



Universidade de Brasília - UnB  
Faculdade UnB Gama - FGA  
Engenharia Aeroespacial

# Uma comparação entre técnicas para se realizar uma missão Terra-Marte

Autor: Laís de Oliveira Torres Loureiro  
Orientador: Prof. Dr. William Reis Silva

Brasília, DF  
2024



Laís de Oliveira Torres Loureiro

## **Uma comparação entre técnicas para se realizar uma missão Terra-Marte**

Monografia submetida ao curso de graduação em Engenharia Aeroespacial da Universidade de Brasília, como requisito parcial para obtenção do Título de Bacharel em Engenharia Aeroespacial.

Universidade de Brasília - UnB

Faculdade UnB Gama - FGA

Orientador: Prof. Dr. William Reis Silva

Brasília, DF

2024

---

Laís de Oliveira Torres Loureiro

Uma comparação entre técnicas para se realizar uma missão Terra-Marte/ Laís de Oliveira Torres Loureiro. – Brasília, DF, 2024-  
80 p. : il. (algumas color.) ; 30 cm.

Orientador: Prof. Dr. William Reis Silva

Trabalho de Conclusão de Curso – Universidade de Brasília - UnB  
Faculdade UnB Gama - FGA , 2024.

1. Transferência de Hohmann. 2. Captura balística. I. Prof. Dr. William Reis Silva. II. Universidade de Brasília. III. Faculdade UnB Gama. IV. Uma comparação entre técnicas para se realizar uma missão Terra-Marte

CDU 02:141:005.6

---

Laís de Oliveira Torres Loureiro

## **Uma comparação entre técnicas para se realizar uma missão Terra-Marte**

Monografia submetida ao curso de graduação em Engenharia Aeroespacial da Universidade de Brasília, como requisito parcial para obtenção do Título de Bacharel em Engenharia Aeroespacial.

Trabalho aprovado. Brasília, DF, 13 de setembro de 2024:

---

**Prof. Dr. William Reis Silva**  
Orientador

---

**Prof. Dr. Lui Txai Calvoso Habl**  
Convidado 1

---

**Prof. Dr. Ronne Toledo**  
Convidado 2

Brasília, DF  
2024

*Este trabalho é dedicado a todas as mulheres que vieram antes de mim.*

# Agradecimentos

Agradeço primeiramente aos meus pais, Alfredo e Luzinete, por terem acreditado e confiado em mim para seguir esse sonho. À minha prima Tati que me ajudou desde o vestibular até a mudança de cidades. Ao meu orientador, Professor Doutor William Reis Silva, que concordou em me auxiliar na elaboração desse trabalho. Por fim, à minha amiga Rafaela, que esteve me apoiando desde a escolha do curso e durante toda a graduação.

*"Eba, espaço!"*  
*(Barbie)*

# Resumo

O objetivo deste trabalho é realizar uma comparação entre dois tipos de manobras orbitais: a transferência de Hohmann e a captura balística, a fim de estabelecer quais as vantagens e quais as desvantagens de cada uma delas para uma missão Terra-Marte. Primeiramente são apresentadas as missões atuais que estão em curso em Marte. A seguir são apresentados os conceitos básicos da mecânica do voo espacial, desde a Lei da Gravitação Universal, passando por problema de dois corpos e problema restrito de três corpos, e chegando em conceitos mais complexos, como pontos de Lagrange, método de *patched conics* e *weak stability boundary*. Em sequência é mostrado as definições e equacionamentos da transferência de Hohmann tradicional e interplanetária, seguido das definições, origem, primeiras missões, metodologia e equacionamentos da captura balística. Logo depois, é realizada uma simulação de uma missão real Terra-Marte, a *Mars Pathfinder*, no software STK a fim de se calcular o impulso necessário para realizar a trajetória proposta e, assim, gerar uma tabela comparativa entre os dois tipos de transferência. Por fim, são apresentados os resultados tanto simulados quanto calculados e é discutido as considerações para realização de cada tipo de transferência.

**Palavras-chaves:** Terra. Marte. Transferência de Hohmann. Captura balística.



# Abstract

This work has the objective of making a comparison between two types of orbital maneuvers: the Hohmann transfer and the ballistic capture, in order to establish the advantages and disadvantages of each for an Earth-Mars mission. First it is presented the current active missions on Mars. Afterwards it is presented the basic concepts of space flight mechanics, starting from the Law of Universal Gravitation, passing through the two body problem and the restricted three body problem, arriving at more complex concepts, as the Lagrange points, the method of patched conics and weak stability boundary. Then it is shown the definitions and equations of a traditional and an interplanetary Hohmann transfer, followed by the definitions, origin, first missions, methodology and equations of a ballistic capture. Subsequently, a real Earth-Mars mission, the Mars Pathfinder, is simulated on the software STK in order to calculate the necessary impulse to complete the proposed trajectory and, thus generate a comparative table between the two kinds of transfers. Finally it is shown both the simulated and calculated results and it is discussed the conditions to perform each type of transfer.

**Key-words:** Earth. Mars. Hohmann transfer. Ballistic capture.

# Lista de ilustrações

Figura 1 – Marsnik 1 - o primeiro satélite lançado com o objetivo de chegar em Marte (NASA, 2022).	18
Figura 2 – Mariner 4 - A primeira nave a realizar <i>flyby</i> por Marte (NASA, 2020a).	21
Figura 3 – Primeiras fotografias de Marte (NASA, 2015).	22
Figura 4 – O primeiro <i>lander</i> em Marte (NASA, 2020b).	23
Figura 5 – Duas massas em um referencial inercial (Curtis, 2013).	25
Figura 6 – Corpos primários $m_1$ e $m_2$ em órbita circular um ao redor do outro, junto de um corpo secundário $m$ (Curtis, 2013).	27
Figura 7 – Gráfico da Eq. 3.59 para dados de Terra-Lua (Curtis, 2013).	33
Figura 8 – Vetores de posição relativa e força gravitacional entre os três corpos (Curtis, 2013).	34
Figura 9 – Movimentos estáveis e instáveis (Topputo; Belbruno, 2015).	39
Figura 10 – Transferência de Hohmann (Curtis, 2013).	40
Figura 11 – Transferência de Hohmann do planeta 1 para o planeta 2 (Curtis, 2013).	42
Figura 12 – Estrutura da captura balística até Marte (Topputo; Belbruno, 2015).	46
Figura 13 – Conjuntos estáveis para $\mathcal{W}_n(e, f_0)$ com $f_0 = \pi/4$ , $e = 0, 99$ , $n = 1, 2, 3, 6$ (Topputo; Belbruno, 2015).	49
Figura 14 – Conjunto de captura $\mathcal{C}_{-1}^6(0, 99, \pi/4)$ (Topputo; Belbruno, 2015).	50
Figura 15 – Órbita de captura correspondente a $\mathcal{C}_{-1}^6(0, 99, \pi/4)$ em coordenadas rotacional e inercial (Topputo; Belbruno, 2015).	50
Figura 16 – Solução usando a órbita apresentada em Fig. 14 (Topputo; Belbruno, 2015).	52
Figura 17 – Solução obtida escolhendo um ponto em $\mathcal{C}_{-1}^6(0, 99, \pi/2)$ (Topputo; Belbruno, 2015).	52
Figura 18 – Comparação de transferência de Hohmann bitangencial e captura balística de transferência originadas pelo conjunto de captura $\mathcal{C}(e, f_0)$ , $e = 0, 99$ , $f_0 = 0, \pi/4, \pi/2$ (Topputo; Belbruno, 2015).	54
Figura 19 – Condições iniciais.	58
Figura 20 – Marcações dos subplanetas.	58
Figura 21 – Inserção do planeta.	59
Figura 22 – Propriedades da Terra.	59
Figura 23 – Propriedades de Marte.	59
Figura 24 – Inserção do satélite.	60
Figura 25 – Propagador.	60
Figura 26 – Escolha do rastreador de órbita.	60
Figura 27 – Escolha do limite dos detalhes.	61

Figura 28 – Coordenadas elípticas. . . . .	61
Figura 29 – Nome da janela. . . . .	61
Figura 30 – Distância visível. . . . .	62
Figura 31 – Nome da janela. . . . .	62
Figura 32 – Distância visível. . . . .	62
Figura 33 – Nome da janela. . . . .	63
Figura 34 – Distância visível. . . . .	63
Figura 35 – As três janelas. . . . .	63
Figura 36 – Os três corpos celestes. . . . .	64
Figura 37 – Renomear o componente. . . . .	65
Figura 38 – Editar o componente. . . . .	65
Figura 39 – Definição de variáveis. . . . .	66
Figura 40 – Definição de variáveis. . . . .	66
Figura 41 – Definição do propagador. . . . .	66
Figura 42 – Lista do MCS. . . . .	67
Figura 43 – Sequência da missão. . . . .	68
Figura 44 – Convergência da missão. . . . .	68
Figura 45 – Lista do MCS. . . . .	69
Figura 46 – Lista do MCS. . . . .	70
Figura 47 – <i>Backwards Sequence</i> . . . . .	70
Figura 48 – Sequência da missão. . . . .	71
Figura 49 – Cópia do propagador. . . . .	71
Figura 50 – Edição do propagador. . . . .	72
Figura 51 – Sequência da missão. . . . .	72
Figura 52 – Mudança de propagador. . . . .	72
Figura 53 – Trajetória da missão com vista centrada na Terra. . . . .	73
Figura 54 – Trajetória da missão com vista heliocêntrica. . . . .	73
Figura 55 – Trajetória da missão com vista centrada em Marte. . . . .	74

# Lista de tabelas

Tabela 1 – Missões operacionais em Marte (NASA, 2023a). . . . .	23
Tabela 2 – Parâmetro gravitacional ( $\mu$ ) e raio da esfera de influência (SOI) para Sol, Terra e Marte (Curtis, 2013). . . . .	37
Tabela 3 – Excesso de velocidade hiperbólica em Marte para quatro transferências bitangenciais (Topputo; Belbruno, 2015). . . . .	54
Tabela 4 – Raios de periapsis nos quais a captura balística de transferência se tornam mais convenientes que a transferência de Hohmann para diferentes $f_0$ (Topputo; Belbruno, 2015). . . . .	55
Tabela 5 – Comparação entre captura balística de transferência e transferência de Hohmann para os pontos em Fig. 18 (Topputo; Belbruno, 2015). . . . .	55
Tabela 6 – Condições iniciais . . . . .	76
Tabela 7 – Resultados para $\Delta v$ e $\Delta t$ calculados . . . . .	76
Tabela 8 – Resultados para $\Delta v$ e $\Delta t$ simulados. . . . .	76

# Lista de abreviaturas e siglas

NASA	<i>National Aeronautics and Space Administration</i> - Administração Nacional da Aeronáutica e Espaço
ESA	<i>European Space Agency</i> - Agência Espacial Europeia
MBRSC	<i>Mohammed Bin Rashid Space Centre</i> - Centro Espacial Mohammed bin Rashid
CNSA	<i>China National Space Administration</i> - Administração Espacial Nacional da China
URSS	União das Repúblicas Socialistas Soviéticas
EUA	Estados Unidos da América
WSB	<i>Weak Stability Boundary</i> - Limite de estabilidade fraca
SOI	<i>Sphere of Influence</i> - Esfera de influência
ISAS	<i>Institute of Space and Astronautical Science</i> - Instituto de Ciência Espacial e Astronáutica do Japão
JAXA	<i>Japan Aerospace Exploration Agency</i> - Agência Japonesa de Exploração Aeroespacial
ISRO	<i>Indian Space Research Organisation</i> - Organização Indiana de Pesquisa Espacial

# Lista de símbolos

$\Delta v$	Impulso
$F$	Força gravitacional
$G$	Constante gravitacional
$r$	Distância entre planetas
$m_1$	Massa do corpo 1
$m_2$	Massa do corpo 2
$m$	Massa do corpo com massa desprezível
$G$	Centro de massa
$\mathbf{R}_G$	Vetor posição do centro de massa
$\mathbf{F}_{12}$	Força que o corpo 1 exerce sobre o corpo 2
$\mathbf{F}_{21}$	Força que o corpo 2 exerce sobre o corpo 1
$\mathbf{v}_G = \dot{\mathbf{R}}_G$	Velocidade absoluta do centro de massa
$\mathbf{a}_G = \ddot{\mathbf{R}}_G$	Aceleração absoluta do centro de massa
$\mathbf{r}$	Vetor posição do corpo 2 em relação ao corpo 1
$\hat{\mathbf{u}}_r$	Vetor unitário que aponta do corpo 1 para o corpo 2
$\Omega$	Velocidade inercial angular constante
$T$	Período orbital
$\mu$	Constante gravitacional
$M$	Massa total
$\pi_1$	Razão adimensional de massa do corpo 1
$\pi_2$	Razão adimensional de massa do corpo 2
$\mathbf{r}_1$	Vetor posição de $m$ em relação a $m_1$
$\mathbf{r}_2$	Vetor posição de $m$ em relação a $m_2$

$\mathbf{F}_p^{(v)}$	Força gravitacional exercida pelo planeta sobre a espaçonave
$\mathbf{F}_s^{(v)}$	Força gravitacional exercida pelo Sol sobre a espaçonave
$\mathbf{F}_s^{(p)}$	Força gravitacional exercida pelo Sol sobre o planeta
$\mathbf{A}_s$	Aceleração gravitacional primária devido ao Sol
$\mathbf{P}_p$	Aceleração de perturbação devido ao planeta
$\mathbf{a}_p$	Aceleração primária devido ao planeta
$\mathbf{p}_s$	Aceleração de perturbação devido ao Sol
$r_{\text{SOI}}$	Raio da esfera de influência
$L$	Ponto de Lagrange
$l(\theta)$	Segmento radial
$\theta$	Ângulo entre o segmento radial e o eixo $x$
$h_k$	Energia kepleriana
$a$	Semi-eixo maior
$\varepsilon$	Energia específica
$e$	Excentricidade
$v_{\text{circular}}$	Velocidade da órbita circular
$h$	Momento angular
$v_\infty$	Excesso de velocidade hiperbólica
$\mathbf{x}_c$	Ponto arbitrário longe de Marte
$P$	Espaçonave
$r_p$	Raio de periapsis
$r_a$	Raio de apoapsis
$\Omega(x, y)$	Função potencial
$f$	Anomalia verdadeira
$f_0$	Valor inicial da anomalia verdadeira
$t$	Tempo

$t_0$	Tempo inicial
$\mathcal{W}_n$	Conjunto estáveis
$\overline{\mathcal{W}}_{-1}$	Conjuntos instáveis
$\mathcal{C}^n$	Conjunto de captura
$S$	Economia de delta-v
$\Delta t_{c \rightarrow p}$	Tempo de voo de $\mathbf{x}_c$ até $r_p$



# Sumário

1	<b>INTRODUÇÃO</b>	18
1.1	Contextualização	18
1.2	Objetivos	19
1.2.1	Objetivos Específicos	19
1.3	Justificativa	19
1.4	Organização do Trabalho	19
2	<b>MISSÕES TERRA-MARTE</b>	21
2.1	Programa Artemis	23
2.2	Futuras missões para Marte	24
3	<b>REFERENCIAL TEÓRICO</b>	25
3.1	Lei da Gravitação Universal	25
3.2	Problema de dois corpos	25
3.3	Problema restrito de três corpos	27
3.4	Pontos de Lagrange	31
3.5	Esfera de influência	34
3.6	Método de <i>patched conics</i>	38
3.7	<i>Weak Stability Boundary</i>	38
4	<b>TRANSFERÊNCIA DE HOHMANN</b>	40
4.1	Definição	40
4.2	Método e equacionamento	40
4.3	Transferência de Hohmann interplanetária	42
5	<b>CAPTURA BALÍSTICA</b>	44
5.1	Definição	44
5.2	Primeiras missões	44
5.3	Captura balística no contexto Terra-Marte	44
5.4	Metodologia	45
5.5	Modelo	46
5.6	Conjuntos estáveis de Marte e órbitas para captura balística	48
5.7	Transferência interplanetária da Terra até pontos de captura longe de Marte	51
5.8	Comparação entre captura balística e transferência de Hohmann	54
6	<b>SIMULAÇÃO</b>	57

<b>6.1</b>	<b>Systems Tool Kit (STK)</b>	<b>57</b>
6.1.1	<i>Astrogator</i>	57
6.1.2	<i>Lambert Solver</i>	57
<b>6.2</b>	<b>Transferência de Hohmann</b>	<b>57</b>
6.2.1	<i>Mars Pathfinder</i>	57
6.2.2	Passo a passo	57
6.2.2.1	Criar o cenário	57
6.2.2.2	Desativar os subplanetas	58
6.2.2.3	Inserir a Terra	58
6.2.2.4	Inserir Marte	59
6.2.2.5	Criar <i>Pathfinder</i>	59
6.2.2.6	Vista centrada na Terra	61
6.2.2.7	Visão heliocêntrica	62
6.2.3	Vista centrada em Marte	63
6.2.3.1	Ajuste da vista heliocêntrica	64
6.2.3.2	Criar o arco de transferência	64
6.2.4	Desenhar o arco de transferência	65
6.2.4.1	Definir a Terra como o corpo central	65
6.2.4.2	Definir o propagador	66
6.2.4.3	Modelar o arco de transferência do satélite	67
6.2.4.4	Modelar a órbita	68
6.2.4.5	Criar o propagador <i>Mars Point Mass</i>	71
6.2.4.6	Propagar a órbita	72
6.2.5	Trajetória final	73
<b>7</b>	<b>RESULTADOS</b>	<b>75</b>
<b>7.1</b>	<b>Condições iniciais</b>	<b>76</b>
<b>7.2</b>	<b>Comparação do <math>\Delta v</math> e <math>\Delta t</math></b>	<b>76</b>
<b>7.3</b>	<b>Considerações</b>	<b>77</b>
<b>8</b>	<b>CONCLUSÃO</b>	<b>78</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>79</b>

# 1 Introdução

## 1.1 Contextualização

De *A Guerra dos Mundos* a *Perdido em Marte*, o homem se mostrou fascinado com o planeta vermelho no universo da ficção científica (NASA, 2023c). A partir de 1960 essa fascinação da ficção começou a se tornar realidade, com o desenvolvimento do satélite soviético 1M No. 1 (Fig. 1), também conhecido como *Marsnik 1* e *Korabl 4*, o primeiro satélite lançado com o objetivo de chegar em Marte (NASA, 2022).

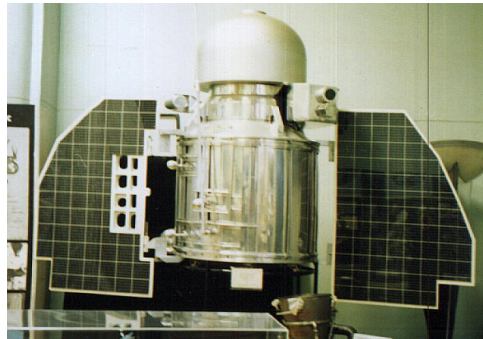


Figura 1 – Marsnik 1 - o primeiro satélite lançado com o objetivo de chegar em Marte (NASA, 2022).

Atualmente, segundo NASA (2023d), o programa de exploração de Marte tem como objetivo principal entender sua formação e sua evolução como planeta, a história dos processos geológicos que o moldaram, o potencial do planeta para abrigar vida e futuramente, o desenvolvimento de missões tripuladas para Marte.

Entretanto, chegar em Marte não é uma tarefa fácil. Diversas variáveis precisam ser levadas em consideração para se elaborar uma missão espacial: custo, *payload*, tempo de missão,  $\Delta v$ , janela de oportunidade, entre outras (Topputo; Belbruno, 2015).

De forma geral, quanto mais combustível é levado, mais energia é produzida e, conseqüentemente, mais rapidamente será realizada a missão. Todavia, mais combustível acarreta em mais peso, diminuindo, assim, de acordo com Curtis (2013), o *payload* da missão. Por isso, é necessário estipular as melhores manobras orbitais para realizar a missão da forma mais eficiente possível.

Uma das maneiras de diminuir o combustível levado seria mudar o tipo de propulsão usado na missão, de química para elétrica. A propulsão elétrica tem melhor eficiência em relação ao uso do combustível, necessitando de menos propelente para chegar em um mesmo  $\Delta v$ . No entanto, propulsores elétricos trabalham com um fluxo de propelente muito baixo, aumentando, assim, consideravelmente o tempo de missão (Jahn, 2006).

Este trabalho aborda uma comparação entre a já bastante conhecida transferência de Hohmann com a ainda em processo de estudos captura balística. A transferência de Hohmann é atualmente a forma mais eficiente, em relação à energia, de realizar uma transferência interplanetária com seu baixo tempo de duração. Já a captura balística propõe utilizar menos combustível, aumentando o *payload*. Assim, é apresentado as vantagens e desvantagens de cada uma dessas técnicas e suas formulações matemáticas.

## 1.2 Objetivos

O objetivo geral deste trabalho é comparar o tempo e o impulso de dois tipos de manobras orbitais, a transferência de Hohmann e a captura balística, no contexto de uma missão Terra-Marte.

### 1.2.1 Objetivos Específicos

- Realizar uma revisão bibliográfica dos conceitos em que se baseiam cada manobra;
- Estabelecer as equações que regem cada manobra;
- Estabelecer o tempo médio de cada manobra;
- Estabelecer o *payload* de cada manobra;
- Realizar uma simulação de uma missão real Terra-Marte;
- Comparar os valores encontrados.

## 1.3 Justificativa

Com o aumento do interesse em explorar outros planetas, principalmente Marte, é importante estudar diferentes maneiras de como realizar uma viagem interplanetária. Diferentes missões apresentam diferentes objetivos e, assim, é fundamental saber qual tipo de transferência é mais recomendada para cada missão, baseando-se principalmente nas variáveis tempo e *payload*.

## 1.4 Organização do Trabalho

Este trabalho é dividido em seis capítulos. O Cap. 1 apresenta a contextualização, os objetivos e a metodologia do trabalho proposto.

No Cap. 2 é apresentada uma breve história da exploração de Marte, desde seus primórdios na Guerra Fria até as missões operacionais atuais.

No Cap. 3 é mostrado o referencial teórico do trabalho, ou seja, os conceitos teóricos que serão utilizados para fundamentar o trabalho.

No Cap. 4 é apresentado a definição e o equacionamento da transferência de Hohmann tradicional e aplicado a missões interplanetárias.

No Cap. 5 é apresentado a definição e o equacionamento da captura balística.

No Cap. 6 é apresentado a simulação de uma missão Terra-Marte feita no software STK.

No Cap. 7 é apresentado os resultados dos impulsos calculados e simulados dos impulsos e sua comparação.

Por fim, no Cap. 8 é mostrada a conclusão do trabalho.

