



**Universidade de Brasília  
Faculdade de Gama**

**Projeto de Filtros Fracionários Utilizando a  
Metodologia CRONE**

Miguel Enrique Parra Munoz

PROJETO FINAL DE CURSO  
ENGENHARIA ELETRÔNICA

Brasília  
2023

**Universidade de Brasília  
Faculdade de Gama**

# **Projeto de Filtros Fracionários Utilizando a Metodologia CRONE**

Miguel Enrique Parra Munoz

Projeto Final de Curso submetido como requisito parcial para obtenção do grau de Engenheiro Eletrônico

Orientador: Prof. Dr. Eugênio Liborio Fortaleza  
Coorientador: Pesquisador. Dr. William Humberto Cuellar Sanchez

Brasília  
2023

P000p Parra Munoz, Miguel Enrique.  
Projeto de Filtros Fracionários Utilizando a Metodologia CRONE / Miguel Enrique Parra Munoz; orientador Eugênio Liborio Fortaleza; coorientador William Humberto Cuellar Sanchez. -- Brasília, 2023.  
105 p.

Projeto Final de Curso (Engenharia eletrônica) -- Universidade de Brasília, 2023.

1. Metodologia Crone. 2. Variância. 3. Filtragem. 4. Ganho. I. Fortaleza, Eugênio Liborio , orient. II. Cuellar Sanchez, William Humberto , coorient. III. Título

**Universidade de Brasília  
Faculdade de Gama**

## **Projeto de Filtros Fracionários Utilizando a Metodologia CRONE**

Miguel Enrique Parra Munoz

Projeto Final de Curso submetido como requisito parcial para obtenção do grau de Engenheiro Eletrônico

Trabalho aprovado. Brasília, 14 de Dezembro de 2023:

---

**Prof. Dr. Eugênio Liborio Fortaleza,**  
**UnB/FT/ENE**  
Orientador

---

**Pesquisador Colaborador. Dr. William  
Humberto Cuellar Sanchez,**  
**UnB/ENM/FT**  
Coorientador

---

**Prof. Dr. Eduardo Stockler Tognetti,**  
**UnB/FT/ENE**  
Examinador Externo

---

**Evandro Leonardo Silva  
Texeira,FGA/UnBE**  
Examinador Interno

---

**Pesquisador colaborador Dr. José Oniram  
de Aquino Limaverde filho,ENM/FT**  
Examinador Externo

Brasília  
2023

# Agradecimentos

Agradecemos ao Dr. Eugênio Libório Fortaleza e a sua equipe por toda a ajuda dada para o desenvolvimento deste trabalho de conclusão de curso, ele tem sido um grande apoio em todos meus estudos realizados no Brasil, sua orientação desempenhou um papel fundamental na realização deste projeto e dos que já realizei junto a sua supervisão, me ajudando no meu desenvolvimento acadêmico. Ao longo dessa jornada, o senhor não apenas me guiou, mas também inspirou e motivou a superar desafios e alcançar meu potencial.

Além de ser um excelente orientador, o senhor é um modelo de excelência acadêmica e profissional. Suas lições não se limitaram apenas ao conteúdo do meu trabalho, mas estenderam-se a valiosas lições de vida que levarei comigo para sempre.

# Resumo

Neste trabalho, apresenta-se um estudo conduzido na área de filtragem, adotando uma abordagem diferenciada que relaciona potências fracionadas em seus parâmetros. O objetivo é obter filtros mais reativos e robustos para anular ruídos brancos. Inicialmente, é realizado um estudo sobre a metodologia CRONE, que tem sido direcionada para a criação de reguladores conhecidos por sua ótima robustez, conforme destacado por Oustalou ([Oustalou; Lanusse, 1993](#)). A partir da definição do regulador, propõe-se um filtro de ordem fracionada, o qual será explorado e testado ao longo deste estudo.

O trabalho começa explicando a obtenção do regulador CRONE para  $m = 0.5$ . Posteriormente, concentra-se na criação de filtros com dois zeros e três polos, utilizando a metodologia fracionada. Em seguida, é desenvolvido um filtro de primeira ordem passa-baixas, com uma atenuação semelhante à de um filtro CRONE previamente projetado. A análise desses parâmetros de atenuação é realizada mediante a introdução do parâmetro de variância no sistema. Posteriormente, essa metodologia é expandida para gerar filtros com valores de potência fracionada variando entre 0 e 1. O objetivo é avaliar qual filtro proporcionaria uma melhor atenuação de ruído e uma resposta mais eficaz.

É importante destacar que todos os resultados apresentados foram validados por meio do uso do software MATLAB.

**Palavras-chave:** Metodologia Crone. Variância. Filtragem. Ganho.

# Abstract

This paper presents a study conducted in the field of filtering, adopting a differentiated approach that relates fractional powers in its parameters. The aim is to obtain more reactive and robust filters to cancel out white noise. Initially, a study is carried out on the CRONE methodology, which has been used to create regulators known for their optimum robustness, as highlighted by Oustalou (Oustalou; Lanusse, 1993). Once the regulator has been defined, a fractional order filter is proposed, which will be explored and tested throughout this study.

The paper begins by explaining how to obtain the CRONE regulator for  $m = 0.5$ . It then focuses on creating filters with two zeros and three poles, using the fractional methodology. Next, a first-order low-pass filter is developed, with an attenuation similar to that of a previously designed CRONE filter. These attenuation parameters are analyzed by introducing the variance parameter into the system. Subsequently, this methodology is expanded to generate filters with fractional power values varying between 0 and 1. The aim is to assess which filter would provide better noise attenuation and a more effective response.

It is important to note that all the results presented were validated using MATLAB software.

**Keywords:** Crone Methodology. Variance. Frequency.

# Lista de figuras

Figura 2.1	Aproximação de uma função utilizando matemática fracionada . . . . .	26
Figura 2.2	Comportamentos dos filtros em relação à suas variâncias. . . . .	27
Figura 2.3	Características do ruído branco (A) Densidade espectral de potência. (B) Função de autocorrelação . . . . .	33
Figura 2.4	Aplicação de um degrau unitário e resposta de frequência de corte de um sinal . . . . .	34
Figura 3.1	Características ideais de respostas dos filtros para uma determinada frequência de corte ( $f_c$ ): (a) Filtro passa-baixas; (b) Filtro passa-altas; (c) Filtro passa-faixa e (d) Filtro rejeita-faixa (notch). . . . .	42
Figura 3.2	Filtro Passa-Baixas RL passivo . . . . .	43
Figura 3.3	Filtro Passa-Baixas RC passivo . . . . .	44
Figura 3.4	Representação da magnitude e fase de um filtro passa baixas de primeira ordem . . . . .	45
Figura 3.5	Comportamento de um filtro de segunda ordem . . . . .	47
Figura 3.6	Comparação entre um filtro de primeira e segunda ordem . . . . .	48
Figura 3.7	Comparação entre um filtro de primeira, segunda e terceira ordem . . . . .	49
Figura 3.8	: Diagrama de bode de um filtro RC de primeira ordem . . . . .	50
Figura 3.9	Respostas de filtros de primeira, segunda, terceira e quarta ordem . . . . .	51
Figura 3.10	Diagrama de bode do Regulador. . . . .	53
Figura 3.11	Representação da magnitude e fase de um Filtro CRONE de primeira geração. . . . .	54
Figura 3.12	Distribuição das frequências em função das restrições do problema . . . . .	57
Figura 3.13	Relação da hachura do diagrama de fase em função das frequências . . . . .	58
Figura 3.14	Relação de magnitude e fase para a transmitância do sistema de cinco polos com cinco zeros . . . . .	61
Figura 3.15	Representação da frequência e fase de acordo com o diagrama de transmitância . . . . .	62
Figura 3.16	Localização do bloco de controle . . . . .	65
Figura 3.17	Localização do bloco de controle . . . . .	65
Figura 4.1	Diagrama de transmitância para o sistema de polos e dois zeros . . . . .	69
Figura 4.2	Diagrama de bode do Filtro CRONE . . . . .	70
Figura 4.3	Comparação da saída Degrau para os sistemas projetados . . . . .	70
Figura 4.4	Representação da função de transferência discreta. . . . .	71
Figura 4.5	Filtragem de um sinal ruidoso . . . . .	71
Figura 4.6	Comparação da filtragem dos filtros CRONE e de Primeira ordem. . . . .	73

Figura 4.7	Comparação da resposta a um degrau unitário de um sistema de terceira e primeira ordem . . . . .	74
Figura 4.8	Diagrama de bode do sistema de terceira e primeira ordem . . . . .	75
Figura 4.9	: Resposta de filtragem dos filtros de terceira e primeira ordem . . . . .	76
Figura 4.10	: Comparação da entrada degrau para os filtros CRONE . . . . .	77
Figura 4.11	: Comparação da fase e magnitude para os filtros CRONE . . . . .	78
Figura 4.12	: Comparação da fase e magnitude para os sistemas de ordem um . . . . .	78
Figura 4.13	: Comparação das saídas ao Degrau . . . . .	79
Figura 4.14	: Comparação da resposta ao degrau para um filtro de primeira Ordem e um filtro CRONE com $m = 0,1$ e mesmo nível de atenuação da variância para um ruído branco de entrada . . . . .	79
Figura 4.15	: Comparação da resposta ao degrau para um filtro de primeira Ordem e um filtro CRONE com $m = 0,5$ e mesmo nível de atenuação da variância para um ruído branco de entrada . . . . .	80
Figura 4.16	: Comparação da resposta ao degrau para um filtro de primeira Ordem e um filtro CRONE com $m = 0,8$ e mesmo nível de atenuação da variância para um ruído branco de entrada . . . . .	80
Figura 4.17	: Comportamento da função temporal . . . . .	83
Figura 4.18	: Comparação da saída degrau para m diferente filtros CRONE . . . . .	85
Figura 4.19	: Comparação da fase e magnitude para os Reguladores CRONE em função do m . . . . .	86
Figura 4.20	: Comparação do Degrau unitário ao redor de $m=0.5$ . . . . .	86
Figura 4.21	: Comparação da fase e magnitude para os Filtros CRONE ao redor de $m=0.5$ . . . . .	87
Figura 4.22	: Variâncias dos filtros ao redor do m escolhido . . . . .	88
Figura 4.23	: Comparação da fase e magnitude para os filtros CRONE ao redor de $m=0.5$ . . . . .	89
Figura 4.24	: Comparação da fase e magnitude para os Reguladores CRONE ao redor de $m=0.5$ . . . . .	89
Figura 4.25	: Comparação da fase e magnitude para os Filtros CRONE ao redor de $m=0.5$ . . . . .	90
Figura 4.26	: Comparação da fase e magnitude para os filtros CRONE ao redor de $m=0.5$ . . . . .	91

## Lista de tabelas

Tabela 2.1	Resumo de alguns trabalhos publicados . . . . .	40
Tabela 3.1	Representação das assintotas de fase e magnitude. . . . .	46
Tabela 3.2	Resultados obtidos para um sistema de 5 polos e 5 zeros. . . . .	60
Tabela 4.1	Resultados obtidos para um sistema de 2 polos e 2 zeros. . . . .	68

## Lista de abreviaturas e siglas

ABNT	Associação Brasileira de Normas Técnicas	14
AEFMMQ	Algoritmo de Estimção da Frequência pelo Método dos Mínimos Quadrados	35
APS	sistema de Pressão e Ar	36
ATP	Alternative Transients Program	34
BS	Controlador Backstepping	38
CCONV	Controlador convencional	36
CRONE	Control with Remnant of One	14
DC	Corrente Contínua	36
DFIG	Gerador de indução de alimentação dupla	38
ECG	Eletrocardiograma	35
FOPID	Controle PID de Ordem Fracionada	37
GMRF	Modelo Markoviano Gaussiano	35
IAE	Índices de erro como erro absoluto integral	36
ISE	Erro quadrático integral	36
LMS	Least Mean Square algorithm	34
MMQ	Método dos mínimos quadrados	34
PID	Proporcional-Integral-Derivativo	35
UnB	Universidade de Brasília	14
Var(x)	Variância de $X$	27
VarCr	Variância CRONE	31
WECS	Sistema de Conversão de Energia Eólica	38

# Sumário

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>14</b>
1.1	Contextualização	14
1.2	Formulação do problema	15
1.3	Objetivo Geral	16
1.4	Objetivos Específicos	16
1.5	Justificativa	16
1.6	Metodologia	17
1.7	Organização do Documento	18
<b>2</b>	<b>FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA</b>	<b>19</b>
2.1	Aplicação de Funções especiais para o cálculo fracionado	19
2.2	Fundamentos do cálculo Fracionado	20
2.2.1	Função Gamma	20
2.2.2	Função Mittag-Leffler	20
2.2.3	Generalização da derivada e integral	21
2.3	Transformada de Laplace Fracionada	25
2.4	Variância para um filtro	26
2.5	Ruido Branco	32
2.6	Tempo de resposta	32
2.7	Estado da Arte	34
<b>3</b>	<b>FILTRO CRONE</b>	<b>41</b>
3.1	Filtros Analógicos	41
3.2	Tipos de filtros	41
3.2.1	Filtro passa-baixa passivo	43
3.2.2	Filtro passa baixas de segunda ordem	45
3.3	Análise de diagramas de Bode	48
3.4	Primeira estratégia de comando CRONE	52
3.4.1	Determinação de $m$	56
3.4.2	Determinação das frequências $\omega_b$ e $\omega_h$	57
3.4.3	Determinação do termo $C_0$	57
3.4.4	Determinando os termos $\eta$ e $\alpha$	58
3.4.5	Calcular as frequências em função dos parâmetros $\eta$ e $\alpha$ dos zeros e polos	59
3.5	Projeto do Filtro CRONE	62
<b>4</b>	<b>ANÁLISE DE RESULTADOS</b>	<b>67</b>
4.1	Exemplos de filtros fracionados partindo da metodologia CRONE	67
4.2	Análise do Comportamento Geral da Metodologia CRONE	75
4.3	Comparação do Filtro CRONE em função das variâncias	81
<b>5</b>	<b>CONCLUSÕES</b>	<b>92</b>
	<b>Referências</b>	<b>94</b>

<b>Apêndices</b>	<b>98</b>
<b>Apêndice A Códigos de programação</b>	<b>99</b>
A.1 Projeto do Controlador com Realimentação de Estados	99
A.2 Comparação da resposta do Filtro Crone com o modelo fracionario	101
A.3 Obtenção dos filtros com parâmetro m Diferente	102

# 1 INTRODUÇÃO

O processo de filtragem é comumente utilizado em diferentes aplicações como as comunicações, imagens, processamento de sinais entre outros. Existem diversas técnicas de filtragem aplicadas na eletrônica digital e analógica, sendo estas utilizadas com o intuito de melhorar a leitura de determinada informação. Por esse motivo se faz necessário a análise de ruídos de diferente natureza como o ruído Branco, Gaussiano ou ruído Colorido, e se avalia desta forma a relação de variância entre o sinal de entrada e o sinal de saída.

Este trabalho apresenta uma abordagem analítica de como proceder com a filtragem considerando os ganhos de fase e magnitude, utilizando a metodologia CRONE (Control with Remnant of One) com o objetivo de manter uma variação num filtro de primeira ordem diferente a 20dB/década como ocorre tradicionalmente, o que faria uma equivalência a uma transformada de Laplace de ordem fracionária menor que um, isso permite que o sistema seja muito mais reativo frente a um sinal de baixa frequência, mantendo o nível de atenuação de um sinal de medida similar ao de um de primeira ordem.

Neste sentido são escolhidas duas métricas para avaliar a preformação dos filtros. A primeira é o tempo de resposta à uma entrada degrau, tempo que o filtro alcança um percentual do seu valor final de maneira a representar a capacidade do filtro de seguir um sinal predominantemente de baixa frequência. A segunda é a relação entre variância do sinal de saída e o sinal de entrada. Esta grandeza representa a variância do sinal de saída do filtro quando submetido em sua entrada um ruído branco discretizado com média nula e variância igual a 1(um). Esta segunda métrica será chamada ao longo do manuscrito simplesmente de relação entre a variância de entrada e saída e têm como objetivo medir a capacidade do filtro de atenuar um ruído padrão

Neste trabalho se analisa um filtro com três polos e dois zeros, se faz a discretização em função de um tempo de amostragem, se encontra de maneira teórica a relação entre sua variância de entrada e saída utilizando a metodologia apresentada em (Muñoz, 2017), seguidamente se projeta um filtro de primeira ordem com a mesma relação entre a variância de entrada e saída encontrada para o regulador CRONE e se compara os resultados obtidos numericamente, obtendo resultados semelhantes aos obtidos com filtros de ordem superior em relação entre a variância de entrada e saída, além disso, os filtros de de ordem fracionada apresentaram menor tempo de resposta ao degrau mostrando sua capacidade de acompanhar melhor o sinal medido para o mesmo nível de atenuação de ruído.

## 1.1 Contextualização

Desta maneira, o presente trabalho focou nos filtros de ordem fracionária, especialmente o filtro CRONE, representam uma abordagem inovadora e altamente eficiente na filtragem de sinais. Ao contrário dos filtros de ordem inteira convencionais, os filtros de ordem fracionária oferecem uma capacidade adaptável e precisa para lidar com diferentes frequências presentes em um sinal. Por essa razão, este trabalho propõe uma pesquisa na área de filtragem, utilizando a metodologia CRONE, com o objetivo de avaliar sua eficiência em diferentes potências fracionárias.

Pretende-se investigar se a redução da ordem da função de transferência resulta em melhoria ou piora desempenho do filtro. Além disso, será realizada uma análise da relação entre a variância de entrada e saída para desenvolver filtros de primeira ordem com características semelhantes.

Os testes serão conduzidos utilizando o MATLAB, focando especificamente no caso de projeto do filtro CRONE com dois zeros e três polos e banda de atenuação de uma década. Este estudo visa destacar a importância da filtragem fracionada e da consideração a relação entre a variância de entrada e saída do sistema para aprimorar a eficácia dos filtros considerando uma arquitetura relativamente simples e com limitado custo computacional.

## 1.2 Formulação do problema

A necessidade de processar sinais em um ambiente ruidoso é uma necessidade constante em diversas áreas como engenharia, ciência de dados, telecomunicações e processamento de sinais e imagens. Sinais contaminados por ruído representam um desafio significativo na extração de informações valiosas. A aplicação de filtros é uma estratégia fundamental para atenuar ou remover o ruído, garantindo a qualidade e a confiabilidade dos dados processados.

Uma distinção crucial entre os filtros de primeira ordem e os de ordem superior reside na capacidade de atenuar diferentes frequências. À medida que a ordem do filtro aumenta, observa-se uma notável convergência em direção ao comportamento ideal do filtro. Isso é particularmente evidente na inclinação da transição entre as bandas de passagem e rejeição de um filtro passa-baixas, a qual se torna proporcional à ordem do filtro. Em outras palavras, à medida que a ordem aumenta, a resposta do filtro melhora em relação a atenuação de frequências e se aproxima mais do comportamento ideal, conforme discutido por Fontana em seu trabalho sobre sistemas (Fontana *et al.*, 2019).

Entretanto, em relação à rapidez de reação na resposta a um sinal degrau, é observado que os filtros de ordem superior se tornam mais lentos em comparação com um sistema de primeira ordem, isso é, eles demoram mais para chegar até o ganho estático. Este fenômeno será minuciosamente investigado ao longo do desenvolvimento deste trabalho, sendo confrontado através da análise de filtros de ordem fracionada.

Os filtros de primeira ordem, conforme observado em estudos anteriores (Zumbahlen, 2019), apresentam uma banda de transição mais ampla em comparação com os de ordens superiores, impactando significativamente a seletividade do filtro e tornando-os menos eficazes na atenuação de frequências mais baixas. No entanto, sua aplicabilidade é notável em circuitos nos quais uma alta seletividade de frequências não é exigida ou em projetos que demandam uma redução de custos, dado o uso econômico de poucos componentes (Lopes, 2018).

Este trabalho introduz uma metodologia inovadora, demonstrando que filtros de

ordem superior, especialmente quando projetados com uma ordem fracionada, podem superar em velocidade os filtros de primeira ordem em termos de resposta. A relação entre a variância de entrada e saída emerge como um elemento crucial na determinação da eficácia da filtragem, possibilitando o ajuste da sensibilidade do filtro à variação do ruído. Esse ajuste influencia diretamente a capacidade do filtro em preservar as características do sinal de interesse e suprimir o ruído de maneira eficiente.

### 1.3 Objetivo Geral

Analisar a melhora da eficiência no projeto de filtros através da abordagem CRONE, ao incorporar a variância como parâmetro essencial. Este desenvolvimento contemplará a ordem dos filtros e sua capacidade de filtragem, com o objetivo específico de identificar um filtro CRONE que, mantendo um nível equivalente de atenuação de ruído, alcança uma resposta degrau mais rápida em comparação com um filtro de primeira ordem com a mesma relação de atenuação entre a variância de entrada e saída.

### 1.4 Objetivos Específicos

1. Investigar como aplicar a metodologia de relação entre a variância de entrada e saída para o projeto de filtros utilizando a metodologia CRONE, proporcionando uma base sólida para o projeto de filtros com características conhecidas objetivando em manter a variância para diferentes ordens como o mínimo de variação possível;
2. Avaliar o impacto da ordem dos filtros no desempenho, analisando complexidade computacional e eficácia de filtragem, com o intuito de otimizar sua resposta para aplicações específicas;
3. Criar algoritmos eficientes e flexíveis para o projeto de filtros levando em consideração as variâncias conhecidas, de modo a permitir uma adaptação fácil a diferentes requisitos e condições;
4. Investigar as diferenças e os benefícios proporcionados pelos filtros CRONE em comparação com métodos tradicionais, considerando aspectos como estabilidade, resposta transitória e capacidade de adaptação a diferentes condições de entrada;
5. Comparar a resposta de filtros de primeira ordem obtidos analisando a relação entre a variância de entrada e saída a partir dos filtros CRONE e comparar sua resposta;
6. Comparar a performance dos filtros CRONE quando se tem variação do ordem fracionada  $m$  entre 0 e 1;

### 1.5 Justificativa

Durante a realização do trabalho de doutorado, conforme descrito em (Muñoz, 2017), foi identificado um desafio significativo. Ao projetar filtros de ordem superior com polos

idênticos e a mesma resposta ao degrau, foi percebido uma deterioração na resposta desses filtros, tornando-se mais lentos. Isso conduziu à adoção de filtros de primeira ordem, mantendo a variância do filtro de ordem superior, como uma estratégia para aprimorar a eficácia da filtragem.

Diante dessa problemática, procurou-se uma abordagem alternativa, culminando na exploração de filtros de ordem fracionada, pois sistemas de ordem fracionada para realizar tarefas na área de controle são notáveis por sua capacidade adaptativa diante das diversas frequências presentes em um sinal, conforme discutido por Oustaloup (Oustaloup; Lanusse, 1993).

Sendo a adaptabilidade dessa abordagem crucial em cenários nos quais é necessário analisar sinais complexos e não lineares. Desta forma, pretende-se utilizar as vantagens dos sistemas de ordem fracionada para projetar filtros, com o objetivo de encontrar resultando na filtragem de sinais que possam ser mais precisos e seletivos.

Este trabalho pretende explorar em detalhes a importância da filtragem fracionada, quando se incorpora o uso de variâncias para seu projeto, de forma que possa ser feita uma relação entre a variância de entrada e saída para sistemas de primeira ordem em função da de resposta a uma entrada degrau quando a ordem do filtro fracionado varia entre 0 e 1.

## 1.6 Metodologia

Para o desenvolvimento deste projeto foi utilizada a seguinte metodologia:

1. Definição dos Parâmetros iniciais de um filtro (Frequência de corte, atenuação) e geração da função de transferência;
2. Implementação de um regulador CRONE com fase constante tendo dois zeros e três polos, e um valor de  $m$  definido, que é a ordem fracionada do filtro;
3. Cálculo da Variância do Filtro, que relaciona uma medida da dispersão dos valores do sinal filtrado;
4. Geração de um filtro de primeira ordem partindo da variância do Regulador CRONE, conservando a relação entre a variância de entrada e saída no caso de um ruído branco, mediante métodos matemáticos e algoritmos que permitam a decomposição do filtro de ordem superior em filtros de ordem unitário;
5. Validação do problema mediante realização de testes que permitam comparar as respostas dos filtros obtidos, avaliando sua reação frente ao ruído e a capacidade de resposta.

## 1.7 Organização do Documento

O trabalho proposto está estruturado em cinco capítulos, abrangendo a introdução, fundamentação teórica, análise dos filtros, análise de resultados e conclusões.

No [Capítulo 1](#), são apresentadas informações relevantes, incluindo uma introdução, contextualização, objetivos, justificativa, metodologia e organização do documento.

O [Capítulo 2](#) apresenta uma revisão bibliográfica considerando a matemática relativa ao sistema de ordem fracionada e se apresenta um exemplos de derivação, integração e cálculo de transformada de Laplace de potência fracionada. Além disso, apresenta a definição da variância e a aplicação da variância no sistema que está sendo estudado neste trabalho. Também inclui a definição de ruído branco, pois ele foi considerado para realizar os testes de simulação. Por fim, apresenta um estudo do estado da arte, mostrando algumas pesquisas relevantes realizadas por outros autores e explicando como elas se encaixam no estudo presente.

No [Capítulo 3](#) se realiza uma apresentação detalhada da teoria de filtros, passando por filtros de primeira, segunda e terceira ordem passa-baixas. Em seguida, explica a metodologia CRONE e apresenta de maneira didática o método para o projeto de um filtro CRONE, partindo do estudo do regulador CRONE.

O [Capítulo 4](#) aborda a análise de resultados, onde é realizada uma comparação da resposta do filtro CRONE para uma entrada degrau. São gerados filtros com dois zeros e três polos, os quais são comparados com um filtro equivalente de primeira ordem onde ser analisa a relação entre a variância de entrada e saída. Além disso, é apresentado o comportamento dos filtros CRONE com potência fracionada variando entre 0 e 1.

Finalmente, no [Capítulo 5](#), são apresentadas as conclusões derivadas do desenvolvimento deste trabalho, consolidando as principais contribuições obtidas ao longo da pesquisa

## 2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo, apresentam-se os fundamentos matemáticos necessários relativos a sistemas de ordem fracionada. São analisadas a derivada e a integral fracionadas, e é apresentada a definição da transformada de Laplace fracionada. Esta última abordagem é uma generalização da teoria de Laplace, aplicando os conceitos da matemática fracionada para derivadas e integrais. Além disso, é mostrado um exemplo de como calcular uma transformada de Laplace fracionada. Todos esses conceitos ajudam a compreender como realizar o cálculo do Filtro CRONE, que será apresentado no [Capítulo 3](#) deste manuscrito.

Em seguida, é apresentada a definição da variância de forma geral e realizada uma especificação pontual para analisar a variância da função de transferência de um sistema de dois zeros e três polos, semelhante ao obtido quando o filtro é gerado pela metodologia CRONE gerando assim a função de variância que será utilizada no , posteriormente é mostrada a definição geral do ruído branco pois ele é utilizado nos testes de simulação realizados neste estudo.

Finalmente se apresenta uma revisão bibliográfica de estudos realizados por vários autores sobre filtragem e controle. O objetivo é identificar as diferentes áreas do conhecimento que utilizam a filtragem para aprimorar a leitura de dados, além de destacar a importância dos sistemas fracionários na aplicação em controle. Na área de controle a teoria de sistemas fracionários tem se desenvolvido significativamente e conta com uma grande aceitação. Assim, em função da definição do regulador CRONE, será projetado o filtro CRONE, conforme se apresenta no [3](#).

### 2.1 Aplicação de Funções especiais para o cálculo fracionado

Para desenvolver a teoria do regulador CRONE que deu origem ao filtro CRONE é necessário realizar uma revisão del cálculo fracionado, que é um ramo da matemática que estuda a possibilidade de usar números reais ou complexo como ordem de operadores da derivada ([Podlubny, 1998](#)).

A notação que representa a derivada e integral fracionada é notada como se apresenta na equações [2.1](#) e [2.2](#) ([Podlubny, 1998](#)).

$${}_b D_t^\alpha g(t) \tag{2.1}$$

$${}_b D_t^{-\alpha} g(t) \tag{2.2}$$

sendo:

- $b$  condição inicial da derivada ou integral,

- $t$  variável em função da qual esta-se operando,
- $\alpha$  e  $-\alpha$  ordem da derivada e integral respectivamente, os quais são números não inteiros,
- $g(t)$  função objetivo que será integrada ou derivada.

Para realizar a análise as condições iniciais são assumidas zero, por esse motivo é omitido o termo  $b$  nas demonstrações.

## 2.2 Fundamentos do cálculo Fracionado

Com o objetivo de estudar a teoria que gera a filtragem fracionada, foram utilizadas duas funções básicas do cálculo fracionado que são encontradas frequentemente, estas são a função Gamma e a função Mittag-Leffler.

### 2.2.1 Função Gamma

Na matemática a função Euler-Gamma é representada e simbolizada com a letra grega  $\Gamma$  e é uma função especial da teoria dos números e da análise complexa. Ela é uma generalização da noção de fatorial para números reais e complexos. Sua representação integral é mostrada na equação 2.3 (Podlubny, 1998).

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \quad (2.3)$$

onde:

- $b$  Ponto onde a função é avaliada,
- $t$  variável da integração.

Esta função tem a particularidade que para qualquer número complexo ou real, positivo, converge absolutamente. É utilizada no cálculo fracionado para a definição da derivada e a integral fracionada, também tem aplicações na estatística e a probabilidade para realizar cálculos combinatórios.

### 2.2.2 Função Mittag-Leffler

Para a solução de equações diferenciais geralmente é aplicado o método de solução homogênea e solução particular, onde a última é a função exponencial na maior parte dos casos, a função de Mittag-Leffler faz as vezes de função exponencial, mas generalizando a ordem fracionada, ela é definida como mostra a equação 2.4 (Podlubny, 1998).

$$E_{\alpha} = \sum_0^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \quad (2.4)$$

onde:

- $z$  valor onde a função será avaliada,
- $\alpha$  ordem fracionada da função.

### 2.2.3 Generalização da derivada e integral

A integral de uma função  $f(x)$  pode ser representada como mostra a equação 2.5 (Xu; Li, 2021)

$$D^{-1}f(x) = \int_0^x f(t)dt \quad (2.5)$$

no caso da integração dupla esta pode ser representada como mostra a equação 2.6

$$D^{-2}f(x) = \int_0^x \int_0^{t2} f(t1)dt1dt2 \quad (2.6)$$

Mediante a separação de variáveis e manipulação matemática a integração pode ser representada como mostra a equação 2.7

$$D^{-2}f(x) = \int_0^x f(t)(x-t)dt \quad (2.7)$$

De forma geral essa equação pode ser apresentada como mostra a equação 2.8

$$D^{-n}f(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x f(t)(x-t)^{n-1}dt \quad (2.8)$$

Utilizando a equação 2.8 e considerando a ordem inteira da derivada, onde esse parâmetro é substituído pelo número real negativo  $\alpha$  e o fatorial é transformado em uma função gama, obtém-se a forma generalizada da integral para qualquer ordem que corresponda a um valor real negativo, conforme mostra a equação 2.9 (Xu; Li, 2021)

$$D^{-\alpha}f(x) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha-1}}dt \quad (2.9)$$

Para generalizar a derivada fracionada, é aplicada inicialmente a integral fracionada e posteriormente se faz uma derivação de ordem inteira, esta relação é apresentada na equação 2.10

$$D^x = D^n D^{\alpha-n} f(x) \quad (2.10)$$

sendo  $n$  a parte inteira de  $\alpha + 1$

Assim a derivada fracionada pode ser definida como mostra a equação 2.11

$$D^n f(x) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \frac{D^m}{D_t^m} \int_0^x f(t)(x-t)^{m+\alpha-1}dt \quad (2.11)$$

onde:

- $\alpha$  ordem fracionada
- $f(x)$  função objetivo
- $m$ : ordem da derivada inteira se calcula com base na inequação  $m - 1 < \alpha < m$

**Exemplo 2.1.** Para exemplificar como é realizado o cálculo de funções fracionadas, se apresenta aqui um exemplo realizado com a função  $F(x) = x^2$ , onde se mostra o cálculo da derivação e integração.

