Hagen-Poiseuille*

Fonte: Papanastasiou, Georgiou e Alexandrou (1999)

O perfil de velocidade neste caso é parabólico pois em ambas as placas há a condição de não escorregamento como uma condição de contorno do problema. Além disso, é fácil perceber que a velocidade máxima das partículas se encontra no ponto médio das distâncias entre as placas superior e inferior.

### 2.2.5 Fator de atrito de Fanning

O número adimensional que representa a perda de energia ao longo do escoamento devido aos efeitos da viscosidade do fluido é denominado fator de atrito *Fanning*. Para computar a situação de perda de energia é necessário definir outros parâmetros, como:

- **Tensão Cisalhante:**

$$\sigma = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \quad (2.3)$$

Segundo a lei de viscosidade de Newton, há uma relação entre a taxa de cisalhamento e a tensão cisalhante atuando no local a termos de uma constante dita como constante de viscosidade do fluido. Assim, pela equação (2.3) é possível perceber que por definição a tensão atuante na região observada é dependente das características físicas do fluido computadas pela constante ( $\mu$ ) e as características dinâmicas do escoamento computadas pela taxa de cisalhamento  $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)$  a depender da direção e do plano que atuam na interação fluido-sólido. Como, no geral, o escoamento analisado é bidimensional e unidirecional, a escolha da tensão cisalhante irá se limitar em um único plano e duas direções a serem analisadas, e para sua determinação, se utiliza uma tensão média atuante entre essas duas direções ( $\bar{\sigma}$ ).

- **Energia Cinética por unidade de volume:** Está relacionada diretamente com a energia do movimento das partículas presente no escoamento, portanto, assim como a energia cinética em um corpo sólido em movimento, essa energia por unidade de volume representa a

quantidade total de energia presente no escoamento vide a equação (2.4).

$$K_c = \frac{\rho \bar{u}^2}{2} \quad (2.4)$$

Assim, o fator de atrito de *Fanning* é formado pelo razão entre a tensão cisalhante atuante na região selecionada e a energia cinética total das partículas pertencentes ao escoamento como na equação (2.5). Logo, essa razão computa a perda de energia devido as irreversibilidades atuantes nas partículas ao longo do escoamento. Ou seja, o fator de atrito representa não só a capacidade viscosa do material fluido atuante como também representa a condição de não escorregamento na geometria das paredes do escoamento.

$$f = \frac{\sigma}{K_c} = \frac{\mu \frac{\partial u}{\partial y}}{\frac{\rho \bar{u}^2}{2}} \quad (2.5)$$

Entretanto, o fator de atrito de *Fanning* é uma medida que depende da localidade, do tipo de fluido, do campo de velocidade e da geometria das paredes atuantes sobre o escoamento. Com isso, Shah e London (1978), lança mão de um fator de atrito axial médio periférico definido como:

$$f_x = \frac{\sigma_x}{\rho \frac{\bar{u}^2}{2}} \quad (2.6)$$

onde  $\sigma_x$  representa a tensão cisalhante axial local atuando na região de interação entre o fluido e a parede no escoamento.

Para regiões de entrada hidrodinâmica, utiliza-se o conceito de um fator de atrito de *Fanning* médio:

$$\bar{f} = \frac{1}{x} \int_0^x f_x dx = \frac{\bar{\sigma}}{\rho \frac{\bar{u}^2}{2}} \quad (2.7)$$

onde  $\bar{\sigma}$  é a tensão cisalhante média atuante ao longo do escoamento.

Ao analisar a região de entrada hidrodinâmica, observa-se uma queda de pressão resultante da interação do fluido com a parede e uma mudança na taxa de fluxo de momento. Ao aplicar a Segunda Lei de Newton do movimento e da conservação, encontra-se o seguinte balanço:

$$\frac{\Delta p}{\rho \frac{\bar{u}^2}{2}} = \bar{f} \frac{x}{r_h} + \frac{2}{A} \int_A \left( \frac{u}{\bar{u}} \right)^2 dA - 2 \quad (2.8)$$

onde  $\bar{f}$  é dado pela equação (2.7),  $A$  representa a área da seção do canal por onde escoo o fluido e  $r_h$  é o raio hidráulico da seção arbitrária do canal.

Porém, para a determinação da relação entre a perda de carga ( $\Delta p$ ) e do fator de atrito de *Fanning*, segundo Shah e London (1978), esta representação não é útil para a engenharia uma vez

que é necessário conhecer o campo de velocidade em função de  $x$  e a geometria da seção avaliada sobre a área da mesma. Assim, utiliza-se o conceito de fator de atrito aparente ( $f_{ap}$ ) como forma mais conveniente e usual, desta forma, tem-se:

$$\frac{\Delta p}{\rho \frac{\bar{u}^2}{2}} = f_{ap} \frac{x}{r_h} \quad (2.9)$$

Como se trabalha em escoamento completamente desenvolvido, o campo de velocidade é invariável nesta região e com isso, a tensão cisalhante não se altera axialmente e o fator de atrito médio se equivale ao fator de atrito local. Portanto, a queda de pressão em função do fator de atrito de *Fanning* para uma distância  $L$  se torna:

$$\frac{\Delta p}{\rho \frac{\bar{u}^2}{2}} = f \frac{L}{r_h} \quad (2.10)$$

Assim, tem-se:

$$f = \frac{\Delta p D_h}{\rho L \bar{u}^2} \quad (2.11)$$

## 2.3 OBJETIVOS DO TRABALHO

### 2.3.1 Objetivo Principal

O presente trabalho tem por objetivo primário, formular e entender o desenvolvimento de um escoamento de *Poiseuille* que seja unidirecional, laminar, permanente, bidimensional, viscoso, incompressível em uma seção semielíptica sob o viés analítico e numérico. Além disso, neste trabalho propõe-se uma nova solução para o escoamento de *Couette* o qual não tem solução na literatura atual.

### 2.3.2 Objetivos intermediários

Para atingir o objetivo principal, é necessário realizar um conjunto de etapas que valide o desenvolvimento analítico apresentado neste trabalho. Com isso, a discussão entre as diferentes soluções analíticas e numéricas é impostas em diversas etapas:

1. Solução analítica de um escoamento de *Poiseuille*, permanente, incompressível e unidirecional sob uma seção semielíptica.
2. Solução numérica por método das diferenças finitas de um escoamento de *Poiseuille*, permanente, incompressível e unidirecional sob uma seção semielíptica.
3. Ampliação da solução analítica para o caso de escoamento de *Couette*,
4. Implementação da solução numérica ao caso de um escoamento de *Couette* sob uma seção

semielíptica.

5. Discussão sobre a validação dos métodos comparando os resultados.

## 2.4 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

O presente trabalho é dividido em 7 capítulos da seguinte forma:

- **Capítulo 1:** introdução ao trabalho
- **Capítulo 2:** revisão bibliográfica, fundamentação teórica, apresentação dos objetivos do trabalho e organização e distribuição dos capítulos.
- **Capítulo 3:** formulação e modelagem de um problema de escoamento de *Poiseuille* em uma seção semielíptica com ênfase na apresentação das equações governantes, das condições de contorno, das hipóteses restritivas e da aplicação das coordenadas elípticas.
- **Capítulo 4:** apresentação da solução analítica exata da equação de *Poisson* e das condições de contorno de *Dirichlet* utilizando o método de separação de variáveis, além do desenvolvimento de fatores referentes ao escoamento analisado como a vazão, o fator de *Fanning* e a velocidade média.
- **Capítulo 5:** apresentação e desenvolvimento da solução numérica pelo método das diferenças finitas para o caso do escoamento de *Poiseuille*.
- **Capítulo 6:** desenvolvimento, modelagem e solução tanto analítica quanto numérica para o escoamento de *Couette*.
- **Capítulo 7:** argumentações e conclusões finais do trabalho.

### 3 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

*Neste capítulo, a formulação do problema de um escoamento incompressível, unidirecional, laminar, completamente desenvolvido, permanente e bidimensional em uma seção semi-elíptica é apresentado de forma que se compreenda a geometria e suas restrições. Posteriormente, apresenta-se o uso das coordenadas elípticas como uma ferramenta de auxílio da descrição geométrica num sistema de coordenadas adequado, e por fim demonstra-se as equações governantes que rege toda a cinemática do problema.*

#### 3.1 ESCOAMENTO EM UM CANAL SEMI-ELÍPTICO

Considere o escoamento laminar, viscoso, incompressível, bidimensional e unidirecional na direção  $z$  positiva de um fluido newtoniano em um canal semi-elíptico, como ilustrado na Figura 3.1.

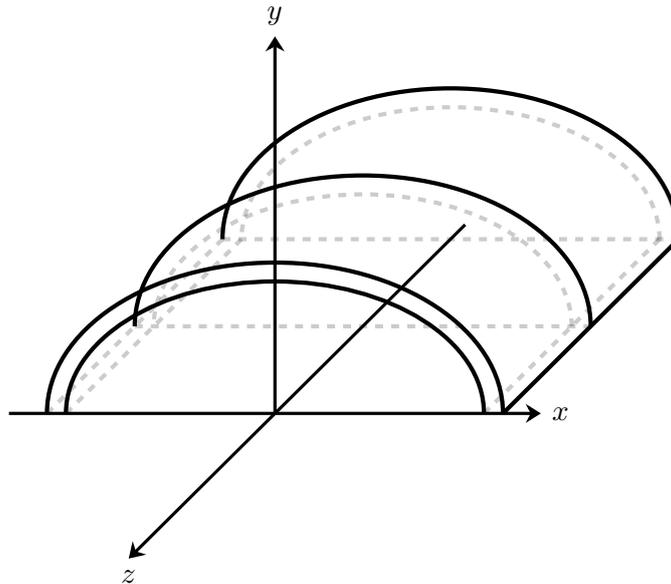


Figura 3.1: Geometria do problema

Tomamos um sistema de coordenadas no plano  $xy$  tal que os focos sejam localizados em  $F_1 = (-c, 0)$  e  $F_2 = (c, 0)$ ,  $c \geq 0$  (vide Figura 3.2). Os vértices  $A = (a, 0)$ ,  $A' = (-a, 0)$  e  $B = (0, b)$ , em que  $0 < b < a$ , pertencem à seção semi-elíptica de equação  $y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$ . O segmento  $\overline{AA'}$ , que contém os focos, é o eixo maior e o segmento  $\overline{OB}$ , em que  $O$  é a origem do sistema de coordenadas, é o semieixo menor. Note que pelo teorema de Pitágoras, é possível mostrar que  $a$ ,

$b$  e  $c$  estão relacionados pela equação  $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ .

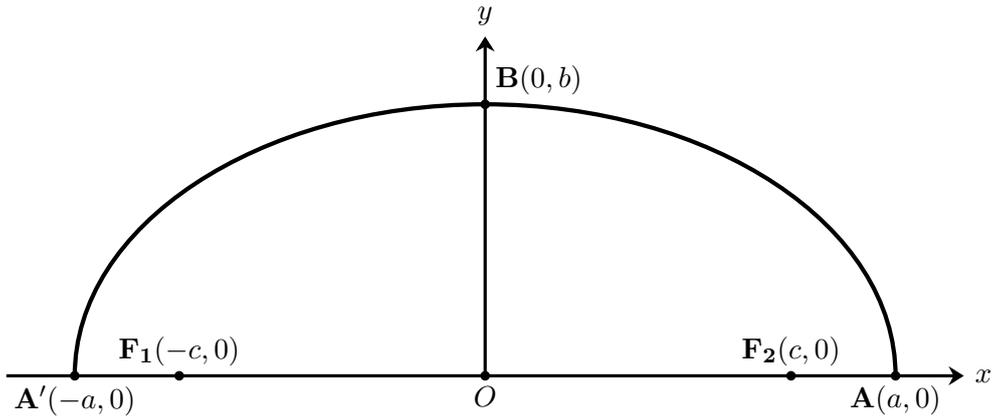


Figura 3.2: Seção do canal semi-elíptico

Com estas considerações, as equações governantes são a equação da continuidade

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (3.1)$$

e a equação de Navier-Stokes

$$\rho \left[ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] = -\nabla P + \mu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (3.2)$$

em que  $\mathbf{u}$  é o campo vetorial de velocidade,  $P$  é o campo escalar de pressão modificada,  $\rho$  é a massa específica do fluido e  $\mu$  é o coeficiente de viscosidade dinâmica do fluido.

Em coordenadas cartesianas  $(x, y, z)$ , as equações governantes (3.1) e (3.2), tornam-se

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (3.3)$$

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (3.4)$$

$$\rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \quad (3.5)$$

$$\rho \left( \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial z} + \mu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \quad (3.6)$$

Supondo que além de unidirecional na direção  $z$ , o escoamento é permanente, temos que

$$\mathbf{u} = (0, 0, w(x, y, z)) \quad (3.7)$$

Sendo assim, a equação da continuidade (3.3) reduz-se a

$$\frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (3.8)$$

ou seja,

$$w = w(x, y) \quad (3.9)$$

Assim, substituindo as equações (3.7) e (3.9) nas equações (3.4), (3.5) e (3.6), obtém-se:

$$0 = -\frac{\partial P}{\partial x} \quad (3.10)$$

$$0 = -\frac{\partial P}{\partial y} \quad (3.11)$$

$$0 = -\frac{\partial P}{\partial z} + \mu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (3.12)$$

Pelas equações (3.10) e (3.11), segue que

$$P = P(z) \quad (3.13)$$

e, com isso, a equação (3.12) se reduz a

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{1}{\mu} \frac{dP}{dz} \quad (3.14)$$

A equação (3.9) mostra que a velocidade é função de  $x$  e  $y$ , e a equação (3.13), por outro lado, mostra que  $P$  é função apenas de  $z$ . Portanto, para que a equação (3.14) seja satisfeita, ambos os lados devem ser iguais a uma constante. Neste sentido, define-se

$$F = -\frac{\partial P}{\partial z} = -\frac{dP}{dz} \quad (3.15)$$

Assim, ao combinarmos as equações (3.14) e (3.15), obtém-se a equação de Poisson para coordenadas cartesianas,

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\frac{F}{\mu} \quad (3.16)$$

ou ainda,

$$\nabla^2 w = -\frac{F}{\mu} \quad (3.17)$$

em que

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (3.18)$$

é o operador de Laplace (Laplaciano) no plano  $xy$ .

Denotando por  $\Gamma$  a região delimitada pela semi-elipse em questão, temos que a condição de

contorno de não escorregamento nas paredes é dada por

$$w = 0 \quad (3.19)$$

em  $\partial\Gamma$ . Portanto, o nosso objetivo é determinar uma função  $w = w(x, y)$  que satisfaz a equação de Poisson (3.17) sujeita a condição de contorno (3.19).

Como a demonstração da equação (3.17) foi feita para uma seção semi-elíptica, é importante ressaltar que, segundo Jog (2015), é válido a mesma demonstração para quaisquer seções constantes que se adote para o canal. Além disso, ao se adotar uma seção semi-elíptica, o sistema de coordenadas mais conveniente que encaixará no problema é o sistema de coordenada elíptico como demonstrado a seguir.

### 3.2 COORDENADAS ELÍPTICAS

Apesar da equação governante (3.17) ter sido deduzida em coordenadas cartesianas, como dito anteriormente, é mais conveniente adotar um sistema de coordenadas elípticas  $(\xi, \theta)$ , definido por (Arfken e Weber 1999) cujas equações de transformação de coordenadas são dadas por

$$x = c \cosh \xi \cos \theta, \quad y = c \sinh \xi \sin \theta \quad (3.20)$$

em que  $\xi$  e  $\theta$  são tais que  $\xi \in [0, \infty)$  e  $\theta \in [0, 2\pi]$ . E, a partir destas transformações é possível obter as relações entre  $\xi$  e  $\theta$ :

$$\frac{x^2}{a^2 \cosh^2 \xi} + \frac{y^2}{a^2 \sinh^2 \xi} = \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \quad (3.21)$$

$$\frac{x^2}{a^2 \cos^2 \xi} - \frac{y^2}{a^2 \sin^2 \xi} = \sinh^2 \theta - \cosh^2 \theta = 1 \quad (3.22)$$

Ao interpretar através das relações em (3.21) e (3.22) entre  $\xi$  e  $\theta$ , obtém-se a Figura 3.3 que mostra as curvas contantes em  $\xi$  formando as elipses constantes em verde e para as curvas constantes em  $\theta$  formam as hipérboles constantes em rosa.

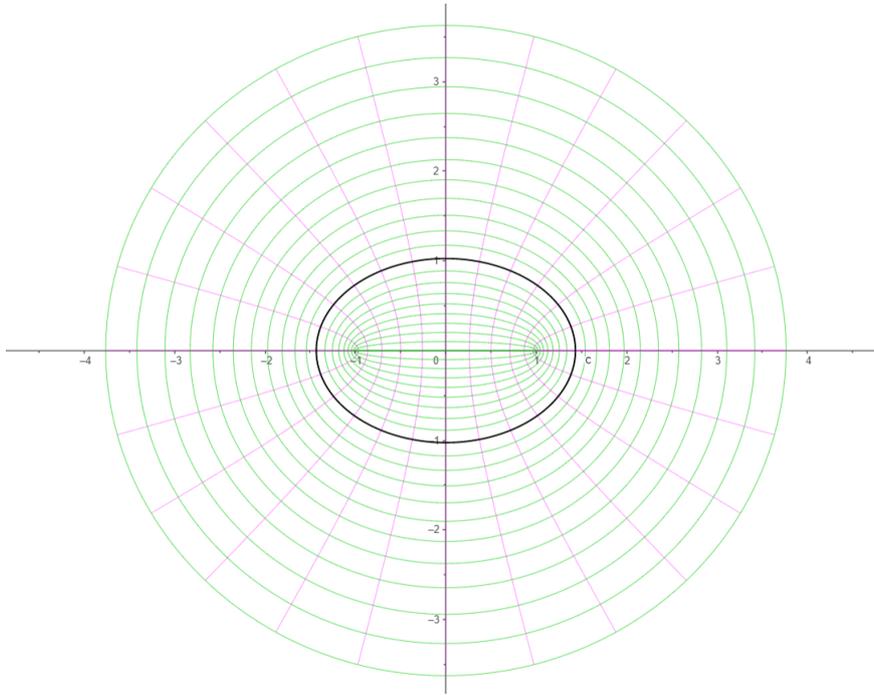


Figura 3.3: Representação das coordenadas  $\xi$  (verde) e  $\theta$  (rosa) no plano  $xy$

Além disso, é importante definir uma nova variável que represente o bordo da seção semi-elíptica no novo sistema de coordenada e que assuma um valor fixo de  $\xi = \xi_0$ , no plano  $\xi\theta$ . Além disso, é possível explicar o porquê de selecionar tal sistema já que as curvas constantes são elípticas e confocais entre si e representam a mesma origem. Assim, ao se selecionar  $\xi = \xi_0$  estará escolhendo uma das várias curvas constantes confocais disponíveis no sistema de coordenadas, por isso, o uso do sistema de coordenadas elípticas é essencial quando se está analisando uma semi-elipse, como no problema apresentado vide Figura 3.4.

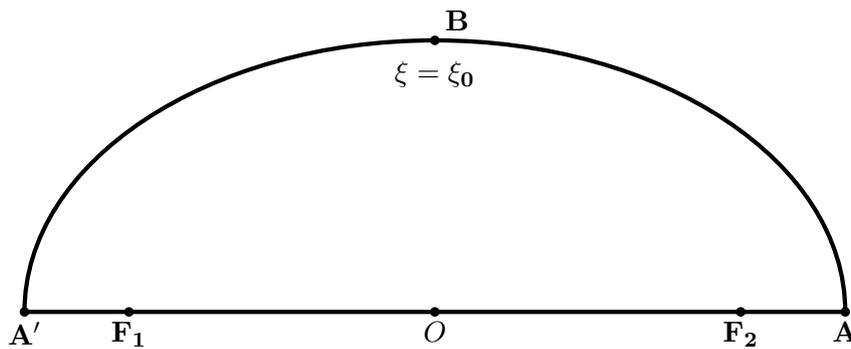


Figura 3.4: Seção semi-elíptica nas coordenadas elípticas

Ainda neste novo sistema de coordenadas, é importante ressaltar que a partir das equações de transformações (3.20) e usando a equação característica da semi-elipse  $y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$ , é possível

mostrar que:

$$\xi_0 = \tanh^{-1} \frac{b}{a} \quad (3.23)$$

tendo isso, para adequação da equação (3.17) ao novo sistema de coordenada, é necessário descrever o operador de Laplace em coordenadas elípticas. Em termos dos fatores de escala  $h_\xi$  e  $h_\theta$ , Kaplan (1972) descreve este operador como:

$$\nabla^2 = \frac{1}{h_\xi h_\theta} \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{h_\theta}{h_\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{h_\xi}{h_\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \right] \quad (3.24)$$

em que

$$\begin{aligned} h_\xi &= \left| \left( \frac{\partial x}{\partial \xi}, \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) \right| \\ &= |(c \sinh \xi \cos \theta, c \cosh \xi \sin \theta)| \\ &= c \sqrt{\sinh^2 \xi \cos^2 \theta + \cosh^2 \xi \sin^2 \theta} \\ &= c \sqrt{\sinh^2 \xi (1 - \sin^2 \theta) + (1 + \sinh^2 \xi) \sin^2 \theta} \\ &= c \sqrt{\sinh^2 \xi (-\sinh^2 \xi \sin^2 \theta + \sinh^2 \xi \sin^2 \theta) + \sin^2 \theta} \\ &= c \sqrt{\sinh^2 \xi + \sin^2 \theta} \end{aligned} \quad (3.25)$$

e

$$\begin{aligned} h_\theta &= \left| \left( \frac{\partial x}{\partial \theta}, \frac{\partial y}{\partial \theta} \right) \right| \\ &= |(-c \cosh \xi \sin \theta, c \sinh \xi \cos \theta)| \\ &= c \sqrt{(1 + \sinh^2 \xi) \sin^2 \theta + \sinh^2 \xi (1 - \sin^2 \theta)} \\ &= c \sqrt{\sinh^2 \xi (1 - \sin^2 \theta) + (1 + \sinh^2 \xi) \sin^2 \theta} \\ &= c \sqrt{\sinh^2 \xi (-\sinh^2 \xi \sin^2 \theta + \sinh^2 \xi \sin^2 \theta) + \sin^2 \theta} \\ &= c \sqrt{\sinh^2 \xi + \sin^2 \theta}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Assim, ao substituirmos os fatores de escala na equação (3.24), se conclui que

$$\nabla^2 = \frac{1}{c^2 (\sinh^2 \xi + \sin^2 \theta)} \left( \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \quad (3.27)$$

Por conseguinte, a equação de Poisson (3.17) em coordenadas elípticas é dada por

$$-\frac{F}{\mu} = \frac{1}{c^2 (\sinh^2 \xi + \sin^2 \theta)} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \quad (3.28)$$

com  $w = 0$  em  $\xi = 0$  e  $\xi = \xi_0$ .

