

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
INSTITUTO DE FÍSICA

RODRIGO MENDES RIBEIRO

**TEORIA DE VÍNCULOS E QUANTIZAÇÃO DE
TEORIAS DE CALIBRE**

BRASÍLIA
9 DE JULHO DE 2024

Rodrigo Mendes Ribeiro

Teoria de Vínculos e Quantização de Teorias de Calibre

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto de Física da Universidade de Brasília como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Bacharel em Física.

Orientador: Arsen Melikyan

Universidade de Brasília – UnB

Instituto de Física

Brasília

9 de julho de 2024

Agradecimentos

Eu gostaria de agradecer, primeiramente, aos meus pais, Ailton e Alice, e às minhas irmãs, Laura e Mariana, por todo apoio possível durante a minha graduação em física. Agradeço, também, à minha tia Eliete por cada um dos conselhos.

Agradeço à Maria Luiza por sempre estar ao meu lado durante todos os anos de graduação. Agradeço aos matemáticos Callebe e Vitor por enfrentarem todo tipo de problema comigo. Agradeço ao doutor Pedro Mesquita por me ensinar o que é ser um pesquisador e agradeço à professora Jaqueline Godoy por me orientar acerca dos caminhos a serem seguidos.

Por fim, agradeço aos professores e mentores que tive durante minha graduação. Sou grato ao professor Qu Fanyao pelos vários ensinamentos e ao professor Alexandre Dias por me incentivar a continuar minha pesquisa. Ao meu orientador, professor Arsen Melikyan, sou inteiramente grato por me ensinar e mostrar os caminhos da física teórica.

Resumo

O objetivo deste trabalho é desenvolver um estudo que relacione a teoria de vínculos com a quantização de teorias de calibre. O método desenvolvido por Faddeev-Popov para calcular integrais de caminho resulta numa Lagrangiana que permite diversas análises que envolvam vínculos, simetrias de calibre e a simetria BRST. O surgimento da simetria BRST foi explorado de forma aprofundada em seus aspectos matemáticos e suas implicações nos sistemas físicos. Foram mostradas as aplicações da teoria de vínculos e quantização de campos de calibre, com ênfase nos resultados obtidos quando considera-se aspectos algébricos das simetrias de calibre.

Palavras-chaves: Teoria de Vínculos. Quantização. Teorias de Calibre. Teoria Quântica de Campos.

Lista de abreviaturas e siglas

BRST	Refere-se aos nomes: Carlo Becchi, Alain Rouet, Raymond Stora e Igor Tyutin
QED	<i>Quantum Electrodynamics</i>
QCD	<i>Quantum Chromodynamics</i>

Sumário

	Introdução	13
	Metodologia	15
	Notações	17
I	TEORIA CLÁSSICA	19
1	FORMALISMOS DA MECÂNICA CLÁSSICA	21
1.1	Formalismo Lagrangiano	21
1.2	Formalismo Hamiltoniano	21
2	VÍNCULOS	23
2.1	Equações de Movimento	23
2.2	Funções de Primeira e Segunda Classe	26
2.3	Transformações de Calibre	28
2.4	Mudança no Princípio Variacional	32
2.5	Parênteses de Dirac	33
2.6	Fixação de Calibre	35
II	RELATIVIDADE E SIMETRIAS	37
3	CAMPOS	39
3.1	Lagrangiana e Hamiltoniana para Campos	39
3.2	Generalização do Formalismo Hamiltoniano para Campos	40
4	SIMETRIAS	43
4.1	Definição	43
4.2	Simetria na Relatividade Especial	43
4.3	Simetrias Globais	43
4.4	Simetrias Locais	45
4.5	Campos de Calibre	46
III	TEORIA QUÂNTICA	49
5	QUANTIZAÇÃO	51

5.1	Postulados	51
5.2	Operadores Unitários como Representações de Simetrias	52
5.3	Quantização Canônica	52
5.4	Quantização de Sistemas Vinculados	53
5.5	Mecânica Quântica Relativística	54
6	BÓSONS E FÉRMIONS	57
6.1	Bósons	57
6.2	Férmions	57
6.3	Integral de Caminho	59
6.4	Propriedade dos Operadores na Integral de Caminho	61
6.5	Funcional Gerador e Fenomenologia	62
6.6	Integral de Caminho para Campos de Calibre	63
6.7	Análise	65
IV	ÁLGEBRA DAS SIMETRIAS DE CALIBRE	67
7	ÁLGEBRAS GRADUADAS	69
7.1	Álgebra Associativa	69
7.2	Álgebra de Lie Graduada	69
7.3	Graduação	70
7.4	Classe de Equivalência	71
7.5	Ideal	72
7.6	Diferencial	74
7.7	Homologias e Cohomologias	75
7.8	Cohomologia para a Álgebra de Lie dos Operadores	75
7.9	Diferencial Módulo	77
7.10	Resolução	79
7.11	Expansão do Diferencial	79
8	BRST	81
8.1	Introdução	81
8.2	Transformações BRST	82
8.3	Quantização BRST	84
V	ANÁLISE E APLICAÇÕES	87
9	ANÁLISE DA QUANTIZAÇÃO BRST	89
10	APLICAÇÕES NO CAMPO ELETROMAGNÉTICO	91

10.1	Vínculos e Invariância por Calibre	91
10.2	Quantização do Campo Eletromagnético	92
10.3	Quantização no Calibre de Lorenz	93
10.4	Resultado Obtido pela Generalização do Formalismo Hamiltoniano	94
	Conclusão	95
	REFERÊNCIAS	97
	APÊNDICES	99
	APÊNDICE A – MECÂNICA QUÂNTICA	101
A.1	Estados de uma Partícula	101
A.2	Formalismo BRST na Quantização Canônica	102
	APÊNDICE B – DEFINIÇÕES MATEMÁTICAS	103
B.1	Transformada de Fourier	103
B.2	Grupos	103
B.3	Álgebra de Grassmann	103

Introdução

A Teoria Quântica de Campos é, atualmente, uma das melhores ferramentas para o estudo de fenômenos fundamentais no universo. A teoria é considerada uma das mais bem sucedidas devido à previsão do modelo padrão de partículas. O estudo de campos e suas propriedades existe desde a mecânica clássica, mas ganhou maior relevância após serem usados, por Dirac, para a construção de uma teoria quântica relativística. A célebre equação de Dirac foi capaz de prever a existência de antimatéria (DIRAC, 1928) e, desde então, a teoria de campos é desenvolvida com objetivo de esclarecer cada vez mais o funcionamento das partículas elementares da natureza.

Neste contexto, muito se desenvolveu acerca da teoria de elétrons e suas interações, que ocorrem por meio do campo eletromagnético. Essa formulação é conhecida como *Quantum Electrodynamics* (QED) e possui uma das medições científicas mais acuradas já realizada, a constante de estrutura fina da matéria (LAMB; RETHERFORD, 1951). A forma como o campo eletromagnético é tratado nesse formalismo ganhou, entretanto, um papel diferente do usual, pois notou-se que ele surge como uma consequência da descrição matemática. Esse tipo de abordagem dá ao campo eletromagnético uma interpretação de campo de calibre, que é resultado das simetrias locais de um sistema físico. Agora, sabendo que as teorias físicas permitem diversos tipos de simetrias, o conceito matemático de grupo se torna fundamental, pois, explorando o fato de que partículas devem respeitar diversos tipos de simetrias, deu-se origem a novas formulações, como por exemplo, a *Quantum Chromodynamics* (QCD). O desenvolvimento dessas novas formulações levou ao estudo aprofundado de teorias de calibre, incluindo diversas formas de aplicar quantização nessas teorias.

Em contraponto com as diversas descobertas teóricas associadas às partículas elementares, um tipo de experimento se tornou a principal forma de detectar as previsões feitas pela teoria de campos. Os experimentos de espalhamento, realizados em grandes aceleradores de partículas, se tornaram uma peça principal até mesmo para a formulação teórica e parametrização da teoria. As integrais de caminho podem ser utilizadas para calcular amplitudes de probabilidades associadas aos fenômenos de espalhamento; entretanto, a falta de trivialidade nesses cálculos levam a complicações nos métodos de quantização. Particularmente, os campos de calibre não podiam ser utilizados em métodos tradicionais de quantização por causa de contagens múltiplas do mesmo estado físico. Um método que se destaca devido ao sucesso em calcular integrais de caminho é o método de Faddeev-Popov, que aplica fixação de calibre para permitir avanço nos cálculos. Foi descoberto por Becchi, Rouet, Stora e, separadamente, por Tyutin que o método desenvolvido por Faddeev-Popov possui uma simetria residual associada à liberdade de calibre.

Essa simetria ficou conhecida como BRST e é amplamente estudada.

A fim de estudar processos de quantização, Dirac desenvolveu uma metodologia para se analisar vínculos na mecânica clássica. Essa metodologia ganhou mais relevância quando notou-se que sistemas vinculados possuem também simetrias de calibre. Então, existe uma forte relação entre vínculos e os campos de calibre que são estudados para descrever as partículas elementares. Por fim, o objetivo deste trabalho é desenvolver um estudo que relacione a teoria de vínculos com a quantização de teorias de calibre.

Metodologia

Este trabalho é dividido em 5 grandes partes:

- Teoria Clássica
- Relatividade e Simetrias
- Teoria Quântica
- Álgebra das Simetrias de Calibre
- Aplicações

O objetivo da primeira parte é desenvolver o formalismo de vínculos na mecânica clássica, pois eles possuem uma forte relação com a teoria de campos. É nesta etapa do desenvolvimento que o conceito de transformação de calibre é introduzido pela primeira vez e é apresentado como uma consequência da existência de vínculos no sistema.

A segunda parte consiste em apresentar os campos, que são objetos centrais neste trabalho. Nessa parte, é apresentada a extensão do formalismo clássico para a teoria de campos, reescrevendo o formalismo Lagrangiano e hamiltoniano. O fato de que as teorias físicas devem respeitar a relatividade especial é trazido ao longo dos capítulos, de forma que seja construída uma base para o desenvolvimento de teorias covariantes. Além disso, são introduzidos os conceitos de simetrias globais e locais na teoria de campos. Ao impor que a ação deve ser invariante por simetrias locais, surge o conceito de campo de calibre. O estudo matemático de grupos passa a ser parte essencial da teoria, contribuindo vastamente para o formalismo.

A terceira parte introduz os postulados da mecânica quântica e quais são os requisitos necessários para a construção de uma teoria quântica relativística. Com esses conceitos, desenvolve-se a teoria de bósons e férmions, pois esta impacta diretamente os processos de quantização descritos. A quantização é abordada por meio do formalismo canônico, fazendo uma conexão direta com o formalismo de vínculos desenvolvido na primeira parte, e por meio da integral de caminho. É por meio da integral de caminho que é pontuado um problema na quantização de campos de calibre, devido a existência de múltiplos estados a serem considerados. A solução do problema é obtida com o método de Faddeev-Popov. Entretanto, a solução que utiliza o método de Faddeev-Popov dá origem a uma nova simetria na Lagrangiana do sistema. Para que a abordagem da nova simetria seja feita de forma clara, é necessário desenvolver um formalismo matemático de álgebras graduadas que é feito na parte seguinte.

A quarta parte é a principal neste trabalho. Ela contém dois capítulos voltados à explicação e desenvolvimento da simetria BRST. O primeiro capítulo é exclusivamente matemático, não contendo nenhuma menção aos fenômenos físicos. O segundo capítulo é a explicação e demonstração da simetria BRST. É mostrado nessa parte como todo o conteúdo associado a simetrias de calibre ganha uma nova forma. Nesta forma, a quantização de sistemas com campos de calibre se torna direta, estabelecendo uma relação de equivalência entre todos os estados quânticos que representam o mesmo estado físico.

A quinta, e última, parte consiste em aplicações do formalismo geral desenvolvido ao longo do texto. Tanto a teoria de vínculos quanto a quantização de teorias de calibre são exploradas nessa parte, concluindo com alguns resultados oriundos deste trabalho.

Notações

- Neste trabalho, será utilizado o sistema de unidades naturais:

$$\hbar = c = 1.$$

- No contexto de relatividade especial a métrica utilizada será:

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

- Será utilizado o somatório implícito sempre que houver índices repetidos, com exceção de algumas definições, onde o símbolo aparece explicitamente para enfatizar a soma.
- Provas dos teoremas serão sinalizadas no texto pelo símbolo \square , quando iniciadas, e pelo símbolo \blacksquare , quando finalizadas.

Parte I

Teoria Clássica

1 Formalismos da mecânica clássica

A teoria clássica é composta pelos princípios básicos que ditam as leis da dinâmica. Estes princípios são descritos, de maneira completa e equivalente, pelos formalismos Lagrangiano e Hamiltoniano.

1.1 Formalismo Lagrangiano

A ação S é definida pela seguinte integral:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt, \quad (1.1)$$

onde L é uma função, chamada "Lagrangiana", que depende do tempo t , coordenadas generalizadas $q(t)$ e suas derivadas $\dot{q}(t)$:

$$L = L(q_n, \dot{q}_n, t), \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (1.2)$$

O Princípio da Mínima Ação consiste na variação funcional da ação, tal que $\delta S = 0$. Este princípio variacional implica na equação de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial L}{\partial q_n} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} = 0. \quad (1.3)$$

1.2 Formalismo Hamiltoniano

A Hamiltoniana é a função definida pela transformada de Legendre da Lagrangiana com relação às velocidades \dot{q}_n :

$$H(q_n, p_n) = \sum_n p_n \dot{q}_n - L(q_n, \dot{q}_n), \quad (1.4)$$

onde \dot{q}_n aparece apenas como função das novas variáveis p_n chamadas "momentos", que são obtidas por meio da inversão da seguinte equação:

$$p_n = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n}. \quad (1.5)$$

As equações de movimento são obtidas a partir das equações de Hamilton:

$$\dot{q}_n = \frac{\partial H}{\partial p_n}, \quad (1.6)$$

$$\dot{p}_n = -\frac{\partial H}{\partial q_n}. \quad (1.7)$$

O “espaço de fase” é o espaço definido pelas variáveis q_n e p_n . A evolução temporal de uma função $F(q, p)$ definida neste espaço pode ser escrita em termos dos parênteses de Poisson:

$$\dot{F} = \{F, H\}, \quad (1.8)$$

onde

$$\{F, G\} = \sum_n \frac{\partial F}{\partial q_n} \frac{\partial G}{\partial p_n} - \frac{\partial F}{\partial p_n} \frac{\partial G}{\partial q_n}, \quad (1.9)$$

para funções F e G definidas no espaço de fase.

No contexto da teoria clássica, será utilizado o somatório implícito sempre que houver índices repetidos.

2 Vínculos

2.1 Equações de Movimento

“Vínculos” é um dos temas centrais neste trabalho e a sua definição tem origem no seguinte questionamento: Existem casos onde a transformada de Legendre da Lagrangiana não é bem definida? A resposta é “sim”. Isto ocorre quando não é possível inverter os momentos (dado pela equação (1.5)) e escrever as velocidades \dot{q}_n como funções dos momentos, isto é, $\dot{q}_n = \dot{q}_n(p_n)$. O estudo deste caso, então, inicia-se com a análise de consistência das equações de movimento. A equação de Euler-Lagrange (1.3) pode ser reescrita na forma:

$$\ddot{q}_n \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_n \partial \dot{q}_{n'}} = \frac{\partial L}{\partial q_n} - \dot{q}_{n'} \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_n \partial q_{n'}}. \quad (2.1)$$

Nesta forma, é possível ver que as acelerações \ddot{q}_n só podem ser unicamente determinadas se a matriz $\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_n \partial \dot{q}_{n'}}$ for inversível. Isto significa que o determinante $\det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_n \partial \dot{q}_{n'}}\right) \neq 0$ é condição para que seja possível definir os momentos. Caso o determinante seja nulo, os momentos (1.5) não serão independentes entre si e ocasionará o surgimento de funções do tipo:

$$\phi_m(q, p) = 0, \quad (2.2)$$

onde ϕ_m é alguma relação entre coordenadas e momentos e $m = 1, 2, \dots, M$. Estas funções são chamadas de *vínculos*.

Definição 1 *Vínculos são funções de coordenadas e momentos cujo valor numérico é nulo.*

Os vínculos que surgem naturalmente da definição de momento (1.5) são chamados de “vínculos primários”. Como consequência direta da definição de vínculos, o conjunto de equações ϕ_m define uma variedade no espaço de fase (superfície de vínculos).

Se o rank da matriz $\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_n \partial \dot{q}_{n'}}$ for $N - M'$, significa que há M' equações independentes entre os vínculos. Dado um conjunto específico de coordenadas e suas respectivas velocidades, é possível determinar unicamente um conjunto de momentos e coordenadas. Entretanto, o contrário não é satisfeito. A relação (1.5) define um mapa do espaço de fase, que possui dimensão $2N$, para uma variedade de dimensão $2N - M'$. Este fato está contido matematicamente na teoria por meio do determinante nulo. Ou seja, não é possível recuperar a informação completa do espaço de fase a partir de uma transformação que parta da superfície de vínculos. Para que essa transformação possa ser recuperada de

maneira única, é necessário introduzir novos parâmetros que atuarão como multiplicadores de Lagrange. Para iniciar esta abordagem, é necessário estudar as funções de vínculos (2.2). Considere a seguinte variação:

$$\delta\phi_m(q, p) = \frac{\partial\phi_m}{\partial q_n}\delta q_n + \frac{\partial\phi_m}{\partial p_n}\delta p_n. \quad (2.3)$$

Localmente, os gradientes $d\phi_i$ são linearmente independentes na região definida pela variedade dos vínculos. A fim de aprofundar neste conceito, analisa-se a função Hamiltoniana. Por definição, a Hamiltoniana é uma função que depende das posições q_n e dos momentos p_n . Tomando a variação da Hamiltoniana, obtém-se:

$$\delta H = \frac{\partial H}{\partial q_n}\delta q_n + \frac{\partial H}{\partial p_n}\delta p_n. \quad (2.4)$$

Por outro lado, é possível tomar a variação a partir da equação (1.4):

$$\delta H = \delta p_n \dot{q}_n + p_n \delta \dot{q}_n - \delta L \quad (2.5a)$$

$$\delta H = \delta p_n \dot{q}_n + p_n \delta \dot{q}_n - \left[\frac{\partial L}{\partial q_n} \delta q_n + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} \delta \dot{q}_n \right] \quad (2.5b)$$

$$\delta H = \delta p_n \dot{q}_n - \frac{\partial L}{\partial q_n} \delta q_n. \quad (2.5c)$$

Igualando as equações (2.4) e (2.5), obtém-se:

$$\left(\frac{\partial H}{\partial q_n} + \frac{\partial L}{\partial q_n} \right) \delta q_n + \left(\frac{\partial H}{\partial p_n} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} \right) \delta p_n = 0. \quad (2.6)$$

Aqui, é importante salientar que a variação na Hamiltoniana depende apenas de variações nas coordenadas e momentos, como mostrado na equação (2.5). Isto evidencia a dependência funcional da Hamiltoniana $H = H(q, p)$. Entretanto, no caso onde há vínculos no sistema, as variações δp_n e δq_n não são independentes, pois existe alguma relação entre momentos e coordenadas determinada pela equação (2.2) que os impedem de variar livremente. Isto faz com que a Hamiltoniana só seja bem definida na variedade definida pelos vínculos primários. Entretanto, pode-se estender a função Hamiltoniana para todo o espaço adicionando funções arbitrárias que se anulam na superfície definida pelos vínculos.

$$H \rightarrow H + f(q, p)\phi_m \quad (2.7)$$

Teorema 2.1 *Se uma função no espaço de fase $F = F(q, p)$ se anula na superfície definida pelos vínculos $\phi_m = 0$, então F pode ser escrita como uma combinação dos vínculos $F = f_m\phi_m$. (HENNEAUX; TEITELBOIM, 1992)*

Este teorema justifica uma mudança do tipo (2.7), que é desejada para definir a Hamiltoniana em todo o espaço de fase futuramente. O seguinte teorema, todavia, irá garantir imediatamente a consistência das equações de movimento neste formalismo.