Para calcular a derivada da integral em relação a  $x$ , primeiro é calculada a integral:

$$\int_0^x (x-t)^{0.5} t^2 dt$$

Pode-se resolver essa integral usando integração por partes. Sendo:

$$u = t^2$$

$$dv = (x-t)^{0.5} dt$$

Então, se tem:

$$du = 2t dt$$

$$v = \frac{2}{3}(x-t)^{1.5}$$

Aplicando a fórmula de integração por partes:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Obtem-se:

$$\int_0^x (x-t)^{0.5} t^2 dt = \frac{2}{3} t^2 (x-t)^{1.5} \Big|_0^x - \frac{2}{3} \int_0^x (x-t)^{1.5} t dt$$

$$= \frac{2}{3} x^2 (x-x)^{1.5} - \frac{2}{3} \int_0^x (x-t)^{1.5} t dt$$

$$= 0 - \frac{2}{3} \int_0^x (x-t)^{1.5} t dt$$

Agora, precisa-se calcular esta última integral.

Para calcular a última integral, se tem:

$$\int_0^x (x-t)^{1.5} t dt$$

Pode-se resolver essa integral usando integração por partes novamente. Definindo:

$$u = t$$

$$dv = (x - t)^{1.5} dt$$

Então:

$$du = dt$$

$$v = \frac{2}{5}(x - t)^{2.5}$$

Aplicando a fórmula de integração por partes novamente:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Obtem-se:

$$\begin{aligned} \int_0^x (x - t)^{1.5} t dt &= \frac{2}{5} t (x - t)^{2.5} \Big|_0^x - \frac{2}{5} \int_0^x (x - t)^{2.5} dt \\ &= \frac{2}{5} x (x - x)^{2.5} - \frac{2}{5} \int_0^x (x - t)^{2.5} dt \\ &= 0 - \frac{2}{5} \int_0^x (x - t)^{2.5} dt \end{aligned}$$

Agora, o cálculo da integral.

$$\int_0^x (x - t)^{2.5} dt$$

pode-se resolver essa integral usando uma substituição. É definido ( $u = x - t$ ), então ( $du = -dt$ ). Quando ( $t = 0$ ), ( $u = x$ ), e quando ( $t = x$ ), ( $u = 0$ ). Então, a integral se torna:

$$\begin{aligned} & - \int_x^0 u^{2.5} du \\ &= \frac{-1}{3.5} u^{3.5} \Big|_x^0 \\ &= \frac{-1}{3.5} (0^{3.5} - x^{3.5}) \end{aligned}$$

$$= \frac{x^{3.5}}{3.5}$$

Agora que foi calculada a integral, pode-se substituir de volta na expressão original:

$$\frac{2}{5}x(x-x)^{2.5} - \frac{2}{5} \int_0^x (x-t)^{2.5} dt$$

$$= \frac{2}{5}x(0)^{2.5} - \frac{2}{5} \frac{x^{3.5}}{3.5}$$

$$= -\frac{2}{5} \frac{x^{3.5}}{3.5}$$

Substituindo na integral original, é encontrado:

$$\int_0^x (x-t)^{0.5} t^2 dt = 0 - \frac{2}{3} \times -\frac{2}{5} \frac{x^{3.5}}{3.5}$$

$$= \frac{4}{15} \frac{x^{3.5}}{3.5}$$

Agora que foi calculada a integral, pode-se substituir na derivada fracionária de ordem 0,5:

$$D^{0.5} f(x) = \frac{1}{\Gamma(0.5)} \frac{d}{dx} \left( \frac{4}{15} \frac{x^{3.5}}{3.5} \right)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(0.5)} \frac{4}{15} \frac{d}{dx} \left( \frac{x^{3.5}}{3.5} \right)$$

$$= \frac{4}{15\Gamma(0.5)} \frac{3.5x^{2.5}}{3.5}$$

$$= \frac{4}{15\Gamma(0.5)} x^{2.5}$$

Aqui,  $\Gamma(0.5)$  é a função gama de 0,5. Este seria o resultado da derivada fracionária de ordem 0,5 da função  $f(x) = x^2$ .

## 2.3 Transformada de Laplace Fracionada

A transformada de Laplace é uma importante ferramenta matemática usada na engenharia, física e outras áreas para analisar sistemas lineares invariantes no tempo. Ela transforma uma função de uma variável (geralmente uma função do tempo) em uma função de uma variável complexa (geralmente uma função da frequência complexa).

A transformada de Laplace de uma função  $f(t)$  é denotada por  $\mathcal{L}\{f(t)\}$  ou  $F(s)$ , onde  $s$  é uma variável complexa. A transformada de Laplace é definida pela integral:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

onde  $s$  é um número complexo da forma  $s = \sigma + j\omega$  e  $\sigma$  é a parte real de  $s$  e  $\omega$  é a parte imaginária de  $s$ . Esta integral representa a transformada de Laplace da função  $f(t)$  em relação a  $t$ , resultando na função  $F(s)$  em relação a  $s$ , a qual pode ser adaptada para ser transformada de forma fracionária, isso sendo possível mediante a definição de integral e derivada fracionada e representada como mostra a equação 2.33

$$D^n f(x) = S^\alpha F(S). \quad (2.33)$$

Para uma transformação fracionada de uma função simples.

**Exemplo 2.2.** A seguir se apresenta um exemplo de como é aplicado o cálculo de uma transformada de Laplace fracionada, pois este tipo de aproximação é realizada utilizando metodologia apresentada neste trabalho. Suponha que queremos calcular a transformada de Laplace fracionada da função  $f(t) = e^{at}$ , onde  $a$  é uma constante.

A transformada de Laplace fracionada de  $f(t)$  é dada por:

$$\mathcal{L}_t^\alpha \{f(t)\} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} f(s) ds$$

Calculado  $\mathcal{L}_t^{0.5}\{e^{at}\}$ , ou seja, a transformada de Laplace fracionada de  $e^{at}$  com  $\alpha = 0.5$ . Substituindo  $f(t) = e^{at}$  na fórmula da transformada de Laplace fracionada, é obtido:

$$\mathcal{L}_t^{0.5}\{e^{at}\} = \frac{1}{\Gamma(1-0.5)} \int_0^t (t-s)^{-0.5} e^{as} ds$$

Simplificando, se tem:

$$\mathcal{L}_t^{0.5}\{e^{at}\} = \frac{1}{\Gamma(0.5)} \int_0^t (t-s)^{-0.5} e^{as} ds$$

A qual pode ser resolvida utilizando o método do trapézio, onde se encontra a seguinte resposta:

$$\mathcal{L}_t^{0.5}\{e^{at}\} \approx \frac{1}{\Gamma(0.5)} \frac{t}{2} [t^{-0.5} + t^{-0.5}e^{at}]$$

Assumindo que  $f(t) = e^{0.5t}$  seja a função que deseja ser aproximada, substituindo ela na expressão obtida anteriormente e comparando com a função original, é observado na figura 2.2 que o comportamento gráfico é aproximado, isso mostra que os cálculos feitos com a matemática fracionada são equivalentes aos realizados com a matemática inteira.

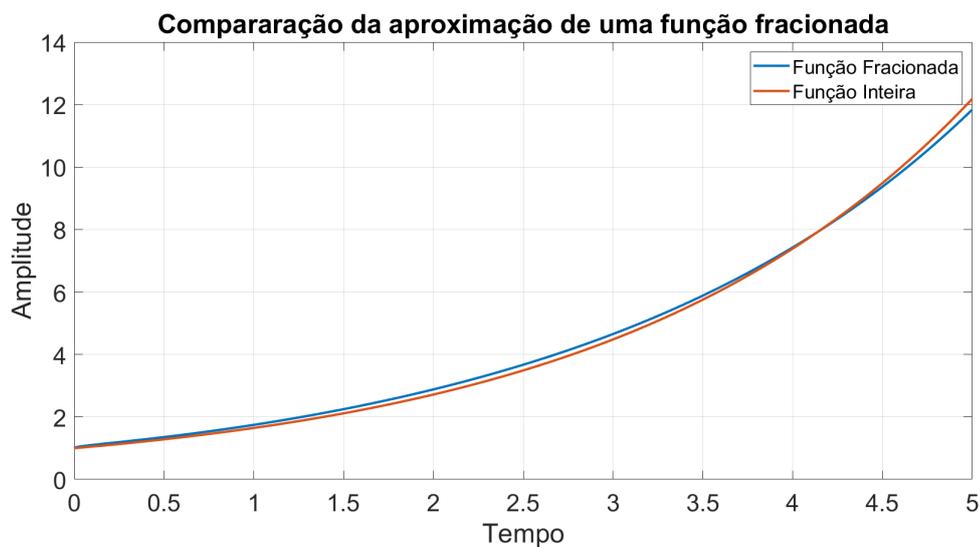


Figura 2.1 – Aproximação de uma função utilizando matemática fracionada

Fonte: próprio

## 2.4 Variância para um filtro

A variância de um sistema é uma medida estatística que indica a dispersão dos valores do sinal ou de uma distribuição de probabilidade. No contexto de filtragem de sinais, como no processamento de sinais de áudio ou imagens, a variância pode ser uma medida importante para avaliar a capacidade de um filtro em atenuar ruídos de determinadas frequências (Oppenheim, 1999).

Quando um sinal é contaminado com ruído, a variância desse sinal aumenta devido à adição do ruído, o que pode prejudicar a qualidade da informação que o sinal carrega. Ao aplicar um filtro, o objetivo é reduzir a variância do sinal, o que significa reduzir a dispersão dos valores do sinal em torno da sua média (Proakis, 2007). Esta afirmação pode ser verificada na figura 2.2 onde se apresentam as saídas de filtros sujeitos ao mesmo ruído branco de entrada. Um com uma variância de 0,2 e outro com uma variância 0.92, sendo que o filtro que tem uma variância menor consegue rejeitar de uma forma mais forte sinais ruidosos.

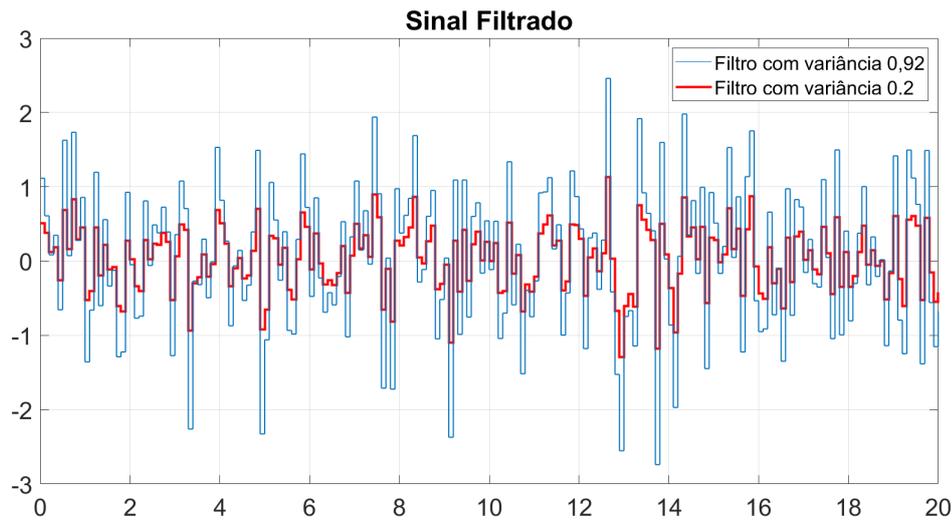


Figura 2.2 – Comportamentos dos filtros em relação à suas variâncias.

Fonte: próprio

Se um filtro tem a capacidade de reduzir a variância em determinadas frequências, isso significa que ele pode atenuar o ruído presente nessas frequências, tornando o sinal resultante mais limpo e mais próximo do sinal original. Portanto, relação da variância entre o sinal e entrada e o sinal de saída de um filtro é importante porque fornece uma medida quantitativa da capacidade do filtro em atenuar ruídos específicos, ajudando a avaliar sua eficácia na preservação da qualidade do sinal (Mitra, 2001).

Avaliar o desempenho de uma malha por meio da análise da variância é um conceito que vem ganhando destaque nos últimos anos (Barbosa *et al.*, 2011). Esta seção aborda a teoria da variância aplicada a filtros, explorando sua definição e sua aplicação nesse contexto.

A variância de uma variável aleatória  $X$  é uma medida de dispersão que indica o quão distantes os valores da variável estão da média. Matematicamente, ela é definida como a média aritmética dos quadrados dos desvios dos valores de  $X$  em relação à média dos próprios valores de  $X$ . Em uma população de tamanho  $N$ , a variância de uma variável aleatória é denotada por  $Var(x)$  (Correa, 2003) e mostrada pela equação 2.35

$$Var(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \mu)^2 \quad (2.34)$$

Onde  $\mu$  é a média da variável  $X$ .

É importante notar que a variância mede a distância entorno da média e não em torno de outra medida resumo, a variância apresenta as seguintes propriedades:

- $Var(K) = 0$ ,
- $Var(kX) = k^2Var(X)$ ,

- $Var(X + k) = Var(X)$ ,
- $Var(XY) = Var(X) + Var(Y)$ ,
- $E(XY) = E(X)E(Y)$ ,
- $E(XY) = E(X)E(Y)$ ,

Neste trabalho será abordado como critério para avaliar a atenuação da variância um teste padrão. Este teste consiste em introduzir em cada filtro um ruído com variância igual a 1 (um) e observar a variância do sinal de saída.

O cálculo de variância é fundamentado como foi apresentado no trabalho desenvolvido pelo Miguel (Muñoz, 2017), estas informações podem ser encontradas no capítulo 3 e no apêndice A3 desse trabalho de doutorado, onde se mostra que para calcular a relação de variância de um sistema de segunda ordem, é usada a função de transferência mostrada na equação 2.35

$$G(S) = \frac{K}{S^2 + aS + b} \quad (2.35)$$

com a,b e K sendo parâmetros de um filtro Butterworth de segunda ordem, o qual é comparado com um sistema de segunda ordem, como apresenta a equação 2.36

$$G(S) = \frac{\omega^2}{S^2 + 2\zeta\omega S + \omega^2} \quad (2.36)$$

Assumindo para sistema um amortecimento  $\zeta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ . A função de transferência analisada é representada na equação 2.37:

$$G(S) = \frac{K}{S^2 + 2\sqrt{2b}S + b} \quad (2.37)$$

Foram encontradas as constantes K e b, para que o sistema consiga atingir uma variância desejada. Para tal fim, será discretizado o sistema e representado como mostra a equação 2.38, e como foi desenvolvido no apêndice A3

$$G(z) = \frac{y(z)}{u(z)} = \frac{z^2 \frac{d}{f}}{z^2 - \frac{g}{f}z + \frac{h}{f}} = \frac{Kz^2}{(z + \alpha)(z + \beta)} \quad (2.38)$$

Onde: d,f,g e h são os parâmetros correspondentes ao sistema discretizado para um tempo de amostragem T, definidos os parâmetros como:

- $d = KT^2$ ,
- $f = bT^2 + aT + 1$ ,
- $g = 2 + aT$ ,
- $h = 1$ ,

Desta forma após manipulação matemática e aplicação das propriedades da variância, foi encontrada a função geral que representa a variância do sistema de segunda ordem como mostra a equação 2.39, sendo  $\alpha'$  e  $\beta'$  os polos do sistema discreto.

$$Var [y(n)] = \left(\frac{d}{f}\right)^2 \frac{1}{(\alpha' - \beta')^2} \left(\frac{1}{1 - (\alpha'^2 - \beta'^2)}\right) \sigma^2 \quad (2.39)$$

A teoria apresentada aqui, desenvolvida por (Muñoz, 2017), foi adaptada para calcular as variâncias das funções de transferência definidas na metodologia CRONE estudada neste documento. A modificação é necessária devido ao fato de que, ao lidar com funções de potência inteiras, estas possuem polos e zeros complexos conjugados atendendo os princípios de estabilidade para estes sistemas, os quais são resolvidos de acordo com a equação 2.39. No caso atual, o filtro CRONE possui polos e zeros reais, o que torna a abordagem consideravelmente mais simples e simplifica bastante os cálculos.

Analisando um sistema de dois zeros e três polos que apresenta o mesmo formato no domínio de Laplace descrito por um filtro CRONE:

$$H(s) = K \frac{(s + a)(s + b)}{(s + c)(s + d)(s + e)}$$

Sendo  $a$  e  $b$  o zeros, e  $c, d$  e  $e$  os polos do filtro CRONE e  $K$  uma constante de ganho, para garantir que o filtro apresente ganho estático unitário, esse sistema pode ser representado como três funções de transferência de primeira ordem em cascata

$$H(s) = H_1(s)H_2(s)H_3(s)$$

Discretizando estes sistemas, usando o método de Tustin que consiste em substituir  $s = \left(\frac{2}{T}\right) \left(\frac{z-1}{z+1}\right)$ , com um tempo de amostragem  $T$ , o qual é escolhido de acordo com o comportamento do sistema.

O procedimento de cálculo consiste em dividir o sistema de ordem superior em sistemas de funções de primeira ordem e assim discretizar elas uma a uma, desta forma é calculada a variância de forma individual para cada função de primeira ordem a relação entre a variância de entrada e saída, e assim discretizando cada uma das funções de transferência  $H_1, H_2, H_3$  vai se ter:

Para:

$$H_1(s) = K \frac{(s + a)}{(s + c)}$$

A função de transferência discretizada é apresentada na equação 2.40:

$$H_1(z) = K \frac{(2aT + 1) - z(1 + aT)}{(2cT - 1) + z(1 + 2cT)} \quad (2.40)$$

Da mesma forma discretizando a segunda função

$$H_2(s) = \frac{(s + b)}{(s + d)}$$

Obtendo assim a função de transferência discreta mostrada na equação 2.41:

$$H_2(z) = \frac{(2bT + 1) - z(1 + bT)}{(2dT - 1) + z(1 + 2dT)} \quad (2.41)$$

Sendo a terceira função de transferência representada como:

$$H_3(s) = \frac{1}{(s + e)}$$

Gerando a função de transferência discreta mostrada na equação 2.42:

$$H_3(z) = \frac{T(z + 1)}{(Te - 2) + z(Te + 2)} \quad (2.42)$$

As equações 2.40, 2.41 e 2.42 podem ser representadas de uma forma mais simples, se mostra a seguir:

$$H_1(z) = K_1 \frac{n1 - z}{d1 + z}$$

$$H_2(z) = K_2 \frac{n2 - z}{d2 + z}$$

$$H_3(z) = K_3 \frac{1 + z}{d3 + z}$$

Onde:

- $n1 = (2aT + 1)/(1 + aT)$
- $d1 = (2cT - 1)/(1 + 2cT)$
- $K_1 = K(1 + 2cT)/(1 + aT)$
- $n2 = (2bT + 1)/(1 + bT)$
- $d2 = (2dT - 1)/(1 + 2dT)$
- $K_2 = (1 + 2dT)/(1 + bT)$
- $d3 = (Te - 2)/(Te + 2)$
- $K_3 = T(Te + 2)$

Com as funções de transferência discretizadas, e aplicando as propriedades da variância descritas anteriormente e mediante manipulação matemática são apresentadas as relações de variância para cada função de primeira ordem, conforme mostram as equações 2.43, 2.44 e 2.45

$$Var_{H1} = \frac{1 + n_1^2}{1 + d_1^2} \quad (2.43)$$

$$Var_{H2} = \frac{1 + n_2^2}{1 + d_2^2} \quad (2.44)$$

$$Var_{H3} = \frac{1}{1 + d_3^2} \quad (2.45)$$

Para o cálculo da variância proposto neste trabalho, o ganho, mediante as propriedades da variância, é representado como  $G \approx (K_1 \times K_2 \times K_3)^2$ . Dessa forma, foi feita uma análise aproximada para poder calcular uma função que descreva a variância do filtro CRONE  $VarCr$ . A  $VarCr$  é estimada como mostra a Equação 2.46. Essa aproximação obtém um valor muito próximo ao valor numérico calculado quando se trabalha com um sistema de terceira ordem. A pequena diferença apresentada em resposta é devida ao fato de que, o ruído branco é caracterizado por ter uma densidade espectral de potência constante em todas as frequências. No entanto, quando passa por um filtro de primeira ordem, as componentes de alta frequência do ruído são atenuadas em relação às de baixa frequência, devido à resposta em frequência do filtro, assim a saída do filtro de primeira ordem ainda será um sinal aleatório, mas sua distribuição espectral de potência será modificada em relação à do ruído branco de entrada (Oppenheim *et al.*, 1997).

A aproximação obtida desta equação será retomada e utilizada no Capítulo 4 para realizar a análise de variância do filtro de primeira ordem onde ela será comparada com os valores numéricos obtidos mediante a análise da relação entre a variância de entrada e saída encontrada pelo método numérico de *Newton – Raphson*.

$$VarCr \approx G * Var_{H1} * Var_{H2} * Var_{H3} * varX \quad (2.46)$$

onde:

- $VarCr$  Aproximação da equivalência da Variância de entrada e saída para o filtro CRONE, associada às decomposições de variância entrada e saída dos sistemas de primeira ordem;
- $G$  é o ganho estático;
- $var(H1)$  corresponde à relação de variância entre entrada e saída do primeiro sistema de primeira ordem com um polo e um zero;
- $var(H2)$  corresponde à relação de variância entre entrada e saída do segundo sistema de primeira ordem conformado por um polo e um zero;
- $var(H3)$  corresponde à relação de variância entre entrada e saída do terceiro sistema de primeira ordem com um polo;

- $var(x)$  é a variância de entrada do sistema, definida pelo problema.

## 2.5 Ruído Branco

As análises de ruídos de sistemas de comunicação, geralmente, são fundamentadas em uma forma idealizada de ruído, chamada de ruído branco, cuja densidade espectral de potência é independente da frequência de operação. O adjetivo branco é utilizado no sentido de que a luz branca contém intensidades iguais de todas as frequências dentro da banda visível de radiação eletromagnética (Pimentel, 2007). Assim, a densidade espectral de potência de um ruído branco com uma função amostral indicada por  $S_w(t)$  e representado pela equação 2.47:

$$S_w(f) = \frac{N_0}{2} \quad (2.47)$$

A qual é ilustrada na figura 2.3. As dimensões de  $N_0$  são expressas em Watts por hertz. O parâmetro  $N_0$  geralmente é referenciado ao estágio de entrada do receptor de um sistema de comunicação. Ele pode ser expresso como:

$$N_0 = KT_e \quad (2.48)$$

Onde  $K$  é constante de Boltzmann e  $T_e$  é a temperatura equivalente de ruído do receptor. A característica importante da temperatura equivalente do ruído é que ela depende somente dos parâmetros do sistema. Como a função de autocorrelação é a transformada de Fourier inversa da densidade espectral de potência o ruído branco pode ser expresso como apresenta a equação 2.49:

$$S_w(f) = \frac{N_0}{2} \delta(f) \quad (2.49)$$

Ou seja, a função de autocorrelação de um ruído branco consiste em uma função delta, ponderada pelo fator  $N_0/2$  e que ocorre em  $\tau = 0$ , como mostra a 2.3 observa-se que  $R_w(\tau)$  é igual a zero para  $\tau \neq 0$ . Conseqüentemente, duas amostras diferentes qualquer ruído branco, não importando o quanto próximo no tempo elas sejam tomadas, não são correlacionadas. Se o ruído branco  $w(t)$  também for Gaussiano, então as duas amostras serão estaticamente independentes (Haykin; Veen, 2001)

## 2.6 Tempo de resposta

A velocidade de resposta do filtro de primeira ordem será analisada utilizando o método do degrau, o qual consiste em aplicar um sinal de degrau como entrada para o filtro e medir o tempo que leva para a saída atingir um determinado percentual do valor final. O tempo necessário para atingir esse percentual (geralmente 90% ou 95%) é chamado de

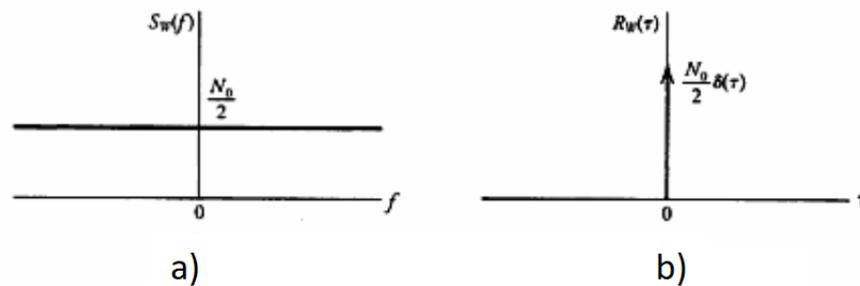


Figura 2.3 – Características do ruído branco (A) Densidade espectral de potência. (B) Função de autocorrelação

(Pimentel, 2007)

tempo de subida (ou tempo de estabilização). Sendo assim, é desejado que esse tempo seja o menor possível com a finalidade de garantir uma maior velocidade de reação a ruídos brancos inseridos no sistema.

Outra forma de fazer esta análise é através da relação com a frequência de corte (ou frequência de -3 dB), que é uma medida importante da velocidade de resposta. Ela representa a frequência na qual o ganho do filtro cai para metade do seu valor máximo. Quanto menor a frequência de corte, mais lenta será a implementação do filtro, pois o componente passivo, no caso real a baixas frequências, exige muito tempo para que o capacitor se carregue até atingir praticamente a mesma tensão da entrada.

As duas descrições realizadas anteriormente, podem ser representadas de forma gráfica como mostra a figura 2.4, onde é observada a resposta do sistema para uma frequência de corte determinada e o sinal correspondente a um degrau para o mesmo sistema.

Neste trabalho, será analisado nos capítulos [Capítulo 3](#) e [Capítulo 4](#) os sistemas de estudo considerando o método do degrau unitário e a análise da frequência de corte dos sistemas como parâmetro para comparar a velocidade de resposta entre os filtros projetados.

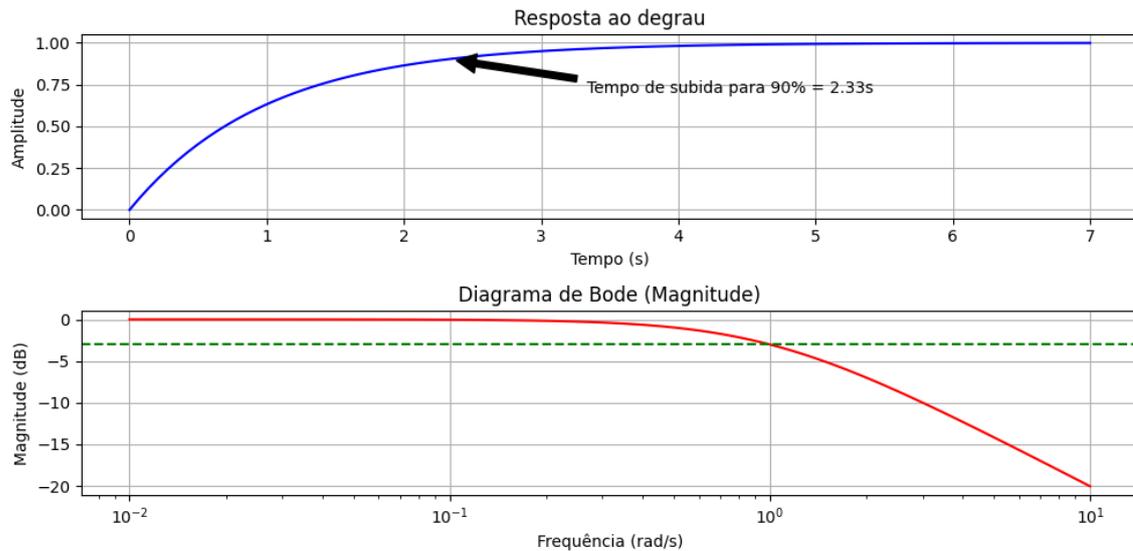


Figura 2.4 – Aplicação de um degrau unitário e resposta de frequência de corte de um sinal

Fonte: próprio

## 2.7 Estado da Arte

Nesta seção, são apresentados os trabalhos realizados por diversos autores em diferentes pesquisas. Esses trabalhos abordam filtros projetados para diversas aplicações, incluindo os filtros de forma fracionada. Além disso, são discutidas publicações na área de controle, onde vários autores comprovam que os controladores fracionados apresentam boa performance e robustez quando comparados a outras técnicas de controle. Mesmo que esta seção não inclua filtros fracionados, é importante considerar as abordagens realizadas na área de controle por diferentes pesquisadores, uma vez que servirão de base para o desenvolvimento do filtro CRONE, o qual será estudado neste trabalho.

Na dissertação de mestrado de Danies Barbosa (Barbosa, 2007), apresentou um método para a estimação da frequência em sistemas elétricos de potência utilizando filtros adaptativos baseados no algoritmo dos mínimos quadrados (LMS). A análise do sistema de potência é realizada através da conversão das tensões trifásicas em um sinal complexo, pela aplicação da transformada  $\alpha\beta$ . O algoritmo proposto foi testado com formas de ondas geradas no software Matlab e simulações realizadas no Alternative Transients Program (ATP). Os resultados mostram a eficácia do algoritmo na estimação da frequência de um sistema elétrico, mesmo em presença de sinais ruidosos, além do rastreamento preciso da frequência em situações de manobra e operação.

Posteriormente, ele utilizou o método para estimar a frequência, fazendo uso de filtros adaptativos baseados no método dos mínimos quadrados (MMQ). A análise do sistema de potência foi conduzida pela conversão das tensões trifásicas em um sinal complexo, por meio da aplicação da transformada  $\alpha\beta$ . Este sinal foi direcionado ao algoritmo de filtragem

adaptativa, utilizando filtros passa-baixa Butterworth de segunda ordem (com frequência de corte em 200 Hz). Barbosa destaca que o algoritmo AEFMMQ mostra robustez em diversas situações e níveis de tensão, não sendo influenciado pela amplitude das formas de onda analisadas.

Ricardo Siqueira (Born, 2000), por sua vez, conduz uma pesquisa sobre a aplicação de filtros adaptativos na área da saúde, mais especificamente na biomedicina. Ele desenvolveu uma ferramenta que auxilia no projeto de filtros adaptativos, facilitando a leitura de sinais ECG para o estudo dos batimentos cardíacos de fetos e mães. Após a filtragem, tornou-se possível distinguir claramente a diferença entre os dois objetos de estudo, proporcionando um diagnóstico mais preciso em relação a possíveis doenças.

Alexandre Levada e Nelson Macarenhas (Levada; Mascarenhas, 2010) apresentam uma abordagem para a filtragem de ruído gaussiano em imagens, utilizando uma generalização contextual do filtro de Wiener adaptativo pontual. Baseado na minimização da Informação de Fisher observada em relação ao parâmetro do modelo Markoviano Gaussiano (GMRF), o método proposto busca um compromisso entre a minimização do erro médio quadrático e a minimização da Informação de Fisher observada no modelo GMRF. Resultados experimentais, obtidos com imagens em tons de cinza afetadas por ruídos gaussiano aditivo, indicam que o método proposto supera o desempenho do filtro de Wiener adaptativo, evidenciando a eficácia do filtro generalizado. Foi concluído que o filtro generalizado pode ser aplicado com sucesso em uma ampla variedade de aplicações em processamento de imagens e visão computacional.

Assim, é observado que as técnicas de filtragem tradicionais, adaptativas e digitais têm sido amplamente empregadas em diversas áreas do conhecimento. Uma característica comum a todas elas é que são concebidas com sistemas de ordem inteira.