Além disso, segundo Weisstein (1999), o elemento de área para um sistema de coordenada curvilíneo ortogonal pode ser expresso em termos dos fatores de escala para o caso em questão, como

$$dA = |\mathbf{J}| d\xi d\theta = c^2 (\sinh^2 \xi + \sin^2 \theta) d\xi d\theta \quad (3.29)$$

em que  $|\mathbf{J}|$  é o determinante da matriz jacobiana, isto é,

$$|\mathbf{J}| = h_\xi h_\theta = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c \cos \theta \sinh \xi & -c \cosh \xi \sin \theta \\ c \sin \theta \cosh \xi & c \sinh \xi \cos \theta \end{vmatrix} = c^2 (\sinh^2 \xi + \sin^2 \theta) \quad (3.30)$$

Assim, todo o sistema de coordenadas elípticas está caracterizado e formatado para o problema enunciado. Posteriormente, demonstramos a manipulação da equação (3.17) a fim de se obter uma equação governante e suas possíveis soluções.

### 3.3 MANIPULAÇÃO DA EQUAÇÃO DE POISSON E IMPLEMENTAÇÃO DA SOLUÇÃO ANALÍTICA

Após apresentar a equação de Poisson em coordenadas elípticas equação (3.28), a primeira ação a ser tomada é a adimensionalização da velocidade  $w$  para uma velocidade adimensional  $u^*$ . Com isso, tem-se:

$$w = -\frac{a^2 F}{\mu} u^* \quad (3.31)$$

aplicando na equação (3.28), de forma que

$$\frac{1}{c^2 (\sinh^2 \xi + \sin^2 \theta)} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left[ u^* \left( \frac{-a^2}{\mu} \frac{dP}{dz} \right) \right] + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left[ u^* \left( \frac{-a^2}{\mu} \frac{dP}{dz} \right) \right] \right\} = \frac{1}{\mu} \frac{dP}{dz} \quad (3.32)$$

ou seja,

$$\frac{1}{c^2(\sinh^2 \xi + \sin^2 \theta)} \left( \frac{\partial^2 u^*}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial \theta^2} \right) = \frac{\frac{1}{\mu} \frac{dP}{dz}}{\frac{a^2}{\mu} \frac{dP}{dz}}. \quad (3.33)$$

Portanto,

$$\frac{1}{(\sinh^2 \xi + \sin^2 \theta)} \left( \frac{\partial^2 u^*}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial \theta^2} \right) = -\frac{c^2}{a^2} \quad (3.34)$$

utilizando as identidades

$$\begin{cases} \frac{b}{a} = \tanh \xi_0 \\ \tanh^2 \xi_0 + \operatorname{sech}^2 \xi_0 = 1 \\ c^2 = a^2 - b^2 \end{cases}$$

é possível demonstrar que há uma relação fundamental geométrica para a semi-elipse representada por:

$$\frac{c^2}{a^2} = \operatorname{sech}^2 \xi_0. \quad (3.35)$$

Desta forma, é possível obter a equação de Poisson em coordenadas elípticas adimensionalizada:

$$\frac{1}{\sinh^2 \xi + \sin^2 \theta} \left( \frac{\partial^2 u^*}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial \theta^2} \right) = -\operatorname{sech}^2 \xi_0. \quad (3.36)$$

Tendo a equação (3.36), é possível transformá-la na equação de Laplace utilizando a seguinte transformação de variável (Alassar e Abushoshah, 2012):

$$u^*(\xi, \theta) = v^*(\xi, \theta) - \frac{1}{2} \operatorname{sech}^2 \xi_0 \sinh^2 \xi \sin^2 \theta \quad (3.37)$$

substituindo a equação (3.37) na equação (3.36), vemos que

$$\frac{1}{\sinh^2 \xi + \sin^2 \theta} \left[ \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left( v^*(\xi, \theta) - \frac{1}{2} \operatorname{sech}^2 \xi_0 \sinh^2 \xi \sin^2 \theta \right) + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left( v^*(\xi, \theta) - \frac{1}{2} \operatorname{sech}^2 \xi_0 \sinh^2 \xi \sin^2 \theta \right) \right] = -\operatorname{sech}^2 \xi_0. \quad (3.38)$$

Note que

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left( v^* - \frac{1}{2} \operatorname{sech}^2 \xi_0 \sinh^2 \xi \sin^2 \theta \right) = \frac{\partial^2 v^*}{\partial \xi^2} - \operatorname{sech}^2 \xi_0 \sin^2 \theta (\sinh^2 \xi + \cosh^2 \xi) \quad (3.39)$$

e, além disso,

$$\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left( v^* - \frac{1}{2} \operatorname{sech}^2 \xi_0 \sinh^2 \xi \sin^2 \theta \right) = \frac{\partial^2 v^*}{\partial \theta^2} - \operatorname{sech}^2 \xi_0 \sinh^2 \xi (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) \quad (3.40)$$

logo, aplicando as equações (3.39) e (3.40) na equação (3.38) e simplificando, obtemos que

$$\frac{1}{\sinh^2 \xi + \sin^2 \theta} \left[ (-\operatorname{sech}^2 \xi_0 (\sin^2 \theta \cosh^2 \xi + \cos^2 \theta \sinh^2 \xi) + \left( \frac{\partial^2 v^*}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial \theta^2} \right) \right] = -\operatorname{sech}^2 \xi_0 \quad (3.41)$$

ou seja,

$$-\operatorname{sech}^2 \xi_0 + \frac{1}{\sinh^2 \xi + \sin^2 \theta} \left( \frac{\partial^2 v^*}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial \theta^2} \right) = -\operatorname{sech}^2 \xi_0. \quad (3.42)$$

Portanto,

$$\frac{\partial^2 v^*}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial \theta^2} = 0 \quad (3.43)$$

obtendo assim a dita equação de Laplace.

As condições iniciais de contorno do problema refletem-se na condição de não deslizamento ao longo do bordo da semi-elipse, ou seja,  $w = 0$  em  $\partial \xi$ . Assim, a partir da equação (3.31), é possível mostrar que:

$$\begin{cases} u(0, \theta) = 0 \\ u(\xi, 0) = 0 \\ u(\xi, \pi) = 0 \\ u(\xi_0, \theta) = 0 \end{cases}. \quad (3.44)$$

Fazendo a mesma transformação de variável vista na equação (3.37), tem-se as seguintes

condições de contorno para a equação de Laplace em (5.1):

$$\begin{cases} u^*(0, \theta) = 0 \rightarrow 0 = v^*(0, \theta) - \frac{1}{2} \operatorname{sech}^2 0 \operatorname{sen}^2 \theta \operatorname{senh}^2 0 \\ u^*(\xi, 0) = 0 \rightarrow 0 = v^*(\xi, 0) - \frac{1}{2} \operatorname{sech}^2 \xi \operatorname{sen}^2 0 \operatorname{senh}^2 \xi \\ u^*(\xi, \pi) = 0 \rightarrow 0 = v^*(\xi, \pi) - \frac{1}{2} \operatorname{sech}^2 \xi \operatorname{sen}^2 \pi \operatorname{senh}^2 \xi \\ u^*(\xi_0, \theta) = 0 \rightarrow 0 = v^*(\xi_0, \theta) - \frac{1}{2} \operatorname{sech}^2 \xi_0 \operatorname{sen}^2 \theta \operatorname{senh}^2 \xi_0 \end{cases} \quad (3.45)$$

Portanto, as condições de contorno da equação de Laplace em (5.1), são dadas por

$$v^*(\xi, 0) = v^*(\xi, \pi) = v^*(0, \theta) = 0 \quad v^*(\xi_0, \theta) = \frac{1}{2} \tanh^2 \xi_0 \operatorname{sen}^2 \theta. \quad (3.46)$$

## 4 SOLUÇÃO ANALÍTICA DO PROBLEMA

*Neste capítulo apresenta-se a solução analítica para as equações governantes apresentadas no capítulo 2, utilizando o método de Fourier (separação de variáveis). Posteriormente, calcula-se a velocidade média a partir do campo de velocidade obtido e o fator de atrito de Fanning.*

### 4.1 SOLUÇÃO ANALÍTICA VIA MÉTODO DE FOURIER

Dado a equação (5.1) e suas novas condições de contorno (5.2), é possível resolvê-las utilizando o método de Fourier, assim, estipula-se uma solução do tipo

$$v^*(\xi, \theta) = G(\xi)H(\theta) \quad (4.1)$$

de tal forma que a equação (5.1) e as condições de contorno também mudam

$$\frac{G''(\xi)}{G(\xi)} + \frac{H''(\theta)}{H(\theta)} = 0 \quad (4.2)$$

em que

$$v^*(0, \theta) = G(0)H(\theta) = G(0) = 0 \quad (4.3)$$

$$v^*(\xi, 0) = G(\xi)H(0) = H(0) = 0 \quad (4.4)$$

$$v^*(\xi, \pi) = G(\xi)H(\pi) = H(\pi) = 0 \quad (4.5)$$

$$v^*(\xi_0, \theta) = G(\xi_0)H(\theta) = \frac{1}{2} \tanh^2 \xi_0 \sin^2 \theta. \quad (4.6)$$

Da equação (4.2), é possível perceber que o lado esquerdo é independente de  $\theta$  e o lado direito é independente de  $\xi$ , isso só é possível se

$$\frac{G''(\xi)}{G(\xi)} = -\frac{H''(\theta)}{H(\theta)} = k \quad (4.7)$$

onde  $k$  é uma constante arbitrada para solução da equação. Com isso, é possível construir duas equações diferenciais ordinárias (EDO's) apresentadas a seguir

$$G''(\xi) - kG(\xi) = 0 \quad (4.8)$$

$$H''(\theta) + kH(\theta) = 0. \quad (4.9)$$

Ao se analisar cada equação diferencial ordinária separadamente, se faz necessário um estudo

da constante arbitrada  $k$  de tal forma que seu sinal não acarrete em uma solução trivial, ou seja, soluções do tipo  $G(\xi) = 0$  ou  $H(\theta) = 0$ . Com isso, ao resolver a equação (4.9) para  $H(\theta)$ , considerando a constante  $k = 0$ , se obtém

$$H''(\theta) = 0 \quad (4.10)$$

segue que

$$H(\theta) = C_1\theta + C_2 \quad (4.11)$$

em que  $C_1$  e  $C_2$  são constantes de integração. Como  $H(0) = 0$  e  $H(\pi) = 0$ , temos que  $C_1 = 0$  e  $C_2 = 0$ . Logo, foi obtida uma solução trivial e pode-se concluir que  $k \neq 0$  nessa situação.

Para a situação da equação diferencial ordinária em (4.9) em que  $k < 0$ , se faz a seguinte relação  $k = -\alpha^2$ . Assim,

$$H''(\theta) - \alpha^2 H(\theta) = 0 \quad (4.12)$$

com solução da equação (4.12) dada por

$$H(\theta) = C_3 \sinh \alpha\theta + C_4 \cosh \alpha\theta \quad (4.13)$$

em que  $C_3$  e  $C_4$  são constantes de integração que substituem  $C_1$  e  $C_2$ . Aplicando as condições de contorno (4.4) e (4.5), temos que

$$C_4 = 0 \quad (4.14)$$

e

$$0 = C_3 \sinh \alpha\pi. \quad (4.15)$$

Para satisfazer a equação (4.15), primeiro conclui-se que caso  $C_3 = 0$  tem-se uma solução trivial, portanto avalia-se a condição que  $\sinh \alpha\pi = 0$ , assim só é possível tal solução se  $\alpha = 0$ . Portanto para tal situação em que  $k = -\alpha^2$  não é possível obter outra solução que não seja a solução trivial para a equação diferencial ordinária em (4.12), já que  $k$  obrigatoriamente tem que ser diferente de zero.

Assim, resta somente o estudo quando  $k > 0$ , ou seja, quando  $k = \alpha^2$  tal que a equação (4.9) se torna

$$H''(\theta) + \alpha^2 H(\theta) = 0 \quad (4.16)$$

com solução dada por

$$H(\theta) = C_1 \sin \alpha\theta + C_2 \cos \alpha\theta \quad (4.17)$$

e com as condições de contorno de (4.4) e (4.5), se tem que

$$C_2 = 0 \quad (4.18)$$

$$0 = C_1 \text{sen } \alpha\pi. \quad (4.19)$$

Para satisfazer a equação (4.19) é necessário perceber que se  $C_1 = 0$  há um solução trivial, assim para uma solução não trivial se faz  $\text{sen } \alpha\pi = 0$  analisando assim o que acontece com o argumento do seno " $\alpha\pi$ " para que a equação seja verdade, logo tem-se

$$\alpha = \sqrt{k} = n \quad (4.20)$$

com  $n \in \mathbb{Z}$ . Logo, uma solução geral para a equação (4.17) é

$$H_n(\theta) = C_n \text{sen } n\theta. \quad (4.21)$$

Na equação (4.8), como  $k > 0$ , ao se resolver utilizando esta prerrogativa, tem-se que  $k = \alpha^2$ , portanto

$$G''(\xi) - \alpha^2 G(\xi) = 0 \quad (4.22)$$

como visto anteriormente, uma solução possível é

$$G(\xi) = C_1 \text{senh } \alpha\xi + C_2 \text{cosh } \alpha\xi \quad (4.23)$$

como  $G(0) = 0$ , tem-se

$$G(\xi) = C_1 \text{senh } \alpha\xi. \quad (4.24)$$

Assim, as equações remanescentes que irão compor o campo de soluções para a separação de variável aplicada via Método de Fourier são

$$H_n(\theta) = C_n \text{sen } n\theta \quad (4.25)$$

$$G_n(\xi) = D_n \text{senh } n\xi. \quad (4.26)$$

Com as equações (4.25) e (4.26) e fazendo  $E_n = C_n D_n$ , é possível escrever a solução para a equação (5.1) como

$$v^*(\xi, \theta) = E_n \text{sen } n\theta \text{senh } n\xi. \quad (4.27)$$

Como a equação de Laplace em (5.1) é linear, segundo Figueiredo (1987), é possível escrever uma combinação linear de soluções infinitas utilizando o princípio da superposição e a série de

Fourier, assim tem-se

$$v^*(\xi, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n \operatorname{sen} n\theta \operatorname{senh} n\xi. \quad (4.28)$$

Por fim, a constante  $E_n$  tem que ser determinada para definição completa das soluções. Assim, utiliza-se a condição de contorno em (4.6) de tal forma que

$$v^*(\xi_0, \theta) = \frac{1}{2} \operatorname{tanh}^2 \xi_0 \operatorname{sen}^2 \theta = \sum_{n=1}^{\infty} E_n \operatorname{sen} n\theta \operatorname{senh} n\xi_0. \quad (4.29)$$

Assim ao multiplicar os dois lados da equação (4.29) por  $\operatorname{sen} m\theta$  e integrar definitivamente no intervalo de  $[0, \pi]$ , obtemos

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{2} \operatorname{tanh}^2 \xi_0 \operatorname{sen}^2 \theta \operatorname{sen} m\theta \, d\theta = \int_0^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} E_n \operatorname{sen} n\theta \operatorname{senh} n\xi_0 \operatorname{sen} m\theta \, d\theta \quad (4.30)$$

ao se analisar o lado esquerdo da (4.30), é possível obter

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{2} \operatorname{tanh}^2 \xi_0 \operatorname{sen}^2 \theta \operatorname{sen} m\theta \, d\theta = \frac{\operatorname{tanh} \xi_0 (\cos m\pi - 1)}{(m-2)m(m+2)}. \quad (4.31)$$

Já no lado direito, é possível obter

$$\int_0^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} E_n \operatorname{sen} n\theta \operatorname{senh} n\xi_0 \operatorname{sen} m\theta \, d\theta = \sum_{n=1}^{\infty} \left( E_n \operatorname{senh} n\xi_0 \int_0^{\pi} \operatorname{sen} n\theta \operatorname{sen} m\theta \, d\theta \right). \quad (4.32)$$

Observando as relações de ortogonalidade apresentadas em (Figueiredo 1987), é possível obter a integral da equação (4.32) já que

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen} m\theta \operatorname{sen} n\theta \, d\theta = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \frac{\pi}{2}, & m = n \end{cases}. \quad (4.33)$$

Desta maneira,

$$\int_0^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} E_n \operatorname{sen} n\theta \operatorname{senh} n\xi_0 \operatorname{sen} m\theta \, d\theta = \frac{\pi E_m \operatorname{senh} m\xi_0}{2}. \quad (4.34)$$

Fazendo  $m = n$  e resolvendo para  $E_m$ , obtém-se

$$E_m = \frac{2 \operatorname{tanh} \xi_0 (\cos m\pi - 1)}{\pi(m-2)m(m+2) \operatorname{senh} m\xi_0}. \quad (4.35)$$

Ao se analisar o índice  $m$ , e verificar que quando se tem um índice par, ou seja,  $m = 2t$ , o termo  $\cos m\pi - 1$  zera pois

$$\cos m\pi = \begin{cases} 1, & \text{se } m = 2t \\ -1, & \text{se } m = 2t - 1 \end{cases}. \quad (4.36)$$

Logo,

$$E_{2t} = 0 \quad (4.37)$$

como se quer uma solução não trivial, então se atribui índices ímpares de tal forma que  $m = 2t - 1$

$$E_{2t-1} = \frac{-4 \tanh \xi_0}{\pi(2t-3)(2t-1)(2t+1) \sinh(2t-1)\xi_0}. \quad (4.38)$$

Uma vez já definido o coeficiente  $E_n = E_m = E_{2t-1}$ , propõe-se a solução geral da equação (5.1)

$$v^*(\xi, \theta) = \frac{-4 \tanh \xi_0}{\pi} \sum_{t=1}^{\infty} \frac{\sin(2t-1)\theta \sinh(2t-1)\xi}{(2t-3)(2t-1)(2t+1) \sinh(2t-1)\xi_0}. \quad (4.39)$$

Retomando a mudança de variável em (3.37), tem-se a solução da equação de Poisson proposta em (3.17):

$$u^*(\xi, \theta) = -\frac{\sinh^2 \xi \sin^2 \theta}{2 \cosh^2 \xi_0} - \frac{4 \tanh^2 \xi_0}{\pi} \sum_{t=1}^{\infty} \frac{\sin(2t-1)\theta \sinh(2t-1)\xi}{(2t-3)(2t-1)(2t+1) \sinh(2t-1)\xi_0}. \quad (4.40)$$

Com o campo de velocidades definido pela equação (4.40), é possível realizar uma distribuição do campo de velocidades considerando uma relação de  $b/a = 0.5$ . Desta forma, é possível obter um domínio retangular em coordenadas elípticas (Figura 4.1) e outro domínio semielíptico (Figura 4.2). Posteriormente, compara-se os resultados obtidos com a literatura do Alassar e Abushoshah (2012), como demonstrado pela Figura 4.3.

Desta maneira, é perceptível a coincidência entre os dois resultados devido a semelhança como as curvas de nível se distribuem em relação a geometria da seção. Ademais, ao comparar as imagens, nota-se resultados analíticos obtidos e percebe-se, principalmente, a condição de não deslizamento na fronteira da seção semielíptica e sua influência na determinação da distribuição do campo de velocidades. Além disso, nota-se, também que a velocidade máxima fica restrita somente a regiões centrais da semielipse, e com um formato um tanto quanto elipsoidal.

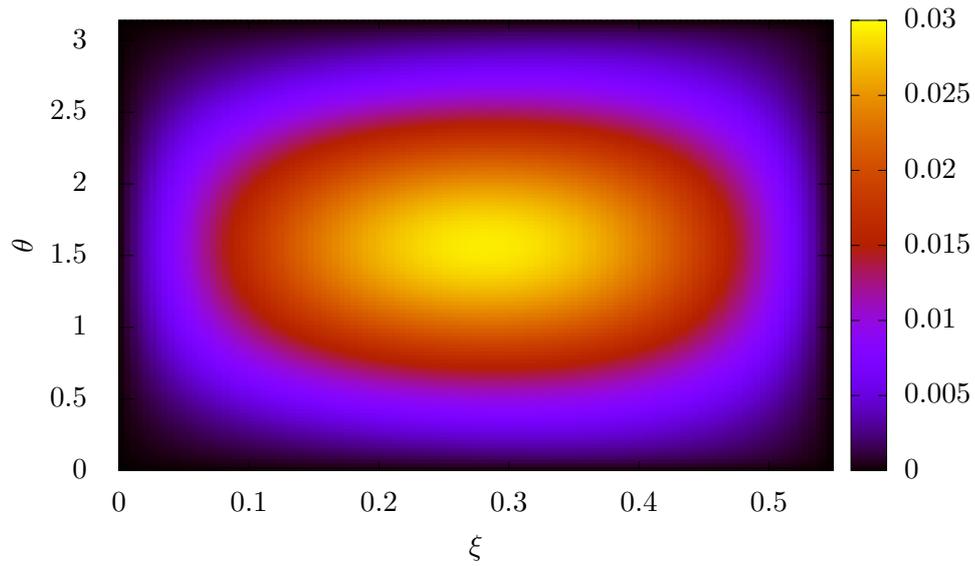


Figura 4.1: Campo de velocidade do escoamento de *Poiseuille* para  $b/a = 0.5$  no domínio retangular em coordenadas elípticas

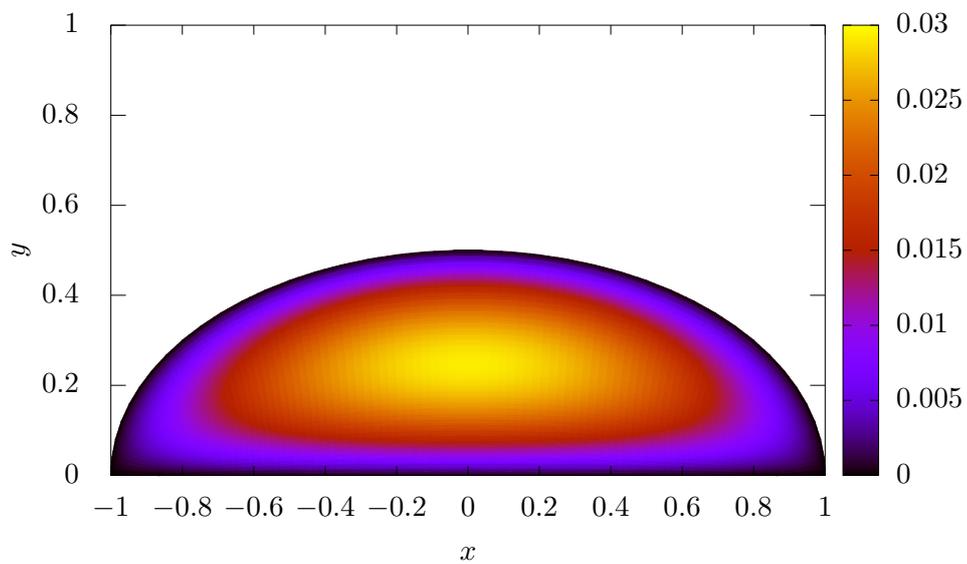


Figura 4.2: Campo de velocidade do escoamento de *Poiseuille* para  $b/a = 0.5$  no domínio elíptico em coordenadas cartesianas

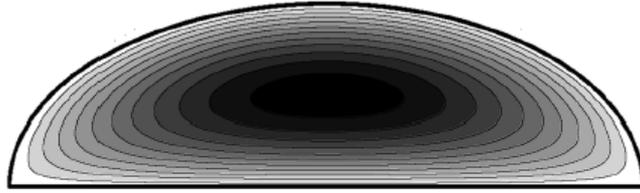


Figura 4.3: Distribuição de Velocidades para o caso  $b/a = 0.5$

Fonte: Alassar e Abushoshah (2012)

Além disso, é importante visualizar a distribuição do campo de velocidades para outros valores de  $b/a$ . Assim, plota-se outras distribuições a fim de observar o comportamento do campo de velocidades em regiões de relações limítrofes como quando  $b/a = 0.95$  (Figuras 4.4 e 4.5) e em regiões de relações anteriores como em  $b/a = 0.2$  (Figuras 4.6 e 4.7).

