

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
INSTITUTO DE FÍSICA

ÉRIC MATHEUS DE SOUSA SANTOS

**EQUAÇÕES DE MAKEENKO-MIGDAL NA TEORIA DE
CALIBRE**

BRASÍLIA
10 DE JULHO DE 2024

Éric Matheus de Sousa Santos

Equações de Makeenko-Migdal na Teoria de Calibre

Monografia apresentada ao Instituto de Física da Universidade de Brasília como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Bacharel em Física.

Orientador: Arsen R. Melikyan

Universidade de Brasília – UnB

Instituto de Física

Brasília

10 de julho de 2024

Éric Matheus de Sousa Santos

Equações de Makeenko-Migdal na Teoria de Calibre/ Éric Matheus de Sousa Santos. – Brasília, 10 de julho de 2024-

84 p. : il. (algumas color.) ; 30 cm.

Orientador: Arsen R. Melikyan

Monografia – Universidade de Brasília – UnB

Instituto de Física, 10 de julho de 2024.

1. Palavra-chave1. 2. Palavra-chave2. I. Orientador. II. Universidade xxx. III. Faculdade de xxx. IV. Título

CDU 02:141:005.7

Éric Matheus de Sousa Santos

Equações de Makeenko-Migdal na Teoria de Calibre

Monografia apresentada ao Instituto de Física da Universidade de Brasília como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Bacharel em Física.

Trabalho aprovado. Brasília, 10 de julho de 2024:

Arsen R. Melikyan
Orientador

Brasília
10 de julho de 2024

Dedico este trabalho à minha família, que muitas vezes abdicou dos seus sonhos para que eu pudesse viver o meu.

Agradecimentos

Começo agradecendo especialmente ao meu orientador Arsen Melikyan e também a todos os professores da UnB, os quais me permitiram adquirir o conhecimento necessário para a execução dessa monografia.

*“Se eu vi mais longe,
foi por estar sobre ombros de gigantes.
(Isaac Newton)”*

Resumo

Neste trabalho abordaremos os temas necessários para a construção da Teoria Quântica de Campos, mais precisamente na Cromodinâmica Quântica, cujos problemas não podem ser tratados por métodos não perturbativos. E será através das equações de Makeenko-Migdal conseguiremos tratar os problemas. Também será abordado o problema em aberto que pode ser estudado através da Teoria Quântica de Laços.

Palavras-chave: integrais de caminho. quantização. teoria quântica de campos. campo eletromagnético. cromodinâmica quântica. laço de wilson. equações de makeenko-migdal. modelo principal quiral

Abstract

In this academic work we will cover the necessary topics to formulate the Quantum Field Theory, more precisely the Quantum Chromodynamics, whose problems cannot be solved by perturbative methods. And the Makeenko-Migdal's equation are the way to solve this problems. We will talk, too, about one unsolved problem, that can be studied with the Quantum Loop Theory.

Key-words: path integrals. quantization. quantum field theory, electromagnetic field, quantum chromodynamic, wilson loop, makeenko-migdal equations, principal quiral model.

Lista de abreviaturas e siglas

IF	Instituto de Física
UnB	Universidade de Brasília
TQC	Teoria Quântica de Campos
CDQ	Cromodinâmica Quântica
MQ	Mecânica Quântica
VEV	Valor Esperado do Vácuo
TEC	Teoria Eletromagnética Clássica
Equação de KG	Equação de Klein-Gordon

Lista de símbolos

$\int [\dots] dx$	Integral
$\int \mathcal{D}q [\dots]$	Integral de Caminho
$x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$	Quadrivetor
$\{*, *\}$	Parênteses de Poisson
$[*, *]$	Comutador
\mathcal{L}	Densidade de Lagrangiana
\mathcal{H}	Densidade de Hamiltoniana
i, j, k, \dots	Índices Tridimensionais (1,2,3)
μ, ν, σ, \dots	Índices Quadridimensionais (0,1,2,3)
\hat{W}	Laço de Wilson
$\hat{W} [x, y, \Gamma]$	Linha de Wilson
$\hat{W} [\Gamma]$	Linha de Wilson Fechada
\hat{a}	Operador de Aniquilação
\hat{a}^\dagger	Operador de Criação
\hat{P}	Operador de Ordenamento de Caminhos
\hat{T}	Operador de Ordenamento Temporal
$\langle *, * \rangle$	Produto Escalar Generalizado
$\langle * * \rangle$	Produto Escalar no Espaço de Hilbert
$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$	Símbolo de Levi-Chivita Quadridimensional
$g_{\mu\nu}$	Tensor Métrico

Sumário

	Introdução	21
I	INTRODUÇÃO À TEORIA QUÂNTICA DE CAMPOS	23
1	SIMETRIAS E LEIS DE CONSERVAÇÃO	25
1.1	Simetria Contínua e Teorema de Noether	25
1.2	Simetrias Internas	26
1.3	Simetrias Globais e Representações de Grupos	28
1.4	Simetrias Locais e a Invariância de Calibre	28
1.5	Invariância de Calibre Não Abelianas	30
2	INTEGRAIS DE CAMINHO	33
2.1	Quantização Canônica	33
2.1.1	Quantização do Campo Real Escalar	34
2.2	Formulação das Integrais de Caminho	36
2.3	Funções de Partição e Propagadores	38
II	QUANTIZAÇÃO DOS CAMPOS DE CALIBRE	41
3	QUANTIZAÇÃO DOS CAMPOS DE CALIBRE	43
3.1	Eletromagnetismo Clássico	43
3.2	Quantização do Campo Eletromagnético Livre	46
3.3	Quantização no Calibre de Coulomb	47
3.4	Quantização no Calibre de Feynman	49
3.5	Quantização de Campos de Calibre por Integrais de Caminho	51
3.5.1	Campos Abelianos	55
3.5.2	Campos Não Abelianos	57
III	CROMODINÂMICA QUÂNTICA E TEORIA QUÂNTICA DE LAÇOS	61
4	CROMODINÂMICA QUÂNTICA E TEORIA QUÂNTICA DE LAÇOS	63
4.1	Laço de Wilson	63
4.1.1	Caso Abelianas	63