Teorema 2.2 Se $F_n \delta q_n + G_n \delta p_n = 0$ para variações arbitrárias δq_n e δp_n na superfície dos vínculos ϕ_m , então: (HENNEAUX; TEITELBOIM, 1992)

$$F_n = u_m \frac{\partial \phi_m}{\partial q_n} \quad (2.8)$$

$$G_n = u_m \frac{\partial \phi_m}{\partial p_n}. \quad (2.9)$$

Por meio do teorema (2.2) e a equação (2.6) é possível obter as novas equações de movimento, análogas às equações de Hamilton:

$$\dot{q}_n = \frac{\partial H}{\partial p_n} + u_m \frac{\partial \phi_m}{\partial p_n} \quad (2.10)$$

$$\dot{p}_n = -\frac{\partial H}{\partial q_n} - u_m \frac{\partial \phi_m}{\partial q_n}. \quad (2.11)$$

Então é possível reescrever a evolução temporal de uma grandeza $F(q, p)$:

$$\dot{F} = \frac{\partial F}{\partial q_n} \dot{q}_n + \frac{\partial F}{\partial p_n} \dot{p}_n \quad (2.12)$$

$$\dot{F} = \frac{\partial F}{\partial q_n} \left(\frac{\partial H}{\partial p_n} + u_m \frac{\partial \phi_m}{\partial p_n} \right) + \frac{\partial F}{\partial p_n} \left(-\frac{\partial H}{\partial q_n} - u_m \frac{\partial \phi_m}{\partial q_n} \right) \quad (2.13)$$

$$\dot{F} = \{F, H\} + u_m \{F, \phi_m\}. \quad (2.14)$$

Para manter a consistência nas equações de movimento, é necessário impor a condição de que os vínculos não variem no tempo:

$$\{\phi_m, H\} + u_{m'} \{\phi_m, \phi_{m'}\} = 0. \quad (2.15)$$

A condição pode ocasionar o surgimento de novos vínculos

$$\Phi_k(q, p) = 0. \quad (2.16)$$

Vínculos que surgem em decorrência da condição (2.15) são chamados de “vínculos secundários” e devem ser novamente submetidos à mesma condição de invariância:

$$\{\Phi, H\} + u_m \{\Phi, \phi_m\} = 0. \quad (2.17)$$

Neste ponto, torna-se necessário introduzir uma nova notação que contempla vínculos primários e secundários. Além disso, o sinal de igualdade fraca (\approx) será utilizado para identificar essas funções. Portanto, o conjunto completo de vínculos será escrito como:

$$\phi_j(q, p) \approx 0. \quad (2.18)$$

É importante ressaltar que a igualdade fraca não representa uma quantidade que é identicamente nula, mas sim uma função efetiva no espaço de fase. O índice j contempla o conjunto dos índices m (2.2) e k (2.16).

Dado o conjunto completo dos vínculos ϕ_j , são válidas as seguintes equações:

$$\{\phi_j, H\} + u_m \{\phi_j, \phi_m\} \approx 0, \quad (2.19)$$

cuja solução geral é:

$$u_m \approx U_m + v_a V_{am}, \quad (2.20)$$

onde U_m é uma solução particular do sistema de equações (2.19) e $v_a V_{am}$ é uma combinação de soluções linearmente independentes composta por coeficientes arbitrários v_a e soluções V_{am} , tal que

$$v_a V_{am} \{\phi_j, \phi_m\} \approx 0. \quad (2.21)$$

Com esta solução, define-se uma nova Hamiltoniana que inclui os vínculos no formalismo:

$$H_T = H + u_m \phi_m = H + (U_m + v_a V_{am}) \phi_m. \quad (2.22)$$

A Hamiltoniana Total (H_T) fornece as mesmas equações de movimentos que as equações (2.10) e (2.11). Desta forma, recuperamos uma forma conveniente de escrever as equações de movimento:

$$\dot{F} \approx \{F, H_T\}. \quad (2.23)$$

2.2 Funções de Primeira e Segunda Classe

Dentro da teoria de vínculos, há uma classificação de funções que desempenha um papel fundamental na teoria. Esta classificação será aplicada aos vínculos e conterà informações sobre o sistema físico analisado. A nova classificação é feita pela definição de funções de primeira e segunda classe:

Definição 2 *Uma função é dita “de primeira classe” quando o parênteses de Poisson entre a função e todos os vínculos for fracamente nulo. Uma função é dita “de segunda classe” quando ao menos um dos parênteses de Poisson não for fracamente nulo.*

$$\{F, \phi_j\} \approx 0. \quad (2.24)$$

Como consequência direta da definição, a soma de duas funções de primeira classe resulta em outra de primeira classe:

$$\{F + G, \phi_j\} = \{F, \phi_j\} + \{G, \phi_j\} \approx 0. \quad (2.25)$$

Teorema 2.3 *O parênteses de Poisson entre duas funções de primeira classe resulta em outra função de primeira classe:*

□

Considere duas funções de primeira classe F e G .

$$\{\{F, G\}, \phi_j\} = \{F, \{G, \phi_j\}\} - \{G, \{F, \phi_j\}\} \quad (2.26a)$$

$$= \{F, g_{jj'}\phi_{j'}\} - \{G, f_{jj'}\phi_{j'}\} \quad (2.26b)$$

$$= \{F, g_{jj'}\}\phi_{j'} + g_{jj'}\{F, \phi_{j'}\} - \{G, f_{jj'}\}\phi_{j'} - f_{jj'}\{G, \phi_{j'}\} \quad (2.26c)$$

Todos os termos na equação (2.26) são fracamente iguais a zero e portanto:

$$\{\{F, G\}, \phi_j\} \approx 0. \quad (2.27)$$

■

Considere as seguintes novas funções:

$$H' = H + U_m\phi_m \quad (2.28)$$

$$\phi_a = V_{am}\phi_m. \quad (2.29)$$

Há um interesse particular nessas definições: as funções H' e ϕ_a são de primeira classe. Desta forma a Hamiltoniana Total pode ser escrita como a soma de funções de primeira classe:

$$H_T = H' + v_a\phi_a. \quad (2.30)$$

Por consequência, a Hamiltoniana total H_T também é de primeira classe.

A verificação de que H' é de primeira classe segue diretamente da definição:

$$\{H', \phi_j\} = \{H, \phi_j\} + \{U_m\phi_m, \phi_j\} \quad (2.31a)$$

$$= \{H, \phi_j\} + U_m\{\phi_m, \phi_j\} \quad (2.31b)$$

$$\approx 0. \quad (2.31c)$$

De forma semelhante, verifica-se para ϕ_a :

$$\{\phi_a, \phi_j\} = \{v_a V_{am}\phi_m, \phi_j\} \quad (2.32a)$$

$$= v_a V_{am}\{\phi_m, \phi_j\} \quad (2.32b)$$

$$\approx 0. \quad (2.32c)$$

2.3 Transformações de Calibre

O fato de existir coeficientes arbitrários (v_a) na Hamiltoniana Total e ela ser usada para determinar as equações de movimento implica que o formalismo matemático possui mais parâmetros do que o necessário para se descrever um estado físico. Isto significa o eventual surgimento de funções distintas que representam o mesmo estado físico. A transformação que relaciona estas funções é chamada de “Transformação de Calibre”. O “calibre”, então, será algum parâmetro presente no formalismo que possui liberdade para ser alterado, de forma que os estados físicos permaneçam inalterados.

Definição 3 (Calibre) *Parâmetro no formalismo onde há a liberdade de escolha sem a alteração do estado físico.*

Definição 4 (Transformação de Calibre) *Transformação que relaciona funções que representam o mesmo estado físico.*

Nos seguintes passos, será explicitado que a existência dessas transformações são consequências da teoria de vínculos. Observando a evolução temporal de uma função F , tem-se:

$$F(t + \delta t) = F(t) + \dot{F}\delta t + \dots \quad (2.33)$$

$$F(t + \delta t) \approx F(t) + \{F, H_T\}\delta t + \dots \quad (2.34)$$

onde o último termo pode ser aberto como

$$\{F, H_T\} = \{F, H' + v_a\phi_a\} = \{F, H'\} + \{F, v_a\phi_a\}. \quad (2.35)$$

Dada a arbitrariedade do conjunto $\{v_a\}$, a expansão das soluções linearmente independentes poderia ser feita considerando um outro conjunto de coeficientes $\{\tilde{v}_a\}$. Então, podemos obter a mesma expressão, mas com coeficientes diferentes.

$$F(t + \delta t) \approx F(t) + \{F, H'\} + \{F, v_a\phi_a\}\delta t \quad (2.36a)$$

$$F(t + \delta t) \approx F(t) + \{F, H'\} + \{F, \tilde{v}_a\phi_a\}\delta t. \quad (2.36b)$$

Neste caso, as funções representam o mesmo estado físico, embora seus valores numéricos sejam diferentes. A diferença (variação) entre as funções é, portanto:

$$\delta F = (v_a - \tilde{v}_a)\delta t \{F, \phi_a\}. \quad (2.37)$$

Isto significa que, por meio do resultado obtido (2.37), pode-se realizar transformações do tipo

$$F \rightarrow F + \delta F \quad (2.38)$$

e a nova função representará o mesmo estado físico que a antiga.

Teorema 2.4 *O parênteses de Poisson entre dois vínculos de primeira classe gera uma transformação de calibre.*

□

Renomeando a variação dos coeficientes arbitrários por:

$$\varepsilon_a = (v_a - \tilde{v}_a)\delta t, \quad (2.39)$$

é possível definir um operador δ_ε que atua numa função F da seguinte forma:

$$\delta_\varepsilon F = \varepsilon_a \{F, \phi_a\}. \quad (2.40)$$

Ao realizar 4 transformações do tipo (2.40), obtém-se, individualmente, transformações de calibre. Para cada uma delas, define-se uma nova função resultante:

$$F_1 = F + \delta_\varepsilon F \quad (2.41a)$$

$$F_2 = F_1 + \delta_\eta F_1 \quad (2.41b)$$

$$F_3 = F_2 + \delta_{-\varepsilon} F_2 \quad (2.41c)$$

$$F_4 = F_3 + \delta_{-\eta} F_3. \quad (2.41d)$$

O motivo pelo qual as 4 transformações são necessárias é para que se obtenha um parênteses de Poisson entre dois vínculos. Ou seja, é necessário uma transformação para obter o primeiro vínculo e outra de sinal trocado para cancelar termos na expansão. O mesmo é feito para obter um segundo vínculo, totalizando 4 transformações. O objetivo, agora, é determinar a transformação $F \rightarrow F_4$. Ou seja, partindo de F , qual é a variação total δ_T que leva até F_4 ? Esta variação total δt respeita a relação:

$$F_4 = F + \delta_T F \quad (2.42)$$

Utilizando o conjunto de equações (2.41), é possível escrever a transformação (2.42) apenas com variações que atuam em F :

$$F_4 = F_3 + \delta_{-\eta} F_3 \quad (2.43a)$$

$$F_4 = F_2 + \delta_{-\varepsilon} F_2 + \delta_{-\eta}(F_2 + \delta_{-\varepsilon} F_2) \quad (2.43b)$$

$$F_4 = F_1 + \delta_\eta F_1 + \delta_{-\varepsilon}(F_1 + \delta_\eta F_1) + \delta_{-\eta}(F_1 + \delta_\eta F_1 + \delta_{-\varepsilon}(F_1 + \delta_\eta F_1)) \quad (2.43c)$$

$$F_4 = F + \delta_\varepsilon F + \delta_\eta(F + \delta_\varepsilon F) + \delta_{-\varepsilon}(F + \delta_\varepsilon F + \delta_\eta(F + \delta_\varepsilon F)) + \delta_{-\eta}(F + \delta_\varepsilon F + \delta_\eta(F + \delta_\varepsilon F)) + \delta_{-\varepsilon}(F + \delta_\varepsilon F + \delta_\eta(F + \delta_\varepsilon F)) \quad (2.43d)$$

Nota-se que a equação (2.43) está no formato desejado, pois é possível comparar com a equação (2.42). Do lado esquerdo, tem-se F_4 e do lado direito apenas termos com F . O operador definido em (2.40) é linear, pelo fato de que o próprio parênteses de Poisson é

linear. Então, pode-se escrever a variação $\delta_T F$ dando destaque aos termos que possuem variação em primeira e segunda ordem:

$$\begin{aligned} \delta_T F &= \delta_\varepsilon F + \delta_{-\varepsilon} F + \delta_{-\eta} F + \delta_{-\eta} F + \\ &+ \delta_\eta \delta_\varepsilon F + \delta_{-\varepsilon} \delta_\varepsilon F + \delta_{-\varepsilon} \delta_\eta F \\ &+ \delta_{-\eta} \delta_\varepsilon F + \delta_{-\eta} \delta_\eta F + \delta_{-\eta} \delta_{-\varepsilon} F + \dots \end{aligned} \quad (2.44)$$

As variações em primeira ordem se cancelam e os termos que contém operadores com índice ε e η podem ser expandidos de acordo com a equação (2.40) :

$$\delta_T F = \eta_b \varepsilon_a (\{ \{ F, \phi_a \}, \phi_b \} - \{ \{ F, \phi_b \}, \phi_a \}) + \dots \quad (2.45)$$

Aplicando a identidade de Jacobi no segundo termo e a propriedade antissimétrica do parênteses de Poisson, obtém-se:

$$\delta F = \eta_b \varepsilon_a \{ \{ \phi_b, \phi_a \}, F \}, \quad (2.46)$$

onde os termos de ordem superior podem simplesmente ser condensados na notação δF .

■

Teorema 2.5 *O parênteses de Poisson entre um vínculo de primeira classe e a Hamiltoniana Total H_T gera uma transformação de calibre.*

□

O intuito é construir duas funções, F_1 e F_2 , que sejam transformações de calibre de uma determinada função F . No primeiro caso, aplica-se a evolução temporal na função F e depois realiza a transformação de calibre. No segundo caso, realiza-se a transformação de calibre e, em seguida, aplica-se a evolução temporal. Começando pela função F_1 :

$$F_1 = F + \delta F. \quad (2.47)$$

Ao seguir os passos descritos, tem-se :

$$F_1(t + \delta t) = F_1(t) + \dot{F}_1 \delta t \quad (2.48a)$$

$$F_1(t + \delta t) = F(t) + \delta F + \frac{d}{dt}(F + \delta F) \delta t \quad (2.48b)$$

$$F_1(t + \delta t) = F(t) + \delta F + \dot{F} \delta t + \frac{d}{dt}(\delta F) \delta t. \quad (2.48c)$$

Agora, de forma semelhante, define-se a função F_2 :

$$F_2 = F(t) + \delta F(t) \quad (2.49)$$

e a continuação segue os passos mencionados:

$$F_2(t + \delta t) = F(t + \delta t) + \delta(F(t + \delta t)) \quad (2.50a)$$

$$F_2(t + \delta t) = F(t) + \dot{F}\delta t + \delta(F(t) + \dot{F}\delta t) \quad (2.50b)$$

$$F_2(t + \delta t) = F(t) + \dot{F}\delta t + \delta F + \delta\dot{F}\delta t. \quad (2.50c)$$

Como ambas as funções são transformações de calibre da função F , é possível calcular uma variação total δ_T entre elas:

$$F_2(t + \delta t) - F_1(t + \delta t) = \delta_T F, \quad (2.51)$$

o que fornece o seguinte resultado:

$$\delta_T F = \delta t \left[\frac{d}{dt}(\delta F) - \delta\left(\frac{dF}{dt}\right) \right]. \quad (2.52)$$

Explicitando as evoluções temporais por meio da Hamiltoniana total (2.23):

$$\delta_T F = \delta t \left[\{\delta F, H_T\} - \delta\{F, H_T\} \right] \quad (2.53a)$$

$$\delta_T F = \delta t \left[\{\varepsilon_a\{F, \phi_a\}, H_T\} - \varepsilon_a\{\{F, H_T\}, \phi_a\} \right] \quad (2.53b)$$

$$\delta_T F = \delta t \varepsilon_a \left[\{\{F, \phi_a\}, H_T\} - \{\{F, H_T\}, \phi_a\} \right]. \quad (2.53c)$$

Por fim, ao aplicar a identidade de Jacobi no segundo termo e a propriedade antissimétrica do parênteses de Poisson, obtém-se:

$$\delta_T F = \delta t \varepsilon_a \{\{H_T, \phi_a\}, F\} \quad (2.54)$$

■

Corolário 2.5.1 *O parênteses de Poisson entre um vínculo de primeira classe e a Hamiltoniana de primeira classe H' gera uma transformação de calibre.*

□

A demonstração segue os mesmos passos do teorema, mas, ao chegar na equação (2.53), é possível expandir a Hamiltoniana Total de acordo com a equação (2.30):

$$\delta_T F = \delta t \varepsilon_a \left[\{\{F, \phi_a\}, H' + v_b \phi_b\} - \{\{F, H' + v_b \phi_b\}, \phi_a\} \right]. \quad (2.55)$$

Entretanto, todos os termos que contém ϕ_b se anulam, pois podem ser escritos da seguinte forma, pela propriedade de Jacobi:

$$\{\{F, \phi_a\}, \phi_b\} - \{\{F, \phi_b\}, \phi_a\} = \{\{\phi_b, \phi_a\}, F\}. \quad (2.56)$$

onde $\{\phi_b, \phi_a\} = 0$ (Teorema 2.3). Portanto, obtém-se um resultado análogo com a Hamiltoniana de primeira classe:

$$\delta_T F = \delta t \varepsilon_a \{ \{ H', \phi_a \}, F \}. \quad (2.57)$$

■

Os teoremas 2.3 e 2.5 são de grande relevância para uma compreensão mais abrangente da teoria clássica. Uma função $F(q, p)$ que define um estado físico pode ser submetida a uma transformação $F \rightarrow F + \delta F$ tal que a função transformada ainda descreve o mesmo estado físico. A transformação na função corresponde também a uma mudança nos conjuntos q_n e p_n , significando a existência de outros respectivos pares de conjuntos que descrevem o estado físico. Os vínculos de primeira classe ganham, então, um papel importante, pois podem ser usados como geradores dessas transformações, como mostrado nos teoremas.

2.4 Mudança no Princípio Variacional

Desde a introdução neste formalismo, não houve menção em como ele afetaria o princípio variacional. É conveniente definir uma ação cujo princípio variacional já leve em consideração o formalismo de vínculos e, neste caso, é fácil verificar que a seguinte ação proporciona as equações de movimento adequadas:

$$S_T = \int_{t_1}^{t_2} \left[p_n \dot{q}_n - H - u_m \phi_m \right] dt. \quad (2.58)$$

Ao calcular a variação $\delta S_T = 0$, obtém-se as equações de movimento da forma (2.10) e (2.11).