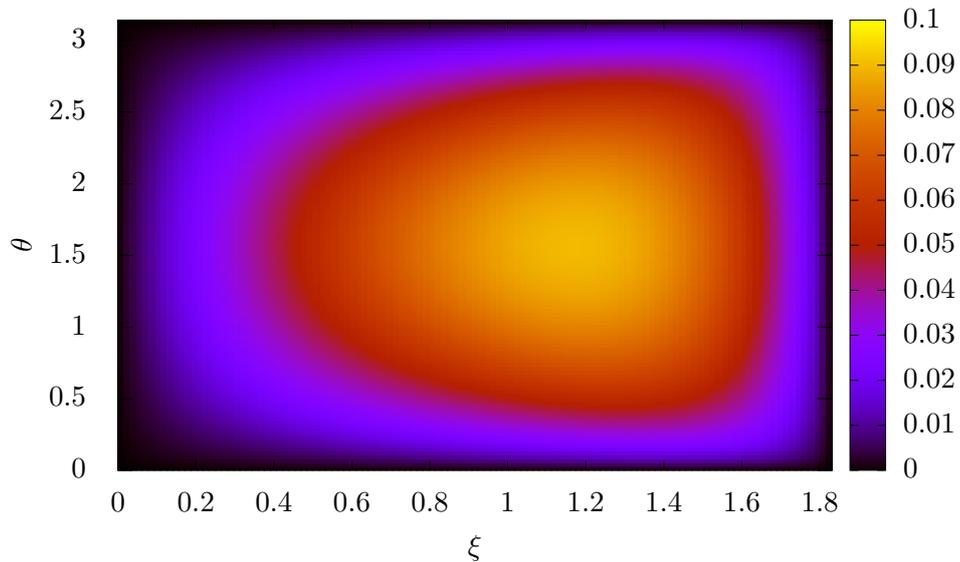


Figura 4.4: Campo de velocidade do escoamento de *Poiseuille* para  $b/a = 0.95$  no domínio retangular em coordenadas elípticas

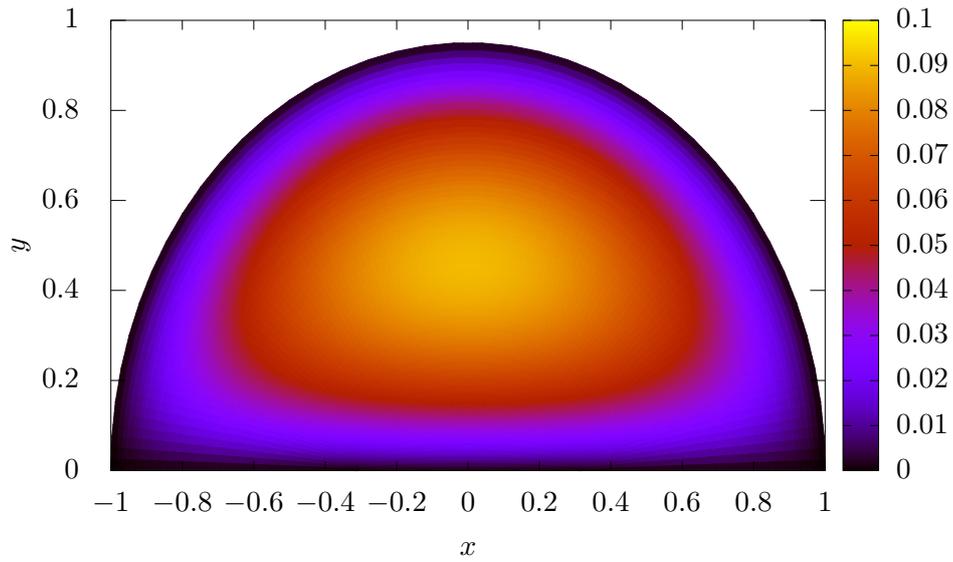


Figura 4.5: Campo de velocidade do escoamento de *Poiseuille* para  $b/a = 0.95$  no domínio semi-elíptico em coordenadas cartesianas

Neste caso para  $b/a = 0.95$ , percebe-se que a tendência de uma distribuição de velocidades para o caso semicircular é evidente uma vez que a razão entre o semieixo maior e o semieixo menor está se aproximando de 1. Outra observação a ser realizada, fica por conta da desfiguração da distribuição do campo de velocidades no domínio retangular. Isso se deve pois matematicamente não há como descrever uma figura circular em coordenadas elípticas, apesar de saber que há uma relação limítrofe quando  $b/a \rightarrow 1$ .

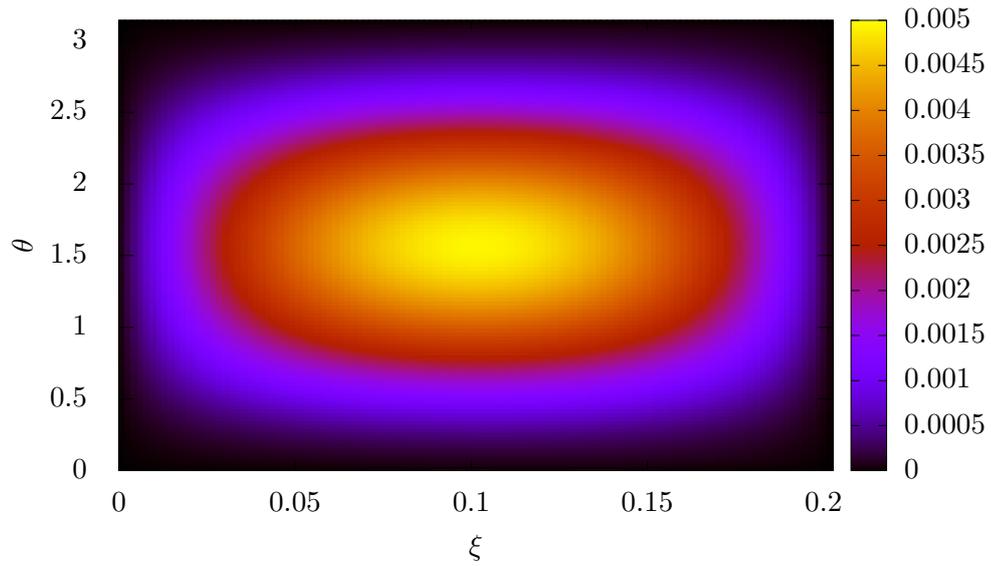


Figura 4.6: Campo de velocidade do escoamento de *Poiseuille* para  $b/a = 0.2$  no domínio retangular em coordenadas elípticas

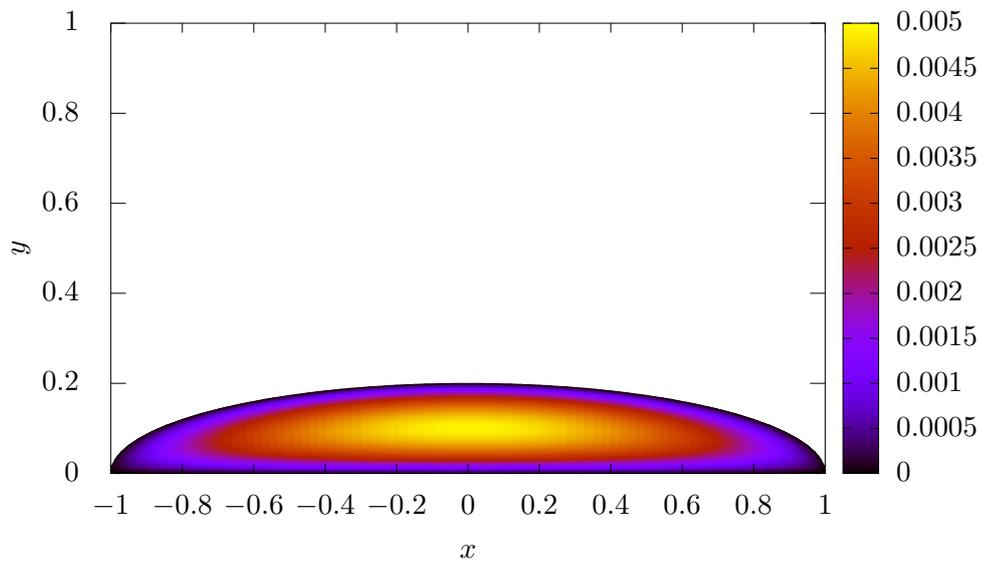


Figura 4.7: Campo de velocidade do escoamento de *Poiseuille* para  $b/a = 0.2$  no domínio semi-elíptico em coordenadas cartesianas

## 4.2 VELOCIDADE MÉDIA E VAZÃO

Com o campo de velocidade  $u(\xi, \theta)$  definido, é possível obter a velocidade média que atua na seção semi-elíptica através do cálculo da vazão ( $Q$ ) e da área da seção ( $A$ ). Sendo assim, se observa que:

$$\bar{u}^* = \frac{Q}{A} = \frac{\iint u^*(\xi, \theta) dA}{A} = \frac{\int_0^{\xi_0} \int_0^{\pi} u^*(\xi, \theta) c^2 (\sen^2 \theta + \sinh^2 \xi) d\theta d\xi}{\int_0^{\xi_0} \int_0^{\pi} c^2 (\sinh^2 \xi + \sen^2 \theta) d\theta d\xi}. \quad (4.41)$$

Note que

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{\xi_0} \int_0^{\pi} c^2 (\sinh^2 \xi + \sen^2 \theta) d\theta d\xi \\ &= \frac{c^2 \pi}{2} \sinh \xi_0 \cosh \xi_0 \end{aligned} \quad (4.42)$$

e

$$Q = \int_0^{\xi_0} \int_0^{\pi} u^*(\xi, \theta) c^2 (\sen^2 \theta + \sinh^2 \xi) d\theta d\xi. \quad (4.43)$$

Separando a equação (4.43) utilizando a soma das integrais, e integrando o primeiro termo de  $u(\xi, \theta)$ , obtém-se:

$$\begin{aligned} \iint_A \frac{-\frac{\sinh^2 \xi \sen^2 \theta dA}{2 \cosh^2 \xi_0}}{A} &= \frac{\int_0^{\xi_0} \int_0^{\pi} -\frac{\sinh^2 \xi \sen^2 \theta}{2 \cosh^2 \xi_0} c^2 (\sen^2 \theta + \sinh^2 \xi) d\theta d\xi}{\frac{c^2 \pi}{2} \sinh \xi_0 \cosh \xi_0} \\ &= -\frac{1}{\pi \sinh \xi_0 \cosh^3 \xi_0} \int_0^{\xi_0} \int_0^{\pi} \sinh^2 \xi \sen^2 \theta (\sen^2 \theta + \sinh^2 \xi) d\theta d\xi \\ &= -\frac{1}{8 \sinh \xi_0 \cosh^3 \xi_0} \int_0^{\xi_0} (3 \sinh^2 \xi + 4 \sinh^4 \xi) d\xi \\ &= -\frac{\tanh^2 \xi_0}{8}. \end{aligned} \quad (4.44)$$

Para o segundo termo da equação (4.43), temos que

$$\begin{aligned} &\frac{\iint_A -\frac{4 \tanh^2 \xi_0}{\pi} \sum_{t=1}^{\infty} \frac{\sen(2t-1)\theta \sinh(2t-1)\xi}{(2t-3)(2t-1)(2t+1) \sinh(2t-1)\xi_0} dA}{A} \\ &= \frac{\int_0^{\xi_0} \int_0^{\pi} -\frac{4 \tanh^2 \xi_0}{\pi} \sum_{t=1}^{\infty} \frac{\sen(2t-1)\theta \sinh(2t-1)\xi}{(2t-3)(2t-1)(2t+1) \sinh(2t-1)\xi_0} c^2 (\sen^2 \theta + \sinh^2 \xi) d\theta d\xi}{\frac{c^2 \pi}{2} \sinh \xi_0 \cosh \xi_0} \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} & \frac{\iint_A -\frac{4 \tanh^2 \xi_0}{\pi} \sum_{t=1}^{\infty} \frac{\sin(2t-1)\theta \sinh(2t-1)\xi}{(2t-3)(2t-1)(2t+1) \sinh(2t-1)\xi_0} dA}{A} \\ &= -\frac{8 \tanh^2 \xi_0}{\pi^2 \sinh \xi_0 \cosh \xi_0} \int_0^{\xi_0} \int_0^{\pi} \sum_{t=1}^{\infty} \frac{\sin(2t-1)\theta \sinh(2t-1)\xi (\sin^2 \theta + \sinh^2 \xi)}{(2t-3)(2t-1)(2t+1) \sinh(2t-1)\xi_0} d\theta d\xi. \end{aligned} \quad (4.45)$$

Fazendo,

$$F(t) = -\frac{8 \tanh^2 \xi_0}{\pi^2 (2t-3)(2t-1)(2t+1) \sinh(2t-1)\xi_0 \sinh \xi_0 \cosh \xi_0} \quad (4.46)$$

temos que

$$\begin{aligned} & \frac{\iint_A -\frac{4 \tanh^2 \xi_0}{\pi} \sum_{t=1}^{\infty} \frac{\sin(2t-1)\theta \sinh(2t-1)\xi}{(2t-3)(2t-1)(2t+1) \sinh(2t-1)\xi_0} dA}{A} \\ &= \sum_{t=1}^{\infty} F(t) \int_0^{\xi_0} \int_0^{\pi} \sinh(2t-1)\xi \sin(2t-1)\theta (\sin^2 \theta + \sinh^2 \xi) d\theta d\xi. \end{aligned} \quad (4.47)$$

Tendo o resultado da integral de área da equação (4.47) como

$$\begin{aligned} & \int_0^{\xi_0} \int_0^{\pi} \sinh(2t-1)\xi \sin(2t-1)\theta (\sin^2 \theta + \sinh^2 \xi) d\theta d\xi \\ &= -\frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{1}{2t-3} - \frac{2}{2t-1} \right) \sinh(2t-1)\xi_0 \sinh \xi_0 \cosh \xi_0 \right. \\ & \quad \left. - \frac{\cosh(2t-1)\xi_0 \sinh^2 \xi_0}{2t-3} + \frac{[\sinh(2t-1)\xi_0 \sinh \xi_0 \cosh \xi_0 - \cosh(2t-1)\xi_0 \sinh^2 \xi_0]}{2t+1} \right\} \end{aligned} \quad (4.48)$$

aplica-se na equação (4.47) com o termo  $F(t)$ , de forma que

$$\begin{aligned} & \frac{\iint_A -\frac{4 \tanh^2 \xi_0}{\pi} \sum_{t=1}^{\infty} \frac{\sin(2t-1)\theta \sinh(2t-1)\xi}{(2t-3)(2t-1)(2t+1) \sinh(2t-1)\xi_0} dA}{A} = \\ &= \sum_{t=1}^{\infty} F(t) \left[ \frac{2}{(2t+1)(2t-3)} \cosh(2t-1)\xi_0 \sinh^2 \xi_0 \right. \\ & \quad \left. - \frac{4}{(2t-3)(2t-1)(2t+1)} \sinh(2t-1)\xi_0 \sinh \xi_0 \cosh \xi_0 \right] \end{aligned} \quad (4.49)$$

colocando na equação o termo representado por  $F(t)$  na equação (4.46) e simplificando os termos com identidades trigonométricas hiperbólicas, é possível mostrar que a equação (4.49) é escrita da seguinte forma

$$\frac{\iint_A -\frac{4 \tanh^2 \xi_0}{\pi} \sum_{t=1}^{\infty} \frac{\text{sen}(2t-1)\theta \text{senh}(2t-1)\xi}{(2t-3)(2t-1)(2t+1) \text{senh}(2t-1)\xi_0} dA}{A} = \sum_{t=1}^{\infty} \left[ \frac{32 \tanh^2 \xi_0}{\pi^2 (2t-3)^2 (2t-1)^2 (2t+1)^2} - \frac{16 \tanh^3 \xi_0 \text{coth}(2t-1)\xi_0}{\pi^2 (2t-3)^2 (2t-1)(2t+1)^2} \right] \quad (4.50)$$

ou seja, retornando para a expressão original com os resultados obtidos obtém-se

$$\overline{u^*} = \frac{\tanh^2 \xi_0}{4} - \frac{16 \tanh^3 \xi_0}{\pi^2} \sum_{t=1}^{\infty} \frac{\text{coth}(2t-1)\xi_0}{(2t-3)^2 (2t-1)(2t+1)^2}. \quad (4.51)$$

Entretanto, buscando na literatura de Alassar e Abushoshah (2012), o campo de velocidades obtido por ele, equação (4.52), é ligeiramente diferente obtido no presente trabalho. Essa diferença se deve essencialmente a termos trigonométricos hiperbólicos que possuem características distintas mas entregam o mesmo resultado.

$$\overline{u^*} = \left( \frac{1}{4} + \frac{2}{\pi^2} \right) \tanh^2 \xi_0 - \frac{16 \tanh^2 \xi_0}{\pi^2 \cosh^2 \xi_0} \sum_{t=1}^{\infty} \frac{\sinh 2t\xi_0}{(2t-3)^2 (2t-1)(2t+1)^2 \sinh(2t-1)\xi_0}. \quad (4.52)$$

Além disso, como a magnitude da velocidade máxima depende da razão entre  $b$  e  $a$ , plota-se na Figura 4.8 as curvas de velocidade média obtida, velocidade média de Alassar e Abushoshah (2012) e velocidade máxima, obtida da solução de  $(\partial u / \partial \xi)(\xi, \pi/2) = 0$  até o valor máximo de  $b/a = 0.999$ . Portanto, ao observar as curvas obtidas, valida-se o resultado obtido para o campo de velocidade uma vez que a curva encontrada coincide exatamente em relação à curva de Alassar e Abushoshah (2012).

É importante ressaltar que a velocidade média obtida  $\overline{u^*}$  tende a velocidade média do caso semi-circular quando  $b/a \rightarrow 1$ , ou seja,  $\overline{u^*} \rightarrow (1/4) - (2/\pi^2)$ . Para isso, ao analisar o campo de velocidade para o caso circular em coordenadas polares  $(r, \theta, z)$  com  $a$  sendo o raio da seção semi-circular e  $R = r/a$ , temos que

$$\overline{u^*}(R, \theta) = -\frac{R^2 \text{sen}^2 \theta}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{R^{2k-1} \text{sen}(2k-1)\theta}{(2k-3)(2k-1)(2k+1)}. \quad (4.53)$$

Desta forma, percebe-se a relação que há entre os campos de velocidade média entre as seções circulares e elípticas, observando a concordância entre a curva alaranjada e a curva pontilhada. Além disso, no limiar o valor máximo assumido para a razão de aspecto ( $b/a$ ) fica limitado matematicamente pelo valor unitário, uma vez que não há como retratar a circunferência com

coordenadas elípticas.

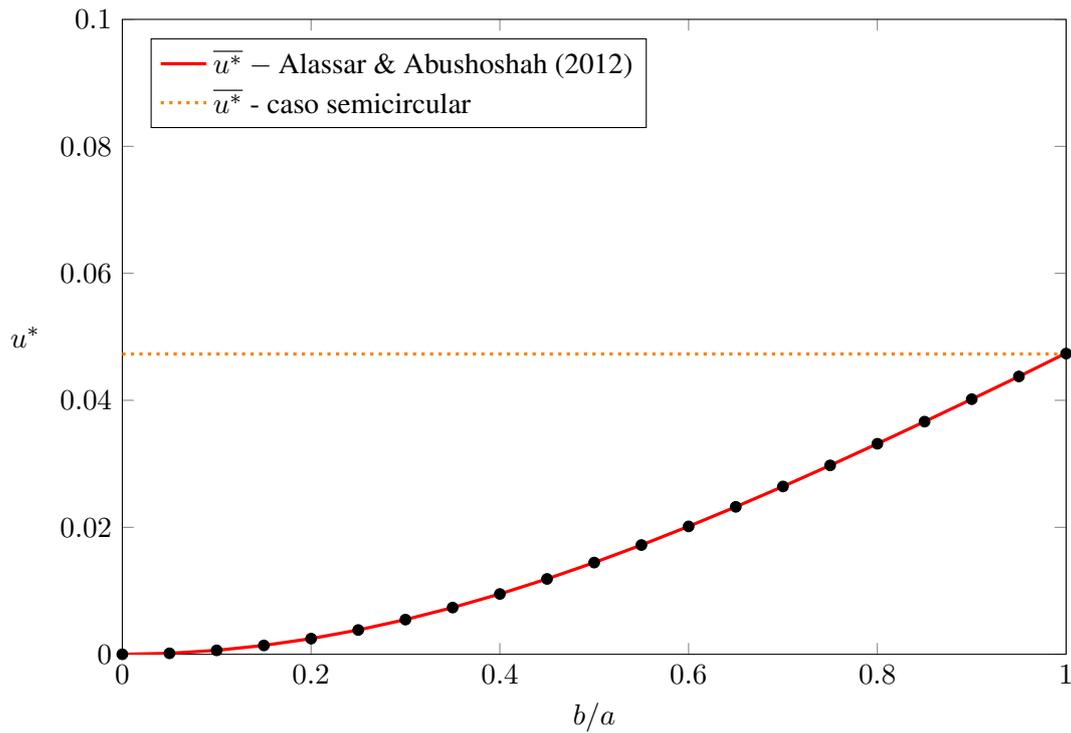


Figura 4.8: Velocidade média e máxima em função da razão de aspecto  $b/a$ .