No entanto, algumas pesquisas adotam uma abordagem inovadora, explorando sistemas nos quais a transformada de Laplace possui potências fracionadas. Essas abordagens têm demonstrado resultados promissores e estão sendo amplamente adotadas devido às suas notáveis vantagens, especialmente no que diz respeito à atenuação de frequências e ao aprimoramento da robustez de sistemas. A seguir, são apresentados alguns estudos relacionados a reguladores CRONE, as quais são usadas para gerar o filtro fracionado que é objeto de estudo deste trabalho.

Um dos trabalhos mais conhecidos com relação ao regulador CRONE foi o realizado por Alain Oustaloup (Oustaloup; Lanusse, 1993), intitulado "Second Generation CRONE Control". O estudo analisa a robustez de um controle PID por meio de simulações, aplicando metodologias CRONE de primeira e segunda geração, com a fase fixada em  $45^\circ$  e a frequência em  $15\text{rad/s}$ . Os resultados apontam que o controlador CRONE demonstra maior robustez em comparação com o controle PID, apresentando uma resposta mais sensível à entrada da planta.

Outra contribuição notável foi realizada por vem de G. Ganesh Naidu ([NAIDU, 2016](#)), quem trabalhou com um controle CRONE para um motor DC e realizou a comparação dos resultados com um controle PID, ele explora o nivelamento de um processo de água e a velocidade de um motor DC . A pesquisa fundamenta-se na criação de um controle PID de ordem inteira e na comparação dos resultados com um controlador PID de ordem fracionada, utilizando técnicas de primeira e segunda geração da metodologia CRONE. Para um controle de nível desenvolvido, o controlador CRONE mostrou uma resposta superior em relação ao PID, enquanto no controle de velocidade, o controlador CRONE de segunda geração superou o de primeira geração

Velmurugan ([Velmurugan; Kumar, 2023](#)) realizou uma contribuição importante ao avaliando o desempenho da estratégia de controlador CRONE para um sistema de pressão de ar (APS). , e a avaliação do desempenho do servo do controlador foi conduzida, analisando os erros de desempenho e índices de tempo em três pontos de operação distintos. Os resultados foram comparados com um controlador convencional em uma abordagem de simulação, utilizando uma planta de primeira ordem com atraso temporal de 7 segundos.

Os resultados indicam que o controlador composto CRONE (CC), que combina um controlador CRONE CFGC(s) com um controlador convencional CCONV(s) em paralelo de saída somada, supera todos os outros controladores em termos de desempenho, conforme avaliado por índices de erro como erro absoluto integral (IAE) e erro quadrático integral (ISE) , além de parâmetros de domínio temporal.

Xavier e Francis ([MOREAU; FRANCIS \*et al.\*, 2011](#)) publicaram o artigo com um estudo realizado de um controle hidro-eletronico aplicando tecnicas generalizadas PID e Controle CRONE Este estudo comparativo entre dois controladores fracionários, o PID generalizado e o CRONE, o trabalho apresenta uma metodologia de projeto no domínio da frequência. As especificações de desempenho foram traduzidas em restrições de malha aberta para o controlador CRONE e, posteriormente, em restrições do controlador para o PID generalizado. O artigo analisa os diagramas de Bode para os pontos de operação, destacando que, embora os comportamentos dos dois controladores sejam semelhantes, o CRONE exibe uma resposta mais suave, especialmente evidenciada nos diagramas de entrada degrau.

Outro estudo relevante, conduzido por Hussein Termous ([Termous \*et al.\*, 2018](#)), aborda a aplicação do controlador PID padrão e do controlador CRONE de primeira geração no sistema de momento anti-rolamento para melhorar o conforto de condução em veículos elétricos. A comparação entre a robustez e a ressonância dos dois controladores revela que o sistema de controle CRONE de primeira geração oferece um controlador robusto de ordem fracionária para plantas perturbadas e incertas

Xavier Moreau ([Moreau; Daou; Christophy, 2018](#)) contribuiu significativamente à literatura científica com o artigo trabalhando a comparação entre a segunda e terceira gerações do controlador CRONE, aplicação a um meio de interface termodifusiva. Neste

estudo, uma análise comparativa entre os controladores foi conduzida utilizando uma planta composta por uma barra retangular homogênea de comprimento  $L$ . Nessa configuração, o elemento de aquecimento é aplicado em um limite, e um sensor de temperatura é posicionado a uma pequena distância  $x$  desse limite (considerando  $x$  muito pequeno em relação a  $L$ ).

Os resultados revelam que a segunda geração do controlador CRONE demonstra bom desempenho quando as incertezas paramétricas não afetam a fase da planta. Por outro lado, a terceira geração destaca-se por sua robustez, mesmo diante de variações de fase e ganho. Contudo, essa última apresenta algumas limitações, especialmente quando a temperatura a ser controlada está distante da interface e a densidade de fluxo é aplicada. Nesse cenário, o controlador CRONE de terceira geração demonstrou robustez ao variar os parâmetros da planta e enfrentar mudanças tanto no ganho quanto na fase.

Flávio Azevedo ([Campos, 2019](#)) apresentou seu estudo de mestrado onde trabalhou com um controle PID de ordem fracionada aplicando simulação de sistemas reais. O estudo foca na estabilidade no domínio do tempo e da frequência, explorando um controle PID de ordem fracionária (FOPID). O autor realiza simulações para facilitar a compreensão e implementação prática, utilizando uma função de transferência com atraso temporal. Os controladores de ordem não-inteira proporcionam maior flexibilidade para atender a restrições de projeto, mostrando que a região de estabilidade de malhas que contém controladores fracionários é ampliada, permitindo até a existência de polos no semiplano direito do eixo imaginário.

Guilherme Koiti Tanaka ([Sasaki, 2019](#)) trabalhou na sintonia de controladores fracionados por realimentação, ele realiza simulações comparativas entre métodos de sintonia de controladores fracionários e inteiros. Os métodos analisados incluem Ziegler-Nichols em malha aberta (ordem inteira), o método de Padula e o método de Valério (ambos de ordem fracionária). Os resultados são avaliados por meio de critérios conhecidos, como ISE, IAE e ITAE. O autor conclui que não é possível afirmar categoricamente que métodos de controle fracionário por regra terão um desempenho superior a métodos de ordem inteira, destacando a necessidade de análise caso a caso para determinar a abordagem mais adequada às necessidades do processo.

Michel Wanderson de Souza Campos ([Campos et al., 2020](#)), trabalhou na identificação e controle de sistemas de ordem fracionada com aplicação a sistemas térmicos, concentrou-se na análise de uma planta térmica para a identificação de parâmetros de controle PID fracionados. Utilizando dados armazenados, a planta foi identificada por meio do modelo de mínimos quadrados não recursivos ou batelada, buscando um ajuste preciso da curva de resposta da planta ao minimizar uma função de erro médio quadrático.

Após a identificação bem-sucedida do sistema, foi proposto um controlador do tipo  $PI^\mu D^\lambda$  para controlar uma magnitude de 25 Watts dentro do intervalo de potência de [50, 200] Watts. Os resultados revelaram um desempenho notável do controlador, validando a

eficácia da identificação do sistema estudado.

Durante a pesquisa, o modelo fracionado, obtido por meio do método dos mínimos quadrados, demonstrou apresentar um menor erro quadrático médio. A identificação fracionária do sistema, especialmente pelo método de Mínimos Quadrados Não-Recursivo, destacou-se na sintonia de sistemas estáveis no domínio do tempo. Além disso, a escolha dos parâmetros do sistema identificado evidenciou que um sistema fracionário, devido à sua maior flexibilidade no ajuste da curva, oferece uma representação mais precisa do sistema em questão.

Esses resultados indicam que a sintonia de um controlador fracionário PID é mais eficaz em comparação com a sintonia de um controlador PI de ordem inteira, reforçando a superioridade do enfoque fracionário na obtenção de um controle preciso e eficiente em sistemas dinâmicos, como o estudado.

Yessef, Mourad, e Bossoufi (Yessef *et al.*, 2022), abordou uma melhora da extração máxima de energia de turbinas eólicas usando um controlador CRONE de segunda geração, propõe uma abordagem inovadora para maximizar a geração de energia em um sistema de conversão de energia eólica (WECS) baseado em um gerador de indução de alimentação dupla (DFIG). A técnica envolve a utilização de um controlador CRONE de segunda geração para o rastreamento de potência máxima (MPPT).

O estudo compreende o projeto e comparação do controlador CRONE de segunda geração com quatro outros controladores: PI, controle não linear baseado em modos deslizantes (SMC), controlador backstepping (BS), e controlador lógico fuzzy (FLC). Os resultados das simulações destacam que o controlador CRONE demonstrou o melhor desempenho, emergindo como a estratégia mais adequada para o sistema de conversão de energia eólica em estudo. Sua superioridade se evidencia na resposta dinâmica, rastreamento de referência, precisão, erro estático e dinâmico, bem como na robustez, superando os demais controladores investigados.

Safouane El Khadri (Khadri *et al.*, 2022), trabalhou com o projeto do sistema de nivelamento automático de faróis CRONE aborda a implementação de um sistema inovador de nivelamento automático de faróis. O sistema utiliza um motor ultrassônico e um controlador CRONE robusto para rejeitar perturbações dinâmicas no nível de corte de iluminação. A implementação, realizada com uma fase constante de  $45^\circ$  e uma frequência angular de  $40\pi$  rad/s, demonstrou eficácia em simulações. Os pesquisadores planejam futuras implementações em hardware para avaliar a eficácia do sistema em um ambiente de teste real

Na Tabela 2.1, são apresentados o resumo de alguns estudos realizados no âmbito da filtragem e do controle. Observa-se que o trabalho realizado em relação à filtragem é mais evidente nos sistemas de potência inteira e de forma fracionada na área de controle, a qual será considerada para projetar o filtro CRONE no Capítulo 3. É importante destacar

que até o momento não foram identificados estudos específicos relacionados à filtragem com potência fracionada. Embora a definição inicial tenha sido descrita por (Xu; Li, 2021), não foram encontradas aplicações documentadas até o momento em relação a filtragem. Portanto, este trabalho é considerado relevante por adotar uma abordagem inovadora ao adaptar o Regulador CRONE e implementar um sistema de primeira ordem que resulta em um filtro com três polos e dois zeros. Esse filtro permite a geração de um equivalente com variância idêntica e o mesmo poder de atenuação.

Tabela 2.1 – Resumo de alguns trabalhos publicados

Autor	Trabalho	Aplicação	Tipo de sistema
Daniel Barbosa	Filtros adaptativos baseados no método dos mínimos quadrados	Programado	Inteiro
Ricardo Siqueira	Filtros adaptativos na área da saúde	Aplicação de um filtro	Inteiro
Alexandre Levada	Filtro de Wiener adaptativo pontual.	Aplicação em imagens	Inteiro
Alain Oustaloup	Estudo do Controle CRONE de segunda geração	Comparação de robustez frente a um controle PID	Fracionado
G. Ganesh Naidu	Controle CRONE para um motor DC	Comparação dos resultados com um controle PID	Fracionado
Velmurugan	Desempenho da estratégia de controlador CRONE para um sistema de pressão de ar (APS)	Os resultados foram comparados com um controlador convencional em uma abordagem de simulação, utilizando uma planta de primeira ordem com atraso temporal de 7 segundos	Fracionado
Xavier e Franci	Controle hidroeletônico aplicando técnicas generalizadas PID e Controle CRONE	Comparação realizada por meio de simulações	Fracionado
Flávio Azevedo	Controle PID de ordem fracionada aplicando simulação de sistemas reais	Aplicação de um controle PID Fracionado	Fracionado
Guilherme Koiti Tanaka	Sintonia de controladores fracionados por realimentação	Comparação de diferentes controladores	Fracionado
El Khadri	Projeto do sistema de nivelamento automático de faróis CRONE	A implementação de um sistema inovador de nivelamento automático de faróis	Fracionado

## 3 FILTRO CRONE

Neste capítulo, é apresentada uma revisão bibliográfica que inicia com uma análise detalhada de filtros passa-baixa de primeira e segunda ordem, seguidamente se faz uma generalização para o filtro de terceira ordem, destacando os efeitos de atenuação associados quando se faz comparação entre estes sistemas. A escolha de analisar especificamente esses tipos de filtros é fundamentada para estruturação e comparação aos filtros que serão desenvolvidos utilizando a metodologia CRONE (Villamizar, 2018).

Por fim, será demonstrado como a metodologia CRONE pode ser representada utilizando sistemas em cascata de primeira ordem, simplificando assim seu projeto. Essa abordagem facilita o projeto do filtro CRONE e também simplifica o cálculo da variância para cada sistema considerando a relação entre a variância de entrada e saída, permitindo assim uma análise da atenuação de ruídos e a comparação da eficiência dos filtros.

### 3.1 Filtros Analógicos

Os filtros analógicos, de forma geral, desempenham o papel de circuitos seletivos de frequência devido à sua capacidade intrínseca de atenuar sinais de entrada com base na frequência. A banda passante, nesse contexto, representa o espectro de frequências de um sinal que pode atravessar o filtro com mínima ou nenhuma alteração em sua amplitude. O parâmetro  $F_c$ , conhecido como frequência de corte, demarca a borda da banda passante, onde ocorre uma redução de 3 dB na amplitude do sinal, representando aproximadamente 70,7% da magnitude da banda de passagem.

Já a banda de parada abrange as frequências do sinal que são fortemente atenuadas, sendo impedidas de passar pelo filtro entre a banda passante e a banda de parada, situando-se a banda de transição, caracterizada por uma atenuação progressiva do sinal. Esse processo proporciona uma transição suave entre as regiões permitidas e rejeitadas, contribuindo para a eficácia do filtro na seleção e modulação de frequências específicas (Winder, 2002).

### 3.2 Tipos de filtros

Os filtros podem ser classificados de diversas maneiras, levando em consideração pelo menos três perspectivas distintas: as funções desempenhadas, as tecnologias empregadas e o formato da função-resposta. No âmbito das funções, as diversas respostas no domínio da frequência distinguem os filtros, categorizando-os como passa-baixa (PB), passa-alta (PA), rejeita-faixa (RF) e passa-faixa (PF) (Júnior, 2003).

A figura 3.1 mostra o comportamento dos diferentes filtros:

Quanto aos elementos tecnológicos de construção, os filtros podem ser classificados

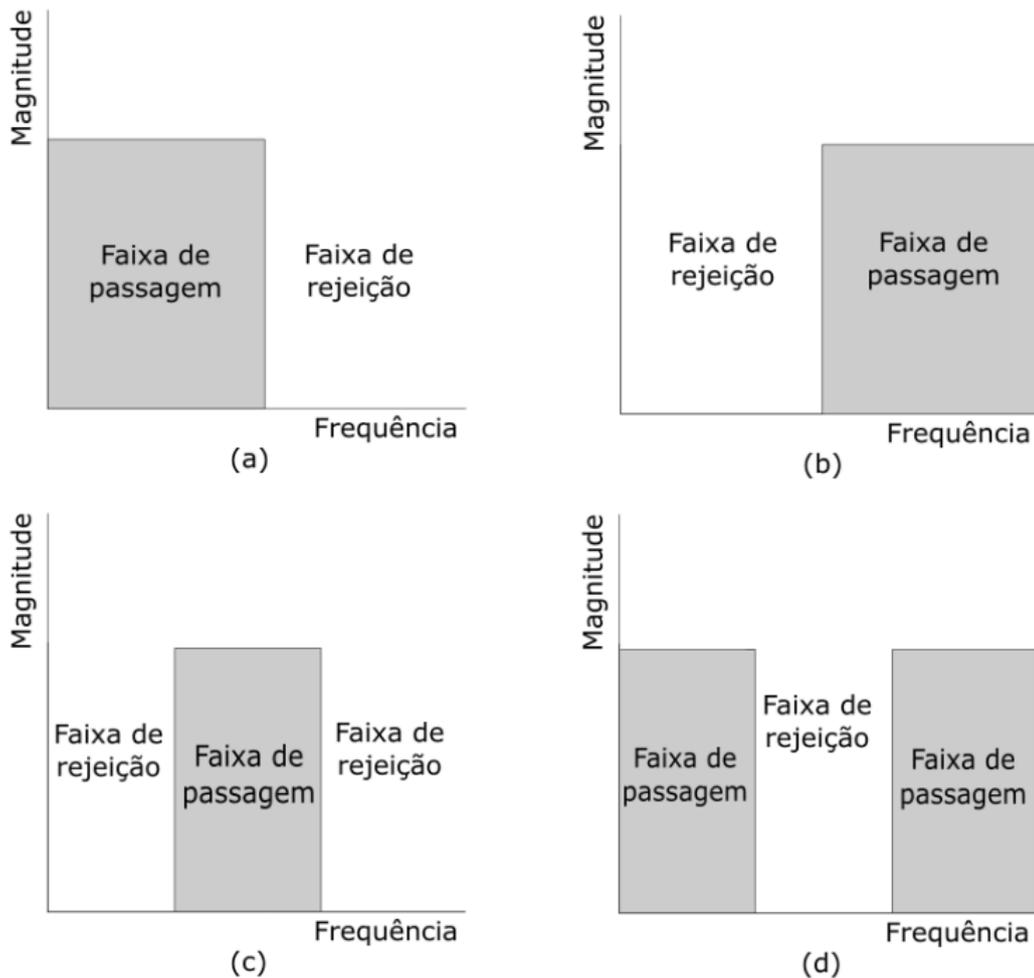


Figura 3.1 – Características ideais de respostas dos filtros para uma determinada frequência de corte ( $f_c$ ): (a) Filtro passa-baixas; (b) Filtro passa-altas; (c) Filtro passa-faixa e (d) Filtro rejeita-faixa (notch).

(Fontana *et al.*, 2019)

como analógicos ou digitais. No universo dos filtros analógicos, estes se subdividem em duas categorias principais: filtros passivos e ativos. Os filtros passivos baseiam-se exclusivamente em elementos passivos, como resistores, capacitores e indutores. Os filtros ativos são aqueles que além dos elementos passivos também empregam circuitos ativos como os amplificadores operacionais (Nilsson, 2008).

Um filtro, seja ele do tipo passa-baixas ou passa-altas, é caracterizado por duas zonas distintas: a faixa de passagem e a faixa de rejeição. Na faixa de passagem, deseja-se que o sinal seja mantido inalterado ou, no mínimo, atenuado, enquanto, na faixa de rejeição, busca-se uma atenuação completa do sinal. Entretanto, para os filtros reais, alcançar esse objetivo de forma integral ainda não é possível. Por isso, são estabelecidos valores limites desejados para cada uma dessas faixas (Junior, 2015).

O filtro passa-faixa, por sua vez, é constituído por uma faixa de passagem e duas faixas

de rejeição: uma abaixo da frequência da faixa de passagem e outra acima. Em contrapartida, os filtros rejeita-faixa possuem duas faixas de passagem e uma faixa de rejeição, constituindo o oposto dos filtros passa-faixa (Junior, 2015)

Na faixa de passagem, determina-se o limite máximo pelo qual o sinal pode ser atenuado, juntamente com a frequência máxima da faixa de passagem ( $F_p$ ), na qual esse comportamento será observado. Para a faixa de rejeição, são definidos o limite mínimo de atenuação do sinal e a frequência inicial da faixa de rejeição  $F_r$ , na qual o sinal pode ser considerado parcialmente atenuado.

A seguir, é apresentada de maneira sucinta a definição de filtro passa-baixas. Essa breve introdução se faz necessária, pois a metodologia CRONE incorpora, em sua descrição, um parâmetro associado a este tipo de filtro, conforme será detalhado mais adiante.

### 3.2.1 Filtro passa-baixa passivo

A utilização do filtro passa-baixa é fundamental para permitir a passagem de sinais abaixo da frequência de corte  $F_c$ , ao mesmo tempo que atenua as frequências superiores a esse limite (Mussoi; ESPERANÇA, 2004). Um exemplo prático desse conceito é apresentado no circuito RL passivo, ilustrado na Figura 3.2, que pode operar como um filtro passa-baixa.

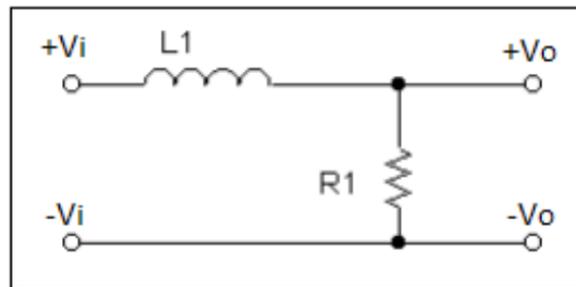


Figura 3.2 – Filtro Passa-Baixas RL passivo

(Mussoi; ESPERANÇA, 2004)

Quando submetido a sinais de baixa frequência, o indutor apresenta uma reatância consideravelmente baixa,  $X_L \ll R$ , comportando-se como um curto-circuito. Nesse cenário, a maior parte da tensão de entrada incide sobre o resistor de saída. Para sinais de alta frequência, a reatância do indutor aumenta significativamente,  $X_L \gg R$ , transformando-o em um circuito aberto. Conseqüentemente, a maior parte da tensão de entrada é direcionada para o indutor, resultando em uma tensão substancialmente reduzida sobre o resistor de saída. A capacidade do circuito RL de modular sua resposta de acordo com a frequência o torna um eficiente filtro passa-baixa em aplicações práticas.

As expressões para o ganho de tensão, fase e frequência de corte de um filtro passa-baixa RL são mostradas nas Equações 3.1, 3.2 e 3.3:

$$A_v = \sqrt{\frac{1}{1 + \left(\frac{2\pi fL}{R}\right)^2}} \quad (3.1)$$

$$\alpha = -\arctan\left(\frac{2\pi fL}{R}\right) \quad (3.2)$$

$$F_c = \frac{R}{2\pi L} \quad (3.3)$$

Para um circuito RC, representado na Figura 3.3, é possível que atue como um Filtro Passivo Passa-Baixa (Mussoi; ESPERANÇA, 2004) Para sinais de baixa frequência, o capacitor apresenta uma reatância alta,  $X_C \gg R$ , comportando-se como um circuito aberto. Nesse caso, a maior parte da tensão de entrada está sobre o capacitor de saída. Já para sinais de alta frequência, o capacitor exibe uma reatância baixa,  $X_C \ll R$ , agindo como um curto-circuito. Assim, a maior parte da tensão de entrada está sobre o resistor, conforme ilustrado na Figura 3.3.

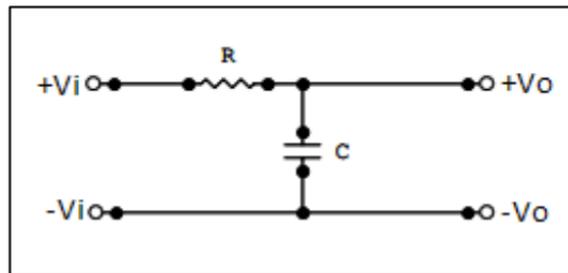


Figura 3.3 – Filtro Passa-Baixas RC passivo

(Mussoi; ESPERANÇA, 2004)

As expressões para o ganho de tensão, fase e frequência de corte de um filtro passa-baixa RC são apresentadas nas Equações 3.4, 3.5 e 3.6:

$$A_v = \sqrt{\frac{1}{1 + (2\pi fRC)^2}} \quad (3.4)$$

$$\alpha = -\arctan(2\pi fRC) \quad (3.5)$$

$$F_c = \frac{1}{2\pi RC} \quad (3.6)$$

Assim, com as expressões determinadas para as duas versões dos filtros passa-baixas, torna-se possível calcular os diagramas de frequência e fase. Considerando:

- $f = 0$ , então  $A_v = 1$

- $f = \infty$ , então  $A_v = 0$
- $f = F_c$ , então  $A_v = \frac{1}{\sqrt{2}}$

De forma análoga para a Fase:

- $f = 0$ , então  $\alpha = 0^0$
- $f = \infty$  então  $\alpha = -45^0$
- $f = F_c$ , então  $\alpha = -90^0$

A Figura 3.4 apresenta a representação gráfica da análise anterior.

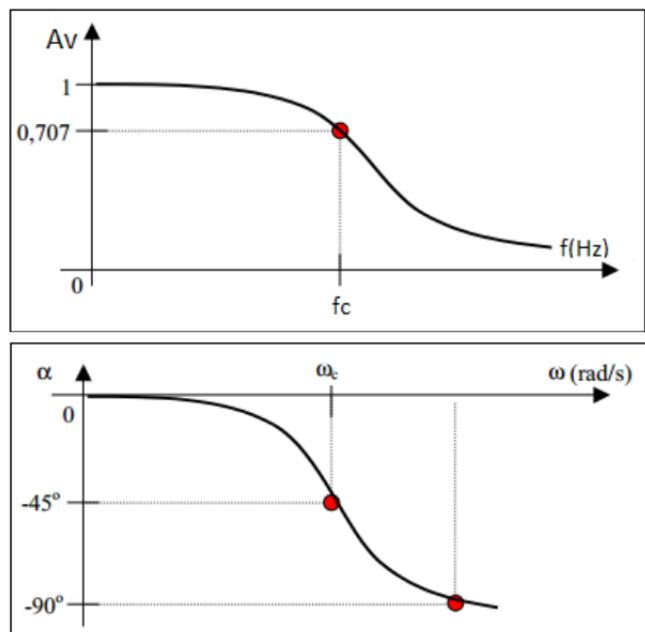


Figura 3.4 – Representação da magnitude e fase de um filtro passa baixas de primeira ordem

(Mussoi; ESPERANÇA, 2004)

A figura 3.4 mostra a representação de um filtro passa baixas de primeira ordem, é observado que sua magnitude tem um decaimento de 20db/dec chegando a de 3db/dec até o ponto de frequência de corte, e que a fase para este filtro chega a  $-90^0$ , estes dados são muito importantes para fazer as comparações com o filtro CRONE que será descrito posteriormente

### 3.2.2 Filtro passa baixas de segunda ordem

Sabe-se que a equação característica de um filtro passa baixas de segunda ordem é representa como 3.7

$$H(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0s + \omega_0^2} \quad (3.7)$$

Sendo:

- $\zeta$ , amortecimento do sistema
- $\omega_n$ , Frequência natural

a representação da equação 3.7 é muito usada para analisar o comportamento do sistema, mas para o projeto de filtros acostuma-se a utilizar a equação 3.8

$$H(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + \left(\frac{\omega_0}{Q}\right)s + \omega_0^2} \quad (3.8)$$

onde Q, representa o fator de qualidade, este fator de qualidade muda de acordo com os componentes passivos do circuito, podendo ser representado como apresenta a equação 3.9

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 C R} \quad (3.9)$$

Sendo o módulo dessa expressão apresentada na expressão 3.10 e a fase na expressão 3.11

$$|H(j\omega)| = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{\omega}{Q}\right)^2}} \quad (3.10)$$

$$\angle H(j\omega) = \arctan\left(\frac{\frac{\omega}{Q}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}\right) \quad (3.11)$$

Realizando uma análise semelhante à feita para o sistema de primeira ordem, são encontradas as assintotas, as quais estão representadas na tabela 3.1

Tabela 3.1 – Representação das assintotas de fase e magnitude.

	$\omega \ll \omega_0$	$\omega = \omega_0$	$\omega \gg \omega_0$
$ H(j\omega) $	1	Q	$\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2$
$ H(j\omega) _{dB}$	0	$20\log(Q)$	$40\log(\omega_0) - 20\log(\omega)$
$\angle H(j\omega)$	0	$-90^\circ$	$-180^\circ$

Para o filtro passa-baixas de segunda ordem, a frequência de corte pode não ocorrer em  $\omega = \omega_0$ . Para isso, é necessário observar qual a frequência em que  $|H(j\omega)|_{dB} = -3dB$ . Sendo assim, é interessante observar que para essa frequência observada, a magnitude corresponde ao fator de qualidade Q.

A partir da análise do diagrama de Bode da Figura 3.5, nota-se que para  $\omega_0 = 1rad/s$ , quanto maior for o fator de qualidade do filtro passa-baixas de segunda ordem, maior será o ganho observado em torno de  $\omega_0$ . De forma análoga, é percebido que para valores muito menores que  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ , o fator de qualidade apresenta uma maior atenuação em  $\omega_0$ , que pode influenciar no desempenho esperado do filtro. Dessa forma, é interessante escolher valores de Q próximos a  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  (FERREIRA *et al.*, 2019).

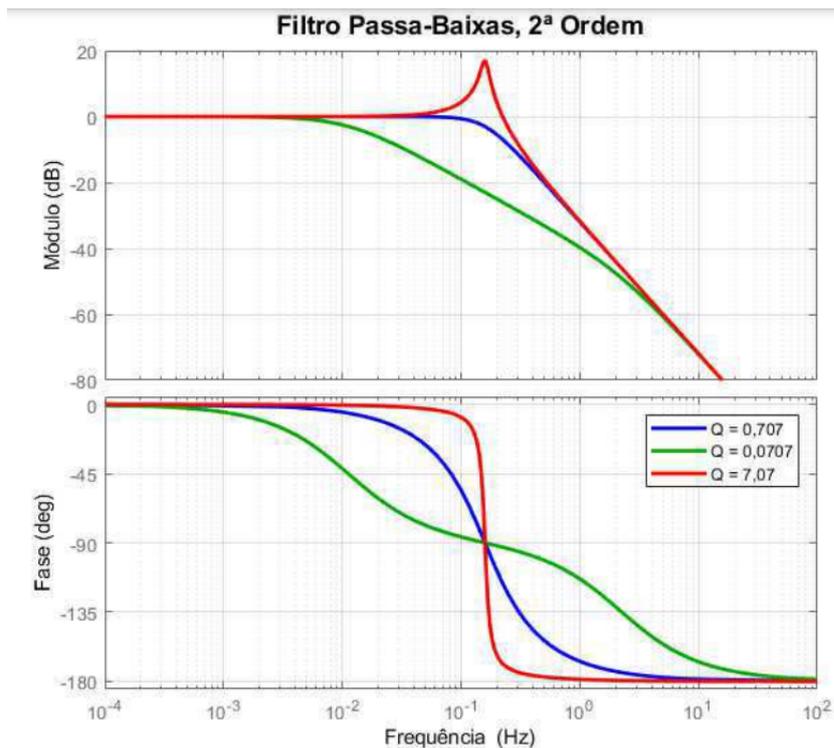


Figura 3.5 – Comportamento de um filtro de segunda ordem

(FERREIRA *et al.*, 2019)

Comparando o comportamento entre os filtros de primeira e segunda ordem observa-se a diferença de fase e magnitude na figura 3.6

A partir da observação dos gráficos da Figura 3.6, concluiu-se que para um filtro passa-baixas de segunda ordem, a inclinação da curva na faixa de transição tanto na resposta em frequência quanto no gráfico de fase foi maior do que a observada para o filtro passa-baixas de primeira ordem, o que indica que o filtro de segunda ordem atenua as frequências de forma mais abrupta, estando mais próximo de um filtro ideal, do que o filtro passa-baixas de primeira ordem (FERREIRA *et al.*, 2019).

Analogamente, ao comparar três filtros - um de primeira ordem, outro de segunda ordem e o último de terceira ordem - cujas saídas estão ilustradas na figura 3.7, percebe-se que esses filtros foram gerados mediante a representação em cascata do filtro de primeira ordem, resultando na replicação dos polos.