É importante ressaltar que a transformada de Legendre é involutiva, ou seja, ela retorna à mesma função quando aplicada duas vezes. Sendo assim, não há motivos, até então, para dizer qual formalismo (Lagrangiano ou Hamiltoniano) é “mais fundamental”. Afinal, pode-se deduzir ambos de seus respectivos processos variacionais e definir a transformada de Legendre que os relaciona. A intenção nesta etapa do formalismo é, portanto, tornar as definições iniciais de vínculos primários e secundários menos relevantes. Observe que estas definições dependem exclusivamente do formalismo Lagrangiano, pois são consequência direta da transformada de Legendre e momentos. O princípio variacional (2.58) é correto do ponto de vista de consistência das equações de movimento. Entretanto, ele considera apenas os vínculos primários ϕ_m em sua definição. Partindo de um formalismo puramente Hamiltoniano, fica clara a necessidade de definir um princípio variacional que leve em consideração todos os vínculos (não só primários), isto é, o conjunto ϕ_j . Este princípio será apresentado a seguir:

$$S_E = \int_{t_1}^{t_2} \left[p_n \dot{q}_n - H - u_j \phi_j \right] dt. \quad (2.59)$$

Para manter a notação consistente, será utilizado γ para vínculos de primeira classe e χ para vínculos de segunda classe. Os conjuntos de vínculos γ_a e χ_b formam o conjunto completo de vínculos ϕ_j . O princípio (2.59) é equivalente a definir uma Hamiltoniana Estendida (H_E) que adiciona todos os vínculos de primeira classe, sem a distinção entre primários e secundários:

$$H_E = H + u_a \gamma_a. \quad (2.60)$$

A Hamiltoniana Estendida contribui de forma inédita à teoria, adicionando todos os vínculos de primeira classe de forma explícita. Como estes vínculos são considerados geradores de transformações de calibre, a Hamiltoniana Estendida inclui todos os geradores ao formalismo. A evolução temporal se mantém da mesma forma ao realizar o cálculo com a Hamiltoniana estendida:

$$\dot{F} \approx \{F, H_E\}. \quad (2.61)$$

2.5 Parênteses de Dirac

A classificação de vínculos entre primeira e segunda classe, como mencionado anteriormente, se mostrou efetiva pelos significados físicos que elas apresentam. Vínculos de primeira classe têm um papel fundamental nas transformações de calibre, enquanto que os vínculos de segunda classe se apresentarão como uma restrição específica no sistema. Vínculos de segunda classe não contribuem para a dinâmica do sistema. Estes mostram, entretanto, que o sistema possui menos graus de liberdade do que inicialmente foram concebidos, ou seja, existem conjuntos de coordenadas e momentos que podem ser retirados da análise do sistema físico sem que haja qualquer alteração na dinâmica. Para evidenciar este fato, sobre os vínculos de segunda classe, pode-se analisar o caso mais simples onde $q_1 \approx p_1 \approx 0$. Neste caso, o parênteses de Poisson $\{q_1, p_1\} = 1$ indica que q_1 e p_1 são vínculos de segunda classe. Analisando o espaço de fase composto por N coordenadas e N momentos, é fácil perceber que este vínculo apenas exclui um dos possíveis graus de liberdade que o sistema pode atuar. A dinâmica do sistema, então, está restrita às outras $N - 1$ coordenadas e $N - 1$ momentos. No caso de uma partícula que pode mover-se em 3 dimensões x , y e z , estabelecer que $y \approx p_y \approx 0$ é o mesmo que fixá-la no plano xy . Portanto, toda a análise física está contida nas coordenadas x e y . O estudo mais profundo de vínculos de segunda classe levará a mais uma generalização da teoria de vínculos, o parênteses de Dirac. O parênteses de Dirac irá generalizar o exemplo dado para um conjunto qualquer de vínculos de segunda classe.

Dado o conjunto completo de vínculos ϕ_j , se estabelece a seguinte matriz:

$$C_{jj'} = \{\phi_j, \phi_{j'}\}, \quad (2.62)$$

tal que $C_{jj'} \approx 0$ sempre que há vínculos de primeira classe na operação. Pode-se verificar o teorema a seguir.

Teorema 2.6 *Se o determinante da matriz $C_{jj'}$ for 0, existe pelo menos um vínculo de primeira classe no conjunto ϕ_j . (HENNEAUX; TEITELBOIM, 1992)*

Considerando o teorema, pode-se reorganizar a matriz de vínculos em submatrizes, utilizando o determinante como critério de organização. A única submatriz onde o determinante não se anula é, pelo teorema, composta exclusivamente por vínculos de segunda classe. A matriz tem a seguinte forma:

$$C_{jj'} = \begin{pmatrix} \{\gamma_a, \gamma_{a'}\} & \{\gamma_a, \chi_{b'}\} \\ \{\chi_b, \gamma_{a'}\} & \{\chi_b, \chi_{b'}\} \end{pmatrix}. \quad (2.63)$$

Todos os seguintes termos: $\{\gamma_a, \gamma_{a'}\}$, $\{\gamma_a, \chi_{b'}\}$, $\{\chi_b, \gamma_{a'}\}$ contém vínculos de primeira classe e, portanto, se anulam. Restando apenas o termo $\{\chi_b, \chi_{b'}\}$, a matriz se torna:

$$C_{jj'} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \{\chi_b, \chi_{b'}\} \end{pmatrix}. \quad (2.64)$$

A submatriz de vínculos de segunda classe $\{\chi_b, \chi_{b'}\}$ será identificada pelo índice b , isto é, $C_{bb'}$. Novamente, pelo teorema 2.6, a matriz $C_{bb'}$ possui determinante não nulo e, portanto, possui uma inversa tal que:

$$C_{bb'} C_{b'b''}^{-1} = \delta_{bb''}. \quad (2.65)$$

A partir da inversa da matriz $C_{bb'}$ é definido o parênteses de Dirac para duas funções F e G definidas no espaço de fase (DIRAC, 2001):

$$\{F, G\}_D = \{F, G\} - \{F, \chi_b\} C_{bb'}^{-1} \{\chi_{b'}, G\}. \quad (2.66)$$

A definição implica na seguinte propriedade:

$$\{\chi, F\}_D = 0. \quad (2.67)$$

O parênteses de Dirac entre vínculos de segunda classe e uma função F é fortemente igual a zero para qualquer F . Quando este caso ocorre durante a análise de um sistema, não é necessário o cálculo do parênteses, pois ele pode ser avaliado previamente como zero (diferentemente dos vínculos no parênteses de Poisson). O parênteses de Dirac para vínculos de primeira classe é fracamente igual ao parênteses de Poisson:

$$\{F, \gamma\}_D \approx \{F, \gamma\}. \quad (2.68)$$

Para todo F , a evolução temporal não é modificada pelo parênteses de Dirac:

$$\dot{F} \approx \{F, H_E\} \approx \{F, H_E\}_D. \quad (2.69)$$

Por fim, o parênteses de Dirac obedece as mesmas propriedades do parênteses de Poisson:

$$\{F, G\}_D = -\{G, F\}_D \quad (2.70)$$

$$\{F, GK\}_D = \{F, G\}_D K + G \{F, K\}_D \quad (2.71)$$

$$\{\{F, G\}_D, K\}_D + \{\{K, F\}_D, G\}_D + \{\{G, K\}_D, F\}_D = 0 \quad (2.72)$$

2.6 Fixação de Calibre

A fixação de calibre consiste em realizar uma escolha sobre o parâmetro livre determinado pelo formalismo. Como consequência da teoria de vínculos, observou-se que há mais de um conjunto de coordenadas e momentos que satisfazem um determinado estado físico. A fixação do calibre vai tornar esta relação única, ou seja, dado um estado físico, existe um único conjunto de coordenadas e momentos que o satisfaz e vice-versa. Como as transformações de calibre são obtidas por meio de equações do tipo (2.37), tem-se um número específico de parâmetros que podem ser fixados, que não pode ser maior do que o número de vínculos de primeira classe γ_a .

Parte II

Relatividade e Simetrias

3 Campos

Este capítulo tem a função de introduzir um dos principais objetos matemáticos para o estudo contemporâneo da física, os campos. A exigência de que teorias físicas devam obedecer a relatividade especial já é o primeiro indício que os campos são necessários. A mecânica clássica é inteiramente baseada na abordagem de que, dadas as condições iniciais, é possível deduzir a evolução temporal de um sistema. A partir do momento em que espaço e tempo são tratados como variáveis independentes na relatividade especial, não há mais como construir funções temporais que ditem o comportamento das coordenadas de um sistema. A solução para este problema é introduzir novos objetos que são funções do tempo e espaço.

3.1 Lagrangiana e Hamiltoniana para Campos

O formalismo clássico pode ser estendido para as quantidades físicas conhecidas como “campos”. Os campos são funções definidas no espaço-tempo (PESKIN, 2018) que serão usadas para construir a Lagrangiana do sistema. Ao invés de coordenadas discretas, a Lagrangiana será função de campos que dependem de variáveis contínuas. Partindo da ação clássica, que é uma integral no tempo da Lagrangiana, é possível redefinir a Lagrangiana como a seguinte integral:

$$L = \int d^3x \mathcal{L}, \quad (3.1)$$

onde \mathcal{L} é conhecida como a “densidade de Lagrangiana” e é uma função dos campos φ_a e suas derivadas $\partial_\mu \varphi_a$, onde $\varphi = \varphi(\vec{x}, t)$:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\varphi_a, \partial_\mu \varphi_a). \quad (3.2)$$

A ação pode ser escrita da seguinte maneira, incluindo a integral no tempo:

$$S = \int d^4x \mathcal{L}. \quad (3.3)$$

O princípio variacional $\delta S = 0$ implica na equação de Euler-Lagrange para campos:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_a} = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi_a)} \right). \quad (3.4)$$

A Hamiltoniana, é definida de forma análoga à transformada de Legendre:

$$H = \int d^3x \left[\sum_a \pi_a \dot{\varphi}_a - \mathcal{L} \right] \quad (3.5)$$

onde π é o momento associado ao campo φ , dado por:

$$\pi_a = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_a}. \quad (3.6)$$

A quantidade entre colchetes na equação (3.5) é denominada por “densidade de Hamiltoniana”:

$$\mathcal{H} = \sum_a \pi_a \dot{\varphi}_a - \mathcal{L}. \quad (3.7)$$

Pelo fato de que a ação é determinada em função das quantidades \mathcal{L} ou \mathcal{H} , estas também podem eventualmente ser chamadas de “Lagrangiana” e “Hamiltoniana” do sistema. O parênteses de Poisson de duas funções F e G é:

$$\{F, G\} = \int d^3x \left[\frac{\partial F}{\partial \varphi_a} \frac{\partial G}{\partial \pi_a} - \frac{\partial F}{\partial \pi_a} \frac{\partial G}{\partial \varphi_a} \right]. \quad (3.8)$$

(NASTASE, 2019)

3.2 Generalização do Formalismo Hamiltoniano para Campos

A Hamiltoniana introduzida na seção anterior possui uma forte relação com simetrias do espaço-tempo. Sendo a Lagrangiana uma função de campos e suas derivadas $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\varphi_\nu, \partial_\mu \varphi_\nu)$, considere a aplicação de uma derivada:

$$\partial_\nu \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_a} \partial_\nu \varphi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi_a)} \partial_\nu (\partial_\mu \varphi) \quad (3.9a)$$

$$= \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi_a)} \right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi_a)} \partial_\nu (\partial_\mu \varphi) \quad (3.9b)$$

$$= \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi_a)} \partial_\nu \varphi \right). \quad (3.9c)$$

Incluir a Lagrangiana dentro do termo em parênteses resultará em:

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi_a)} \partial_\nu \varphi - \delta_\nu^\mu \mathcal{L} \right) = 0. \quad (3.10)$$

Esta quantidade entre parênteses é conhecida como o tensor de momento-energia e surge do fato que a Lagrangiana não depende explicitamente de um ponto x no espaço tempo:

$$T_\nu^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi_a)} \partial_\nu \varphi - \delta_\nu^\mu \mathcal{L}. \quad (3.11)$$

A componente temporal deste tensor é uma grandeza conservada no tempo e dá-se o nome de “energia”, o que justifica a definição de Hamiltoniana feita na seção anterior, pois:

$$\mathcal{H} = T^{00} = \pi_a \dot{\varphi}_a - \mathcal{L}. \quad (3.12)$$

Apesar de frequentemente estarem associados, os conceitos de Hamiltoniana e energia não são os mesmos. Esta definição de Hamiltoniana possui o peso histórico de corresponder a energia de um sistema, entretanto ela não possui a mesma função que uma Hamiltoniana na mecânica clássica de determinar as equações de movimento. Todavia, este análogo ao formalismo hamiltoniano existe na teoria de campos e foi formalizado por De Donder-Weyl. Define-se a Hamiltoniana generalizada pela seguinte transformada de Legendre:

$$\mathcal{H}_{D.W.} = \sum_a P_a^\mu \partial_\mu \varphi_a - \mathcal{L}, \quad (3.13)$$

onde P_a^μ é dado por:

$$P_a^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi_a)} \quad (3.14)$$

e $\partial_\mu \varphi_a$ aparece na equação (3.13) apenas como função de P_a^μ . O princípio variacional é dado em termos da ação:

$$S = \int d^4x \left[\sum_a P_a^\mu \partial_\mu \varphi_a - \mathcal{H} \right]. \quad (3.15)$$

Impondo a condição da mínima ação

$$\delta S = 0, \quad (3.16)$$

chega-se ao análogo às equações de Hamilton para campos:

$$\partial_\mu \varphi_a = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_a^\mu} \quad (3.17)$$

$$\partial_\mu P_a^\mu = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \varphi_a}. \quad (3.18)$$

(KANATCHIKOV, 1999)

4 Simetrias

4.1 Definição

Uma transformação é dita “simétrica” quando realiza uma mudança que não altera o resultado de possíveis experimentos. As transformações simétricas respeitam os axiomas da definição matemática de grupos (apêndice B.2). Isso significa que se há uma simetria no sistema, existe um grupo associado. Este fato traz uma gama de possibilidades para a abordagem de teorias físicas, pois estas podem sempre ser estudadas por meio de suas simetrias.

A teoria de campos é, em geral, estudada por duas categorias de simetrias: globais e locais. A nomenclatura refere-se à dependência de pontos no espaço-tempo que a transformação possa ter, onde, neste caso, ela é chamada de local (caso contrário, ela é global). O caso das transformações de calibre naturalmente se encaixará nas simetrias locais, onde elas ganharão um papel mais fundamental, dando origem aos campos de calibre.

4.2 Simetria na Relatividade Especial

Uma transformação de Lorentz Λ é definida como as transformações que mantêm a métrica invariante pela seguinte relação:

$$\Lambda^T g \Lambda = g. \quad (4.1)$$

A transformação de Poincaré é definida pela composição de uma transformação de Lorentz (Λ) e uma translação (a):

$$T^\mu_\nu = \Lambda^\mu_\nu + a^\mu. \quad (4.2)$$

Esta transformação possui um papel importante nas teorias físicas pois correspondem às simetrias exigidas pela relatividade especial. O resultado, ao se aplicar a transformação de Poincaré duas vezes em um vetor, é dado por:

$$x'' = \Lambda' x' + a' = \Lambda'(\Lambda x + a) + a' = \Lambda' \Lambda x + \Lambda' a + a'. \quad (4.3)$$

Uma representação do grupo de Poincaré deve, portanto, obedecer a lei de composição associado à equação (4.3). (WEINBERG, 2005)

4.3 Simetrias Globais

Teorema 4.1 (Teorema de Noether) *Para cada transformação contínua nos campos, que deixe a ação invariante, existe uma quantidade correspondente que é conservada no*

tempo.

(BOGOLJUBOV; SIRKOV, 1984) Se existe uma transformação do tipo

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = \phi(x) + \delta\phi(x), \quad (4.4)$$

tal que as Lagrangianas resultam nas mesmas equações de movimento:

$$\mathcal{L} \iff \mathcal{L}', \quad (4.5)$$

então, as Lagrangianas podem ser relacionadas por meio da seguinte equação:

$$\mathcal{L}(\phi'(x), \partial_\mu \phi'(x)) = \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x)) + \partial_\mu F^\mu. \quad (4.6)$$

Esta invariância nas equações de movimento é uma forma de descrever uma simetria global no sistema. Agora, pode-se analisar o que acontece com a ação na presença destas simetrias:

$$\delta S = \int d^4x \delta \mathcal{L}. \quad (4.7)$$

A variação em \mathcal{L} pode ser expandida em suas dependências:

$$\delta \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_\nu} \delta \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_\nu)} \delta (\partial_\mu \phi) \quad (4.8a)$$

$$= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta \phi \right) - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) \delta \phi. \quad (4.8b)$$

Pela equação de Euler-Lagrange, o primeiro e último termo são iguais e se cancelam, resultando em:

$$\delta \mathcal{L} = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta \phi \right). \quad (4.9)$$

Desde que haja uma simetria no sistema, pode-se relacionar a variação na Lagrangiana com a equação (4.6):

$$\delta \mathcal{L} = \partial_\mu F^\mu \quad (4.10)$$

e, portanto:

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta \phi \right) = \partial_\mu F^\mu \quad (4.11)$$

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta \phi - F^\mu \right) = 0. \quad (4.12)$$

A quantidade entre parênteses é chamada de corrente e é representada por J :

$$J^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta \phi - F^\mu, \quad (4.13)$$

$$\partial_\mu J^\mu = 0. \quad (4.14)$$

Separando o termo temporal dos termos espaciais na equação (4.14) é possível obter uma quantidade conservada no tempo. Integrando no espaço, o resultado é:

$$\partial_0 J^0 = -\partial_i J^i \quad (4.15)$$

$$\int d^3x \partial_0 J^0 = -\int d^3x \partial_i J^i. \quad (4.16)$$

O lado direito da equação é zero devido ao fato que os campos se anulam no infinito, resultando em:

$$\partial_0 \int d^3x J^0 = 0. \quad (4.17)$$

Esta quantidade, que é constante no tempo, é chamada de “carga” e é representada da seguinte maneira:

$$Q = \int d^3x J^0. \quad (4.18)$$

(BOGOLIUBOV; SHIRKOV; CHOMET, 1959) (ROTHER, 2021)

4.4 Simetrias Locais

Considere um campo que se transforma de acordo com a seguinte lei:

$$\phi'_a(x) = U_{ab}(x)\phi_b(x). \quad (4.19)$$

O fato da Lagrangiana ser uma função de campos e suas derivadas, torna problemático lidar com transformações deste tipo, pois elas possuem dependência do espaço-tempo. Então deseja-se construir uma derivada que se transforma de acordo com a mesma lei que o campo, para que a ação seja invariante por esse tipo de transformação:

$$(D_\mu \phi(x))' = U(x)D_\mu \phi(x). \quad (4.20)$$

A derivada chamada “covariante” pode ser escrita da seguinte forma:

$$D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu(x), \quad (4.21)$$

onde $A_\mu(x)$ é um novo campo, chamado “campo de calibre” e g uma constante. Com a derivada covariante, há uma nova forma de escrever uma Lagrangiana de tal forma que ela seja invariante pela ação de uma transformação local.