### 4.3 FATOR DE ATRITO DE FANNING

Como visto na subseção 2.2.5, a definição do fator de atrito de *Fanning* depende sobretudo do cálculo da tensão atuante na parede do canal devido a interação com o escoamento. Neste sentido, se faz um balanço de forças atuantes sobre uma das paredes do canal de tal forma que se possa relacionar a tensão cisalhante com a força devido a pressão do escoamento.

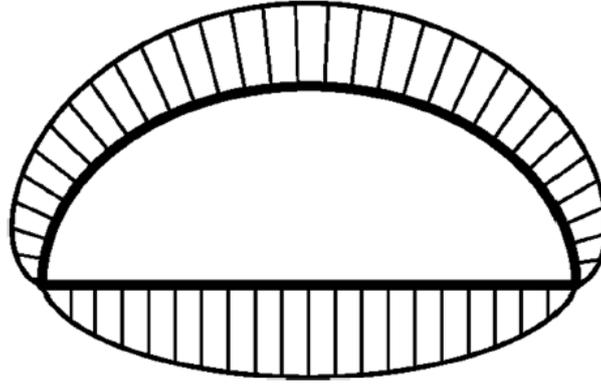


Figura 4.9: Diagrama esquemático da tensão atuante na seção semi-elíptica

Fonte: Alassar e Abushoshah (2012)

Com isso, o balanço de forças em uma das paredes do canal fica (Figura 4.9)

$$\bar{\sigma} p^* \Delta L = \Delta P A \quad (4.54)$$

onde  $\bar{\sigma}$  é a tensão cisalhante média atuante sobre a interação entre o fluido e a parede,  $\Delta P$  é a variação de pressão ao longo do comprimento  $\Delta L$  adotado,  $A$  a área da seção semi-elíptica e  $p^*$  é o perímetro da seção semi-elíptica calculado por

$$p^* = 2a \left[ 1 + E \left( 1 - \left( \frac{b}{a} \right)^2 \right) \right] \quad (4.55)$$

em que  $E(\kappa)$  é a integral elíptica completa de segunda ordem, calculada por

$$E(\kappa) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 \phi} d\phi \quad (4.56)$$

onde  $\kappa = \left( 1 - \left( \frac{b}{a} \right)^2 \right)$ . Assim, a equação (4.54) se torna

$$\bar{\sigma} = \frac{\Delta P A}{\Delta L 2a \left[ 1 + E \left( 1 - \left( \frac{b}{a} \right)^2 \right) \right]} \quad (4.57)$$

Utilizando o conceito da equação (2.5), é possível obter

$$f = \frac{\Delta P A}{\rho \bar{w}^2 \left[ \Delta L a \left[ 1 + E \left( 1 - \left( \frac{b}{a} \right)^2 \right) \right] \right]} \quad (4.58)$$

Entretanto, define-se um número de *Reynolds* com  $\sqrt{A}$  como comprimento característico,

segundo Bahrami, Yovanovich e Culham (2007), de tal forma que

$$Re_{\sqrt{A}} = \frac{\rho \bar{w} \sqrt{A}}{\mu} \quad (4.59)$$

diante disso, a utilização do comprimento característico baseado em  $\sqrt{A}$  é superior ao  $D_h$  uma vez que resultados para  $fRe_{\sqrt{A}}$  são mais consistentes. Assim, utiliza-se

$$fRe_{\sqrt{A}} = \frac{\frac{\Delta PA}{\Delta La \left[ 1 + E \left( 1 - \left( \frac{b}{a} \right)^2 \right) \right]} \rho \bar{w} \sqrt{A}}{\rho \bar{w}^2} = \frac{\frac{\Delta PA \sqrt{A}}{\Delta La \left[ 1 + E \left( 1 - \left( \frac{b}{a} \right)^2 \right) \right]}}{\bar{w} \mu} \quad (4.60)$$

com isso, para determinar o valor de  $\bar{w}$ , retorna-se a equação (3.31) e aplica-se na equação (4.60), obtendo

$$fRe_{\sqrt{A}} = \frac{\frac{\Delta PA \sqrt{A}}{\Delta La \left[ 1 + E \left( 1 - \left( \frac{b}{a} \right)^2 \right) \right]}}{\bar{u}^* \left( -\frac{a^2}{\mu} \frac{dP}{dz} \right) \mu} \quad (4.61)$$

Simplificando os termos, temos que

$$fRe_{\sqrt{A}} = \frac{\left( \frac{\pi b}{2a} \right)^{3/2}}{\left[ 1 + E \left( 1 - \left( \frac{b}{a} \right)^2 \right) \right] \bar{u}^*} \quad (4.62)$$

Tendo a equação (4.62), é possível obter a curva que relaciona os diferentes valores de  $fRe_{\sqrt{A}}$  e  $b/a$  vide a Figura 4.11. A partir destes dados, é possível perceber que a medida que se  $b/a \rightarrow 1$  a semi-ipse tende para um semicírculo, e assim, a relação  $fRe_{\sqrt{A}}$  tende ao valor de uma semicircunferência ( $fRe_{\sqrt{A}} = 15.7668$ ) como visto na Figura 4.10 considerando o valor citado por (Wang 2015).

**Table 1 Comparison of  $Po$  of the semicircular duct from various sources**

Source	Year	Method	$Po$
Lei and Trupp [4]	1989	Infinite series	15.7668*
Wang [5]	2008	Dual coordinates	15.7668*
Alassar [6]	2014	Infinite series	15.7668*
Shah and London [7]	1978	Unknown	15.767
Velusamy et al. [3]	1995	Finite volume	15.766
Sparrow and Haji-Seikh [8]	1966	Point match	15.77
Alassar and Abushoshah [1]	2012	Infinite series	15.769
Ben-Ali et al. [9]	1989	Finite difference	15.79
Etemad and Majumdar [10]	1995	Finite element	15.860
Bahrami et al. [11]	2007	Approximate	15.286

Most accurate values are on top. Asterisk means exact closed form.

Figura 4.10: Tabela com a compilação de diversos autores do valor do número de *Poiseuille* ( $Po$ ) para uma seção semi-circular

Fonte: Wang (2015)

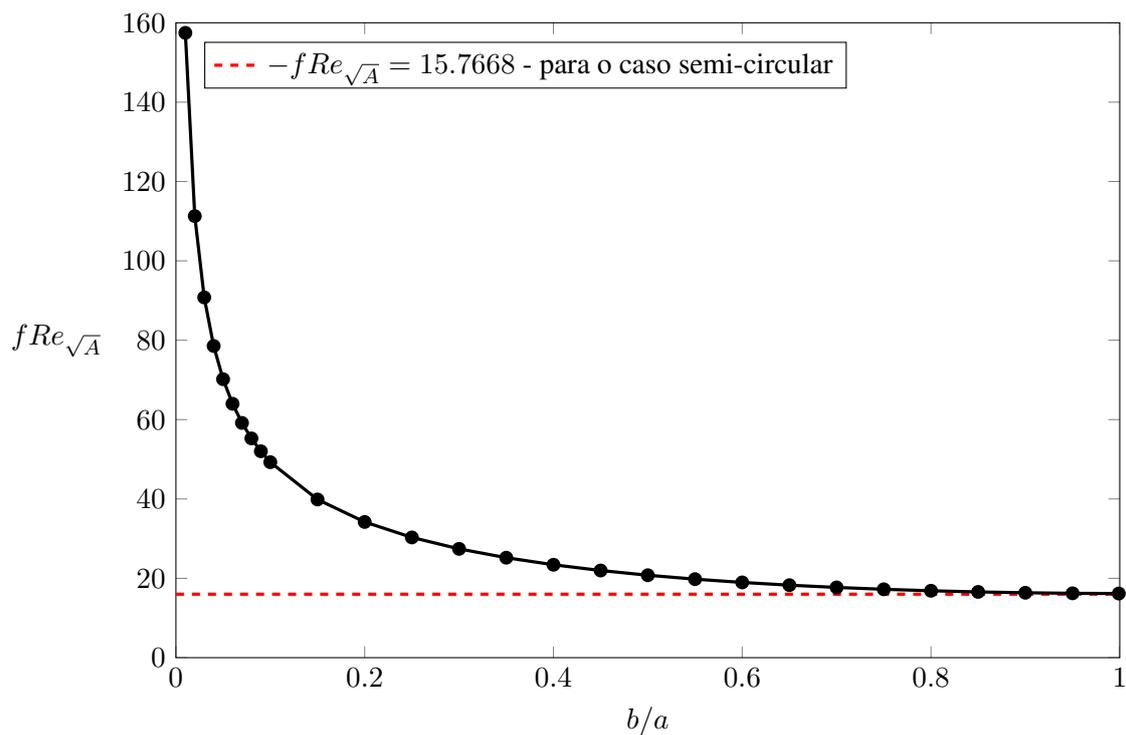


Figura 4.11: Fator  $fRe_{\sqrt{A}}$  em função da razão de aspecto  $b/a$ .

# 5 SOLUÇÃO NUMÉRICA DO PROBLEMA

Neste capítulo apresenta-se as soluções numéricas obtidas através do método das diferenças finitas (MDF) a partir das equações diferenciais parciais que descrevem a física de um escoamento de Poiseuille em uma seção semielíptica.

## 5.1 O MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS

O problema apresentado consiste em uma equação diferencial parcial, a equação de Laplace (5.1), sujeita a uma condição de contorno do tipo Dirichlet em (5.2):

$$\frac{\partial^2 v^*}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial \theta^2} = 0 \quad (5.1)$$

$$v^*(\xi, 0) = v^*(\xi, \pi) = v^*(0, \theta) = 0 \quad v^*(\xi_0, \theta) = \frac{1}{2} \tanh^2 \xi_0 \sin^2 \theta. \quad (5.2)$$

Nesses casos, a implementação numérica pode ser feita de diferentes formas, dentre as quais se exemplificam o Método dos Elementos Finitos (MEF), o Método das Diferenças Finitas (MDF), Método pseudo-espectral e, por fim, o Método de Integrais de Contorno (MIC). Para o presente trabalho, selecionou-se o Método das Diferenças Finitas (MDF).

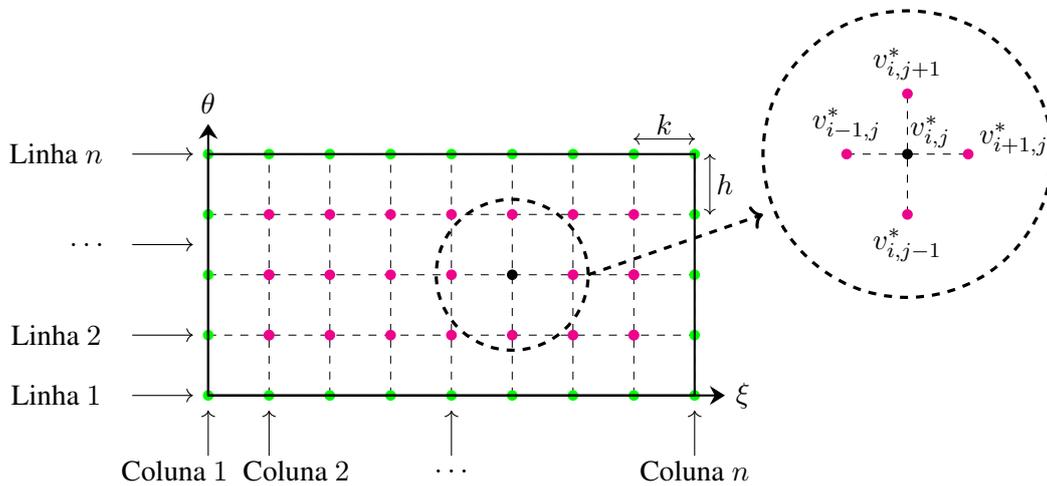


Figura 5.1: Exemplo de domínio retangular discretizado para MDF para o caso analisado.

Segundo Sousa et al. (2009), o método das diferenças finitas consiste em particionar um determinado domínio da função incógnita da equação diferencial parcial criando assim um domínio discreto. No problema em questão selecionou-se um domínio discreto retangular como visto na Figura 5.1, no qual se substitui as derivadas existentes na região por aproximações de diferenças

centrais. O MDF é bem prático uma vez que não há necessidade de um grande poderio computacional e é de fácil compreensão, o tornando uma excelente ferramenta a ser aplicada em problemas unidimensionais, sem quaisquer complexidade.

Como dito em Olsen-Kettle (2011), o MDF se baseia na aproximação da expansão da série de Taylor em relação às derivadas e as diferenças em cada ponto do domínio. Logo, a equação diferencial parcial se aproxima de uma equação de diferenças que, fisicamente, representa a média entre os pontos centrais e seus quatro vizinhos nas fronteiras ao norte, sul, leste e oeste, vide Figura 5.1. Assim, ao discretizar toda região delimitada pelo domínio retangular imputado pode-se obter valores médios das derivadas parciais somente utilizando equações de diferenças como aproximações.

A representação das condições de contorno na Figura 5.1 se caracteriza pela cor verde assumida nos pontos de contorno do domínio devido as condições de não deslizamento ou as condições de contorno de Dirichlet. Já os pontos de malha ou pontos de *lattice* são caracterizados pela cor rosa e são determinados pelos valores médios dos circunvizinhos.

Assim sendo, considere uma equação de Laplace como a (5.1) aplicada no bordo e no interior de um domínio retangular  $\Omega$  tal que  $\Omega = \Xi \times \Theta = \{(\xi, \theta) \mid \xi \in \Xi \wedge \theta \in \Theta\}$  em que  $\Xi = [0, \xi_0]$  e  $\Theta = [0, \pi]$ .

Se tratando de um problema discreto, a definição dos pontos de malha ( $n$ ) é essencial ao problema uma vez que este parâmetro determina o refino da malha e é limitado a uma quantidade pré-selecionada. Além disso, caso seja requerida a obtenção do valor associado a um ponto intermediário se faz necessário a criação de uma nova malha mais refinada a fim de acessar o ponto requerido.

Assim, os tamanhos de malha ( $h$  e  $k$ ) são representados pelos passos da discretização da malha em cada direção ( $\xi$  e  $\theta$ ) e são funções dos pontos de malha como nas equações (5.3) e (5.4). Esses tamanhos de malha definem o refino da malha, ou seja, quanto mais pontos forem selecionados menores serão os passos discretizados e, portanto, a densidade da malha se torna maior. Por consequência, ao refinar a malha a solução numérica obtida para o problema se torna mais precisa e refinada. Entretanto, quanto maior for o refino maior será o esforço computacional a ser realizado e com isso mais equações a serem solucionadas.

$$h = \frac{\xi_0}{(n - 1)}. \quad (5.3)$$

$$k = \frac{\pi}{(n - 1)}. \quad (5.4)$$

Apesar de obter os valores aproximados para o campo da função incógnita, é inerente o erro numérico associado ao processo. Como forma de diminuir este erro, adota-se medidas preventivas para tentar reduzir o erro associado ao processo numérico. As medidas adotadas são descritas abaixo como:

1. Para o domínio computacional há de se adotar um número suficientemente grande de pontos de discretização a fim da resolução aproximada da equação diferencial parcial.
2. Todas as derivadas necessárias nos pontos de discretização devem ser substituídas por diferenças centrais finitas aproximadas que usam valores da função calculada nos pontos adjacentes.

A partir do problema apresentado anteriormente, a equação de Laplace representada em (5.1), pode ser aproximada utilizando as equações das diferenças centrais apresentadas em Zill e Cullen (2009)

$$\frac{\partial^2 v^*}{\partial \xi^2} \approx \frac{1}{h^2} [v^*(\xi + h, \theta) - 2v^*(\xi, \theta) + v^*(\xi - h, \theta)] \quad (5.5)$$

$$\frac{\partial^2 v^*}{\partial \theta^2} \approx \frac{1}{k^2} [v^*(\xi, \theta + k) - 2v^*(\xi, \theta) + v^*(\xi, \theta - k)]. \quad (5.6)$$

Portanto, substituindo na equação de Laplace em (5.1), tem-se

$$\frac{\partial^2 v^*}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial \theta^2} \approx \frac{1}{h^2} [v^*(\xi + h, \theta) - 2v^*(\xi, \theta) + v^*(\xi - h, \theta)] + \frac{1}{k^2} [v^*(\xi, \theta + k) - 2v^*(\xi, \theta) + v^*(\xi, \theta - k)]. \quad (5.7)$$

Como forma de facilitar a notação, adota-se a substituição de  $v^*(\xi, \theta) = v_{ij}^*$  e simplifica-se para um novo fator atribuído  $\beta = k^2/h^2$ , assim

$$\frac{\partial^2 v^*}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial \theta^2} \approx (-2\beta - 2)v_{i,j}^* + \beta v_{i+h,j}^* + \beta v_{i-h,j}^* + v_{i,j+h}^* + v_{i,j-h}^*. \quad (5.8)$$

Assim, a equação de Laplace em (5.1), se resume a *equação discretizada* para o domínio retangular apresentado na Figura 5.1

$$(-2\beta - 2)v_{i,j}^* + \beta v_{i+h,j}^* + \beta v_{i-h,j}^* + v_{i,j+h}^* + v_{i,j-h}^* = 0 \quad (5.9)$$

com as seguintes condições de Dirichlet

$$v_{1,j}^* = v_{i,1}^* = v_{n,j}^* = 0 \quad v_{i,n}^* = \frac{1}{2} \tanh^2 \xi_0 \sin^2 \theta_i. \quad (5.10)$$

## 5.2 SOLUÇÃO NUMÉRICA VIA MDF

Como a *equação discretizada* apresentada em (5.9) é um sistema de várias equações em função do número de pontos de malha ( $n$ ) definidos durante a discretização, é possível escrever este sistema como uma equação matricial do tipo  $\mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{b}$  em que  $\mathbf{A}$  representa a matriz dos coeficientes da equação discretizada,  $\mathbf{v}$  representa a variável incógnita que no caso é  $v_{i,j}^*$  e, por fim,  $\mathbf{b}$  representa o vetor que constitui as condições de Dirichlet associada a cada ponto externo do domínio discretizado não se limitando apenas as condições de contorno, entretanto, como se trata da equação de Laplace quaisquer outras condições são nulas.

O objetivo da resolução desta equação matricial é determinar valores para a velocidade  $v_{i,j}^*$  associada a cada ponto da malha discretizada no domínio apresentado através dos pontos adjacentes a ele. Assim, ao evidenciar cada parte da equação é possível perceber diversos facilitadores para implementação da resolução, portanto:

### 1. Matriz de coeficientes ( $\mathbf{A}$ ):

A matriz de coeficientes é uma matriz quadrada, simétrica, limitada e do tipo esparsa, ou seja, possui diversos elementos de valores nulos. A sua constituição se baseia prioritariamente nos coeficientes da *equação discretizada* e num conjunto de blocos de matrizes menores de ordem iguais que se repetem dentro de um padrão de repetição.

Considerando que  $n$  seja os pontos de malha da discretização, consegue-se demonstrar que a ordem de cada bloco da matriz  $\mathbf{A}$  também possui mesmo valor sendo que para a ordem da matriz de coeficientes se atribui o valor de  $n^2$ .

A representação dos padrões de repetição da matriz  $\mathbf{A}$  é:

$$\mathbf{A}_{n^2 \times n^2} = \begin{bmatrix} I & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \zeta & \psi & \zeta & 0 & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & 0 & \zeta & \psi & \zeta \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & I \end{bmatrix}$$

onde  $I$  é a matriz identidade,  $\zeta$  é a matriz de *beta's* e  $\psi$  a matriz central com suas represen-

tações matemáticas feitas a seguir:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\zeta_{n \times n} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\psi_{n \times n} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & (-2\beta - 2) & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & 1 & \ddots & 1 & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & (-2\beta - 2) & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

## 2. Vetor incógnita (v):

O vetor incógnita representa os valores calculados numericamente através da função do MATLAB *right array division*.

O vetor incógnita é constituído de um vetor com  $n^2$  entradas referentes aos valores de  $v_{i,j}^*$  e é representado por:

$$\mathbf{v}_{n^2}^T = (v^*(1), v^*(2), v^*(3), \dots, v^*(n^2)).$$

## 3. Vetor responsável pelas condições de contorno (b):

O vetor responsável pelas condições de contorno carrega em si as regiões do domínio em que há a condição de deslizamento, ou seja, nos pontos em que  $v^* = 0$ , assim, para os casos em que  $\theta = 0$ ,  $\theta = \pi$  e  $\xi = 0$ . Além disso, no contorno em  $\xi = \xi_0$ , há uma condição de contorno diferenciada dada por  $v^* = 0.5 \tanh^2 \xi_0 \sin^2 \theta$ .

Portanto, o vetor  $\mathbf{b}$  tem seu conteúdo todas essas informações ao longo do contorno do domínio, assim sua constituição é formada prioritariamente de zeros. Nas regiões em que  $\xi = \xi_0$ , aplica-se a condição descrita acima. A equivalência de posição aplicada a essa região define que a varredura destas posições se situam sempre nas posições múltiplas dos  $n$  pontos escolhidos para a definição da malha. Assim, o vetor  $\mathbf{b}$  é descrito como:

$$\mathbf{b}(\mathbf{i})_{n^2}^T = \begin{cases} 0.5 \tanh^2 \xi_0 \sin^2 \theta_i, & \text{se } i = kn, \text{ com } k \in \mathbb{Z} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

## 5.3 IMPLEMENTAÇÃO

O objetivo desta seção do trabalho consiste na demonstração da implementação do Método das Diferenças Finitas através do software MATLAB® desenvolvido pela empresa *MathWorks*.

Cada etapa de código será demonstrada e comentada a partir da ideia central da resolução do problema físico apresentado.

### 5.3.1 Primeiros parâmetros necessários

Nesta etapa, se apresenta os parâmetros fundamentais de entrada utilizados para a composição do domínio computacional. Além disso, há a necessidade de também declarar alguns parâmetros auxiliares como parte deste processo.

```

1 %Definicoes
2 n = 40; %numero de pontos // Referente aos blocos
3 eta = n^2; %Referente a ordem da matriz e da malha
4 p_i= 4*atan(1);
5 theta = 0:(p_i/(n-1)):p_i;
6 b_r = 0.99; %razao de aspecto --> dominador b
7 a_r = 1; %razao de aspecto --> numerador a
8 RA = b_r/a_r; % definicao de razao de aspecto
9 xi_0= atanh(RA); %calculo do xi_0
10 h = (xi_0)/(n-1); %tamanho da malha na direcao xi
11 k = p_i/(n-1); %tamanho de malha na direcao theta
12 Beta = (h^2)/(k^2); %constante de discretizacao

```

Listing 5.1: Código para parâmetros necessários.