4.1.2	Caso Não Abelian	64
4.1.3	Potencial Quark-Antiquark	65
4.2	Equação do Laço de Makeenko–Migdal	67
4.2.1	Derivadas de Caminho e de Área	69
4.2.2	Equações do Laço de Makeenko-Migal	69
4.3	Equação de Yang-Mills e o Campo Quiral	70
4.3.1	Versão Contínua	70
4.3.2	Versão Discreta	72
4.3.3	Modelo Principal Quiral	73
4.3.4	Problema Original	75
	Conclusão	77
	REFERÊNCIAS	79
	APÊNDICES	81
	APÊNDICE A – INTEGRAIS GAUSSIANAS	83

Introdução

No final do século XIX as principais teorias da física clássica, Mecânica, Eletromagnetismo e Termodinâmica, já estavam bem desenvolvidas. Porém, ainda existiam problemas em aberto como, por exemplo, o problema do corpo negro, ou o efeito fotoelétrico. Desta forma novas áreas da física foram descobertas, as principais foram a Mecânica Quântica e a Teoria da Relatividade. E quanto mais elas foram desenvolvidas, mais os físicos do século XX tentavam unificá-las. Surgindo assim a Teoria Quântica de Campos, a qual é a generalização da Mecânica Quântica para sistemas relativísticos. E a partir da TQC o modelo das quatro forças fundamentais foi consolidado, sendo elas: Força Eletromagnética, Força Gravitacional, Força Nuclear Fraca e Força Nuclear Forte. A Cromodinâmica Quântica, a qual o trabalho será focado, é uma das áreas da TQC, nela a força dominante é a força nuclear forte.

A CDQ é uma teoria que faz parte do contexto da TQC, o seu nome vem grego *chrôma*, que significa cor, e *dynamis*, que significa força. As partículas nas quais essa teoria se aplica são os chamados *quarks*, os quais são partículas subatômicas, comumente encontradas nos núcleos atômicos. Existem seis quarks que são os chamados, *up*, *down*, *strange*, *charm*, *top* e *bottom* e seus respectivos antiquarks, que possuem propriedades opostas aos quarks.

Na natureza os quarks nunca são achados sozinhos, eles são sempre achados em trios, chamados de *bárions*, por exemplo, os prótons são bárions formados por dois quarks up e um quark down. E existem também os mésons formados por um quark e um antiquark, por exemplo, o méson pi, formado por um quark up e um antiquark down.

A cor que aparece no nome da teoria é uma analogia às cargas elétricas, porém para a força nuclear forte. Uma diferença para as cargas elétricas são apenas carga positiva e carga negativa, mas existem três cores azul, vermelho e verde e as "anticores", antiazul ou amarelo, antivermelho ou ciano e antiverde ou magenta.

A principal dificuldade no estudo da CDQ é que a força forte tem grande influência até mesmo em resultados de primeira ordem, fazendo com que o sistema não possa mais ser tratado com a teoria perturbativa como no capítulo. Assim, torna-se necessário o desenvolvimento de outras técnicas para a resolução dos problemas. Dentro da CDQ uma das formas de resolver os problemas é através da equação de laço Makeenko-Migdal, na qual tratamos o propagador como a soma de laços fechados, e assim é possível resolver o problema exatamente.

Com o avanço da TQC, também surgiam outras teorias, pretendendo quantizar a gravidade. Uma das teorias que surgiu para este fim, foi a Teoria de Cordas. Entretanto, o

método para sair da TQC e chegar na Teoria de Cordas e vice-versa, de forma generalizada, ainda não foi descoberto. Uma resposta para esse método, pode surgir, justamente, da investigação dos laços, por existir uma enorme semelhança entre a Teoria Quântica de Laços e o Modelo Principal Quiral, onde a Teoria de Cordas pode ser entendida como uma generalização dessa. E o primeiro passo para essa investigação é analisar os detalhes das equações por meio de métodos computacionais, então tentar formular uma resposta analítica do problema.

Parte I

Introdução à Teoria Quântica de Campos

1 Simetrias e Leis de Conservação

Uma simetria é um tipo de transformação muito comum na matemática, cuja definição é a seguinte:

Definição 1 (*Simetria*). Dado um operador $T : A \rightarrow B$, que age em um conjunto $C \subset A$, tal que $T[C] = X$, com $X \in B$. Dizemos que, T possui uma simetria C' se e somente se, existe um mapa a que leva C em C' , tal que $T[C'] = X$.

Este tipo de transformação é de extrema importância no estudo da física, seja na imposição de restrições sobre a teoria, seja na facilitação de contas. As simetrias podem ser classificadas de diversas formas como do tipo espaço-tempo e internas, como discretas e contínuas, globais e locais.

Caso uma simetria ocorra em uma Lagrangiana, chamamos essa simetria específica de simetria de calibre. A teoria que rege esse tipo simetrias é chamada de teoria de calibre. Devido à formulação das teorias modernas, com base no princípio da mínima ação, todas às vezes que tratarmos de simetria ela necessariamente será uma simetria de calibre.