Analisando as consequências da equação (4.20), pode-se obter a forma do campo A_μ transformado em termos da transformação $U(x)$:

$$(D_\mu \phi)' = (\partial_\mu - igA'_\mu(x))(U(x)\phi(x)). \quad (4.22)$$

$A'_\mu(x)$ é o campo de calibre transformado que, até então, não se sabe qual é a forma. Segue:

$$(D_\mu \phi)' = (\partial_\mu U(x)\phi(x) + U(x)\partial_\mu \phi(x) - igA'_\mu(x)(U(x)\phi(x))) \quad (4.23)$$

$$(D_\mu\phi)' = U(x)[U^{-1}(x)\partial_\mu U(x)\phi(x) + \partial_\mu\phi(x) - U^{-1}(x)igA'_\mu(x)U(x)\phi(x)]. \quad (4.24)$$

Como a intenção é de que a derivada covariante se transforme igual ao campo, pode-se impor essa condição a fim de determinar a forma do campo de calibre transformado. Comparando a última equação com a equação (4.20) tem-se:

$$D_\mu\phi(x) = U^{-1}(x)\partial_\mu U(x)\phi(x) + \partial_\mu\phi(x) + U^{-1}(x)igA'_\mu(x)U(x)\phi(x). \quad (4.25)$$

Os termos com derivadas nos campos ϕ se cancelam, resultando em:

$$-igA_\mu(x)\phi(x) = U^{-1}(x)\partial_\mu U(x)\phi(x) + U^{-1}(x)igA'_\mu(x)U(x)\phi(x). \quad (4.26)$$

Por fim, isolando o campo A'_μ , tem-se:

$$A'(x) = U(x)AU^{-1}(x) - \frac{i}{g}\partial_\mu U(x)U^{-1}(x) \quad (4.27)$$

ou, na forma equivalente:

$$A'(x) = U(x)AU^{-1}(x) + \frac{i}{g}U(x)\partial_\mu U^{-1}(x) \quad (4.28)$$

(FRADKIN, 2021)

4.5 Campos de Calibre

Os campos de calibre, agora, desempenham um papel muito mais fundamental na teoria geral, pois surgem do fato de que a ação deve ser invariante por simetrias locais. Estes campos possuem dinâmica própria e, naturalmente, é de grande interesse estudar as diferentes implicações resultantes do fato de que campos podem ser escritos como representações de um determinado grupo. Para iniciar esta abordagem, é útil começar por um campo de matéria $\psi_l(x)$ cuja transformação infinitesimal deixa a ação invariante e é dada por:

$$\delta\psi_l(x) = i\epsilon^a(x)(t_a)_l^m\psi_m(x), \quad (4.29)$$

onde $\epsilon^a(x)$ é um parâmetro infinitesimal que depende do espaço-tempo e t_a é um conjunto de matrizes constantes e independentes. Assumindo que esta simetria da ação esteja associada a um grupo de Lie, as matrizes devem obedecer a relação de comutação do grupo:

$$[t_a, t_b] = iC_{ab}^c t_c, \quad (4.30)$$

onde C_{ab}^c é um conjunto de constantes reais conhecidas como “constantes de estrutura” do grupo. A anti-simetria do comutador implica que essas constantes são também anti-simétricas, isto é $C_{ab}^c = -C_{ba}^c$. O conjunto de matrizes satisfaz a identidade de Jacobi:

$$[[t_a, t_b], t_c] + [[t_c, t_a], t_b] + [[t_b, t_c], t_a] = 0 \quad (4.31)$$

e implicam que as constantes devem satisfazer a seguinte relação:

$$C_{ab}^d C_{dc}^e + C_{ca}^d C_{db}^e + C_{bc}^d C_{da}^e = 0. \quad (4.32)$$

Qualquer conjunto de constantes C_{ab}^c que satisfaça essa relação definem um conjunto de matrizes:

$$(t_a^A)^b{}_c = -iC_{ca}^b, \quad (4.33)$$

que irão satisfazer a álgebra do grupo. Neste contexto, o índice A é usado apenas para referir-se à representação adjunta do grupo. Ao exigir que a Lagrangiana seja invariante pela transformação (4.29), é necessário alterar os termos com derivadas de campos, assim como foi feito na seção anterior. Derivando a equação (4.29), o resultado é:

$$\partial_\mu(\delta\psi_l(x)) = i(\partial_\mu\epsilon^a(x))(t_a)^m{}_l\psi_m(x) + i\epsilon^a(x)(t_a)^m{}_l(\partial_\mu\psi_m(x)). \quad (4.34)$$

Para que as derivadas dos campos se transformem da mesma maneira que os campos, é necessário introduzir um campo $A_\mu^a(x)$ para cancelar o segundo termo na equação (4.34). Se este novo campo se transformar de acordo com

$$\delta A_\mu^b = \partial_\mu\epsilon^b + i\epsilon^a(t_a^A)^b{}_c A_\mu^c = \partial_\mu\epsilon^b + C_{ca}^b\epsilon^a A_\mu^c, \quad (4.35)$$

então a derivada covariante será dada por:

$$(D_\mu\psi)_l = \partial_\mu\psi_l - iA_\mu^b(x)(t_b)^m{}_l\psi_m(x). \quad (4.36)$$

A transformação da derivada covariante, como consequência, será:

$$\delta(D_\mu\psi(x))_l = i\epsilon^a(x)(t_a)^m{}_l(D_\mu\psi(x))_m. \quad (4.37)$$

A dinâmica dos campos A_μ^a também deve ser levada em consideração. Isto significa que a Lagrangiana envolverá derivadas dos campos de calibre, todavia a forma como eles se transformam já é conhecida e dado pela equação (4.35). Então, considere o tensor:

$$F_{\mu\nu}^c = \partial_\mu A_\nu^c - \partial_\nu A_\mu^c + C_{ab}^c A_\mu^a A_\nu^b \quad (4.38)$$

que pode ser obtido por meio do comutador entre as derivadas covariantes:

$$([D_\mu, D_\nu]\psi)_l^m = -i(t_c)^m{}_l F_{\mu\nu}^c \psi_m. \quad (4.39)$$

Esse tensor se transforma, como desejado, da mesma forma que os campos:

$$\delta F_{\mu\nu}^b = i\epsilon^a(x)(t_a^A)^b{}_c F_{\mu\nu}^c = \epsilon^a(x)C_{ca}^b F_{\mu\nu}^c. \quad (4.40)$$

Por fim, uma Lagrangiana que só possui dinâmica associada aos campos de calibre é normalmente chamada de “Yang–Mills” e possui a seguinte forma:

$$\mathcal{L}_{Y.M.} = -\frac{1}{4}F_a^{\mu\nu}F_{\mu\nu}^a. \quad (4.41)$$

(WEINBERG, 1995)

Parte III

Teoria Quântica

5 Quantização

5.1 Postulados

Essa seção tem o objetivo de estabelecer os postulados da mecânica quântica que serão necessários para a construção da Teoria Quântica de Campos.

Estados físicos são representados por vetores no espaço de Hilbert. Para qualquer par de vetores, associa-se um número complexo dado por:

$$\langle \phi | \psi \rangle = \langle \psi | \phi \rangle^* . \quad (5.1)$$

Dado o seguinte vetor $|a\rangle$:

$$|a\rangle = k |b\rangle , \quad (5.2)$$

onde k é um número complexo ($k \in \mathbb{C}$), valem as seguintes relações:

$$\langle c | a \rangle = \langle c | k | b \rangle = k \langle c | b \rangle , \quad (5.3)$$

$$\langle a | c \rangle = \langle b | k^* | c \rangle = k^* \langle b | c \rangle . \quad (5.4)$$

A norma é dada por $\langle \phi | \phi \rangle$ e, como consequência da definição (5.1), deve ser maior que zero. A relação $\langle \psi | \psi \rangle = 0$ é satisfeita apenas para o vetor nulo $|\psi\rangle = 0$

Observáveis são representados por operadores que mapeiam os vetores no próprio espaço de Hilbert. Um operador adjunto L^\dagger é aquele que obedece a relação:

$$\langle \phi | \hat{L}^\dagger | \psi \rangle \equiv \langle \psi | \hat{L} | \phi \rangle^* . \quad (5.5)$$

Os operadores chamados “hermitianos” obedecem a relação:

$$\hat{L}^\dagger = \hat{L} . \quad (5.6)$$

Dado um observável associado ao operador \hat{A} ,

$$\hat{A} |\Phi_a\rangle = a |\Phi_a\rangle , \quad (5.7)$$

e um estado físico $|\psi\rangle$ onde o sistema se encontra, a probabilidade de obter o valor a em uma determinada medição é dada por

$$\mathcal{P}(a) = |\langle \psi | \Phi_a \rangle|^2 . \quad (5.8)$$

5.2 Operadores Unitários como Representações de Simetrias

Os operadores unitários possuem grande importância na teoria quântica devido à interpretação de probabilidade associada aos estados físicos. Uma transformação simétrica não deve alterar nenhuma característica física do sistema, ou, em outras palavras, não deve alterar as probabilidades medidas. Para isso, considere um estado $|\psi\rangle$ que é resultado de uma transformação simétrica de outro estado $|\psi'\rangle$:

$$|\psi\rangle = \hat{U} |\psi'\rangle . \quad (5.9)$$

Ambos os vetores devem representar a mesma probabilidade:

$$\langle\psi|\psi\rangle = \langle\psi'|\psi'\rangle \quad (5.10)$$

$$\langle\psi|\psi\rangle = \langle\psi|\hat{U}^\dagger\hat{U}|\psi\rangle . \quad (5.11)$$

Portanto, a condição que deve ser satisfeita é a que o operador deve ser unitário:

$$\hat{U}^\dagger\hat{U} = \hat{I} . \quad (5.12)$$

É importante ressaltar que este resultado é apenas uma menção ao teorema formalizado por Wigner, que afirma que as transformações simétricas devem ser representações unitárias no espaço de Hilbert.

Teorema 5.1 (Teorema de Wigner) *Toda transformação simétrica pode ser representada no espaço de Hilbert de estados físicos por um operador linear e unitário ou anti-linear e anti-unitário (WIGNER, 1939).*

(WEINBERG, 2005)

5.3 Quantização Canônica

Na mecânica quântica, os estados de um sistema físico são descritos por vetores no espaço de Hilbert. As grandezas físicas (observáveis) são descritas por meio de operadores hermitianos que atuam nos estados.

O procedimento conhecido como “quantização canônica” baseia-se em estabelecer uma analogia entre as grandezas definidas na mecânica clássica e seus correspondentes na mecânica quântica. O parênteses de Poisson entre duas grandezas clássicas é associado ao comutador de seus respectivos operadores:

$$\{F, G\} \rightarrow \frac{1}{i\hbar} [\hat{F}, \hat{G}] . \quad (5.13)$$

Este procedimento foi estabelecido por Dirac (DIRAC, 2001). A constante de Planck (\hbar) estará explícita para enfatizar o assunto de quantização.

5.4 Quantização de Sistemas Vinculados

Na mecânica clássica, os vínculos são funções das coordenadas q e dos momentos p . É natural que, ao transitar para a mecânica quântica, os vínculos se tornem relações entre os operadores de posição e momento. Entretanto, como lidar com o fato de que os vínculos possuem sempre o valor numérico igual a zero? Podemos impor que esta relação específica entre os operadores de posições e momentos (vínculo), ao ser aplicada em um estado, resulta em um valor nulo :

$$\hat{\phi} |\psi\rangle = 0. \quad (5.14)$$

Esta relação entra em contradição com um dos procedimentos que foi estabelecido anteriormente. O processo de quantização foi construído por meio da relação (5.13), mas note que, se houver vínculos de segunda classe no sistema, como por exemplo:

$$\hat{q}_1 |\psi\rangle = \hat{p}_1 |\psi\rangle = 0, \quad (5.15)$$

o operador resultante do comutador entre eles também vai fornecer o resultado nulo ao ser aplicado no estado:

$$[\hat{q}_1, \hat{p}_1] |\psi\rangle = 0 \quad (5.16)$$

e, portanto, esta equação não está de acordo com a quantização de posições e momentos:

$$[\hat{q}_1, \hat{p}_1] = i\hbar. \quad (5.17)$$

A solução para o problema de quantização é realizar um mapeamento diferente da mecânica clássica para a mecânica quântica, que utiliza o parênteses de Dirac (equação 2.66), ao invés do parênteses de Poisson. Isto é:

$$\{F, G\}_D \rightarrow \frac{1}{i\hbar} [\hat{F}, \hat{G}] \quad (5.18)$$

O parênteses de Dirac, como foi desenvolvido na teoria de vínculos, permite utilizar a igualdade forte para os vínculos de segunda classe. Por consequência, a quantização destes vínculos vai resultar em operadores nulos:

$$\hat{\chi} = 0 \quad (5.19)$$

e, portanto, o comutador não envolve mais nenhuma contradição:

$$[\hat{\chi}, \hat{F}] |\psi\rangle = 0. \quad (5.20)$$

De forma geral, pode-se calcular o comutador entre dois operadores de vínculos $\hat{\phi}_j$. Como o comutador também resulta no valor nulo ao ser aplicado em um estado, o resultado do comutador deve ser um outro vínculo:

$$[\hat{\phi}_j, \hat{\phi}_{j'}] = c_{jj'a} \hat{\gamma}_a \quad (5.21)$$

Os vínculos resultantes serão combinações de vínculos de primeira classe ($\hat{\gamma}_a$), dado que os vínculos de segunda classe podem ser todos igualados fortemente a zero.

O parênteses de Poisson entre duas funções de primeira classe resulta em outra função de primeira classe. Pela propriedade (2.68) dos parênteses de Dirac pode-se fazer a seguinte quantização:

$$\{\gamma, H_e\} \approx \{\gamma, H_e\}_D \rightarrow \frac{1}{i\hbar}[\hat{\gamma}, \hat{H}_e]. \quad (5.22)$$

Como o resultado de $\{\gamma, H_e\}_D$ é de primeira classe, obtém-se exatamente o análogo quântico:

$$[\hat{\gamma}_a, \hat{H}_e] = d_{aa'}\hat{\gamma}_{a'}. \quad (5.23)$$

Ou seja, a evolução temporal dos vínculos γ resulta em uma combinação de vínculos, preservando as mesmas propriedades clássicas. (HENNEAUX; TEITELBOIM, 1992)(NASTASE, 2019)

5.5 Mecânica Quântica Relativística

Para construir uma teoria quântica, coerente com a relatividade especial, é necessário que as simetrias proporcionadas pelas transformações de Poincaré sejam respeitadas no espaço de Hilbert. Para isso, deve-se construir operadores que sejam representações do grupo de Poincaré no espaço de Hilbert:

$$U(\Lambda, a). \quad (5.24)$$

baseado neste resultado, os operadores, que são representações do grupo, devem respeitar a seguinte lei de composição:

$$U(\Lambda', a')U(\Lambda, a) = U(\Lambda'\Lambda, \Lambda'a + a'). \quad (5.25)$$

As transformações onde $a = 0$ correspondem naturalmente a uma representação do grupo de Lorentz, que é um subgrupo. O elemento identidade, portanto, é composto por uma transformação $\Lambda_{\nu}^{\mu} = \delta_{\nu}^{\mu}$ e $a = 0$. Considere uma transformação de Poincaré perto o suficiente da identidade:

$$\Lambda_{\nu}^{\mu} = \delta_{\nu}^{\mu} + \omega_{\nu}^{\mu}, \quad (5.26)$$

$$a^{\mu} = \epsilon^{\mu}, \quad (5.27)$$

onde ω e ϵ são infinitesimais. Para uma transformação de Poincaré infinitesimal, perto da identidade, no espaço de Hilbert, tem-se:

$$U(1 + \omega, \epsilon) = 1 + \frac{1}{2}i\omega_{\rho\sigma}J^{\rho\sigma} - i\epsilon_{\rho}P^{\rho}. \quad (5.28)$$

Para que este operador seja unitário, como é exigido pelo teorema de Wigner, os operadores $J^{\rho\sigma}$ e P^ρ devem ser hermitianos. Além disso, eles respeitam as seguintes propriedades:

$$U(\Lambda, a)J^{\mu\nu}U^{-1}(\Lambda, a) = \Lambda_\nu^\rho \Lambda_\mu^\sigma (J^{\mu\nu} - a^\mu P^\nu + a^\nu P^\mu) \quad (5.29)$$

$$U(\Lambda, a)P^\nu U^{-1}(\Lambda, a) = \Lambda_\nu^\mu P^\mu. \quad (5.30)$$

Como consequência dessas relações, é possível obter a álgebra de Lie do grupo de Poincaré:

$$i[J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] = g^{\nu\rho} J^{\mu\sigma} - g^{\mu\rho} J^{\nu\sigma} - g^{\sigma\mu} J^{\rho\nu} + g^{\sigma\nu} J^{\rho\mu} \quad (5.31)$$

$$i[P^\mu, J^{\rho\sigma}] = g^{\mu\rho} P^\sigma - g^{\mu\sigma} P^\rho \quad (5.32)$$

$$[P^\mu, P^\nu] = 0. \quad (5.33)$$

Os operadores P^μ e $J^{\mu\nu}$ são naturalmente associados às grandezas de momento e momento angular, respectivamente. Os autoestados associados aos operadores P^μ são dados por:

$$P^\mu |p\rangle = p^\mu |\mu\rangle. \quad (5.34)$$

Neste caso, é natural associar o estado de vácuo da teoria ao único estado cuja energia e o momento são zero:

$$P^\mu |0\rangle = 0. \quad (5.35)$$

Mais informação sobre os estados associados a uma partícula é encontrada no apêndice [A.1](#).

([WEINBERG, 2005](#)) ([SREDNICKI, 2007](#))

6 Bósons e Férmions

6.1 Bósons

Considere operadores Q e P , hermitianos, que obedecem as seguintes relações de comutação:

$$[\hat{Q}_a, \hat{P}_b] = i\delta_{ab}, \quad (6.1)$$

$$[\hat{Q}_a, \hat{Q}_b] = 0, \quad (6.2)$$

$$[\hat{P}_a, \hat{P}_b] = 0. \quad (6.3)$$

O fato de que todos os operadores Q_a comutam faz com que seja sempre possível encontrar autoestados em comum:

$$\hat{Q}_a |q\rangle = q_a |q\rangle. \quad (6.4)$$

Os autovetores são escolhidos de forma que sejam ortogonais:

$$\langle q' | q \rangle = \prod_a \delta(q'_a - q_a) = \delta(q' - q) \quad (6.5)$$

e, assim, podem formar a relação de completeza:

$$1 = \int \prod_a dq_a |q\rangle\langle q|. \quad (6.6)$$

O mesmo pode ser feito para os autovetores dos operadores P_a , resultando nas seguintes equações:

$$\hat{P}_a |p\rangle = p_a |p\rangle, \quad (6.7)$$

$$\langle p' | p \rangle = \prod_a \delta(p'_a - p_a) = \delta(p' - p), \quad (6.8)$$

$$1 = \int \prod_a dp_a |p\rangle\langle p|. \quad (6.9)$$

(WEINBERG, 2005)

6.2 Férmions

Considere operadores Q e P que obedecem as seguintes relações de anti-comutação:

$$[\hat{Q}_a, \hat{P}_b]_+ = i\delta_{ab} \quad (6.10)$$

$$[\hat{Q}_a, \hat{Q}_b]_+ = 0 \quad (6.11)$$

$$[\hat{P}_a, \hat{P}_b]_+ = 0 \quad (6.12)$$

onde o anti-comutador entre duas grandezas F e G é dado por:

$$[F, G]_+ = FG + GF. \quad (6.13)$$

As relações (6.11) e (6.12) fazem com que os operadores Q_a^2 e P_a^2 se anulem para qualquer índice a :

$$\hat{Q}_a^2 = 0 \quad (6.14)$$

$$\hat{P}_a^2 = 0 \quad (6.15)$$

Baseado nisso, é possível construir alguma noção de base completa, isto é, uma base que contemple todos os autoestados dos diferentes operadores. Isso é feito construindo um estado $|0\rangle$ que é resultado de todos os operadores Q atuando sobre um estado $|\psi\rangle$ arbitrário:

$$|0\rangle = \prod_a \hat{Q}_a |\psi\rangle \quad (6.16)$$

Dessa forma, qualquer operador Q_a atuando nesse novo estado criado resulta em 0:

$$\hat{Q}_a |0\rangle = 0. \quad (6.17)$$

O mesmo pode ser feito para os operadores P_a :

$$\langle 0| = \langle \psi'| \prod_a \hat{P}_a \quad (6.18)$$

$$\langle 0| \hat{P}_a = 0 \quad (6.19)$$

Essas escolhas permitem que os novos estados sejam normalizados:

$$\langle 0|0\rangle = 1 \quad (6.20)$$

É possível, então, definir as bases completas pelos seguintes vetores:

$$|a, b, \dots\rangle = \hat{P}_a \hat{P}_b \dots |0\rangle \quad (6.21)$$

$$\langle a, b, \dots| = \langle 0| \dots (-i\hat{Q}_b)(-i\hat{Q}_a) \quad (6.22)$$

e, por meio da relação (6.10), verifica-se que esta base, de fato, obedece a relação de ortonormalidade:

$$\langle a', b' \dots | a, b, \dots \rangle = \delta_{aa'} \delta_{bb'} \dots \quad (6.23)$$

Neste ponto, resta definir algum estado $|q\rangle$ tal que a seguinte relação é satisfeita:

$$\hat{Q}_a |q\rangle = q_a |q\rangle. \quad (6.24)$$

Entretanto, as variáveis q_a não podem ser números reais como no caso descrito pela teoria de bósons. O que garante que estas variáveis sejam números reais na teoria de bósons é

fato dos operadores Q e P serem hermitianos. Para férmions, basta comparar as equações (6.21) e (6.22) e já nota-se que o adjunto do operador P é dado por:

$$\hat{P}_a^\dagger = -i\hat{Q}_a. \quad (6.25)$$

Ao atuar o comutador (6.11) no vetor $|q\rangle$, o resultado a seguir é obtido:

$$q_a q_b + q_b q_a = 0, \quad (6.26)$$

o que não pode ser obtido para números reais, como já esperado. Porém, este problema é contornado pela introdução de variáveis que anti-comutam, conhecidas como “variáveis de Grassmann” (apêndice B.3). Com estas variáveis é possível definir um vetor $|q\rangle$ que obedeça a equação (6.24):

$$|q\rangle = e^{-i\sum \hat{P}_a q_a} |0\rangle \quad (6.27)$$

e, de forma similar:

$$\langle p| = \langle 0| e^{-i\sum p_a \hat{Q}_a}. \quad (6.28)$$

(WEINBERG, 2005)

6.3 Integral de Caminho

Para analisar o comportamento de uma partícula na mecânica quântica, é de interesse conhecer a probabilidade de uma partícula ser encontrada em um estado final $|\psi_f\rangle$, dado um determinado estado inicial $|\psi_i\rangle$. Esta probabilidade está associada à quantidade $\langle \psi_f | \psi_i \rangle$. No caso de uma partícula percorrendo uma determinada trajetória, é necessário estabelecer algumas quantidades que representem este fenômeno na mecânica quântica, dado que o conceito de “trajetória” não é definido neste contexto. No caso, a partícula pode estar associada a alguma posição q e tempo t , mas estes respeitam o princípio de incerteza de Heisenberg.