Na figura 3.7, observa-se um padrão semelhante ao descrito na figura 3.6. Notavelmente, o filtro passa-baixas de primeira ordem exibe uma atenuação menor de frequências, seguido pelo filtro de dois polos que consegue melhorar a atenuação em comparação com o filtro de primeira ordem, mas sua fase passa agora para  $180^{\circ}$ . Nessa linha de análise, o filtro de terceira ordem apresenta a maior atenuação em comparação com os dois filtros anteriores, manifestando um comportamento mais próximo do ideal em relação ao filtro de primeira

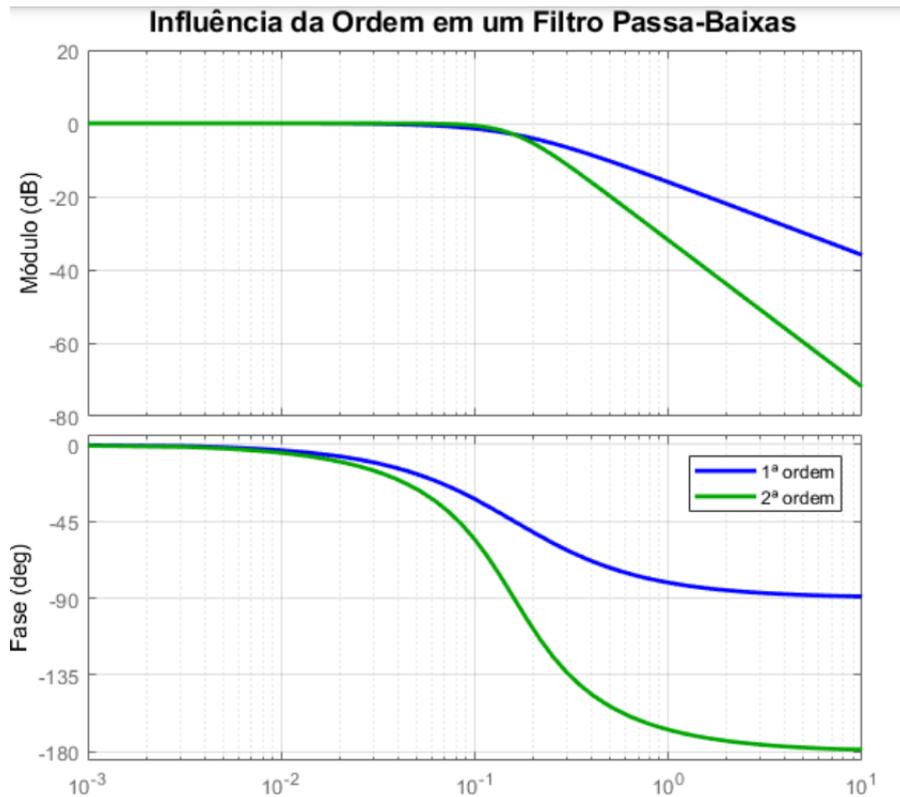


Figura 3.6 – Comparação entre um filtro de primeira e segunda ordem

(FERREIRA *et al.*, 2019)

ordem, e sua fase passa a ser  $270^{\circ}$ . Conclui-se que, para filtros clássicos, a atenuação de frequências melhora com o aumento da ordem do filtro; no entanto, a fase aumenta.

Esses resultados mostram a relação entre atenuação e fase ao projetar filtros de diferentes ordens, destacando a importância de considerar tais comportamentos na escolha do filtro mais adequado para uma aplicação específica.

### 3.3 Análise de diagramas de Bode

Os gráficos logarítmicos são muito utilizados no estudo da teoria de controle, mais especificadamente os diagramas de Bode, os quais são usados para determinar e representar graficamente respostas em frequências de funções de transferência, estas funções de transferência são representadas como apresenta a equação 3.12 (Dorf, 2001).

$$G(j\omega) = |G(\omega)| e^{j\varphi(\omega)} \quad (3.12)$$

Frequentemente a representação de magnitude é feita mediante a utilização de logaritmos na base 10, de forma tal que o ganho é representado como apresenta a equação 3.13.

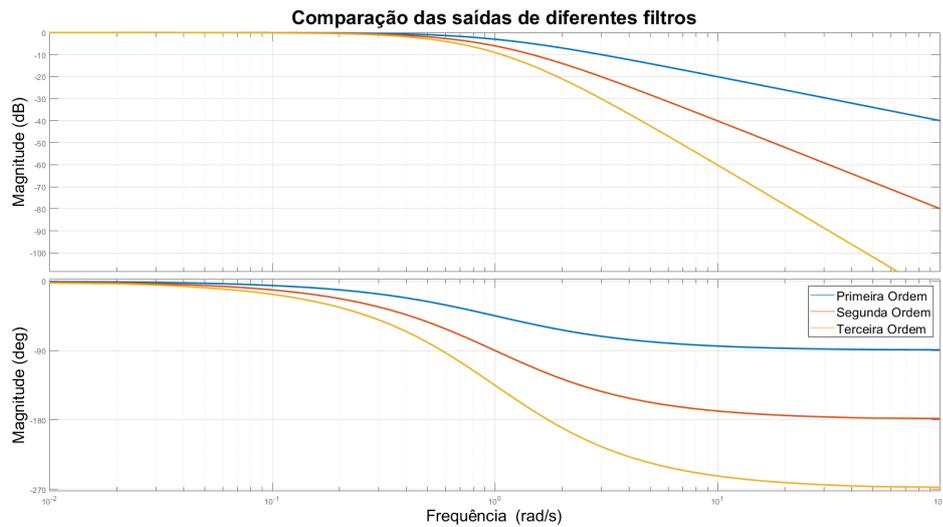


Figura 3.7 – Comparação entre um filtro de primeira, segunda e terceira ordem

Fonte: Própria

$$Ganho = 20 \log_{10} |G(w)| \quad (3.13)$$

Sendo a magnitude expressa em decibel *dB*. Assim o gráfico é construído em função da frequência  $\omega$ , dado que se tem a magnitude se analisa a fase semelhante a como é feito quando se usa fasores, desta forma a fase é expressa como apresenta a equação 3.14.

$$\varphi = \arctan \left( \frac{I}{R} \right) \quad (3.14)$$

Sendo:

- *R* o tempo real da função de transferência;
- *I* o tempo complexo da função de transferência.

Da figura 3.8 se verifica que  $\omega = \frac{1}{\tau}$  é frequência de corte e que a escala horizontal muda de frequência  $\omega_1$  para  $\omega_2$ , sendo que  $\omega_2 = 10\omega_1$ , conhecida esta relação como década, correspondente a um sistema de primeira ordem sem zeros, no caso de ter um sistema só com zeros e não ter polos espera-se um aumento de 20dB/década (Dorf, 2001).

Então para a figura 3.8 a função de transferência complexa é:

$$\omega(jw) = \frac{1}{1+jw\tau}$$

$$Ganho = 20 \log_{10} [1] - 20 \log_{10} \left[ \sqrt{1 + (\omega\tau)^2} \right]$$

$$Ganho = -10 \log_{10} \left| 1 + (\omega\tau)^2 \right|$$

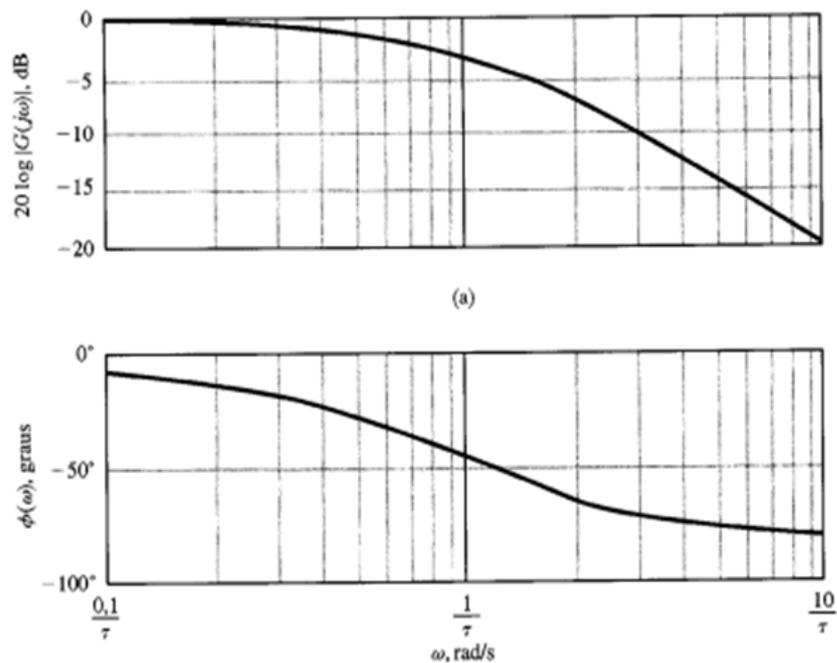


Figura 3.8 – : Diagrama de bode de um filtro RC de primeira ordem

Fonte: (Dorf, 2001)

Tendo:

Para  $\omega \ll 1/\tau$ , Ganho=0;

Para  $\omega \gg 1/\tau$ , Ganho=  $-10\log_{10} |1 + (\omega\tau)|$ ;

Para  $\omega = 1/\tau$ , Ganho=  $-10\log_{10} |1 + (\omega\tau)| = 3dB$ .

E a fase:

$$\varphi = -\arctan\left(\frac{\omega\tau}{1}\right) = -\arctan(\omega\tau)$$

Que corresponde a equação 3.14.

Existe uma peculiaridade com os intervalos de frequência, onde as vezes utiliza-se a relação  $\omega_2 = 2\omega_1$  denominada oitava de frequência, o que daria uma relação de ganho como se apresenta a seguir:

$$20\log|G(\omega_1)| - 20\log|G(\omega_2)| = -\frac{20\log(\omega_1\tau)}{\omega_2\tau}$$

$$-20\log\left(\frac{1}{2}\right) = -6,02dB$$

Isso indica que a inclinação da reta assintótica é -6dB/oitava ou -20dB/década (Dorf, 2001).

Se a função de transferência possuir o fator  $(\frac{1}{jw})^n$  ou  $(jw)^n$  grandezas logarítmicas podem ser representadas como mostram as equações 3.15 e 3.16 (Ogata, 2010).

$$20\log \left| \frac{1}{(jw)^n} \right| = -n * 20\log |jw| = -20n\log\omega \quad (3.15)$$

Ou de forma semelhante

$$20\log |(jw)^n| = n * 20\log |jw| = 20n\log\omega \quad (3.16)$$

Das equações 3.15 e 3.16 observa-se que a ordem do sistema vai modificar a fase, sendo esta ordem representada pela letra  $n$ , indicando que se o sistema é de primeira ordem, vai apresentar um decaimento ou aumento de  $\pm 20\text{dB/década}$  e se for de segunda ordem o decaimento ou aumento seria de  $\pm 40\text{dB/década}$  (Ogata, 2010).

Analisando cada um dos sistemas, é observado que na medida que aumenta a ordem do sistema a resposta do sistema fica mais lenta, isso pode ser apresentado realizando relações de sistemas de diferentes ordens, polos todos iguais, como pode-se observar na figura 3.9.

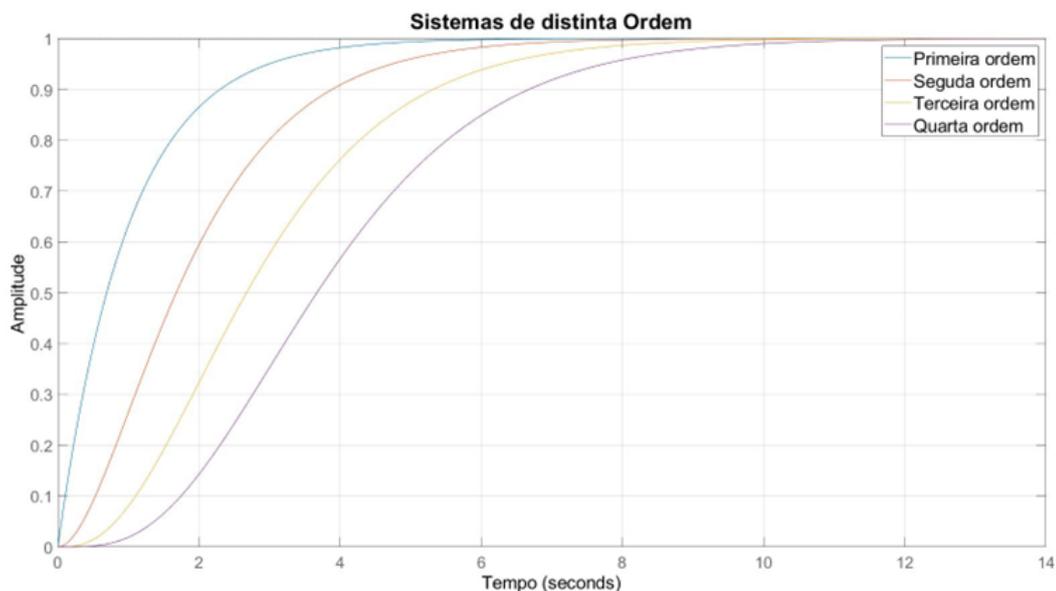


Figura 3.9 – Respostas de filtros de primeira, segunda, terceira e quarta ordem

Fonte: Própria

Sabe-se que quando se trata de filtragem de ruído, os sistemas de ordem mais alta têm a capacidade de suprimir frequências indesejadas de maneira mais eficiente. Essa supressão é obtida através da atenuação dos polos do sistema em frequências específicas. Portanto, um sistema de ordem mais alto tem a capacidade de atenuar o ruído em uma faixa mais ampla de frequências, fornecendo assim uma melhor relação sinal-ruído.

No entanto, é importante ressaltar que a ordem do sistema não é o único fator que determina a relação sinal-ruído. Outros elementos, como a qualidade do filtro, a implementação do sistema, a sensibilidade do sistema aos ruídos, entre outros, também desempenham um papel importante. Além disso, em alguns casos, um aumento na ordem do sistema pode resultar em complexidade adicional, aumento do tempo de processamento ou outras limitações práticas.

### 3.4 Primeira estratégia de comando CRONE

A primeira estratégia de comando CRONE, ou controle robusto de ordem não inteira, é uma técnica avançada no campo do controle automático. Esta metodologia explora o uso de derivadas e integrais de ordem fracionária estudados no [Capítulo 2](#). para obter um melhor desempenho e robustez em sistemas de controle, sendo entre suas principais características:

- A capacidade de controlar sistemas que apresentam atraso de tempo, como sistemas com alta inércia ou sistemas sujeitos a atrasos na transmissão de informações. Esses atrasos são frequentemente um desafio no controle de processos, pois podem causar oscilações indesejadas ou levar a respostas instáveis ([Termous et al., 2018](#)).
- Uma vantagem mais relevante que o regulador CRONE apresenta é proporcionar uma resposta de controle mais rápida e precisa. Para poder fazer isso ele incorporando uma derivada fracionária de ordem não inteira em sua estrutura. Essa derivada fracionária permite que o filtro CRONE, criado a partir do regulador CRONE capture informações de alta frequência e, ao mesmo tempo, atenua as oscilações indesejadas causadas pelos atrasos.
- A metodologia CRONE se caracteriza por trabalhar sistemas de controle de ordem fracionária, sendo que estes tem recebido um ótimo acolhimento pois, eles são mais flexíveis do que os de ordem inteira ([Termous et al., 2018](#)).

Para o realizar o projeto do filtro CRONE será projetado inicialmente o regulador CRONE em função da pesquisa bibliográfica realizada e será feita uma divisão de cinco passos, seguidamente será apresentado um exemplo de cálculo que ajudará a entender a aplicabilidade da parte teórica.

#### **Passo 1: Definição dos Parâmetros do Controlador**

Na primeira etapa do projeto, são estabelecidos os parâmetros fundamentais do controlador CRONE, visando alcançar um desempenho ótimo no que diz respeito à amplitude de resposta. O **Ganho Estático**  $C_0$ , cuidadosamente escolhido, desempenha um papel central, determinando o nível desejado de eficiência do sistema. Este parâmetro, extraído da análise do filtro passa-baixas, representa o ganho estático que o sistema deve possuir. Considerando que para o projeto de um controlador é muito importante, mas para o projeto de um filtro CRONE ele será considerado com o objetivo de garantir um ganho estático unitário.

Além disso, as **relações derivadas da Frequências de Corte**  $\omega_b$  e  $\omega_h$  são determinadas da modelagem da resposta em frequência do controlador. A definição destes parâmetros ocorre a partir da consideração da frequência e atenuação associadas ao filtro passa-baixas em análise. Essas frequências de corte são determinantes na adaptação do controlador ao comportamento do sistema, isso pode ser melhor explorado mediante a figura 3.10. onde são apresentadas de forma gráfica estas frequências.

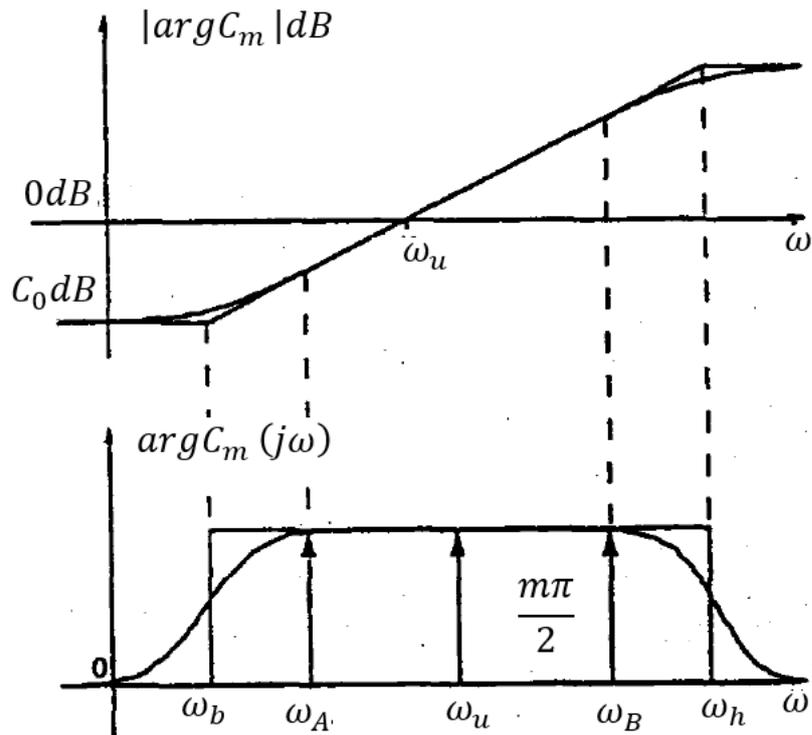


Figura 3.10 – Diagrama de bode do Regulador.

Fonte: Bansard

Ainda nesta etapa, a **Ordem Fracionária**  $m$  desempenha um papel crucial na busca do comportamento desejado de fase constante em torno da frequência  $\omega_u$  a qual é associada à frequência de corte, esta relação será chamado em todo o documento largura de banda passante para definir o filtro CRONE. A análise da estratégia CRONE considera a relação  $\Delta\varphi_m = \Delta\varphi_p + \Delta\varphi_r$ , onde a redução dos parâmetros  $\Delta\varphi_m$  e  $\Delta\varphi_p$  é efetuada quando  $\Delta\varphi_r = 0$ . Assim o regulador de fase constante em torno da frequência  $\omega_u$ , considerada uma versão ideal de ordem fracionada surge e é expressa na equação 3.17 (Oustalup, 1992).

### Passo 2: Estruturação da Função de Transferência

No segundo passo, a função de transferência é projetada para manter uma fase constante em torno de  $\omega_u$ , conferindo robustez ao sistema em face das variações de ganho e fase do processo controlado. A formulação dessa função é expressa pela equação 3.17:

$$C_m(s) = C_0 \left( \frac{1 + \frac{s}{\omega_b}}{1 + \frac{s}{\omega_h}} \right)^{m'} \quad (3.17)$$

onde  $C_0$  é uma constante dependente do ganho do sistema e segue o princípio descrito no passo 1, e as  $\omega'_x$  representam a relação de frequências no diagrama de Bode seguindo as condições estabelecidas, de forma semelhante a como foi mostrado na figura 3.10.

A equação 3.17 faz uma representação ideal do regulador CRONE e é usada quanto à estruturação necessária para obter a fase constante desejada. A versão real do regulador, contudo, é caracterizada por uma transmitância de ordem inteira, derivada de uma distribuição recursiva de zeros e polos, conforme ilustrado pela equação 3.18. (Oustalup, 1992)

$$C_N(s) = C_0 \prod_{i=1}^N \frac{1 + \frac{s}{\omega_{i'}}}{1 + \frac{s}{\omega_i}} \quad (3.18)$$

A compreensão destas formulações é aprimorada pela análise visual dos diagramas de Bode na figura 3.11.

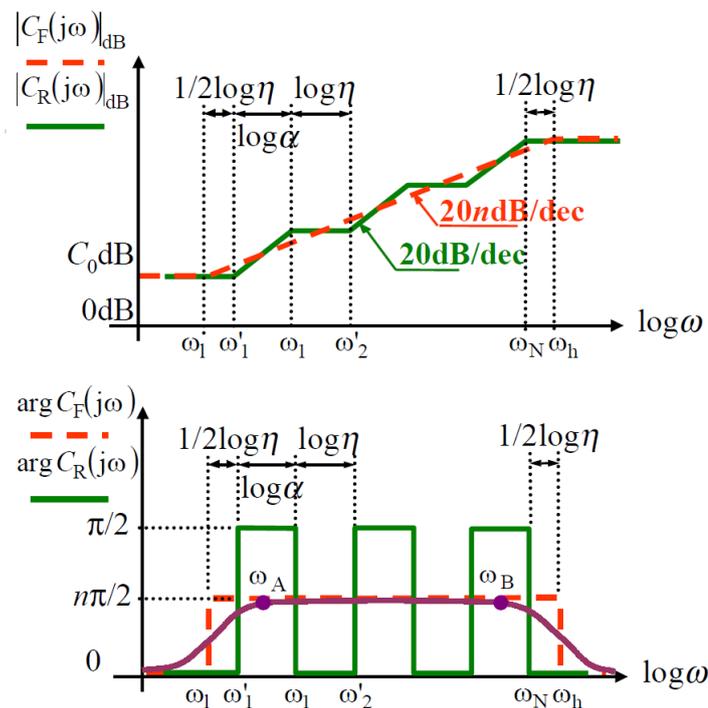


Figura 3.11 – Representação da magnitude e fase de um Filtro CRONE de primeira geração.

Fonte: Bansard

A equação 3.18 mostra as condições necessárias para determinar as frequências no diagrama de Bode, como evidenciado na figura 3.11, contribuindo para a compreensão das

interações entre fase, magnitude e frequência. Este processo de aproximação é realizado por meio dos métodos de Oustaloup, os quais são empregados para criar uma rede de polos e zeros que se aproxima do comportamento ideal dentro de uma faixa de frequência especificada. As frequências utilizadas tanto no diagrama de Bode, apresentado na figura 3.11, quanto no filtro, são calculadas em função do parâmetro  $m$ , seguindo as expressões apresentadas a seguir:

$$\left(\frac{\omega'_{i+1}}{\omega'_i}\right) = \left(\frac{\omega_{i+1}}{\omega_i}\right) = \eta\alpha > 1$$

Que pode ser representado como:

$$\left(\frac{\omega_i}{\omega'_i}\right) = \alpha > 1$$

$$\left(\frac{\omega'_{i+1}}{\omega_{i+1}}\right) = \eta > 1$$

As expressões anteriormente citadas são produto da largura de banda analisada onde o filtro apresenta um comportamento de fase constante e são produto de uma representação logarítmica entre a fase, a potência fracionada e a largura de banda.

### **Passo 3: Implementação do Controlador em Forma Real**

Na terceira etapa, a implementação prática do controlador, seja analógico ou digital, é abordada. No contexto de um controlador analógico, esta implementação pode ser realizada mediante o uso de componentes RLC (resistores, indutores e capacitores). Em contrapartida, em sistemas digitais, a aplicação de algoritmos específicos é essencial para incorporar o comportamento fracionário. É importante esclarecer que dentro dos objetivos deste trabalho, não está contemplada a descrição detalhada da representação real do sistema, pois a fundamentação desta pesquisa se baseia em analisar a metodologia CRONE para poder fazer uma extensão da mesma, com o intuito de criar um filtro CRONE e assim realizar análises teóricas justificadas mediante simulações.

### **Passo 4: Análise da Margem de Fase**

O quarto passo concentra-se na análise da margem de fase ( $\Delta\varphi_m$ ), um indicador crucial da estabilidade do sistema frente a mudanças na fase. A metodologia CRONE visa maximizar a margem de fase para assegurar robustez. A margem de fase total ( $\Delta\varphi_m$ ) incorpora tanto a margem de fase do processo ( $\Delta\varphi_p$ ) quanto a do controlador ( $\Delta\varphi_r$ ). A estratégia CRONE direciona seus esforços para otimizar  $\Delta\varphi_m$ , mesmo na ausência de  $\Delta\varphi_r$ , indicando que o controlador mantém uma fase constante em torno da frequência de corte.

### **Passo 5: Simulação e Ajuste Fino**

No quinto e último passo, a função de transferência aproximada é submetida a simulações para avaliação de desempenho e ajustes necessários. Essa etapa serve como verificação, garantindo que o controlador mantenha a fase desejada constante e atenda aos critérios de robustez estabelecidos.

**Exemplo 3.1.** A seguir será apresentado um estudo de caso prático que exemplifica a aplicação de um regulador CRONE com fase constante realizado por Oustalup (Oustalup, 1992), com o objetivo de aprofundar a compreensão do procedimento analítico. O foco será na análise detalhada do projeto do regulador CRONE, seguindo os passos descritos anteriormente.

O propósito é não apenas demonstrar a aplicação prática do regulador CRONE, mas também proporcionar uma visualização clara e representativa dos efeitos dessa abordagem no domínio da resposta em frequência do sistema. Em seguida, será apresentado um diagrama de Bode que ilustra os resultados obtidos, contribuindo para uma compreensão mais abrangente do impacto dessa metodologia. Este exemplo é apresentado porque partindo do Regulador CRONE é projetado o filtro fracionado que será estudado.

Considerando a seguinte função de transferência de um filtro passa-baixas de segunda ordem, onde os parâmetros a ser considerados são:  $G_0 = 10$ ,  $\zeta_0 = 0.5$  e  $\omega_0 = 10$  rad/s.

$$G(p) = \left( \frac{G_0}{1 + 2 \frac{\zeta_0}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}} \right)$$

O desafio em questão envolve a determinação dos parâmetros para as versões ideal e real do regulador CRONE de fase constante. Nesse contexto, assume-se uma fase de  $50^\circ$  e uma frequência  $\omega_u = 10\omega_0$ , onde  $\omega_0$  representa a frequência angular inicial. Essa escolha resulta em uma fase constante ao longo de uma década, geometricamente centrada em  $\omega_u$ .

Para simplificar os cálculos, estabelecemos que o número de pares de zeros e polos gerados será de 5 (cinco). Então para projetar o regulador CRONE, serão seguidos os seguintes passos:

- Determinação de  $m$  que é a potência fracionada;
- Determinação das relações de frequências  $\omega_b$  e  $\omega_h$ ;
- Determinação do termo  $C_0$ ;
- Determinando os termos  $\eta$  e  $\alpha$ ;
- Calcular as frequências em função dos parâmetros  $\eta$  e  $\alpha$  dos zeros e polos.

### 3.4.1 Determinação de $m$

O parâmetro  $m$  representa a potência fracionada de  $s$  a ser calculada para o regulador. Este valor é obtido ao analisar a fase constante desejada no problema e a fase gerada pela função de transferência em relação ao ganho e à frequência de corte solicitada. Dessa maneira, ao examinar cuidadosamente a fase, é possível derivar a equação necessária para determinar  $m$ , cuja representação é mostrada na expressão 3.19.

$$\Phi_m = \arg\beta(j\omega_u) + \pi * m$$

$$\Phi_m = \arg C(j\omega_u) + \arg G(j\omega_u) + \pi$$

$$m = \frac{2}{\pi} [\Phi_m - \arg G(j\omega_u) - \pi] \quad (3.19)$$

Substituindo o ganho do sistema, e considerando a fase o valor do  $m$ , é:

$$m = \frac{2}{\pi} * [(50^\circ - 174^\circ) \frac{\pi}{180} - \pi] = 0,488 \approx 0,5$$

### 3.4.2 Determinação das frequências $\omega_b$ e $\omega_h$

As frequências  $\omega_b$  e  $\omega_h$  delimitam a faixa de frequência na qual a fase se mantém constante, como demonstrado na Figura 3.11. A seleção dessas frequências é influenciada pela largura de banda passante para definir o filtro CRONE desejada, e a distribuição específica para este caso específico é visualizada na Figura 3.12.

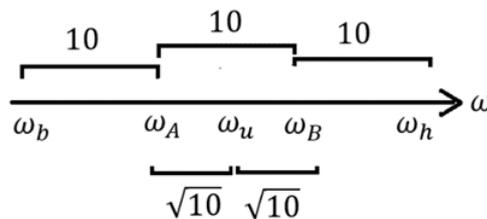


Figura 3.12 – Distribuição das frequências em função das restrições do problema

Fonte: Oustalup

Onde:

$$\omega_b = \frac{\omega_u}{10\sqrt{10}} = \sqrt{10}$$

$$\omega_h = 10\sqrt{10}\omega_u = 1000\sqrt{10}$$

### 3.4.3 Determinação do termo $C_0$

O parâmetro  $C_0$  representa o ganho do sistema, derivado a partir de critérios de robustez e da definição do ganho. A equação 3.20 é identificada por meio de manipulações algébricas, apresentando o ganho do sistema de maneira clara e fundamentada. (Oustalup, 1992).

$$|\beta(j\omega_u)| = 1$$

$$|C(j\omega_u)| |G(j\omega_u)| = 1$$

$$|C(j\omega_u)| = \frac{1}{|G(j\omega_u)|}$$

$$C_0 \left( \frac{1 + (\frac{\omega_u}{\omega_b})^2}{1 + (\frac{\omega_u}{\omega_h})^2} \right)^{\frac{m'}{2}} = \frac{1}{|G(j\omega_u)|}$$

$$C_0 = \frac{1}{|G(j\omega_u)|} \left( \frac{1 + (\frac{\omega_u}{\omega_b})^2}{1 + (\frac{\omega_u}{\omega_h})^2} \right)^{\frac{m}{2}} \quad (3.20)$$

Anteriormente foram identificadas as frequências do sistema e potência fracionada, para calcular o valor do ganho se realiza a substituição destes parâmetros na equação 3.20, encontrando assim o valor do ganho do sistema  $C_0$

$$C_0 = \frac{1}{|0,09852|} \left( \frac{1 + (\frac{100}{1000\sqrt{10}})^2}{1 + (\frac{100}{\sqrt{10}})^2} \right)^{\frac{0,5}{2}} = 1,78$$

### 3.4.4 Determinando os termos $\eta$ e $\alpha$

A relação entre as frequências  $\eta$  e  $\alpha$  é determinada através da análise da largura de banda passante para definir o filtro CRONE descrita pelas hachuras mostradas na superfície do diagrama de fase da figura 3.13. Essa análise está associada às frequências que caracterizam os polos e zeros do sistema.

Além disso, na figura 3.13, se apresenta uma seção destacada em vermelho corresponde à distância entre os zeros, enquanto a área sombreada em verde representa a distância entre o polo e o zero relacionando assim a potência fracionada  $m$ , conforme indicado na Equação 3.21.

Ao realizar manipulações matemáticas na Equação 3.21, é encontrada a equação 3.22, que descreve a potência fracionada em relação a uma função logarítmica das variáveis  $\eta$  e  $\alpha$ .