1.1 Simetria Contínua e Teorema de Noether

A primeira simetria a ser estudada serão as simetrias do tipo contínuas, ou seja, as simetrias que respeitam a definição de continuidade.

Teorema 1 (*Teorema de Noether*). *O teorema de Noether diz que para cada simetria contínua na Lagrangiana existe uma grandeza conservada.*

Demonstração. Para provar começamos com uma Lagrangiana qualquer $\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$, então modificamos o campo $\phi \rightarrow \phi' = \phi + \delta\phi$. A Lagrangiana para ϕ' deve ser igual à Lagrangiana para ϕ mais uma função $\partial_\mu J^\mu$, sendo J^μ um vetor qualquer, que servirá apenas para o ajuste da simetria. Temos, portanto:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\phi + \delta\phi, \partial_\mu(\phi + \delta\phi)] &= \mathcal{L}[\phi, \partial_\mu\phi] + \partial_\mu J^\mu \\ \implies \mathcal{L}[\phi, \partial_\mu\phi] + \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\phi}\delta\phi + \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu\phi}\partial_\mu(\delta\phi) + \mathcal{O}(2) &= \mathcal{L}[\phi, \partial_\mu\phi] + \partial_\mu J^\mu \\ \implies \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\phi}\delta\phi + \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu\phi}\partial_\mu(\delta\phi) + \mathcal{O}(2) &= \partial_\mu J^\mu, \end{aligned}$$

então desconsiderando os termos de segunda ordem e utilizando a equação de Euler-Lagrange para campos, sendo:

$$\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\phi} = \partial_\nu \left(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\nu\phi} \right), \quad (1.1)$$

chegamos ao seguinte resultado:

$$\begin{aligned}
& \partial_\mu \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu \phi} \right) \delta \phi + \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu \phi} \partial_\mu (\delta \phi) = \partial_\mu J^\mu \\
\implies & \partial_\mu \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu \phi} \delta \phi \right) = \partial_\mu J^\mu \\
\implies & \partial_\mu \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu \phi} \delta \phi - J^\mu \right) = 0 \\
\implies & \partial_\mu j^\mu = 0, \quad j^\mu \equiv \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu \phi} \delta \phi - J^\mu, \tag{1.2}
\end{aligned}$$

onde j^μ é a chamada densidade de corrente, definida para cada grandeza a partir de $\delta \phi$ e J^μ , e a equação (1.2) é chamada de equação da continuidade. E integrando em todo o espaço e em um tempo Δt , depois utilizando o teorema de Green generalizado para o espaço quadridimensional, temos:

$$\int_\Omega \partial_\mu j^\mu d^4x = \oint_{\partial\Omega} j_\mu dS^\mu = 0,$$

e considerando que não existem correntes no infinito, os termos espaciais de j não vão contribuir para a integral, logo sobra apenas a parte temporal avaliada nos extremos t e $t + \Delta t$:

$$\begin{aligned}
& \int_{\partial\Omega} j_0(t + \Delta t) dS^0 - \int_{\partial\Omega} j_0(t) dS^0 = 0 \\
\implies & \int_V j^0(t) d^3x = \int_V j^0(t + \Delta t) d^3x \\
\implies & Q(t) = Q(t + \Delta t).
\end{aligned}$$

Portanto, a grandeza Q , chamada carga de Noether, foi conservada no tempo. Logo chega-se a conclusão do teorema, que toda simetria contínua implica em uma corrente que gera uma grandeza conservada, tal que:

$$Q = \int_V j^0 d^3x$$

para qualquer tempo t e para todo o espaço V . □

1.2 Simetrias Internas

As simetrias internas são um tipo de simetria que surge na teoria de campos, que diferente da simetria de espaço-tempo, modifica apenas o campo preservando as coordenadas. Ou seja, é uma simetria que gera uma rotação no campo, sem nenhuma translação. Sendo assim podemos escrever a transformação da seguinte forma:

$$\phi'(x) \rightarrow \phi(x) : \quad \phi' = e^{i\alpha} \phi(x), \tag{1.3}$$

essa transformação também gera uma simetria global, pois não depende da posição e do tempo.

Por exemplo, considerando o campo escalar complexo, ou seja, $\phi \neq \phi^*$, temos que a condição necessária para ocorrer a simetria de ϕ' para ϕ é:

$$\mathcal{L}(\phi', \partial_\mu \phi', \phi'^*, \partial_\mu \phi'^*) = \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi, \phi^*, \partial_\mu \phi^*),$$

ou em outras palavras, temos que garantir que a variação da Lagrangiana seja nula, logo:

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\phi} \delta\phi + \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu\phi} \delta\partial_\mu\phi + \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\phi^*} \delta\phi^* + \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu\phi^*} \delta\partial_\mu\phi^* = 0. \quad (1.4)$$

E para descobrir o valor de $\delta\phi$, podemos utilizar a equação (1.3) como um operador:

$$\begin{aligned} \phi' &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\alpha)^n}{n!} \hat{I}^n \phi \\ &= \phi + i\alpha\phi - \frac{\alpha^2}{2}\phi + \dots \end{aligned}$$

e comparando com a expansão $\phi' = \phi + \delta\phi + \delta^2\phi \dots$, chegamos a conclusão que:

$$\delta\phi = i\alpha\phi.$$

Aplicando este resultado na equação (1.4) e utilizando a equação de Euler-Lagrange, temos:

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} &= \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\phi} \delta\phi + \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu\phi} \delta\partial_\mu\phi + \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\phi^*} \delta\phi^* + \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu\phi^*} \delta\partial_\mu\phi^* \\ &= \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\phi} i\alpha\phi + \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu\phi} i\alpha\partial_\mu\phi - \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\phi^*} i\alpha\phi^* - \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu\phi^*} i\alpha\partial_\mu\phi^* \\ &= i\alpha \left[\partial_\mu \left(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu\phi} \right) \phi + \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu\phi} \partial_\mu\phi - \partial_\mu \left(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu\phi^*} \right) \phi^* - \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu\phi^*} \partial_\mu\phi^* \right] \\ &= i\alpha \partial_\mu \left(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu\phi} \phi - \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu\phi^*} \phi^* \right) \\ &= \alpha \partial_\mu j^\mu = 0, \quad j^\mu \equiv \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu\phi} \phi - \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu\phi^*} \phi^*, \end{aligned}$$

como α é arbitrário, a única forma de $\delta\mathcal{L}$ ser nula é se $\partial_\mu j^\mu = 0$. Ou seja, temos que o valor j^μ , chamado de densidade de corrente, se conserva;

$$j^\mu = i \left(\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu\phi} \phi - \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\partial_\mu\phi^*} \phi^* \right). \quad (1.5)$$

E observe que obtemos o mesmo resultado que o apresentado no teorema 1. Portanto, vemos que partindo das simetrias internas chegamos a mesma conclusão que partindo de simetrias contínuas.

1.3 Simetrias Globais e Representações de Grupos

A partir dos resultados observados na seção anterior podemos generalizar as simetrias globais, a partir da teoria de grupos. Considerando N campos complexos $\phi^b(x)$, onde eles são levados pelos operadores $SU(N)$ aos campos $\phi'^a(x)$. Onde os operadores constituem um grupo de Lie arbitrário, então podemos, em geral, representar a transformação do campo como:

$$\phi'^a(x) = \left[\exp \left(\lambda_k \theta^k \right) \right]^{ab} \phi_b(x), \quad (1.6)$$

sendo λ_k as matrizes $N \times N$ chamadas de matrizes geradoras do grupo G e θ_k um vetor independente de x .

Caso o grupo G seja um grupo de Lie compacto, ocorrendo nos casos apresentados, as matrizes geradoras vão satisfazer a seguinte relação:

$$[\lambda_i, \lambda_j] = i f_{ijk} \lambda^k,$$

para qual λ_i são hermitianas e possuem traço nulo ($\text{tr} \lambda_i = 0$); f_{ijk} são as constantes de estruturas e não mudam segundo a representação; e $[\ast, \ast]$ é uma operação que define a álgebra de Lie do grupo, nos casos da TQC normalmente serão, ou comutadores, ou anti-comutadores.

Podemos descobrir a corrente conservada através do método apresentado na seção anterior. Chegamos à fórmula:

$$j_k^\mu = i \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu \phi^a} \lambda_k^{ab} \phi_b(x) - \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu \phi^{*a}} \lambda_k^{ab} \phi_b^*(x) \right)$$

para a corrente conservada dos campos complexos. Os campos ϕ_a não precisam ser vetores necessariamente podendo ser também tensores.

1.4 Simetrias Locais e a Invariância de Calibre

A relatividade especial impõe que mudanças em um sistema devem ser propagadas com velocidade limitada. Portanto, não podemos modificar o campo inteiro no mesmo instante, logo as simetrias globais apresentadas nas seções anteriores não são aplicáveis. Sendo assim, precisamos modificar as simetrias para que elas mudem conforme as coordenadas no espaço-tempo, ou seja, que elas sejam globais. Para isto podemos modificar a equação (1.6) fazendo com que θ_k deixe de ser constante e dependa de x .

Voltemos ao exemplo do campo complexo $\phi(x)$ com uma Lagrangiana do tipo

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi)^* (\partial^\mu \phi) - V(|\phi|^2). \quad (1.7)$$

Note que esta Lagrangiana não é invariante sob transformações locais do tipo $\exp(i\theta(x))$, por isto é necessário fazer uma modificação nela para a condição ser satisfeita. Como a

única parte que não é invariante é $\partial_\mu\phi$, modificaremos apenas a derivada parcial ∂_μ para um operador D_μ , chamado de derivada covariante, onde:

$$D_\mu\phi = \partial_\mu\phi + O\phi,$$

sendo O um campo de calibre, que, por enquanto, é arbitrário. Então, aplicando a simetria no sistema e considerando que O também muda no processo, temos que

$$\begin{aligned} D'_\mu\phi' &= (\partial_\mu + O')e^{i\theta(x)}\phi = e^{i\theta(x)}D_\mu\phi \\ \implies \partial_\mu(e^{i\theta(x)}\phi) + O'e^{i\theta(x)}\phi &= e^{i\theta(x)}\partial_\mu\phi + e^{i\theta(x)}O\phi \\ \implies ie^{i\theta(x)}\partial_\mu\theta(x)\phi + e^{i\theta(x)}\partial_\mu\phi + O'e^{i\theta(x)}\phi &= e^{i\theta(x)}\partial_\mu\phi + e^{i\theta(x)}O\phi \\ \implies e^{i\theta(x)}O'\phi &= e^{i\theta(x)}(O - i\partial_\mu\theta(x))\phi \\ \implies O' &= O - i\partial_\mu\theta(x). \end{aligned}$$

Esta relação acima é uma transformação de calibre do campo O . Utilizando a arbitrariedade de O , vamos substituí-lo por $-ieA_\mu$, onde e pode ser considerada uma constante de acoplamento, e O' por $-ieA'_\mu$ ficando com

$$A'_\mu = A_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu\theta(x).$$

Esta mudança que foi feita, adicionando um campo de calibre para que a Lagrangiana respeite a simetria, é chamado de acoplamento mínimo.