Primeiramente, a amplitude de probabilidade $K(q_f, t_f; q_i, t_i)$ pode ser calculada tal que a probabilidade é dada por:

$$\mathcal{P} = |K(q_f, t_f; q_i, t_i)|^2, \quad (6.29)$$

onde $K(q_f, t_f; q_i, t_i)$ segue a definição usual:

$$K(q_f, t_f; q_i, t_i) = \langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle. \quad (6.30)$$

É possível definir um estado que dependa das posições e do tempo por meio da equação:

$$|q, t\rangle = e^{i\hat{H}t} |q\rangle, \quad (6.31)$$

tal que uma função de onda pode ser calculada por:

$$\psi(q, t) = \langle q, t | \psi \rangle. \quad (6.32)$$

A motivação para definir um estado da maneira (6.31) é que não haja distinção entre posições e tempo, a fim de calcular a amplitude de probabilidade $\langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle$. Considerando um pequeno segmento discretizado entre (q_i, t_i) e (q_f, t_f) , obtém-se a seguinte equação:

$$\langle q_{j+1}, t_{j+1} | q_j, t_j \rangle = \langle q_{j+1} | e^{-i\hat{H}(t_{j+1}-t_j)} | q_j \rangle . \quad (6.33)$$

É possível, agora, renomear a variação no tempo como $\tau = t_{j+1} - t_j$ e realizar uma expansão da exponencial em torno desta variável:

$$\langle q_{j+1}, t_{j+1} | q_j, t_j \rangle = \langle q_{j+1} | 1 - i\hat{H}\tau + \dots | q_j \rangle \quad (6.34)$$

$$\langle q_{j+1}, t_{j+1} | q_j, t_j \rangle = \langle q_{j+1} | q_j \rangle - \langle q_{j+1} | i\hat{H}\tau | q_j \rangle + \dots \quad (6.35)$$

Inserindo a relação de completeza, na base dos momentos, no primeiro termo e aplicando uma transformada de Fourier (definida no apêndice B.1.):

$$\langle q_{j+1} | q_j \rangle = \int dp e^{ip(q_{j+1}-q_j)} \quad (6.36)$$

e portanto:

$$\langle q_{j+1}, t_{j+1} | q_j, t_j \rangle = \int dp e^{ip(q_{j+1}-q_j)} - i\tau \langle q_{j+1} | \hat{H} | q_j \rangle . \quad (6.37)$$

O operador Hamiltoniana é função dos operadores momento e posição, no geral, mas considera-se, por simplicidade, o caso onde $\hat{H} = \frac{\hat{P}^2}{2m} + \hat{V}(q)$:

$$\langle q_{j+1} | \hat{H} | q_j \rangle = \langle q_{j+1} | \frac{\hat{P}^2}{2m} | q_j \rangle + \langle q_{j+1} | \hat{V}(q) | q_j \rangle . \quad (6.38)$$

O termo com o operador momento pode ser reescrito aplicando a relação de completeza:

$$\langle q_{j+1} | \frac{\hat{P}^2}{2m} | q_j \rangle = \int dp' dp \langle q_{j+1} | p' \rangle \langle p' | \frac{\hat{P}^2}{2m} | p \rangle \langle p | q_j \rangle , \quad (6.39)$$

enquanto que o termo potencial se torna:

$$\langle q_{j+1} | \hat{V}(q) | q_j \rangle = V(q_j) \langle q_{j+1} | q_j \rangle , \quad (6.40)$$

onde $V(q_j)$ é uma função que pode levar q_j e q_{j+1} como argumentos. Então, a atuação do operador Hamiltoniana resulta em

$$\langle q_{j+1} | \hat{H} | q_j \rangle = \int dp e^{ip(q_{j+1}-q_j)} H(q, p) . \quad (6.41)$$

Inserindo este resultado de volta na equação (6.37), tem-se:

$$\langle q_{j+1}, t_{j+1} | q_j, t_j \rangle = \int dp e^{ip(q_{j+1}-q_j)} (1 - i\tau H(q, p)) , \quad (6.42)$$

onde o termo obtido dentro da integral corresponde à expansão exponencial (6.34) realizada anteriormente e, portanto:

$$\langle q_{j+1}, t_{j+1} | q_j, t_j \rangle = \int dp e^{i[p(q_{j+1}-q_j) - \tau H(q, p)]} . \quad (6.43)$$

Esta amplitude de probabilidade corresponde apenas a um pequeno segmento de trajetória possível. A grandeza que corresponde $\langle q_f t_f | q_i t_i \rangle$ deve generalizar a equação (6.43) para o caso contínuo. Para que isso ocorra, é necessário que haja múltiplos momentos p_j associados a cada segmento de posição q_j e tempo t_j . Como consequência, haverá uma multiplicação de cada exponencial do tipo (6.43), resultando numa integração no expoente. Além disso, há uma integração de múltiplos q , que corresponde a segmentos completos. Toda essa informação está contida na equação a seguir:

$$\langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle = \int \mathcal{D}q \mathcal{D}p \exp \left\{ i \int dt [p\dot{q} - H(p, q)] \right\}, \quad (6.44)$$

onde $\mathcal{D}q$ e $\mathcal{D}p$ correspondem a $(\prod_{j=1}^n dq_j)$ e $(\prod_{j=1}^n dp_j)$, respectivamente. O termo em colchetes na exponencial corresponde à ação e portanto a equação pode ser escrita na forma:

$$\langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle = \int \mathcal{D}q \mathcal{D}p e^{iS[q,p]}. \quad (6.45)$$

No formalismo Lagrangiano, a integral de caminho possui a forma:

$$\langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle = N \int \mathcal{D}q e^{iS[q,\dot{q}]}, \quad (6.46)$$

onde N é uma constante e a ação é, neste caso, um funcional de q e \dot{q} , pois trata-se da Lagrangiana integrada em t . (RYDER, 1996)

6.4 Propriedade dos Operadores na Integral de Caminho

A amplitude de probabilidade $\langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle$ pode ser escrita com a inserção de infinitas relações de completeza que conectam o estado inicial ao estado final:

$$\langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle = \int \mathcal{D}q \langle q_f, t_f | q_n, t_n \rangle \langle q_n, t_n | \dots | q_i, t_i \rangle. \quad (6.47)$$

Ao inserir um operador, o resultado se torna

$$\langle q_f, t_f | \hat{Q}(t_{n_1}) | q_i, t_i \rangle = \int \mathcal{D}q \langle q_f, t_f | q_n, t_n \rangle \langle q_n, t_n | \dots \langle q_{n_1}, t_{n_1} | \hat{Q}(t_{n_1}) | q_{n_1+1}, t_{n_1+1} \rangle \dots | q_i, t_i \rangle. \quad (6.48)$$

O termo com operador, destacado no meio da integral, pode ser escrito simplesmente como o autovalor do operador multiplicando o resto dos termos:

$$\langle q_{n_1}, t_{n_1} | \hat{Q}(t_{n_1}) | q_{n_1+1}, t_{n_1+1} \rangle = q(t_{n_1}) \langle q_{n_1}, t_{n_1} | q_{n_1+1}, t_{n_1+1} \rangle. \quad (6.49)$$

Ou seja, o escalar pode ser colocado à esquerda das relações de identidades e a integral de trajetória continua a mesma. Após realizar o mesmo desenvolvimento da seção anterior obtém-se:

$$\langle q_f, t_f | \hat{Q}(t_1) | q_i, t_i \rangle = \int \mathcal{D}q \mathcal{D}p q(t_1) \exp \left\{ i \int dt [p\dot{q} - H(p, q)] \right\}, \quad (6.50)$$

Naturalmente, é possível incluir um segundo operador $\hat{Q}(t_{n_2})$ à direita do operador $\hat{Q}(t_{n_1})$. Entretanto, é necessário que t_{n_2} seja obrigatoriamente menor que t_{n_1} , pois as relações de completude na equação (6.47) devem ser inseridas de tal forma que a trajetória formada seja contínua. Ou seja, não seria possível incluir a base do operador $\hat{Q}(t_{n_2})$ e, consequentemente, não haveria o autovalor isolado no lado direito da equação, assim como em (6.49). Para que os operadores cumpram sempre essa condição, introduz-se um operador de ordenação temporal. Este tem o papel de organizar os operadores na integral de caminho da seguinte forma:

$$T[A(t_1)B(t_2)] = \begin{cases} A(t_1)B(t_2) & , t_1 < t_2 \\ B(t_2)A(t_1) & , t_1 > t_2 \end{cases} . \quad (6.51)$$

Com o uso deste operador, é possível escrever:

$$\langle q_f, t_f | T[\hat{Q}(t_1)\hat{Q}(t_2)] | q_i, t_i \rangle = \int \mathcal{D}q \mathcal{D}p q(t_1)q(t_2) \exp\left\{i \int dt [p\dot{q} - H(p, q)]\right\} . \quad (6.52)$$

Por fim, generalizando o resultado para n operadores, a integral de caminho se torna:

$$\langle q_f, t_f | T[\hat{Q}(t_1)\dots\hat{Q}(t_n)] | q_i, t_i \rangle = \int \mathcal{D}q \mathcal{D}p q(t_1)\dots q(t_n) e^{iS[q, p]} \quad (6.53)$$

$$\langle q_f, t_f | T[\hat{Q}(t_1)\dots\hat{Q}(t_n)] | q_i, t_i \rangle = N \int \mathcal{D}q q(t_1)\dots q(t_n) e^{iS[q, \dot{q}]} \quad (6.54)$$

(RYDER, 1996)

6.5 Funcional Gerador e Fenomenologia

Os experimentos de espalhamento são a principal forma de descobrir a existência de novas partículas e como funciona a interação entre elas (SCHWARTZ, 2014). Estes experimentos se baseiam em determinar os elementos da chamada “matriz de espalhamento”. Esta matriz é responsável por relacionar estados iniciais com estados finais e é representada por $\langle f | S | i \rangle$. Estes elementos de matriz são proporcionais ao seguinte termo:

$$\langle \Omega | T[\phi(x_1)\phi(x_2)\dots\phi(x_N)] | \Omega \rangle \quad (6.55)$$

onde $|\Omega\rangle$ é o estado de vácuo da teoria, T é o operador de ordenação temporal e $\phi(x)$ são campos. O termo (6.55) pode ser obtido por meio da propriedade dos operadores nas integrais de caminho, mostrada na seção 6.4. Um funcional gerador $Z[J]$ é um método utilizado para calcular as transições de vácuo para vácuo. Ele é definido da seguinte forma:

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\phi e^{iS[\phi, \partial_\mu \phi] + i \int d^4x J(x)\phi(x)} , \quad (6.56)$$

onde J é uma função no espaço-tempo e geralmente constitui um termo incluído na própria Lagrangiana:

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\phi e^{i \int d^4x [\mathcal{L} + J(x)\phi(x)]} . \quad (6.57)$$

Dessa forma, a integral de caminho é facilmente recuperada avaliando o funcional em $J = 0$:

$$Z[0] = \int \mathcal{D}\phi e^{iS}. \quad (6.58)$$

Agora, utilizando a propriedade das derivadas funcionais, pode-se obter o mesmo resultado dos operadores calculados dentro da integral de caminho. Considere a derivada:

$$\frac{\partial Z(J)}{\partial J(y)} = \int \mathcal{D}\phi e^{i \int d^4x [\mathcal{L} + J(x)\phi(x)]} (i) \frac{\partial}{\partial J(y)} \int d^4x J(x)\phi(x). \quad (6.59)$$

Aplicando a propriedade

$$\frac{\partial J(x)}{\partial J(y)} = \delta^4(x - y), \quad (6.60)$$

o termo com $J(x)$ dentro da integral se torna:

$$\frac{\partial}{\partial J(y)} \int d^4x J(x)\phi(x) = \phi(y), \quad (6.61)$$

e, portanto:

$$-i \frac{\partial Z(J)}{\partial J(y)} = \int \mathcal{D}\phi e^{i \int d^4x [\mathcal{L} + J(x)\phi(x)]} \phi(y). \quad (6.62)$$

Avaliando $J = 0$, recupera-se novamente a integral de caminho original:

$$-i \left. \frac{\partial Z(J)}{\partial J(y)} \right|_{J=0} = \int \mathcal{D}\phi e^{iS} \phi(y). \quad (6.63)$$

Para associar com os estados de vácuo, basta escrever o funcional na forma:

$$\frac{-i}{Z[0]} \left. \frac{\partial Z(J)}{\partial J(y)} \right|_{J=0} = \frac{\int \mathcal{D}\phi e^{iS} \phi(y)}{\int \mathcal{D}\phi e^{iS}} = \langle \Omega | \hat{\phi}(y) | \Omega \rangle. \quad (6.64)$$

Este resultado pode ser generalizado, adicionando quantas fontes $J(x)$ forem necessárias para cada campo e repetindo o processo descrito. O resultado obtido é:

$$\frac{(-i)^n}{Z[0]} \left. \frac{\partial^n Z(J)}{\partial J(x_1) \dots \partial J(x_n)} \right|_{J=0} = \langle \Omega | \hat{T}[\phi(x_1) \dots \phi(x_n)] | \Omega \rangle. \quad (6.65)$$

6.6 Integral de Caminho para Campos de Calibre

A integral de caminho pode ser construída para o caso de campos de calibre. A simetria de calibre desses campos podem estar associadas a um grupo abeliano ou não abeliano. Entretanto, devido a essas simetrias, a integral de caminho não pode ser realizada normalmente, pois ela é feita integrando sobre todas as configurações possíveis do campo $A^\mu(x)$. As transformações de calibre relacionam campos que representam o mesmo estado físico, então algo deve ser feito para evitar a contagem múltipla de mesmos estados. O método desenvolvido por Faddeev-Popov consiste em adicionar uma delta na integral de caminho para eliminar as possíveis redundâncias existentes quando consideramos um

campo de calibre. Esta abordagem começa pela escolha de calibre, que será representada pelo seguinte termo:

$$G^a(A) = c^a \quad (6.66)$$

A integral de caminho (FRADKIN, 2021) para um campo de calibre não abeliano A_μ é dada por:

$$Z[J] = \int \mathcal{D}A_\mu^a \delta(G[A]) \Delta_{F.P.}[A] e^{iS[A,J]}. \quad (6.67)$$

onde $\Delta_{F.P.}$ é um determinante:

$$\Delta_{FP} = Det[M_{ab,xy}], \quad (6.68)$$

$$M_{ab,xy} = \frac{\partial G^a}{\partial A_\mu^c} D_\mu^{cb}(x) \delta(x-y). \quad (6.69)$$

Este determinante pode ser escrito em termos de campos fermiônicos b_a e c_b , independentes, devido à propriedade das variáveis de Grassmann apresentada à seguir:

$$Det[M_{ab,xy}] = \alpha \int \mathcal{D}b \mathcal{D}c e^{iI}, \quad (6.70)$$

onde α é uma constante que não possui relevância para o formalismo e I é dado por:

$$I = \int d^4x d^4y (b_a(x) c_b(y) M_{ab,xy}). \quad (6.71)$$

Observe que quando $M_{ab,xy}$ for inserido na equação (6.71), a delta $\delta(x-y)$ irá eliminar uma das integrais resultando em uma integral de caminho para campos b e c com uma Lagrangiana dada por:

$$\mathcal{L}_{gh} = -b_a \left(\frac{\partial G^a}{\partial A_\mu^c} \right) D_\mu^{cb} c_b. \quad (6.72)$$

Os campos b e c são chamados de “fantasmas” no formalismo. A delta $\delta(G[A])$ na equação (6.67) é dada por:

$$\delta(G(A)) = e^{i \int d^4x \gamma_{ab} G^a G^b}. \quad (6.73)$$

onde o termo dentro da integral possui grande importância no formalismo, pois corresponde justamente a fixação de calibre. A escolha de calibre é feita definindo que tipo de função $G[a]$ estará presente na Lagrangiana e, por isso, ele é escrito como uma das partes da Lagrangiana:

$$\mathcal{L}_{g.f.} = \gamma_{ab} G^a G^b. \quad (6.74)$$

A matriz γ_{ab} está sendo utilizada apenas para generalizar a fixação de calibre, embora este termo costume ser quadrático.

Com base nas definições dadas, nota-se que a introdução dos termos $\delta(G[A])$ e $\Delta_{F.P.}$ resultam na simples adição de novas quantidades $\mathcal{L}_{g.f.}$ e \mathcal{L}_{gh} na ação clássica. Portanto, a Lagrangiana dos campos de calibre, que pode ser utilizada em integral de caminho, tem a forma:

$$\mathcal{L}_{F.P.} = \mathcal{L}_{Y.M} + \mathcal{L}_{g.f.} + \mathcal{L}_{gh}, \quad (6.75)$$

onde $\mathcal{L}_{Y.M.}$ é a Lagrangiana de Yang-Mills desenvolvida na seção 4.5. A ação clássica se torna, por fim:

$$S = \int d^4x \left[-\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \gamma_{ab} G^a G^b - b_a \left(\frac{\partial G^a}{\partial A_\mu^c} \right) D_\mu^{cb} c_b \right]. \quad (6.76)$$

(NASTASE, 2019)

6.7 Análise

A próxima parte deste trabalho é dedicada à uma simetria associada à ação (6.76). Para que esta simetria seja devidamente introduzida, o próximo capítulo é inteiramente composto pelo formalismo matemático que será aplicado.