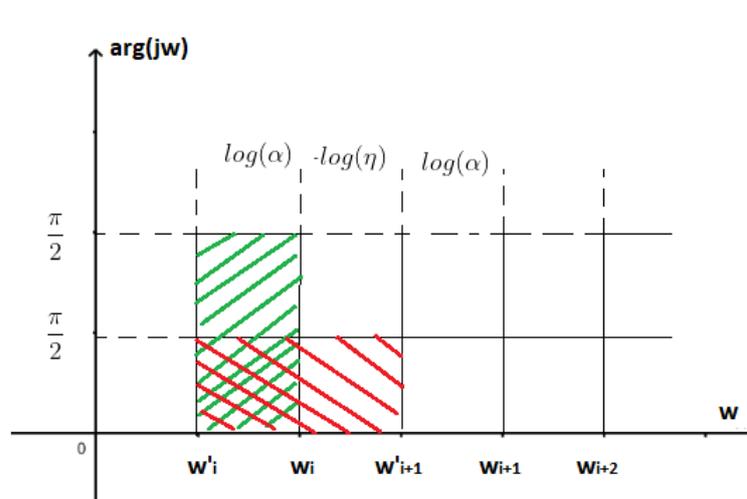


Figura 3.13 – Relação da hachura do diagrama de fase em função das frequências

$$m \frac{\pi}{2} (\log(\eta) + \log(\alpha)) = \frac{\pi}{2} \log(\alpha) \quad (3.21)$$

Mediante manipulação de funções logarítmicas se tem:

$$m = \frac{1}{1 + \frac{\log(\eta)}{\log(\alpha)}} = \frac{\log(\alpha)}{\log(\alpha\eta)} = \log_{\alpha\eta}(\alpha) \quad (3.22)$$

Calculando o logaritmo inverso encontra-se a equação 3.23

$$\alpha = (\alpha\eta)^m \quad (3.23)$$

Isolando o  $\eta$  e fazendo algumas manipulações matemáticas temos a equação 3.24

$$\eta = (\alpha\eta)^{1-m} \quad (3.24)$$

### 3.4.5 Calcular as frequências em função dos parâmetros $\eta$ e $\alpha$ dos zeros e polos

Considerando as condições de transmitância do regulador CRONE real, e a relação de frequências definidas anteriormente são representadas como:

$$\left(\frac{\omega_h}{\omega_b}\right) = (\alpha\eta)^N$$

Então:

$$\alpha\eta = \left(\frac{\omega_h}{\omega_b}\right)^{\frac{1}{N}}$$

Substituindo nas equações 3.25 e 3.26 observa-se os parâmetros  $\eta$  e  $\alpha$  separados em função das frequências  $\omega_h$  e  $\omega_b$ .

$$\alpha = \left(\frac{\omega_h}{\omega_b}\right)^{\frac{m}{N}} \quad (3.25)$$

$$\eta = \left(\frac{\omega_h}{\omega_b}\right)^{\frac{1-m}{N}} \quad (3.26)$$

Outra representação mais conveniente para as frequências em função dos parâmetros  $\eta$  e  $\alpha$  dos zeros e polos são mostrados nas equações 3.27 e 3.28

$$\omega'_1 = \eta^{0,5} \omega_b \quad (3.27)$$

$$\omega_1 = \alpha \omega'_1 \quad (3.28)$$

Como  $N=5$ , indica que o sistema vai ter cinco polos e cinco zeros e fazendo as substituições de  $\eta \simeq 2$  e  $\alpha \simeq 2$ , são encontradas as frequências do regulador CRONE, as quais são mostradas na [Tabela 3.2](#)

Tabela 3.2 – Resultados obtidos para um sistema de 5 polos e 5 zeros.

$\omega'_1 = \eta^{0,5} \omega_b$	$\omega_1 = \alpha \omega'_1$
$\omega'_1 = 4,47$	$\omega_1 = 8,94$
$\omega'_2 = 17,88$	$\omega_2 = 37,77$
$\omega'_3 = 71,51$	$\omega_3 = 143,1$
$\omega'_4 = 286,21$	$\omega_4 = 572,43$
$\omega'_5 = 1144,86$	$\omega_5 = 2289,73$

Fonte: Produzido pelo autor.

Os valores numéricos obtidos na tabela 3.2 mostram uma modificação da razão entre o primeiro polo e o primeiro zero, bem como entre o último polo e o último zero; tal modificação permite aumentar o comportamento assintótico de ordem  $m$  do controlador para o mesmo número de zeros e polos.

A representação do regulador CRONE como uma função de transferência é visualizada na Figura 3.14 através do diagrama de Bode, o qual destaca a fase projetada para o cálculo das frequências, assim como o aumento na magnitude do ganho, correspondendo a 10dB/década. É crucial compreender que a magnitude calculada pela abordagem CRONE é equivalente a uma relação em termos do domínio de Laplace de  $s^{0,5}$ , possibilitando um aprimoramento na velocidade do sistema.

No entanto, para gerar o regulador CRONE de primeira geração, utiliza-se a Equação 3.29. Essa equação estabelece uma relação entre efeitos de integração, efeitos proporcionais e o filtro passa-baixa empregado no projeto do sistema. Essa formulação é essencial para a implementação eficaz do regulador, incorporando elementos fundamentais que contribuem para a robustez e desempenho desejados.

$$C_F(s) = C_0 \left( \frac{\omega_I}{s} + 1 \right)^{n_I} \left( \frac{1 + s/\omega_I}{1 + s/\omega_h} \right)^n \left( \frac{1}{1 + s/\omega_F} \right) \quad (3.29)$$

com  $n_I, n_F \in \mathbb{N}$ ,  $e\omega_I, \omega_F \in \mathbb{R}^+$  e  $n_I, n_F$  ordem da banda limitante do integrador e ordem do filtro passa-baixa respectivamente.

Onde:

- $\omega \in [0, \omega_I]$ : efeito integral
- $\omega \in [\omega_I, \omega_I]$ : efeito proporcional
- $\omega \in [\omega_I, \omega_h]$ : Efeito diferencial

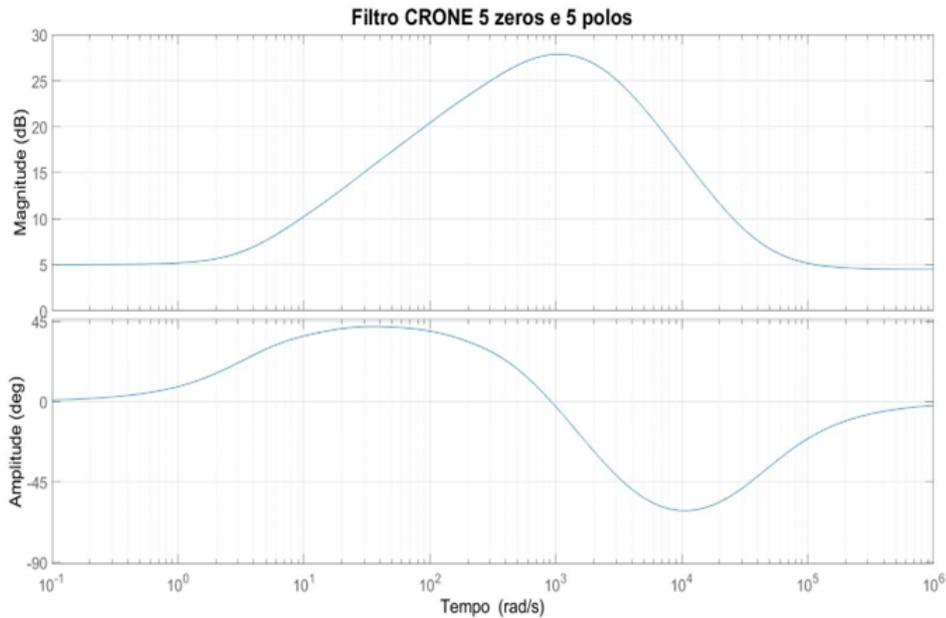


Figura 3.14 – Relação de magnitude e fase para a transmitância do sistema de cinco polos com cinco zeros

Fonte: próprio

- $\omega \in [\omega_h, \omega_F]$ : Efeito de ganho de HF
- $\omega \in [\omega_F, \infty)$ : efeito passa-baixa

A equação 3.29 descreve a função de transferência  $C_F(s)$  do regulador CRONE, estabelecendo uma relação crucial entre os efeitos de integração, efeitos proporcionais e o filtro passa-baixa utilizado no projeto do sistema. Essa formulação é fundamental para a implementação eficaz do regulador CRONE, pois incorpora elementos essenciais que desempenham um papel significativo na busca por robustez e desempenho desejados.

Além disso, a equação 3.29 sintetiza harmoniosamente esses três componentes, fornecendo uma representação matemática abrangente dos elementos essenciais para o regulador CRONE, resultando em uma implementação eficaz que busca robustez e desempenho desejados no controle de sistemas dinâmicos, esses dados podem ser representados de forma geral como mostra a figura 3.15

A equação é composta por três termos principais:

1.  $(\frac{\omega_I}{s} + 1)^{n_I}$ : Este termo representa os efeitos de integração, onde  $\omega_I$  é a frequência de integração e  $n_I$  é a ordem de integração. Ele introduz a capacidade de integrar o sinal de erro, contribuindo para a capacidade do regulador em lidar com sistemas dinâmicos.

2.  $(\frac{1+s/\omega_I}{1+s/\omega_h})^n$ : Esse termo incorpora efeitos proporcionais, onde  $\omega_I$  e  $\omega_h$  são as frequências de integração e corte, respectivamente. A ordem de efeitos proporcionais é denotada por  $n$ . Essa parte da equação reflete a contribuição proporcional à resposta do sistema, permitindo ajustar a dinâmica do controlador conforme necessário.

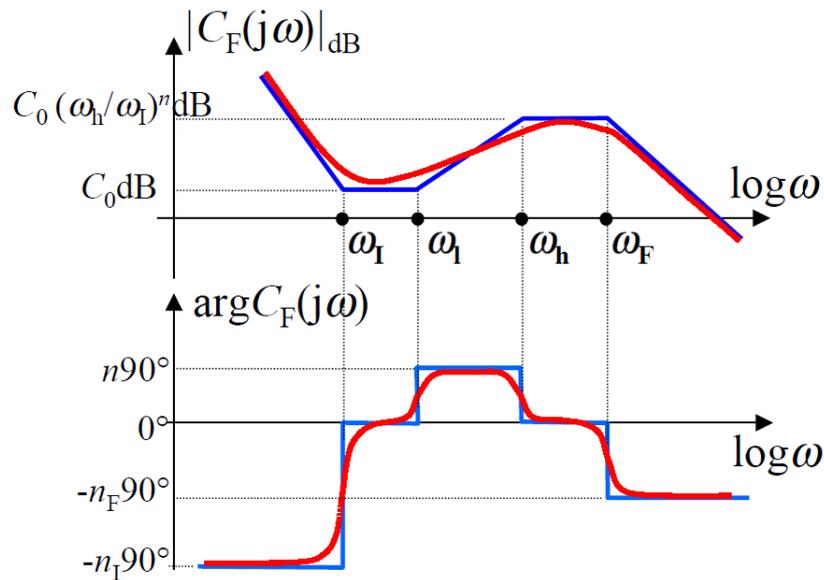


Figura 3.15 – Representação da frequência e fase de acordo com o diagrama de transmitância

Fonte: Oustalup

3.  $\frac{1}{1+s/\omega_F}$ : Este último termo representa o filtro passa-baixa, onde  $\omega_F$  é a frequência de corte do filtro. Ele desempenha um papel crucial na atenuação de componentes de alta frequência, contribuindo para a estabilidade e suavidade do sistema.

Já criado o regulador CRONE pode a partir dele ser gerado o filtro de frequência fracionada conforme será apresentado na seguinte seção.

### 3.5 Projeto do Filtro CRONE

Na engenharia, o filtro de Oustalup é comumente utilizado para aproximar o comportamento do operador de cálculo fracionário em uma faixa específica de frequências, representada pela banda  $[\omega_b, \omega_h]$ , como mostrado na Figura 3.10. Para isso, um conjunto de segmentos de reta é empregado para aproximar as propriedades lineares do cálculo fracionário. A partir dessa abordagem, o professor Oustalup propôs o método de projeto do filtro CRONE (Xu; Li, 2021). Esses segmentos de reta são gerados alternadamente por zeros e polos de ordem inteira, resultando em uma inclinação alternada na resposta em frequência, variando entre 0 dB/dec e -20 dB/dec. Assim, a resposta em frequência se aproxima de uma linha oblíqua (Xu; Li, 2021).

O filtro Oustalup realiza uma conversão dos operadores íntegro-diferenciais de ordem fracionária para ordem inteira no domínio da transformada de Laplace. Esse processo resulta em uma mudança na ordem da função de transferência, transformando  $s^\alpha$  com uma função de transferência de ordem inteira conforme definido por (Xue; Zhao; Chen, 2006), o filtro Oustalup é descrito a partir da seguinte definição:

**Definição: (Filtro Oustaloup).** Assumindo que o intervalo de frequência de ajuste entre as funções de transferências inteiras e fracionárias é  $[\omega_b, \omega_h]$ ,  $2N + 1$  é a ordem do filtro e  $\alpha$  é a ordem da diferenciação. Logo, o filtro pode ser escrito pela equação 3.30:

$$s^\alpha = C_0 \prod_{-N}^N \frac{s + w'_i}{s + w_i} \quad (3.30)$$

sendo que os polos, zeros e ganho do filtro 3.30 são calculados pelas equações 3.31, 3.32 e 3.33, contudo, a qualidade da aproximação do filtro Oustaloup pode não ser muito satisfatório em altas e baixas frequências, mais precisamente, nas frequências máximas e mínimas de ajuste  $[\omega_b, \omega_h]$ . Com isso, alguns algoritmos surgiram como efeito de mitigar esse problema (Xue; Zhao; Chen, 2006).

Na situação atual será trabalho com a adição de um filtro de primeira ordem passa baixa, de forma de garantir a frequência de corte e com o objetivo de que o numerador fique de ordem menor comparado com o denominador, dado que os filtros são projetados com o numerador de ordem inferior ao denominador para garantir estabilidade, facilitar a análise da resposta em frequência e mantendo a ordem do sistema relativamente baixa para simplificar a implementação prática, o que tem gerado bons resultados.

$$\omega'_i = \omega_b \left( \frac{\omega_h}{\omega_b} \right)^{\left( \frac{k+N+0.5(1-\alpha)}{2N+1} \right)} \quad (3.31)$$

$$\omega_i = \omega_b \left( \frac{\omega_h}{\omega_b} \right)^{\left( \frac{k+N+0.5(1+\alpha)}{2N+1} \right)} \quad (3.32)$$

$$c_0 = \omega_h^\alpha \quad (3.33)$$

As equações anteriores são equivalentes às equações deduzidas para o Regulador CRONE (Xu; Li, 2021).

De maneira análoga ao tratamento aplicado aos filtros de ordem inteira, os filtros de ordem fracionada são explorados, destacando-se a importância da determinação precisa da atenuação desejada e da frequência de corte. Nesse contexto, a teoria proposta por (Oustalup, 1992) para reguladores CRONE é adotada, proporcionando uma abordagem eficaz. Para a concepção da função de transferência, é crucial considerar a relação entre o número de zeros e polos. Em consonância com esse princípio, este trabalho sugere a implementação de uma função de transferência com três polos e dois zeros.

A proposta baseia-se na formulação apresentada na equação 3.34, seguindo a teoria mencionada por (Oustalup, 1992). Essa abordagem busca otimizar o desempenho do sistema, priorizando a estabilidade e a eficácia na atenuação de frequências indesejadas. A escolha

deliberada por três polos e dois zeros visa equilibrar a resposta do filtro, promovendo uma eficiente supressão de componentes indesejados enquanto mantém a estabilidade do sistema.

$$C_F(s) = C_0 \left( \frac{1 + s/\omega_{n1}}{1 + s/\omega_{d1}} \right) \left( \frac{1 + s/\omega_{n2}}{1 + s/\omega_{d2}} \right) \left( \frac{1}{1 + s/\omega_F} \right) \quad (3.34)$$

sendo:

- $\omega_{n1}, \omega_{n2}$  as frequências determinadas pela metodologia CRONE para numerador;
- $\omega_{d1}, \omega_{d2}$  as frequências determinadas pela metodologia CRONE para denominador;
- $\omega_F$  relação da frequência de corte do sistema;
- $C_0$  ganho que será ajustado para garantir um ganho estático no filtro que seja unitário.

Ao adotar esta estratégia, espera-se alcançar uma implementação robusta e eficaz, alinhada com os requisitos específicos de atenuação e frequência de corte. Dessa forma, a integração da teoria de reguladores CRONE na elaboração de filtros de ordem fracionada representa uma abordagem promissora, proporcionando maior flexibilidade e ajudando no controle das características desejadas do sistema. Este enfoque inovador contribui para aproveitar as vantagens dos sistemas fracionados em aplicações de filtros, pois até o momento da realização desta pesquisa não foram encontrados estudos semelhantes, desta forma deseja-se ampliar suas aplicações em diversos contextos de engenharia e controle de sistemas dinâmicos.

Assim, o filtro de ordem fracionária é ajustado com precisão em torno da frequência de corte desejada, desempenhando um papel crucial na eficaz atenuação de frequências. Sua capacidade de ajuste fino possibilita uma eficiência notável, especialmente ao lidar com frequências oriundas de ruído branco, graças à inclusão do parâmetro que tenha uma relação entre a variância de entrada e saída. Esse componente fundamental melhora significativamente a capacidade do filtro em atenuar de forma mais eficaz as componentes indesejadas do sinal, como ilustrado no diagrama de blocos da figura 3.16, onde ele consegue mitigar os efeitos dos ruídos introduzidos no sistema.

O diagrama de blocos mostra um sistema em malha fechada, que apresenta um bloco de controle, um sistema e um filtro, além disso apresenta o ruído inserido no sistema e uma bloco correspondente a uma perturbação. Para criar este diagrama foi utilizada uma planta teórica e partindo dessa planta foi projetado um controle PID e inserido o bloco corresponde ao filtro CRONE e analisada a resposta na saída do sistema conforme mostra a figura 3.17.

A Figura 3.17 ilustra o comportamento do sistema com a aplicação do filtro CRONE. O gráfico apresenta três curvas: a primeira representa o comportamento ideal do sistema, conforme mostrado na Figura 3.16, sem a presença de filtro, ruído ou perturbação. A segunda curva corresponde ao controle PID em malha fechada com a planta. Já a terceira curva, destacada em laranja, representa a resposta do sistema com a adição do filtro CRONE.

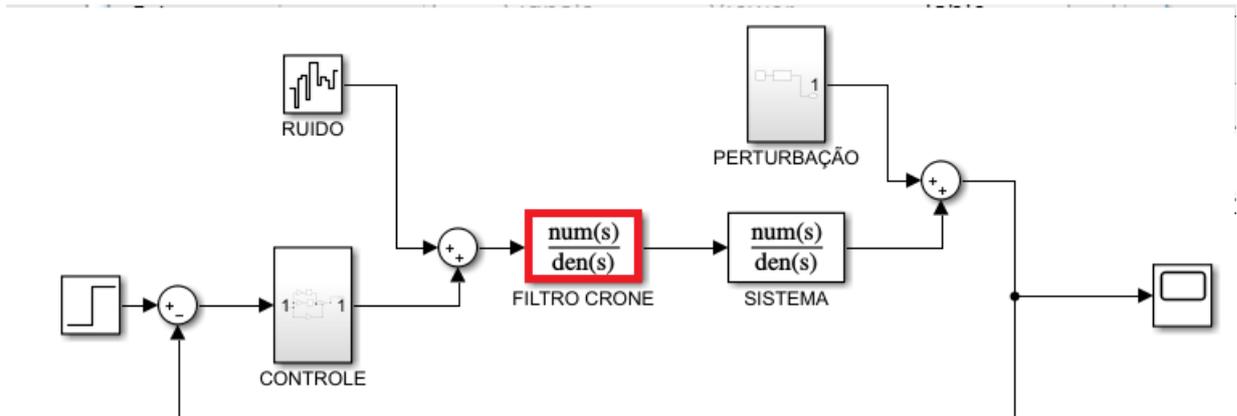


Figura 3.16 – Localização do bloco de controle

Fonte: próprio

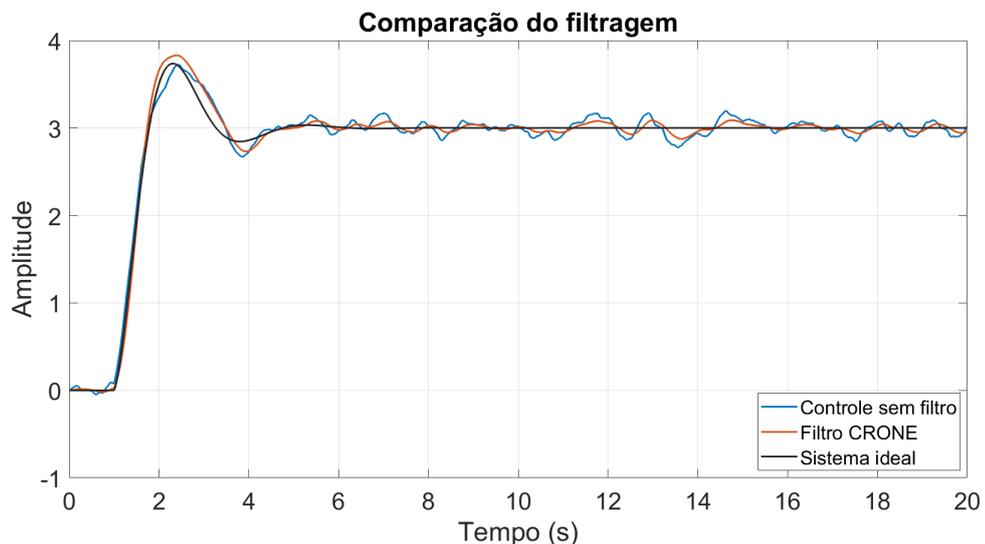


Figura 3.17 – Localização do bloco de controle

Fonte: próprio

Observa-se que a resposta do sistema torna-se mais suave com a inclusão do filtro CRONE, o que contribui para a obtenção de um sinal de melhor qualidade. Vale ressaltar que não há menção ao tipo e à metodologia utilizados para criar o controle PID aplicado neste teste, uma vez que ele foi desenvolvido apenas para verificar a funcionalidade do filtro CRONE e não faz parte do escopo deste trabalho. Sua inclusão no diagrama de blocos foi feita apenas para fins ilustrativos e explicativos com a finalidade de ter um sistema completo e facilitar o entendimento do leitor.

Detalhes e comparações do comportamento do filtro CRONE serão apresentados no [Capítulo 4](#), onde será exposto como a abordagem específica adotada proporciona uma resposta refinada sobre as características de atenuação. No contexto desta análise, será

considerada uma variação de frequência abrangendo uma década no diagrama de fase, evidenciando a adaptabilidade e eficácia do filtro de ordem fracionária diante dessa faixa de operação. Este enfoque busca não apenas ressaltar a robustez do sistema proposto, mas também fornecer uma visão sobre a versatilidade do filtro ao enfrentar desafios variados a potência fracionada.

## 4 ANÁLISE DE RESULTADOS

Neste capítulo, serão apresentados os resultados obtidos por meio da metodologia CRONE. Dois exemplos de projeto serão exibidos, começando com sistemas que possuem dois polos e dois zeros. Nesse contexto, serão derivadas as funções do regulador CRONE e do Filtro CRONE para um valor específico de  $m = 0,5$ . Em seguida, é explorado um cenário em que um filtro CRONE é analisado quanto à sua resposta diante de ruídos. Posteriormente, a metodologia será expandida para valores de  $0 < m < 1$ , utilizando as técnicas discutidas no [Capítulo 3](#). Os resultados serão apresentados para  $m = 0,1$ ,  $m = 0,5$  e  $m = 0,8$ .

Uma vez identificados os filtros CRONE, será calculada a variância do sistema com um intervalo de amostragem  $T$ , e um sistema será projetado para cada valor de  $m$ . A análise da variância seguirá a metodologia apresentada no trabalho de doutorado de ([Muñoz, 2017](#)), que abordou o desenvolvimento de um Filtro de Kalman Adaptativo para sistemas em malha fechada. Neste contexto, destaca-se a importância do tratamento das variâncias do sistema, visando a criação de filtros de diferentes ordens com a mesma variância, atenuação e frequência de corte, ajustados conforme as condições do problema.

Além disso, será realizada uma comparação da resposta desses sistemas a entradas degrau unitário, com o objetivo de identificar a rapidez de resposta. Essa análise permitirá avaliar a eficácia dos filtros fracionados a partir da metodologia CRONE em diferentes configurações, proporcionando valiosos resultados sobre sua aplicabilidade e desempenho.

### 4.1 Exemplos de filtros fracionados partindo da metodologia CRONE

A seguir, serão apresentados dois exemplos ilustrativos. O primeiro aborda a aplicação da metodologia CRONE para derivar um sistema com dois polos e dois zeros. Em seguida, será gerado um filtro com três polos e dois zeros. As respostas desses sistemas serão analisadas por meio de respostas a degrau unitário, bem como por diagramas de fase e magnitude de Bode.

No segundo exemplo, será conduzida uma análise de variância e explorada a capacidade do sistema de filtrar um ruído branco de variância conhecida. O objetivo é obter um filtro de primeira ordem com características equivalentes aos sistemas de ordem superior onde seja analisada a relação entre a variância de entrada e saída. Permitindo avaliar assim, a capacidade de reação do filtro em presença de ruído branco. Essa abordagem proporcionará uma compreensão mais aprofundada das capacidades do filtro contribuindo para uma avaliação adequada de seu desempenho.

**Exemplo 4.1.** Considere o seguinte sistema de segunda ordem com ganho estático, amortecimento e frequência respectivamente iguais a:  $G_0 = 1$ ,  $\zeta_0 = 0,5$  e  $\omega_0 = \pi rad/s$ . Projete um filtro partindo do regulador CRONE gerado com dois zeros e três polos:

$$H(s) = \left( \frac{G_0}{1 + 2\frac{\zeta_0}{\omega_0}s + \frac{s^2}{\omega_0^2}} \right)$$

Para projetar o filtro é preciso identificar os parâmetros de frequência para um regulador CRONE com 2 polos e 2 zeros, onde  $m = 0,5$ . Em seguida, será projetado um filtro com potência fracionada, conforme descrito na seção 3.5. Posteriormente, será projetado um filtro equivalente de primeira ordem relacionado a variância de entrada e saída do sistema de terceira ordem.

Para realizar o projeto do filtro, foi desenvolvido um algoritmo, o qual é apresentado no Apêndice A1. Os parâmetros para o regulador CRONE foram obtidos com base nesse programa, e com esses dados foi gerado o filtro CRONE, seguindo a metodologia descrita no Capítulo 3.

- $C = 42.1657$ ;
- $\alpha = 2,3598$
- $\eta = 2,3596$ .

Utilizando as constantes anteriores, são identificados os parâmetros para as frequências mostrados na tabela 4.1

Tabela 4.1 – Resultados obtidos para um sistema de 2 polos e 2 zeros.

$\omega'_1 = \eta^{0,5}\omega_b$	$\omega_1 = \alpha\omega'_1$
$\omega'_1 = 8,6666$	$\omega_1 = 20,4516$
$\omega'_2 = 48,2583$	$\omega_2 = 113,8813$

Fonte: Produzido pelo autor.

Com base nos dados fornecidos na Tabela 4.1, foi encontrada a função que representa o regulador CRONE mostrada na equação 4.1 e cuja representação gráfica é apresentada na figura 4.1.

A figura 4.1 representa o diagrama de magnitude e fase utilizado para gerar o regulador CRONE com uma fase constante de  $35^\circ$ , percebe-se nela o aumento de 10dB/dec como era esperado, a função de transferência que representa este sistema é mostrada da equação 4.1 corresponde ao regulador CRONE.

$$F_1 = \left( \frac{0,1008s^2 + 5,727s + 41,98}{0,0004275s^2 + 0,05755s + 1} \right) \quad (4.1)$$

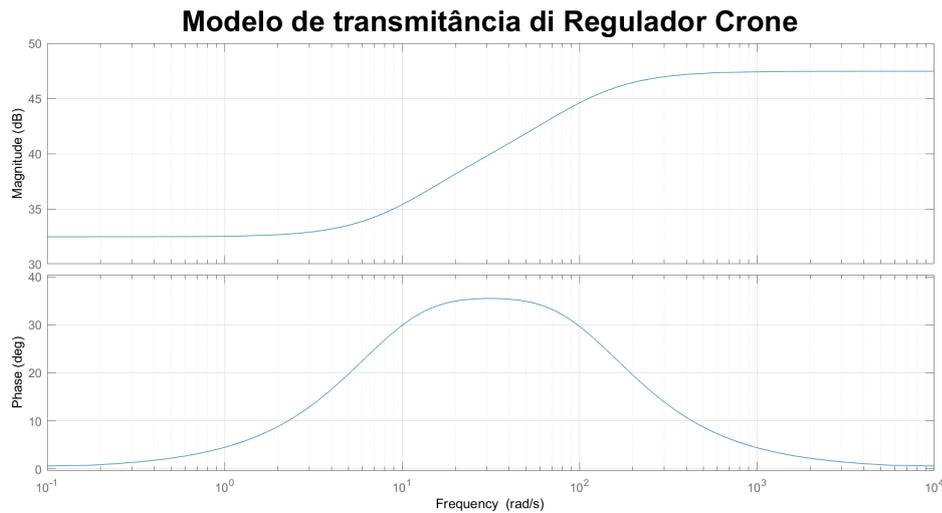


Figura 4.1 – Diagrama de transmitância para o sistema de polos e dois zeros

Fonte: próprio

Após obter a função de transferência, que é utilizada no projeto do regulador CRONE, incorpora-se um filtro passa-baixa de primeira ordem para gerar o filtro de potência fracionada utilizando a metodologia CRONE, conforme apresentado na Equação 4.2.

$$F_2 = \left( \frac{0,1008s^2 + 5,727s + 41,98}{0,005712s^3 + 0,787s^2 + 15,78s + 41,98} \right) \quad (4.2)$$

Ao manipular a representação do modelo expresso na equação 4.2 referente ao filtro CRONE, esta foi discretizada empregando um tempo de amostragem  $T = 0,01s$ , fundamentado na resposta do sistema para um sinal degrau unitário onde a estabilização deste acontece após 2,5s. Então foi considerado viável uma amostragem a cada 10ms.

Seguidamente foi realizado o processo para a identificação a relação entre a variância de entrada e saída do sistema de terceira ordem, este cálculo se baseia no cálculo apresentado no Capítulo 2, onde foi encontrada para o sistema exemplificado uma variância de 0.00278, com este parâmetro foi projetado um sistema de primeira ordem, cuja representação é mostrada na equação 4.3:

$$F_3 = \left( \frac{3,28}{0,3183s + 3,28} \right) \quad (4.3)$$

Este sistema de primeira ordem possui uma atenuação próxima à do sistema de terceira ordem, sendo capaz de atenuar eficientemente as frequências desejadas. A Figura 4.2 destaca a comparação entre os diagramas de magnitude e fase do filtro CRONE de primeira geração e um sistema de primeira ordem. É evidente que, apesar do filtro possuir três polos e dois zeros, seu comportamento assemelha-se ao de um sistema de ordem unitária,

como demonstram os diagramas de fase e magnitude do regulador.

Na Figura 4.3, é apresentado o desempenho dos dois sistemas diante de uma entrada degrau. Observa-se que o filtro CRONE consegue reagir de maneira mais ágil em comparação com o sistema de primeira ordem, mesmo mantendo a mesma variância. Isso evidencia a capacidade reativa superior do sistema CRONE.