Podemos pensar em um campo no qual a derivada covariante seja nula, ou seja, um campo no qual a mudança de uma coordenada à outra, através do caminho $\Gamma(x, y)$, dependa apenas do campo de calibre. Esta configuração de campo é chamada de configuração geodésica ϕ_c , ou transporte paralelo, pois as propriedades do campo não mudam apenas ocorre uma translação de um ponto x para y . Para construir essa configuração começamos com:

$$\begin{aligned} D_\mu\phi_c &= (\partial_\mu - ieA_\mu)\phi_c = 0 \\ \implies \partial_\mu\phi_c &= ieA_\mu\phi_c \\ \implies \phi_c(x) &= \exp\left(ie\int_{\Gamma(x,y)} dz_\mu A^\mu(z)\right)\phi_c(y). \end{aligned}$$

Caso consideremos outro caminho Γ^+ fechado resultado da união de dois caminhos Γ_1^+ e Γ_2^- , que circula uma superfície Σ aberta, podemos utilizar o teorema de Stokes na integral,

$$\begin{aligned} \Delta\gamma &= e\int_{\Gamma_1^+} A_\mu dz^\mu - e\int_{\Gamma_2^-} A_\mu dz^\mu \\ &= e\oint_{\Gamma^+} A_\mu dz^\mu \\ &= e\int_{\Sigma} \epsilon_{\rho\sigma\mu\nu}\partial^\rho A^\sigma dS^{\mu\nu} \\ &= e\int_{\Sigma} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) dS^{\mu\nu} \equiv e\int_{\Sigma} F_{\mu\nu} dS^{\mu\nu}, \end{aligned} \tag{1.8}$$

onde $F^{\mu\nu}$ é o tensor de curvatura do campo de calibre definido segundo a definição 2. Este tensor pode ser interpretado como a "força" que o campo sente ao ser transportado na curva geodésica.

Definição 2 (*Tensor de Curvatura*). O tensor de curvatura, como o próprio nome já diz, é um tensor que define a curvatura de um conjunto em um espaço curvo. A equação que descreve o tensor é:

$$R_{\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma_\nu - \partial_\nu \Gamma_\mu + [\Gamma_\mu, \Gamma_\nu],$$

com Γ sendo, basicamente, o vetor de acoplamento mínimo do transporte paralelo, formalmente chamado de símbolo de Christoffel.

1.5 Invariância de Calibre Não Abelianas

Apesar de não ser dito explicitamente, nas seções anteriores os grupos de simetrias eram abelianos, ou seja, além de obedecer à definição de grupo, existia outra condição:

$$U_1 U_2 = U_2 U_1,$$

porém, agora trabalharemos com campos que não obedecem esta condição, os quais são chamados de campos não abelianos.

Consideremos o campo complexo $\phi(x)$, que obedece a Lagrangiana (1.7). Então impomos que esse campo respeite a seguinte simetria:

$$\phi'_a = U_{ab}(x) \phi^b(x),$$

onde $U_{ab}(x)$ é um elemento do grupo de Lie G , que é não abeliano. Assim como na seção anterior o primeiro termo da Lagrangiana não respeita a simetria global, portanto procuraremos a solução através da derivada covariante:

$$D_\mu = \hat{I} \partial_\mu - ig A_\mu(x),$$

sendo \hat{I} a matriz identidade $N \times N$, g uma constante de acoplamento e A_μ um tensor de calibre $N \times N$. E assim como feito anteriormente, precisamos descobrir a condição para a simetria:

$$\begin{aligned} D'_\mu \phi' &= U D_\mu \phi \\ \implies \hat{I} \partial_\mu (U \phi) - ig A'_\mu U \phi &= U \hat{I} \partial_\mu \phi - ig U A_\mu \phi \\ \implies \partial_\mu (U) \phi + U \partial_\mu (\phi) - ig A'_\mu U \phi &= U \partial_\mu (\phi) - ig U A_\mu \phi \\ \implies (\partial_\mu U - ig A'_\mu U) \phi &= -ig U A_\mu \phi \\ \implies A'_\mu U &= U A_\mu + \frac{1}{ig} \partial_\mu U. \end{aligned}$$

Como U faz parte de um grupo, umas das regras que ele tem que obedecer é que exista outro elemento U^{-1} tal que $UU^{-1} = \hat{I}$, portanto

$$\begin{aligned} A'_\mu &= UA_\mu U^{-1} - \frac{i}{g} \partial_\mu (U) U^{-1} \\ &= UA_\mu U^{-1} - \frac{i}{g} [\partial_\mu (UU^{-1}) - U \partial_\mu (U^{-1})] \\ A'_\mu(x) &= U(x)A_\mu(x)U^{-1}(x) + \frac{i}{g} U(x) \partial_\mu (U^{-1}(x)). \end{aligned} \quad (1.9)$$

Prosseguindo para a configuração geodésica, por meio de um caminho $\Gamma(x, y)$, nós primeiramente modificamos a equação diferencial para uma equação integral via uma parametrização $z_\mu(t) : [0, 1] \rightarrow \mathcal{M}$, onde \mathcal{M} é o espaço de Minkowski,

$$\begin{aligned} D_\mu \phi &= \partial_\mu \phi - ig A_\mu \phi \equiv 0 \\ \implies \partial_\mu \phi &= ig A_\mu \phi \\ \implies \int_{\Gamma(x,y)} \frac{\partial \phi}{\partial z^\mu} dz^\mu &= ig \int_{\Gamma(x,y)} A_\mu \phi dz^\mu \\ \implies \phi(y) &= \phi(x) + ig \int_0^1 A_\mu \phi \frac{dz^\mu}{dt} dt. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Definição 3 (*Contração*). Seja (X, d) um espaço métrico completo e x e y pertencem a este espaço. Então o mapa $T : X \rightarrow X$ é chamado de contração se $d(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, y)$, onde $\alpha \in (0, 1)$.