Parte IV

Álgebra das Simetrias de Calibre

7 Álgebras Graduadas

7.1 Álgebra Associativa

Uma álgebra associativa sobre o corpo dos números complexos é um conjunto A que obedece as seguintes propriedades:

- A é um espaço vetorial em \mathbb{C}
- Para cada par de elementos (x, y) , existe um produto xy pertencente a A que satisfaz bilinearidade.

$$(x_1 + x_2)y = x_1y + x_2y \quad (7.1)$$

$$x(y_1 + y_2) = xy_1 + xy_2 \quad (7.2)$$

$$\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y) \quad , \alpha \in \mathbb{C} \quad (7.3)$$

- O produto satisfaz associatividade.

$$(xy)z = x(yz) \quad (7.4)$$

A álgebra é chamada de “supercomutativa” quando A é uma soma direta de dois outros espaços:

$$A = A_0 \oplus A_1, \quad (7.5)$$

de tal forma que o produto é dado por:

$$xy = (-1)^{\epsilon_x \epsilon_y} yx, \quad (7.6)$$

onde $\epsilon_i = 0$ quando i pertence a A_0 e $\epsilon_i = 1$ quando i pertence a A_1 . O símbolo $\epsilon(x)$ (ou ϵ_x) é usado para definir a paridade de um determinado elemento x da álgebra.

7.2 Álgebra de Lie Graduada

Seja V um espaço vetorial composto pela soma direta :

$$V = V_0 \oplus V_1. \quad (7.7)$$

O conjunto de transformações lineares que levam V em V é uma álgebra associativa e é representada por $End(V)$. Uma transformação M possui uma paridade definida quando, para qualquer elemento $x \in V$, a seguinte relação for satisfeita:

$$\varepsilon(Mx) = \varepsilon(M) + \varepsilon(x). \quad (7.8)$$

Um elemento arbitrário do conjunto $End(V)$ pode ser decomposto, de forma inequívoca, em transformações pares e ímpares:

$$End(V) = End_0(V) \oplus End_1(V). \quad (7.9)$$

Dado uma transformação M_1 e um elemento y da álgebra, tal que $y = M_2x$, pode-se encontrar qual é a relação de paridade para o produto M_1M_2 :

$$\varepsilon(M_1y) = \varepsilon(M_1) + \varepsilon(y) \quad (7.10a)$$

$$= \varepsilon(M_1) + \varepsilon(M_2x) \quad (7.10b)$$

$$= \varepsilon(M_1) + \varepsilon(M_2) + \varepsilon(x) \quad (7.10c)$$

e, portanto:

$$\varepsilon(M_1M_2) = \varepsilon(M_1) + \varepsilon(M_2). \quad (7.11)$$

Dado duas transformações lineares M_1 e M_2 , o comutador graduado é definido como:

$$[M_1, M_2] = M_1M_2 - (-1)^{\varepsilon_{M_1}\varepsilon_{M_2}} M_2M_1. \quad (7.12)$$

Este comutador generalizado satisfaz a seguinte propriedade:

$$[M_1, M_2] = (-1)^{\varepsilon_{M_1}\varepsilon_{M_2}} [M_2, M_1]. \quad (7.13)$$

e, conseqüentemente, satisfazem uma forma generalizada da identidade de Jacobi:

$$[[M_1, M_2], M_3] + (-1)^{\varepsilon_{M_3}(\varepsilon_{M_1} + \varepsilon_{M_2})} [[M_1, M_2], M_3] + (-1)^{\varepsilon_{M_1}(\varepsilon_{M_2} + \varepsilon_{M_3})} [[M_1, M_2], M_3] = 0. \quad (7.14)$$

O espaço vetorial V em conjunto com a estrutura de comutadores (7.12) e definem uma álgebra de Lie graduada. O fato de qualquer álgebra supercomutativa ser um espaço vetorial da forma (7.7) faz com que o conjunto $End(A)$ forme uma álgebra de Lie graduada. Neste conjunto, uma transformação de especial interesse é a “derivação”. Derivações são definidas pelas transformações que obedecem a regra de Leibnitz generalizada:

$$D(xy) = xDy + (-1)^{\varepsilon_D\varepsilon_y} (Dx)y. \quad (7.15)$$

O conjunto das derivações de A é representado por $Der(A)$ e caracteriza uma subálgebra de Lie do conjunto das transformações $End(A)$.

7.3 Graduação

Uma álgebra graduada é definida pela seguinte equação:

$$A = \bigoplus_n A_n, \quad (7.16)$$

onde n pode ser um número inteiro ou um número natural. No caso onde n pertence aos números naturais, a álgebra é denominada “N-graduada” e é denominada “Z-graduada” no caso onde n pertence aos inteiros. O caso das álgebras supercomutativas é apenas um caso particular das graduações e é também conhecido como uma “ Z_2 -graduação”.

A multiplicação em uma álgebra graduada respeita a propriedade:

$$A_n A_m \subset A_{n+m}. \quad (7.17)$$

Se um elemento x pertence a A_n , é dito que x possui grau n :

$$\text{deg}(x) = n \iff x \in A_n. \quad (7.18)$$

A graduação de A determina também a graduação no espaço de transformações $\text{End}(A)$ e, conseqüentemente, no espaço de derivações $\text{Der}(A)$. O grau de uma transformação linear M é determinado pela seguinte equação:

$$\text{deg}(Mx) = \text{deg}(M) + \text{deg}(x) \quad (7.19)$$

e satisfaz as propriedades:

$$\text{deg}(M_1 M_2) = \text{deg}(M_1) + \text{deg}(M_2), \quad (7.20)$$

$$\text{deg}([M_1, M_2]) = \text{deg}(M_1) + \text{deg}(M_2). \quad (7.21)$$

7.4 Classe de Equivalência

Dado dois conjuntos X e Y , uma Relação R é um subconjunto do produto cartesiano $X \times Y$. A Relação é escrita como:

$$aRb \quad ; a \in X, b \in Y. \quad (7.22)$$

Uma equivalência \sim é uma Relação que satisfaz 3 propriedades:

$$a \sim a \quad (7.23a)$$

$$a \sim b \iff b \sim a \quad (7.23b)$$

$$a \sim b, \quad b \sim c \implies a \sim c. \quad (7.23c)$$

Estas propriedades são ditas reflexivas, simétricas e transitivas, respectivamente. Uma classe de equivalência $[a]$ é um conjunto com todo $x \in X$ que satisfaz $x \sim a$

Teorema 7.1 Se $[a] \cap [b] \neq \emptyset$, então $[a] = [b]$.

□

Primeiramente, uma classe de equivalência não pode ser vazia, devido a propriedade reflexiva $a \sim a$. Se $[a] \cap [b] \neq \emptyset$ e as classes $[a]$ e $[b]$ não são vazias, então existe pelo menos um elemento na interseção $[a] \cap [b]$ que satisfaz:

$$c \sim a \tag{7.24a}$$

$$c \sim b, \tag{7.24b}$$

mas pela propriedade da transitividade, tem-se:

$$a \sim b. \tag{7.25}$$

Suponha um elemento arbitrário a' que pertence a $[a]$. A transitividade, novamente, implica em:

$$a \sim b \quad , \quad a \sim a' \implies b \sim a' \tag{7.26}$$

Como esta relação vale para qualquer elemento arbitrário a' , então $[a] \subset [b]$. Pelo mesmo argumento, um elemento arbitrário b' também satisfaz:

$$b' \sim a \tag{7.27}$$

e, então, $[b] \subset [a]$.

Portanto, as classes de equivalências satisfazem $[a] = [b]$ ou $[a] \cap [b] = \emptyset$

■

O teorema apresentado mostra que um determinado conjunto X sempre será particionado em classes de equivalência disjuntas.

Definição 5 *Um espaço quociente é o conjunto de todas as classes de equivalência.*

(NAKAHARA, 2018)

7.5 Ideal

Definição 6 *Seja B um subespaço vetorial de A , B é chamado um ideal quando o produto de um elemento em B por um elemento em A está contido em B , isto é, $BA \subset B$.*

É possível definir um espaço quociente A/B com base na seguinte relação de equivalência:

$$x_1 - x_2 = y \in B \quad ; \quad x_1, x_2 \in A. \tag{7.28}$$

Primeiramente, é necessário verificar que esta relação é uma equivalência, ou seja, satisfaz as propriedades (7.23). Todas as propriedades são verificadas pelo fato de que B é um

espaço vetorial por definição. Ou seja, o elemento nulo deve pertencer a B , o que satisfaz a primeira propriedade:

$$x - x = 0 \in B. \quad (7.29)$$

Existe multiplicação por um número (em \mathbb{C} no caso das álgebras abordadas neste capítulo), satisfazendo a segunda propriedade:

$$x_1 - x_2 = y \in B \implies x_2 - x_1 = (-1)y \in B. \quad (7.30)$$

Por fim, a soma de dois elementos do espaço vetorial deve também pertencer a este espaço, satisfazendo a última propriedade:

$$x_1 - x_2 = y_1 \in B \quad (7.31a)$$

$$x_2 - x_3 = y_2 \in B \quad (7.31b)$$

$$\implies x_1 - x_3 = y_1 + y_2 \in B. \quad (7.31c)$$

O espaço quociente $A/B = \{[a], [b], \dots\}$ estabelece um produto bem definido do tipo:

$$[a] * [b] = [c] \in A/B. \quad (7.32)$$

Neste caso, “bem definido” significa que quaisquer elementos das classes de equivalência $[a]$ e $[b]$ satisfazem o produto (7.32). Para verificar a existência deste produto, pode-se estabelecer :

$$[a] * [b] = [ab] = [c] \quad (7.33)$$

e, em seguida, verificar a condição de que um elemento $a' \in [a]$ e um elemento $b' \in [b]$ possuem um produto $a'b'$ que pertence ao espaço quociente, assim como ab . Considere tais a' e b' :

$$a' \in [a] \iff a' \sim a \implies a' - a = y_1 \in B, \quad (7.34)$$

$$b' \in [b] \iff b' \sim b \implies b' - b = y_2 \in B. \quad (7.35)$$

Agora, calcula-se o produto $a'b'$:

$$a'b' = (y_1 + a)(y_2 + b) \quad (7.36a)$$

$$= y_1y_2 + y_1b + ay_2 + ab. \quad (7.36b)$$

Os três primeiros termos são elementos de B , pela definição de Ideal. Ou seja, estes são dados em termos de um produto de ao menos um elemento de B e, portanto, pode-se fazer a renomeação $y_3 = y_1y_2 + y_1b + ay_2$. Sendo y_3 um elemento de B , torna-se claro que o produto $a'b'$ satisfaz a relação de equivalência:

$$a'b' - ab = y_3 \in B. \quad (7.37)$$

7.6 Diferencial

Um diferencial D é uma derivação ímpar e nilpotente de ordem 2, isto é:

$$D^2 = \frac{1}{2}[D, D] = 0. \quad (7.38a)$$

$$\varepsilon(D) = 1. \quad (7.38b)$$

Considerando a existência desta operação em uma álgebra graduada de ordem N , nota-se que o grau de D pode ser tomado como:

$$\deg(D) = \pm 1, \quad (7.39)$$

pois em ambos os casos (1 ou -1), a relação (7.38) é satisfeita. Pode-se calcular Um elemento x desta álgebra, que pertence a A_n

$$\deg(Dx) = \deg(D) + \deg(x) = n \pm 1. \quad (7.40)$$

Isto significa que $D(A_n) \subset A_{n\pm 1}$, dependendo da paridade de D .

Definição 7 *Um complexo diferencial é um espaço vetorial graduado $V = \bigoplus_n V_n$ que possui um operador nilpotente linear de grau ± 1 .*

Definição 8 *Uma álgebra graduada diferencial é uma álgebra graduada que possui um diferencial D*

Dada as definições, um complexo diferencial, onde o produto é definido, junto com uma derivação D estabelece uma álgebra graduada diferencial.

Dado um diferencial D , o núcleo de D , representado por $\text{Ker}(D)$, é o conjunto de todos os elementos cuja aplicação do operador D resulta em 0:

$$Dx = 0 \iff x \in \text{Ker}(D). \quad (7.41)$$

Dado um diferencial D , a imagem de D , representada por $\text{Im}(D)$, corresponde ao subespaço resultante da aplicação de D :

$$Dy = x \iff x \in \text{Im}(D). \quad (7.42)$$

Teorema 7.2 *O subespaço $\text{Ker}(D)$ é uma subálgebra da álgebra graduada A*

□

É necessário mostrar que um elemento w composto pelo produto $w = x_1x_2$ permanece no subespaço $\text{Ker}(D)$, para $x_1 \in \text{Ker}(D)$ e $x_2 \in \text{Ker}(D)$. Pela definição de Derivação, tem-se:

$$D(x_1x_2) = xD(y) + (-1)^{\epsilon_D \epsilon_{x_2}}(Dx)y = 0 \quad (7.43)$$

Ou seja, $D(w) = 0$.

■

Teorema 7.3 *A imagem $Im(D)$ é um ideal do núcleo $Ker(D)$*

□

É necessário provar que existe algum elemento w tal que $x_1x_2 = D(w)$, para $x_1 \in Ker(D)$ e $x_2 \in Im(D)$. Utilizando a definição de derivação, tem-se:

$$x_1x_2 = x_1(Dy) = x_1(Dy) + (Dx_1)y = D(x_1y) \quad (7.44)$$

Portanto, existe $w = x_1y$

■

7.7 Homologias e Cohomologias

O fato da a imagem $Im(D)$ ser um ideal do núcleo $Ker(D)$, como mostrado no teorema 7.3, torna possível a formação da álgebra quociente, utilizando a mesma construção da seção 7.5:

$$\frac{Ker(D)}{Im(D)} \quad (7.45)$$

Esta álgebra é chamada de Cohomologia quando $deg(D) = 1$ e será representada por $H^*(D)$. Quando $deg(D) = -1$ a álgebra é chamada de Homologia e será representada por $H_*(D)$. A álgebra quociente é composta pelas classes de equivalência que, por sua vez, são compostas pelos elementos da álgebra. Portanto a homologia ou cohomologia recebe a graduação da álgebra:

$$H^*(D) = \bigoplus_n H^n(D) \quad (7.46a)$$

$$H_*(D) = \bigoplus_n H_n(D) \quad (7.46b)$$

7.8 Cohomologia para a Álgebra de Lie dos Operadores

Definição 9 *Uma derivação Δ é dita “D-fechada” quando a seguinte equação é satisfeita:*

$$[\Delta, D] = 0. \quad (7.47)$$

Definição 10 Uma derivação Δ é dita “D-exata” quando existe outra derivação $\bar{\Delta}$ que satisfaz:

$$\Delta = [\bar{\Delta}, D]. \quad (7.48)$$

Teorema 7.4 O conjunto de derivações fechadas é uma sub-álgebra de Lie do conjunto de derivações $Der(A)$.

□

É necessário verificar que o comutador entre duas derivações D-fechadas (Δ_1 e Δ_2) resultam em outra derivação D-fechada. Primeiramente, o comutador entre duas derivações resulta em outra derivação, isto é:

$$[\Delta_1, \Delta_2] = \Delta_3. \quad (7.49)$$

Agora, analisa-se o comutador entre esta derivação e D :

$$[\Delta_3, D] = [[\Delta_1, \Delta_2], D]. \quad (7.50)$$

Pela identidade de Jacobi, tem-se:

$$[[\Delta_1, \Delta_2], D] = -(-1)^{\epsilon_D(\epsilon_{\Delta_1} + \epsilon_{\Delta_2})} [[D, \Delta_1], \Delta_2] - (-1)^{\epsilon_{\Delta_1}(\epsilon_{\Delta_2} + \epsilon_D)} [[\Delta_2, D], \Delta_1]. \quad (7.51)$$

Por fim, os comutadores $[D, \Delta_1]$ e $[\Delta_2, D]$ são iguais a zero, por definição, resultando em:

$$[\Delta_3, D] = [[\Delta_1, \Delta_2], D] = 0. \quad (7.52)$$

■

Teorema 7.5 As derivações D-exatas são também D-fechadas

□

Considere o comutador entre uma derivação Δ , que é D-fechada, e D :

$$[\Delta, D] = [[\bar{\Delta}, D], D] \quad (7.53a)$$

$$=[\bar{\Delta}, D]D - (-1)^{\varepsilon_a \varepsilon_D} D[\bar{\Delta}, D], \quad (7.53b)$$

onde $\varepsilon_a = \varepsilon([\bar{\Delta}, D])$. É possível escrever a paridade do comutador (ε_a) como função da paridade de $\bar{\Delta}$, pois a paridade de D é igual a 1, por definição:

$$\varepsilon([\bar{\Delta}, D]) = \varepsilon(\bar{\Delta}) + \varepsilon(D) = \varepsilon(\bar{\Delta}) + 1 \quad (7.54)$$

Ao utilizar a propriedade nilpotente do diferencial D , restarão apenas termos $D\bar{\Delta}D$ na equação:

$$[\Delta, D] = [\bar{\Delta}, D]D - (-1)^{\epsilon_{\bar{\Delta}}+1}D[\bar{\Delta}, D] \quad (7.55a)$$

$$= -(-1)^{\epsilon_{\bar{\Delta}}}D\bar{\Delta}D - (-1)^{\epsilon_{\bar{\Delta}}+1}D\bar{\Delta}D \quad (7.55b)$$

$$= -(-1)^{\epsilon_{\bar{\Delta}}}D\bar{\Delta}D + (-1)^{\epsilon_{\bar{\Delta}}}D\bar{\Delta}D \quad (7.55c)$$

$$= 0 \quad (7.55d)$$

e, portanto, Δ também é D-fechado.

■

Teorema 7.6 *Seja o comutador a lei de composição, o conjunto das derivações D-exatas formam um ideal da álgebra de Lie das derivações D-fechadas.*

□

Seja Δ_1 uma derivação D-fechada e Δ_2 uma derivação D-exata. A derivação resultante do comutador entre elas é dada por:

$$[\Delta_1, \Delta_2] = \Delta_3. \quad (7.56)$$

É necessário provar se existe alguma derivação $\bar{\Delta}_3$ tal que o comutador com D seja igual a Δ_3 :

$$[\bar{\Delta}_3, D] = \Delta_3. \quad (7.57)$$

Calculando o valor de Δ_3 , tem-se:

$$\Delta_3 = [\Delta_2, \Delta_1] \quad (7.58a)$$

$$= [[\bar{\Delta}_2, D], \Delta_1] \quad (7.58b)$$

$$= -(-1)^{\epsilon_{\Delta_1}(\epsilon_{\bar{\Delta}_2} + \epsilon_D)}[[\Delta_1, \bar{\Delta}_2], D] - (-1)^{\epsilon_{\bar{\Delta}_2}(\epsilon_D + \epsilon_{\Delta_1})}[[D, \Delta_1], \bar{\Delta}_2] \quad (7.58c)$$

$$= -(-1)^{\epsilon_{\Delta_1}(\epsilon_{\bar{\Delta}_2} + \epsilon_D)}[[\Delta_1, \bar{\Delta}_2], D]. \quad (7.58d)$$

Portanto, existe $\bar{\Delta}_3 = -(-1)^{\epsilon_{\Delta_1}(\epsilon_{\bar{\Delta}_2} + \epsilon_D)}[\Delta_1, \bar{\Delta}_2]$ tal que a equação (7.57) é satisfeita.