Todos os parâmetros que foram definidos possuem um nível de importância para o método computacional. As variáveis  $h$ ,  $k$ ,  $n$  e  $\eta$  assumem a responsabilidade de entrada de dados para a definição geral da malha e são descritas respectivamente como sendo o tamanho de malha na direção  $\xi$ , o tamanho de malha na direção  $\theta$ , os pontos de malha e a quantidade de blocos, respectivamente. Outras variáveis são definidas afim de determinar uma constante necessária para o processo como no caso de  $p_i$ , que representa a constante  $\pi$ ,  $Beta$ , define a constante de discretização, e  $RA$ , é a própria razão de aspecto. Por fim, os vetores necessários para as entradas de dados são demonstrados nessa etapa, como os casos de  $\theta$  e  $\xi_0$  em que é demonstrado a necessidade de ambos ao longo do trabalho.

### 5.3.2 Implementação da Matriz dos Coeficientes

Nesta etapa, o objetivo é a montagem e a implementação da matriz dos coeficientes  $A$ , apresentada na seção 5.2.

Como dito anteriormente, a matriz dos coeficientes  $A$  é esparsa, simétrica, quadrada e limitada, e com isso, a sua construção é feita a partir destas características que facilitam a sua implementação em código.

As etapas implementadas seguem uma montagem lógica de cada diagonal dos blocos que forma a matriz  $A$ , descritos como:

1. Alocação de memória do tamanho da matriz  $A$
2. Construção da diagonal principal
3. Construção da diagonal de  $I$ 's abaixo da diagonal principal
4. Construção da diagonal de  $I$ 's acima da diagonal principal
5. Construção da diagonal de  $\beta$ 's espaçada abaixo da região da diagonal principal da matriz
6. Construção da diagonal de  $\beta$ 's espaçada acima da região da diagonal principal da matriz

Tendo em vistas as etapas de implementação da montagem da matriz dos coeficientes, agora se apresenta o código em MATLAB utilizado para o processo descrito:

```
1 %% Matriz dos coeficientes
2 A = zeros (eta); %declarando a matriz dos coeficientes para alocao de memoria
3 for i=1:1:eta %Diagonal principal
4     if (i<=n || i>eta-n) || (mod(i,n)==1 || mod(i,n)==0)
5         A(i,i)=1;
6     else
7         A(i,i)=- (2*beta+2);
8     end
9 end
10 for i=2:1:eta %Diagonal abaixo da diagonal principal
11     A(i,i-1) = 1;
12     if (i<=n+1 || i>eta-n) || mod(i,n)==1
13         A(i,i-1) = 0;
14     elseif mod(i,n)==0
15         A(i,i-1) = 0;
16     end
17 end
18 for i=1:1:eta-1 %Diagonal acima da diagonal principal
19     A(i,i+1) = 1;
20     if (i<=n || i>eta-n) || mod(i,n)==1
21         A(i,i+1) = 0;
22     elseif mod(i,n) ==0
23         A(i,i+1)=0;
```

```

24     end
25 end
26 for i=n+1:1:eta-n %Diagonal de betas abaixo da regio da diagonal principal
27     A(i,i-n)= beta;
28     if mod(i,n) == 0 || (i<=n || i>eta-n) || mod(i,n) == 1
29         A(i,i-n)=0;
30     end
31 end
32 for i=(2*n-1):1:eta %Diagonal de betas acima da regio da diagonal principal
33     if mod(i,n) == 0 || i<=n || mod(i,n) == 1 || i-(n-1) == n
34         A(i-n,i) = 0;
35     else
36         A(i-n,i) = beta;
37     end
38 end

```

Listing 5.2: Código para implementação da matriz dos coeficientes.

Percebe-se que a lógica de construção em cada diagonal é única e depende prioritariamente da posição  $i$  da matriz dos coeficientes. Assim, para a construção da diagonal principal a posição das linhas e das colunas se equivalem, ou seja,  $i = j$ , e nessas posições atribui-se o valor do coeficiente da equação (5.8).

Para as diagonais de  $I$ 's acima e abaixo da diagonal principal, a lógica para repetição segue que, para toda aquela diagonal se pré-define que todos os valores sejam 1. Posteriormente, coloca-se as exceções nas posições em que a linha  $i$  for divisível pelos pontos de malha  $n$ . Para a diagonal acima, a coluna recebe  $i + 1$ , já para a diagonal de baixo, a coluna recebe o valor de  $i - 1$ .

Para a diagonal de  $beta$ 's abaixo da região da diagonal principal da matriz  $\mathbf{A}$ , a lógica de repetição segue que todas as entradas da diagonal são valores de  $\beta$  e as exceções de zeros são colocadas nas posições em que há divisibilidade entre  $i$  e  $n$ , nas  $n$ 's primeiras entradas e nas  $n$ 's últimas da diagonal e, por fim, nas posições em que a divisão há resto igual a 1. Já para a diagonal de  $beta$ 's acima da região da diagonal principal da matriz  $\mathbf{A}$ , a lógica utilizada engloba que qualquer posição que não seja as que são divisíveis, as  $n$ 's primeiras e últimas, as de resto iguais a 1 e, por fim, nas posições em que  $i - (n - 1) = n$  serão nulas. Para o caso contrário, aloca-se o valor de  $\beta$ .

Após a construção da matriz de coeficientes  $\mathbf{A}$ , parte-se para a construção do vetor responsável pelas condições de contorno  $\mathbf{b}$ .

### 5.3.3 Implementação do vetor responsável pelas condições de contorno

Nesta seção, mostra-se como se fez a implementação e codificação para a construção do vetor  $\mathbf{b}$ .

Em suma, o vetor  $\mathbf{b}$  é um vetor de tamanho  $n^2$  constituído em grande parte por zeros sendo que nas posições em que é possível dividir a posição  $i$  do vetor pelo número de pontos  $n$ , aloca-se

o valor correspondente da posição na única condição de contorno não nula.

Assim, o vetor responsável pelas condições de contorno é implementado em MATLAB da seguinte forma:

```
1 %% Vetor coluna b
2 b = zeros(1,n); %alocacao inicial do espaco da memoria
3 for f=1:1:eta
4     b(f) = 0; %representa as outras 3 condicoes de nao deslizamento nas paredes
5     if mod(f,n) ==0
6         b(f) = 0.5*tanh(xi_0)*tanh(xi_0)*sin(theta(f/n))*sin(theta(f/n));
7         %condicao de contorno na parte superior nao nula
8     end
9 end
10 b=b'; %transposicao do vetor b para alocao correta na eq.matricial
```

Listing 5.3: Código para obtenção do vetor b.

### 5.3.4 Obtenção do vetor incógnita

Nesta seção, o objetivo é mostrar a implementação e obtenção do vetor incógnita  $\mathbf{v}$  responsável por alocar os valores do vetor velocidade pós-processamento da equação matricial, ou seja, tendo em posse a matriz dos coeficientes  $\mathbf{A}$  e o vetor  $\mathbf{b}$ , pode-se obter a solução da equação  $\mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{b}$ .

Assim, a implementação segue a seguinte implementação em MATLAB:

```
1 %% Solucao da equacao matricial
2 v = A\b; %solucao da equacao matricial Ax=b
```

Listing 5.4: Código da obtenção do vetor incógnita.

O processo adotado para solução da equação matricial consiste na inversão da matriz  $\mathbf{A}$ , o que no MATLAB pode ser feito utilizando o operador *right array division*.

É importante ressaltar que este vetor aloca nas  $n^2$  posições os valores obtidos da equação matricial. Além disso, é necessário um processamento para organização dos dados numa matriz representativa do vetor incógnita.

### 5.3.5 Arranjo do vetor incógnita

Como dito na seção anterior, há uma necessidade de arranjar o vetor incógnita obtido no formato de uma matriz para determinação correta de cada valor em cada posição na malha a fim de se atribuir uma característica física ao resultado. Assim, se utilizando da lógica que cada posição do vetor se relaciona ao par ordenado  $(t, p)$  da matriz da seguinte forma  $(t, p) = \mathbf{v}(t + n(p - 1))$ .

Portanto, a implementação do arranjo do vetor incógnita na matriz, dita *matriz\_rv* ou matriz real **V**, é feita no MATLAB da seguinte maneira:

```

1 %% Arrumando vetor v em matriz_rv ou Matriz Real V
2 matriz_rv = zeros(n); %Alocacao de moemoria inicial
3 for t=1:1:n
4     for p=1:1:n
5         matriz_rv(t,p) = v(t+(p-1)*n); %logica de posicionamento
6     end
7 end

```

Listing 5.5: Código para arranjo do vetro incógnita.

### 5.3.6 Tratamento dos dados de saída

Nesta etapa, há a necessidade de organizar os dados de saída a fim de se obter valores exatos para a velocidade adimensionalizada ( $u^*$ ). Sendo assim, a conversão utilizada na equação (3.37) é implementada assim como todo o processo para a criação de arquivo texto espaçados de acordo com as seguintes colunas: valores variados entre  $0 \leq \xi \leq \xi_0$ , e valores fixos de  $\theta$  variando cada coluna até o valor de  $\pi$ , e por fim, valores de  $u^*$  para cada linha competente em função dos parâmetros  $\xi$  e  $\theta$ . Lembrando que pula-se uma linha para diferentes valores de  $\theta$ .

```

0.507051825539  2.819378022452  0.002129489899
0.521136598471  2.819378022452  0.001480161999
0.535221371402  2.819378022452  0.000771106822
0.549306144334  2.819378022452  0.000000000000

0.000000000000  2.899931680237  0.000000000000
0.014084772932  2.899931680237  0.000345750367
0.028169545863  2.899931680237  0.000682492939
0.042254318795  2.899931680237  0.001009733024
0.056339091727  2.899931680237  0.001326965268
0.070423864658  2.899931680237  0.001633671662
0.084508637590  2.899931680237  0.001929319524

```

Figura 5.2: Exemplo de saída de dados da rotina do MDF do MATLAB

Assim sendo, a implementação do tratamento de dados segue a utilização da transformação de variável da equação (3.37) e uso da função *dlmwrite* para retornar os dados em arquivos *.txt* no formato da Figura 5.2. Assim, a implementação a segue a rotina:

```

1 %% Repeticao para montagem do arquivo
2 xi = (0:(xi_0/(n-1)):xi_0)'; %vetor xi
3 G = sech(xi_0)*sech(xi_0); %variavel de auxilio para transformacao
4 H = sinh(xi).*sinh(xi); %variavel de auxilio para transformacao
5 for z = 0:n-1

```

```

6   vet_v = matriz_rv(:,z+1); %captando valores da matriz V
7   theta_2 = (z*p_i/(n-1)); % vetor theta
8   vet_theta1 = linspace(theta_2,theta_2,n);
9   vet_theta2 = vet_theta1';
10  vet_u = vet_v - (0.5).*H.*sin(vet_theta2).*sin(vet_theta2)*G; %mudanca de
    variavel
11  matriz = [xi vet_theta2 abs(vet_u)]; %inserir a variavel u associada a cada
    ponto
12  dlmwrite('MDF_poiseuille_(i).txt',matriz,'-append',...
13  'delimiter','\t','precision','%12f','roffset',1); %funcao que cospe os dados
    em .txt
14  type('MDF_poiseuille_(i).txt') %mostra os valores na command window
15  end

```

Listing 5.6: Código para tratamento da saída de dados.

## 5.4 DETERMINAÇÃO DA VELOCIDADE MÉDIA

A determinação da velocidade média de forma numérica envolve a solução das integrais na equação previamente apresentada em (4.41). Assim, é necessário utilizar métodos numéricos de integração como forma de obter a vazão e a área, e assim validar os resultados obtidos pela rotina numérica do MDF.

Desta forma, escolhe-se a regra dos trapézios como método numérico de aproximação para sua determinação.

### 5.4.1 Regra dos trapézios

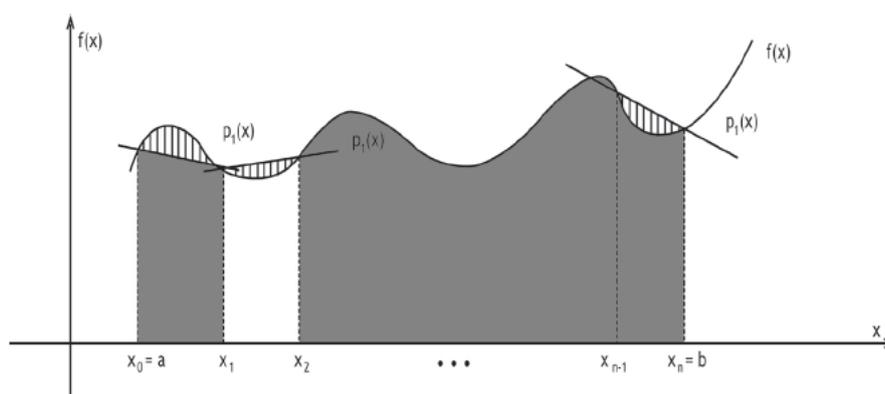


Figura 5.3: Representação Gráfica da Regra dos Trapézios

Fonte: Arenales e Salvador (2017)

Segundo Arenales e Salvador (2017), a regra dos trapézios é um método enquadrado dentro das fórmulas de quadratura de *Newton-Cotes*. Este tipo de integração numérica compreende a necessidade de conhecer apenas alguns pontos específicos e a função real integrante  $f(x)$  para a aproximação da integral usando um polinômio de interpolação  $P_n(x)$  e um erro associado dito  $E_n(x)$ .

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx \approx \int_{x_0}^{x_n} [P_n(x) + E_n(x)]dx. \quad (5.11)$$

Desta forma, considera-se uma função dita  $f(x)$  definida em  $x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1}$  pontos distintos equidistantes do intervalo  $[a, b]$ , ou seja, há um incremento igual entre os pontos no valor de  $h$ . Utilizando o polinômio interpolador de *Newton-Gregory* para  $f(x)$  tem-se

$$P_n(x) = D^0 f(x_0) + (x - x_0) \frac{D^1 f(x_0)}{1!h} + (x - x_0)(x - x_1) \frac{D^2 f(x_0)}{2!h^2} + \dots + (x - x_{n-1}) \frac{D^n f(x_0)}{n!h^n} \quad (5.12)$$

com  $D$  sendo o operador derivada em relação a  $x$ .

Para o caso da regra dos trapézios, utiliza-se um polinômio interpolador de *Newton-Gregory* para  $f(x)$  de grau 1, resultando em

$$P_1(x) = D^0 f(x_0) + (x - x_0) \frac{D^1 f(x_0)}{1!h^1} \quad (5.13)$$

substituindo o polinômio na equação (5.11) e admitindo que o erro para o grau 1 é de  $E_1(x) \approx O(h^2)$  e desprezando-o, tem-se

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx \approx \frac{h}{2} [f(x_0) - f(x_1)]. \quad (5.14)$$

Entretanto, a regra dos trapézios necessária para a aproximação é a regra dos trapézios generalizada, ou seja, se aplica a regra descrita acima para cada dois pontos consecutivos como demonstrado na Figura 5.3. Assim, o termo generalizado torna-se

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_n} f(x)dx &\approx \frac{h}{2} [f(x_0) - f(x_1)] + \frac{h}{2} [f(x_1) - f(x_2)] + \dots + \frac{h}{2} [f(x_{n-1}) - f(x_n)] = \\ &= \frac{h}{2} [f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \dots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)]. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Nesse sentido, ao ampliar para o caso bidimensional há necessidade de declarar um novo passo dito  $k$  para a nova dimensão adicionada. Assim, para o caso de um regra dos trapézios em

duas dimensões, pode-se seguir a mesma ideia apresentada na equação (5.15), ou seja, se faz

$$\int \int_R f(x, y) dA = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dx dy \approx T2D(f, h, k). \quad (5.16)$$

Dado a conceitualização da regra dos trapézios generalizada, ao aplicar para a determinação da vazão é necessário realizar algumas modificações, ou seja, adaptar a coordenada elíptica utilizada ao longo do trabalho.

Dito isso, as modificações adotadas transformam a equação (5.15) em

$$\int_0^\pi \int_0^{\xi_0} u^*(\xi, \theta) |J| d\xi d\theta \approx T2D(u^*, h, k) \quad (5.17)$$

onde  $|J|$  representa o jacobiano da equação (3.30), já  $h$  e  $k$  são os incrementos nas respectivas direções  $\xi$  e  $\theta$  dados pelas equações (5.3) e (5.4). Assim,

$$\begin{aligned} T2D(u^*, h, k) \approx & \frac{1}{4} h k |J| [u^*(0, 0) + u^*(\xi_0, 0) + u^*(0, \pi) + u^*(\xi_0, \pi) \\ & + 2 \sum_{i=2}^{n-1} u^*(\xi_i, 0) + 2 \sum_{i=2}^{n-1} u^*(\xi_i, \pi) + 2 \sum_{j=2}^{n-1} u^*(0, \theta_j) + 2 \sum_{j=2}^{n-1} u^*(\xi_0, \theta_j) \\ & + 4 \sum_{i=2}^{n-1} \sum_{j=2}^{n-1} u^*(\xi_i, \theta_j)]. \quad (5.18) \end{aligned}$$

Com a regra dos trapézios para o problema da determinação da vazão, implementa-se uma rotina a fim de obter os dados para a validação do código do MDF no MATLAB.

#### 5.4.2 Implementação da regra dos trapézios para determinação da velocidade média

A implementação da regra dos trapézios será feita tanto para a função integrante  $u^*$  quanto para o cálculo da área como, no exemplo da equação (4.41). Assim, a implementação de duas regras do trapézio é necessária a fim de se obter valores distintos para velocidade média variando-se a razão de aspecto ( $b/a$ ). O intuito geral desta etapa, é conseguir plotar um gráfico comparativo de  $\bar{u}^*$  vs  $b/a$  e compará-lo ao gráfico 4.8, para validação do código implementado.

##### 5.4.2.1 Primeira etapa: Função Jacobiano

Para a determinação do jacobiano apresentado na equação (5.17), foi necessário a criação de uma função dita *jacobiano* para facilitar o cálculo, principalmente, da equação (5.18) e assim, determinar a partir dos parâmetros  $\xi$ ,  $\theta$  e  $c$  os valores correspondentes do jacobiano.

```

1 %Calculo da area
2 %funcao de calculo do jacobiano, entrada: xi,theta,c
3 %saida: valor do jacobiano
4 function z = jacobiano(xi,theta,c)
5     z = (c^2)*(((sinh (xi))^2) + (sin(theta))^2);
6 end

```

Listing 5.7: Código para função jacobiano.

#### 5.4.2.2 Segunda etapa: Implementação da regra dos trapézios na determinação da velocidade média

Como dito anteriormente, a ideia é separar cada somatório da equação (5.18), em somas de *loops*, de tal forma que se consiga compor a equação. Vale ressaltar que nesta etapa se faz tanto o *T2D* para  $\bar{u}^*$  quanto para o cálculo da área. Por fim, divide-se *T2D* e *T2D\_area* para a obtenção da vazão.

```

1 %% Processo de Validacao do codigo MDF
2 %%Regra dos Trapezios 1 - para a velocidade media
3 K = sin(theta).*sin(theta);
4 P = G.*H.*K; %matriz formada por sin^2(theta) e sinh^2(xi) e sech(xi_0)
5 matriz_ul= matriz_rv - (1/2).*P; %arrumando a matriz de v's com a transformacao
   para u*
6 c = sech(xi_0)*a_r;
7 Soma_S1 = 0;
8 for cont_1 = 2:n-1 %somatorio S_1
9     Soma_S1 = Soma_S1 + (2*((matriz_ul(cont_1, 1) + matriz_ul(cont_1,n))*(jacobiano
   (xi(1),theta(cont_1),c) + ...
10     (jacobiano(xi(40), theta(cont_1),c))))); %funcao jacobiano
11 end
12 Soma_S2 = 0;
13 for cont_2 = 2:n-1 %somatorio S_2
14     Soma_S2 = Soma_S2 + (2*((matriz_ul(1,cont_2) + matriz_ul(n,cont_2))*(jacobiano(
   xi(cont_2),theta(1),c) + ...
15     (jacobiano(xi(cont_2),theta(40),c)))));
16 end
17 Soma_S3 = 0;
18 for cont_1 = 2:n-1
19     for cont_2 = 2:n-1 %Somatorio S_3
20         Soma_S3 = Soma_S3 + (4* (matriz_ul(cont_1,cont_2))*(jacobiano(xi(cont_1),
   theta(cont_2),c)));
21     end
22 end
23 T2D = ((1/4)*h*k*((matriz_ul(1,1)*jacobiano(xi(1),theta(1),c)) + (matriz_ul(1,n)*(
   jacobiano(xi(n),theta(1),c)) + (matriz_ul(n,1)*(jacobiano(xi(1),theta(n),c)) +
   (matriz_ul(n,n)*(jacobiano(xi(n),theta(n),c)) + ...
24     Soma_S1 + Soma_S2 + Soma_S3))))); %soma de T2D da vazao Q
25 %%Calculo da Area -- Regra dos trapezios 2%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

```

```

26 S1_a = 0;
27 for cont_1_a=2:n-1
28     S1_a = S1_a + 2* (jacobiano(xi(1),theta(cont_1_a),c) + (jacobiano(xi(40),
        theta(cont_1_a),c)));
29 end
30 S2_a = 0;
31 for cont_2_a=2:n-1
32     S2_a = S2_a + 2* (jacobiano(xi(cont_2_a),theta(1),c) + (jacobiano(xi(cont_2_a
        ),theta(40),c)));
33 end
34 S3_a = 0;
35 for cont_1_a=2:n-1
36     for cont_2_a=2:n-1
37         S3_a = S3_a + 4*(jacobiano(xi(cont_1_a),theta(cont_2_a),c));
38     end
39 end
40 T2d_area = (1/4*h*k*(0 + (2*(c^2)*sinh(xi_0)*sinh(xi_0)) + 0 + ...
41     S1_a + S2_a + S3_a));
42 u_medio = T2D/T2d_area; %da definicao de vazao tira-se u_medio

```

Listing 5.8: Código para implementação da regra dos trapézios para função  $\bar{u}^*$  e para o cálculo da área.

### 5.4.3 Determinação dos valores de velocidade média máxima para validação da rotina

Aqui nesta seção, a necessidade de validação do rotina de implementação do MDF por mais de uma via é essencial. Assim, utilizando os dados de valores de  $\bar{u}^*$  obtidos através da regra dos trapézios e realizando um pequeno tratamento nestes dados, é possível comparar os resultados de  $\bar{u}^*$  obtidos do método com os resultados analíticos de  $\bar{u}^*$  demonstrados na seção 4.2, ao variar valores distintos da razão de aspecto ( $b/a$ ).

Sendo assim, implementa-se na rotina do MATLAB a seguinte codificação para a determinação dos valores máximos de  $\bar{u}^*$  utilizando a função *max* e pegando os valores advindos da regra dos trapézios no código 5.8.

```

1 %% validacao por velocidade media maxima
2 [val,idx] = max(matriz_ul(:));%retorna o maior valor e seu index da matriz_ul, ou
    seja, maior valor de u*

```

Listing 5.9: Código para captação dos valores máximos de  $\bar{u}^*$  pós-processamento da regra dos trapézios.