## 2 Missões Terra-Marte

Na década de 1950, em um período conhecido como Guerra Fria, foi iniciado a exploração espacial. Durante a chamada Corrida Espacial, Estados Unidos e União Soviética passaram a desenvolver tecnologias inéditas para realizar missões espaciais. Em outubro de 1957, a URSS lançou o primeiro satélite artificial, chamado de *Sputnik*. Alguns meses depois, em janeiro de 1958, os EUA colocaram em órbita seu primeiro satélite, denominado de *Explorer 1*. Como mostrado por [Lai \(2021\)](#), assim começava um novo capítulo na história da humanidade: a da exploração espacial.

Em janeiro de 1959, os soviéticos lançaram a sonda *Luna 1*, a primeira espaçonave a sair da órbita terrestre e a realizar um *flyby* pela Lua. Em sequência, em março do mesmo ano, os americanos também conseguiram escapar da órbita da Terra, com o lançamento da sonda *Pioneer 4* ([Lai, 2021](#)).

Já na década de 1960, como visto em [Jayawardana e Bandaranayake \(2018\)](#), os programas espaciais americano e soviético passaram a medir esforços para alcançar outros planetas. Em outubro de 1960, a União Soviética lançou o *Marsnik 1* com o objetivo de fazer um *flyby* por Marte. Entretanto, a espaçonave foi destruída durante o lançamento. Alguns dias depois foi lançado o *Marsnik 2*, que também explodiu durante o lançamento. Em 1962, os soviéticos lançaram mais três espaçonaves com o intuito de chegar em Marte, o *Sputnik 22*, o *Sputnik 23* e o *Sputnik 24*, mas todas as missões falharam.

Em novembro de 1964 foi a vez dos americanos tentarem realizar sua primeira missão marciana, com o lançamento do *Mariner 3*. O lançamento foi bem-sucedido, porém houve um problema com os painéis solares que a equipe não conseguiu resolver, acarretando em falha da missão. Três semanas depois, os Estados Unidos lançaram uma nova sonda, *Mariner 4*, a missão foi um sucesso, tornando-a, assim, a primeira sonda a fazer um *flyby* por Marte ([Jayawardana; Bandaranayake, 2018](#)).

O *Mariner 4* (Fig. 2) foi responsável por tirar as primeiras fotografias do planeta vermelho.



Figura 2 – Mariner 4 - A primeira nave a realizar *flyby* por Marte ([NASA, 2020a](#)).

Foram enviadas um total de 21 fotos, algumas delas podem ser vistas em Fig. 3.

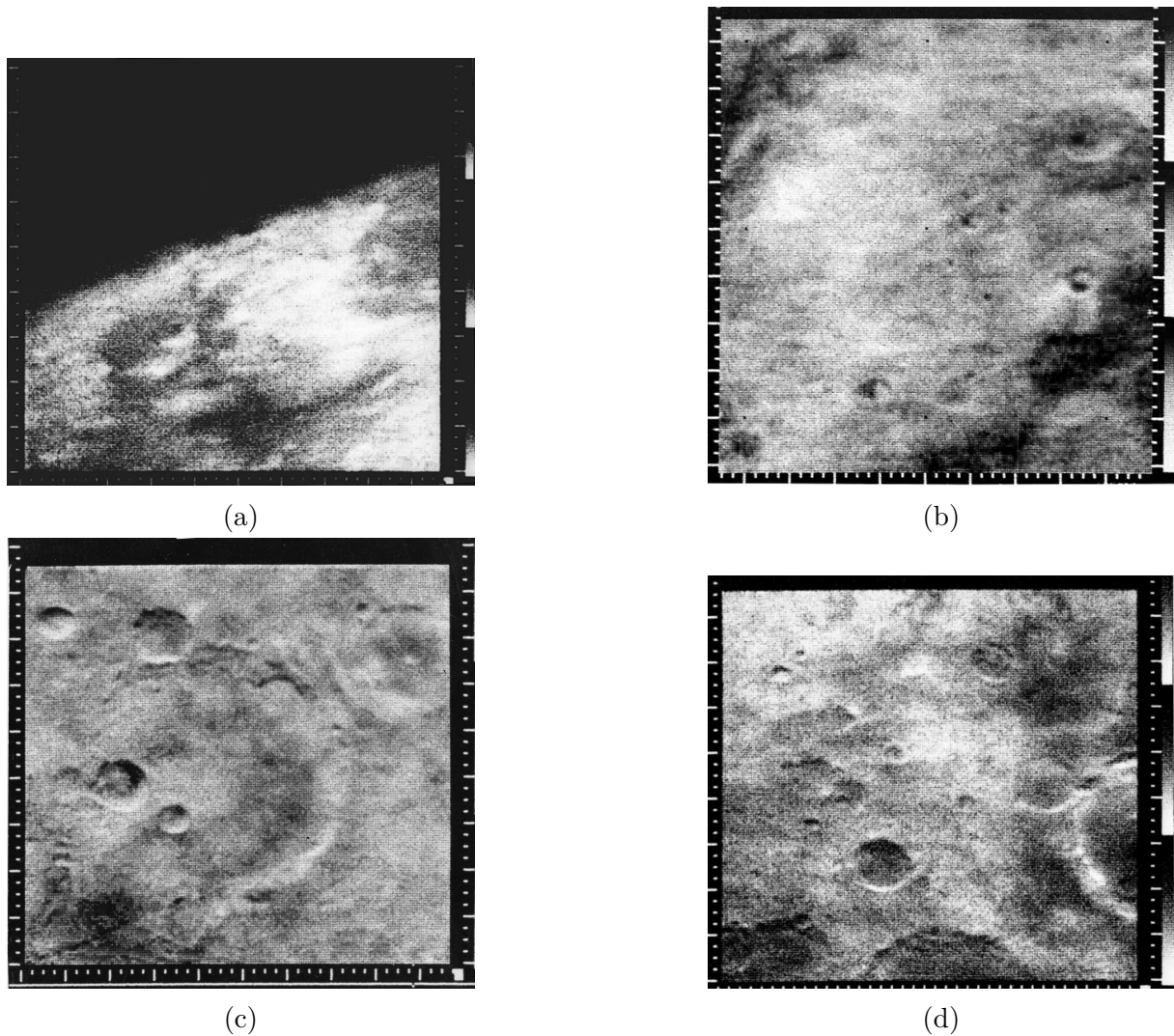


Figura 3 – Primeiras fotografias de Marte (NASA, 2015).

Em 1969, os EUA conseguiu mais uma vez ser bem sucedido, conseguindo completar as missões *Mariner 6* e *Mariner 7*. Somente em 1971 os soviéticos conseguiram chegar na órbita marciana, com a missão *Mars 2* (Jayawardana; Bandaranayake, 2018).

Na década de 1970, com o objetivo de fotografar a superfície de Marte já tendo sido completado, as missões passaram a explorar a superfície do planeta com veículos espaciais, como os *rovers*. *Mars 6* e *Mars 7* foram missões soviéticas que conseguiram realizar o *flyby* porém não conseguiram levar seus *landers* até a superfície vermelha. Em 1975, os americanos conseguiram pousar os primeiros objetos feitos pelo homem na superfície de Marte, com as missões *Viking 1* e *Viking 2* (Jayawardana; Bandaranayake, 2018).

O *lander* pode ser observado em Fig. 4.



Figura 4 – O primeiro *lander* em Marte (NASA, 2020b).

Em 2001 foi lançado o *orbiter Mars Odyssey*, que possui expectativa de estar funcionando até 2025, tornando-o a missão operacional mais longa de Marte, de acordo com NASA (2023b). Atualmente, há onze missões operacionais em Marte que estão apresentadas em Tab. 1.

Tabela 1 – Missões operacionais em Marte (NASA, 2023a).

Nave	Data de lançamento	Agência	Tipo de missão
Mars Odyssey	07/04/2001	NASA	Órbita
Mars Express	02/06/2003	ESA	Órbita
Mars Reconnaissance Orbiter	12/08/2005	NASA	Órbita
Curiosity (Mars Science Laboratory)	26/11/2011	NASA	Rover
MAVEN	18/11/2013	NASA	Órbita
ExoMars Trace Gas Orbiter	14/03/2016	ESA	Órbita
Hope	19/07/2020	MBRSC	Órbita
Tianwen-1 orbiter	23/07/2020	CNSA	Órbita
Zhurong rover	23/07/2020	CNSA	Rover
Perseverance	30/07/2020	NASA	Rover
Ingenuity	30/07/2020	NASA	Helicóptero

## 2.1 Programa Artemis

O Programa Artemis da NASA é dividido em etapas com o propósito de retornar a realizar missões tripuladas até a Lua. O objetivo geral do programa é estabelecer uma base fixa no satélite natural da Terra, e, assim, facilitar o envio de missões tripuladas para Marte (NASA, 2024).



## 2.2 Futuras missões para Marte

Para 2024, a NASA tem intenção de lançar a missão EscaPADE (*Escape and Plasma Acceleration and Dynamics Explorers*) que é composta de duas espaçonaves idênticas, *Blue* e *Gold*. A missão tem como objetivo estudar a magnetosfera única de Marte e a contribuição do vento solar na perda da maior parte da atmosfera do planeta ao longo da história do sistema solar. De acordo com [Lillis \(2024\)](#), EscaPADE é um legado da missão MAVEN por uma fração do custo.

Para meados da década de 2020, a JAXA pretende lançar a missão *Martian Moons eXploration* (MMX). A missão tem o propósito de explorar as origens das luas de Marte, a criação de ambientes habitáveis aonde a vida poderia começar, aprender a história evolutiva da esfera de Marte e desenvolver tecnologia para formar uma base para futuras explorações ([JAXA, 2015](#)).

Em 2022, a empresa Impulse Space anunciou em parceria com a empresa Relativity Space a intenção de enviar cargas pagas comerciais para Marte. Pelo acordo feito entre as empresas, Relativity irá lançar os *Mars Cruise Vehicle* e *Mars Lander* da Impulse no foguete *Terran R*. Conforme [Space \(2022\)](#), o *Mars Lander* terá sua própria capacidade de carga para a superfície de Marte, apoiando a pesquisa e o desenvolvimento necessário para construir um futuro multiplanetário para a humanidade.

Para 2028, a ESA planeja enviar o rover Rosalind Franklin, parte do programa ExoMars. A missão tem o objetivo de descobrir se já existiu vida em Marte ([ESA, 2024](#)).

A ISRO pretende lançar a missão *Mars Orbiter Mission 2* levando um rover, um helicóptero, um guindaste espacial e uma paraquedas supersônico. Assim será possível medir a origem, a abundância, a distribuição e o fluxo de partículas de poeira em altas altitudes em Marte. Também será possível medir os perfis de densidade de nêutrons e elétrons na atmosfera marciana ([Índia, 2024](#)).

## 3 Referencial Teórico

Aqui serão abordados os conceitos básicos para a compreensão do tema proposto, sendo estes a lei da gravitação universal, o problema de dois corpos, o problema restrito de três corpos, os pontos de Lagrange, o método de *patched conics* e o *weak stability boundary*.

### 3.1 Lei da Gravitação Universal

A força gravitacional entre duas massas  $m_1$  e  $m_2$  a uma distância  $r$  de seus centros é dada pelo módulo:

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad (3.1)$$

Como apresentado em [Curtis \(2013\)](#), essa é conhecida como a Lei da Gravitação Universal, em que  $G$  é chamada de constante gravitacional cujo valor é  $6,67 \times 10^{11} \text{ m}^3/\text{kg} \cdot \text{s}^2$ . Observando o inverso do quadrado da distância, é possível concluir que a força diminui rapidamente quanto mais as duas massas são separadas. A força gravitacional é pequena, a não ser que pelo menos um dos dois corpos apresente um grande valor de massa, como é no caso das estrelas e dos planetas.

### 3.2 Problema de dois corpos

O problema de dois corpos determina a movimentação de dois corpos em relação apenas a sua atração gravitacional mútua. O caminho de uma das massas em relação a outra é uma seção cônica: círculo, parábola, elipse ou hipérbole; em que o formato é determinado por sua excentricidade ([Curtis, 2013](#)).

A Fig. 5 mostra dois corpos de massa em que apenas a força da gravidade mútua age sobre eles.

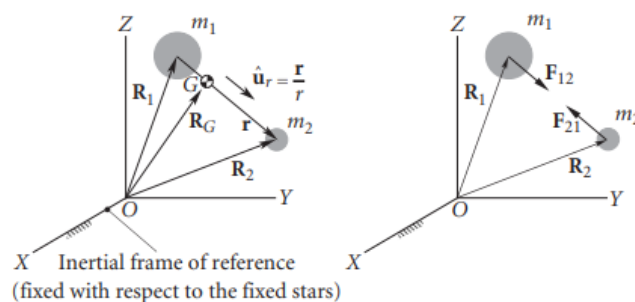


Figura 5 – Duas massas em um referencial inercial ([Curtis, 2013](#)).

As posições de seus centros de massa estão em relação ao referencial inercial XYZ. A origem O do referencial pode se mover com a velocidade constante, mas os eixos não rotacionam (Curtis, 2013).

Cada um dos corpos sofre atração gravitacional do outro.  $\mathbf{F}_{12}$  é a força que  $m_1$  exerce sobre  $m_2$  e  $\mathbf{F}_{21}$  é a força que  $m_2$  exerce sobre  $m_1$ . Assim, o vetor de posição  $\mathbf{R}_G$  do centro de massa G do sistema é definido como:

$$\mathbf{R}_G = \frac{m_1\mathbf{R}_1 + m_2\mathbf{R}_2}{m_1 + m_2} \quad (3.2)$$

A partir daí, a velocidade e aceleração absolutas, ou seja, medidas em relação ao referencial inercial, de G são:

$$\mathbf{v}_G = \dot{\mathbf{R}}_G = \frac{m_1\dot{\mathbf{R}}_1 + m_2\dot{\mathbf{R}}_2}{m_1 + m_2} \quad (3.3)$$

$$\mathbf{a}_G = \ddot{\mathbf{R}}_G = \frac{m_1\ddot{\mathbf{R}}_1 + m_2\ddot{\mathbf{R}}_2}{m_1 + m_2} \quad (3.4)$$

Considerando  $\mathbf{r}$  como o vetor posição de  $m_2$  em relação a  $m_1$ , tem-se:

$$\mathbf{r} = \mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1 \quad (3.5)$$

Em sequência, considera-se que  $\hat{\mathbf{u}}_r$  é o vetor unitário que aponta de  $m_1$  para  $m_2$ , então:

$$\hat{\mathbf{u}}_r = \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (3.6)$$

Considerando que  $-\hat{\mathbf{u}}_r$  se refere ao fato que o vetor  $\mathbf{F}_{21}$  é direcionado de  $m_2$  para  $m_1$  e levando em conta Eq. 3.1, tem-se:

$$\mathbf{F}_{21} = \frac{Gm_1m_2}{r^2}(-\hat{\mathbf{u}}_r) = -\frac{Gm_1m_2}{r^2}\hat{\mathbf{u}}_r \quad (3.7)$$

em que G representa a constante gravitacional, e não o centro de massa.

Aplicando a segunda Lei de Newton na massa  $m_2$ , é encontrado que  $\mathbf{F}_{21} = m_2\ddot{\mathbf{R}}_2$ . Igualando a Eq. 3.7, encontra-se:

$$-\frac{Gm_1m_2}{r^2}\hat{\mathbf{u}}_r = m_2\ddot{\mathbf{R}}_2 \quad (3.8)$$

Considerando o princípio de ação e reação, a terceira Lei de Newton, é possível afirmar que  $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$ . Assim Eq. 3.8 para  $m_1$  é:

$$\frac{Gm_1m_2}{r^2}\hat{\mathbf{u}}_r = m_1\ddot{\mathbf{R}}_1 \quad (3.9)$$

Eqs. 3.8 e 3.9 são as equações de movimento para dois corpos em um espaço inercial. Somando essas duas equações encontra-se  $m_1\ddot{\mathbf{R}}_1 + m_2\ddot{\mathbf{R}}_2 = 0$ . Comparando esse resultado com Eq. 3.4, é possível afirmar que, de acordo com Curtis (2013), a aceleração do centro de massa do sistema de dois corpos  $m_1$  e  $m_2$  é zero.

### 3.3 Problema restrito de três corpos

Considerando dois corpos  $m_1$  e  $m_2$  se movendo apenas sob a ação gravitacional mútua, e a órbita circular entre eles possui raio  $r_{12}$ . Considerar também um sistema de referência  $xyz$  não-inercial e que se move junto com as massas, cuja origem se localiza no centro de massa  $G$  do sistema de dois corpos. Na Fig. 6 é possível observar que o eixo  $x$  está na direção de  $m_2$ , o eixo  $y$  está no plano orbital e o eixo  $z$  é perpendicular a  $y$ . Neste sistema de referência,  $m_1$  e  $m_2$  aparecem em repouso (Curtis, 2013).

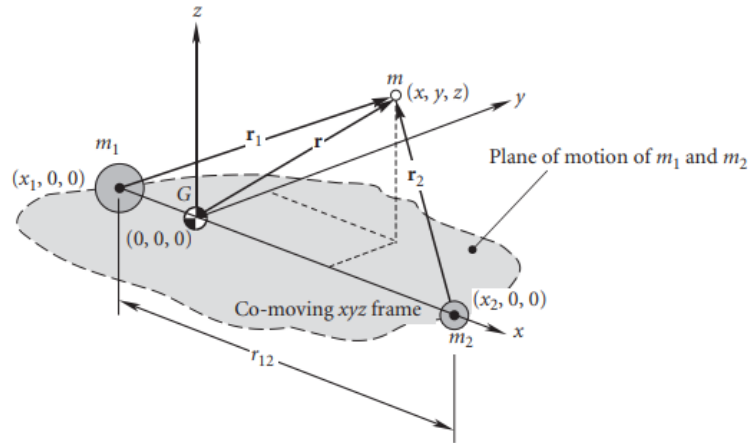


Figura 6 – Corpos primários  $m_1$  e  $m_2$  em órbita circular um ao redor do outro, junto de um corpo secundário  $m$  (Curtis, 2013).

A velocidade inercial angular constante é:

$$\boldsymbol{\Omega} = \Omega\hat{\mathbf{k}} \quad (3.10)$$

em que  $\Omega = \frac{2\pi}{T}$ , onde  $T$  é o período orbital. Para uma órbita circular, o período é dado por:

$$T_{\text{circular}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}r^{\frac{3}{2}} \quad (3.11)$$

Substituindo o raio da órbita de  $m_1$  e  $m_2$  em Eq. 3.11, encontra-se:

$$T = 2\pi \frac{r_{12}^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\mu}} \quad (3.12)$$

Assim, a velocidade inercial angular constante é:

$$\Omega = \sqrt{\frac{\mu}{r_{12}^3}} \quad (3.13)$$

A massa total  $M$  é dada por:

$$M = m_1 + m_2 \quad (3.14)$$

e

$$\mu = GM \quad (3.15)$$

$m_1$  e  $m_2$  estão no plano orbital e, por isso, suas coordenadas  $y$  e  $z$  são zero. Para determinar a localização em  $x$ , usa-se Eq. 3.2 para encontrar  $m_1x_1 + m_2x_2 = 0$ . Tendo em vista que  $m_2$  está a uma distância  $r_{12}$  de  $m_1$  na direção positiva de  $x$ , é possível afirmar que, como visto em Curtis (2013),  $x_2 = x_1 + r_{12}$ .

As razões adimensionais de massa são dadas por:

$$\pi_1 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \quad (3.16)$$

$$\pi_2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \quad (3.17)$$

Assim, obtém-se:

$$x_1 = -\pi_2 r_{12} \quad (3.18)$$

$$x_2 = \pi_1 r_{12} \quad (3.19)$$

Agora um terceiro corpo de massa  $m$  é adicionado sendo que  $m \lllll m_1$  e  $m_2$ . Esse é chamado de problema restrito de três corpos, em que  $m$  é tão pequeno que não afeta o movimento dos corpos primários  $m_1$  e  $m_2$  (Curtis, 2013).