■

O teorema garante a construção de uma álgebra de Lie quociente das classes de equivalência, pois sempre pode ser feito o mesmo desenvolvimento utilizando o Ideal. Esta álgebra quociente é representada por $\mathcal{H}_*(D)$ ou $\mathcal{H}^*(D)$.

7.9 Diferencial Módulo

Definição 11 *Seja δ um diferencial e d uma derivação ímpar, d é chamado de “diferencial módulo δ ” quando as seguintes condições forem satisfeitas:*

$$[d, \delta] = d\delta + \delta d = 0, \quad (7.59)$$

$$d^2 = -[\delta, \Delta] = -(\delta\Delta + \Delta\delta), \quad (7.60)$$

onde Δ é uma derivação.

Teorema 7.7 *A existência de um módulo diferencial induz uma derivação na homologia $H_*(\delta)$.*

□

A relação de equivalência para a construção da Homologia $H_*(\delta)$ é dada por:

$$a' \sim a \iff a' - a = \delta y \in \text{Im}(\delta). \quad (7.61)$$

Introduz-se uma derivação \tilde{d} que atua sobre as classes de equivalência, de forma que o resultado é uma derivação nos elementos da classe:

$$\tilde{d}[a] = [da] \quad (7.62)$$

Ao atuar sobre a relação de equivalência, tem-se:

$$da' - da = d(\delta y) \quad (7.63)$$

$$da' - da = -\delta(dy) \in \text{Im}(\delta). \quad (7.64)$$

Como este último termo satisfaz a relação de equivalência, \tilde{d} induziu a derivação d nas classes de equivalência.

■

Corolário 7.7.1 *A derivação \tilde{d} , induzida na homologia $H_*(\delta)$, é um diferencial.*

□

Um elemento b é equivalente 0 quando satisfaz a relação:

$$b \sim 0 \iff b - 0 = \delta y \in \text{Im}(\delta). \quad (7.65)$$

Ou seja, um elemento pertence à classe de equivalência $[0]$ quando este for um elemento da imagem de δ :

$$b = \delta y. \quad (7.66)$$

Ao aplicar d^2 na equação, tem-se:

$$d^2b = -[\delta, \Delta]\delta y \quad (7.67a)$$

$$= -\delta\Delta(\delta y) + \Delta\delta(\delta y) \quad (7.67b)$$

$$= -\delta(\Delta\delta y). \quad (7.67c)$$

Ao denominar $c = -\delta(\Delta\delta y)$, torna-se evidente que $d^2b = \delta c$. Se o elemento d^2b pode ser escrito como um elemento da imagem de δ , então ele pertence à classe de equivalência $[0]$ e, portanto:

$$\tilde{d}^2[b] = 0. \quad (7.68)$$

■

Sendo \tilde{d} um diferencial que atua nas classes de equivalência, é possível construir uma cohomologia de \tilde{d} em $H_*(\delta)$, que é representada por $H^k(\tilde{d}|H_*(\delta))$. Esta cohomologia depende, então, da imagem e o núcleo de \tilde{d} no conjunto das classes de equivalência:

$$[a] = \tilde{d}[b], \quad (7.69)$$

$$\tilde{d}[a] = [0]. \quad (7.70)$$

7.10 Resolução

Definição 12 *Uma álgebra graduada diferencial (\bar{A}, δ) forma uma resolução quando satisfazem a seguinte condição:*

$$H_k(\delta) = 0, \quad k \neq 0 \quad (7.71a)$$

$$H_0(\delta) = A, \quad (7.71b)$$

onde A é uma álgebra graduada.

A definição de resolução permite escrever uma álgebra graduada A como a homologia de uma outra álgebra mais geral \bar{A} , pois a homologia é a soma direta de todos os elementos H_K :

$$H_*(\delta) = \bigoplus_k H_k(\delta) = H_0(\delta). \quad (7.72)$$

O grau da álgebra \bar{A} é chamado de “grau de resolução” e é representado por r .

7.11 Expansão do Diferencial

É possível construir um diferencial s , de forma que ele pode ser expandido em termos que possuem diferentes graus na álgebra graduada. Neste contexto, a definição de diferencial módulo δ , feita na seção 7.9, se torna útil.

Suponha que um diferencial s seja expandido e que os primeiros termos nessa expansão sejam δ e d respectivamente:

$$s = \delta + d + \dots, \quad (7.73)$$

onde $\deg(d) = \deg(\delta) + 1$ e os próximos termos possuem grau maior que d . Para que s seja um diferencial, algumas condições devem ser satisfeitas neste caso. Calculando explicitamente, tem-se:

$$s^2 = \delta^2 + d^2 + \delta d + d\delta + \dots \quad (7.74)$$

Portanto, é necessário que δ seja um diferencial e que d seja um diferencial módulo δ .

A existência de s , apresentado na equação (7.73), pode ser garantida em um caso específico por meio do próximo teorema. Antes de enunciá-lo, é importante ressaltar que ele considera todas as informações abordadas neste capítulo, então será útil listá-las com o objetivo de sintetizar toda a construção feita até agora.

Teorema 7.8 *Seja:*

- \bar{A} uma álgebra associativa
- δ um diferencial em \bar{A}
- $H_0(\delta)$ a homologia da resolução (\bar{A}, δ)
- d um diferencial módulo δ
- $H^k(\tilde{d}|H_*(\delta))$ a cohomologia da homologia
- $r(x)$ o grau de um elemento x na álgebra \bar{A}
- $\deg(x)$ o grau de um elemento x na cohomologia

Se $\mathcal{H}_k(\delta) = 0$ para todos $k \neq 0$, então existe s tal que as seguintes propriedades são satisfeitas:

$$s = \delta + d + s_1 + s_2 + \dots \quad (7.75a)$$

$$s^2 = 0 \quad (7.75b)$$

$$r(s_k) = k \quad (7.75c)$$

$$gh(s) = 1 \quad (7.75d)$$

onde $gh(x) = \deg(x) - r(x)$

Corolário 7.8.1 *Qualquer diferencial s , que relaciona d e δ por meio das equações (7.75), satisfaz:*

$$H^k(s) = H^k(\tilde{d}|H_*(\delta)). \quad (7.76)$$

(HENNEAUX; TEITELBOIM, 1992)

8 BRST

8.1 Introdução

Os campos de calibre, como visto na seção 4.5, surgiram na teoria como consequência de que a ação deve ser invariante por uma simetria local. Estes campos possuem uma dinâmica própria e a Lagrangiana que fornece as equações de movimento associadas somente aos campos de calibre é:

$$\mathcal{L}_{Y.M} = F_a^{\mu\nu} F_{\mu\nu}^a. \quad (8.1)$$

O método desenvolvido por Faddeev-Popov (descrito na seção 6.6) mostra que os campos de calibre podem ser utilizados no formalismo de integral de trajetória desde que sejam adicionados os termos de fixação de calibre e o termo com fantasmas:

$$\mathcal{L}_{F.P} = \mathcal{L}_{Y.M} + \mathcal{L}_{g.f} + \mathcal{L}_{gh} \quad (8.2)$$

ou, mais explicitamente, a Lagrangiana se torna:

$$\mathcal{L}_{F.P} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \gamma_{ab} G^a G^b - b_a \left(\frac{\partial G^a}{\partial A_\mu^c} \right) D_\mu^{cb} c_b. \quad (8.3)$$

Foi descoberto por Becchi, Rouet, Stora e Tyutin, que existe um conjunto de transformações, que atua sobre cada dos campos, que mantém a Lagrangiana invariante. Esta simetria ficou conhecida como “BRST”. Antes de mencionar a forma dessas transformações, será útil realizar uma pequena mudança na Lagrangiana de Faddeev-Popov para que as transformações BRST se tornem mais evidentes. A mudança consiste em alterar o termo de fixação de calibre por:

$$\mathcal{L}_{g.f.} = -\frac{1}{2} \gamma_{ab} d^a d^b - d_a G^a, \quad (8.4)$$

onde d_a são novos campos (conhecidos como Nakanishi-Lantroup). Eles não afetam a física desenvolvida pelo método de Faddeev-Popov pelo fato de que o termo de fixação de calibre possui uma liberdade na forma como é escrito. Portanto a ação que será tratada durante este capítulo é a seguinte:

$$S = \int d^4x \left[-\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \gamma_{ab} d^a d^b - d_a G^a - b_a \left(\frac{\partial G^a}{\partial A_\mu^c} \right) D_\mu^{cb} c_b \right]. \quad (8.5)$$

(NASTASE, 2019) (FRADKIN, 2021)

8.2 Transformações BRST

Considere o seguinte conjunto de transformações:

$$\delta_B A_\mu^a = \theta (D_\mu c)^a \quad (8.6)$$

$$\delta_B c^a = -\theta \frac{1}{2} C_{bc}^a c^b c^c \quad (8.7)$$

$$\delta_B b_a = -\theta d_a \quad (8.8)$$

$$\delta_B d_a = 0 \quad (8.9)$$

onde θ é um parâmetro infinitesimal constante e fermiônico. Essas transformações, chamadas BRST, possuem 3 propriedades notáveis para o estudo de teorias de calibre:

- A transformação BRST é nilpotente
- A ação pode ser escrita em termos da transformação BRST.
- A ação é invariante pela transformação BRST

Para verificar cada uma dessas propriedades, define-se a quantidade $s\varphi$ como

$$\delta_B \varphi = \theta (s\varphi), \quad (8.10)$$

onde φ é um campo arbitrário, bosônico ou fermiônico. Verificar que a transformação BRST é nilpotente significa obter a propriedade:

$$\delta_B (s\varphi) = 0 \iff s(s\varphi) = 0. \quad (8.11)$$

Começando pelo campo A_μ , aplica-se a transformação duas vezes:

$$\delta_B (sA_\mu) = \delta_B (D_\mu c_a) \quad (8.12a)$$

$$= \partial_\mu \delta_B c_a + C_{abc} \delta_B A_{b\mu} c_c + C_{abc} A_{b\mu} \delta_B c_c \quad (8.12b)$$

$$= \theta \left(\frac{1}{2} C_{abc} (\partial_\mu c_b) c_c + \frac{1}{2} C_{abc} (\partial_\mu c_c) c_b - C_{abc} C_{cde} A_{d\mu} c_e c_b - \frac{1}{2} C_{abc} C_{cde} A_{b\mu} c_d c_e \right) \quad (8.12c)$$

$$= 0. \quad (8.12d)$$

Para o campo c_a o resultado de aplicar a transformação duas vezes é:

$$\delta_B (sc_a) = -\frac{1}{2} C_{abc} \delta_B (c_b c_c) \quad (8.13a)$$

$$= \frac{1}{4} C_{abc} C_{cde} \left(-c_d c_e c_b + c_b c_d c_e \right) \quad (8.13b)$$

$$= 0. \quad (8.13c)$$

Para o campo b_a , será:

$$\delta_B(sb_a) = \delta(-d_a) = 0. \quad (8.14)$$

Por fim, para o campo d_a , a transformação nilpotente é trivialmente satisfeita:

$$\delta_B(sd_a) = \delta_B(0) = 0. \quad (8.15)$$

A ação, como mencionado anteriormente, pode ser escrita em termos da transformação BRST. Para verificar a propriedade, define-se uma quantidade chamada de “Férmion de Fixação de Calibre”, que é dada por:

$$\Psi = b_a(G^a + \frac{1}{2}\gamma^{ab}d_b). \quad (8.16)$$

Esta quantidade é fermiônica devido à presença do campo b_a . Ao calcular a transformação BRST sobre esse férmion, tem-se o seguinte resultado:

$$\delta_B\Psi = \delta_B b_a G^a + b_a \delta_B G^a + \frac{1}{2}\gamma^{ab}(\delta_B b_a d_b + b_a \delta_B d_b) \quad (8.17a)$$

$$= -\theta d_a G^a - \theta b_a \frac{\partial G^a}{\partial A_\mu^b} (D_\mu c)^b - \theta \frac{1}{2}\gamma^{ab} d_a d_b, \quad (8.17b)$$

onde $\delta_B G^b$ foi calculado da seguinte maneira:

$$\delta_B G^b = \frac{\partial G^b}{\partial A_\mu^a} \delta_B A_\mu^a \quad (8.18a)$$

$$= \frac{\partial G^b}{\partial A_\mu^a} \theta (D_\mu c)^a. \quad (8.18b)$$

Nota-se que o lado direito da equação (8.17b) corresponde exatamente aos termos de fixação de calibre e fantasmas na ação (8.5). Portanto a Lagrangiana da teoria pode ser reescrita como:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{Y.M} + s\Psi. \quad (8.19)$$

Este é um resultado fundamental para a teoria, pois toda a liberdade associada a escolha de calibre foi condensada neste último termo com a introdução do Férmion de Fixação de Calibre.

A última propriedade a ser verificada é que a ação é invariante por BRST. Aplicando a transformação em \mathcal{L} , tem-se:

$$\delta_B \mathcal{L} = \delta_B(\mathcal{L}_{Y.M}) + \delta_B(s\Psi). \quad (8.20)$$

O último termo é zero devido à propriedade nilpotente da transformação. O primeiro termo é constituído apenas de campos de calibre A_μ e suas derivadas. Entretanto, a definição da transformação BRST para o campo A_μ corresponde exatamente à transformação de calibre, mas com um parâmetro θ . Como foi mostrado na seção de campos de calibre

(4.5), a Lagrangiana $L_{Y.M}$ é, por construção invariante por transformações de calibre e, por consequência, invariante por BRST. Portanto, tem-se:

$$\delta_B \mathcal{L} = 0. \quad (8.21)$$

(NASTASE, 2019) (WEINBERG, 1995)

8.3 Quantização BRST

Considere a integral de caminho utilizando a ação desenvolvida na teoria BRST:

$$\langle f|i \rangle = \int \mathcal{D}\varphi e^{iS}, \quad (8.22)$$

onde a integral em φ representa todos os campos (bosônicos e fermiônicos). Essa integral de caminho está associada a uma medida física de probabilidade entre os estados inicial e final, por isso não pode depender de nenhuma escolha de calibre. Como foi visto no formalismo BRST, agora toda a informação de funções invariantes por simetrias de calibre está contida em Ψ . Por isso, variações funcionais em Ψ não devem afetar a medição de estados físicos. As consequências dessa afirmação serão analisadas a seguir. Considere uma variação $\delta\Psi$ que irá resultar na seguinte variação da integral de caminho:

$$\delta \langle f|i \rangle = \int \mathcal{D}\varphi e^{iS} i\delta S = \int \mathcal{D}\varphi e^{iS} i\delta(s\Psi). \quad (8.23)$$

Pela propriedade da integral de caminho, é possível escrever a última equação como:

$$\int \mathcal{D}\varphi e^{iS} i\delta(s\Psi) = \langle f| \delta(s\Psi) |i \rangle, \quad (8.24)$$

onde $s\Psi$ é agora um operador no formalismo hamiltoniano. O gerador da simetria BRST no espaço de Hilbert será um operador fermiônico Q_B que satisfaz:

$$\delta_B \varphi = i[\theta Q_B, \varphi] = i\theta [Q_B, \varphi]_{\mp}, \quad (8.25)$$

onde $[Q_B, \varphi]_{\mp}$ será o comutador para φ bosônico e o anti-comutador para φ fermiônico. Ou seja, a transformação será sempre dada por meio desse operador Q_B :

$$[Q_B, \varphi]_{\mp} = i s \varphi. \quad (8.26)$$

Retornando à equação (8.24), surgirá um anti-comutador pois a grandeza Ψ é fermiônica:

$$\langle f| \delta(s\Psi) |i \rangle = -i \langle f| [Q_B, \delta\Psi]_+ |i \rangle. \quad (8.27)$$

Como essa quantidade deve ser igual a zero, devido aos estados físicos serem invariantes pelas simetrias de calibre, então necessariamente o operador Q_B deve resultar em zero quando atuado no estado $\langle f|$ e no estado $|i\rangle$. Portanto, chega-se à conclusão que todos os estados físicos $|\psi\rangle$ devem satisfazer:

$$Q_B |\psi\rangle = 0. \quad (8.28)$$

O fato da transformação BRST ser nilpotente faz com que o operador Q_B também deva ser:

$$s(s\varphi) = [Q_B, [Q_B, \varphi]_{\mp}]_{\pm} = [Q_B^2, \varphi]_{-}, \quad (8.29)$$

que será igual a zero apenas quando:

$$Q^2 = 0. \quad (8.30)$$

A equação (8.28) mostra, em outras palavras, que os estados físicos são Q_B -fechados. Então, os estados físicos que diferem por um termo Q_B -exato são equivalentes:

$$|\psi'\rangle = |\psi\rangle + Q_B |\chi\rangle \sim |\psi\rangle, \quad (8.31)$$

pois naturalmente resultam em zero quando atuados pelo operador Q_B :

$$Q_B |\psi'\rangle = Q_B |\psi\rangle + Q_B^2 |\chi\rangle \quad (8.32a)$$

$$= 0 \quad (8.32b)$$

Os elementos de matrizes também respeitam a equivalência:

$$\langle \psi' | \tilde{\psi} \rangle = \langle \psi | \tilde{\psi} \rangle + \langle \chi | Q_B | \tilde{\psi} \rangle = \langle \psi | \tilde{\psi} \rangle, \quad (8.33)$$

onde $|\tilde{\psi}\rangle$ é um estado físico. Isso implica que $\langle \psi' | \hat{H}_B | \tilde{\psi} \rangle$ deve ser igual à $\langle \psi | \hat{H}_B | \tilde{\psi} \rangle$ para a Hamiltoniana do sistema, dada por H_B :

$$\langle \psi' | \hat{H}_B | \tilde{\psi} \rangle = \langle \psi | \hat{H}_B | \tilde{\psi} \rangle + \langle \chi | \hat{H}_B Q_B | \tilde{\psi} \rangle \quad (8.34a)$$

$$= \langle \psi | \hat{H}_B | \tilde{\psi} \rangle + \langle \chi | ([Q_B, \hat{H}_B] + \hat{H}_B Q) | \tilde{\psi} \rangle \quad (8.34b)$$

$$= \langle \psi | \hat{H}_B | \tilde{\psi} \rangle + \langle \chi | [Q_B, \hat{H}_B] | \tilde{\psi} \rangle + \langle \chi | \hat{H}_B Q | \tilde{\psi} \rangle. \quad (8.34c)$$

O último termo possui Q_B atuando em um estado físico, resultando em zero, e o primeiro termo é o resultado que deve ser obtido. Pela condição imposta, o operador Q_B deve, então, obedecer a seguinte propriedade:

$$[Q_B, \hat{H}_B] = 0. \quad (8.35)$$

Por fim, esta propriedade também está relacionada ao teorema de Noether, pois Q_B é, na verdade, a carga conservada que existe devido a simetria BRST. As cargas são os geradores de uma determinada transformação na teoria quântica, mas a busca pelo gerador da transformação BRST foi exatamente o ponto de partida para a introdução do operador Q_B . A conservação dessa carga no tempo é manifestada na teoria quântica justamente pela comutação com o operador da Hamiltoniana.

(WEINBERG, 1995) (NASTASE, 2019)

Parte V

Análise e Aplicações

9 Análise da Quantização BRST

O ponto principal da formulação BRST está no fato que é possível substituir as simetrias de calibre por uma simetria fermiônica rígida num espaço estendido que contém os fantasmas (FUSTER; HENNEAUX; MAAS, 2005). Isso ocorre de tal forma que é sempre possível recuperar a simetria de calibre original por meio da cohomologia $H^k(s)$, pois s é uma derivação nilpotente no formalismo. Ou seja, a álgebra onde existem os campos é estendida para uma álgebra mais geral onde existe um operador s , de tal forma que a cohomologia estabelecida por esse operador irá resultar nas antigas funções invariantes por calibre.