### 5.4.4 Determinação do fator de atrito de Fanning para validação da rotina

Nesta etapa, a ideia principal é basicamente implementar a equação do atrito de *Fanning* como na (4.62) por meio de uma rotina do MATLAB utilizando os valores de velocidade média processados pós regra do trapézio advindo da seção 4.3.

É importante ressaltar o uso da função *ellipke* a qual computa integrais elípticas completas tanto da primeira quanto da segunda ordem. Ademais, para a validação da codificação feita na MDF, é necessário variar a razão de aspecto a fim de se obter diferentes valores de  $fRe_{\sqrt{A}}$  para plotagem e comparação do gráfico da Figura 4.11.

```

1 %% Validacao por meio do fator de atrito de fanning
2 const_A = ((p_i/2)*RA)^(1.5); %constante de auxilio
3 M = 1 - RA^2; %variavel da razao de aspecto
4 [D,E] = ellipke(M); %funcao que retorna os valores para as integrais elipticas de
   ordem 2
5 const_B = 1 + E; %constante de auxilio
6 f_Re = (const_A/(const_B*u_medio)); %calculo da equacao do fator de atrito fRe

```

Listing 5.10: Código para a validação por meio do fator de atrito de *Fanning*

## 5.5 VALIDAÇÃO PARA O MDF DO ESCOAMENTO DE POISEUILLE

Como visto nas seções anteriores, a implementação do método das diferenças finitas para a resolução do caso de um escoamento de *Poiseuille* precisa de uma garantia tal que o processo seja suficientemente satisfatório quando comparado ao processo de resolução analítico apresentado anteriormente. Sendo assim, nesta seção se faz a comparação entre os resultados obtidos pelo via analítica com a via numérica a fim de discutir-se as possíveis diferenças entre eles.

Para isso, o método de validação acompanha 3 parâmetros apresentados: velocidade média ( $\bar{u}^*$ ), velocidade média máxima ( $\bar{u}_{max}^*$ ) e o fator de atrito de *Fanning* ( $fRe_{\sqrt{A}}$ ) os quais serão comparados entre os resultados analíticos e numéricos. Posteriormente, se discute uma breve conclusão a despeito de cada comparação a fim de enriquecer a validação do MDF.

Além disso, escolheu-se para malha de discretização um valor de 100 pontos de malha ( $n$ ) como forma de aproximar ainda mais os valores obtidos na computação numérica. Como consequência, os tamanhos de malha dados por (5.3) e (5.4) são definidos e utilizados.

A determinação no parâmetro de validação conhecido como velocidade média ( $\bar{u}^*$ ) foi feita variando-se a razão de aspecto ( $b/a$ ) em intervalos de 0.05 entre 0 e 0.95, lembrando da condição limítrofe do caso em que  $b/a \rightarrow 1$ . Com isso, utilizou-se a equação analítica encontrada em (4.51) e comparou-se com os resultados obtidos com a codificação feita na seção 5.4.2 de tal sorte que se tenha um gráfico comparativo de  $\bar{u}^*$  por  $b/a$  com as duas curvas apresentadas na Figura 5.4.

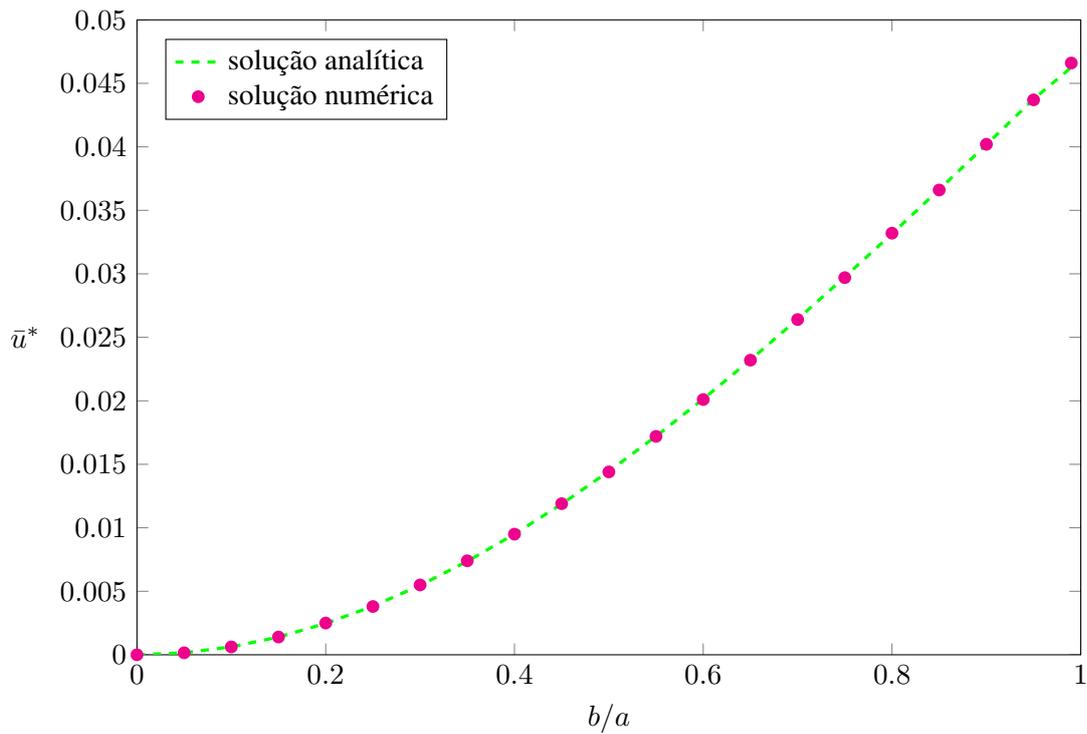


Figura 5.4: Velocidade média em função da razão de aspecto  $b/a$  em 100 pontos de malha.

De antemão, o parâmetro de validação da velocidade média máxima ( $\bar{u}^*$ ) segue os mesmos princípios realizados anteriormente ao plotar o gráfico do parâmetro anterior. A diferença se contrasta unicamente para os diferentes valores da velocidade média máxima para via analítica e para via numérica segundo a Figura 5.5.

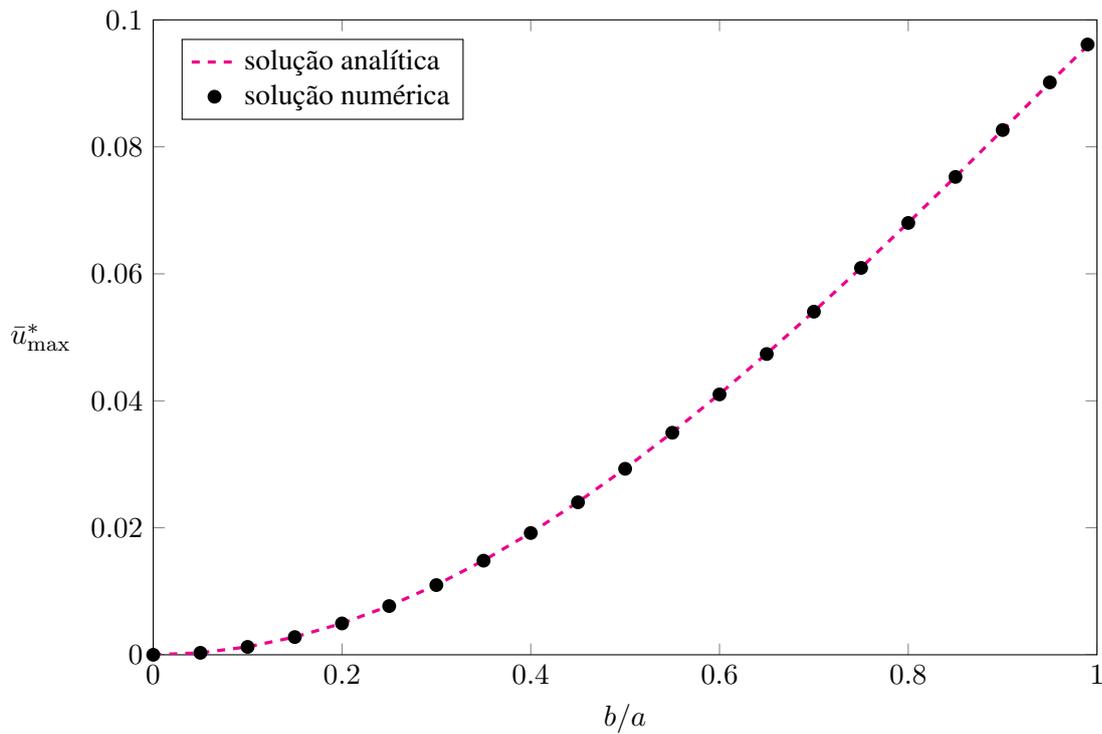


Figura 5.5: Velocidade média máxima em função da razão de aspecto  $b/a$  em 100 pontos de malha.

Já o gráfico referente a Figura 5.6, mostra a relação de validação do parâmetro fator de atrito de *Fanning* ( $fRe_{\sqrt{A}}$ ) entre os valores obtidos através do cálculo analítico em contraste com o cálculo retirado da implementação. Ao variar a razão de aspecto é possível notar que apesar de serem valores muito próximos, há uma pequena diferença causada pela número de pontos do processo de discretização o qual há um erro associado que acarreta esta pequena diferença.

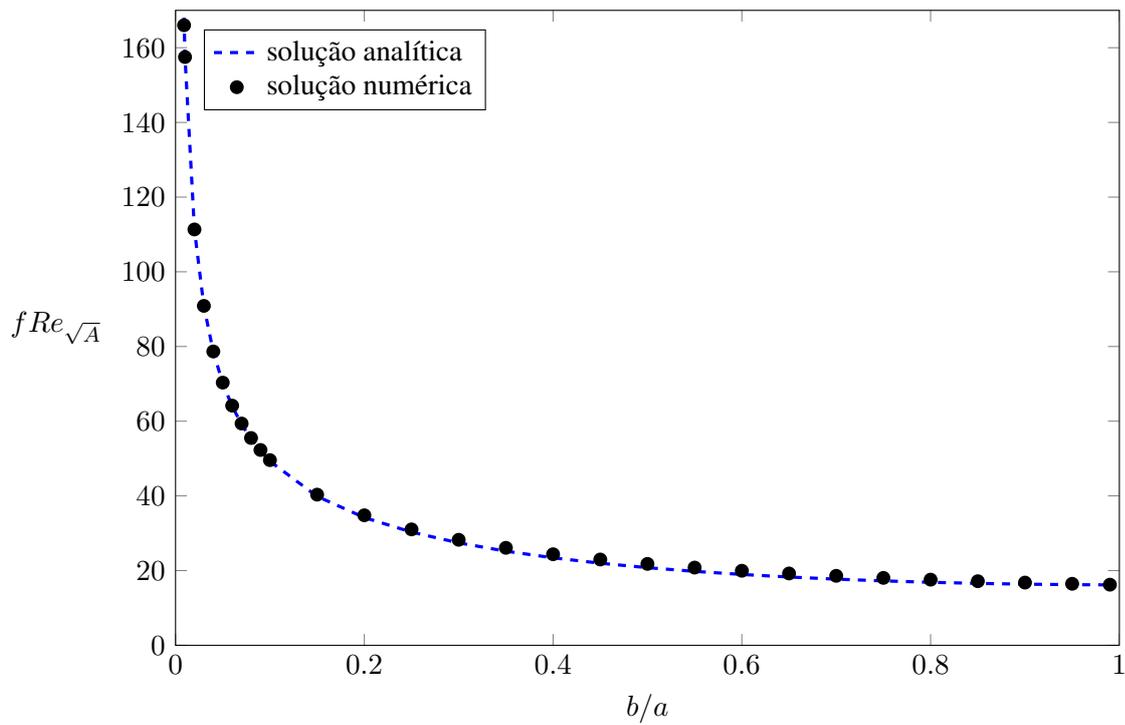


Figura 5.6: Fator de atrito de *Fanning* em função da razão de aspecto  $b/a$  em 100 pontos de malha.

Com todas as informações sobre a validação, é fácil dizer que o código implementado reflete precisamente valores muito próximos à solução analítica. Apesar de pequenas diferenças nos valores obtidos, o erro absoluto associado é muito pequeno quando comparado ao valor analítico chegando a 5% para  $b/a = 0.55$ .

## 6 SOLUÇÃO DE UM NOVO PROBLEMA: O ESCOAMENTO DE COUETTE

*Neste capítulo apresenta-se a solução analítica para um escoamento de Couette através de uma seção semi-elíptica utilizando o método de Fourier. Posteriormente, calcula-se a velocidade média para cada caso de relação da razão de aspecto diferente.*

### 6.1 INTRODUÇÃO AO PROBLEMA

Dada uma seção semi-elíptica, o processo de solução é semelhante ao processo desenvolvido no capítulo 4. Sendo assim, inicialmente, apresenta-se o novo problema e a partir da nova equação governante desenvolve-se o processo de solução.

Portanto, dado um seção semi-elíptica, seu escoamento ao invés de ser uma consequência do gradiente de pressão como no caso do escoamento de *Poiseuille*, nesta etapa a motivação para o desenvolvimento do escoamento se dá pela impressão de uma força na parede inferior da seção a fim de se obter uma velocidade  $V$ , assim, a partir da Figura 6.1, modifica-se a fim de obter o novo problema e a nova formulação.

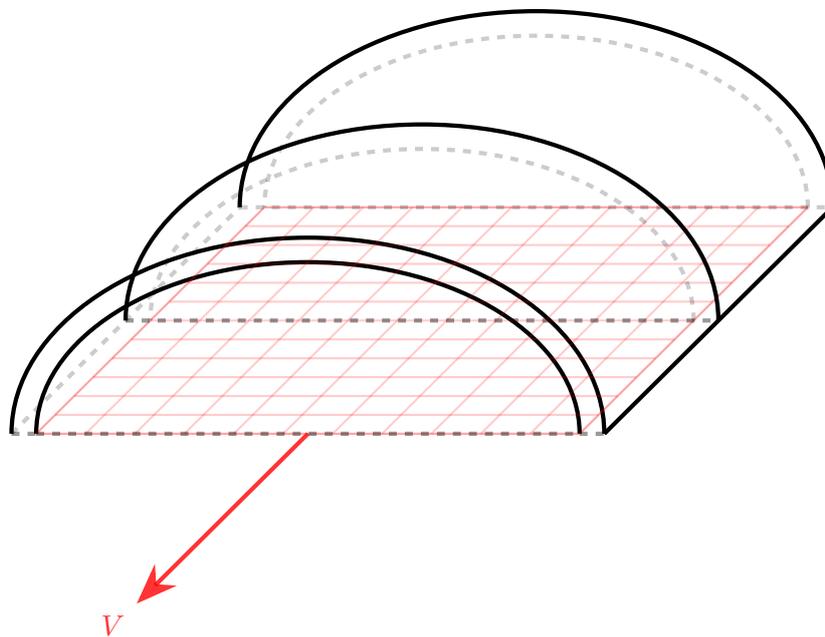


Figura 6.1: Ideia do escoamento de *Couette*

Tendo em mente a imposição da velocidade  $V$ , a formulação da problemática segue a mesma didática realizada. Assim, primeiramente, se equaciona o problema através da equação de Navier-

Stokes trazida em (3.2). Assim, no princípio tem-se

$$\nabla^2 w = 0 \quad (6.1)$$

com  $w = 0$  no arco superior da semi-elipse e  $w = V$  na região inferior ou na base da semi-elipse, como mostrado na Figura 6.1.

Utilizando a técnica dos fatores de escala visando a mudança da coordenada da equação (6.1) assim como fora feita através da equação (3.27), é possível obter a equação governante para tal situação em coordenadas elípticas como

$$\nabla^2 w = \frac{1}{c^2 (\sinh^2 \xi + \sin^2 \theta)} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) = 0. \quad (6.2)$$

Sabendo que a adimensionalização da equação resulta em

$$\nabla^2 w = \frac{1}{c^2 (\sinh^2 \xi + \sin^2 \theta)} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) = 0. \quad (6.3)$$

A partir da equação (6.3), é possível perceber que o primeiro termo não pode ser zero, assim tem-se uma equação de *Laplace* como equação governante do problema

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} = 0 \quad (6.4)$$

com as condições de contorno

$$\begin{aligned} w &= 0 & \text{em } \xi &= \xi_0, \\ w &= V & \text{em } \xi &= 0, \\ w &= V & \text{em } \theta &= 0, \\ w &= V & \text{em } \theta &= \pi. \end{aligned}$$

Primeiramente, para facilitar a manipulação e a comparação de resultados escolhe-se uma mudança de variável de tal forma que:

$$v = w - V \quad (6.5)$$

portanto, a equação (6.4) se torna

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} = 0 \quad (6.6)$$

com as novas condições de contorno como

$$\begin{aligned}v &= -V & \text{em } \xi &= \xi_0, \\v &= 0 & \text{em } \xi &= 0, \\v &= 0 & \text{em } \theta &= 0, \\v &= 0 & \text{em } \theta &= \pi.\end{aligned}$$

## 6.2 RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE LAPLACE PARA O ESCOAMENTO DE COUETTE

Assumindo o método de *Fourier* como feito com o caso do escoamento de *Poiseuille*, separe-se as variáveis da solução da equação de *Laplace* em (6.4) em:

$$v(\xi, \theta) = T(\xi)P(\theta) \quad (6.7)$$

em que

$$v(\xi_0, \theta) = T(\xi_0)P(\theta) = -V, \quad (6.8)$$

$$v(0, \theta) = T(0)P(\theta) = T(0) = 0, \quad (6.9)$$

$$v(\xi, 0) = T(\xi)P(0) = H(0) = 0, \quad (6.10)$$

$$v(\xi, \pi) = T(\xi)P(\pi) = P(\pi) = 0. \quad (6.11)$$

Colocando a separação de variáveis de (6.7) na equação de *Laplace* em (6.4), tem-se

$$\frac{T''(\xi)}{T(\xi)} = -\frac{P''(\theta)}{P(\theta)} \quad (6.12)$$

como cada lado da equação (6.12) é independente de  $\xi$  e  $\theta$ , respectivamente, pode-se fazer

$$\frac{T''(\xi)}{T(\xi)} = -\frac{P''(\theta)}{P(\theta)} = \delta \quad (6.13)$$

com isso, a separação de variáveis reduziu o problema a duas equações diferenciais ordinárias para serem resolvidas dadas por

$$T''(\xi) - \delta T(\xi) = 0, \quad (6.14)$$

$$P''(\theta) + \delta P(\theta) = 0. \quad (6.15)$$

Novamente, há necessidade de realizar o estudo do sinal da variável  $\delta$  a fim de se encontrar

soluções que não sejam iguais a solução trivial. Assim, escolhendo  $\delta = 0$ , tem-se

$$P''(\theta) = 0 \quad (6.16)$$

resolvendo e aplicando as condições de contorno para  $\theta$  chega-se a

$$P(\theta) = 0. \quad (6.17)$$

Assim, conclui-se que a atribuição de  $\delta = 0$  é uma solução trivial, e portanto,  $\delta \neq 0$ . Já para um segunda tentativa, atribui-se que  $\delta \leq 0$ , e isso significa que  $\delta = -\lambda^2$ . Neste sentido, tem-se duas EDO's para cada variável com o seguinte formato

$$T'' + \lambda^2 T = 0 \quad (6.18)$$

$$P'' - \lambda^2 P = 0. \quad (6.19)$$

Ao resolver a equação (6.19), tem-se

$$P(\theta) = J_3 \sinh \lambda \theta + J_4 \cosh \lambda \theta \quad (6.20)$$

aplicando as condições de contorno conclui-se que  $\cosh(\lambda\pi) = 0$  e, só pode ser verdade se  $\lambda = 0$  o que acarreta em  $\delta = 0$ , ou seja, solução trivial. Com isso, pode-se dizer que, necessariamente,  $\delta \neq -\lambda^2$ .