É de interesse desse projeto saber como  $m$  se movimenta pela ação gravitacional de  $m_1$  e  $m_2$ . As equações de movimento não apresentam solução, porém é possível chegar a certas conclusões a partir delas. Primeiramente, o vetor posição de  $m$  em relação a  $m_1$  é dado por:

$$\mathbf{r}_1 = (x - x_1)\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}} = (x + \pi_2 r_{12})\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}} \quad (3.20)$$

E relativo a  $m_2$  é:

$$\mathbf{r}_2 = (x - \pi_1 r_{12})\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}} \quad (3.21)$$

Enfim, o vetor posição de  $m$  em relação ao centro de massa é:

$$\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}} \quad (3.22)$$

A velocidade absoluta é dada por:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{\text{rel}} + \mathbf{v}_{\text{rel}} \quad (3.23)$$

A velocidade inercial é a derivada de Eq. 3.22, entretanto, em relação ao espaço inercial, o sistema de coordenadas  $xyz$  está rotacionando junto de  $\boldsymbol{\Omega}$ . Assim, as derivadas de  $\hat{\mathbf{i}}$  e  $\hat{\mathbf{j}}$  em relação ao tempo não são zero. Por isso, baseia-se em Eq. 3.23 para achar:

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}_G + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} + \mathbf{v}_{\text{rel}} \quad (3.24)$$

Em que:

$$\mathbf{v}_{\text{rel}} = \dot{x}\hat{\mathbf{i}} + \dot{y}\hat{\mathbf{j}} + \dot{z}\hat{\mathbf{k}} \quad (3.25)$$

E a aceleração absoluta é:

$$\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{a}_G + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_{\text{rel}} + \mathbf{a}_{\text{rel}} \quad (3.26)$$

Como falado anteriormente, a velocidade do centro de massa  $\mathbf{v}_G$  é constante, e, assim,  $\mathbf{a}_G$  é igual a zero.  $\dot{\boldsymbol{\Omega}}$  também é zero, já que a velocidade angular da órbita circular é constante. Assim, Eq. 3.26 se torna:

$$\ddot{\mathbf{r}} = \boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_{\text{rel}} + \mathbf{a}_{\text{rel}} \quad (3.27)$$

onde

$$\mathbf{a}_{\text{rel}} = \ddot{x}\hat{\mathbf{i}} + \ddot{y}\hat{\mathbf{j}} + \ddot{z}\hat{\mathbf{k}} \quad (3.28)$$

Substituindo Eqs. 3.10, 3.22, 3.25 e 3.28 em Eq. 3.27, tem-se:

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{r}} &= (\Omega\hat{\mathbf{k}}) \times [(\Omega\hat{\mathbf{k}}) \times (x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}})] + 2(\Omega\hat{\mathbf{k}}) \times (\dot{x}\hat{\mathbf{i}} + \dot{y}\hat{\mathbf{j}} + \dot{z}\hat{\mathbf{k}}) + \ddot{x}\hat{\mathbf{i}} + \ddot{y}\hat{\mathbf{j}} + \ddot{z}\hat{\mathbf{k}} \\ &= [-\Omega^2(x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}})] + (2\Omega\dot{x}\hat{\mathbf{j}} - 2\Omega\dot{y}\hat{\mathbf{i}}) + \ddot{x}\hat{\mathbf{i}} + \ddot{y}\hat{\mathbf{j}} + \ddot{z}\hat{\mathbf{k}}\end{aligned}\quad (3.29)$$

Juntando os termos, encontra-se:

$$\ddot{\mathbf{r}} = (\ddot{x} - 2\Omega\dot{y} - \Omega^2x)\hat{\mathbf{i}} + (\ddot{y} - 2\Omega\dot{x} - \Omega^2y)\hat{\mathbf{j}} + \ddot{z}\hat{\mathbf{k}}\quad (3.30)$$

A segunda Lei de Newton para o corpo secundário é dada como:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2\quad (3.31)$$

$\mathbf{F}_1$  e  $\mathbf{F}_2$  são as forças exercidas em  $m$  por  $m_1$  e  $m_2$ , respectivamente. Lembrando de Eq. 3.7, encontra-se:

$$\mathbf{F}_1 = -\frac{Gm_1m}{r_1^2}\mathbf{u}_{r_1} = -\frac{\mu_1m}{r_1^3}\mathbf{r}_1\quad (3.32)$$

$$\mathbf{F}_2 = -\frac{Gm_2m}{r_2^2}\mathbf{u}_{r_2} = -\frac{\mu_2m}{r_2^3}\mathbf{r}_2\quad (3.33)$$

onde

$$\mu_1 = Gm_1 \quad \mu_2 = Gm_2\quad (3.34)$$

Substituindo Eqs. 3.32 e 3.33 em Eq. 3.31 e cortando  $m$ , tem-se:

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu_1}{r_1^3}\mathbf{r}_1 - \frac{\mu_2}{r_2^3}\mathbf{r}_2\quad (3.35)$$

Por fim, substitui-se Eq. 3.30 na esquerda e Eq. 3.20 e Eq. 3.21 na direita de Eq. 3.35:

$$\begin{aligned}(\ddot{x} - 2\Omega\dot{y} - \Omega^2x)\hat{\mathbf{i}} + (\ddot{y} - 2\Omega\dot{x} - \Omega^2y)\hat{\mathbf{j}} + \ddot{z}\hat{\mathbf{k}} &= -\frac{\mu_1}{r_1^3}[(x + \pi_2r_{12})\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}] \\ &\quad -\frac{\mu_2}{r_2^3}[(x - \pi_1r_{12})\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}]\end{aligned}\quad (3.36)$$

Igualando os termos  $\hat{\mathbf{i}}$ ,  $\hat{\mathbf{j}}$  e  $\hat{\mathbf{k}}$  de cada lado de Eq. 3.36 são encontradas as três equações escalares do movimento do problema restrito de três corpos:

$$\ddot{x} - 2\Omega\dot{y} - \Omega^2x = -\frac{\mu_1}{r_1^3}(x + \pi_2r_{12}) - \frac{\mu_2}{r_2^3}(x - \pi_1r_{12})\quad (3.37)$$

$$\ddot{y} - 2\Omega\dot{x} - \Omega^2 y = -\frac{\mu_1}{r_1^3} y - \frac{\mu_2}{r_2^3} y \quad (3.38)$$

$$\ddot{z} = -\frac{\mu_1}{r_1^3} z - \frac{\mu_2}{r_2^3} z \quad (3.39)$$

### 3.4 Pontos de Lagrange

Apesar de Eqs. 3.37, 3.38 e 3.39 não apresentarem solução, elas são usadas para encontrar os pontos de equilíbrio. Como apresentado em Curtis (2013), os pontos de equilíbrio são os locais no espaço em que  $m$  tem velocidade e aceleração igual a zero, ou seja, onde  $m$  sempre estaria em repouso em relação a  $m_1$  e  $m_2$ . Os pontos de equilíbrio também são chamados de pontos de Lagrange e quando colocado lá, provavelmente não irá sair da posição.

As condições que definem os pontos de equilíbrio são:  $\dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = 0$  e  $\ddot{x} = \ddot{y} = \ddot{z} = 0$ . Substituindo essas condições em Eqs. 3.37, 3.38 e 3.39, encontra-se:

$$-\Omega^2 x = -\frac{\mu_1}{r_1^3} (x + \pi_2 r_{12}) - \frac{\mu_2}{r_2^3} (x - \pi_1 r_{12}) \quad (3.40)$$

$$-\Omega^2 y = -\frac{\mu_1}{r_1^3} y - \frac{\mu_2}{r_2^3} y \quad (3.41)$$

$$0 = -\frac{\mu_1}{r_1^3} z - \frac{\mu_2}{r_2^3} z \quad (3.42)$$

Para Eq. 3.42, tem-se:

$$\left( \frac{\mu_1}{r_1^3} + \frac{\mu_2}{r_2^3} \right) z = 0 \quad (3.43)$$

Já que  $\mu_1/r_1^3 > 0$  e  $\mu_2/r_2^3 > 0$ , entende-se que  $z = 0$ , sendo assim os pontos de equilíbrio se localizam no plano orbital (Curtis, 2013).

De Eqs. 3.16 e 3.17 é possível afirmar que:

$$\pi_1 = 1 - \pi_2 \quad (3.44)$$

Usando Eqs. 3.44 e 3.13, além de assumir que  $y \neq 0$ , é possível reescrever Eqs. 3.40 e 3.41 como:

$$(1 - \pi_2)(x + \pi_2 r_{12}) \frac{1}{r_1^3} + \pi_2(x + \pi_2 r_{12} - r_{12}) \frac{1}{r_2^3} = \frac{x}{r_{12}^3} \quad (3.45)$$



$$(1 - \pi_2) \frac{1}{r_1^3} + \pi_2 \frac{1}{r_2^3} = \frac{1}{r_{12}^3} \quad (3.46)$$

considerando que:

$$\pi_1 = \mu_1/\mu \quad \pi_2 = \mu_2/\mu \quad (3.47)$$

Tratando Eqs. 3.45 e 3.46 como equações lineares, é possível achar simultaneamente que:

$$\frac{1}{r_1^3} = \frac{1}{r_2^3} = \frac{1}{r_{12}^3} \quad \text{ou} \quad r_1 = r_2 = r_{12} \quad (3.48)$$

Unindo Eq. 3.48,  $z = 0$  e Eq. 3.44, encontra-se de Eqs. 3.20 e 3.21, respectivamente:

$$r_{12}^2 = (x + \pi_2 r_{12})^2 + y^2 \quad (3.49)$$

$$r_{12}^2 = (x + \pi_2 r_{12} - r_{12})^2 + y^2 \quad (3.50)$$

Igualando Eqs. 3.49 e 3.50 conclui-se que:

$$x = \frac{r_{12}}{2} - \pi_2 r_{12} \quad (3.51)$$

Substituindo Eq. 3.51 em Eq. 3.49 ou Eq. 3.50, encontra-se  $y$  como:

$$y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} r_{12} \quad (3.52)$$

Finalmente, assim, foram encontrados dois pontos de equilíbrio, que são chamados de pontos de Lagrange  $L_4$  e  $L_5$ . Eq. 3.48 mostra que, segundo Curtis (2013), esses pontos estão a mesma distância  $r_{12}$  de  $m_1$  e  $m_2$  que  $m_1$  e  $m_2$  estão um do outro.

Assim, as coordenadas do sistema são:

$$L_4, L_5 : x = \frac{r_{12}}{2} - \pi_2 r_{12}, \quad y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} r_{12}, \quad z = 0 \quad (3.53)$$

Para encontrar os pontos de equilíbrio restantes, define-se  $y = 0$  e  $z = 0$ . Assim, Eqs. 3.20 e 3.21 se tornam:

$$\mathbf{r}_1 = (x + \pi_2 r_{12}) \hat{\mathbf{i}} \quad (3.54)$$

$$\mathbf{r}_2 = (x - \pi_1 r_{12})\hat{\mathbf{i}} = (x + \pi_2 r_{12} - r_{12})\hat{\mathbf{i}} \quad (3.55)$$

Então:

$$r_1 = |x + \pi_2 r_{12}| \quad (3.56)$$

$$r_2 = |x + \pi_2 r_{12} - r_{12}| \quad (3.57)$$

Substituindo Eqs. 3.56 e 3.57 com Eqs. 3.13, 3.44 e Eq. 3.47 em Eq. 3.40, encontra-se:

$$\frac{1 - \pi_2}{|x + \pi_2 r_{12}|^3}(x + \pi_2 r_{12}) + \frac{\pi_2}{|x + \pi_2 r_{12} - r_{12}|^3}(x + \pi_2 r_{12} - r_{12}) - \frac{1}{r_{12}^3}x = 0 \quad (3.58)$$

Considerando que  $\xi = \frac{x}{r_{12}}$ :

$$f(\xi) = \frac{1 - \pi_2}{|\xi + \pi_2|^3}(\xi + \pi_2) + \frac{\pi_2}{|\xi + \pi_2 - 1|^3}(\xi + \pi_2 - 1) - \xi \quad (3.59)$$

As raízes de  $f(\xi) = 0$  são os valores dos pontos de equilíbrio além de  $L_4$  e  $L_5$ . Para encontrá-las é necessário primeiramente determinar um valor para a razão de massa  $\pi_2$  e, em seguida, utilizar um método numérico para encontrar as raízes deste valor específico (Curtis, 2013).

A Fig. 7 mostra as raízes de Eq. 3.59 para dados de Terra-Lua.

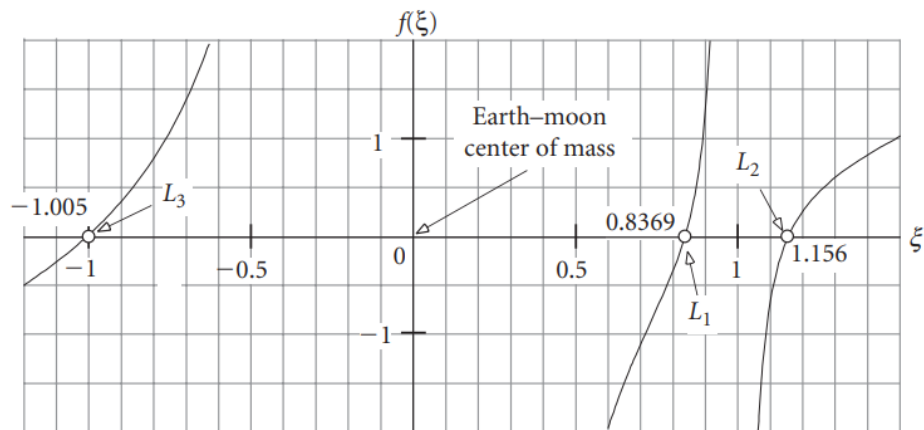


Figura 7 – Gráfico da Eq. 3.59 para dados de Terra-Lua (Curtis, 2013).

### 3.5 Esfera de influência

De acordo com [Bate et al. \(2020\)](#), uma esfera de influência é definida como a região ao redor de um corpo em que a principal ação gravitacional é exercida pelo próprio corpo. Por exemplo, uma nave em uma distância suficientemente grande, como dois milhões de quilômetros, pode ser considerada como tendo "escapado" da ação gravitacional da Terra.

Conforme [Curtis \(2013\)](#), para estimar o raio da esfera de influência gravitacional de um planeta é necessário considerar um sistema de três corpos que consiste em um planeta  $p$  de massa  $m_p$ , o Sol  $s$  de massa  $m_s$  e um veículo espacial  $v_p$  de massa  $m_v$ . Os vetores posição do planeta e da nave em relação ao referencial inercial centrado no Sol são  $\mathbf{R}$  e  $\mathbf{R}_v$ , respectivamente. O vetor posição do veículo espacial em relação ao planeta é  $\mathbf{r}$ . A força gravitacional exercida sobre a nave pelo planeta é denominada  $\mathbf{F}_p^{(v)}$ , e a exercida pelo Sol é  $\mathbf{F}_s^{(v)}$ . Do mesmo modo, as forças exercidas sobre o planeta são  $\mathbf{F}_s^{(p)}$  e  $\mathbf{F}_p^{(p)}$ , ao passo que no Sol tem-se  $\mathbf{F}_v^{(s)}$  e  $\mathbf{F}_p^{(s)}$ . De acordo com a Eq. 3.7, essas forças são:

$$\mathbf{F}_p^{(v)} = -\frac{Gm_v m_p}{r^3} \mathbf{r} \quad (3.60)$$

$$\mathbf{F}_s^{(v)} = -\frac{Gm_v m_s}{R_v^3} \mathbf{R}_v \quad (3.61)$$

$$\mathbf{F}_s^{(p)} = -\frac{Gm_p m_s}{R^3} \mathbf{R} \quad (3.62)$$

A Fig. 8 mostra os vetores do sistema de três corpos.

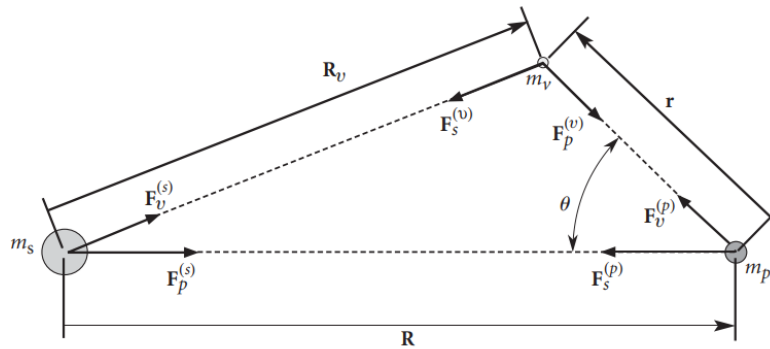


Figura 8 – Vetores de posição relativa e força gravitacional entre os três corpos ([Curtis, 2013](#)).

É possível observar que:

$$\mathbf{R}_v = \mathbf{R} + \mathbf{r} \quad (3.63)$$

Pela Fig. 8 e pela lei dos cossenos é possível determinar que a magnitude de  $\mathbf{R}_v$  é:

$$R_v = (R^2 + r^2 - 2Rr\cos\theta)^{\frac{1}{2}} = R \left[ 1 - 2\frac{r}{R}\cos\theta + \left(\frac{r}{R}\right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.64)$$

É esperado que no interior da esfera de influência do planeta que  $r/R \ll 1$ . Assim, os termos relacionados a  $r/R$  na Eq. 3.64 podem ser desprezados e a equação pode ser aproximada para:

$$R_v = R \quad (3.65)$$

A equação do movimento da nave em relação ao referencial inercial centrado no Sol é:

$$m_v \ddot{\mathbf{R}}_v = \mathbf{F}_s^{(v)} + \mathbf{F}_p^{(v)} \quad (3.66)$$

Resolvendo para  $\ddot{\mathbf{R}}_v$  e substituindo pelas forças gravitacionais dadas nas Eq. 3.60 e 3.61, encontra-se:

$$\ddot{\mathbf{R}}_v = \frac{1}{m_v} \left( -\frac{Gm_v m_s}{R_v^3} \mathbf{R}_v \right) + \frac{1}{m_v} \left( -\frac{Gm_v m_p}{r^3} \mathbf{r} \right) = -\frac{Gm_s}{R_v^3} \mathbf{R}_v - \frac{Gm_p}{r^3} \mathbf{r} \quad (3.67)$$

Reescrevendo a Eq. 3.67, tem-se:

$$\ddot{\mathbf{R}}_v = \mathbf{A}_s + \mathbf{P}_p \quad (3.68)$$

em que

$$\mathbf{A}_s = -\frac{Gm_s}{R_v^3} \mathbf{R}_v \quad \mathbf{P}_p = -\frac{Gm_p}{r^3} \mathbf{r} \quad (3.69)$$

$\mathbf{A}_s$  é a aceleração gravitacional primária do veículo devido ao Sol, já  $\mathbf{P}_p$  é a aceleração secundária devido ao planeta. As magnitudes de  $\mathbf{A}_s$  e  $\mathbf{P}_p$  são:

$$A_s = \frac{Gm_s}{R^2} \quad P_p = \frac{Gm_p}{r^2} \quad (3.70)$$

A razão entre a aceleração secundária para a primária, é, dessa forma:

$$\frac{P_p}{A_s} = \frac{\frac{Gm_p}{r^2}}{\frac{Gm_s}{R^2}} = \frac{m_p}{m_s} \left( \frac{R}{r} \right)^2 \quad (3.71)$$

A equação do movimento do planeta em relação ao referencial inercial é:

$$m_p \ddot{\mathbf{R}} = \mathbf{F}_v^{(p)} + \mathbf{F}_s^{(p)} \quad (3.72)$$

Resolvendo para  $\ddot{\mathbf{R}}$ , tendo em vista que  $\mathbf{F}_v^{(p)} = -\mathbf{F}_p^{(v)}$ , e usando as Eqs. 3.61 e 3.62, encontra-se:

$$\ddot{\mathbf{R}} = \frac{1}{m_p} \left( -\frac{Gm_v m_p}{r^3} \mathbf{r} \right) + \frac{1}{m_p} \left( -\frac{Gm_p m_s}{R^3} \mathbf{R} \right) = -\frac{Gm_v}{r^3} \mathbf{r} - \frac{Gm_s}{R^3} \mathbf{R} \quad (3.73)$$

Subtraindo Eq. 3.73 de Eq. 3.67 e juntando os termos, acha-se:

$$\ddot{\mathbf{R}}_v - \ddot{\mathbf{R}} = -\frac{Gm_p}{r^3} \mathbf{r} \left( 1 + \frac{m_v}{m_p} \right) - \frac{Gm_s}{R_v^3} \left[ \mathbf{R}_v - \left( \frac{R_v}{R} \right)^3 \mathbf{R} \right] \quad (3.74)$$

Tendo em vista a Eq. 3.63, é possível reescrever a Eq. 3.74 como:

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{Gm_p}{r^3} \mathbf{r} \left( 1 + \frac{m_v}{m_p} \right) - \frac{Gm_s}{R_v^3} \left\{ \mathbf{r} + \left[ 1 - \left( \frac{R_v}{R} \right)^3 \right] \mathbf{R} \right\} \quad (3.75)$$

Essa é a equação do movimento do veículo em relação ao planeta. Ao usar a Eq. 3.65 e o fato que  $m_v \ll m_p$ , é possível aproximar a equação para:

$$\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{a}_p + \mathbf{p}_s \quad (3.76)$$

em que

$$\mathbf{a}_p = -\frac{Gm_p}{r^3} \mathbf{r} \quad \mathbf{p}_s = -\frac{Gm_s}{R^3} \mathbf{r} \quad (3.77)$$

Nesse caso  $\mathbf{a}_p$  é a aceleração gravitacional primária do veículo devido ao planeta, e  $\mathbf{p}_s$  é a perturbação causada pelo Sol. As magnitudes desses vetores são:

$$a_p = -\frac{Gm_p}{r^2} \quad p_s = -\frac{Gm_s}{R^3} r \quad (3.78)$$

A razão da aceleração de perturbação para a aceleração primária é:

$$\frac{p_s}{a_p} = \frac{\frac{Gm_s r}{R^3}}{\frac{Gm_p}{r^2}} = \frac{m_s}{m_p} \left( \frac{r}{R} \right)^3 \quad (3.79)$$

Para movimento relativo ao planeta, a razão  $\frac{p_s}{a_p}$  é a medida do desvio da órbita do veículo da órbita kepleriana do planeta agindo por si mesmo ( $\frac{p_s}{a_p} = 0$ ). Da mesma forma,  $\frac{P_p}{A_s}$  é a medida da influência do planeta na órbita do veículo em relação ao Sol. Se

$$\frac{p_s}{a_p} < \frac{P_p}{A_s} \quad (3.80)$$

então o efeito perturbador sobre o Sol na órbita do veículo ao redor do planeta é menor que o efeito perturbador do planeta na órbita do veículo ao redor do Sol. Assim, é possível afirmar que o veículo está dentro da esfera de influência do planeta. Substituindo as Eq. 3.71 e 3.79 em Eq. 3.80, encontra-se:

$$\frac{m_s}{m_p} \left(\frac{r}{R}\right)^3 < \frac{m_p}{m_s} \left(\frac{R}{r}\right)^2 \quad (3.81)$$

o que significa

$$\left(\frac{r}{R}\right)^5 < \left(\frac{m_p}{m_s}\right)^2 \quad (3.82)$$

ou

$$\frac{r}{R} < \left(\frac{m_p}{m_s}\right)^{\frac{2}{5}} \quad (3.83)$$

Seja  $r_{\text{SOI}}$  o raio da esfera de influência, a Eq. 3.83 pode ser reescrita como:

$$\frac{r_{\text{SOI}}}{R} = \left(\frac{m_p}{m_s}\right)^{\frac{2}{5}} \quad (3.84)$$

Dentro da esfera de influência do planeta, o movimento do veículo espacial é regido pelas equações de movimento relacionadas ao planeta (Eq. 3.75). Fora da esfera de influência, o caminho da nave é computado em relação ao Sol (Eq. 3.67).

A Eq. 3.84 não é exata, apenas uma estimativa da distância em que a atração gravitacional do Sol supera a do planeta. Na Tab. 2 estão listados os valores das esferas de influência de alguns corpos celestes.

Tabela 2 – Parâmetro gravitacional ( $\mu$ ) e raio da esfera de influência (SOI) para Sol, Terra e Marte (Curtis, 2013).

Corpo celeste	$\mu(km^3/s^2)$	Raio da SOI (km)
Sol	132712000000	-
Terra	398600	925000
Marte	42828	577000

### 3.6 Método de *patched conics*

Para realizar a análise de uma missão interplanetária usando o método de *patched conics* é necessário, primeiramente, escolher a trajetória heliocêntrica que irá intersectar as posições desejadas dos dois planetas em suas órbitas. Um exemplo desse tipo de trajetória seria a elipse de transferência de Hohmann. (Curtis, 2013).

Conforme Curtis (2013), nas esferas de influência, as velocidades heliocêntricas da órbita de transferência são calculadas em relação ao planeta para definir as velocidades "no infinito", que em seguida são usadas para determinar a trajetória de partida em relação ao centro do planeta 1 e a trajetória de chegada em relação ao centro do planeta 2. Assim as três cônicas são "remendadas" (*patch*) juntas, com uma cônica centrada no Sol e as outras duas centradas em cada planeta.