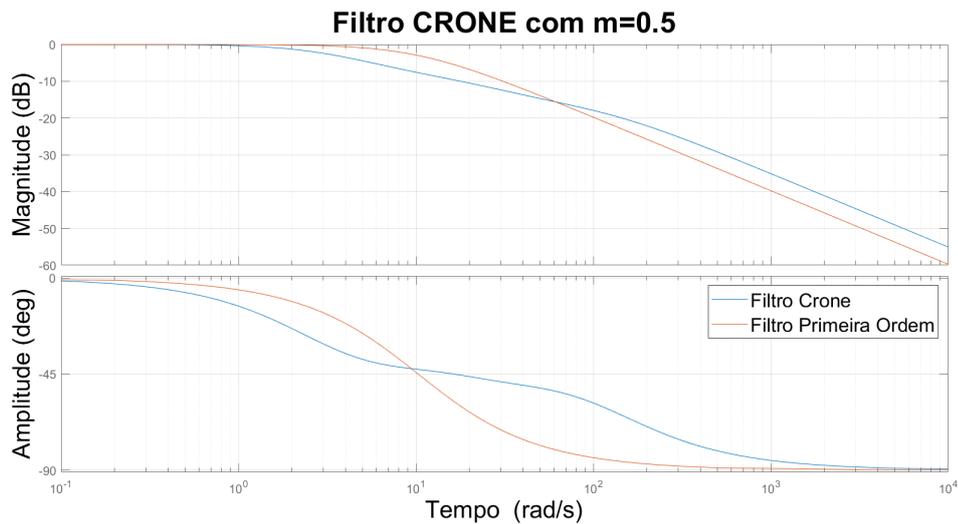


Figura 4.2 – Diagrama de bode do Filtro CRONE

Fonte: próprio

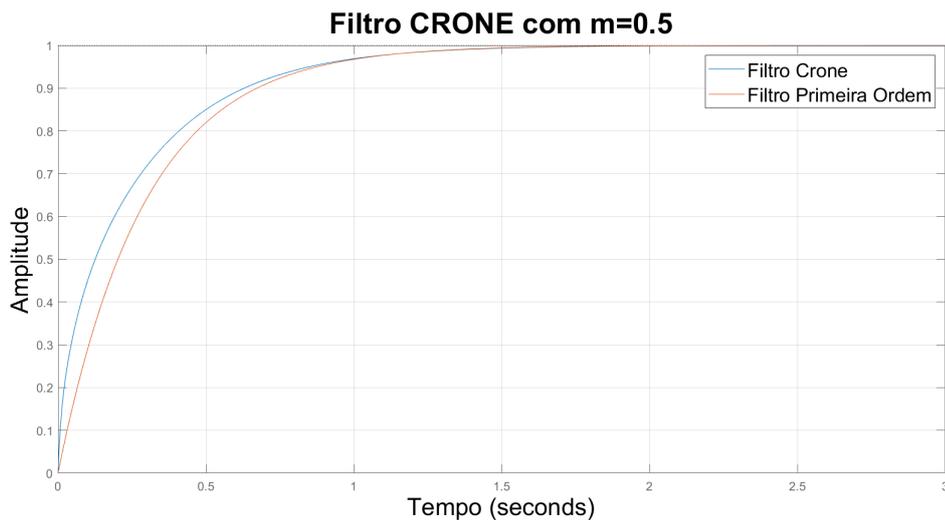


Figura 4.3 – Comparação da saída Degrau para os sistemas projetados

Fonte: próprio

Seguidamente utilizando o sistema discretizado que permitiu encontrar a variância, foi realizada uma comparação em função da filtragem dois sistemas de primeira ordem e do

filtro CRONE, a figura 4.4 mostra o resultado obtido:

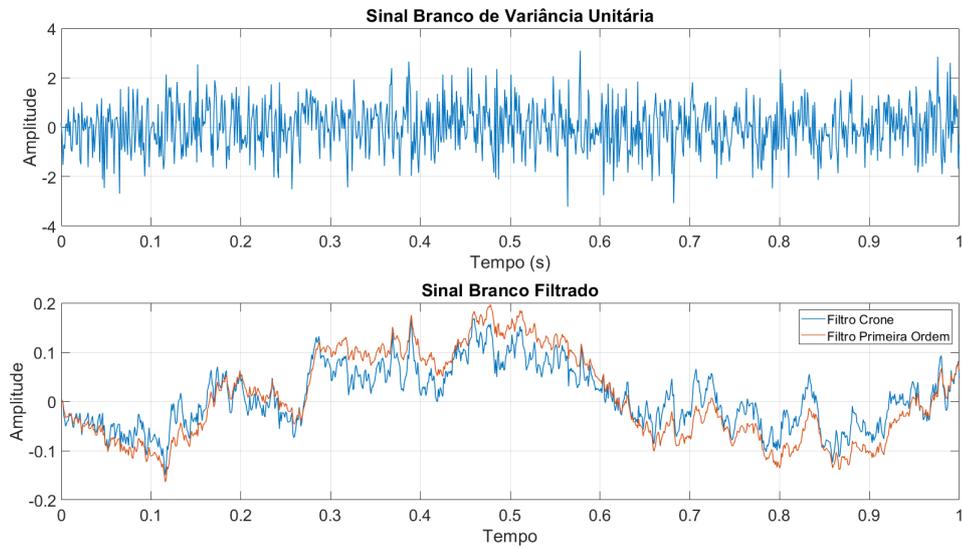


Figura 4.4 – Representação da função de transferência discreta.

Fonte: próprio

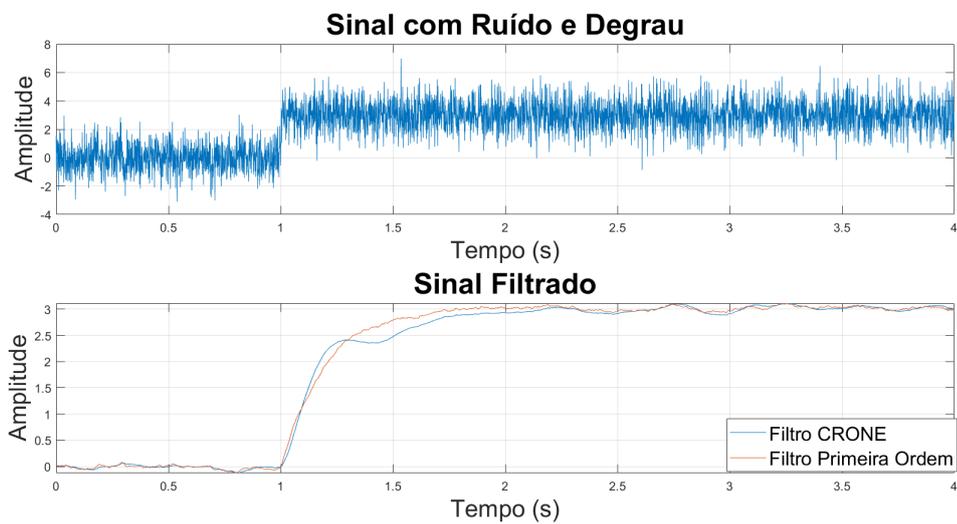


Figura 4.5 – Filtragem de um sinal ruidoso

Fonte: próprio

Nota-se que o sistema de ordem superior, representado pela cor azul, reage melhor à filtragem em comparação com o sistema de primeira ordem, indicado pela cor vermelha. Entretanto, é importante ressaltar que os resultados obtidos com o sistema de primeira

ordem são notavelmente semelhantes, uma vez que ele foi projetado com a mesma variância, isso pode ser verificado na figura 4.5

**Exemplo 4.2.** A seguir, será apresentado um filtro CRONE gerado com a metodologia anteriormente descrita, com o objetivo de demonstrar como o filtro de primeira ordem é criado e como a relação entre a variância de entrada e saída é calculada.

$$H(s) = \left( \frac{0,1548s^2 + 10,59s + 22}{s^3 + 17,04s^2 + 64,59s + 22} \right)$$

A função de transferência mostrada apresenta um ganho estático unitário e está representada em fatores unitários o que facilita a determinação de polos e zeros.

$$H(s) = \left( \frac{0,1548(s+66,2662)(s+2,1447)}{(s+11,6643)(s+5)(s+0,3773)} \right)$$

Discretizando esta função com um tempo de amostragem de 0,1s coerente a estabilização do sistema, pode ser representado o filtro discreto da seguinte forma:

$$H(z) = \left( \frac{0,0399z^2 - 0,0202z - 0,0097}{z^3 - 1,8811z^2 + 1,0731z - 0,1820} \right)$$

Que pode ser representada como:

$$H(z) = \left( \frac{0,0399(z-0,8074)(z+0,3011)}{(z-0,9631)(z+0,6063)(z+0,3117)} \right)$$

Na representação anterior foi feita a divisão em dois polinômios discretos de primeira ordem com um polo e um zero e um polinômio de primeira ordem com um polo e sem zeros, essa representação a mostrada na figura 4.6.

Inicialmente foi feita uma comparação da resposta do sistema contínuo e discreto, e o representado pela divisão dos polinômios de primeira ordem como mostrado na figura 4.6.

Utilizando como entrada um sinal degrau unitário foi verificando que os sistemas ficam superpostos, garantindo que a discretização foi bem realizada, seguidamente foi calculada a variância na saída para o sistema discreto e para o sistema que foi dividido em sistemas de ordem unitário, onde era incorporada uma entrada com ruído branco de média zero e variância unitária para realizar os testes, conforme foi apresentado no [Capítulo 2](#), na equação 2.46, trazemos ela aqui para facilitar compressão ao leitor.

$$VarCr = G * var(H1) * var(H2) * var(H3) * var(x)$$

Seguindo o procedimento descrito na **seção 2.4**, e calculado a variância do filtro CRONE, esta é igualada com a variância que será obtida de um sistema de primeira ordem, o qual está descrito como mostra a equação 4.4:

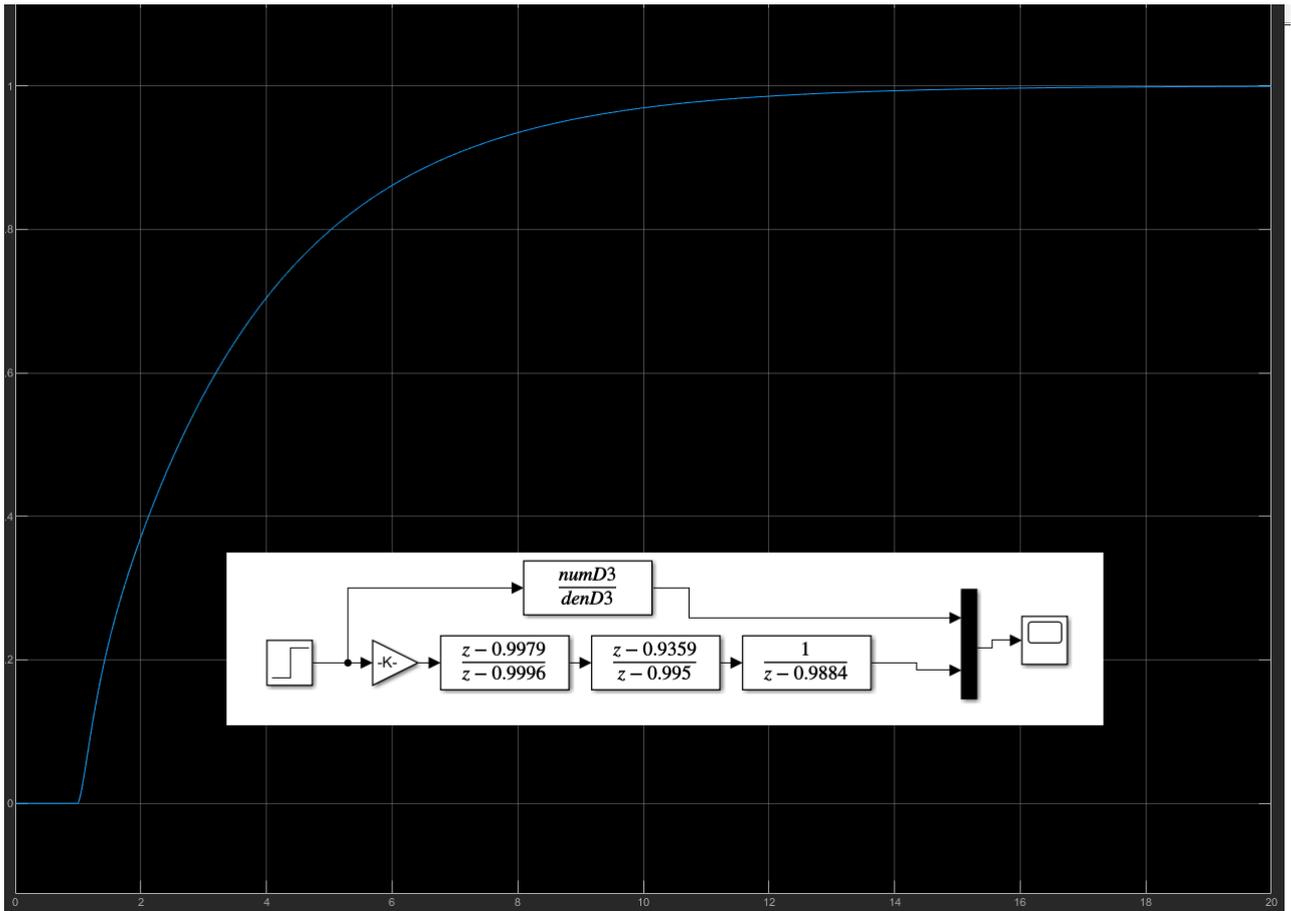


Figura 4.6 – Comparação da filtragem dos filtros CRONE e de Primeira ordem.

Fonte: próprio

$$H(S) = \frac{a}{\tau s + a} \quad (4.4)$$

com:

$$\tau = \frac{1}{\omega_0}$$

e a vai ser definido como:

$$a = \frac{\tau}{T} \sqrt{\frac{12 \cdot \text{VarCr}}{2 \cdot \text{varx} - \text{VarCr}}}$$

Sendo:

- $\tau$  Relaciona a frequência de corte do sistema
- $T$  é o tempo de amostragem
- $\text{VarCr}$  é a variância do filtro gerado com a metodologia CRONE
- $\text{varx}$  é a variância de entrada
- $a$  é o parâmetro que ajusta a função de primeira ordem à variância CRONE

Realizando manipulações matemáticas encontra-se a equação 4.5 que representa a variância do sistema de primeira ordem, calculada a partir da variância do filtro CRONE mostrada na equação 2.46.

$$\text{vary} = \frac{2 \cdot (a \cdot T)^2 \cdot \text{varx}}{12 \cdot \tau^2 + (a \cdot T)^2} \quad (4.5)$$

Após calcular a variância, procedeu-se à comparação utilizando o *Matlab*, resultando na confirmação dos valores. Para o filtro com variância de 0,0018, foi projetado um sistema de primeira ordem com igual relação entre a variância de entrada e saída e frequência de corte, de modo a proporcionar uma atenuação semelhante ao sistema de ordem superior. Os resultados dessas análises estão ilustrados nas Figuras 4.7 e 4.8.

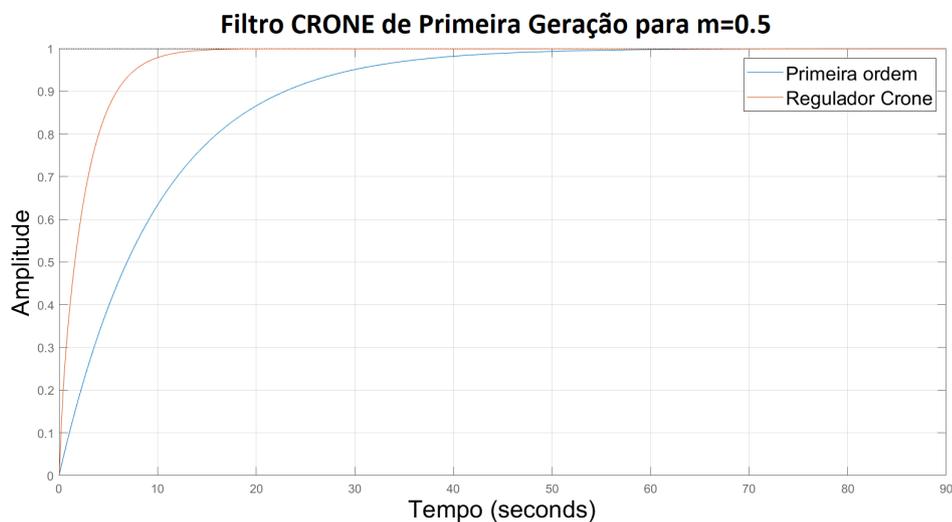


Figura 4.7 – Comparação da resposta a um degrau unitário de um sistema de terceira e primeira ordem

Fonte: própria

Analisando as figuras anteriores, é notável que o sistema de terceira ordem responde de maneira semelhante ao sistema de primeira ordem, porém com uma reação mais rápida. Essa resposta assemelha-se à encontrada no Exemplo 1, onde o diagrama de Bode apresenta uma variação na fase que atinge  $90^\circ$ , conforme esperado para um sistema de primeira ordem.

Além disso, a curva do filtro de terceira ordem começa com uma atenuação similar à do filtro de primeira ordem nas baixas frequências. No entanto, à medida que a frequência aumenta, a atenuação do filtro de terceira ordem torna-se mais pronunciada, assim o filtro de terceira ordem apresenta uma maior inclinação na sua curva de magnitude, indicando um declínio mais rápido do ganho com o aumento da frequência. Isso é esperado, uma vez que filtros de ordem superior tendem a ter uma maior atenuação fora da banda passante

Com relação a fase, percebe-se que ambas as curvas começam em torno de  $0^\circ$  em

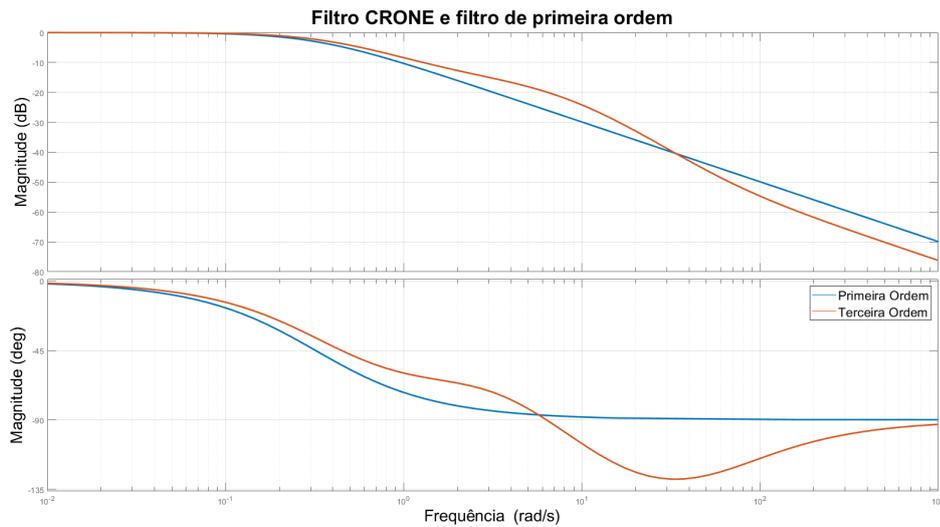


Figura 4.8 – Diagrama de bode do sistema de terceira e primeira ordem

Fonte: Própria

baixas frequências e decrescem para  $-180^0$  em altas frequências. Sendo que a curva de fase do filtro de terceira ordem declina mais rapidamente do que a do filtro de primeira ordem, refletindo a presença de mais polos no sistema desta forma 0 a fase do filtro de terceira ordem não atinge  $-180^0$  a uma frequência mais baixa ele chega aos  $-135^0$  e volta aos  $-90^0$ , se comportando de forma semelhante ao filtro de primeira ordem, essa é uma característica adicionada da metodologia CRONE aplicada.

A Figura 4.21, é apresentada uma situação de filtragem que permite a comparação entre os dois sistemas estudados. O filtro de dois zeros e três polos é representado pela cor azul, enquanto o sistema de primeira ordem é identificado pela cor vermelho. Observa-se um comportamento muito próximo entre os dois, evidenciando que o sistema de ordem inferior possui uma capacidade de filtragem comparável à do sistema de ordem superior. Isso é coerente com a expectativa, pois o sistema de primeira ordem foi projetado com a mesma relação entre a variância de entrada e saída do sistema de ordem superior.

## 4.2 Análise do Comportamento Geral da Metodologia CRONE

Para realizar a análise da metodologia CRONE, é incorporado um filtro passa-baixa com uma frequência de corte pré-definida e atenuação, elementos essenciais para o procedimento. Esses parâmetros desempenham um papel crucial no cálculo do ganho de magnitude do filtro passa-baixa, uma etapa fundamental na metodologia CRONE. A determinação do parâmetro  $m$  baseia-se no conceito de fase constante, com a definição de três fases que são fundamentais nesse processo.

Para trabalhar com três valores diferentes de  $m$ , é necessário modificar a fase, resul-

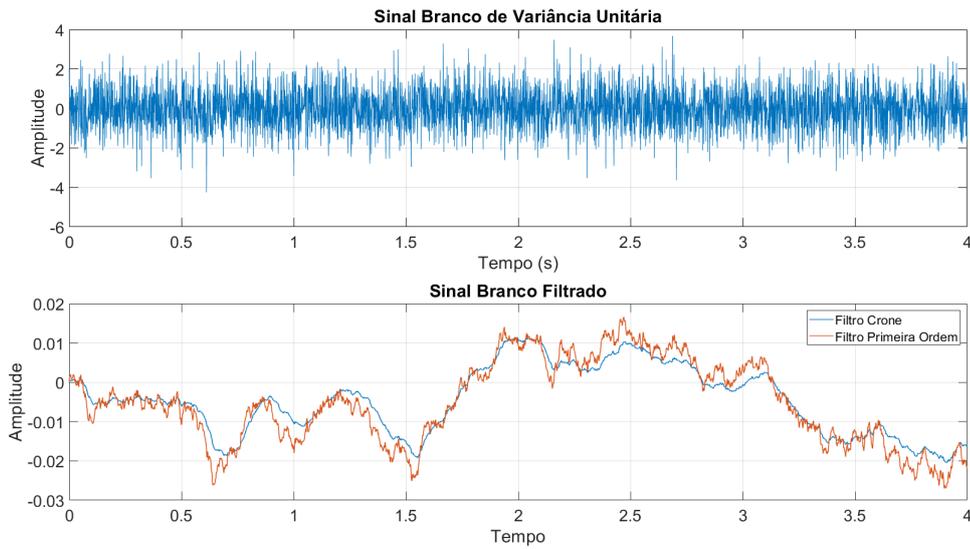


Figura 4.9 – : Resposta de filtragem dos filtros de terceira e primeira ordem

Fonte: Própria

tando na necessidade de três fases distintas. Assim, foram conduzidas análises individuais seguindo a mesma metodologia utilizada na identificação do filtro CRONE com  $m = 0,5$ . Nesse contexto, as fases foram variadas para obter valores de  $m$  iguais a 0,1; 0,5 e 0,8. Em seguida, foram utilizados os parâmetros de frequência, atenuação e ganho estático descritos a seguir, juntamente com as fases indicadas, para gerar um regulador de dois polos e dois zeros com o objetivo de implementar o filtro CRONE com esses parâmetros. Desta forma, a função de transferência que representa um filtro passa-baixa para iniciar a análise é mostrada na Equação 4.6.

- $F = 1.0Hz$ ;
- $A = 1.0dB$  ;
- $G = 1$ .
- $fases = [14,77; 50,77; 77,77]$ .
- $N = 2$ .

$$F_s = \left( \frac{1}{0,3948S^2 + 1,4185S + 1,0000} \right) \quad (4.6)$$

Considerando os resultados obtidos no projeto do regulador para  $m = 0,5$ , realizou-se uma abordagem mais abrangente seguindo a mesma lógica. Nesse contexto, promoveu-se uma variação do parâmetro  $m$ , o qual se ajusta por meio da alteração da fase, permitindo manter constantes os requisitos do sistema, os quais são os mesmos apresentados na (seção 4.1). Com o propósito de efetuar uma comparação, escolheram-se três valores distintos de  $m$  para o projeto dos reguladores CRONE.

O objetivo desse procedimento é identificar o comportamento do regulador à medida que o valor de  $m$  aumenta e verificar como o equivalente de primeira ordem reage a essas modificações. É importante salientar que cada regulador gera uma variância específica, sendo que essas variações não são necessariamente iguais; embora apresentem valores próximos, podem diferir. A seguir, é apresentado o comportamento do filtro CRONE para os três valores selecionados.

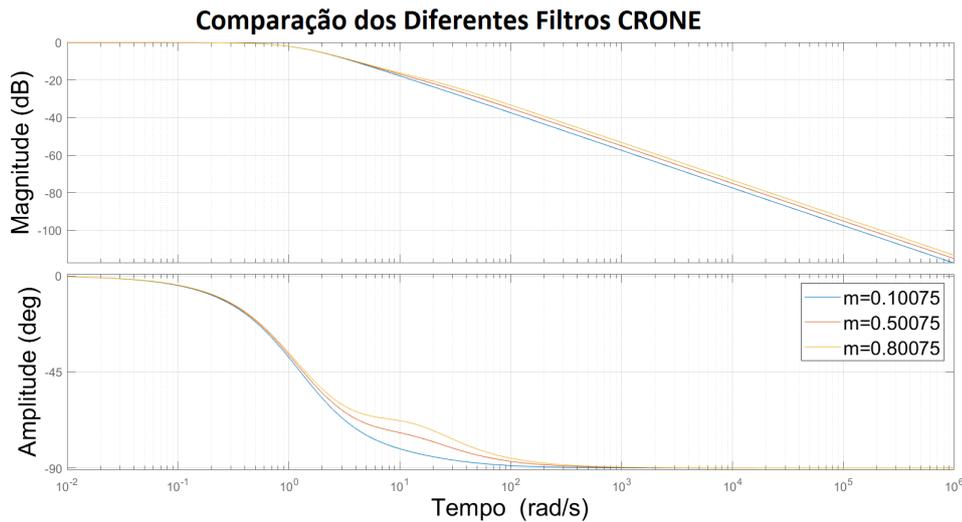


Figura 4.10 – : Comparação da entrada degrau para os filtros CRONE

Fonte: Própria

Na Figura 4.10, apresenta-se o comportamento dos filtros CRONE em relação à variação da fase, onde cada fase resulta em um valor diferente de  $m$ . Observa-se que, à medida que  $m$  diminui, o sistema demonstra uma resposta mais rápida, corroborando o padrão identificado durante a comparação dos sistemas anteriores.

A Figura 4.11 exibe o diagrama de Bode dos filtros CRONE, com variâncias correspondentes a  $m = 0,1, 0,5, 0,8$ , sendo respectivamente  $1,8720 \times 10^{-6}$ ,  $6,1442 \times 10^{-7}$ ,  $2,6644 \times 10^{-7}$ .

A figura 4.20 apresenta a resposta em magnitude e fase para os sistemas de primeira ordem gerados partindo dos sistemas de ordem superior, é observada uma semelhança no comportamento do diagrama.

Finalmente na figura mostrada a seguir se apresentam os resultados dos três sistemas com relação a uma entrada degrau unitário.

Na figura 4.13 é apresentado a comparação dos sistemas de primeira ordem gerados com cada valor de  $m$ , observa-se que na medida que o valor do  $m$  cresce o sistema fica mais lento, além disso, nas figuras 4.14, 4.15, 4.16 se apresentada-se uma comparação do sistema de primeira ordem com relação os sistemas de ordem superior, em todos os casos com diferentes valores de  $m$  é observado que os filtros CRONE são mais rápidos comparados

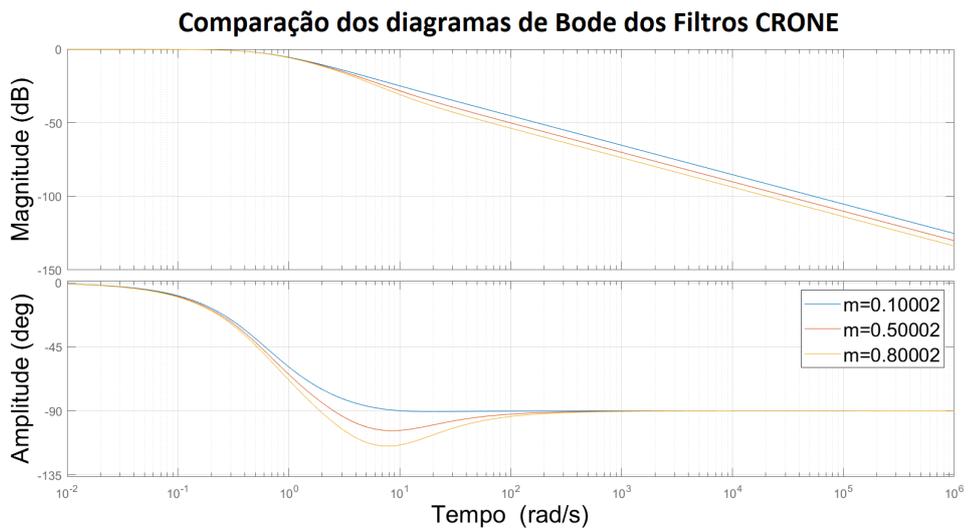


Figura 4.11 – : Comparação da fase e magnitude para os filtros CRONE

Fonte: Própria

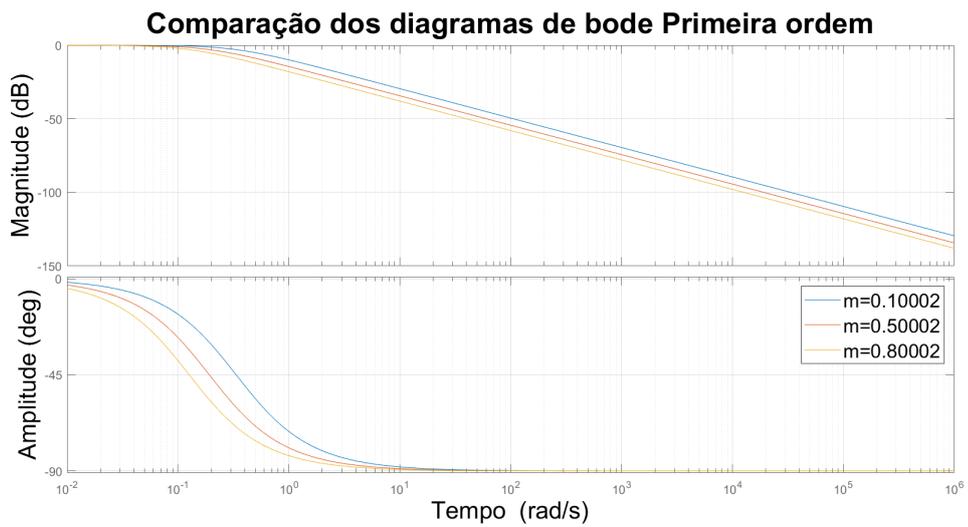


Figura 4.12 – : Comparação da fase e magnitude para os sistemas de ordem um

Fonte: Própria

com os sistemas de primeira ordem.