Teorema 2 (*Teorema do Ponto Fixo de Banach*). Seja (X, d) um espaço métrico completo e $T : X \rightarrow X$ uma contração. Então existe um único ponto \bar{x} tal que $T\bar{x} = \bar{x}$ se, e somente se, para todo x a sequência (Tx, T^2x, T^3x, \dots) converge para \bar{x} .

Demonstração. Veja (KREYSZIG, 1991) □

Para resolver esta equação integral podemos utilizar o Teorema do Ponto Fixo de Banach (Teorema 2). Portanto, considerando (1.10), como uma contração¹, temos que a

¹ Está afirmação será considerada verdadeira sem provar-lá, por ser irrelevante ao tema.

solução $\phi(y)$ é

$$\begin{aligned}
\phi(y) &= \phi(x) + ig \int_0^1 A_\mu \frac{dz^\mu}{dt} dt \phi + \\
&\dots + (ig)^n \int_0^1 dt_1 \dots \int_0^{t_{n-1}} dt_n \prod_{j=1}^n \left(A_{\mu_j} \frac{dz_{\mu_j}}{dt_j} \right) \phi + \dots \\
&= \phi(x) + ig \hat{P} \left(\int_0^1 A_\mu \frac{dz^\mu}{dt} dt \right) \phi + \frac{(ig)^n}{n!} \hat{P} \left(\int_0^1 A_\mu \frac{dz^\mu}{dt} dt \right)^n \phi + \dots \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ig)^n}{n!} \hat{P} \left(\int_0^1 A_\mu \frac{dz^\mu}{dt} dt \right)^n \phi(x) \\
&= \hat{P} \left(\exp \left(ig \int_0^1 A_\mu \frac{dz^\mu}{dt} dt \right) \right) \phi(x) \\
&= \hat{P} \left(\exp \left(ig \int_{\Gamma(x,y)} A_\mu dz^\mu \right) \right) \phi(x) \\
&= \hat{W} [x, y, \Gamma] \phi(x), \tag{1.11}
\end{aligned}$$

onde \hat{P} é o operador de ordenamento de caminho e $\hat{W} [x, y, \Gamma]$ é chamado de linha de Wilson.

Definição 4 (*Operador de Ordenamento*). Seja o conjunto de uma certa grandeza $o_i = \{o_0, o_1, \dots, o_n\}$ e um campo qualquer $\phi(o)$. O operador de ordenamento \hat{O} é definido como o operador que age em n campos ϕ , com grandezas o distintas. Ele age de tal forma que o campo com a grandeza $o_m = \max \{o_i\}$ apareça multiplicando primeiro, em seguida, o campo com $o_n = \max (\{o_i\} \setminus o_m)$ e assim por diante, até chegar ao campo com $o_l = \min \{o_i\}$.

Exemplo 1.5.1. Sejam os tempos t_0, t_1, t_2 , até t_n , com $t_0 < t_n < \dots < t_2 < t_1$. O operador de ordenamento temporal \hat{T} dos campos $\phi(t_0), \phi(t_1), \dots$ e $\phi(t_n)$ será:

$$\hat{T} (\phi(t_0), \phi(t_1), \phi(t_2), \dots, \phi(t_n)) = \phi(t_1) \phi(t_2) \dots \phi(t_n) \phi(t_0).$$

Caso tenhamos um caminho fechado $\Gamma(x, x)$ a linha de Wilson se torna o operador $\hat{W}[\Gamma(x, x)]$ e caso apliquemos o operador traço nele temos o chamado laço de Wilson:

$$\hat{W} := \text{tr} \hat{W}[\Gamma(x, x)] = \text{tr} \hat{P} \left[\exp \left(ig \oint_{\Gamma(x,x)} A_\mu dz^\mu \right) \right], \tag{1.12}$$

cuja importância será discutida no capítulo 4.

2 Integrais de Caminho

2.1 Quantização Canônica

Um dos principais problemas com o surgimento da física quântica era como quantizar as grandezas físicas claramente, pois, inicialmente, isso era feito intuitivamente. Porém, com o surgimento da mecânica quântica e posteriormente a teoria quântica de campos esse problema foi solucionado com a criação de um objeto matemático, o comutador, definido como:

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}, \quad (2.1)$$

onde \hat{A} e \hat{B} são operadores e esses objetos vem diretamente da teoria de grupos, porque eles também representam os operadores que definem a álgebra de Lie do respectivo grupo. E com essa definição foi postulado que a quantização canônica de duas grandezas físicas que formam um par canônico, definição 5, deve seguir a seguinte regra:

$$[\hat{A}, \hat{B}] = i\hbar \{a, b\}, \quad (2.2)$$

sendo $\{*, *\}$ chamado de parênteses de Poisson e a e b as grandezas clássicas que correspondem aos operadores quânticos. Esse postulado vale apenas para grandezas sem vínculos, aquelas que possuem vínculos devem ser quantizadas de formas diferentes, como veremos no capítulo 3.

Definição 5 (*Par Canônico*). Um par canônico é definido como o conjunto das duas grandezas $a_i(x)$ e $b_i(x)$, de n dimensões, que obedecem a seguinte relação:

$$\{a_i(x), b_j(x')\} = d\delta_{ij}\delta(x - x'),$$

onde d é um número utilizado para normalizar o sistema.