### 3.7 *Weak Stability Boundary*

Criado por Edward Belbruno em 1987, o *weak stability boundary* (WSB) é um conceito que define como uma nave poderia mudar de órbita utilizando pouco combustível. É baseado no problema restrito de três corpos, utilizando o conceito de que  $m \ll m_1$  e  $m_2$  e está associado aos pontos de Lagrange  $L_1$  e  $L_2$ . Segundo Belbruno (2004), o WSB define uma região de transição, baseada em posição e velocidade, em relação a  $m_2$  em que  $m$  é capturado temporariamente.

A definição algorítmica de um WSB, partindo do apresentado em Belbruno (2004), é dada como: considerado um segmento radial  $l(\theta)$  partindo de  $m_2$  que faz um ângulo  $\theta$  com o eixo  $x$ , dada uma trajetória de  $m$  começando em  $l(\theta)$  que satisfaz:

- $m$  começa seu movimento na periapse de uma elipse osculadora ao redor de  $m_2$ , em um certo ponto  $l(\theta)$ . Se  $r_2$  é a distância entre  $m$  e  $m_2$  nesse ponto então  $r_2 = a(1-e)$ .
- A velocidade inicial do vetor da trajetória é perpendicular ao segmento radial  $l(\theta)$ .
- A energia kepleriana inicial para dois corpos ( $h_k$ ) de  $m$  em relação a  $m_2$  é negativa. O valor de  $h_k$  na periapsis é

$$h_k = \frac{\mu e - 1}{2 r_2} \quad (3.85)$$

então se  $e \in [0, 1)$ , então  $h_k < 0$ .

- A excentricidade do movimento inicial kepleriano de dois corpos é mantida fixa ao longo de  $l(\theta)$ , o que equivale a fixar o valor de  $h_k$ .

Considerando as condições iniciais apresentadas, o movimento de  $m$  é considerado estável em relação a  $m_2$  se após deixar  $l(\theta)$ ,  $m$  completar um ciclo em  $m_2$  sem passar ao

redor de  $m_1$  e retorna a  $l(\theta)$  em um ponto com energia kepleriana negativa em relação a  $m_2$ . Caso contrário, o movimento é considerado instável.

Na Fig. 9 é possível observar a diferença entre os movimentos estável e instável.

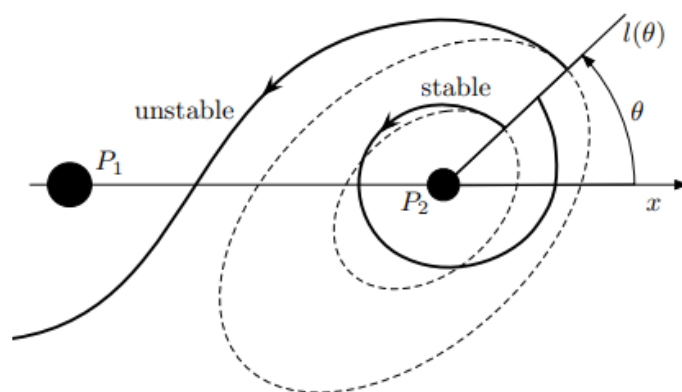


Figura 9 – Movimentos estáveis e instáveis (Topputo; Belbruno, 2015).



## 4 Transferência de Hohmann

### 4.1 Definição

A transferência de Hohmann, criada por Walter Hohmann em 1925, é a manobra de dois impulsos mais eficiente para realizar uma transferência entre duas órbitas circulares coplanares que compartilham um foco. A transferência de Hohmann é uma órbita elíptica tangente a ambos os círculos em sua linha abside, como visto na Fig. 10. O periapsis e o apoapsis de uma elipse de transferência são os raios dos círculos interno e externo, respectivamente. Apenas metade da elipse é usada durante a manobra, que pode ocorrer tanto do círculo interno para o externo como do externo para o interno (Curtis, 2013).

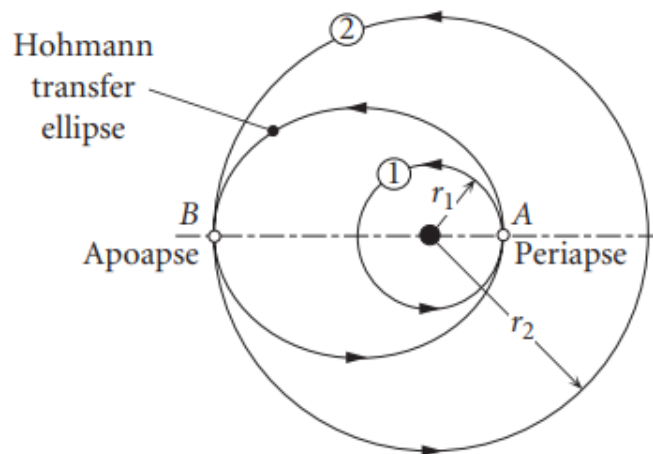


Figura 10 – Transferência de Hohmann (Curtis, 2013).

### 4.2 Método e equacionamento

A energia de uma órbita depende apenas de seu semi-eixo maior  $a$ , que é dado por:

$$a = \frac{r_p + r_a}{2} \quad (4.1)$$

Onde  $r_p$  e  $r_a$  representam o raio do periapsis e do apoapsis, respectivamente. Para uma elipse, sua energia específica é negativa e definida por:

$$\varepsilon = -\frac{\mu}{2a} \quad (4.2)$$

Assim, quanto maior o semieixo maior, mais energia a órbita possui.

Tendo em vista a Fig. 10 e o que foi apresentado em Curtis (2013), usando A do círculo interno como o início, é necessário o incremento de velocidade  $\Delta v_A$  na direção do voo para impulsionar o veículo até a órbita elíptica de maior energia. Após levar de A a B, outro incremento de velocidade, dessa vez  $\Delta v_B$ , coloca o veículo na órbita agora circular de maior energia. Sem essa última correção, o veículo continuaria na órbita de transferência, e, assim, retornaria a A. Por fim, o delta-v total é dado por  $\Delta v_{total} = \Delta v_A + \Delta v_B$ .

O mesmo delta-v total seria necessário para realizar o caminho inverso, de B para A. Já que a rota para o círculo interno de menor energia necessita da diminuição da energia da nave, os  $\Delta vs$  precisam ser realizados com impulsos no sentido contrário ao de voo da nave, como uma freagem. Devido aos  $\Delta vs$  representarem o mesmo propelente independente da direção do impulso, é preciso se preocupar apenas com a magnitude dos  $\Delta vs$  (Curtis, 2013).

Para chegar no  $\Delta v_{total}$  é necessário calcular os valores de  $\Delta v_A$  e  $\Delta v_B$ . Para isso, o primeiro passo é calcular a excentricidade da elipse. Baseando-se na primeira Lei de Kepler, é encontrado que a excentricidade é dada por:

$$e = \frac{r_a - r_p}{r_a + r_p} \quad (4.3)$$

A equação da *vis-viva* é dada por:

$$\frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} = \varepsilon \quad (4.4)$$

Substituindo Eq. 4.2 em Eq. 4.4, encontra-se:

$$\frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} = -\frac{\mu}{2a} \quad (4.5)$$

Manipulando Eq. 4.5 e isolando  $v$ , encontra-se a velocidade orbital como:

$$v = \sqrt{\mu \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)} \quad (4.6)$$

Substituindo Eq. 4.1 em Eq. 4.6 para deixar a equação em relação aos raios, encontra-se:

$$v = \sqrt{\mu \left( \frac{2}{r_1} - \frac{2}{r_1 + r_2} \right)} \quad (4.7)$$

Para uma órbita circular, a velocidade orbital é definida como:

$$v_{circular} = \sqrt{\frac{\mu}{r}} \quad (4.8)$$

Finalmente, para encontrar  $\Delta v_A$  e  $\Delta v_B$  é necessário subtrair a velocidade final da velocidade inicial de cada impulso. Assim, do ponto A para o ponto B, a nave sai de uma órbita circular para a órbita de transferência e, por isso,  $\Delta v_A$  é dado por:

$$\Delta v_A = \sqrt{\mu \left( \frac{2}{r_1} - \frac{2}{r_1 + r_2} \right)} - \sqrt{\frac{\mu}{r_1}} = \sqrt{\frac{\mu}{r_1}} \left( \sqrt{\frac{2r_2}{r_1 + r_2}} - 1 \right) \quad (4.9)$$

Já para calcular o  $\Delta v_B$ , ou seja, a velocidade da trajetória do ponto B até a órbita final, a nave parte da órbita de transferência até a órbita final que é circular. Dessa forma,  $\Delta v_B$  é dado por:

$$\Delta v_B = \sqrt{\frac{\mu}{r_2}} - \sqrt{\mu \left( \frac{2}{r_1} - \frac{2}{r_1 + r_2} \right)} = \sqrt{\frac{\mu}{r_2}} \left( 1 - \sqrt{\frac{2r_1}{r_1 + r_2}} \right) \quad (4.10)$$

Assim, chega-se na equação final do  $\Delta v_{total}$ , que é:

$$\Delta v_{total} = \Delta v_A + \Delta v_B \quad (4.11)$$

### 4.3 Transferência de Hohmann interplanetária

Primeiramente, de acordo com [Curtis \(2013\)](#), é assumido que as órbitas de todos os planetas são circulares e coplanares. A Fig. 11 demonstra uma transferência de Hohmann de um planeta interno 1 a um planeta externo 2.

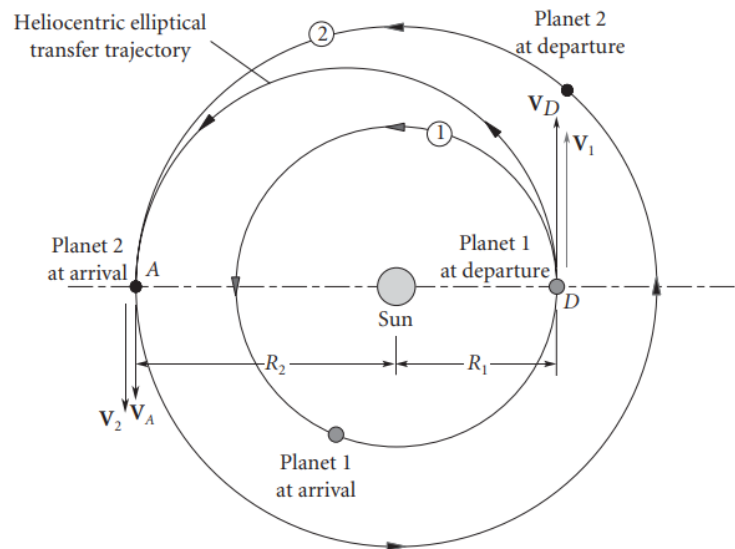


Figura 11 – Transferência de Hohmann do planeta 1 para o planeta 2 ([Curtis, 2013](#)).

O ponto de partida D é no periapsis da elipse de transferência e o ponto de chegada é o apoapsis. A velocidade da órbita circular do planeta 1 em relação ao Sol é dada por Eq.

4.8, sendo assim:

$$V_1 = \sqrt{\frac{\mu_{\text{sol}}}{R_1}} \quad (4.12)$$

O momento angular em termos do raio de periapsis e apoapse é dado por:

$$h = \sqrt{2\mu} \sqrt{\frac{r_a r_p}{r_a + r_p}} \quad (4.13)$$

Com a velocidade sendo dada por:

$$v = \frac{h}{R} \quad (4.14)$$

O momento angular específico  $h$  da elipse de transferência em relação ao Sol é dado por Eq. 4.13. Assim, igualando com Eq. 4.14, a velocidade do veículo espacial na elipse de transferência no ponto de partida D é:

$$V_D^{(v)} = \frac{h}{R_1} = \sqrt{2\mu_{\text{sol}}} \sqrt{\frac{R_2}{R_1(R_1 + R_2)}} \quad (4.15)$$

Eq. 4.15 é maior que a velocidade do planeta. Assim o delta-v necessário em D é:

$$\Delta V_D = V_D^{(v)} - V_1 = \sqrt{\frac{\mu_{\text{sol}}}{R_1}} - \left( \sqrt{\frac{2R_2}{R_1 + R_2}} - 1 \right) \quad (4.16)$$

O delta-v no ponto de chegada A é:

$$\Delta V_A = V_2 - V_A^{(v)} = \sqrt{\frac{\mu_{\text{sol}}}{R_2}} \left( 1 - \sqrt{\frac{2R_1}{R_1 + R_2}} \right) \quad (4.17)$$

Tanto o incremento de velocidade em A quanto em D são positivos, já que o planeta 2 se move em uma velocidade maior que o veículo espacial no ponto A, como apresentado em Curtis (2013).

No caso de uma missão de um planeta externo para um interno, os delta-v calculados usando Eqs. 4.16 e 4.17 serão negativos. Isso ocorre pois o ponto de partida e de chegada estão agora no afélio e periélio, respectivamente, da elipse de transferência. A velocidade do veículo precisa ser reduzida para entrar na elipse de transferência de baixa energia no ponto de partida D, e reduzida novamente para chegar no ponto A para atingir a órbita circular de baixa energia do planeta 2 (Curtis, 2013).

## 5 Captura Balística

### 5.1 Definição

Em conformidade com [Luo e Topputo \(2015\)](#), captura balística ocorre quando uma partícula muda de um atrator dominante para outro, em virtude de um mecanismo puramente natural. Esse método utiliza dinâmicas de múltiplos corpos para reduzir o excesso de velocidade hiperbólica na abordagem, e por isso não pode ser reproduzida em modelos que implementam a decomposição Kepleriana clássica do sistema solar.

Em aplicações, a queima de inserção de órbita pode ser evitada se a captura temporária pelo alvo é aceitável. Caso não, a órbita de captura temporária pode proporcionar várias oportunidades para inserção em órbitas estáveis, assim atenuando riscos causados por pontos únicos de falhas. De forma geral, captura balística é vista como uma técnica promissora no estudo de manobras orbitais ([Luo; Topputo, 2015](#)).

### 5.2 Primeiras missões

Em 1990, a agência espacial japonesa ISAS lançou duas naves, MUSES A e MUSES B, com o objetivo de serem colocadas em uma órbita terrestre altamente elíptica. Entretanto, a missão sofreu com problemas mecânicos e, para tentar salvá-la foi decidido que MUSES A, renomeada então para Hiten, seria colocada em uma órbita lunar. Todavia, a nave Hiten não possuía combustível o suficiente para realizar uma transferência de Hohmann clássica até a Lua. E, assim, foi proposto o método de captura balística, que utilizaria menos combustível, para completar a missão. Hiten foi colocada em órbita lunar e dessa forma uma nova técnica de realizar missões Terra-Lua foi criada ([Belbruno; Miller, 1993](#)).

A captura balística também foi utilizada na missão GRAIL da NASA em 2011 ([Hatch et al., 2010](#)). A missão SMART-1 da ESA utilizou uma transferência similar ([Racca; Whitcomb; Foing, 1998](#)).

### 5.3 Captura balística no contexto Terra-Marte

Após o sucesso do uso de captura balística em missões Terra-Lua, de acordo com [Topputo e Belbruno \(2015\)](#), começou-se a se pensar se tal tipo de transferência poderia ser usada em missões Terra-Marte. Inicialmente foi pensado que não seria possível, pois a velocidade orbital de Marte é muito maior que o  $v_\infty$  de abordagem de uma transferência

de Hohmann da Terra, e, para a Lua, o  $v_\infty$  e a sua velocidade orbital apresentam valores próximos.

Neste capítulo será mostrado que capturas balísticas no contexto Terra-Marte existem. A ideia principal não é encontrar trajetórias originárias da Terra que vão diretamente à captura balística próximo de Marte, mas sim realizar uma captura balística longe de Marte, a vários quilômetros de distância, porém ainda perto de sua órbita ao redor do Sol. Tal ideia pode parecer contraditória, contudo realizando a transferência a um ponto longe de Marte mas perto de sua órbita, não é necessário aderir a um período de dois anos de lançamento da Terra. Assim, o período de lançamento se torna muito mais flexível (Topputo; Belbruno, 2015).

A utilização desse novo tipo de transferência apresenta inúmeras vantagens mostradas por Topputo e Belbruno (2015): um menor  $\Delta v$  de captura em altas altitudes, flexibilidade no período de lançamento, um processo de captura mais suave, diferentes abordagens de onde chegar em Marte e a habilidade de realizar transferência para altitudes mais baixas sem grandes penalidades.

## 5.4 Metodologia

Esse estudo sobre captura balística no contexto Terra-Marte é dividido em três etapas, segundo Topputo e Belbruno (2015):

- **Passo 1:** Calcule uma trajetória de captura balística até Marte dada uma distância de periapsis,  $r_p$ , que começa longe de Marte em um ponto  $\mathbf{x}_c$  perto da órbita de Marte. Neste trabalho  $\mathbf{x}_c$  é escolhido arbitrariamente a vários quilômetros de Marte.  $\mathbf{x}_c$  corresponde ao começo da trajetória que vai a captura balística perto de Marte após uma manobra,  $\Delta V_c$ , ser aplicada. Quando chega na distância  $r_p$ , a sua excentricidade osculadora,  $e$ , em relação a Marte é menor que 1. Assim que a trajetória se localiza além de  $r_p$ , ela se encontra em um tipo especial de captura onde irá efetuar um certo número de órbitas ao redor de Marte. Esse passo é usado o problema restrito de três corpos.
- **Passo 2:** Uma transferência interplanetária para uma espaçonave,  $P$ , começa na esfera de influência da Terra. Uma manobra,  $\Delta V_1$ , é aplicada à transferência no ponto  $\mathbf{x}_c$  perto da órbita de Marte, onde uma manobra,  $\Delta V_c$ , é usada para igualar a velocidade da captura balística de transferência de Marte. Essa transferência está em um espaço heliocêntrico e é visto como um problema de dois corpos entre  $P$  e o Sol.  $\Delta V_1$ ,  $\Delta V_c$  são reduzidos.
- **Passo 3:** A trajetória consistindo da transferência interplanetária até  $\mathbf{x}_c$  junto com a captura balística de transferência de  $\mathbf{x}_c$  até a distância  $r_p$  de Marte ( $e < 1$ ) é

o resultado da captura balística de transferência da Terra. Isso é comparado com a transferência de Hohmann tradicional deixando a Terra da mesma distância, na esfera de influência, e indo diretamente até a distância  $r_p$  de Marte com a mesma excentricidade, onde  $\Delta V_2$  é aplicado na distância  $r_p$  para chegar nessa excentricidade.  $\Delta V_2$  é comparado a  $\Delta V_c$ . Esse processo pode ser observado em Fig. 12.

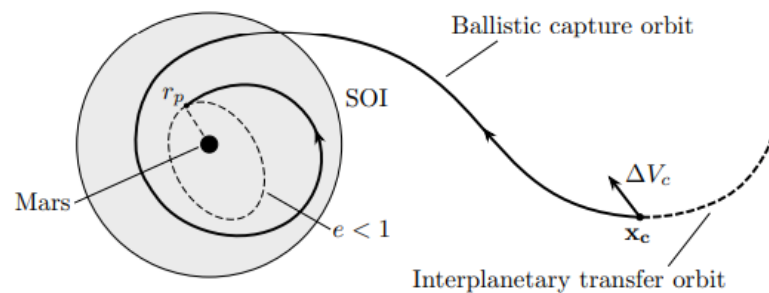


Figura 12 – Estrutura da captura balística até Marte (Topputo; Belbruno, 2015).

Há três principais razões do porquê  $\mathbf{x}_c$  é escolhido tão afastado de Marte. Primeiramente, se  $\mathbf{x}_c$  é suficientemente longe da esfera de influência de Marte, a atração gravitacional de Marte em relação à  $P$  é desprezível. Isso resulta em uma velocidade de chegada mais constante. Em segundo, já que o ponto  $\mathbf{x}_c$  se encontra perto da órbita de Marte, há infinitos pontos onde poderá ser realizada uma captura balística. Essa variedade em localizações garante uma flexibilidade do período de lançamento. Por último, já que  $\mathbf{x}_c$  está fora da esfera de influência de Marte, a aplicação de  $\Delta V_c$  pode ser feita de maneira gradual, e, a partir desse ponto, não há necessidade de mais manobras, onde  $P$  chega na distância de periapsis  $r_p$  em um estado natural de captura. Esse processo é muito mais favorável que a alta velocidade de manobra em  $r_p$  que seria usado em uma transferência de Hohmann. De um ponto de vista operacional é considerado vantajoso (Topputo; Belbruno, 2015).

## 5.5 Modelo

O movimento de  $P$  de  $\mathbf{x}_c$  até  $r_p$  é considerado como um problema restrito de três corpos planar elíptico, que considera a excentricidade de Marte como  $e_p = 0,093419$ . A massa de  $P$  é desprezível (Topputo; Belbruno, 2015).

O problema restrito de três corpos planar elíptico estuda o movimento de uma partícula de massa desprezível, nesse caso  $P$ , sob o campo gravitacional gerado pelo movimento elíptico de duas primárias,  $P_1$  e  $P_2$ , de massas  $m_1$  e  $m_2$ , respectivamente.

Neste trabalho,  $P_1$  se refere ao Sol e  $P_2$  a Marte, como mostrado em [Topputo e Belbruno \(2015\)](#).

As equações do movimento de  $P$  são:

$$x'' - 2y' = \omega_x, \quad y'' + 2x' = \omega_y \quad (5.1)$$

Os subscritos de Eq. 5.1 são as derivadas parciais de:

$$\omega(x, y, f) = \frac{\Omega(x, y)}{1 + e_p \cos f} \quad (5.2)$$

onde a função potencial é:

$$\Omega(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1 - \mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} + \frac{1}{2}\mu(1 - \mu) \quad (5.3)$$

em que  $r_1 = [(x + \mu)^2 + y^2]^{1/2}$ ,  $r_2 = [(x + \mu - 1)^2 + y^2]^{1/2}$ .

Eq. 5.1 considera  $P_1$  e  $P_2$  tendo as posições fixas  $(-\mu, 0)$  e  $(1 - \mu, 0)$ , respectivamente, e  $\mu = m_2/m_1 + m_2$  é o parâmetro de massa do sistema,  $\mu = 3,2262081094 \times 10^{-7}$ . As derivadas de Eq. 5.1 representam a diferenciação em relação a  $f$ , a anomalia verdadeira do sistema. Essa é uma variável independente e desempenha o papel do tempo:  $f$  é zero quando  $P_1, P_2$  estão no periapsis, já que ambas as primárias estão no centro de massa em elipses orientadas similarmente tendo uma excentricidade em comum  $e_p$  ([Topputo; Belbruno, 2015](#)).

Normalizando o período de  $P_1, P_2$  para  $2\pi$ , a dependência da anomalia verdadeira do tempo,  $t$ , é:

$$f(t) = f_0 + \int_{t_0}^t \frac{(1 + e_p \cos f(\tau))^2}{(1 - e_p^2)^{3/2}} d\tau \quad (5.4)$$

onde  $f_0$  e  $t_0$  são os valores iniciais da anomalia verdadeira e do tempo, respectivamente.