Partindo para a avaliação em que  $\delta \geq 0$ , logo,  $\delta = \lambda^2$ . Assim as EDO's para análise são

$$T'' - \lambda^2 T = 0 \quad (6.21)$$

$$P'' + \lambda^2 P = 0. \quad (6.22)$$

Analisando a equação (6.21) e resolvendo, tem-se

$$T(\xi) = K_1 \sinh \lambda \xi + K_2 \cosh \lambda \xi \quad (6.23)$$

aplicando as condições de contorno a equação, obtém-se

$$T_n(\xi) = K_n \sinh n\xi \quad (6.24)$$

assim como, ao analisar a equação (6.22) e resolvê-la, se tem

$$P(\theta) = B_1 \sin \lambda \theta + B_2 \cos \lambda \theta \quad (6.25)$$

aplicando as condições de contorno, se obtém

$$P_n(\theta) = B_n \sin n\theta \quad (6.26)$$

Ao compor o campo de soluções para a separação de variáveis e utilizando o princípio da superposição, escrevendo uma combinação linear de infinitas soluções e fazendo  $Y_n = J_n B_n$ , tem-se

$$v(\xi, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n \operatorname{sen} n\theta \operatorname{senh} n\xi. \quad (6.27)$$

Entretanto, como ainda há uma última condição de contorno em  $v(\xi_0, \theta) = -V$ , se aplica a equação (6.27) na tentativa de encontrar o valor de  $Y_n$ . Com isso, tem-se

$$-V = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n \operatorname{sen} n\theta \operatorname{senh} n\xi \quad (6.28)$$

multiplicando a equação (6.28) por  $\operatorname{sen}(m\theta)$  tem-se

$$-V \operatorname{sen}(m\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n \operatorname{sen} n\theta \operatorname{senh} n\xi \operatorname{sen} m\theta \quad (6.29)$$

integrando de ambos os lados da equação (6.29), obtém-se

$$\int_0^{\pi} -V \operatorname{sen} m\theta \, d\theta = \int_0^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} Y_n \operatorname{sen} n\theta \operatorname{senh} n\xi \operatorname{sen} m\theta \, d\theta. \quad (6.30)$$

Observando a equação (6.30) e resolvendo a integral da esquerda, primeiramente, obtém-se

$$\int_0^{\pi} -V \operatorname{sen} m\theta \, d\theta = -V \left( \frac{1 - \cos \pi m}{m} \right) \quad (6.31)$$

já para o lado esquerdo, tem-se

$$\int_0^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} Y_n \operatorname{sen} n\theta \operatorname{senh} n\xi \operatorname{sen} m\theta \, d\theta = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n \operatorname{senh} n\xi \int_0^{\pi} \operatorname{sen} n\theta \operatorname{sen} m\theta \, d\theta. \quad (6.32)$$

Utilizando uma relação de ortogonalidade específica para resolver a integral da equação (6.32), tem-se que

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen} n\theta \operatorname{sen} m\theta \, d\theta = \begin{cases} 0 & \text{se, } m \neq n \\ \pi/2 & \text{se, } m = n \end{cases}.$$

Tendo as relações e assumindo o fato que  $m = n$ , pode-se construir a relação a partir das equações (6.32) e (6.2)

$$-V \left( \frac{1 - \cos \pi m}{m} \right) = \frac{\pi}{2} Y_m \operatorname{senh} m\xi_0. \quad (6.33)$$

Isolando o termo do coeficiente  $Y_m$ , se obtém a expressão

$$Y_m = \frac{-2V(1 - \cos m\pi)}{\pi m \sinh m\xi_0}. \quad (6.34)$$

Se fizer com que  $m = 2\gamma$ , ou seja, este termo seja par, assim como foi feito ao longo da determinação do coeficiente para o caso do escoamento de *Poiseuille*, o termo  $\cos m\pi = 1$  e, portanto, o o coeficiente  $Y_m = 0$ , obtendo assim, uma solução trivial. Desta forma, assumi-se que  $m = 2\gamma - 1$  e, assim, chega-se a expressão para o coeficiente

$$Y_{2\gamma-1} = \frac{-4V}{\pi(2\gamma - 1) \sinh (2\gamma - 1)\xi_0}. \quad (6.35)$$

Dito isso, a solução geral para o caso da problemática de um escoamento de *Couette* assume a forma

$$v(\xi, \theta) = \frac{-4V}{\pi} \sum_{\gamma=1}^{\infty} \frac{\text{sen}(2\gamma - 1)\theta \sinh(2\gamma - 1)\xi}{(2\gamma - 1) \sinh(2\gamma - 1)\xi_0} \quad (6.36)$$

ao retornar da mudança de variável em (6.5), a equação (6.36) assume

$$w(\xi, \theta) = \frac{-4V}{\pi} \sum_{\gamma=1}^{\infty} \frac{\text{sen}(2\gamma - 1)\theta \sinh(2\gamma - 1)\xi}{(2\gamma - 1) \sinh(2\gamma - 1)\xi_0} + V. \quad (6.37)$$

Aplicando a seguinte adimensionalização de variável

$$u^* = \frac{w(\xi, \theta)}{V} \quad (6.38)$$

é possível obter a solução geral adimensionalizada para o problema de um escoamento de *Couette* com o seguinte formato

$$u^*(\xi, \theta) = 1 - \frac{4}{\pi} \sum_{\gamma=1}^{\infty} \frac{\text{sen}(2\gamma - 1)\theta \sinh(2\gamma - 1)\xi}{(2\gamma - 1) \sinh(2\gamma - 1)\xi_0}. \quad (6.39)$$

Possuindo o campo de velocidade do escoamento de *Couette*, a plotagem de como esse campo se distribui ao longo da seção semielíptica é essencial para o entendimento do problema. Sendo assim, usando uma razão de aspecto  $(b/a) = 0.5$  e analisando o efeito da velocidade imputada ( $V$ ) como um valor unitário, é possível demonstrar o perfil do campo de velocidade tanto em coordenadas elípticas quanto em coordenadas cartesianas segundo as Figuras 6.2 e 6.3.

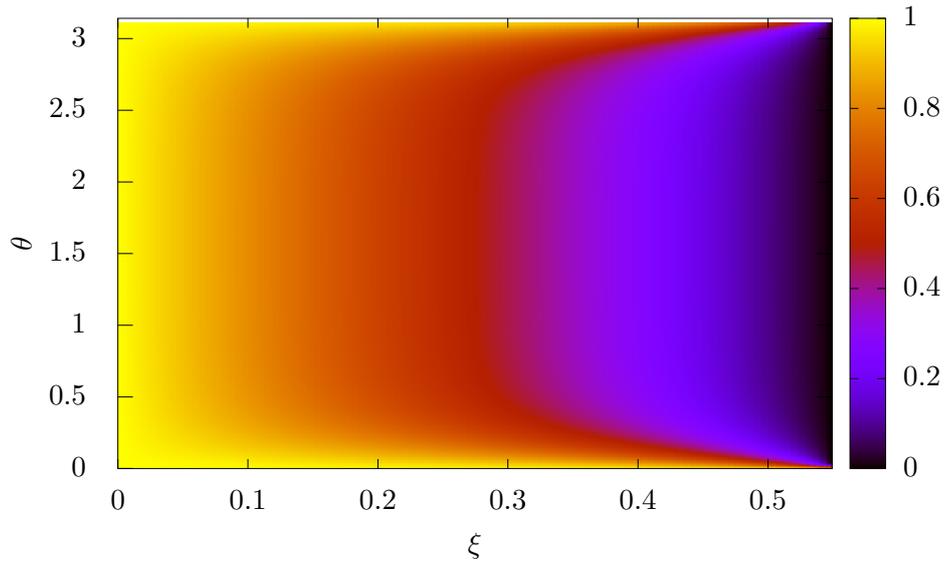


Figura 6.2: Campo de velocidade do escoamento de *Couette* para  $b/a = 0.5$  no domínio retangular em coordenadas elípticas.

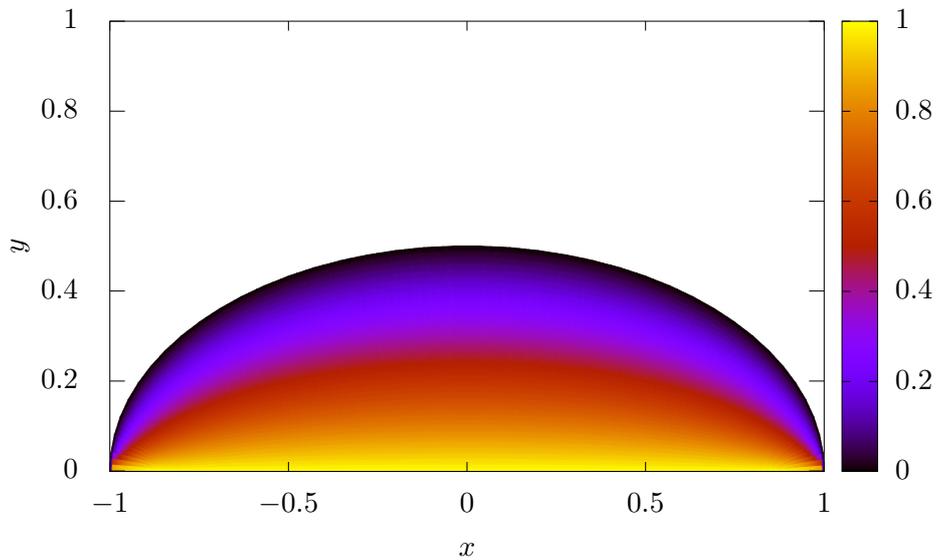


Figura 6.3: Campo de velocidade do escoamento de *Couette* para  $b/a = 0.5$  no domínio semi-elíptico em coordenadas cartesianas.

Plota-se também o campo de velocidade para escoamento de *Couette* para uma razão de aspecto de  $b/a = 0.2$  e  $b/a = 0.95$  tanto para o domínio retangular quanto para o domínio elíptico segundo as Figuras 6.4, 6.5, 6.6 e 6.7.

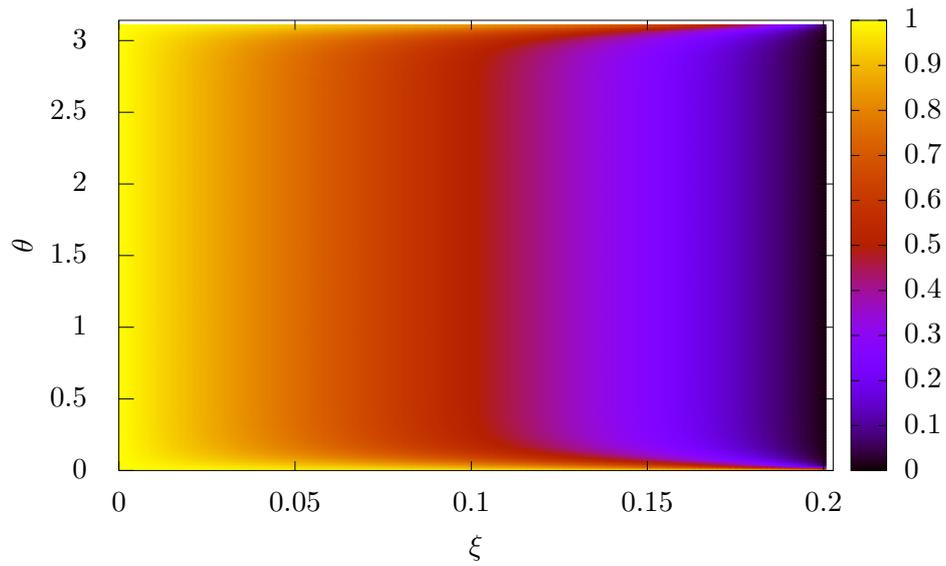


Figura 6.4: Campo de velocidade do escoamento de *Couette* para  $b/a = 0.2$  no domínio retangular em coordenadas elípticas.

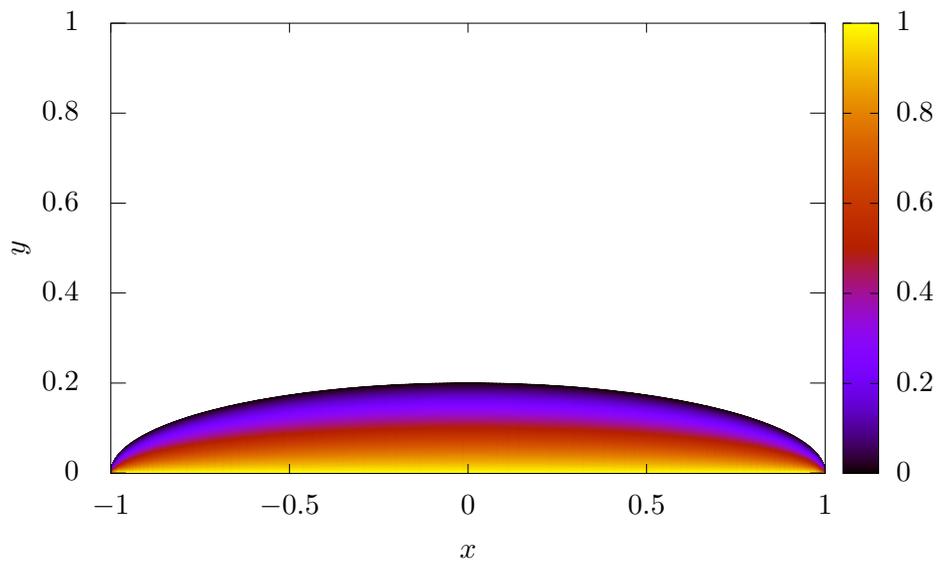


Figura 6.5: Campo de velocidade do escoamento de *Couette* para  $b/a = 0.2$  no domínio elíptico em coordenadas cartesianas.

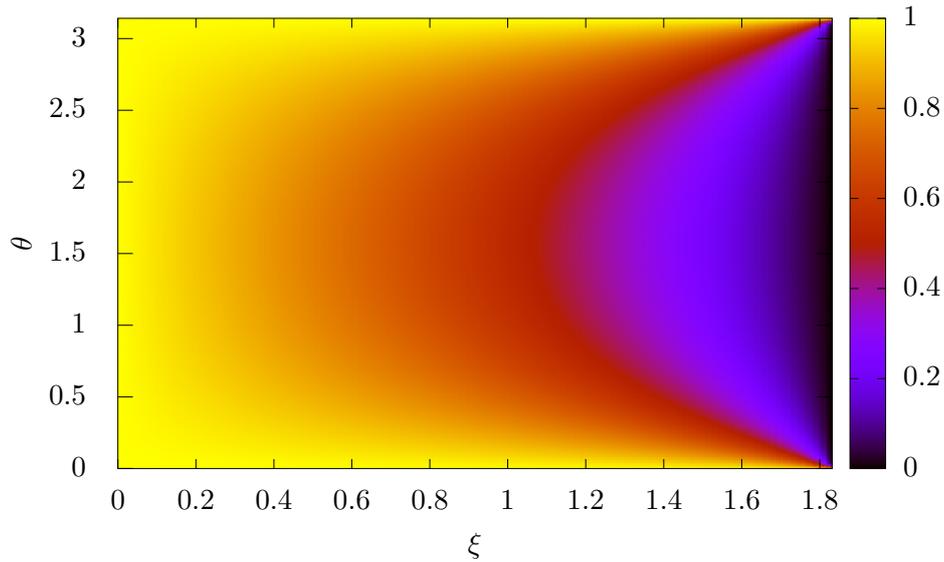


Figura 6.6: Campo de velocidade do escoamento de *Couette* para  $b/a = 0.95$  no domínio retangular em coordenadas elípticas.

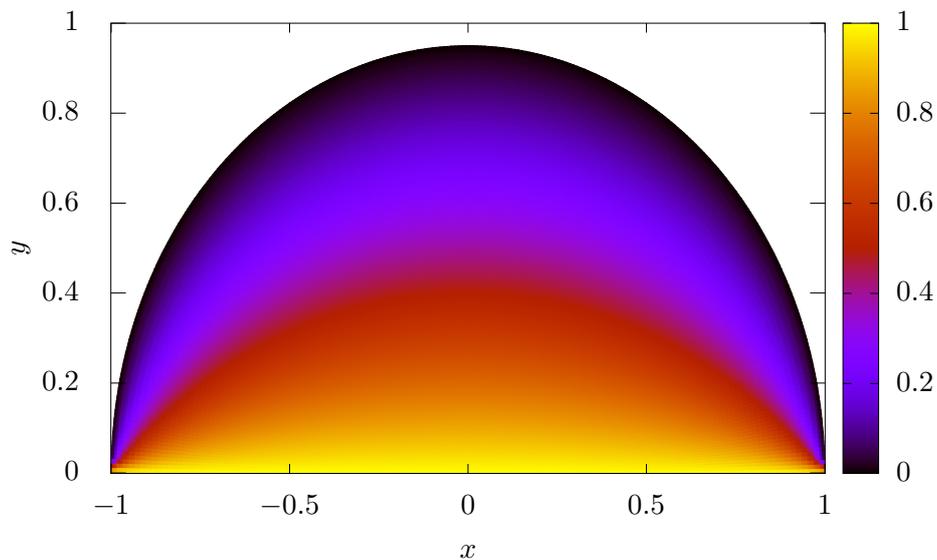


Figura 6.7: Campo de velocidade do escoamento de *Couette* para  $b/a = 0.95$  no domínio retangular em coordenadas elípticas.

É importante atentar para o efeito que o movimento da placa inferior faz ao longo do campo de velocidades na seção semi-elíptica. Como o escoamento é motivado pela imposição da placa inferior a uma certa velocidade  $V$ , ocorre uma certa difusão dessa quantidade de movimento ao longo da seção originando pontos de velocidade maiores e descentralizados quando comparados

ao campo de velocidade do escoamento de *Poiseuille*.

### 6.3 VELOCIDADE MÉDIA E VAZÃO DO ESCOAMENTO DE COUETTE

Dado o campo de velocidade  $u^*(\xi, \theta)$  do escoamento de *Couette* na equação (6.39), é possível obter a velocidade média sob a seção semi-elíptica através da integração do campo de velocidade como na equação (4.41). Assim como feito no processo de cálculo e determinação da velocidade média e vazão do escoamento de *Poiseuille*, a equação utilizada é logo representada por

$$\bar{u}^* = \frac{Q}{A} = \frac{\iint u^*(\xi, \theta) dA}{A} = \frac{\int_0^{\xi_0} \int_0^{\pi} u^*(\xi, \theta) c^2 (\sen^2 \theta + \sinh^2 \xi) d\theta d\xi}{\int_0^{\xi_0} \int_0^{\pi} c^2 (\sinh^2 \xi + \sen^2 \theta) d\theta d\xi} \quad (6.40)$$

Para a determinação da área, a equação (4.42) continua a mesma para esta nova determinação, assim tem-se que

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{\xi_0} \int_0^{\pi} c^2 (\sinh^2 \xi + \sen^2 \theta) d\theta d\xi \\ &= \frac{c^2 \pi}{2} \sinh \xi_0 \cosh \xi_0. \end{aligned} \quad (6.41)$$

Já para a determinação do campo de velocidade do escoamento de *Couette*, a integral dupla no numerador da equação (6.40) se modificará de acordo com a mudança no campo de velocidade obtido para *Couette* de tal sorte que

$$\begin{aligned} Q &= \iint u^*(\xi, \theta) dA \\ &= \int_0^{\xi_0} \int_0^{\pi} u^*(\xi, \theta) c^2 (\sen^2 \theta + \sinh^2 \xi) d\theta d\xi \end{aligned} \quad (6.42)$$

sendo que a equação (6.42) pode ser dividida em duas integrais representadas por

$$\begin{aligned} Q &= \int_0^{\xi_0} \int_0^{\pi} c^2 (\sen^2 \theta + \sinh^2 \xi) d\theta d\xi - \\ &\quad \int_0^{\xi_0} \int_0^{\pi} \frac{4}{\pi} \sum_{\gamma=1}^{\infty} \frac{\sen(2\gamma-1)\theta \sinh(2\gamma-1)\xi}{(2\gamma-1) \sinh(2\gamma-1)\xi_0} c^2 (\sen^2 \theta + \sinh^2 \xi) d\theta d\xi. \end{aligned} \quad (6.43)$$

Assim, a equação (6.40), se torna

$$\bar{u}^* = 1 - \frac{\int_0^{\xi_0} \int_0^{\pi} \frac{4}{\pi} \sum_{\gamma=1}^{\infty} \frac{\sen(2\gamma-1)\theta \sinh(2\gamma-1)\xi}{(2\gamma-1) \sinh(2\gamma-1)\xi_0} c^2 (\sen^2 \theta + \sinh^2 \xi) d\theta d\xi}{\frac{c^2 \pi}{2} \sinh \xi_0 \cosh \xi_0} \quad (6.44)$$

resolvendo a segunda parcela ( $\Psi$ ), de tal forma que

$$\begin{aligned}
\Psi &= \frac{\int_0^{\xi_0} \int_0^\pi \frac{4}{\pi} \sum_{\gamma=1}^{\infty} \frac{\text{sen}(2\gamma-1)\theta \text{senh}(2\gamma-1)\xi}{(2\gamma-1) \text{senh}(2\gamma-1)\xi_0} c^2(\text{sen}^2\theta + \text{senh}^2\xi) d\theta d\xi}{\frac{c^2\pi}{2} \text{senh}\xi_0 \cosh\xi_0} \\
&= \frac{\frac{4}{\pi} \sum_{\gamma=1}^{\infty} \int_0^{\xi_0} \int_0^\pi \frac{\text{sen}(2\gamma-1)\theta \text{senh}(2\gamma-1)\xi}{(2\gamma-1) \text{senh}(2\gamma-1)\xi_0} c^2(\text{sen}^2\theta + \text{senh}^2\xi) d\theta d\xi}{\frac{c^2\pi}{2} \text{senh}\xi_0 \cosh\xi_0} \\
&= \frac{\frac{4c^2}{\pi(2\gamma-1) \text{senh}(2\gamma-1)\xi_0} \sum_{\gamma=1}^{\infty} \int_0^{\xi_0} \int_0^\pi \text{sen}(2\gamma-1)\theta \text{senh}(2\gamma-1)\xi(\text{sen}^2\theta + \text{senh}^2\xi) d\theta d\xi}{\frac{c^2\pi}{2} \text{senh}\xi_0 \cosh\xi_0}
\end{aligned} \tag{6.45}$$

logo

$$\Psi = F(\gamma) \sum_{\gamma=1}^{\infty} \int_0^{\xi_0} \int_0^\pi \text{sen}(2\gamma-1)\theta \text{senh}(2\gamma-1)\xi(\text{sen}^2\theta + \text{senh}^2\xi) d\theta d\xi \tag{6.46}$$

com

$$F(\gamma) = \frac{8}{\pi^2(2\gamma-1) \text{senh}(2\gamma-1)\xi_0 \text{senh}\xi_0 \cosh\xi_0}. \tag{6.47}$$

Ao observar a equação (6.46) e compará-la com a equação (4.47), é possível notar que a solução da integral de área é a mesma para o caso requisitado anteriormente. Assim, a solução para a nova integração se torna

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\xi_0} \int_0^\pi \text{sen}(2\gamma-1)\theta \text{senh}(2\gamma-1)\xi (\text{sen}^2\theta + \text{senh}^2\xi) d\theta d\xi \\
&= -\frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{1}{2\gamma-3} - \frac{2}{2t-1} \right) \text{senh}(2\gamma-1)\xi_0 \text{senh}\xi_0 \cosh\xi_0 \right. \\
&\quad \left. - \frac{\cosh(2\gamma-1)\xi_0 \text{senh}^2\xi_0}{2\gamma-3} + \frac{[\text{senh}(2\gamma-1)\xi_0 \text{senh}\xi_0 \cosh\xi_0 - \cosh(2\gamma-1)\xi_0 \text{senh}^2\xi_0]}{2\gamma+1} \right\}
\end{aligned} \tag{6.48}$$

em que

$$\begin{aligned}
& \int_0^{\xi_0} \int_0^{\pi} \sin(2\gamma - 1)\theta \sinh(2\gamma - 1)\xi (\sin^2 \theta + \sinh^2 \xi) \, d\theta d\xi \\
&= \frac{2}{(2\gamma + 1)(2\gamma - 3)} \cosh(2\gamma - 1)\xi_0 \sinh^2 \xi_0 \\
&\quad - \frac{4}{(2\gamma - 3)(2\gamma - 1)(2\gamma + 1)} \sinh(2\gamma - 1)\xi_0 \sinh \xi_0 \cosh \xi_0. \quad (6.49)
\end{aligned}$$

Portanto, a solução para a velocidade média do caso do escoamento de *Couette* pode ser expressa como

$$\bar{u}^* = 1 - F(\gamma) \left\{ \frac{2}{(2\gamma + 1)(2\gamma - 3)} \cosh(2\gamma - 1)\xi_0 \sinh^2 \xi_0 - \frac{4}{(2\gamma - 3)(2\gamma - 1)(2\gamma + 1)} \sinh(2\gamma - 1)\xi_0 \sinh \xi_0 \cosh \xi_0 \right\} \quad (6.50)$$

ao resumir a expressão da parcela que multiplica o fator  $F(\gamma)$ , tem-se

$$\bar{u}^* = -\frac{16}{\pi^2} \sum_{\gamma=1}^{\infty} \frac{\tanh \xi_0}{(2\gamma - 1)(2\gamma - 3)(2\gamma + 1) \tanh(2\gamma - 1)\xi_0}. \quad (6.51)$$

## 6.4 IMPLEMENTAÇÃO PARA O ESCOAMENTO DE COUETTE

Esta seção tem por objetivo a implementação do Método das Diferenças Finitas no caso de um escoamento de *Couette*. Primariamente, para a aplicação do método verifica-se que a equação de discretização dada anteriormente para o escoamento de *Poiseuille* em (5.9) também será aplicada a situação de *Couette*, uma vez que para ambos os casos resolve-se a equação de *Laplace* porém, por motivos diferentes: o escoamento de *Poiseuille* se utiliza de um artifício matemático para resumir uma equação de *Poisson* e o escoamento de *Couette* por que não há gradientes de pressão. Portanto, a equação de discretização para *Couette* é dada por (6.52) e reflete exatamente as mesmas condições encontradas anteriormente.

$$(-2\beta - 2)u_{i,j}^* + \beta u_{i+h,j}^* + \beta u_{i-h,j}^* + v_{i,j+h}^* + u_{i,j-h}^* = 0. \quad (6.52)$$

Sendo assim, as diferenças na implementação estão associadas através das diferentes condições de contorno aplicadas a cada problema. Para o caso particular do escoamento de *Couette*, as condições de contorno aplicadas tem que refletir a velocidade imputada a placa inferior. Assim, a partir das equações (6.1) é possível determinar as condições de contorno aplicáveis ao caso discretizado com o objetivo de aplicá-las ao MDF.

$$u_{1,j}^* = u_{i,1}^* = u_{n,j}^* = V \quad u_{i,n}^* = 0. \quad (6.53)$$

Com isso e a partir do método do MDF mostrado anteriormente, a resolução de uma equação matricial se faz necessária a fim de se obter os valores do campo de velocidade para este caso. Entretanto, como feito anteriormente ao se esmiuçar a equação  $\mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{b}$ , a matriz dos coeficiente advinda da equação de discretização é a mesma utilizada no escoamento anterior a diferença será o vetor responsável pelas condições de contorno ( $\mathbf{b}$ ) que assumirá a seguinte face:

$$\mathbf{b}(\mathbf{i})_{n^2}^T = \begin{cases} -V, & \text{se } i = kn \text{ com } k \in \mathbb{Z} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (6.54)$$

onde  $V$  é a velocidade imputada a placa inferior.