Assim como nas teorias clássicas, existem as grandezas pontuais, definidas em apenas um ponto do espaço em que se encontram, e as grandezas definidas em todo o espaço, estas são chamadas de campos. E para cada uma existe uma formulação diferente da Lagrangiana, resultando em teorias diferentes. A quantização para estes dois tipos de grandezas segue a mesma regra, da equação (2.2), porém os comutadores deverão ser definidos de forma diferente para cada tipo. Sendo que para grandezas pontuais, que se comportam como funções, a definição é:

$$\{a, b\} = \sum_i \frac{\partial a}{\partial x_i} \frac{\partial b}{\partial p_i} - \frac{\partial a}{\partial p_i} \frac{\partial b}{\partial x_i},$$

onde x é a posição e p é o momento. Já para os campos, que são funcionais, a definição é a seguinte:

$$\{a[\alpha, \beta], b[\alpha, \beta]\} = \int \frac{\delta a}{\delta \alpha_i(x)} \frac{\delta b}{\delta \beta_i(x)} - \frac{\delta a}{\delta \beta_i(x)} \frac{\delta b}{\delta \alpha_i(x)} d^3y$$

onde α e β são funções de \vec{x} e \vec{p} , definidas de tal forma que constituem um par canônico.

Ao estudar certas partículas quântica, é possível verificar que além de todas as características clássicas que elas carregam, ainda existe outro tipo de propriedade que surge apenas na quântica, o spin. As partículas, ou campo de partículas, que possuem spins são chamados de férmions, enquanto as que não possuem são chamados de bósons. E os postulados acima valem apenas para os bósons, para os férmions é necessário fazer uma mudança nos comutadores e parênteses de Poisson, tornando-os anticomutadores e antiparênteses, onde temos que:

$$\{a, b\}_+ = \sum_i \frac{\partial a}{\partial x_i} \frac{\partial b}{\partial p_i} + \frac{\partial a}{\partial p_i} \frac{\partial b}{\partial x_i},$$

é a definição do antiparêntese, e o anticomutador é definido assim:

$$[\hat{A}, \hat{B}]_+ = \hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}.$$

Portanto, feitas todas as ressalvas necessárias, vemos que o método de quantização é bastante direto, basta conhecer o par canônico a ser quantizado, resolvendo as equações de movimento, e então impor a equação (2.2).

2.1.1 Quantização do Campo Real Escalar

Façamos um exemplo, considere um campo real, escalar e bosônico, $\phi(x)$, que sofre a ação de um potencial quadrático, a Lagrangiana desse campo, com $\hbar = c = 1$, é definida como:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{m^2}{2} \phi^2,$$

e aplicando a equação de Euler-Lagrange, (1.1) nessa Lagrangiana, chegamos na chamada equação de Klein-Gordon¹ para o campo escalar real:

$$\begin{aligned} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi} - \partial_\mu \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu \phi} \right) &= 0 \\ \implies -m^2 \phi - \partial_\mu \partial^\mu \phi &= 0 \\ \implies (\square + m^2) \phi &= 0. \end{aligned} \tag{2.3}$$

¹ A equação de Klein-Gordon, no nosso desenvolvimento, será tratada como análoga à 2ª lei de Newton, sendo a equação resultante da aplicação da equação de Euler-Lagrange na Lagrangiana quando se estuda partículas, e a chamaremos de equação de Klein-Gordon (equação de KG) toda a equação resultante da aplicação da fórmula de Euler-Lagrange em \mathcal{L} .

Podemos resolver esta equação por meio de de uma transformada de Fourier, da seguinte maneira:

$$\phi(x) = \int f(\vec{p}, x_0) e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} \frac{d^3p}{(2\pi)^3},$$

aplicando a equação (2.3) neste resultado, obteremos as condições da função $f(\vec{p}, x_0)$, na forma de uma equação diferencial, como podemos ver a seguir:

$$\begin{aligned} (\square + m^2) \phi &= (\square + m^2) \int f(\vec{p}, x_0) e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} \frac{d^3p}{(2\pi)^3} = 0 \\ \implies \partial_0 \partial^0 f &= -|\vec{p}|^2 f - m^2 f \\ \implies f &= a^*(-\vec{p}) e^{i\omega x_0} + a(\vec{p}) e^{-i\omega x_0}, \quad \omega \equiv \sqrt{|\vec{p}|^2 + m^2} \\ \implies f &\equiv a^*(-\vec{p}, x_0) + a(\vec{p}, x_0). \end{aligned}$$

E assim obtemos uma fórmula para ϕ , baseada nas amplitudes da onda complexa. Por fim, calculamos o par canônico do campo, a chamada densidade de momento Π , usando a seguinte fórmula:

$$\Pi = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_0 \phi} = \partial^0 \phi,$$

e a partir de (2.1.1), fazendo a transformada de Legendre de $\partial_0 \phi \rightarrow \Pi$, chegamos no Hamiltoniano:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \Pi^2 - \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + \frac{m^2}{2} \phi, \quad (2.4)$$