O problema elíptico possui cinco pontos de equilíbrio,  $L_k$ ,  $k = 1, \dots, 5$ . Três destes,  $L_1, L_2, L_3$ , se localizam no eixo  $x$ . Já os outros dois pontos,  $L_4$  e  $L_5$ , se encontram nos vértices de dois triângulos equiláteros com uma base comum que se estende de  $P_1$  a  $P_2$ . Esses pontos têm posição fixa no quadro giratório e dimensionado. Entretanto, sua distância de  $P_1, P_2$  varia de acordo com o movimento de ambas as primárias. Quando  $e_p = 0$ , é obtido o problema restrito de três corpos planar elíptico ([Topputo; Belbruno, 2015](#)).



## 5.6 Conjuntos estáveis de Marte e órbitas para captura balística

Trajетórias de captura balística podem ser traçadas usando conjuntos estáveis associados à definição algorítmica dos WSB, apresentado na Seção 3.7.

No problema restrito de três corpos circular, a união das  $n$ -estáveis condições iniciais é indicada como  $\mathcal{W}_n(e)$ , onde  $e$  é a excentricidade usada para definir as condições iniciais. Quando modelos dependentes do tempo são calculados, as condições iniciais precisam considerar o tempo inicial. Se o problema restrito de três corpos elíptico for usado, os conjuntos estáveis são indicados por  $\mathcal{W}_n(f_0, e)$ , em concordância com [Topputo e Belbruno \(2015\)](#).

O cálculo de conjuntos estáveis envolve integrar dezenas de milhares de órbitas geradas sobre uma grade de pontos computacional. A grade de pontos utiliza parâmetros em cinco dimensões. Os parâmetros utilizados neste trabalho são:

- i.  $r$ , a distância radial até Marte, espaçamento  $\Delta r=50$  km, para  $250 \leq r \leq 30500$  km e  $\Delta r=500$  km, para  $30500 \leq r \leq 25000$  km;
- ii.  $\theta$ , a posição angular em relação a uma direção de referência,  $0 \leq \theta \leq 360$  graus,  $\Delta\theta = 1$  grau;
- iii.  $e$ , a excentricidade osculadora,  $0,90 \leq e \leq 0,99$ ,  $\Delta e = 0,01$ ;
- iv.  $f_0$ , a anomalia verdadeira inicial das primárias,  $0 \leq f_0 \leq \pi/2$ ,  $\Delta f_0 = \pi/4$ ;
- v.  $n$ , o número de estabilidades,  $-1 \leq n \leq 6$ ,  $\Delta n = 1$ .

A parte espacial da grade, dada por  $\{r, \theta\}$ , necessita de 375394 condições iniciais que precisam ser integradas numericamente. Todas as integrações numéricas são feitas via o método de Adams–Bashforth–Moulton de várias etapas. Quando  $P$  se aproxima de Marte, é usado o método de Levi-Civita para acelerar a integração numérica ([Topputo; Belbruno, 2015](#)).

Para construir uma órbita de captura balística é necessário utilizar um método baseado em manipular os conjuntos estáveis. Primeiramente, considera-se o conjunto  $\mathcal{W}_{-1}(e, f_0)$ : esse conjunto é feito das condições iniciais que geram -1-órbitas estáveis. Por definição, o conjunto complementar,  $\overline{\mathcal{W}}_{-1}(e, f_0)$ , contém as condições iniciais que geram -1-órbitas instáveis ([Topputo; Belbruno, 2015](#)).

As órbitas de captura balística de interesse estão incluídas no conjunto de captura:

$$\mathcal{C}_{-1}^n(e, f_0) = \overline{\mathcal{W}}_{-1}(e, f_0) \cap \mathcal{W}_n(e, f_0) \quad (5.5)$$

Os pontos em  $\mathcal{C}_{-1}^n$  estão associados a órbitas que tanto chegam na primária como também realizam pelo menos  $n$  rotações ao redor dela. Isso é desejável em análise de missões, já que essas órbitas representam boas candidatas para projetar captura balística imediatamente na chegada. Para uma derivação adequada do conjunto de captura é importante que apenas os conjuntos com valores iguais de  $e, f_0$  sejam intersectados. Isso garante continuidade ao longo das órbitas, assim o ponto final da órbita de chegada (-1-instável) corresponde ao ponto inicial da  $n$ -órbita estável (Topputo; Belbruno, 2015).

Na Fig. 13 o conjunto estável  $\mathcal{W}_n(e, f_0)$  é apresentado para diferentes valores de  $n$  com valores de  $e, f_0$  dados.

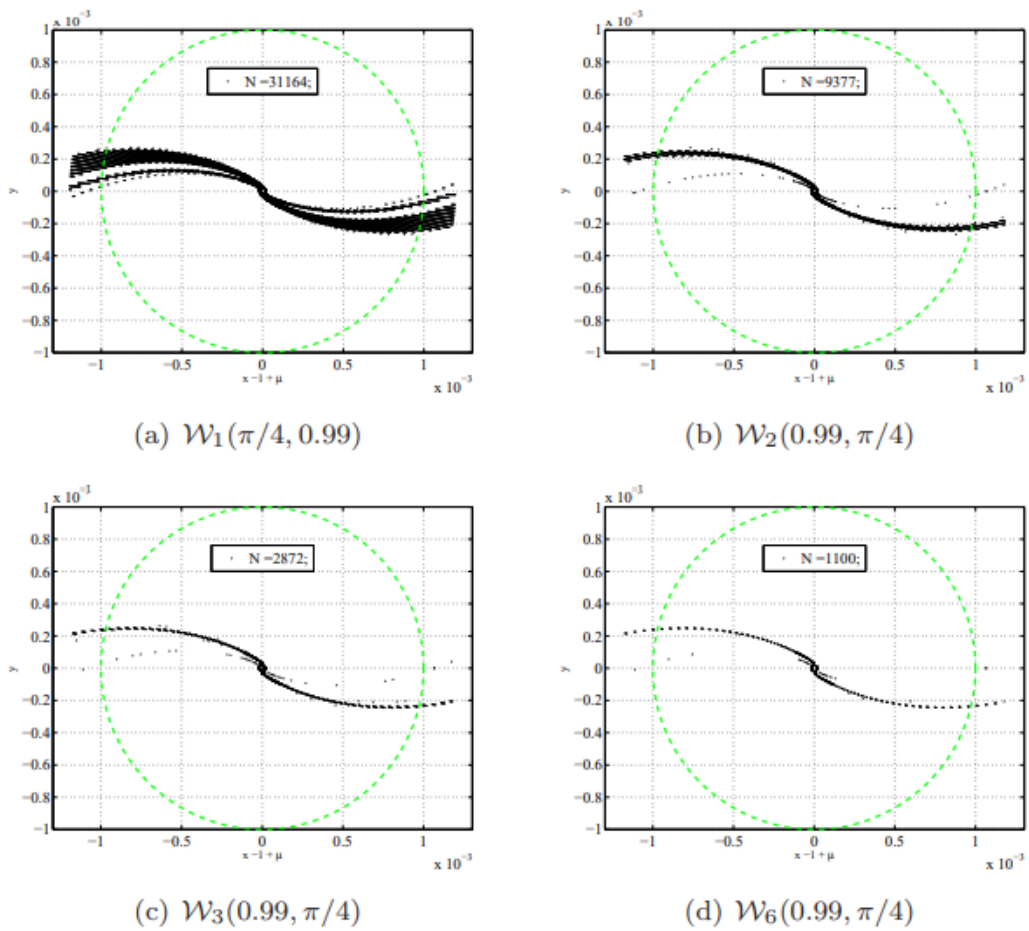


Figura 13 – Conjuntos estáveis para  $\mathcal{W}_n(e, f_0)$  com  $f_0 = \pi/4, e = 0,99, n = 1, 2, 3, 6$  (Topputo; Belbruno, 2015).

Na Fig. 14 é mostrado o conjunto de captura relacionado ao conjunto mostrado em Fig. 13 para  $n = 6$ .

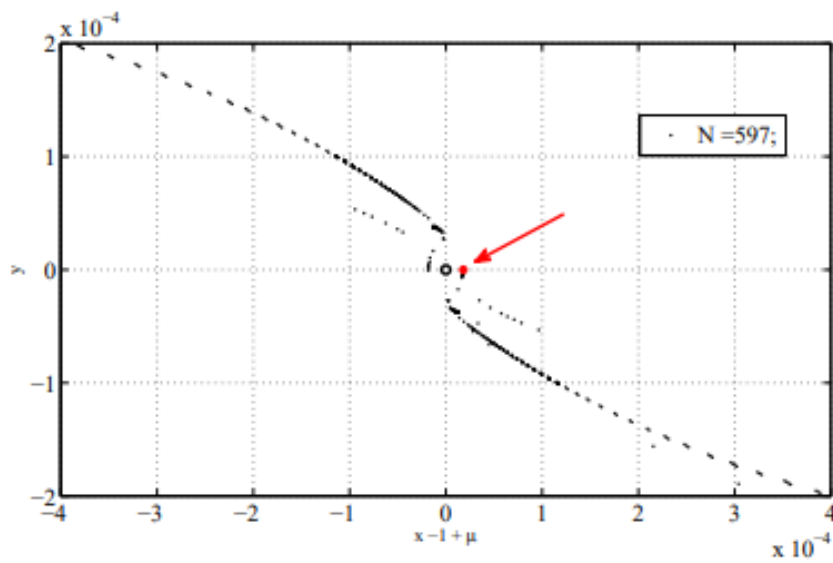


Figura 14 – Conjunto de captura  $\mathcal{C}_{-1}^6(0, 99, \pi/4)$  (Topputo; Belbruno, 2015).

Na Fig. 15 é apresentada a órbita gerada pelo ponto indicado em Fig. 14 em diferentes quadros de referência.

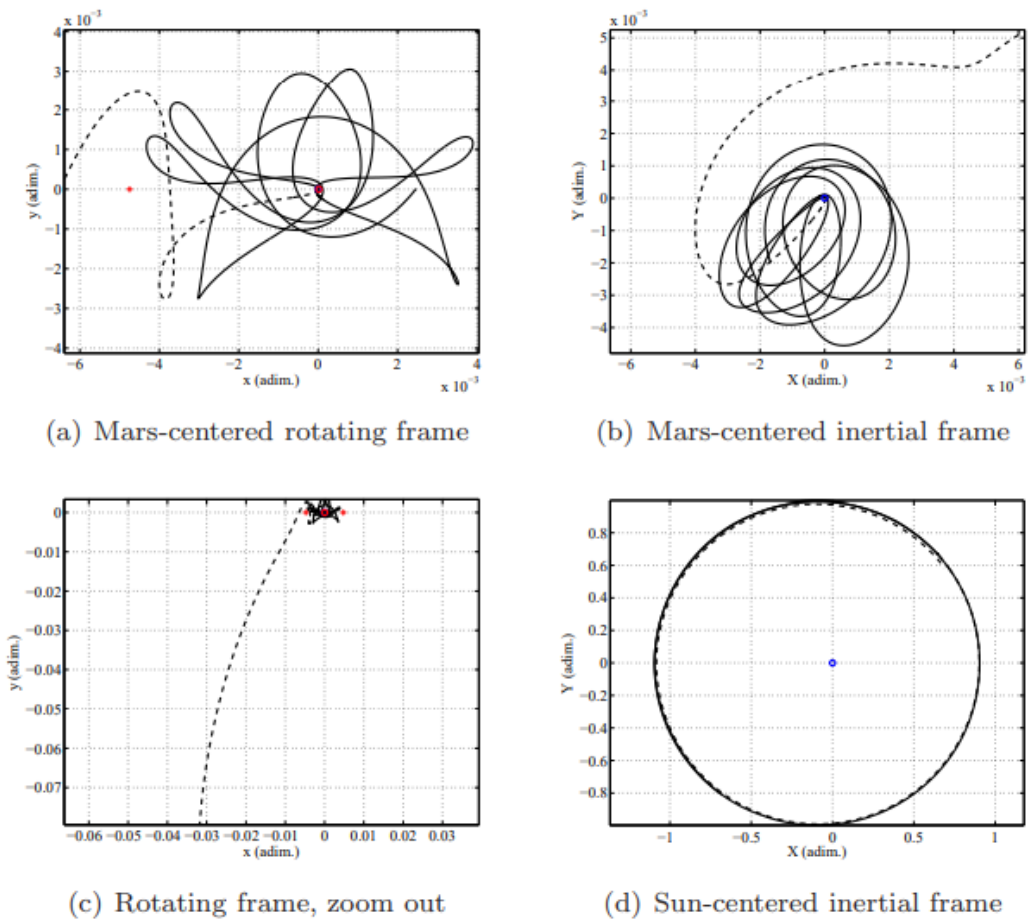


Figura 15 – Órbita de captura correspondente a  $\mathcal{C}_{-1}^6(0, 99, \pi/4)$  em coordenadas rotacional e inercial (Topputo; Belbruno, 2015).

Cada ponto em  $\mathcal{C}_{-1}^6(0, 99, \pi/4)$  dá origem a uma órbita que chega em Marte e realiza pelo menos seis rotações ao seu redor. Se uma espaçonave se movesse nessa órbita, iria chegar em Marte na curva tracejada e ficaria temporariamente presa na linha sólida sem realizar nenhuma manobra (Topputo; Belbruno, 2015).

Para captura balística que começa longe de Marte, é necessário integrar os estados de captura mostrados em Fig. 14. É encontrado que para um tempo "negativo", ou seja, no passado, as trajetórias se afastam de Marte, porém estão próximas da órbita heliocêntrica de Marte. O ponto final é o alvo para a transferência partindo da Terra (Topputo; Belbruno, 2015).

Como exemplo, considera-se o ponto mostrado em Fig. 14, que corresponde a  $\mathcal{C}_{-1}^6(0, 99, \pi/4)$ . As integrações no passado e futuro são mostrados na Fig. 15. Quando integradas no futuro (linha sólida), a órbita realiza seis órbitas ao redor de Marte de maneira totalmente balística, ou seja, sem utilização de manobras. Quando integrada no passado, (linha tracejada), a órbita deixa Marte, mas continua em um estado próximo ao de captura balística ao redor de Marte, como visto em Topputo e Belbruno (2015).

## 5.7 Transferência interplanetária da Terra até pontos de captura longe de Marte

Um ponto,  $\mathbf{x}_c$ , é escolhido perto da órbita de Marte de onde irá começar uma órbita de captura balística que irá realizar captura balística até Marte em uma distância de periapsis  $r_p$ . O ponto é escolhido arbitrariamente, porém longe da esfera de influência de Marte, para que a força gravitacional de Marte seja relativamente pequena. Esse ponto é encontrado ao realizar uma integração da órbita de captura de  $r_p$  no passado para se mover suficientemente longe de Marte. Quando consideradas diferentes trajetórias de captura com propriedades diferentes, como diferentes valores de  $r_p$ , então a trajetória integrada no passado para diferentes valores de  $r_p$  terão valores de  $\mathbf{x}_c$  que são muito próximos um do outro (Topputo; Belbruno, 2015).

Serão apresentados dois exemplos: caso 1 e caso 2. O caso 1 considera  $\mathbf{x}_c$  a 1 milhão de quilômetros de Marte, já o caso 2 considera  $\mathbf{x}_c$  a 23 milhões de quilômetros de Marte.

A Fig. 16 representa o caso 1. A localização de Marte quando  $P$  chega está indicada. A linha em preto representa a órbita necessária para atingir o ponto de captura deixando a Terra, a linha vermelha é a órbita de captura e a linha azul é a órbita pós-captura.

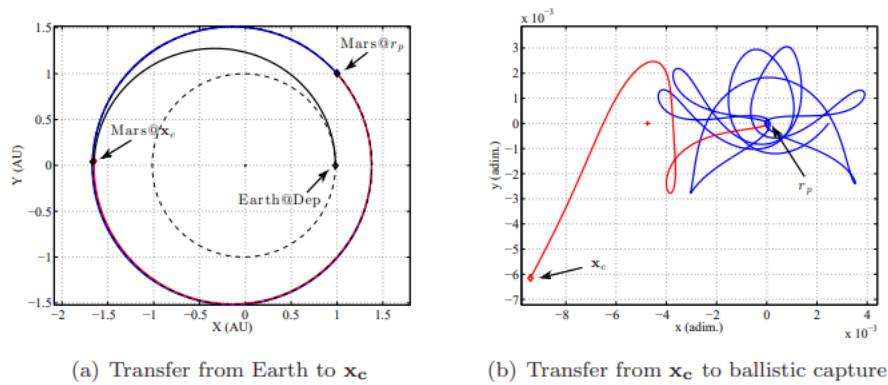


Figura 16 – Solução usando a órbita apresentada em Fig. 14 (Topputo; Belbruno, 2015).

É possível observar que Marte está inicialmente atrás de  $\mathbf{x}_c$  e cerca de 1 milhão de quilômetros de distância. Entretanto, Marte se move levemente mais rápido que  $P$  quando  $P$  deixa  $\mathbf{x}_c$  na captura balística de transferência da distância  $r_p$  de Marte. Aproximadamente um ano depois,  $P$  é ultrapassado por Marte, então  $P$  alcança Marte para captura balística em  $r_p$  em conjunto de órbitas de captura movendo pelo menos seis órbitas ao redor de Marte dentro do conjunto estável, segundo Topputo e Belbruno (2015).

A Fig. 17 representa o caso 2. Aqui a dinâmica da captura é diferente do caso 1. Quando  $P$  chega em  $\mathbf{x}_c$ , Marte está a frente de  $\mathbf{x}_c$ . Nesse caso,  $P$  inicialmente se move mais rápido do que Marte. Eventualmente,  $P$  ultrapassa Marte e então é puxado de volta em direção a Marte para captura balística em cerca de um ano (Topputo; Belbruno, 2015).

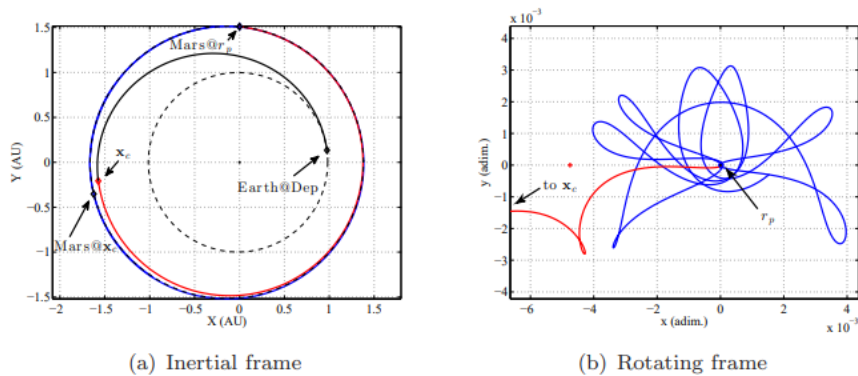


Figura 17 – Solução obtida escolhendo um ponto em  $\mathcal{C}_{-1}^6(0, 99, \pi/2)$  (Topputo; Belbruno, 2015).

As capturas balísticas de transferências da Terra até Marte são procuradas de acordo com as seguintes suposições:

- 1. As equações que descrevem as dinâmicas da captura balística são do problema restrito de três corpos planar elíptico;

- 2. Toda a transferência é planar, o que significa que Terra e Marte são adotados como rotacionando em órbitas coplanares;
- 3. Uma primeira manobra,  $\Delta V_1$ , é realizada para sair da Terra. Isso é calculado assumindo que  $P$  já se encontra na órbita heliocêntrica na esfera de influência da Terra;
- 4. Uma segunda manobra,  $\Delta V_c$ , é realizada para introduzir  $P$  na órbita de captura balística;
- 5. Entre as duas manobras,  $P$  se move no espaço heliocêntrico longe tanto da Terra como de Marte, resultando em um problema de dois corpos.

Os parâmetros para otimização são:

- O conjunto de captura: os conjuntos estáveis são calculados com excentricidade fixa. Além disso, quando os conjuntos de captura são definidos pelos conjuntos estáveis, o número de estabilidade precisa ser decidido. Portanto, escolher os conjuntos de captura significa fixar a excentricidade osculadora da primeira órbita pós captura e o número de estabilidade, que é o número mínimo de rotações naturais ao redor de Marte;
- A órbita de captura inicial dentro do conjunto. Por exemplo, especificar a posição radial e angular para cada ponto da Fig. 14. Essa escolha produz um número inteiro,  $N$ .

As variáveis do problema de otimização são:

- O tempo da integração no passado. O tempo é necessário para definir  $\mathbf{x}_c$  começando por  $r_p$  e realizando uma integração no passado;
- O tempo de voo da Terra até  $\mathbf{x}_c$ . Isso é necessário para resolver o problema de Lambert assim que a posição da Terra é conhecida;
- O ângulo de fase para especificar a posição da Terra em sua órbita.

A função objetiva é o custo da segunda manobra,  $\Delta V_c$ . É assumido por [Topputo e Belbruno \(2015\)](#) que a primeira manobra  $\Delta V_1$ , sempre pode ser alcançada, independente de custo. Além disso, é esperado que o custo de  $\Delta V_1$  seja o mesmo de uma transferência de Hohmann tradicional visto que o ponto alvo de uma perspectiva angular, não é tão longe de Marte.

## 5.8 Comparação entre captura balística e transferência de Hohmann

A Tab. 3 apresenta o excesso de velocidade hiperbólica na esfera de influência de Marte para quatro diferentes transferências bitangenciais. Esses valores serão utilizados para comparar os dois tipos de transferência. Os quatro casos representam o limite inferior para todas as transferências do tipo *patched-conics* possíveis: quando a órbita de transferência não é tangente à órbita de Marte, o excesso de velocidade hiperbólica aumenta (Topputo; Belbruno, 2015).

Tabela 3 – Excesso de velocidade hiperbólica em Marte para quatro transferências bitangenciais (Topputo; Belbruno, 2015).

Caso	$V_\infty$ (km/s)
H1	3,388
H2	2,090
H3	3,163
H4	1,881

Ao se aproximar de Marte em estado hiperbólico com o excesso de velocidade  $V_\infty$  na esfera de influência de Marte, o cálculo para o custo para inserir em uma órbita elíptica com excentricidade fixa  $e$  e raio de periapsis  $r_p$  é:

$$\Delta V_2 = \sqrt{V_\infty^2 + \frac{2\mu_M}{r_p}} - \sqrt{\frac{\mu_M(1+e)}{r_p}} \quad (5.6)$$

em que  $\mu_M$  é o parâmetro gravitacional de Marte, ou seja,  $\mu_M = 4,28280 \times 10^4 \text{ km}^3/\text{s}^2$ . Eq. 5.6 é usada para calcular  $\Delta V_2$  para diferentes valores de  $r_p$  (Topputo; Belbruno, 2015).