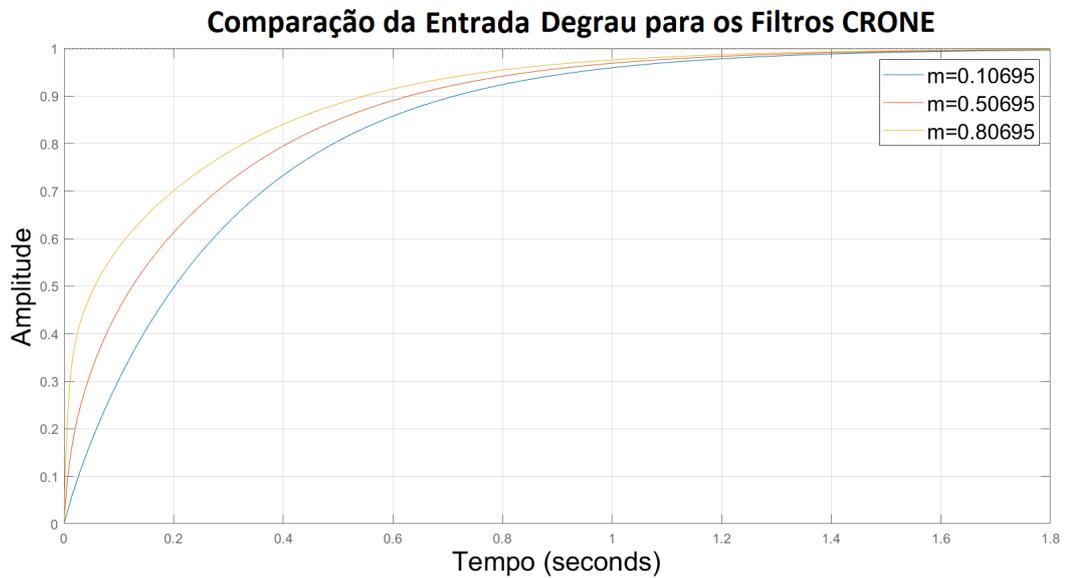


Figura 4.13 – :Comparação das saídas ao Degrau

Fonte: Própria

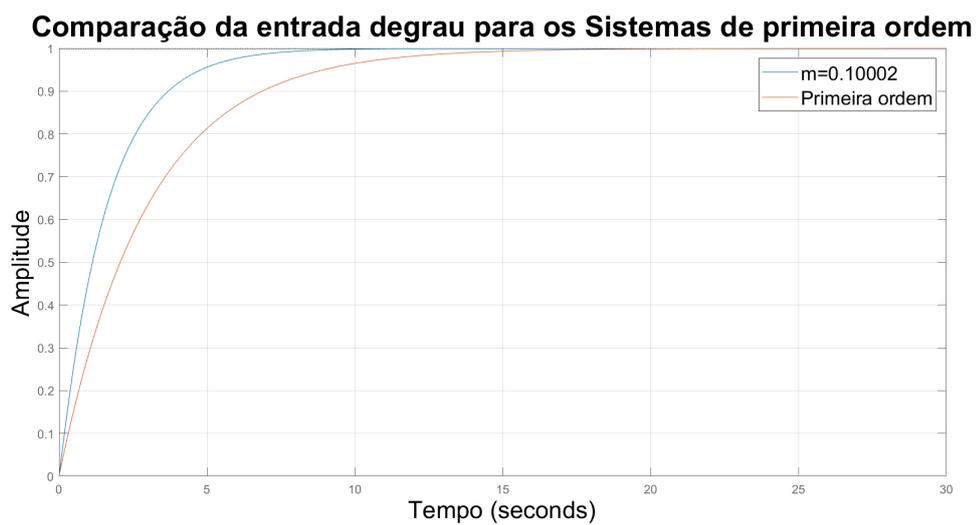


Figura 4.14 – : Comparação da resposta ao degrau para um filtro de primeira Ordem e um filtro CRONE com  $m = 0,1$  e mesmo nível de atenuação da variância para um ruído branco de entrada

Fonte: Própria

**Comparação da entrada degrau para os Sistemas de primeira ordem**

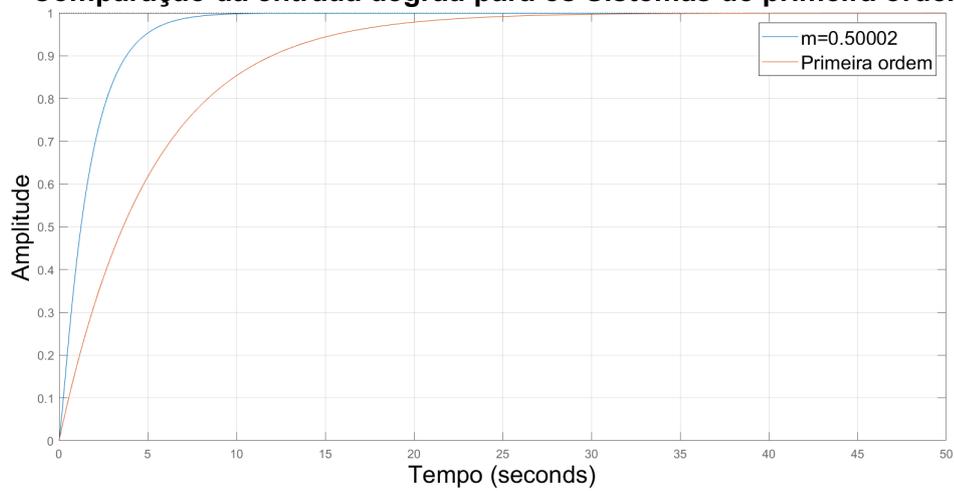


Figura 4.15 – : Comparação da resposta ao degrau para um filtro de primeira Ordem e um filtro CRONE com  $m = 0,5$  e mesmo nível de atenuação da variância para um ruído branco de entrada

Fonte: Própria

**Comparação da entrada degrau para os Sistemas de primeira ordem**

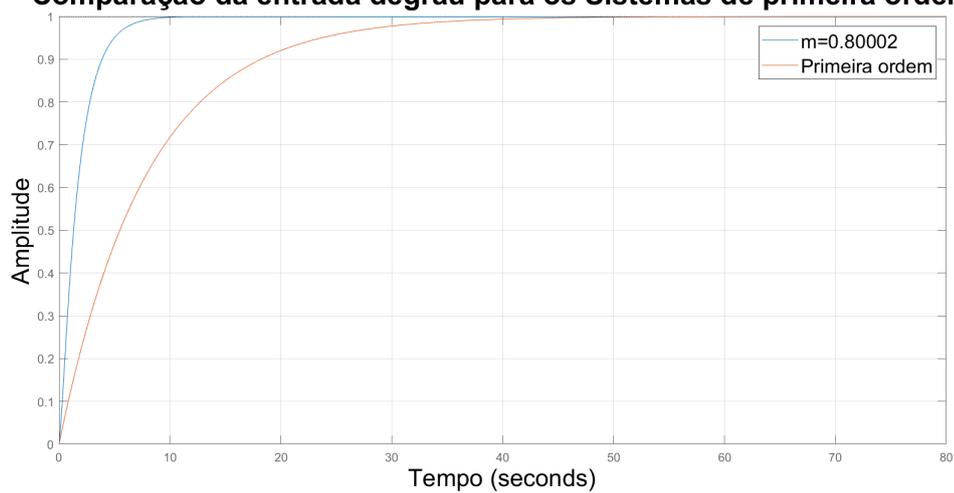


Figura 4.16 – : Comparação da resposta ao degrau para um filtro de primeira Ordem e um filtro CRONE com  $m = 0,8$  e mesmo nível de atenuação da variância para um ruído branco de entrada

Fonte: Própria

### 4.3 Comparação do Filtro CRONE em função das variâncias

Após explorar o filtro CRONE para diferentes valores de  $m$  e compará-lo com um filtro equivalente de primeira ordem, constatando que o filtro CRONE é mais rápido, mesmo mantendo a mesma relação entre a variância de entrada e saída, surgiu a proposta de realizar uma comparação entre filtros CRONE com diferentes valores de  $m$  e atenuação iguais de variância no sinal de saída. Esse requisito demandou uma revisão numérica de todo o processo, visando identificar fatores que permitissem a variação da ordem do regulador e sua relação entre a variância de entrada e saída.

Inicialmente, tentou-se gerar uma função analítica que possibilitasse a variação da ordem do filtro e alterasse a relação entre a variância de entrada e saída. No entanto, essa abordagem enfrentou desafios numéricos, impedindo a obtenção de uma solução.

Posteriormente, foi analisada a relação entre a variância de entrada e saída do sistema ao transitar do domínio de frequência para o domínio do tempo, comparando-o com seu equivalente discreto. Assim a comparação das respostas dos cálculos de variância foi feita mediante simulação numérica, encontrando os mesmos valores o qual permitiu proceder a identificar uma função matemática que permita calcular a relação de variância de entrada saída em função de um dos parâmetro que poderia ser o parâmetro  $m$  ou o parâmetro  $\omega$ , tendo soluções convergentes para o parâmetro  $\omega$ , pois em função do parâmetro  $m$  a solução ficava muito complexa e o Matlab não conseguia realizar o cálculo.

Considerando que o filtro CRONE de forma geral apresenta a descrição matemática da função de transferência da equação 4.10:

$$F(s) = \frac{(s+a)(s+b)}{(s+c)(s+d)(s+w)} \quad (4.7)$$

A equação 4.10 pode ser modificada utilizando o método das frações parciais, permitindo assim realizar a seguinte representação:

$$F(s) = \frac{(s+a)(s+b)}{(s+c)(s+d)(s+w)} = \frac{A}{s+c} + \frac{B}{s+d} + \frac{C}{s+w}$$

onde  $A$ ,  $B$ , e  $C$  são constantes a serem determinadas. Multiplicando ambos os lados da equação por  $(s+c)(s+d)(s+w)$ , é obtido:

$$(s+a)(s+b) = A(s+d)(s+w) + B(s+c)(s+w) + C(s+c)(s+d)$$

Agora, pode-se encontrar os valores de  $A$ ,  $B$ , e  $C$  comparando os coeficientes dos termos semelhantes em ambos os lados da equação. Resultando numa equação que pode ser igualada se é expandido o lado direito como se mostra a seguir:

$$(s + a)(s + b) = A(s^2 + (d + w)s + dw) + B(s^2 + (c + w)s + cw) + C(s^2 + (c + d)s + cd)$$

Fazendo agrupação dos termos semelhantes:

$$s^2(a+b) + s(ab+ad+aw+bc+bw+cd) + ab = A(s^2+(d+w)s+dw) + B(s^2+(c+w)s+cw) + C(s^2+(c+d)s+cd)$$

Comparando os coeficientes dos termos semelhantes, obtemos um sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} A + B + C = a + b \\ Ad + Aw + Bc + Bw + Cd = ab + ad + aw + bc + bw + cd \\ Adw + Bcw + Ccd = ab \end{cases}$$

Resolvendo esse sistema de equações, encontramos os valores de  $A$ ,  $B$ , e  $C$ . Vamos calcular:

1.  $A$ : Multiplicando a primeira equação por  $(s + c)$  e substituindo  $s = -c$ , temos:

$$A = \frac{(a - c)(b - c)}{(d - c)(w - c)}$$

2.  $B$ : Multiplicando a segunda equação por  $(s + d)$  e substituindo  $s = -d$ , temos:

$$B = \frac{(a - d)(b - d)}{(c - d)(w - d)}$$

3.  $C$ : Multiplicando a terceira equação por  $(s + w)$  e substituindo  $s = -w$ , temos:

$$C = \frac{(a - w)(b - w)}{(c - w)(d - w)}$$

Portanto, a decomposição em frações parciais é:

$$F(s) = \frac{(-c + a)(-c + b)}{(-c + d)(-c + w)(s + c)} + \frac{(-d + a)(-d + b)}{(-d + c)(-d + w)(s + d)} + \frac{(-w + a)(-w + b)}{(-w + c)(-w + d)(s + w)}$$

Trabalhando com a relação equivalente que será notada de equação 4.8:

$$F(s) = \frac{A}{s + c} + \frac{B}{s + d} + \frac{C}{s + w} \quad (4.8)$$

Utilizando a equação 4.8 se faz o cálculo da transformada Inversa de Laplace para poder gerar a função no domínio do tempo, conforme se apresenta a seguir:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{A}{s+c}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{B}{s+d}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{C}{s+w}\right\}$$

Usando as transformadas inversas de Laplace das funções  $\frac{A}{s+c}$ ,  $\frac{B}{s+d}$ , e  $\frac{C}{s+w}$ , que são conhecidas, para encontrar  $f(t)$ . As transformadas inversas de Laplace dessas funções são:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{A}{s+c}\right\} = Ae^{-ct}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{B}{s+d}\right\} = Be^{-dt}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{C}{s+w}\right\} = Ce^{-wt}$$

Portanto, a transformada inversa de Laplace da função  $F(s) = \frac{A}{s+c} + \frac{B}{s+d} + \frac{C}{s+w}$  é representada pela equação 4.9

$$f(t) = Ae^{-ct} + Be^{-dt} + Ce^{-wt} \quad (4.9)$$

Analisando a função temporal compostas por funções exponenciais decrescentes, foi realizado um gráfico deste comportamento, para isso, foram utilizadas as constantes arbitrárias seguintes:  $A = 1; B = 2; C = 3; c = 0.5; d = 1; w = 2$ , o resultado é mostrado na figura 4.17

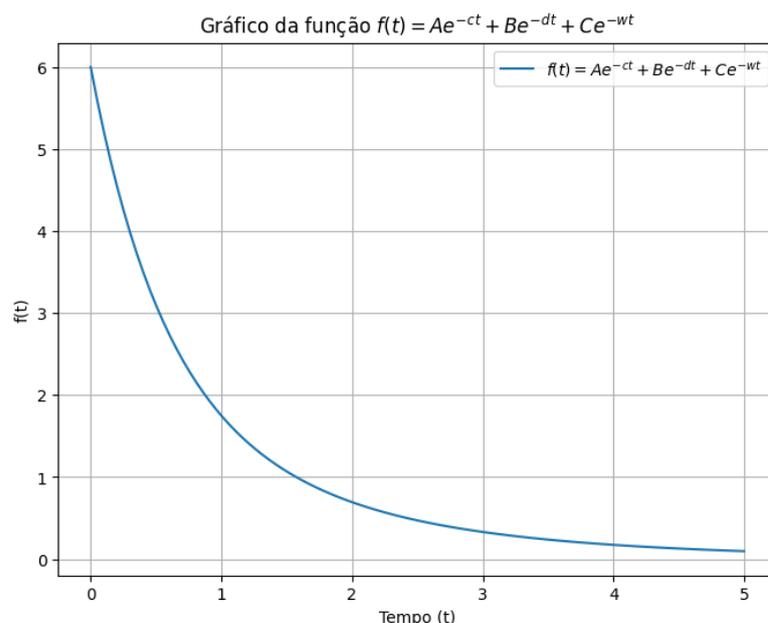


Figura 4.17 – : Comportamento da função temporal

A função  $Ae^{-ct} + Be^{-dt} + Ce^{-wt}$ , onde  $A, B, C, c, d, w$  são constantes, não representa diretamente uma distribuição exponencial. No entanto, pode ser relacionada com uma combinação de distribuições exponenciais, se se observa que cada termo da função corresponde a uma função exponencial decrescente com diferentes taxas de decaimento  $c, d, w$ .

Considerando as variáveis aleatórias  $X_c = c \cdot t, X_d = d \cdot t, X_w = w \cdot t$ , então cada termo da função pode ser visto como a densidade de probabilidade de uma distribuição exponencial com parâmetros  $\lambda_c = c, \lambda_d = d, \lambda_w = w$ , respectivamente.

Portanto, a função  $Ae^{-ct} + Be^{-dt} + Ce^{-wt}$  pode ser considerada como a soma ponderada das densidades de probabilidade de três distribuições exponenciais com diferentes taxas de decaimento.

Para calcular o valor esperado e a variância de cada termo que é o resultado das soma de cada uma das distribuições exponenciais, como a variância de uma variável aleatória  $X$  com parâmetro  $\lambda$  é dada por:

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

onde o valor esperado de uma variável aleatória com distribuição exponencial é dado por  $\frac{1}{\lambda}$  e a variância é  $\frac{1}{\lambda^2}$ . Desta forma analisando o primeiro termo da equação 4.9, considerando a análise feita anteriormente, o valor esperado da função da função  $E[Ae^{-ct}]$  é igual a  $\frac{A}{\lambda} = \frac{A}{c}$  e por tanto a variância  $Var = \frac{A}{c^2}$ , assim, generalizando a análise e utilizando as propriedades distributivas da variância, pode se chegar a uma forma geral descrita pela equação 4.10

$$Var = \left(\frac{A}{c}\right)^2 + \left(\frac{B}{d}\right)^2 + \left(\frac{C}{w}\right)^2 \quad (4.10)$$

Assim, considerando a 4.10 foi definida a variância e foram utilizados os coeficientes do filtro que tinham sido obtidos inicialmente para o valor  $m = 0,5$ , como parâmetros iniciais. (a escolha deste parâmetro é arbitrária, pode ser escolhido outro, mas neste caso sua escolha é justificada porque ele foi analisado extensamente no desenvolvimento deste documento.)

Para resolver a equação 4.10 foi usado o método de solução numérica de *Newton – Raphson*, a solução foi feita no Matlab considerando um ponto de partida arbitrário, como é mostrado, no algoritmo apresentado no Apêndice A3, o ponto de partida neste caso foi localizado em  $x_0 = \pi$  e como tolerância  $tolerância = 1e - 6$  e com 1000 iterações e com uma variância  $Var = 0,0023$ , variância corresponde ao método descrito na seção anterior para um  $m = 0,7$ . Com a convergência da função foi identificado um valor de frequência que atende o requisito impostos, e em função desse ponto foi pensada numa região de análise que permita conter todas as mudanças da potência fracionada  $m$  possíveis, desta forma foi identificado o comportamento dos filtros para alguns  $m$  e o diagrama de bode que representa

a magnitude e fase para a situação estuda, estes resultados são mostrados nas figuras 4.18 e 4.20



Figura 4.18 – : Comparação da saída degrau para m diferente filtros CRONE

Fonte: Própria

Observa-se na figura 4.18 que na medida que o  $m$  aumenta o filtro é mais lento e quando ele diminui é mais rápidos, em todos os casos propostos observa-se que os reguladores CRONE são mais rápidos que o filtro de primeira ordem projetado com a variância corresponde ao  $m = 0,7$ , a variação obtida para as variâncias ficou em torno de  $\pm = 0,0002$

Com relação à Figura 4.20, nota-se que as frequências de corte dos sistemas são próximas, apresentando pouca variação e possibilitando uma comparação eficaz dos filtros. Além disso, observa-se que os filtros CRONE seguem o comportamento sem oscilações como um sistema de primeira ordem, corroborando com os resultados obtidos anteriormente.

Prosseguindo com a análise, foi considerada uma variação do parâmetro  $m$  abrangendo valores entre 0,1 e 0,9. Para realizar essa comparação, foi necessário ampliar a região de análise, com o objetivo de manter as frequências de corte o mais próximas possíveis. No entanto, esse ajuste apresenta o desafio de gerar uma faixa um pouco mais ampla de variação da variância. Para conduzir essa análise, repetiu-se o processo mencionado anteriormente, identificando um ponto para uma variância média. Nesse contexto, optou-se pelo valor de 0,0023, correspondente a  $m = 0,5$ , escolhido por ser um termo intermediário e por já ter sido previamente trabalhado e analisado. A Figura 4.20 ilustra esse cenário.

Observa-se na figura anterior que o comportamento descrito na figura 4.20 é mantido, sendo que para  $m = 0,1$  o filtro é mais rápido e para  $m = 0,91$  o filtro comporta-se de forma semelhante ao filtro de primeira ordem, essa taxa de resposta diferente, é as às variações na ordem fracionária descrita, pois elas estão sendo afetadas pela diferença em variância

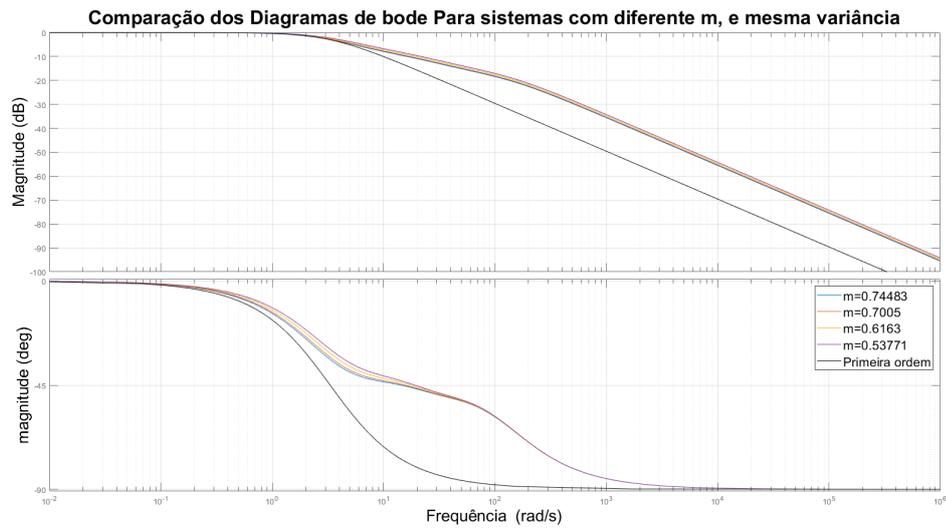


Figura 4.19 – : Comparação da fase e magnitude para os Reguladores CRONE em função do m

Fonte: Própria

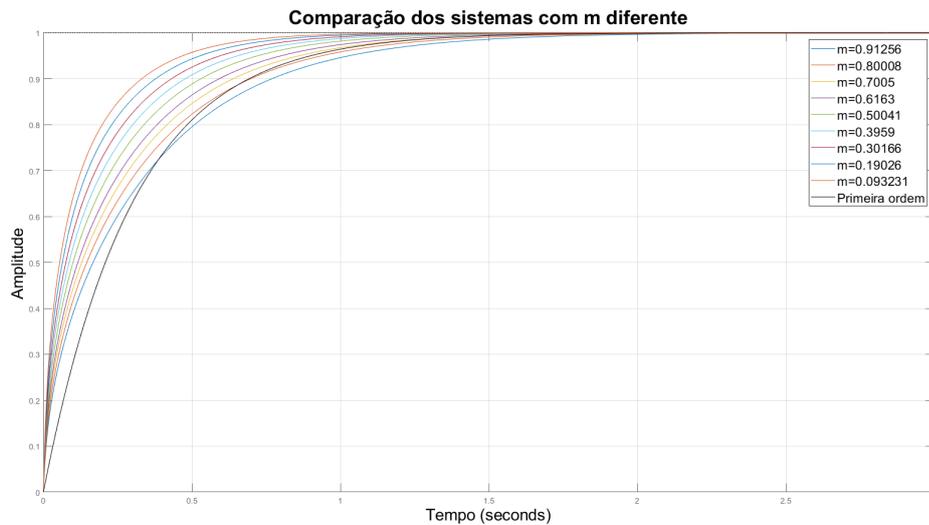


Figura 4.20 – : Comparação do Degrau unitário ao redor de  $m=0.5$

Fonte: Própria

apresentadas no sistema que como foi mencionado não é igual pois a relação entre a variância de entrada e saída foi calculada ao redor de um frequência já encontrada mediante o método de *Newton – Raphson*.

Assim, é concluído que os filtros CRONE oferecem flexibilidade na modelagem da resposta do sistema e podem ser ajustados para fornecer características de desempenho específicas que um filtro de primeira ordem não pode alcançar devido à sua natureza fixa de

resposta de frequência e tempo.

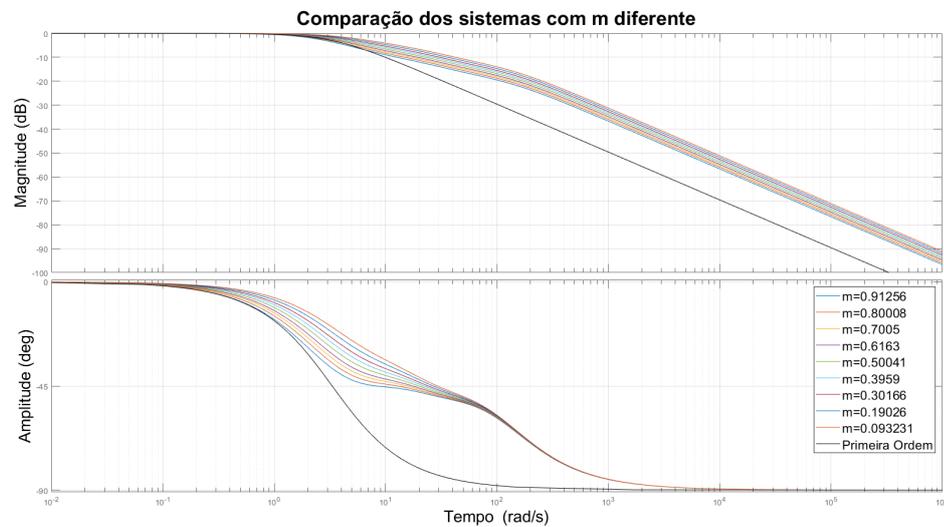


Figura 4.21 – : Comparação da fase e magnitude para os Filtros CRONE ao redor de  $m=0.5$

Fonte: Própria

Na Figura 4.21, percebe-se que o comportamento de fase e magnitude mantém o mesmo padrão do caso anteriormente apresentado. A frequência de corte é mantida em torno de  $\omega = 3,5$ , rad/s, e a fase permanece em  $90^0$ , evidenciando que o sistema segue o padrão de um sistema de primeira ordem. Em seguida, é apresentada a comparação da relação entre a variância de entrada e saída em torno do ponto escolhido, conforme ilustrado na Figura 4.23.

A Figura 4.23 apresenta a relação entre a relação entre a variância de entrada e saída e a resposta ao degrau. O gráfico em preto representa um filtro de primeira ordem com variância de 0,0023, enquanto a curva em azul corresponde a um regulador com  $m = 0,9$  e variância de 0,0013. O regulador em laranja, por sua vez, representa  $m = 0,1$ , mas com uma variância de 0,0044. Observa-se que, à medida que exploramos todos os parâmetros de  $m$  variando de 0,1 a 0,9, é necessário ampliar a região de frequência e, simultaneamente, expandir a região de variâncias. Em termos de filtragem, o comportamento de todos os reguladores permanece praticamente constante, com variações mínimas. Esta análise foi possível mediante a elaboração do código apresentado no Apêndice A2.

É importante notar que não foram encontradas variâncias idênticas nos casos comparados. Isso ocorre porque, como indicado pela equação 4.10, a variância é sensível à modificação da frequência, sendo este parâmetro presente em todas as constantes da equação.

Por outro lado, é possível verificar que a proposta de solução do regulador CRONE que é usada para criar o filtro efetivamente conduz a sistemas mais rápidos, com uma notável capacidade de filtragem. Além disso, evidencia-se que, partindo da relação entre a variância

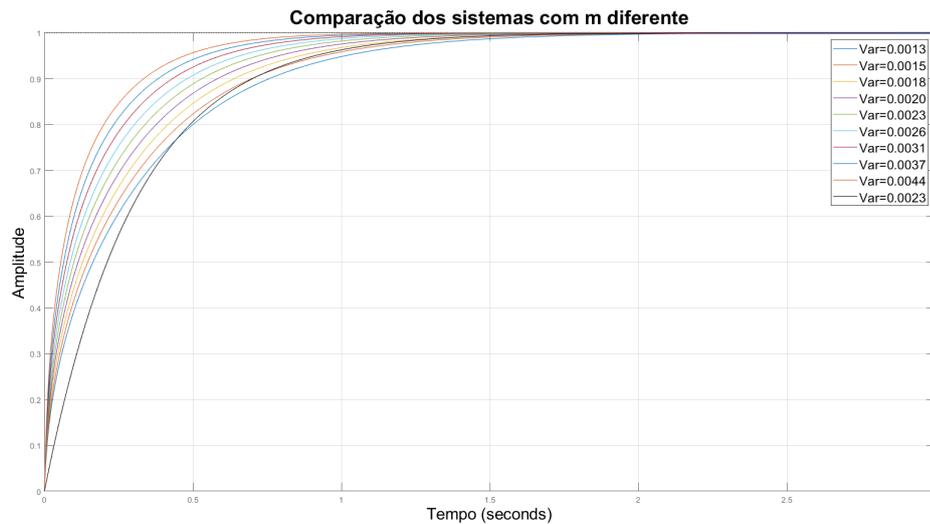


Figura 4.22 – : Variâncias dos filtros ao redor do  $m$  escolhido

Fonte: Própria

de entrada e saída, é viável projetar um filtro CRONE e, por conseguinte, um equivalente de primeira ordem. Este último pode apresentar uma resposta mais lenta, porém com uma capacidade de filtragem comparável.

Em seguida, realizou-se uma avaliação em relação à rapidez do filtro CRONE, utilizando dois filtros projetados com relação entre a variância de entrada e saída em torno de 0,044, um com  $m = 0,05$  e outro com  $m = 0,1$ . A comparação foi estabelecida entre o filtro CRONE e um filtro de primeira ordem projetado com a mesma variância. A Figura 4.23 apresenta esses resultados.

Observa-se que, na resposta ao degrau, o filtro projetado com  $m = 0,05$  demonstra ser mais rápido do que o filtro projetado com  $m = 0,1$ . As variâncias geradas pela modificação da frequência para criar esses filtros foram de 0,045 e 0,044, respectivamente. É evidente que, em ambos os casos, os filtros CRONE apresentam uma resposta mais rápida em comparação com os filtros de primeira ordem.

No diagrama de Bode da Figura 4.24, é notável uma discrepância sutil no comportamento em fase entre o sistema de primeira ordem e o filtro CRONE. Essa diferença é influenciada porque as variâncias associadas a cada sistema não são exatamente idênticas. No entanto, é interessante observar que, mesmo com essa variação, a fase de ambos os sistemas é mantida na faixa de 0 a  $-90^{\circ}$ .

Essa consistência na fase pode ser atribuída ao fato de que a frequência de corte dos sistemas é igual, resultando em um comportamento semelhante na resposta em fase. A faixa de 0 a  $-90$  graus é típica para sistemas de primeira ordem e, nesse contexto, é mantida devido à similaridade nas características de corte dos dois tipos de filtros.

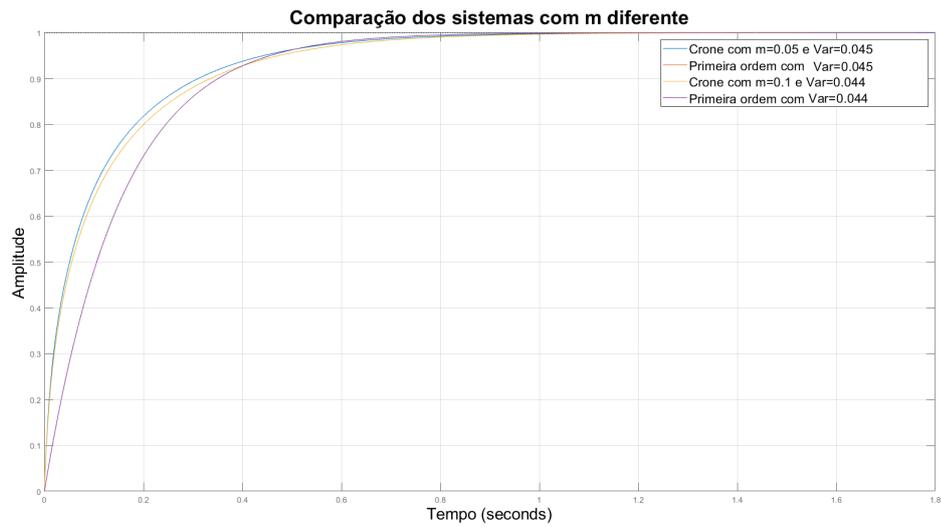


Figura 4.23 – : Comparação da fase e magnitude para os filtros CRONE ao redor de  $m=0.5$

Fonte: Própria

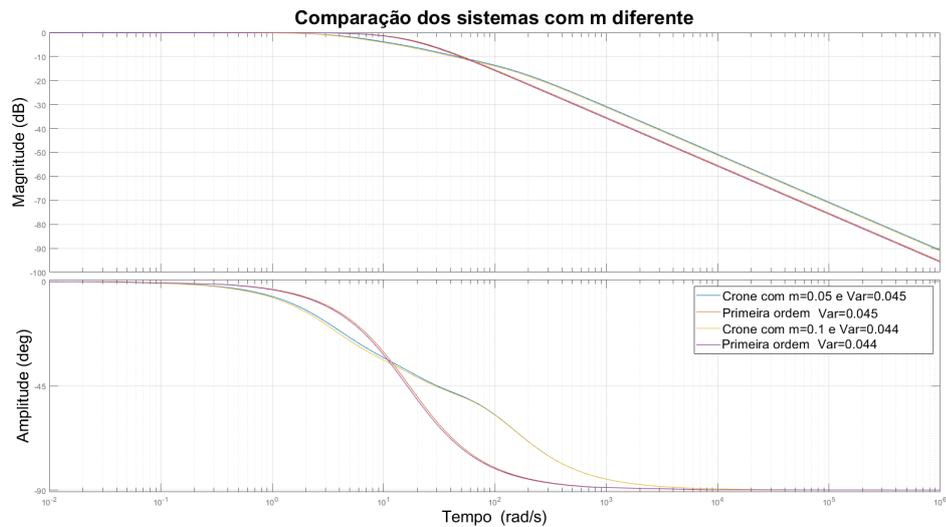


Figura 4.24 – : Comparação da fase e magnitude para os Reguladores CRONE ao redor de  $m=0.5$

Fonte: Própria

Em relação à magnitude, ambos os sistemas apresentam uma frequência de corte igual, indicando uma atenuação similar nas baixas frequências. A similaridade no comportamento em fase, quando comparado o filtro CRONE com o sistema de primeira ordem, sugere que, apesar das variações nas variâncias, ambos os sistemas exibem características de corte análogas e, conseqüentemente, comportamentos equivalentes em magnitude e fase na faixa analisada.