A importância desse formalismo também está no fato que qualquer teoria invariante por calibre permite essa construção com uma derivação nilpotente, tal que a cohomologia resulta na álgebra original. A quantização pelo formalismo BRST mostra que a física está toda contida na cohomologia do operador Q :

$$Q_{B\text{-cohomologia}} = \frac{Ker(Q_B)}{Im(Q_B)}. \quad (9.1)$$

Portanto, o espaço de Hilbert dos estados físicos e a álgebra dos operadores (apêndice A.2) serão sempre estabelecidos por essa cohomologia. (NASTASE, 2019)

10 Aplicações no Campo Eletromagnético

10.1 Vínculos e Invariância por Calibre

O campo eletromagnético no vácuo (ausência de fontes) tem a ação da seguinte forma:

$$S = -\frac{1}{4} \int d^4x F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad (10.1)$$

onde $F_{\mu\nu}$ é o tensor eletromagnético :

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (10.2)$$

Da definição dada, nota-se que o tensor $F_{\mu\nu}$ possui a propriedade antissimétrica, isto é : $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$.

A ação (10.1) e o tensor (10.2) já permitem observar que o campo eletromagnético possui uma invariância por escolha de calibre. Considere a seguinte variação:

$$\delta A_\mu = \partial_\mu \Lambda, \quad (10.3)$$

onde Λ é uma função arbitrária. A invariância pode ser verificada pela direta aplicação na definição:

$$\delta F_{\mu\nu} = \partial_\mu \delta A_\nu - \partial_\nu \delta A_\mu = \partial_\mu \partial_\nu \Lambda - \partial_\nu \partial_\mu \Lambda = 0. \quad (10.4)$$

Chega-se à conclusão de que a ação do campo eletromagnético se mantém inalterada por transformações do tipo :

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \Lambda. \quad (10.5)$$

Dado a Lagrangiana:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad (10.6)$$

é desejado transitar para o formalismo Hamiltoniano a fim de obter-se uma análise mais completa, a começar pelo cálculo dos momentos:

$$p^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{\mu,0}}, \quad (10.7)$$

onde $A_{\mu,\nu} = \partial_\nu A_\mu$. Este cálculo fica mais evidente ao escrever a Lagrangiana da seguinte forma:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} F_{0i} F^{0i} - \frac{1}{4} F_{ij} F^{ij}, \quad (10.8)$$

que implica na equação para o momento a seguir:

$$p^\mu = -F^{0\mu}. \quad (10.9)$$

Agora, voltando para o formalismo de vínculos desenvolvido, já é possível notar que existe um vínculo entre os momentos p^μ :

$$p^0 \approx 0. \quad (10.10)$$

Seguindo com o cálculo da Hamiltoniana, obtém-se:

$$H = \int d^3x \left[p^\mu A_{\mu,0} - \mathcal{L} \right] \quad (10.11)$$

$$H = \int d^3x \left[\frac{1}{4} F_{ij} F^{ij} + \frac{1}{2} p^i p_i - A_0 p^i_{,i} \right] \quad (10.12)$$

Pelo fato da existência de vínculos no sistema, deve-se impor a condição de que os vínculos são preservados no tempo:

$$\{p^0, H\} + u_0 \{p^0, p^0\} \approx 0. \quad (10.13)$$

Ao impor a condição, obtém-se o resultado:

$$\{p^0, H\} = p^i_{,i} \quad (10.14)$$

e, portanto, tem-se o surgimento dos seguintes vínculos secundários:

$$p^i_{,i} \approx 0. \quad (10.15)$$

Neste caso, todos os vínculos são de primeira classe:

$$\{p^0, p^i_{,i}\} \approx \{p^i_{,i}, p^j_{,j}\} \approx 0. \quad (10.16)$$

É possível, então, simplesmente adicionar estes vínculos à Hamiltoniana H para formar a Hamiltoniana Estendida H_E :

$$H_E = \int d^3x \left[\frac{1}{4} F_{ij} F^{ij} + \frac{1}{2} p^i p_i - A_0 p^i_{,i} \right] + \int d^3x u_1(x) p^0 + \int d^3x u_2(x) p^i_{,i}. \quad (10.17)$$

(NASTASE, 2019) (SCHWARTZ, 2014) (DAS, 2020)

10.2 Quantização do Campo Eletromagnético

A quantização do campo eletromagnético envolve dificuldades associadas à preservação da covariância (RYDER, 1996). A escolha de calibre, entretanto, tem o papel fundamental na definição do campo. Na quantização por meio do calibre de Lorenz, opta-se por manter a covariância ao estabelecer os comutadores da mecânica quântica.

10.3 Quantização no Calibre de Lorenz

As equações de movimento para o campo eletromagnético no vácuo possuem a seguinte forma:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0 \quad (10.18a)$$

$$\partial_\mu(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = 0 \quad (10.18b)$$

$$\square A^\nu - \partial^\nu \partial_\mu A^\mu = 0. \quad (10.18c)$$

A fixação no calibre de Lorenz consiste em realizar a transformação

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \Lambda, \quad (10.19)$$

de modo que o calibre Λ satisfaça a seguinte relação:

$$\square \Lambda = -\partial_\mu A^\mu. \quad (10.20)$$

Como consequência desta escolha de calibre, tem-se:

$$\partial_\mu A^\mu = 0. \quad (10.21)$$

É possível definir uma Lagrangiana de modo que, ao calcular a equação de Euler-Lagrange, o calibre de Lorenz já esteja fixado. Esta Lagrangiana tem a seguinte forma:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2} (\partial_\mu A^\mu)^2 \quad (10.22)$$

e as equações de movimento se tornam:

$$\square A_\mu = 0. \quad (10.23)$$

É importante salientar que, ao calcular o momento baseado na Lagrangiana (10.22), obtém-se exatamente a relação (10.21):

$$p^0 = -\partial_\mu A^\mu = 0. \quad (10.24)$$

A quantização dos campos é realizada de forma covariante para preservar as transformações de Lorenz:

$$[A_\mu(\vec{x}, t), p_\nu(\vec{x}', t)] = i g_{\mu\nu} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}') \quad (10.25)$$

$$[A_\mu, A_\nu] = [p_\mu, p_\nu] = 0. \quad (10.26)$$

Nota-se que há um vínculo no sistema dado pela equação (10.24), portanto a quantização resultará em:

$$\hat{p}^0 |\psi\rangle = \partial_\mu A^\mu |\psi\rangle = 0. \quad (10.27)$$

Esta relação vai garantir que não haja valores esperados negativos para a energia dos campos (fato que foi verificado por Gupta e Bleuler), mas neste contexto foi naturalmente trazida pela teoria de vínculos. (NASTASE, 2019) (ITZYKSON; ZUBER, 2006)

10.4 Resultado Obtido pela Generalização do Formalismo Hamiltoniano

O formalismo de De Donder-Weyl, como mencionado na seção 3.2, permite a construção de uma Hamiltoniana generalizada e como obter as equações de movimento a partir dela. Entretanto, o campo eletromagnético possui vínculos, fazendo com que as equações de Hamilton generalizadas não possam ser utilizadas normalmente. Esta seção tem a função de propor uma solução para esse problema utilizando a teoria de vínculos.

O momento generalizado é dado por:

$$P^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = -F^{\mu\nu}. \quad (10.28)$$

Dado que o tensor $F^{\mu\nu}$ é antissimétrico, a relação também vale para o momento $P^{\mu\nu} = -P^{\nu\mu}$. Essa relação define, portanto, um vínculo:

$$\phi^{\mu\nu} = P^{\mu\nu} + P^{\nu\mu} \approx 0. \quad (10.29)$$

Realizando a transformada de Legendre, utilizando o vínculo, chega-se a seguinte Hamiltoniana generalizada:

$$\mathcal{H}_{D.W} = -\frac{1}{4}P^{\mu\nu}P_{\mu\nu}. \quad (10.30)$$

Adicionando o vínculo à Hamiltoniana por meio de um multiplicador de Lagrange u , chega-se a seguinte Hamiltoniana total:

$$\mathcal{H}_T = -\frac{1}{4}P^{\mu\nu}P_{\mu\nu} + u_{\mu\nu}\phi^{\mu\nu}. \quad (10.31)$$

As equações de Hamilton generalizadas (De Donder-Weyl) irão produzir:

$$\partial_\mu A_\nu = -\frac{1}{2}P_{\mu\nu} + u_{\mu\nu} + u_{\nu\mu}, \quad (10.32)$$

$$\partial_\mu P^{\mu\nu} = 0. \quad (10.33)$$

Derivando a primeira equação, o resultado é:

$$\partial_\mu P^{\mu\nu} = -\partial_\mu \partial^\mu A^\nu + \partial_\mu (u^{\mu\nu} + u^{\nu\mu}) = 0. \quad (10.34)$$

Como o vínculo estabelece que $P^{\mu\nu}$ é antissimétrico, é possível trocar os índices do momento, desde que a equação tenha sinal trocado:

$$\partial_\mu P^{\mu\nu} = \partial_\mu \partial^\nu A^\mu - \partial_\mu (u^{\mu\nu} + u^{\nu\mu}) = 0. \quad (10.35)$$

Por fim, somando as equações (10.34) e (10.35), o resultado será:

$$\square A^\nu - \partial^\nu \partial_\mu A^\mu = 0, \quad (10.36)$$

que são as equações de movimento do campo eletromagnético no vácuo.

Conclusão

Este trabalho foi desenvolvido com a intenção de estudar aspectos fundamentais da teoria de campos, sendo estes baseados na teoria de vínculos e suas consequências para a quantização de teorias de calibre. O surgimento da simetria BRST foi explorado de forma aprofundada em seus aspectos matemáticos e suas devidas implicações nos sistemas físicos.

O método desenvolvido por Faaddeev-Popov para calcular integrais de caminho resultou numa Lagrangeana que permite diversas análises que envolvam vínculos, simetrias de calibre e a própria simetria BRST. Entretanto, com a introdução do formalismo BRST é possível tratar a ação como um objeto que não depende de fixação de calibre. Este resultado é, por si só, extremamente relevante do ponto de vista de generalidade da teoria. A liberdade associada à escolha de calibre é trocada por uma grandeza fermiônica e rígida, que permite quantizar a teoria sem ambiguidade. Estados físicos relacionados por uma simetria de calibre são construídos como equivalentes, sendo isso uma consequência natural da teoria.

Por fim, foi mostrado que novos resultados são obtidos quando considera-se aspectos algébricos das simetrias de calibre. A teoria de vínculos pode ser aplicada em campos de calibre e, até mesmo, fornecem esclarecimento acerca da natureza do sistema. Os campos de calibre, por outro lado, são essenciais para o modelo padrão atual e, portanto, o estudo de simetrias como BRST ganham maior relevância.

Referências

- BOGOLIUBOV, N. N.; SHIRKOV, D. V.; CHOMET, S. *Introduction to the theory of quantized fields*. [S.l.]: Interscience New York, 1959. v. 59. Citado na página 45.
- BOGOLJUBOV, N. N.; SIRKOV, D. V. *Quantum fields*. 1984. Citado na página 44.
- DAS, A. *Lectures on quantum field theory*. [S.l.]: World Scientific, 2020. Citado na página 92.
- DIRAC, P. A. M. The quantum theory of the electron. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, The Royal Society London, v. 117, n. 778, p. 610–624, 1928. Citado na página 13.
- DIRAC, P. A. M. *Lectures on quantum mechanics*. [S.l.]: Courier Corporation, 2001. v. 2. Citado 2 vezes nas páginas 34 e 52.
- FRADKIN, E. *Quantum field theory: an integrated approach*. [S.l.]: Princeton University Press, 2021. Citado 3 vezes nas páginas 46, 64 e 81.
- FUSTER, A.; HENNEAUX, M.; MAAS, A. BRST-antifield quantization: a short review. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, World Scientific, v. 2, n. 05, p. 939–963, 2005. Citado na página 89.
- HENNEAUX, M.; TEITELBOIM, C. *Quantization of gauge systems*. [S.l.]: Princeton university press, 1992. Citado 5 vezes nas páginas 24, 25, 34, 54 e 80.
- ITZYKSON, C.; ZUBER, J.-B. *Quantum field theory*. [S.l.]: Courier Corporation, 2006. Citado na página 93.
- KANATCHIKOV, I. V. De donder-weyl theory and a hypercomplex extension of quantum mechanics to field theory. *Reports on Mathematical Physics*, Elsevier, v. 43, n. 1-2, p. 157–170, 1999. Citado na página 41.
- LAMB, W. E.; RETHERFORD, R. C. Fine structure of the hydrogen atom. part i. *Uspekhi Fizicheskikh Nauk*, Russian Academy of Sciences, Branch of Physical Sciences, v. 45, n. 4, p. 553–615, 1951. Citado na página 13.
- NAKAHARA, M. *Geometry, topology and physics*. [S.l.]: CRC press, 2018. Citado na página 72.
- NASTASE, H. *Introduction to Quantum Field Theory*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2019. Citado 10 vezes nas páginas 40, 54, 65, 81, 84, 85, 89, 92, 93 e 102.
- PESKIN, M. E. *An introduction to quantum field theory*. [S.l.]: CRC press, 2018. Citado na página 39.
- ROTHER, K. D. *Foundations of Quantum Field Theory*. [S.l.]: World Scientific, 2021. Citado na página 45.
- RYDER, L. H. *Quantum field theory*. [S.l.]: Cambridge university press, 1996. Citado 3 vezes nas páginas 61, 62 e 92.

- SCHWARTZ, M. D. *Quantum field theory and the standard model*. [S.l.]: Cambridge university press, 2014. Citado 3 vezes nas páginas 62, 92 e 101.
- SEPANSKI, M. R. *Compact lie groups*. [S.l.]: Springer, 2007. Citado na página 103.
- SREDNICKI, M. *Quantum field theory*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2007. Citado na página 55.
- TETA, A. et al. *A Mathematical Primer on Quantum Mechanics*. [S.l.]: Springer, 2018. Citado 2 vezes nas páginas 51 e 103.
- TUNG, W.-K. *Group theory in physics*. [S.l.]: World Scientific, 1985. v. 1. Citado na página 103.
- WEINBERG, S. *The quantum theory of fields*. [S.l.]: Cambridge university press, 1995. v. 2. Citado 4 vezes nas páginas 47, 84, 85 e 102.
- WEINBERG, S. *The quantum theory of fields: Volume 1, foundations*. [S.l.]: Cambridge university press, 2005. Citado 6 vezes nas páginas 43, 51, 52, 55, 57 e 59.
- WIGNER, E. On unitary representations of the inhomogeneous lorentz group. *Annals of mathematics*, JSTOR, p. 149–204, 1939. Citado na página 52.

Apêndices

APÊNDICE A – Mecânica Quântica

A.1 Estados de uma Partícula

Os estados de uma partícula são aqueles que se transformam sobre operações unitárias do grupo de Poincaré (SCHWARTZ, 2014). O operador P^μ , associado a momento e energia, é de grande importância para o estudo da teoria de campos, pois ele compõe uma parte fundamental do grupo de Poincaré e, portanto, está associado a propriedades intrínsecas das partículas. Seja $|p, \sigma\rangle$ um autovetor em comum para os operadores P^μ , tem-se a seguinte relação:

$$\hat{P}^\mu |p, \sigma\rangle = p^\mu |p, \sigma\rangle, \quad (\text{A.1})$$

onde σ representa outros graus de liberdade.

Uma translação é dada por:

$$U(1, a) |p, \sigma\rangle = e^{ia\hat{P}} |p, \sigma\rangle = e^{iap} |p, \sigma\rangle \quad (\text{A.2})$$

e uma transformação de Lorentz pode ser estudada por meio de operadores $U(\Lambda)$ atuando nos estados de momento:

$$\hat{P}^\mu U(\Lambda) |p, \sigma\rangle = (U(\Lambda)U^{-1}(\Lambda))\hat{P}^\mu U(\Lambda) |p, \sigma\rangle. \quad (\text{A.3})$$

O lado direito da equação pode ser reescrito utilizando a equação (5.30):

$$U^{-1}(\Lambda)\hat{P}^\mu U(\Lambda) = U(\Lambda^{-1})\hat{P}^\mu U^{-1}(\Lambda^{-1}) = (\Lambda^\mu_\nu)^{-1}P^\nu, \quad (\text{A.4})$$

onde foi utilizado a propriedade geral de uma representação:

$$U^{-1}(\Lambda) = U(\Lambda^{-1}) \quad (\text{A.5})$$

e das transformações de Lorentz:

$$(\Lambda^\mu_\nu)^{-1} = \Lambda^\mu_\nu. \quad (\text{A.6})$$

Chega-se, portanto, ao seguinte resultado:

$$\hat{P}^\mu U(\Lambda) |p, \sigma\rangle = \Lambda^\mu_\rho \hat{P}^\rho |p, \sigma\rangle = \Lambda^\mu_\rho p^\rho |p, \sigma\rangle. \quad (\text{A.7})$$

O estado $U(\Lambda) |p, \sigma\rangle$ é, então autovetor do operador P^μ , com autovalor $\Lambda^\mu_\rho p^\rho$. Mais precisamente, para qualquer valor de σ essa relação é satisfeita, fazendo com que $U(\Lambda) |p, \sigma\rangle$ deva ser escrito como

$$U(\Lambda) |p, \sigma\rangle = \sum_{\sigma'} C_{\sigma'\sigma} |\Lambda p, \sigma'\rangle, \quad (\text{A.8})$$

onde $C_{\sigma'\sigma}$ é um coeficiente de combinação linear.

A.2 Formalismo BRST na Quantização Canônica

A quantização canônica é feita escrevendo a ação estendida no formalismo hamiltoniano, como foi desenvolvida no formalismo de vínculos:

$$S = \int d^4x \left[\pi_a \dot{\varphi}_a + p_b \dot{\theta}_b - H_B + u_a \phi_a \right], \quad (\text{A.9})$$

onde θ_b é o conjunto dos campos fantasmas e p_b seus respectivos momentos. O conjunto de vínculos de primeira classe, quando quantizados, resultará na álgebra:

$$[\gamma_a, \gamma_b] = f_{a,b}^c \gamma_c \quad (\text{A.10})$$

e os campos fermiônicos satisfazem as relações de anticomutação:

$$[\theta^a, p_b]_+ = i\delta_b^a. \quad (\text{A.11})$$

(WEINBERG, 1995) (NASTASE, 2019)

APÊNDICE B – Definições Matemáticas

B.1 Transformada de Fourier

A transformada de Fourier de uma função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ é definida como:

$$\tilde{f}(k) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int dx e^{-ikx} f(x). \quad (\text{B.1})$$

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int dk e^{ikx} \tilde{f}(k). \quad (\text{B.2})$$

(TETA et al., 2018)

B.2 Grupos

Definição 13 *Um conjunto forma um grupo quando há uma lei de composição que associa um par de elementos a outro dentro do conjunto, tal que as seguintes condições sejam satisfeitas:*

- *A lei de composição é associativa.*
- *Existe um elemento identidade.*
- *Todo elemento possui inverso.*

(TUNG, 1985)

Definição 14 *Uma representação de um grupo de Lie de dimensão finita é um homomorfismo de um grupo de Lie em um espaço vetorial complexo.*

(SEPANSKI, 2007)

B.3 Álgebra de Grassmann

A uma álgebra de Grassmann geral é definida por n geradores G_n que obedecem as propriedades:

- G_n é um espaço vetorial sobre o corpo dos números complexos
- Existe um produto que satisfaz bilinearidade e associatividade.

- G_n contém o elemento inverso para o produto
- G_n é gerado por n elementos ξ^A tal que:

$$\xi^A \xi^B + \xi^B \xi^A = 0 \tag{B.3}$$