Uma avaliação de captura balística de transferência em que os estados de  $\mathbf{x}_c$  são originados pelo conjunto  $\mathcal{C}(e, f_0)$ ,  $e = 0,99$ ,  $f_0 = 0, \pi/4, \pi/2$  foi feita. Os resultados podem ser visualizados em Fig. 18.

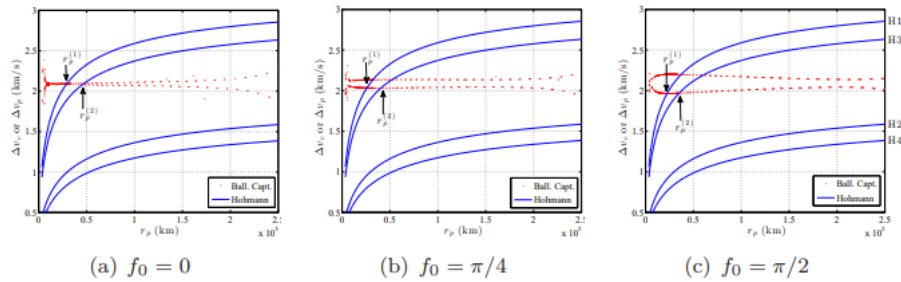


Figura 18 – Comparação de transferência de Hohmann bitangencial e captura balística de transferência originadas pelo conjunto de captura  $\mathcal{C}(e, f_0)$ ,  $e = 0,99$ ,  $f_0 = 0, \pi/4, \pi/2$  (Topputo; Belbruno, 2015).

Em Fig. 18, os pontos vermelhos representam o custo  $\Delta V_c$  das soluções de captura balística para os dois casos previamente apresentados, enquanto as curvas azuis são as funções  $\Delta V_2(r_p)$  associadas às quatro transferências de Hohmann bitangenciais. Analisando a Fig. 18, é possível perceber que, em baixa altitude, a captura balística é mais custosa que a transferência de Hohmann. Todavia, quando  $r_p$  aumenta, a captura balística de transferência tem um desempenho melhor que H1 e H3, de acordo com [Topputo e Belbruno \(2015\)](#).

Em Tab. 4 são apresentados os valores de  $r_p^{(1)}$  e  $r_p^{(2)}$  em que  $\Delta V_c \simeq \Delta V_2$ . Para raios de periapsis acima de  $r_p^{(1)}$  ou  $r_p^{(2)}$ , a economia aumenta para maiores  $r_p$ . Nos casos de H2 e H4, a captura balística não desempenha tão bem quanto Hohmann para qualquer valor de  $r_p$  ([Topputo; Belbruno, 2015](#)).

Tabela 4 – Raios de periapsis nos quais a captura balística de transferência se tornam mais convenientes que a transferência de Hohmann para diferentes  $f_0$  ([Topputo; Belbruno, 2015](#)).

$f_0$	$r_p^{(1)}$ (km)	$r_p^{(2)}$ (km)	$\Delta V_c$ (km/s)
0	$29 \times 10^3$	$46 \times 10^3$	2,09
$\pi/4$	$26 \times 10^3$	$40 \times 10^3$	2,03
$\pi/2$	$22 \times 10^3$	$34 \times 10^3$	1,96

Após observações, é possível afirmar que o custo para captura balística de transferência é aproximadamente constante independente do valor de  $r_p$ . Essa é uma grande vantagem em relação à transferência de Hohmann em que o custo aumenta quando  $r_p$  aumenta ([Topputo; Belbruno, 2015](#)).

A Tab. 5 mostra os valores de Fig. 18. A economia,  $S$ , é dada por  $S = (\Delta V_c - \Delta V_2/\Delta V_c)$ , em que  $\Delta V_2$  está associado ao caso H3.  $S$  é uma medida de eficiência da captura balística e  $\Delta t_{c \rightarrow p}$  é o tempo de voo de  $\mathbf{x}_c$  até  $r_p$ .

Tabela 5 – Comparação entre captura balística de transferência e transferência de Hohmann para os pontos em Fig. 18 ([Topputo; Belbruno, 2015](#)).

Ponto	$r_p$ (km)	$\Delta V_c$ (km/s)	$\Delta V_2$ (km/s)	S (%)	$\Delta t_{c \rightarrow p}$ (dias)
(A)	49896	2,033	2,116	-4,0%	434
(B)	73896	2,036	2,267	-11,3%	433
(C)	91897	2,039	2,344	-14,9%	432
(D)	113897	2,041	2,414	-18,2%	431

Após o apresentado, é possível afirmar que a captura balística de transferência utiliza menos  $\Delta V$  no processo de captura do que uma transferência de Hohmann para altitudes acima de  $r_p^{(1)}$  e  $r_p^{(2)}$ , nos casos de H1 e H3, em que:



$$\Delta V_c < \Delta V_2 \quad (5.7)$$

A porcentagem de economia nesses casos podem chegar a 25% quando  $r_p$  é 200000 km, como mostrado por [Topputo e Belbruno \(2015\)](#).

O fato de se ter  $\mathbf{x}_c$  longe de Marte tem implicações no período de lançamento saindo da Terra até Marte. A transferência de Hohmann possui um curto período de lançamento, de alguns dias, que precisa ser satisfeito quando Terra e Marte se alinham. Isso ocorre pois um ponto específico de Marte é escolhido. Se este ponto for perdido, o lançamento pode não ser realizado, causando penalidades econômicas. Uma solução para esse problema seria estender o período de lançamento. Ao escolher  $\mathbf{x}_c$  ao invés de Marte, não há necessidade de se esperar dois anos. Isso ocorre pois uma órbita que é escolhida ao invés de um único ponto ([Topputo; Belbruno, 2015](#)).

## 6 Simulação

### 6.1 *Systems Tool Kit* (STK)

O *Systems Tool Kit* (STK) é um software da empresa *Ansys Government Initiatives* (AGI). O STK tem como função realizar simulações de missões reais (McCleary, 2023).

#### 6.1.1 *Astrogator*

O propagador *Astrogator* disponibiliza todas as ferramentas necessárias para desenvolver, otimizar e validar a simulação da missão (AGI, 2021b).

#### 6.1.2 *Lambert Solver*

O *Lambert Solver* soluciona de seleção da órbita e determinação da órbita inicial. Dadas as condições de iniciais e um tempo de voo opcional, o solucionador retorna os valores apropriados dos vetores de velocidade que determinam a órbita (AGI, 2024).

### 6.2 Transferência de Hohmann

#### 6.2.1 *Mars Pathfinder*

A *Mars Pathfinder* foi uma missão lançada em 4 de dezembro de 1996, com o objetivo de aterrissar em Marte. Essa missão foi utilizada como base para realizar a simulação de uma trajetória baseada na transferência de Hohmann (AGI, 2021a).

#### 6.2.2 Passo a passo

##### 6.2.2.1 Criar o cenário

1. Abrir o STK.
2. Clicar em "**Create a Scenario**".
3. Colocar as condições iniciais mostradas em Fig. 19

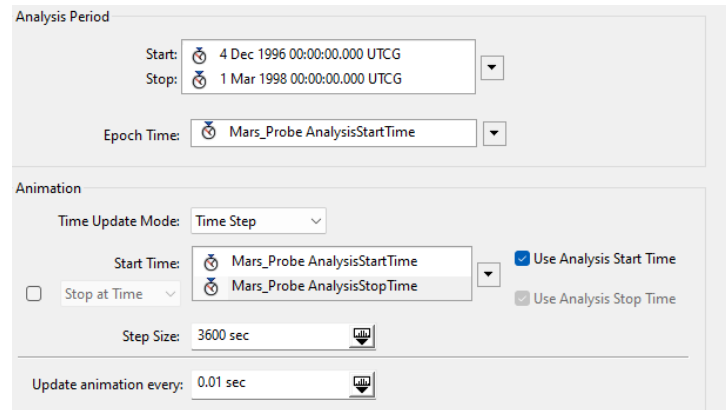


Figura 19 – Condições iniciais.

### 6.2.2.2 Desativar os subplanetas

1. Selecionar a página "**2D Graphics - Global Attributes properties**".
2. Escolher as opções mostradas em Fig. 20.

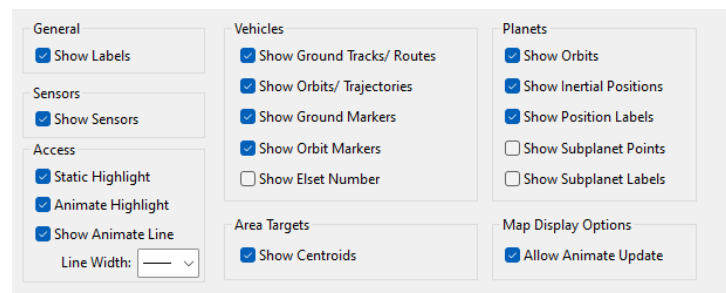


Figura 20 – Marcações dos subplanetas.

### 6.2.2.3 Inserir a Terra

1. Usando a ferramenta "**Insert STK Objects**", inserir dois "**Planet**" com o método "**Insert Default**", como mostrado em Fig. 21.

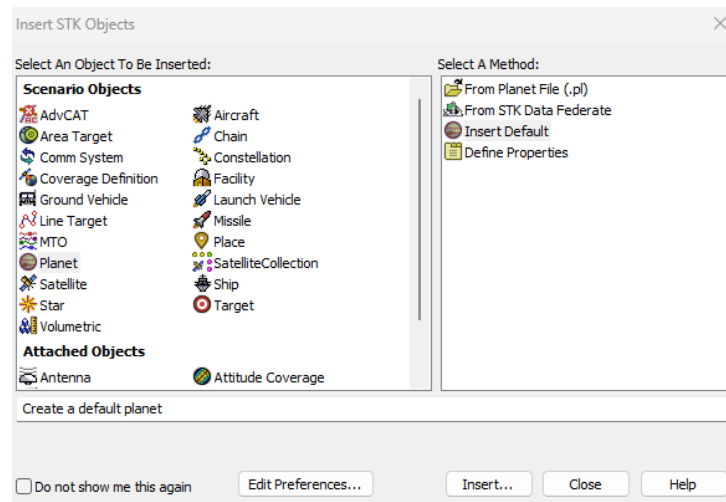


Figura 21 – Inserção do planeta.

2. Em "**Object Browser**", abrir as propriedades do "**Planet1**".
3. Na página "**Basic - Definition**", mudar o corpo central para "**Earth**".
4. Colocar "**Ephemeris Source**" para DE440, como mostrado em Fig. 22.

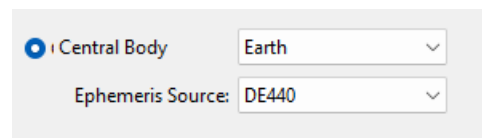


Figura 22 – Propriedades da Terra.

#### 6.2.2.4 Inserir Marte

1. Em "**Object Browser**", abrir as propriedades de "**Planet2**".
2. Na página "**Basic - Definition**", mudar o corpo central para "**Marte**".
3. Colocar "**Ephemeris Source**" para DE440, como mostrado em Fig. 23.

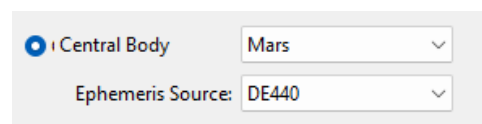


Figura 23 – Propriedades de Marte.

#### 6.2.2.5 Criar *Pathfinder*

1. Usando a ferramenta "**Insert STK Objects**", inserir dois "**Satellite**" com o método "**Insert Default**", como mostrado em Fig. 24.

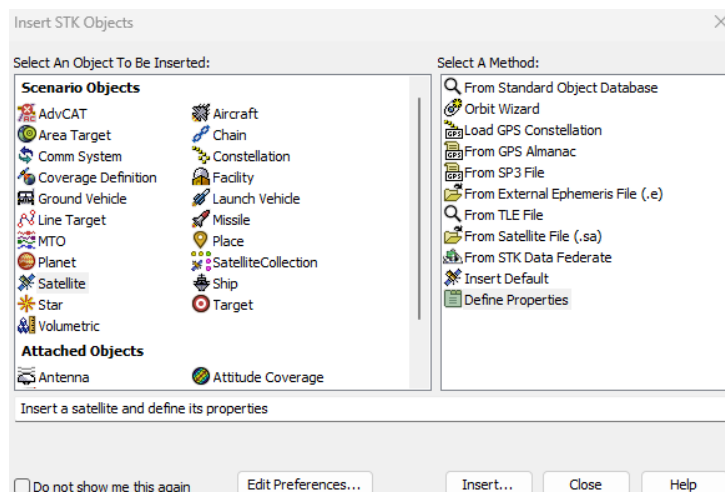


Figura 24 – Inserção do satélite.

2. Em "**Object Browser**" mudar o nome do satélite para *Pathfinder*.
3. Abrir a página de propriedades do *Pathfinder*.
4. Na página "**Basic - Orbit**", escolher o propagador "**Astrogator**", como mostrado em Fig. 25.

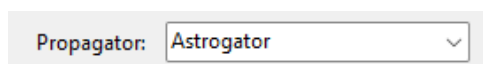


Figura 25 – Propagador.

5. Selecionar a página "**2D Graphics - Pass**".
6. Escolher "**Orbit Track - Lead Type**" como "**All**", como mostrado em Fig. 26.

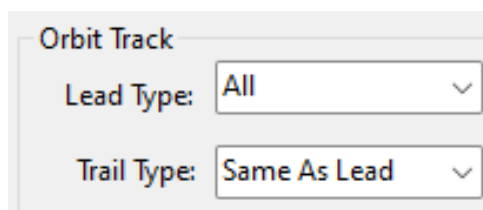


Figura 26 – Escolha do rastreador de órbita.

7. Selecionar a página "**3D Graphics - Model**".
8. No campo "**Detail Thresholds**", colocar as barras de "**Marker, Label, Marker, Point e All**" todas para a direita, como mostrado em Fig. 27.

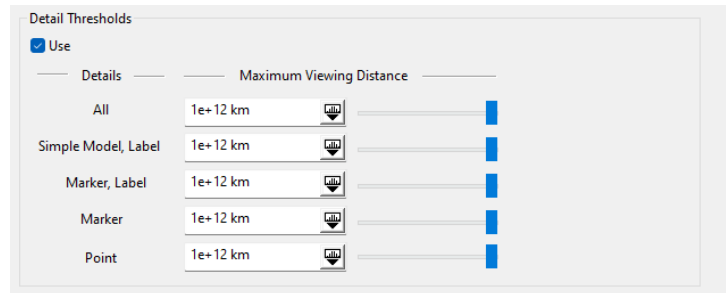


Figura 27 – Escolha do limite dos detalhes.

#### 6.2.2.6 Vista centrada na Terra

1. Trazer a janela da visão 3D para a frente.
2. Abrir as propriedades de "**3D Graphics 1 - Earth**".
3. Selecionar a página "**Grids**".
4. Marcar a opção "**Ecliptic Coordinates - Show**", como mostrado em Fig. 28.

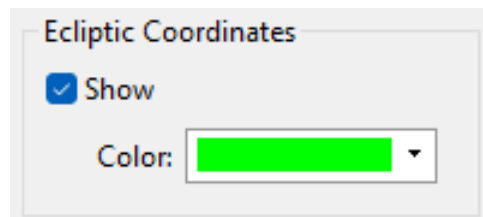


Figura 28 – Coordenadas elípticas.

5. Selecionar a página "**Window Properties**".
6. Mudar o nome da janela para "to Earth", como mostrado em Fig. 29.



Figura 29 – Nome da janela.

7. Selecionar a página "**Advanced**".
8. Mudar a opção "**Max Visible Distance**" para 1e+10 km, como mostrado em Fig. 30.

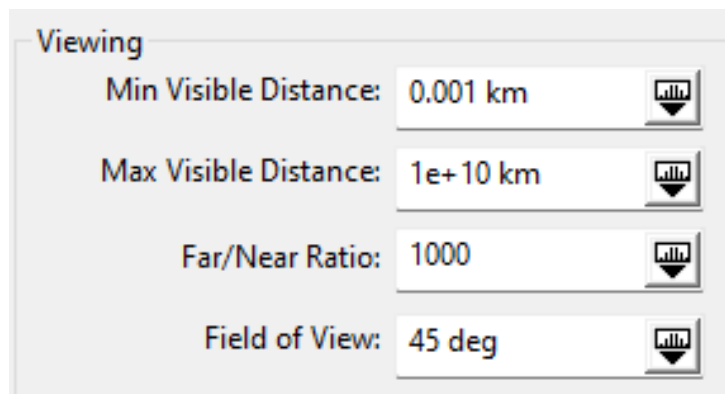


Figura 30 – Distância visível.

#### 6.2.2.7 Visão heliocêntrica

1. Selecionar "**View**" na barra de ferramentas principal.
2. Selecionar "**Duplicate 3D Graphics Window > Earth**".
3. Escolher o corpo central em "**3D Graphic Window**" como "**Sun**".
4. Abrir a página de propriedades de "**3D Graphics 2 - Sun window**".
5. Selecionar a página "**Window Properties**".
6. Mudar o nome da janela para "to Sun", como mostrado em Fig. 31.



Figura 31 – Nome da janela.

7. Selecionar a página "**Advanced**".
8. Mudar a opção "**Max Visible Distance**" para 1e+10 km, como mostrado em Fig. 32.

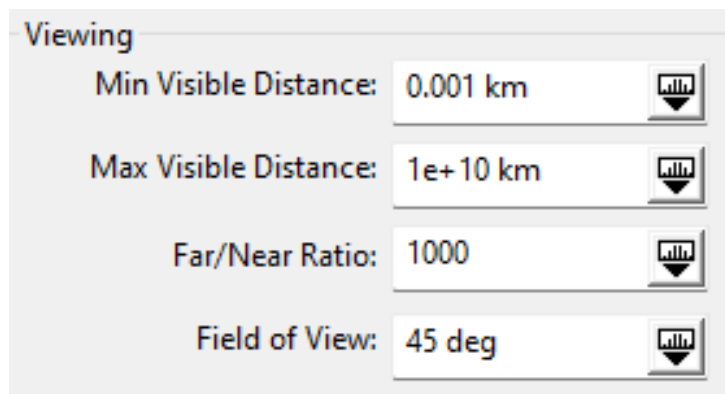


Figura 32 – Distância visível.

### 6.2.3 Vista centrada em Marte

1. Selecionar "**View**" na barra de ferramentas principal.
2. Selecionar "**Duplicate 3D Graphics Window > Earth**".
3. Escolher o corpo central em "**3D Graphic Window**" como "**Mars**".
4. Abrir a página de propriedades de "**3D Graphics 2 - Sun window**".
5. Selecionar a página "**Window Properties**".
6. Mudar o nome da janela para "to Mars", como mostrado em Fig. 33.



Figura 33 – Nome da janela.

7. Selecionar a página "**Advanced**".
8. Mudar a opção "**Max Visible Distance**" para  $1e+10$  km, como mostrado em Fig. 34.

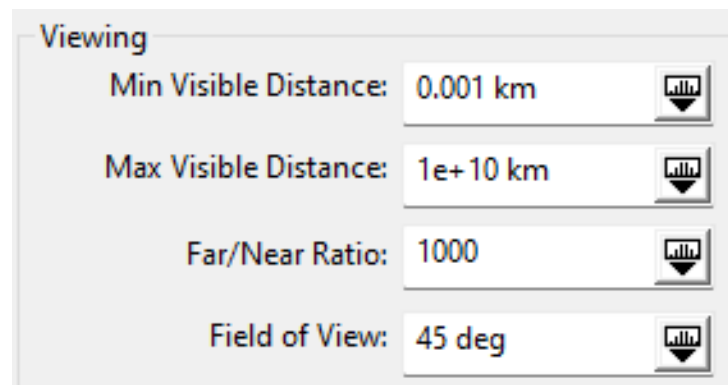


Figura 34 – Distância visível.

Assim, a visão das três janelas pode ser visualizada em Fig. 35.

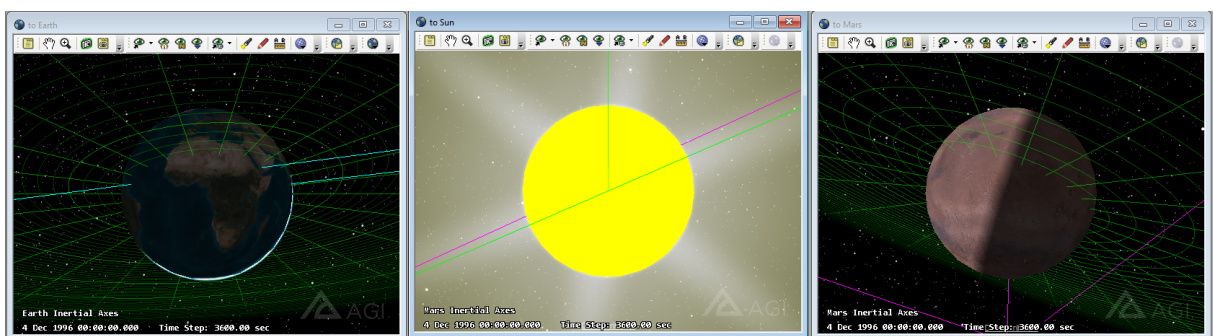


Figura 35 – As três janelas.



### 6.2.3.1 Ajuste da vista heliocêntrica

1. Selecionar a janela do Sol.
2. Diminuir o zoom e ajustar o ângulo para que Terra, Sol e Marte possam ser visualizados ao mesmo tempo.
3. Abrir o "**Globe Manager**" e clicar com o botão direito em "**Moon**" e desmarcar a opção "**Label**", resultando em Fig. 36.