Em seguida, procedeu-se à análise do comportamento fracionado do filtro CRONE, utilizando a função do Matlab **oustafod(gam, N, wb, wh)**. Essa função permite a aproximação de uma função de transferência com potências fracionadas. Os resultados obtidos são apresentados nas Figuras 4.25 e 4.26. Observa-se na Figura 4.24 que a aproximação utilizando *Oustaloup* e a equivalência da função de transferência produzem resultados idênticos, evidenciando a sobreposição dos dois gráficos. Esse fenômeno ocorre devido à superposição dos gráficos, indicando que nos diagramas de Bode, o comportamento segue a projeção dos filtros CRONE. Essa análise foi realizada com uma variância de 0.018 e um  $m = 0,5$ .

Após verificar adequadamente o comportamento fracionado, a análise foi estendida para todos os valores de  $m$  calculados, como mostrado na Figura 4.26. Conclui-se que as diferenças observadas se devem a que a relação entre a variância de entrada e saída não é idêntica, destacando a influência significativa desse parâmetro nos diagramas de Bode. A variação na variância impacta diretamente na magnitude e na fase do sistema, evidenciando a importância desse parâmetro na caracterização e no comportamento do filtro CRONE.

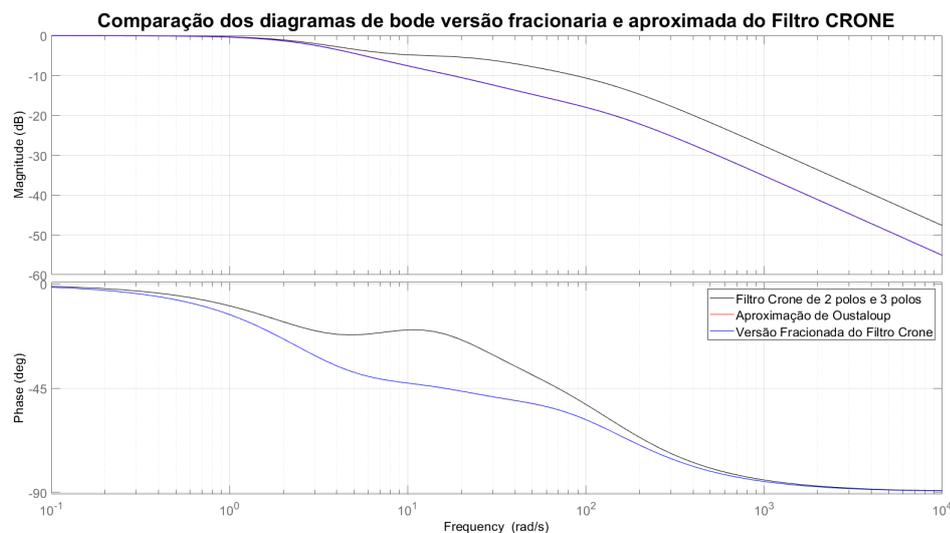


Figura 4.25 – : Comparação da fase e magnitude para os Filtros CRONE ao redor de  $m=0.5$

Fonte: Própria

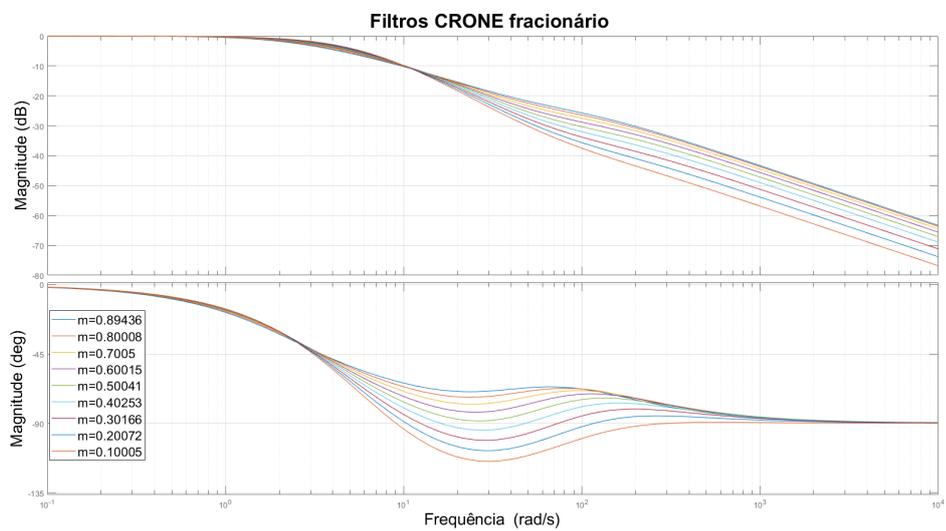


Figura 4.26 – : Comparação da fase e magnitude para os filtros CRONE ao redor de  $m=0.5$

Fonte: Própria

## 5 CONCLUSÕES

A resposta de um sistema de ordem inferior é geralmente mais rápida quando comparada a um sinal de ordem superior com mesmo nível de atenuação de ruído branco, como demonstrado no caso do sistema de primeira ordem. No entanto, observou-se que essa lógica pode ser modificada ao projetar filtros de ordem superior que simulem o comportamento de filtros de ordem fracionária inferior a um, conforme evidenciado no desenvolvimento deste trabalho. Adicionalmente, identificou-se que, para obter uma resposta otimizada, é preferível que o número de zeros no filtro seja inferior ao número de polos.

Da mesma maneira, ao empregar a metodologia CRONE, demonstrou-se que um filtro de ordem superior que apresenta comportamento similar a um de ordem fracionária pode ser mais rápido que um primeira ordem, para o mesmo nível de atenuação de ruído.

A metodologia CRONE viabiliza a descoberta de reguladores com valores entre  $0 < m < 1$ , permitindo uma divisão na frequência que torna o sistema mais reativo em relação a ruídos, aprimorando assim a capacidade de filtragem. No presente estudo, a metodologia CRONE foi apresentada com  $m = 0.5$ , resultando em um regulador de primeira geração. A análise foi expandida para diferentes valores de  $m'$ , variando de 0.1 a 0.9. Essa análise foi motivada pela observação de que, à medida que o parâmetro  $m$  aumenta, o sistema tende a tornar-se mais lento, tanto para reguladores CRONE quanto para suas equivalências de primeira ordem.

Para o caso considerado uma largura de banda passante para definir o filtro CRONE de uma década o valor  $m = 0.5$  foi considerado uma resposta adequada, pois o sistema torna-se mais ágil em comparação a um sistema de ordem 1, embora não atinja a rapidez de um sistema com  $m = 0.1$ . Isso leva à conclusão de que, à medida que a potência fracionada diminui, a resposta do filtro melhora. Além disso, observou-se que, de maneira geral, o regulador CRONE apresenta variâncias reduzidas, conferindo maior reatividade dos filtros aos ruídos e resultando em uma filtragem mais eficiente.

Ao relacionar o filtro CRONE à variância, utilizando um filtro de partida, foi possível identificar uma variação do parâmetro  $m$  em torno de uma frequência específica e, conseqüentemente, em torno de uma faixa de variâncias. Destacou-se a sensibilidade da variância do filtro à modificação da frequência de corte, impedindo a obtenção de variâncias idênticas. Contudo, resultados satisfatórios foram obtidos ao delimitar uma região de trabalho em torno de uma frequência específica para comparar diferentes versões de filtro CRONE com valores de  $m$  distintos.

Em cenários de exposição constante a sinais ruidosos, aprimorar a eficácia dos filtros é crucial para garantir confiabilidade e precisão no processamento de informações. A

comparação entre filtros de diferentes ordens, juntamente com uma consideração cuidadosa da variância no cálculo dos filtros, é fundamental para o desenvolvimento de estratégias de filtragem ágeis e eficazes. Este estudo contribui para avanços na compreensão e aplicação de técnicas de filtragem mais robustas e adaptáveis, com impacto direto em diversas áreas que dependem da análise de sinais em ambientes ruidosos.

A relevância deste estudo reside na escassez de fundamentos teóricos para o projeto de filtros de ordem fracionada. Atualmente, há um foco significativo em abordagens voltadas para o controle, o que torna esta pesquisa inovadora. A abordagem fracionada permite alcançar um alto nível de filtragem com uma eficiente capacidade de atenuação. Além disso, demonstra-se a viabilidade de criar filtros com potência fracionada para diferentes valores de  $m$ .

Como considerações para pesquisas futuras, recomenda-se a adaptação da banda passante durante a concepção do filtro CRONE, a fim de analisar minuciosamente seu desempenho na filtragem e a relação de atenuação de frequências em relação ao parâmetro  $m$ . A expansão desta análise de variâncias busca validar os resultados já obtidos.

Por fim neste trabalho entre todos os filtros diferentes valores de  $m$  o menor valor testado que foi de 0,1 obteve o melhor tempo de resposta para o mesmo nível de atenuação. Servindo este resultado como recomendação no momento de se projetar filtros onde se deseja rápida reposta a sinais similares ao degrau em contexto de um ruído de medida branco ou similar.

# Referências

- BARBOSA, D. **Estimação da frequência em sistemas elétricos de potência através de filtragem adaptativa**. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2007. Citado na p. 34.
- BARBOSA, T. A. *et al.* Avaliação de desempenho de malha de controle baseada em alocação de polos utilizando variância mínima generalizada. Universidade Federal de Campina Grande, 2011. Citado na p. 27.
- BORN, R. S. Filtros adaptativos aplicados a sinais biomédicos. **Monografia, Universidade Federal de Pelotas**, 2000. Citado na p. 35.
- CAMPOS, F. A. A. d. Análise do controlador pid de ordem fracionária aplicado à simulação de sistemas reais. 2019. Citado na p. 37.
- CAMPOS, M. W. d. S. *et al.* Identificação e controle de sistemas de ordem fracionária, estudo de caso aplicada a um sistema térmico. Universidade Federal do Amazonas, 2020. Citado na p. 37.
- CORREA, S. **Probabilidade e estatística**. [S.l.]: Belo Horizonte: PUC Minas Virtual, 2003. Citado na p. 27.
- DORF, R. H. B. R. C. **Sistemas de Controle Moderno**. 8. ed. The address: Addison Wesley Longman, 2001. v. 1. 325–330 p. (1, v. 1). ISBN 0201308649. Citado nas pp. 48, 49 e 50.
- FERREIRA, I. R. *et al.* Filtros analógicos ativos para sinais ecg. Universidade Federal de Campina Grande, 2019. Citado nas pp. 46, 47 e 48.
- FONTANA, C. *et al.* Sistema para medição de sinais eletroencefalográficos. Araranguá, SC, 2019. Citado nas pp. 15 e 42.
- HAYKIN, S. S.; VEEN, B. V. **Sinais e sistemas**. [S.l.]: Bookman, 2001. Citado na p. 32.
- JÚNIOR, A. P. **Eletrônica Analógica–Amplificadores Operacionais e Filtros Ativos**. Ed. [S.l.]: Bookman. São Paulo, 2003. Citado na p. 41.
- JUNIOR, A. P. **Amplificadores Operacionais e Filtros Ativos-8**. [S.l.]: Bookman Editora, 2015. Citado nas pp. 42 e 43.
- KHADRI, S. E.; MOREAU, X.; BENINE-NETO, A.; CHEVRIE, M.; GONÇALVES, W. M.; GUILLEMARD, F. Design of the crone automatic headlight leveling system. **IFAC-PapersOnLine**, Elsevier, v. 55, n. 27, p. 208–213, 2022. Citado na p. 38.
- LEVADA, A. L.; MASCARENHAS, N. D. Filtragem adaptativa de ruído gaussiano em imagens através da minimização da informação de fisher observada. *In: VI Workshop de Visão Computacional (WVC)*. [S.l.: s.n.], 2010. p. 7–12. Citado na p. 35.

- LOPES, V. H. S. **PROJETO E CONSTRUÇÃO DE UM SISTEMA DE AQUISIÇÃO DE SINAIS ELETROMIOGRÁFICOS VOLTADO PARA O ESTUDO DE TÉCNICAS DE CONTROLE EM PRÓTESES MIOELÉTRICAS**. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de São João del-Rei e o Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais, <https://ufsj.edu.br/portal2-repositorio/File/ppgel/179-2018-10-15-DissertacaoVictorLopes.pdf>, 9 2018. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica - PPGEL Associação ampla UFSJ / CEFET-MG. Citado na p. 15.
- MITRA, S. K. **Digital signal processing: a computer-based approach**. [S.l.]: McGraw-Hill Higher Education, 2001. Citado na p. 27.
- MOREAU, X.; DAOU, R. A. Z.; CHRISTOPHY, F. Comparison between the second and third generations of the crone controller: Application to a thermal diffusive interface medium. **Fractal and fractional**, MDPI, v. 2, n. 1, p. 5, 2018. Citado na p. 36.
- MOREAU, X.; FRANCIS, C. *et al.* Control of hydro-electromechanical system using the generalized pid and the crone controllers. **IFAC Proceedings Volumes**, Elsevier, v. 44, n. 1, p. 15037–15042, 2011. Citado na p. 36.
- MUSSOI, F. L.; ESPERANÇA, C. Resposta em frequência: Filtros passivos. **Florianópolis, Centro Federal de Educação Tecnológica de Santa Catarina**, 2004. Citado nas pp. 43, 44 e 45.
- MUÑOZ, M. E. P. **Filtro de Kalman Adaptativo para sistemas em Malha fechada**. Tese (Doutorado) — Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de Brasília, Brasília, DF, Brasília, Brasil, 2017. Disponível em: <https://www.repositorio.unb.br/handle/10482/31675>. Citado nas pp. 14, 16, 28, 29 e 67.
- NAIDU, D. G. K. R. G. Advantage of crone controller for level process and dc motor system compared with pid,h- controllers. **ISSN: 2395 -0056 International Research Journal of Engineering and Technology**, n. 3, p. 1649–1655, 7 2016. PG Student, A.U. College of Engineering (A), Dept. Electrical Engg., A.P, India. Citado na p. 36.
- NILSSON, J. W. **Electric circuits**. [S.l.]: Pearson Education India, 2008. Citado na p. 42.
- OGATA, K. **Engenharia de Controle Moderno**. 5. ed. The address: Pearson Prentice Hall, 2010. v. 1. 325–330 p. (1, v. 1). ISBN 9788576058106. Citado na p. 51.
- OPPENHEIM, A. V. **Discrete-time signal processing**. [S.l.]: Pearson Education India, 1999. Citado na p. 26.
- OPPENHEIM, A. V.; WILLSKY, A. S.; NAWAB, S. H.; DING, J.-J. **Signals and systems**. [S.l.]: Prentice hall Upper Saddle River, NJ, 1997. v. 2. Citado na p. 31.
- OUSTALOUP, B. M. A.; LANUSSE, P. Second generation crone control. **33405 TALENCE cedex, FRANCE**, n. 1, p. 351, 7 1993. 35 1. cours de la libération, Equip CRONE - LAP - ENSERB - Universit6 Bordeaux I. Citado nas pp. 6, 7, 17 e 35.

- OUSTALUP, P. I. A. **Comamnde Crone otimale**. 1. ed. Université Bordeaux I, 1992. Citado nas pp. 53, 54, 56, 57 e 63.
- PIMENTEL, C. J. L. **Comunicação Digital**. [S.l.]: Brasport, 2007. Citado nas pp. 32 e 33.
- PODLUBNY, I. **Fractional differential equations: an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications**. [S.l.]: Elsevier, 1998. Citado nas pp. 19 e 20.
- PROAKIS, J. G. **Digital signal processing: principles, algorithms, and applications, 4/E**. [S.l.]: Pearson Education India, 2007. Citado na p. 26.
- SASSAKI, G. K. T. Investigação da sintonia de controladores fracionários por realimentação. 2019. Citado na p. 37.
- TERMOUS, H.; MOREAU, X.; FRANCIS, C.; SHRAIM, H. From the standard pid to the crone first generation controller: Application to an anti-roll system for electric vehicles. **IFAC-PapersOnLine**, v. 51, n. 4, p. 733–738, 2018. ISSN 2405-8963. 3rd IFAC Conference on Advances in Proportional-Integral-Derivative Control PID 2018. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2405896318305068>. Citado nas pp. 36 e 52.
- VELMURUGAN, N. N. P. V.; KUMAR, K. R. Performance evaluation of composite crone controller strategy for an air pressure system. **Research Article Hindawi-Article ID 9933623**, n. 3, p. 15, 8 2023. Department of Electrical and Electronics Engineering, Dr.N.G.P. Institute of Technology, Coimbatore-48, Tamilnadu, India. Citado na p. 36.
- VILLAMIZAR, J. B. V. **Control Fraccionario aplicado al diseño de controladores**. Dissertação (Mestrado) — Universidad Pontificia Bolivariana, <https://ufsj.edu.>, escuela de ingeniería [https://repository.upb.edu.co/bitstream/handle/20.500.11912/5076/digital\\_24700.pdf?sequence=3&isAllowed=y](https://repository.upb.edu.co/bitstream/handle/20.500.11912/5076/digital_24700.pdf?sequence=3&isAllowed=y), 2018. *Citadonap*.41.
- WINDER, S. **Analog and digital filter design**. [S.l.]: Elsevier, 2002. Citado na p. 41.
- XU, Z.; LI, M. Rational implementation of fractional calculus operator based on quadratic programming. **Mathematical Problems in Engineering**, Hindawi Limited, v. 2021, p. 1–12, 2021. Citado nas pp. 21, 39, 62 e 63.
- XUE, D.; ZHAO, C.; CHEN, Y. A modified approximation method of fractional order system. *In: IEEE. 2006 international conference on mechatronics and automation*. [S.l.], 2006. p. 1043–1048. Citado nas pp. 62 e 63.
- YESSEF, M.; BOSSOUFI, B.; TAOUSSI, M.; MOTAHHIR, S.; LAGRIOUI, A.; CHOJAA, H.; LEE, S.; KANG, B.-G.; ABOUHAWWASH, M. Improving the maximum power extraction from wind turbines using a second-generation crone controller. **Energies**, MDPI, v. 15, n. 10, p. 3644, 2022. Citado na p. 38.

ZUMBAHLEN, H. Multiple feedback filters. **Analog Devices. Application Note MT-220**, 2019. Citado na p. [15](#).

# Apêndices

# Apêndice A – Códigos de programação

## A.1 Projeto do Controlador com Realimentação de Estados

Código A.1 – Código de Matlab

```
1  clc;
2  close all;
3
4  F1=0.5;%0.2; %define a frequênci a de corte
5  A=0;%define o valor da atenuação em entre 0 e 3dB
6  w0=2*pi*F1;
7  Q=10^(A/20);%atenuação 20log(Q)
8  G=1;
9
10 %definição da fase constante para calcular a potênci a do S^{m}
11
12 fase=[14.57 50.77 77.77]; % fases para gerar m=0.1;0.5 e0.8
13
14 N=2; %Numero de polos e zeros do filtro Crone
15 wu=10*w0;
16 S=wu*j;
17 A=G/(S^2/w0^2 +(S/(w0*Q))+ 1);%Ganho da filtro passa baixa
18 ganho=sqrt(real(A)^2 +imag(A)^2);
19 fi=pi-atan(imag(A)/real(A));
20
21 %Frequênci as
22 wb=wu/(w0*sqrt(w0));
23 wh=wu*(sqrt(w0)*w0);
24
25
26 for i=1:length(fase)
27
28 %calculo de m
29 %2/pi * [ ( )
30 ]
31 m(i)=(2/pi)*abs(fase(i)*(pi/180) + fi -pi);
32
33 %Calculo do ganho
34 C=(1/ganho)*((1+(wu/wh)^2)/(1+(wu/wb)^2))^(m(i)/2);
35 alfa=(wh/wb)^(m(i)/N);
36 nabla=(wh/wb)^((1-m(i))/N);
37
38 %frequênci as do filtro numerador
39 wn1=(nabla^(0.5))*wb;
40 wn2=(nabla*alfa)*wn1;
41
42 %frequênci as do filtro denominador
```

```

43 wd1=alfa*wn1;
44 wd2=(nabla*alfa)*wd1;
45
46 %Filtro crone
47 F1=C*tf([1/wn1 1],[[1/wd1 1]]);
48 F2=tf([1/wn2 1],[[1/wd2 1]]);
49 F3=tf([1],[[1/w0 1]]);
50 F6=series(F1,F2);
51 FC=series(F6,F3);
52 num0=C*conv([1/wn1 1],[1/wn2 1]);
53
54
55 den = conv([(1/wd1)*(1/wd2) (1/wd1 + 1/wd2) 1],[1/w0 1]);
56
57 %ajuste do ganho estático para ser unitário
58 Fajuste=FC/num0(3);
59 num=[num0(1) num0(2) num0(3)]/num0(3);
60
61 T=0.01;
62 varx=1;
63 [numD3,denD3]=c2dm(num,den,T);
64 rn3=roots(numD3);
65 rd3=roots(denD3);
66
67 v4=(1+rn3(1)^2)/(1+rd3(1)^2+2*rd3(1));
68 v5=(1+rn3(2)^2)/(1+rd3(2)^2+2*rd3(2));
69 v6=(1)/(1+rd3(3)^2+2*rd3(3));
70 varcrone=numD3(2)^2*v4*v5*v6*varx
71
72 tao=1/w0;
73 a=(tao/T)*sqrt(12*varcrone/(2*varx-varcrone));
74 vary=2*(a*T)^2*varx/(12*tao^2+(a*T)^2)
75 num1=a;
76 den1=[tao a];
77 H1=tf(num1,den1);
78 [numD1,denD1]=c2dm(num1,den1,T)
79 tamanho=logspace(-2,6,1000);
80 %GRAFICOS
81 %bode(Fajuste,tamanho)
82 step(Fajuste)
83 %step(Fajuste)
84 %bode(Fajuste,tamanho);
85 %bode(H1,tamanho)
86 hold on;
87 step(H1)
88 end
89 %
90 title('Comparação dos diagramas de bode Primeira ordem','FontName',
      'Arial','FontSize',24);
91 xlabel('Tempo','FontName','Arial','FontSize',20)
92 ylabel('Amplitude','FontName','Arial','FontSize',20)
93 legend(['m=',num2str(m(1))],[ 'm=',num2str(m(2))],[ 'm=',num2str(m(3))],[ 'm=',num2str
      16);

```

```
94 grid on;
```

## A.2 Comparação da resposta do Filtro Crone com o modelo fracionario

Código A.2 – Código de Matlab

```
1 close all;
2 clc;
3
4 s = tf('s');
5
6 %Declaração dos parâmetros do sistema
7 N = 2; %Ordem do Filtro Crone
8 wb=5.6419 % frequ ncias de Crone
9 wh = 174.9342
10 g1 = ousta_fod(0.5, N, wb, wh) % Chamado da função
11 g2=tf(1,[1/pi 1]);
12 g3=(0.04889/0.1153)*series(g1,g2); %Ajuste para gerar dois zeros e
   tr s polos
13 F=((0.1153*s+1)/(0.04889*s +1))*g3; %F=((0.1153*s+1)/(0.04889*s
   +1))^0.5
14 F3=tf([0.1008 5.737 42.15],[0.00576 0.7919 15.85 42.15]); % Filtro
   gerado com variância 0.0018
15
16 % Gráfico das funções de Bode
17 bode(F,'k')
18 hold on;
19 bode(g3,'r')
20 bode(F3,'b')
21
22 title('Comparação dos diagramas de bode versão fracionaria e aproximada
   do Filtro CRONE','FontName', 'Arial', 'FontSize', 24);
23 %xlabel('Tempo','FontName', 'Arial', 'FontSize', 20)
24 %ylabel('Amplitude','FontName', 'Arial', 'FontSize', 20)
25 legend(['Filtro Crone de 2 polos e 3 polos'],['Aproximação de
   Oustaloup'],['Versão Fracionada do Filtro Crone'],'FontSize', 16);
26 grid on;
27
28
29 % Definição da função de Michel Oustaloup para funções com pot ncia
30 % fracionária
31
32 function G = ousta_fod(gam, N, wb, wh)
33 k = 1:N;
34 wu = sqrt(wh/wb);
35 wkp = wb * wu.^((2*k-1-gam)/N);
36 wk = wb * wu.^((2*k-1+gam)/N);
37 G = zpk(-wkp, -wk, wh^gam);
38 %G=tf(G);
```

### A.3 Obtenção dos filtros com parâmetro m Diferente

Código A.3 – Código de Matlab

```

1  clc;
2  close all;
3  syms x
4
5
6  %parâmetros para cálculo dos filtros
7  a=48.2583;
8  b=8.6666;
9  c=113.8813;
10 d=20.4516;
11
12 %Definição das constantes da função numérica
13 ka=(((a-c)*(b-c))/((d-c)*c))^2;
14 kb=(((a-d)*(b-d))/((c-d)*d))^2;
15 A=2*d+2*c;
16 B=c^2 + d^2 + 4*c*d;
17 C=2*c*d^2 + 2*d*c^2;
18 D=c^2*d^2;
19 E=ka+kb+1;
20 F=2*a+ 2*b + 2*d*ka + 2*c*kb;
21 G=a^2+b^2 +4*a*b + +ka*d^2 + kb*c^2;
22 H=2*b*a^2 +2*a*b^2;
23 I=a^2*b^2;
24 V=0.0018;
25 T=0.01;
26 varx=1;
27
28 %Função gerada após o cálculo numérico
29 r=roots([V -V*A (V*B-E) (F-V*C) (V*D-G) H -I]);
30
31 %Definição das frequências para gerar os filtros com m diferentes
32 w0=[2.686 2.88 3.1 3.34 3.6 3.88 4.20 4.56 4.97];
33
34 for i=1:length(w0)
35 wu=10*w0;
36 wb(i)=wu(i)/(w0(i)*sqrt(w0(i)));
37 wh(i)=wu(i)*(sqrt(w0(i))*w0(i));
38
39 A=3*w0;
40 Q=10^(A(i)/20);%atenuação 20log(Q)
41 G=1;
42
43 N=2;
44
45 S=wu(i)*j;

```

```

46 Ag=G/(S^2/w0(i)^2 +(S/(w0(i)*Q))+ 1);%Ganho da filtro passa baixa
47 ganho=sqrt(real(Ag)^2 +imag(Ag)^2);
48 fi=pi-rad2deg(atan(imag(Ag)/real(Ag)));
49 fase=50.57;
50 m(i)=(2/pi)*abs(fase*(pi/180) + fi -pi);
51 K=(1/ganho)*((1+(wu(i)/wh(i))^2)/(1+(wu(i)/wb(i))^2))^(m(i)/2);
52
53
54 %C=(1/ganho)*((1+(wu/wh)^2)/(1+(wu/wb)^2))^(m/2);
55 num0=1*conv([1/a 1], [1/b 1]);
56 den = conv([(1/c)*(1/d) (1/c + 1/d) 1], [1/w0(i) 1]);
57 num=[num0(1) num0(2) num0(3)];
58 FC=tf(num,[den(1) den(2) den(3) den(4)]);
59 %ajuste do ganho estático para ser unitárioobo
60 Fajuste=FC;
61
62
63 %cálculo das variâncias
64 [numD3 ,denD3]=c2dm(num , den ,T);
65 rn3=roots(numD3);
66 rd3=roots(denD3);
67
68
69 v4=(1+ rn3(1)^2)/(1+rd3(1)^2 + 2*rd3(1));
70 v5=(1+ rn3(2)^2)/(1+rd3(2)^2+ 2*rd3(2));
71 v6=(1)/(1+rd3(3)^2 + 2*rd3(3));
72 varcrone=numD3(2)^2*v4*v5*v6*varx;
73
74 e=w0;
75
76 A=((a-c)*(b-c))./((d-c)*(e-c));
77 B=((a-d)*(b-d))./((c-d)*(e-d));
78 C=((a-e).*(b-e))./((c-e).*(d-e));
79
80 Va=(A/c).^2 +(B/d).^2+(C./e).^2;
81
82
83 tao=1./w0;
84 at=(tao(i)/T)*sqrt(12*varcrone/(2*varx-varcrone));
85 vary(i)=2*(at*T)^2*varx/(12*tao(i).^2 +(at*T)^2);
86 num1=at;
87 den1=[tao at];
88 H1=tf(num1 ,den1);
89 [numD1 ,denD1]=c2dm(num1 , den1 ,T);
90 tamanho=logspace(-2 ,6 ,1000);
91 %GRAFICOS
92 bode(Fajuste , tamanho)
93 %step(Fajuste)
94 hold on;
95 %step(H1)
96
97 end

```

```

98 title('Comparação dos sistemas com m diferente','FontName', 'Arial',
        'FontSize', 24);
99 xlabel('Tempo','FontName', 'Arial', 'FontSize', 20)
100 ylabel('Amplitude','FontName', 'Arial', 'FontSize', 20)
101 %legend(['m=', num2str(m(1))], ['m=', num2str(m(2))], ['m=', num2str(m(3))], ['m=', num2str(m(4))],
        16);
102 legend(['Var=', num2str(vary(1))], ['Var=', num2str(vary(2))], ['Var=', num2str(vary(3))], ['Var=', num2str(vary(4))],
        16);
103
104 grid on;
105
106
107
108
109
110
111
112 %% DEFINI O NUMERICA PARA CALCULAR A CONVERGENCIA DA VARIANCIA
        PELO METODOS DE Newton-Raphson
113
114
115
116
117 %Definição da função
118 f = @(x) V*x^6 -V*A*x^5 +(V*B-E)*x^4 +(F-V*C)*x^3 +(V*D-G)*x^2 +H*x-I;
119
120 % Derivada da função
121 df = @(x) 6*V*x^5 -5*V*A*x^4 +4*(V*B-E)*x^3 +3*(F-V*C)*x^2 +2*(V*D-G)*x
        +H;
122
123 % Valor inicial
124 x0 = pi;
125 % Tolerância para a convergência
126 tolerancia = 1e-6;
127 % Número máximo de iterações
128 maxIter = 1000;
129 % Inicialize a variável iterativa
130 x = x0;
131
132 for iter = 1:maxIter
133     % Calcula o valor da função e sua derivada
134     fx = f(x);
135     dfx = df(x);
136
137     % Atualiza o valor de x usando o método de Newton-Raphson
138     x = x - fx / dfx;
139
140     % Verifica a convergência
141     if abs(fx) < tolerancia
142         fprintf('Convergência alcançada após %d iterações.\n', iter);
143         fprintf('Raiz aproximada: %f\n', x);
144         break;
145     end

```

```
146 end
147
148 if iter == maxIter
149     fprintf('Número máximo de iterações atingido. A solução é
150             aproximadamente: %f\n', x);
151 end
152 if iter == maxIter
153     disp('Número máximo de iterações atingido.');
```