Assim, a implementação desta parte segue uma estrutura semelhante ao usada no escoamento de *Poiseuille* dada por:

```

1 %% Vetor coluna b
2 b = zeros(1,n);
3 for f=1:1:eta
4     b(f) = 0;
5     if mod(f,n) ==0
6         b(f) = -V;
7     end
8 end
9 b=b';

```

Listing 6.1: Código para o vetor responsável pelas condições de contorno.

Com a resolução da equação matricial se obtém o vetor incógnita  $\mathbf{v}$  e assim como demonstrado anteriormente se refaz os passos mostrados nas seções anteriores: 5.3.4 a 5.3.6.

## 6.5 IMPLEMENTAÇÃO DA VELOCIDADE MÉDIA DO ESCOAMENTO DE COUETTE

Para a determinação da velocidade média do campo de velocidade do escoamento de *Couette* a implementação da regra dos trapézios segue os mesmos princípios e passos apresentados de 5.4.1 a 5.4.3.

## 6.6 VALIDAÇÃO PARA MDF DO ESCOAMENTO DE COUETTE

A validação para o MDF do escoamento de *Couette* segue um caminho diferente do realizado anteriormente no escoamento de *Poiseuille*. Isso se deve principalmente ao fato que dois parâmetros de validação não se aplicam ao caso de *Couette*. A velocidade máxima ( $\bar{u}_{max}^*$ ) e o fator de atrito de *Fanning* ( $f Re_{\sqrt{A}}$ ) não servem para validação uma vez que para o caso da velocidade máxima não faz sentido já que os valores máximos se baseiam prioritariamente no valor imputado a placa inferior ( $V$ ). Já para o fator de atrito de *Fanning*, e com a ausência do gradiente de pressão, o balanço de força tende a zero tornando a determinação do fator de atrito mais difícil, por isso não se escolhe a determinação do fator de atrito como objeto de validação deste estudo. Entretanto, opta-se por usar a vazão como figura de validação substituindo o papel do fator de atrito neste sentido.

Assim, em termos de validação do método, utiliza-se a velocidade média ( $\bar{u}^*$ ) e a vazão ( $Q$ ) para validação. Dito isso, faz-se o mesmo esquema realizado no escoamento de *Poiseuille* com número de pontos para malha de  $n = 100$ . Ou seja, varia-se a razão de aspecto ( $b/a$ ) de tal sorte que se possa plotar diferentes valores obtidos para a via numérica em contra partida a via analítica obtendo as Figuras 6.8 e 6.9.

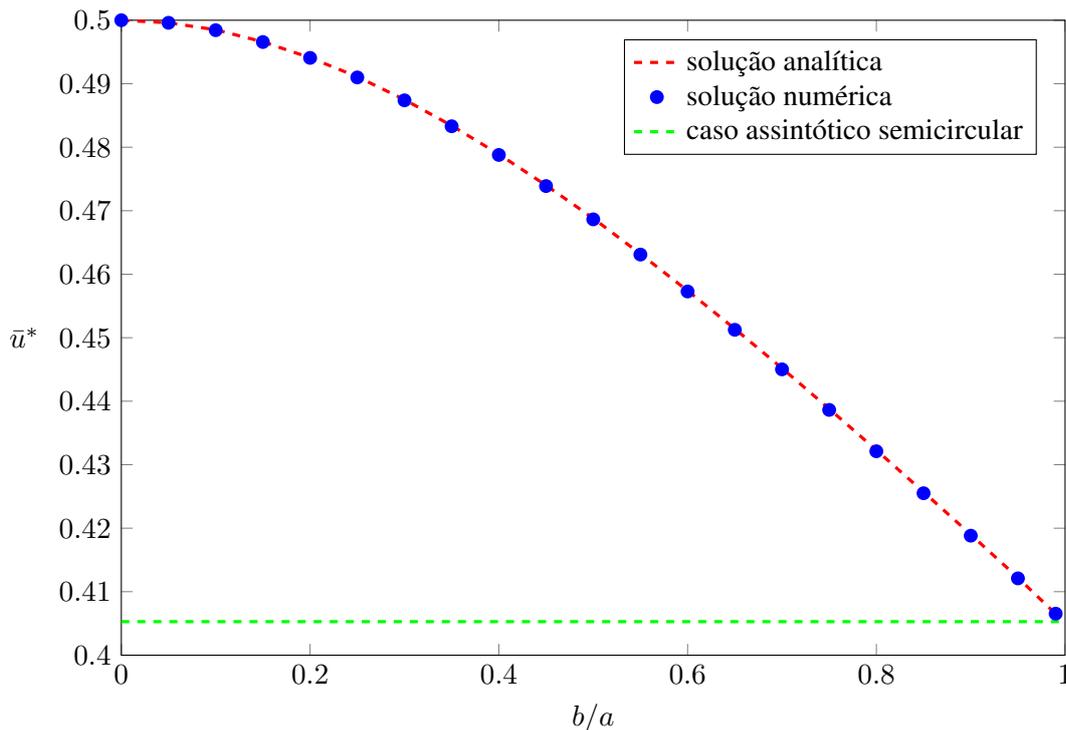


Figura 6.8: Velocidade média em função da razão de aspecto  $b/a$  com número de pontos igual a 100.

Observando o gráfico da Figura 6.8, percebe-se que outra forma de validação presente está no caso assintótico quando  $b/a \rightarrow 1$  tem-se  $\bar{u}^* \rightarrow 4/\pi^2$ . O valor para o caso limítrofe foi retirado a partir do método de separação de variáveis para o caso de um escoamento de *Couette* em uma

semicircunferência em coordenadas polares. Assim, o valor dado é

$$u^*(R, \theta) = 1 - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{4R^{2j-1} \sin(2j-1)\theta}{\pi(2j-1)} \quad (6.55)$$

com  $R = r/a$ .

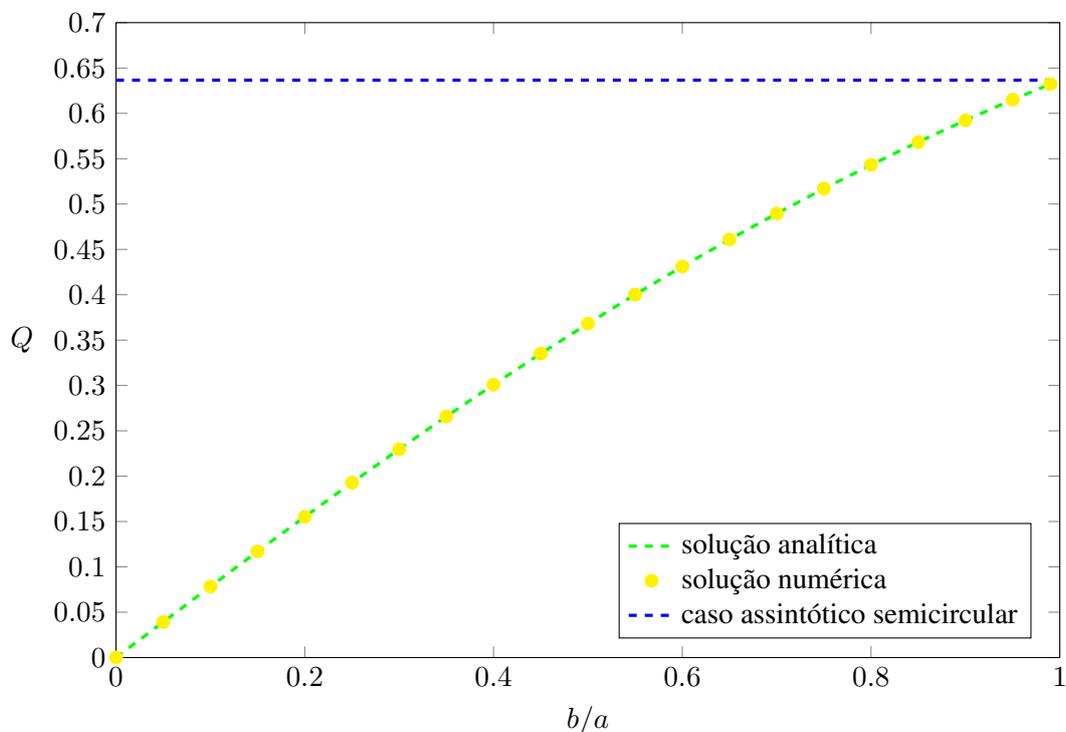


Figura 6.9: Vazão em função da razão de aspecto  $b/a$  com número de pontos igual a 100.

Assim como no caso da determinação do caso limítrofe de uma semicircunferência, a vazão também possui a mesma narrativa. Pegando o valor encontrado na equação (6.55) e multiplicando pela área ( $A = \pi/2$ ) encontra-se o valor limítrofe da vazão, ou seja, para  $b/a \rightarrow 1$  tem-se que  $Q \rightarrow 2/\pi$ .

## 7 CONCLUSÕES

*Neste capítulo apresenta-se um breve resumo do trabalho a fim de embasar a discussão sobre os resultados e conclusões que as resoluções dos escoamentos de Poiseuille e Couette trazem em suas múltiplas coincidências.*

### 7.1 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Inicialmente neste trabalho, pautado pelo artigo feito por Alassar e Abushoshah (2012) sobre escoamento de *Poiseuille* em uma seção semielíptica, desenvolveu-se um estudo referente a solução analítica e numérica de dois escoamentos em uma seção semielíptica, escoamento de *Poiseuille*, motivado exclusivamente por um gradiente de pressão, e escoamento de *Couette*, causado pelo movimento relativo entre as placas do canal.

Para isso, em um primeiro momento, modelou-se as equações de *Navier-Stokes* a fim de se obter as soluções analíticas exatas para o caso de *Poiseuille*. Ao realizar a solução analítica da equação governante de *Poisson* a solução encontrada foi diferente quando comparada a solução proposta por Alassar e Abushoshah (2012). Entretanto, ao realizar a validação, concluiu-se que se tratavam da mesma solução porém com grafias matemáticas distintas. Posteriormente, implementou-se o método das diferenças finitas para a obtenção da solução numérica e comparou-se os valores da velocidade média, velocidade média máxima e fator de atrito de *Fanning*. Por fim, comparou-se os resultados analíticos com os resultados numéricos para determinação e validação da rotina implementada. Fisicamente, ao se resumir a equação de *Poisson* a elementos discretos em um domínio retangular foi possível validar o método das diferenças finitas para um escoamento de *Poiseuille*.

Em um segundo momento do trabalho, realizou-se o mesmo processo de modelagem das equações de *Navier-Stokes* para o escoamento de *Couette*. Devido a falta do gradiente de pressão, a equação de *Laplace* se tornou a equação governante desse escoamento e sua solução analítica foi obtida. Depois, realizou-se algumas modificações na rotina implementada do método das diferenças finitas a fim de resolver a equação governante do escoamento de *Couette* discretamente. Por último, validou-se os resultados analíticos e numéricos através de dois parâmetros de comparação, a velocidade média e a vazão. É importante citar que tanto no caso do escoamento de *Couette* quanto no escoamento de *Poiseuille* encontrou-se a relação assintótica para o caso semicircular validando ainda mais o texto proposto.

Para o caso exclusivo do escoamento de *Couette*, a solução encontrada é nova na literatura o que se tornou na maior contribuição do presente trabalho. Ademais, cabe ressaltar que os resultados aqui obtidos podem ser utilizados para o estudo do escoamento de *Couette-Poiseuille* uma vez que este escoamento nada mais é que a superposição das soluções apresentadas.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Alassar 2016 ALASSAR, R. Fully developed forced convection through semi-elliptic ducts. *Applied Mathematics and Mechanics*, Springer, v. 37, n. 1, p. 37–44, 2016.
- Alassar 2017 ALASSAR, R. Slip flow in eccentric annuli. *Journal of Fluids Engineering*, American Society of Mechanical Engineers Digital Collection, v. 139, n. 4, 2017.
- Alassar 2014 ALASSAR, R. S. Fully developed forced convection through semicircular ducts. *Journal of Thermophysics and Heat Transfer*, American Institute of Aeronautics and Astronautics, v. 28, n. 3, p. 560–565, 2014.
- Alassar e Abushoshah 2012 ALASSAR, R. S.; ABUSHOSHAH, M. Hagen–poiseuille flow in semi-elliptic microchannels. *Journal of Fluids Engineering*, American Society of Mechanical Engineers Digital Collection, v. 134, n. 12, 2012.
- Alegria 2011 ALEGRIA, L. M. C. *Soluções analíticas e numéricas para o escoamento laminar desenvolvido de fluido viscoplástico em dutos e anulares elípticos*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Tecnológica Federal do Paraná, 2011.
- Arenales e Salvador 2017 ARENALES, S. H. d. V.; SALVADOR, J. A. *Cálculo numérico*. 2017.
- Arfken e Weber 1999 ARFKEN, G. B.; WEBER, H. J. *Mathematical methods for physicists*. [S.l.]: American Association of Physics Teachers, 1999.
- Bahrami, Yovanovich e Culham 2007 BAHRAMI, M.; YOVANOVICH, M. M.; CULHAM, J. R. A novel solution for pressure drop in singly connected microchannels of arbitrary cross-section. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Elsevier, v. 50, n. 13-14, p. 2492–2502, 2007.
- Bazant 2016 BAZANT, M. Z. Exact solutions and physical analogies for unidirectional flows. *Physical Review Fluids*, APS, v. 1, n. 2, p. 024001, 2016.
- Brunetti 2008 BRUNETTI, F. *Mecânica dos fluidos*. [S.l.]: Pearson Educação, 2008.
- Çengel e Cimbala 2007 ÇENGEL, Y.; CIMBALA, J. *Mecânica dos Fluidos. 1ª Edição*. [S.l.]: McGraw Hill–Artmed, 2007.
- Dahlberg et al. 2018 DAHLBERG, T.; STANGNER, T.; ZHANG, H.; WIKLUND, K.; LUNDBERG, P.; EDMAN, L.; ANDERSSON, M. 3d printed water-soluble scaffolds for rapid production of pdms micro-fluidic flow chambers. *Scientific reports*, Nature Publishing Group, v. 8, n. 1, p. 1–10, 2018.
- Figueiredo 1987 FIGUEIREDO, D. G. de. *Análise de Fourier e equações diferenciais parciais*. [S.l.]: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 1987.
- Fontes, Padilla e Filho 2013 FONTES, D. H.; PADILLA, E. L. M.; FILHO, E. P. B. Verificação e validação de um código computacional para simulação de escoamentos bidimensionais. 2013.
- Heaviside 1887 HEAVISIDE, O. Ii. on the self-induction of wires.—part v. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, Taylor & Francis, v. 23, n. 140, p. 10–29, 1887.
- Jog 2015 JOG, C. S. *Fluid Mechanics Foundations and Applications of Mechanics Volume II*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2015. v. 3 ed. 584 p.
- Kaplan 1972 KAPLAN, W. *Cálculo Avançado: Vol. 1*. [S.l.]: Editora Blucher, 1972. v. 1.

- Mihailova et al. 2015 MIHAILOVA, O.; LIM, V.; MCCARTHY, M. J.; MCCARTHY, K. L.; BAKALIS, S. Laminar mixing in a smx static mixer evaluated by positron emission particle tracking (pept) and magnetic resonance imaging (mri). *Chemical Engineering Science*, Elsevier, v. 137, p. 1014–1023, 2015.
- Minamitani et al. 2004 MINAMITANI, T.; HAYASHI, T.; HASEGAWA, K.; KIKUCHI, Y. Micro-channel flow analyzers for visualization of micro-fluidic simulations. In: IEEE. *The 26th Annual International Conference of the IEEE Engineering in Medicine and Biology Society*. [S.l.], 2004. v. 1, p. 2038–2040.
- Mortensen, Okkels e Bruus 2005 MORTENSEN, N. A.; OKKELS, F.; BRUUS, H. Reexamination of hagen-poiseuille flow: Shape dependence of the hydraulic resistance in microchannels. *Physical Review E*, APS, v. 71, n. 5, p. 057301, 2005.
- Mukherjee, Gupta e Chhabra 2017 MUKHERJEE, S.; GUPTA, A.; CHHABRA, R. Laminar forced convection in power-law and bingham plastic fluids in ducts of semi-circular and other cross-sections. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Elsevier, v. 104, p. 112–141, 2017.
- Olsen-Kettle 2011 OLSEN-KETTLE, L. Numerical solution of partial differential equations. *Lecture notes at University of Queensland, Australia*, 2011.
- Papanastasiou, Georgiou e Alexandrou 1999 PAPANASTASIOU, T.; GEORGIOU, G.; ALEXANDROU, A. N. *Viscous fluid flow*. [S.l.]: CRC press, 1999.
- Poiseuille 1847 POISEUILLE, J. L. M. *Recherches expérimentales sur le mouvement des liquides de nature différente dans les tubes de très petits diamètres*. [S.l.]: éditeur inconnu, 1847.
- Radionova 2019 RADIONOVA, A. *Theta-Channel Emitters for Nano-Electrospray and Mass Spectrometry*. Tese (Doutorado) — ResearchSpace@ Auckland, 2019.
- Saint-Venant 1844 SAINT-VENANT, A. J. C. B. d. Mémoire sur l'équilibre des corps solides, dans les limites de leur élasticité, et sur les conditions de leur résistance, quand les déplacements éprouvés par leurs points ne sont pas très-petits. *Société Philomatique de Paris*, 1844.
- Sarkar, Biswas e Öztop 2021 SARKAR, U.; BISWAS, N.; ÖZTOP, H. F. Multiplicity of solution for natural convective heat transfer and entropy generation in a semi-elliptical enclosure. *Physics of Fluids*, AIP Publishing LLC, v. 33, n. 1, p. 013606, 2021.
- Shah e London 1978 SHAH, R.; LONDON, A. *Laminar flow forced convection in ducts*. [S.l.]: Elsevier, 1978. v. 1.
- Silva et al. 2017 SILVA, F. M. d. C.; APOLINARIO, M. d. F.; SIQUEIRA, A. M. d. O.; CANDIAN, A. L. M.; MOREIRA, L. A. F.; SARTI, M. R. Experimento didático de reynolds e conceitos básicos em mecânica dos fluidos. *The Journal of Engineering and Exact Sciences*, 2017.
- Sousa et al. 2009 SOUSA, N. d. et al. Métodos de diferenças finitas: conceitos e interpretações. [sn], 2009.
- Stoecker e Jones 1985 STOECKER, W. F.; JONES, J. W. *Refrigeração e ar condicionado*. [S.l.]: McGraw-Hill do Brasil, 1985.
- Taylor e Green 1937 TAYLOR, G. I.; GREEN, A. E. Mechanism of the production of small eddies from large ones. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A-Mathematical and Physical Sciences*, The Royal Society London, v. 158, n. 895, p. 499–521, 1937.
- Wang 2015 WANG, C. On viscous flow in semi-elliptic ducts. *Journal of Fluids Engineering*, American Society of Mechanical Engineers Digital Collection, v. 137, n. 11, 2015.

- Wang et al. 2007 WANG, G.-J.; HSUEH, C.-C.; HSU, S.-h.; HUNG, H.-S. Fabrication of plga microvessel scaffolds with circular microchannels using soft lithography. *Journal of Micromechanics and Microengineering*, IOP Publishing, v. 17, n. 10, p. 2000, 2007.
- Weisstein 1999 WEISSTEIN, E. W. Orthogonal coordinate system. Wolfram Research, Inc., 1999. Disponível em: <<https://mathworld.wolfram.com/OrthogonalCoordinateSystem.html>>.
- White 1962 WHITE, F. M. *Mecânica dos fluidos*. [S.l.]: McGraw Hill Brasil, 1962.
- Yang 2003 YANG, C.-Y. Friction characteristics of water, r-134a, and air in small tubes. *Microscale Thermophysical Engineering*, Taylor & Francis, v. 7, n. 4, p. 335–348, 2003.
- Zhang 2018 ZHANG, H. *Digital holography and image processing methods for applications in biophysics*. Tese (Doutorado) — Umeå University, 2018.
- Zhu et al. 2004 ZHU, Y.; SHU, C.; QIU, J.; TANI, J. Numerical simulation of natural convection between two elliptical cylinders using dq method. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Elsevier, v. 47, n. 4, p. 797–808, 2004.
- Ziaie et al. 2004 ZIAIE, B.; BALDI, A.; LEI, M.; GU, Y.; SIEGEL, R. A. Hard and soft micromachining for biomems: review of techniques and examples of applications in microfluidics and drug delivery. *Advanced Drug Delivery Reviews*, Elsevier, v. 56, n. 2, p. 145–172, 2004.
- Zill e Cullen 2009 ZILL, D. G.; CULLEN, M. R. *Matemática Avançada para Engenharia-Vol I*. [S.l.]: Bookman Editora, 2009. v. 1.