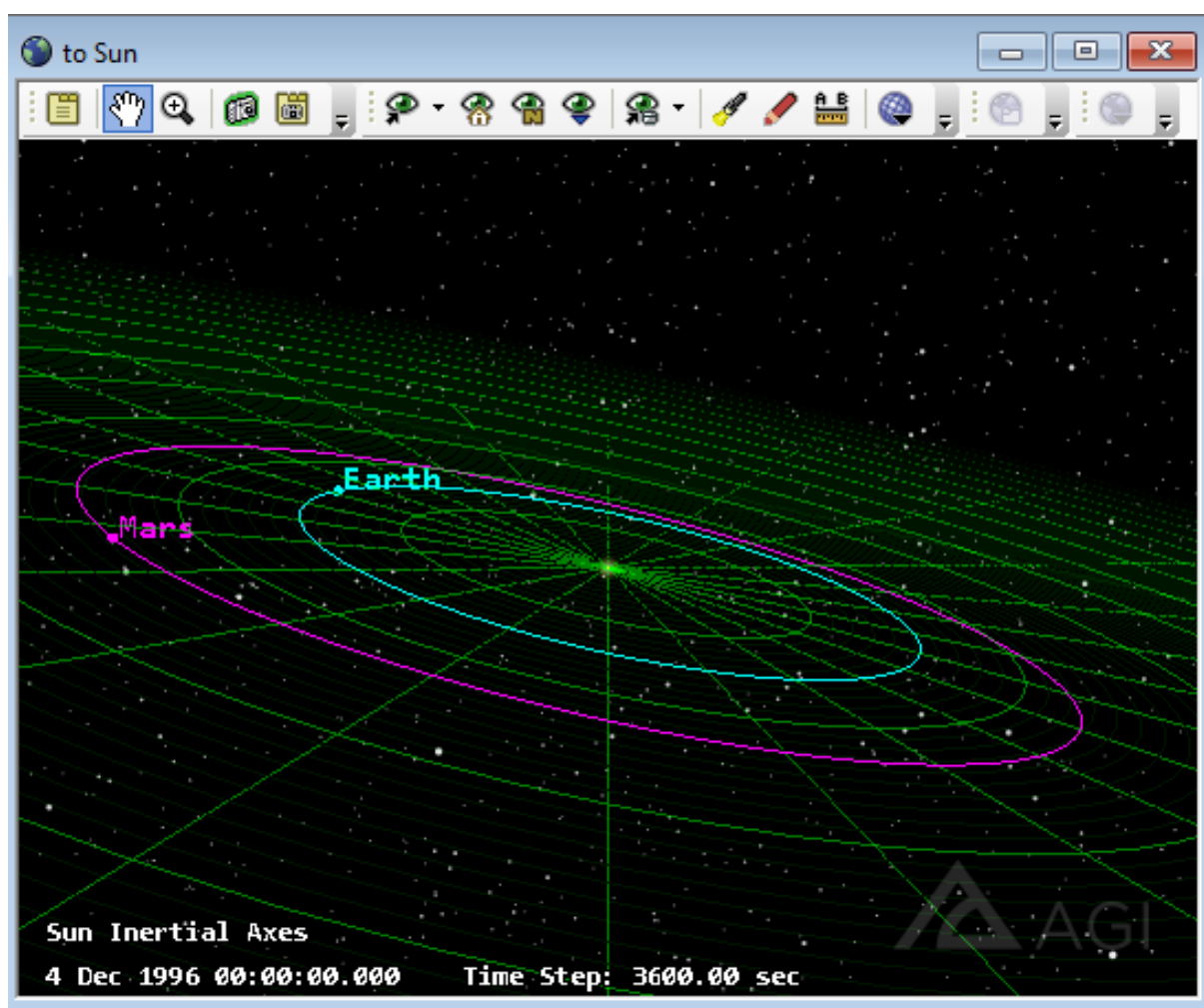
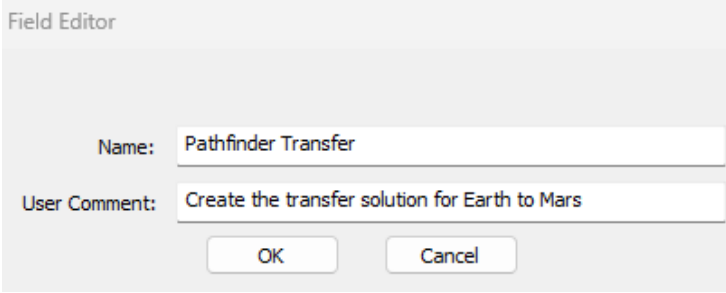


Figura 36 – Os três corpos celestes.

### 6.2.3.2 Criar o arco de transferência

1. Abrir o menu "**Utilities**".
2. Selecionar a opção "**Component Browser**".
3. Na lista "**Components**", selecionar "**Design Tools**".
4. Selecionar "**Lambert Solver**" e "**duplicate**".

5. Na janela "**Field Editor**", escrever o apresentado em Fig. 37.



Field Editor

Name: Pathfinder Transfer

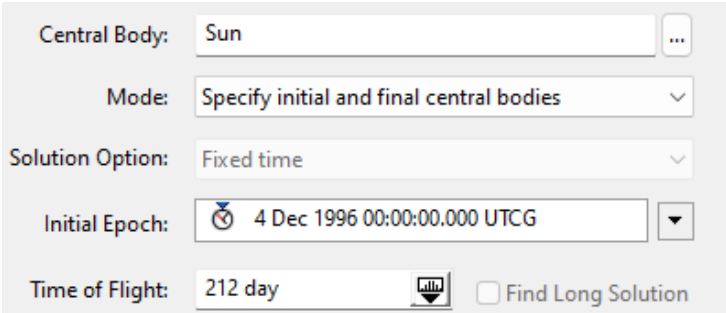
User Comment: Create the transfer solution for Earth to Mars

OK Cancel

Figura 37 – Renomear o componente.

#### 6.2.4 Desenhar o arco de transferência

1. Clicar duas vezes em "**Pathfinder Transfer**" para abrir "**Design Tools**".
2. Selecionar os campos conforme Fig. 38.



Central Body: Sun

Mode: Specify initial and final central bodies

Solution Option: Fixed time

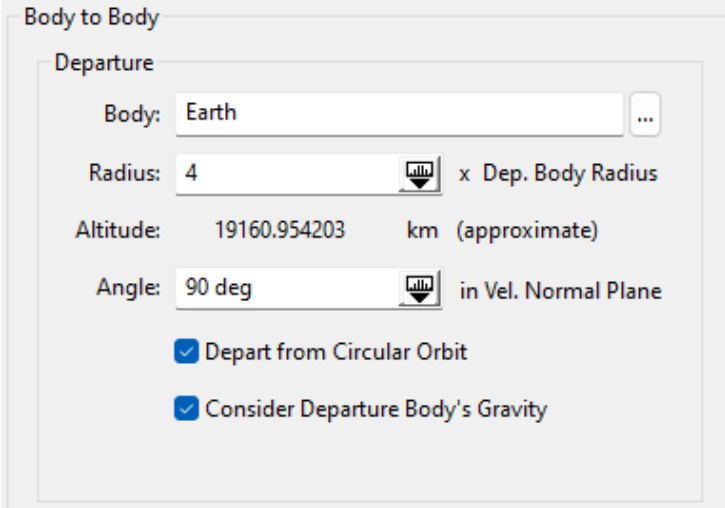
Initial Epoch: 4 Dec 1996 00:00:00.000 UTCG

Time of Flight: 212 day  Find Long Solution

Figura 38 – Editar o componente.

##### 6.2.4.1 Definir a Terra como o corpo central

1. Na seção "**Body to Body - Departure**", definir as variáveis como mostrado em Fig. 39.



Body to Body

Departure

Body: Earth

Radius: 4 x Dep. Body Radius

Altitude: 19160.954203 km (approximate)

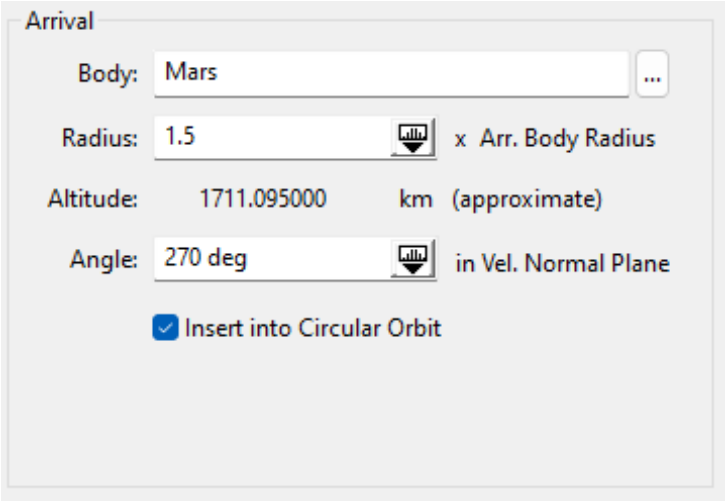
Angle: 90 deg in Vel. Normal Plane

Depart from Circular Orbit

Consider Departure Body's Gravity

Figura 39 – Definição de variáveis.

2. Na seção "**Arrival**", definir as variáveis como mostrado em Fig. 40.



Arrival

Body: Mars

Radius: 1.5 x Arr. Body Radius

Altitude: 1711.095000 km (approximate)

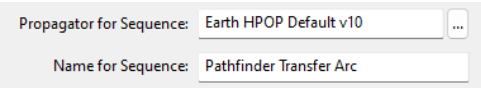
Angle: 270 deg in Vel. Normal Plane

Insert into Circular Orbit

Figura 40 – Definição de variáveis.

#### 6.2.4.2 Definir o propagador

1. Selecionar a propagação conforme Fig. 41.



Propagator for Sequence: Earth HPOP Default v10

Name for Sequence: Pathfinder Transfer Arc

Figura 41 – Definição do propagador.

2. Clicar em "**Construct Sequence**".
3. Clicar em "**Add to MCS Segments**".

## 6.2.4.3 Modelar o arco de transferência do satélite

1. Abrir as propriedades de *Pathfinder*.
2. Dentro do MCS, remover os segmentos "default initial state" e "propagate".
3. Na barra de ferramentas do MCS, clicar na opção "Insert Segment After".
4. Escolher a opção "Pathfinder Transfer Arc", como mostrado em Fig. 42.

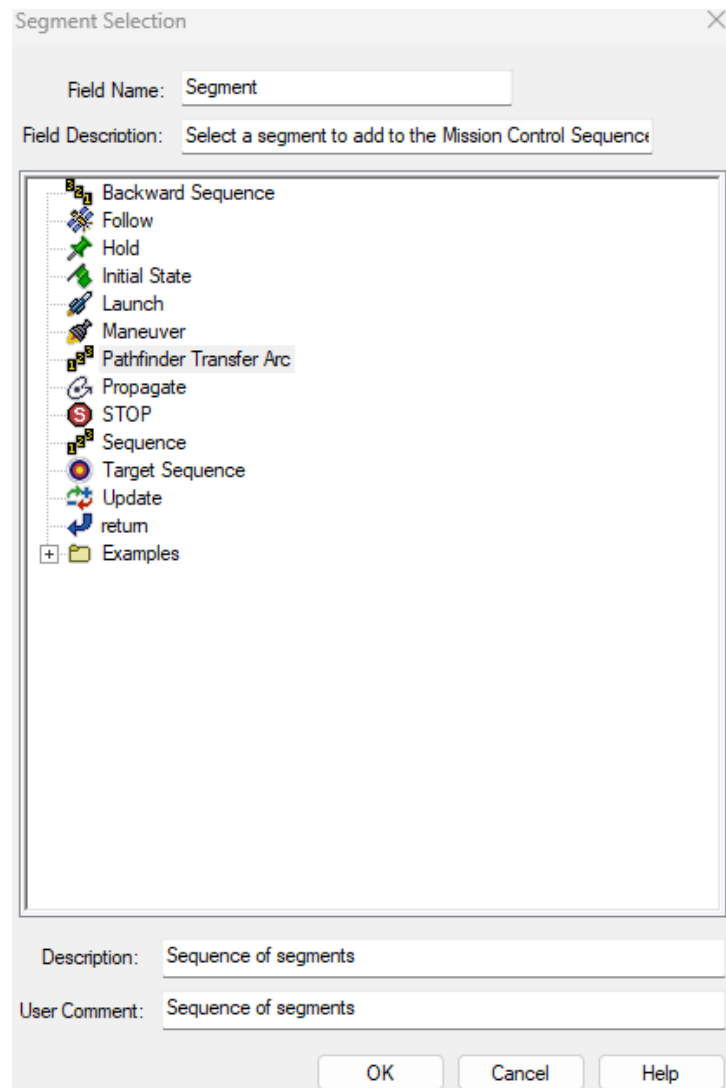


Figura 42 – Lista do MCS.

5. No MCS, selecionar "Target Sequence".
6. Mudar a opção "Action" para "Run active profiles".
7. Clicar no botão "Run Entire Mission Control Sequence", a sequência deve estar como Fig. .

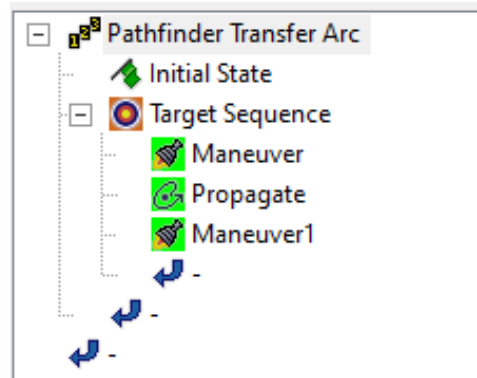


Figura 43 – Sequência da missão.

8. Visualizar o "Differential Corrector", como mostrado em Fig. 44.

Control	New Value	Last Update	Constraint	Desired	Achieved	Difference	Tolerance
...veMnvr.Pointing Cartesian.X	-1208.57 m/sec	4.7185e-07	Propagate : Rx	-1.57533e+08 km	-1.57533	0.0034618	0.1 km
...eMnvr.Pointing Cartesian.Y	1935.3 m/sec	1.0533e-06	Propagate : Ry	-1.575e+08 km	-1.575e+	-0.0017111	0.1 km
...veMnvr.Pointing Cartesian.Z	927.635 m/sec	4.6621e-07	Propagate : Rz	-6.79798e+07 km	-6.79798	-0.000749	0.1 km
...veMnvr.Pointing Cartesian.X	2298.8 m/sec	9.8487e-08	Maneuver1 : Vx	16.0854 km/sec	16.0854	3.6729e-1	0.0001 km/sec
...eMnvr.Pointing Cartesian.Y	943.25 m/sec	-1.4126e-07	Maneuver1 : Vy	-13.9256 km/sec	-13.9256	9.6963e-1	0.0001 km/sec
...veMnvr.Pointing Cartesian.Z	53.5751 m/sec	-5.7006e-08	Maneuver1 : Vz	-6.45199 km/sec	-6.45199	4.1042e-1	0.0001 km/sec

Figura 44 – Convergência da missão.

#### 6.2.4.4 Modelar a órbita

1. Abrir as propriedades de *Pathfinder*.
2. No MCS, clicar em "**Pathfinder Transfer Arc**" e selecionar "**Insert Before**".
3. Na janela "**Segment Selection**", selecionar "**Backward Sequence**", como mostrado em Fig. 45.

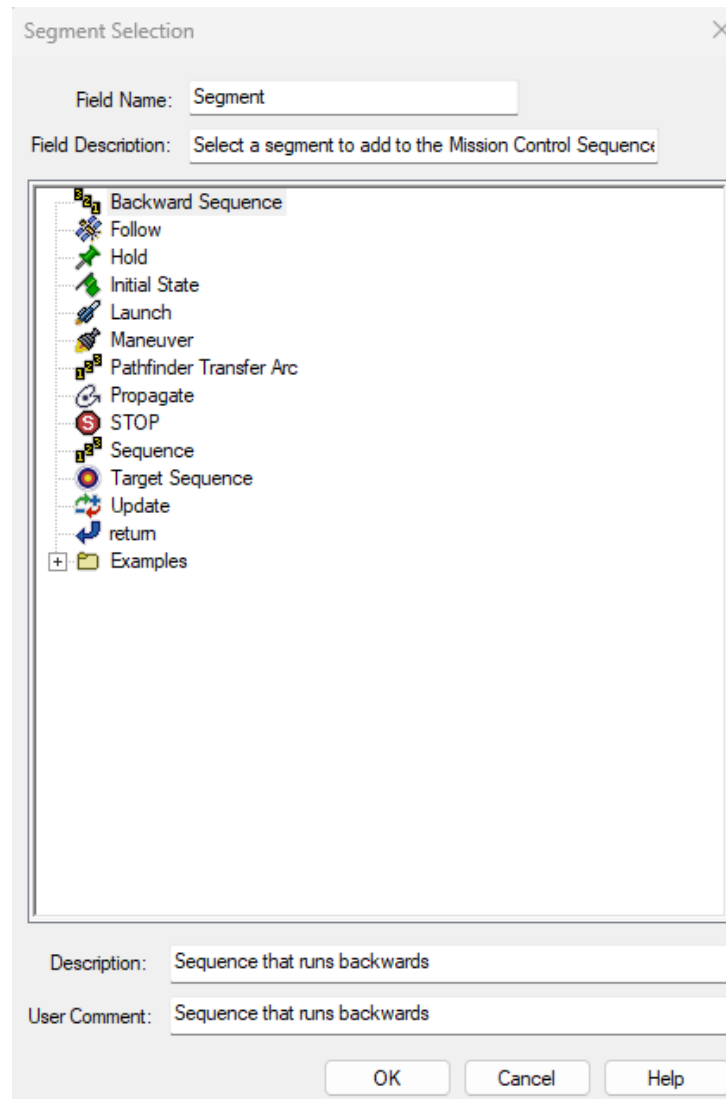


Figura 45 – Lista do MCS.

4. Abaixo de "**Pathfinder Transfer Arc**", clicar em "**Initial State**" e "**copy**".
5. Clicar em "**backwards Sequence**" e selecionar "**Paste After**".
6. Arrastar o novo "**Initial State**" para dentro de "**backwards Sequence**".
7. Renomear o novo "**Initial State**" para "**backwards Initial State**".
8. Clicar em "**backwards Initial State**" e selecionar "**Insert After**".
9. Na janela "**Segment Selection**", escolher a opção "**Propagate**" como mostrado em Fig. 46.

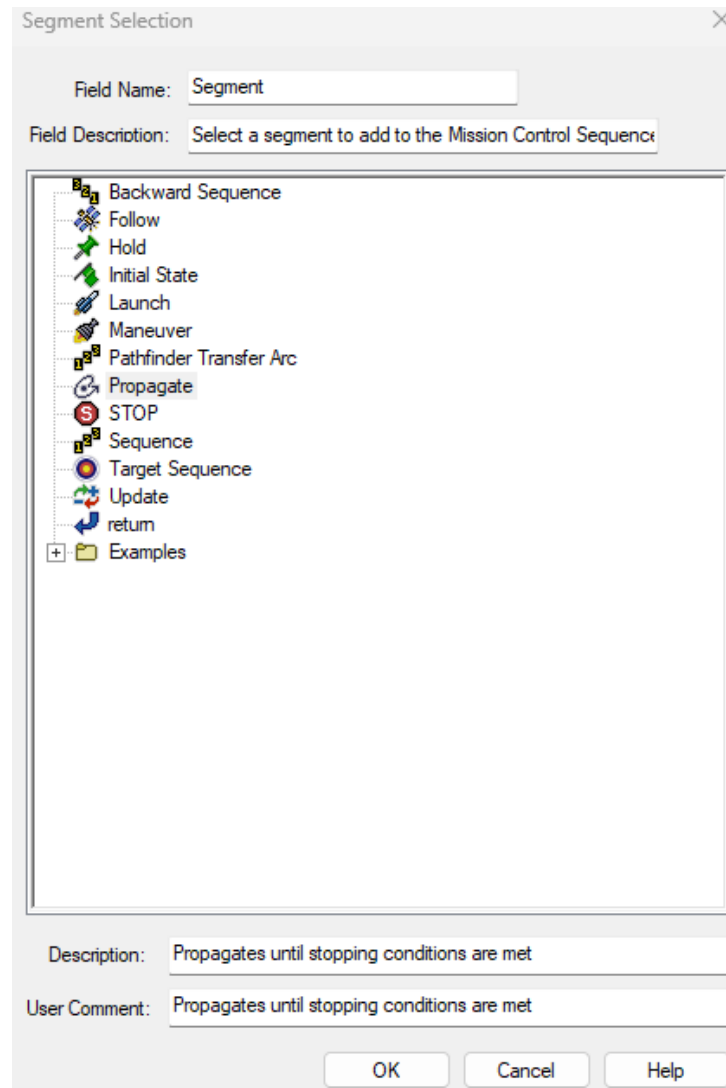
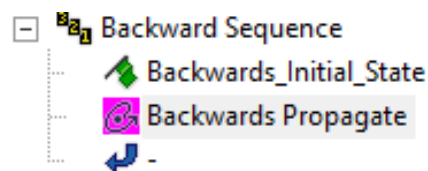


Figura 46 – Lista do MCS.

10. Clicar no novo "**Propagate**" e mudar o nome para "**backwards Propagate**".
11. Mudar a cor do "**backwards Propagate**", como mostrado em Fig. 47.

Figura 47 – *Backwards Sequence*.

12. A sequência da missão deve estar como o apresentado em Fig. 48.

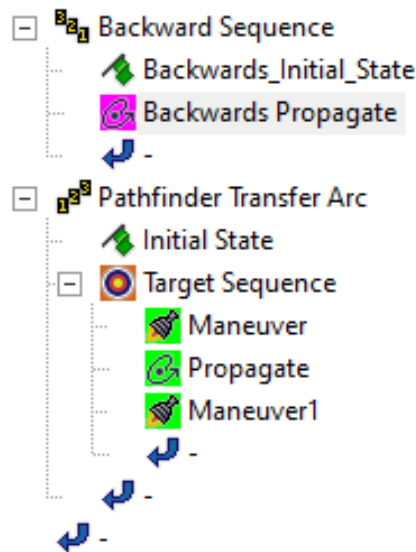


Figura 48 – Sequência da missão.

13. No MCS, selecionar "**Backward Sequence**".
14. Clicar no botão "**Run Entire Mission Control Sequence**".

#### 6.2.4.5 Criar o propagador *Mars Point Mass*

1. Abrir o menu "**Utilities**".
2. Selecionar o "**Component Browser**".
3. Na lista "**Components**", selecionar "**Propagators**".
4. Em "**Propagators**", escolher "**Earth Point Mass**" e "**duplicate**".
5. Renomear a cópia para "**Mars Point Mass**", como mostrado em Fig. 49.

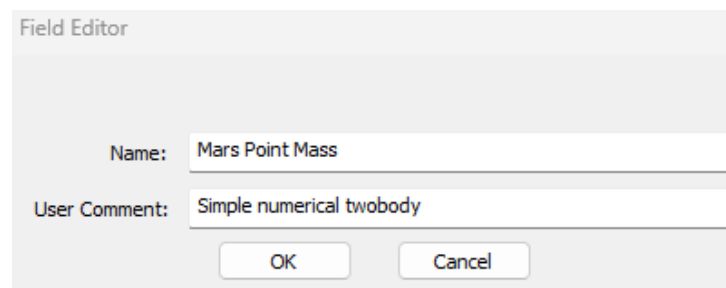


Figura 49 – Cópia do propagador.

6. Clicar em "**Mars Point Mass**" e selecionar "**Central Body**" para "**Mars**", como mostrado em Fig. 50.



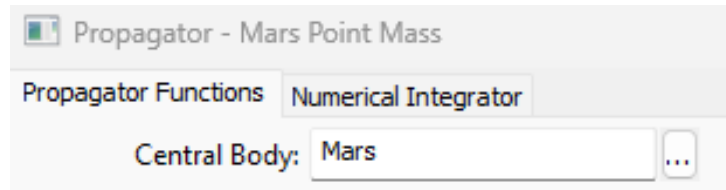


Figura 50 – Edição do propagador.

#### 6.2.4.6 Propagar a órbita

1. Abrir as propriedades de *Pathfinder*.
2. No MCS, clicar em "**Pathfinder Transfer Arc**" e selecionar "**Insert After**".
3. Na janela "**Segment Selection**", escolher "**Propagate**". A sequência deve estar como mostrado em Fig. 51.

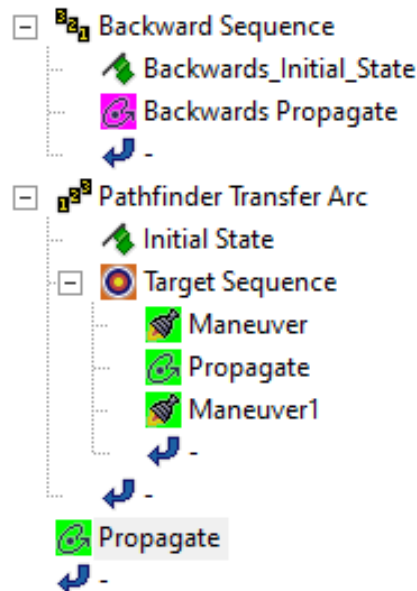


Figura 51 – Sequência da missão.

4. Deixar a condição de parada como .5 dias.
5. Mudar o "**Propagator**" para "**Mars Point Mass**", como mostrado em Fig. 52.

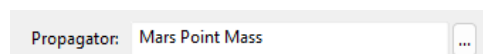


Figura 52 – Mudança de propagador.

6. Clicar no botão "**Run Entire Mission Control Sequence**".

### 6.2.5 Trajetória final

As Fig. 53, 54 e 55 apresentam a trajetória da missão.

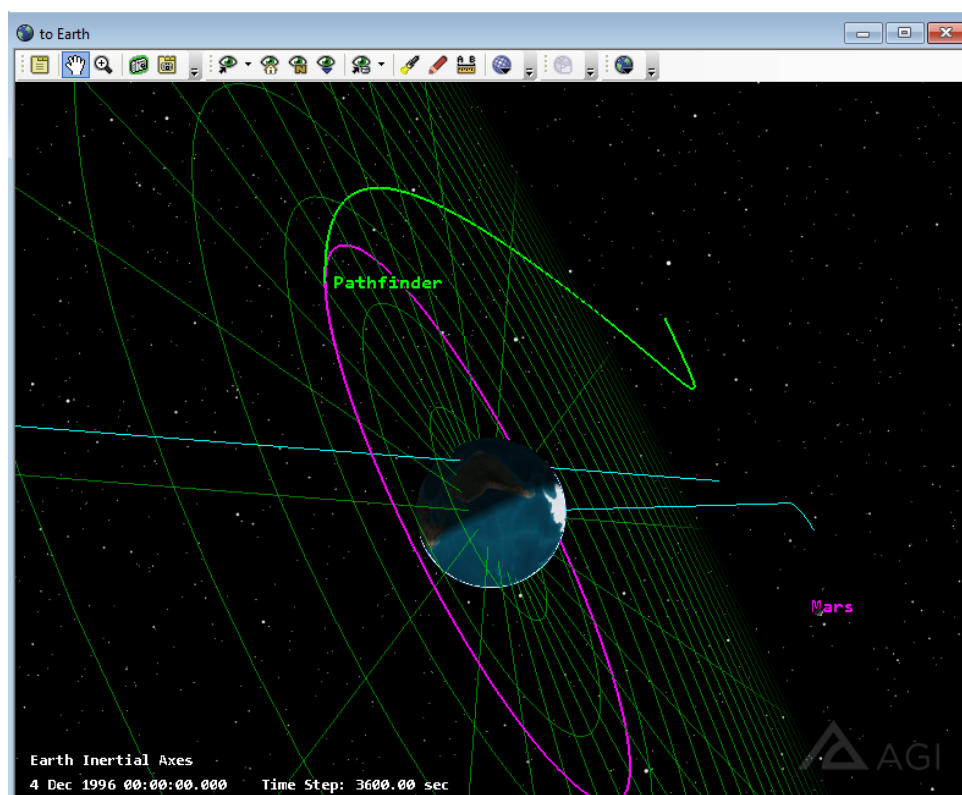


Figura 53 – Trajetória da missão com vista centrada na Terra.

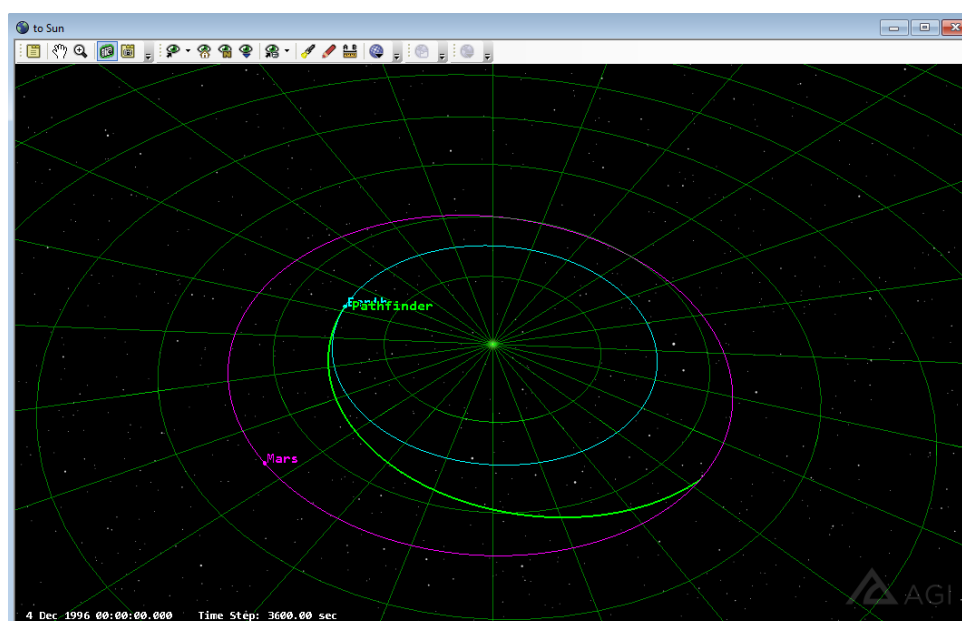


Figura 54 – Trajetória da missão com vista heliocêntrica.

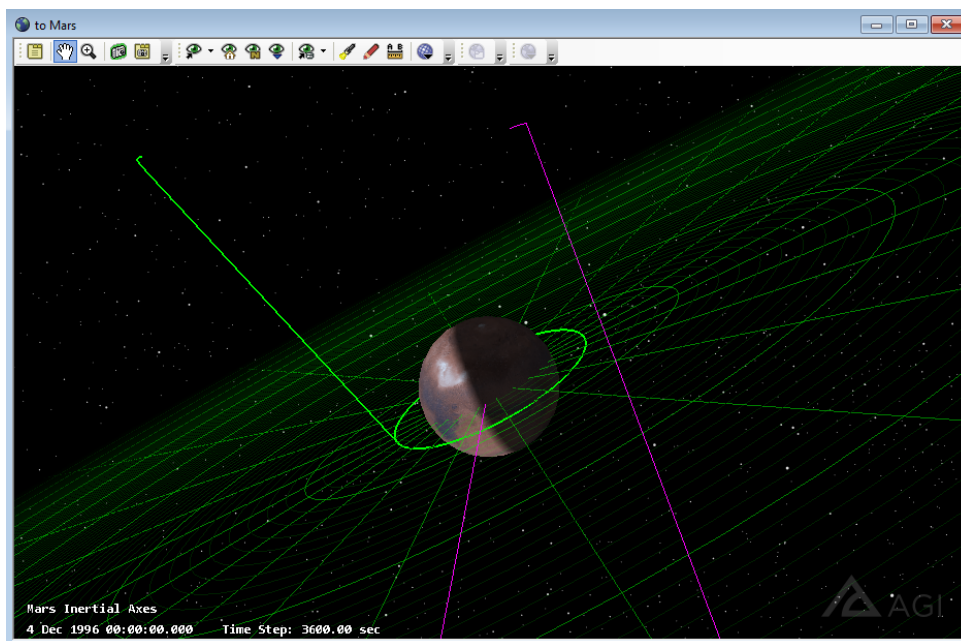


Figura 55 – Trajetória da missão com vista centrada em Marte.

## 7 Resultados

Há várias décadas Marte é visto como um planeta de grande interesse a ser estudado devido às suas similaridades com a Terra, tendo a possibilidade de ser a chave para entender a formação do nosso sistema solar e a evolução do próprio planeta Terra. Assim, é de grande importância estabelecer metodologias para realizar uma viagem da Terra até Marte.

Marte se localiza a algumas centenas de milhões de quilômetros da Terra, uma distância muito maior que a Lua que está a cerca de 380 mil quilômetros. Uma viagem dessa dimensão demanda toneladas de combustível, por isso, é de extrema importância determinar o que será levado na missão, pois cada quilo conta para a carga paga. Assim, também é de grande interesse o estudo de tipos de transferência que consumam menos combustível, resultando na possibilidade de levar uma maior quantidade de carga paga. Um aumento na carga paga possibilita enviar mais drones, *rovers*, veículos não tripulados em geral, podendo, assim, explorar maiores áreas de Marte em uma mesma missão.

Como método de economia de combustível, foi desenvolvida a captura balística por Belbruno e Topputo. Comparada à transferência de Hohmann, a captura balística oferece a possibilidade de 25% de economia de combustível nos casos em que a altitude é da ordem de 200000 quilômetros. Além disso, a captura na transferência de Hohmann precisa ser realizada rapidamente, sob riscos de se perder a espaçonave. Já a captura balística proporciona uma inserção em órbita mais suave que a transferência de Hohmann, o que assegura a integridade da missão.

Neste capítulo é apresentado o resultado das simulação realizadas no software STK. A simulação é uma transferência de Hohmann. O ponto de partida foi a Terra e o ponto final é a órbita de Marte. O tipo de transferência utiliza dois impulsos para realizar a mudança de órbita e, por isso, duas variáveis foram consideradas de interesse para se realizar as simulações, sendo elas o segundo impulso e o tempo total da missão. Foi escolhida como base a missão *Mars Pathfinder* para garantir que a data selecionada está dentro da janela de oportunidade necessária para realizar uma transferência de Hohmann.

Para realizar a captura balística, é necessário escolher um ponto final de destino e, a partir desse ponto, realizar uma integração no passado para assim descobrir a data inicial e o tempo de missão. Por se tratar de um cálculo muito complexo, envolvendo diversas variáveis e conjuntos estáveis, não foi possível estabelecer essas datas para realizar a simulação da captura balística no software STK, pois tal complexidade está fora do escopo de um trabalho de graduação.

## 7.1 Condições iniciais

A simulação teve como base a missão *Mars Pathfinder*, tendo assim como início a data 4 de dezembro de 1996 00:00.00.000 UTCG. A Tab. 6 apresenta os demais parâmetros iniciais.

Tabela 6 – Condições iniciais

Coordinate System	Sun Inertial
X Component (km)	4,51851e7
Y Component (km)	1,28778e8
Z Component (km)	5,58333e7
Vx Component (km/s)	-30,7725
Vy Component (km/s)	11,3943
Vz Component (km/s)	5,06379

## 7.2 Comparação do $\Delta v$ e $\Delta t$

Para comparar os valores de  $\Delta v$  e  $\Delta t$ , é interessante para este trabalho realizar a comparação dos valores calculados e simulados. A Tab. 7 apresenta os resultados calculados por [Topputo e Belbruno \(2015\)](#).

Tabela 7 – Resultados para  $\Delta v$  e  $\Delta t$  calculados

Tipo de transferência	$\Delta v$ (km/s)	$\Delta t$ (dias)	$\Delta t_{c \rightarrow p}$ (dias)
Hohmann	2,267	239	-
Captura balística	2,036	-	433

A Tab. 8 mostra os resultados de  $\Delta v$  e  $\Delta t$  para a simulação feita.

Tabela 8 – Resultados para  $\Delta v$  e  $\Delta t$  simulados.

Tipo de transferência	$\Delta v$ (km/s)	$\Delta t$ (dias)
Hohmann	2,299	212

Tendo em vista as duas tabelas é possível perceber a relação entre  $\Delta v$  e  $\Delta t$ . O valor de  $\Delta v$  mais elevado resulta em um menor  $\Delta t$  e o contrário também é verdadeiro, como explicado neste trabalho.

Para se calcular a eficiência do gasto de combustível da captura balística em relação a transferência de Hohmann, foi utilizada a Eq.7.1, em que  $v_{hohmann}$  se refere ao impulso da transferência de Hohmann e  $v_{cb}$  se refere ao impulso da captura balística.

$$S = \frac{v_{cb} - v_{hohmann}}{v_{hohmann}} \times 100 \quad (7.1)$$

Assim, pode-se afirmar que há a possibilidade de 11,4% de economia de combustível.

Tal eficiência proporciona à missão a oportunidade de se levar mais carga paga ao planeta de destino. Tendo em vista a distância entre os planetas e os gastos financeiros para realizar missões interplanetárias, a possibilidade de levar mais equipamento em uma só viagem é de grande interesse à comunidade aeroespacial.

### 7.3 Considerações

Um ponto relevante a ser levantado são as restrições de cada um desses métodos. A transferência de Hohmann precisa que os corpos estejam em pontos específicos da trajetória para que possa ser realizada. No caso de missões que têm como destino Marte, esse alinhamento entre os planetas só ocorre a cada 26 meses. Tal necessidade restringe bastante as oportunidades de lançamento de missões.

A captura balística foi pensada para ser mais eficiente no consumo de combustível do que uma transferência de Hohmann. Entretanto, essa eficiência só ocorre em casos específicos e, entre as quatro transferências bi-elípticas possíveis, ela é mais eficiente quando Marte se encontra no periélio. Além disso, a captura balística foi projetada para altas altitudes. Para baixas altitudes, foi encontrado que a captura balística é mais custosa que a transferência de Hohmann em todos os quatro tipos de transferência.

No caso da janela de oportunidade, a captura balística não depende do alinhamento dos corpos celeste, garantindo assim uma maior flexibilidade no período de lançamento de missões. Além disso, essa flexibilidade proporciona novas possibilidades de missões, podendo ser enviadas até partes não exploradas que antes eram consideradas de difícil acesso.

O envio dessas missões para Marte é de grande importância para a comunidade aeroespacial. Quanto mais informações são descobertas sobre Marte, seus perigos, seus recursos naturais, etc, mais provável se torna a possibilidade de enviar seres humanos para explorarem o planeta em missões tripuladas, que é o objetivo final da exploração de Marte.

## 8 Conclusão

Este trabalho apresentou uma análise entre diferentes tipos de transferências interplanetárias, utilizando-se tanto da literatura quanto de simulações em software.

A missão Hiten de 1990 foi um marco no desenvolvimento de novas missões espaciais, impulsionando o estudo de trajetórias baseadas na economia de combustível. Mesmo sendo uma missão Terra-Lua, ela influenciou a busca por possibilidades de realizá-la de maneira interplanetária, resultando neste trabalho que se baseou em missões Terra-Marte tendo como principal referência os artigos de Belbruno e Topputo sobre a captura balística.

A captura balística se baseia no conceito dos conjuntos estáveis, que são infinitos pontos na órbita de Marte onde é possível realizar a captura. Por se iniciar longe da esfera de influência do planeta, a captura balística possibilita o uso de menos combustível. Entretanto, é preciso esperar que a espaçonave entre em processo de captura, o que demora cerca de 1 ano, resultando em um grande tempo de missão.

A transferência de Hohmann ainda é a forma mais rápida de se realizar missões interplanetárias, entretanto, é restrita ao alinhamento dos planetas e, por isso, só pode ser realizada em intervalos de 2 anos. No caso da captura balística não há esse tipo de restrição na janela de lançamento, porém tem um tempo de missão mais longo.

A área aeroespacial tem diferentes missões com diferentes objetivos e o estudo e a aplicação da captura balística é um importante passo na busca por maneiras mais eficientes de se utilizar combustível em missões interplanetárias. É de grande importância para a indústria aeroespacial que exista diferentes tipos de métodos de transferência interplanetária para que se utilize a que melhor se encaixa nos objetivos propostos pela missão.

O objetivo principal deste trabalho era comparar a transferência de Hohmann com a captura balística mostrando suas vantagens e desvantagens em relação ao impulso e ao tempo de missão. Para estudos futuros é recomendado realizar a simulação da captura balística no software STK, a fim de se comparar com o resultado simulado da transferência de Hohmann.

# Referências

AGI. *Mars Probe*. 2021. <<https://help.agi.com/stk/#training/tx-marsprobe.htm>>. Citado na página 57.

AGI. *STK Astrogator*. 2021. <<https://www.agi.com/getmedia/d5682e0a-52d9-4704-8cce-68e73dd0cedc/Astrogator-Product-Specsheet.pdf?ext=.pdf>>. Citado na página 57.

AGI. *LambertOrbitSolver Class*. 2024. <[https://help.agi.com/STKComponents/html/T\\_AGI\\_Foundation\\_Propagators\\_LambertOrbitSolver.htm](https://help.agi.com/STKComponents/html/T_AGI_Foundation_Propagators_LambertOrbitSolver.htm)>. Citado na página 57.

BATE, R. R. et al. *Fundamentals of astrodynamics*. [S.l.]: Courier Dover Publications, 2020. Citado na página 34.

BELBRUNO, E. *Capture dynamics and chaotic motions in celestial mechanics: With applications to the construction of low energy transfers*. [S.l.]: Princeton University Press, 2004. Citado na página 38.

BELBRUNO, E. A.; MILLER, J. K. Sun-perturbed earth-to-moon transfers with ballistic capture. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, v. 16, n. 4, p. 770–775, 1993. Citado na página 44.

CURTIS, H. D. *Orbital mechanics for engineering students*. [S.l.]: Butterworth-Heinemann, 2013. Citado 17 vezes nas páginas 9, 11, 18, 25, 26, 27, 28, 31, 32, 33, 34, 37, 38, 40, 41, 42 e 43.

ESA. *ExoMars*. 2024. <[https://www.esa.int/Science\\_Exploration/Human\\_and\\_Robotic\\_Exploration/Exploration/ExoMars](https://www.esa.int/Science_Exploration/Human_and_Robotic_Exploration/Exploration/ExoMars)>. Citado na página 24.

HATCH, S. et al. Trans-lunar cruise trajectory design of grail (gravity recovery and interior laboratory) mission. In: *AIAA/AAS Astrodynamics Specialist Conference*. [S.l.: s.n.], 2010. p. 8384. Citado na página 44.

INDIA, S. *Mars Orbiter Mission – 2 (MOM 2)*. 2024. ://space-india.com/mars-orbiter-mission-2-mom-2/. Citado na página 24.

JAHN, R. G. *Physics of electric propulsion*. [S.l.]: Courier Corporation, 2006. Citado na página 18.

JAXA. *Martian Moons eXploration (MMX)*. 2015. <<https://www.mmx.jaxa.jp/en/>>. Citado na página 24.

JAYAWARDANA, J. R.; BANDARANAYAKE, T. S. A review of unmanned planetary exploration on mars. *Journal of the National Science Foundation of Sri Lanka*, v. 46, n. 3, p. 201–216, 2018. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 22.

LAI, A. K. *The Cold War, the Space Race, and the Law of Outer Space: Space for Peace*. [S.l.]: Routledge, 2021. Citado na página 21.



- LILLIS, R. *About Escapade*. 2024. <<https://escapade.ssl.berkeley.edu/about/>>. Citado na página 24.
- LUO, Z.-F.; TOPPUTO, F. Analysis of ballistic capture in sun–planet models. *Advances in Space Research*, Elsevier, v. 56, n. 6, p. 1030–1041, 2015. Citado na página 44.
- MCCLEARY, M. *STK (SYSTEMS TOOL KIT)*. 2023. <[https://scifi.larc.nasa.gov/stk-systems-tool-kit/?doing\\_wp\\_cron=1716401729.5737938880920410156250](https://scifi.larc.nasa.gov/stk-systems-tool-kit/?doing_wp_cron=1716401729.5737938880920410156250)>. Citado na página 57.
- NASA. *NSSDC Image Catalog - Mariner 4*. 2015. <[https://nssdc.gsfc.nasa.gov/imgcat/html/mission\\_page/MR\\_Mariner\\_4\\_page1.html/](https://nssdc.gsfc.nasa.gov/imgcat/html/mission_page/MR_Mariner_4_page1.html/)>. Citado 2 vezes nas páginas 9 e 22.
- NASA. *Mariner 3 & 4*. 2020. <<https://mars.nasa.gov/mars-exploration/missions/mariner-3-4/>>. Citado 2 vezes nas páginas 9 e 21.
- NASA. *Viking 1 & 2*. 2020. <<https://mars.nasa.gov/mars-exploration/missions/viking-1-2/>>. Citado 2 vezes nas páginas 9 e 23.
- NASA. *Mars 1960A*. 2022. <<https://nssdc.gsfc.nasa.gov/nmc/spacecraft/display.action?id=MARSNK1>>. Citado 2 vezes nas páginas 9 e 18.
- NASA. *Historical Log*. 2023. <<https://mars.nasa.gov/mars-exploration/missions/historical-log/>>. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 23.
- NASA. *Odyssey Orbiter Mission Overview*. 2023. <<https://mars.nasa.gov/odyssey/mission/overview/>>. Citado na página 23.
- NASA. *Pop Culture Mars*. 2023. <<https://mars.nasa.gov/allaboutmars/mystique/>>. Citado na página 18.
- NASA. *Science Goals*. 2023. <[https://mars.nasa.gov/#red\\_planet/1](https://mars.nasa.gov/#red_planet/1)>. Citado na página 18.
- NASA. *Artemis*. 2024. <<https://www.nasa.gov/humans-in-space/artemis/>>. Citado na página 23.
- RACCA, G.; WHITCOMB, G.; FOING, B. The smart-1 mission. *ESA bulletin*, v. 95, p. 72–81, 1998. Citado na página 44.
- SPACE, I. *IMPULSE SPACE AND RELATIVITY SPACE ANNOUNCE COMMERCIAL MISSION TO MARS*. 2022. <<https://www.impulsespace.com/updates/impulse-space-and-relativity-space-announce-first-commercial-mission-to-mars>>. Citado na página 24.
- TOPPUTO, F.; BELBRUNO, E. Earth–mars transfers with ballistic capture. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, Springer, v. 121, n. 4, p. 329–346, 2015. Citado 18 vezes nas páginas 9, 11, 18, 39, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56 e 76.