O último passo a se fazer é quantizar o campo ϕ e Π , e para isso temos que definir um par canônico, para podermos calcular os parênteses de Poisson. Ao estudar o oscilador harmônico quântico, uma das formas de resolver esse problema é através dos operadores escada \hat{a} e \hat{a}^\dagger . Além de ser uma solução mais fácil para o problema, esses operadores também formam um par canônico. Portanto, uma tentativa que pode ser feita, é a de tratar as amplitudes da transformada de Fourier, como os operadores escada na teoria clássica e então quantizá-los para que se tornem de fato os operadores. Fazendo isso podemos calcular os parênteses de Poisson de ϕ com Π , da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \{\phi, \Pi\} &= \int \frac{\delta \phi}{\delta a(x)} \frac{\delta \Pi}{\delta a^*(x)} - \frac{\delta \Pi}{\delta a(x)} \frac{\delta \phi}{\delta a^*(x)} d^3y \\ &= \int \int e^{i\vec{p}\cdot\vec{y}} \delta^3(y-x) (i\omega e^{-i\vec{p}\cdot\vec{y}}) \delta^3(y-x') - \\ &\quad - (-i\omega e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}}) \delta^3(y-x') e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} \delta^3(y-x) \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{d^3p'}{(2\pi)^3} d^3y \\ &= i2\omega \delta^3(x-x'), \end{aligned}$$

ou seja, a solução para ϕ e Π não satisfaz a condição da definição 5. Sendo assim, precisamos fazer uma correção que será apenas dividir ambas as por $\sqrt{i2\omega}$, ficando com:

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \frac{1}{\sqrt{i2\omega}} \int a(\vec{p}, x_0) e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} + a^*(\vec{p}, x_0) e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} \frac{d^3p}{(2\pi)^3}, \\ \Pi(x) &= -\sqrt{\frac{i\omega}{2}} \int a(\vec{p}, x_0) e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} - a^*(\vec{p}, x_0) e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} \frac{d^3p}{(2\pi)^3}. \end{aligned}$$

Por fim podemos quantizar através da equação (2.2), apenas multiplicando os campos por \sqrt{i} , onde chegamos ao resultado:

$$\begin{aligned}\hat{\phi}(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \int \hat{a}(\vec{p}, x_0) e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} + \hat{a}^\dagger(\vec{p}, x_0) e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} \frac{d^3p}{(2\pi)^3} = \frac{1}{\sqrt{2\omega}} (\hat{a}(x) + \hat{a}^\dagger(x)), \\ \hat{\Pi}(x) &= -i\sqrt{\frac{\omega}{2}} \int \hat{a}(\vec{p}, x_0) e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} - \hat{a}^\dagger(\vec{p}, x_0) e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} \frac{d^3p}{(2\pi)^3} = -i\sqrt{\frac{\omega}{2}} (\hat{a}(x) - \hat{a}^\dagger(x)),\end{aligned}$$

que lembra bastante os resultados obtidos no oscilador harmônico. E para terminar o problema basta descobrir as fórmulas dos operadores escada, porém esse não é o nosso objetivo, portanto, não será feito.

2.2 Formulação das Integrais de Caminho

Segundo os postulados da mecânica quântica, uma função de onda passa de um estado para outro através dos propagadores, que são matrizes unitárias que pertencem ao grupo $SU(N)$, ou seja, podem ser vistas como rotações em uma dimensão. Definimos então um propagador quadridimensional $\hat{G}(x, x')$, que propaga uma função de onda do ponto \vec{x} para \vec{x}' e do tempo x_0 para x'_0 , da seguinte forma:

$$|\psi(x')\rangle = \hat{G}(x'; x) |\psi(x)\rangle,$$

podemos projetar o vetor $|\psi(x')\rangle$ para o espaço das funções fazendo o produto escalar com o vetor $\langle x|$, ficando com:

$$\langle x|\psi(x')\rangle \equiv \psi(x') = \int \hat{G}(x'; x) \psi(x) dx. \quad (2.5)$$

Porém, também temos que a função $\psi(x')$ pode ser entendida como a função $\psi(x)$ numa função delta, da seguinte forma:

$$\psi(x') = \int \psi(x) \delta(x - x') dx = \int \psi(x) \langle x'|x\rangle dx \quad (2.6)$$

portanto, comparando (2.5) com (2.6) podemos dizer que o propagador quadridimensional é igual a

$$\hat{G}(x'; x) = \langle x'|x\rangle, \quad (2.7)$$

e esta é uma definição geral para propagadores de uma grandeza qualquer, ϕ para outra ϕ' .

Uma forma de se calcular o propagador é o método da integral de caminho de Feynman. O primeiro passo para chegarmos a essa fórmula é a discretização do espaço-tempo, ou seja, de dividirmos a posição quadridimensional em $n + 1$ frações, que vão de $x \equiv x_0$ até $x' \equiv x_{n+1}$, com tamanhos iguais a um ϵ pequeno, portanto, o k -ésimo pedaço do espaço é $x_k = x_0 + k\epsilon$. E, assim como foi dito, o propagador pertence a um grupo,

sendo assim o produto de $\hat{G}(x_n, x_{n+1})$ com $\hat{G}(x_{n+1}, x_{n+2})$ é equivalente ao propagador de x_n até x_{n+2} , logo, a equação (2.7) pode ser reescrita como:

$$\hat{G}(x', x) = \int \langle x_{n+1}|x_n \rangle \cdots \langle x_1|x_0 \rangle dx_1 \cdots dx_n. \quad (2.8)$$

O grupo $SU(3+1)$, é o grupo das matrizes unitárias, de dimensão 4 e de determinante igual a um. Uma das representações desse grupo é feita por exponenciais, que carregam uma matriz \hat{O} , chamada de gerador do grupo. As propriedades dessa matriz \hat{O} , são: ela é hermitiana, sem traço e antissimétrica e ao ser aplicada em um vetor no espaço de Hilbert, retorna a grandeza clássica O . Portanto, podemos definir \hat{G} , como:

$$\begin{aligned} |x_j\rangle &= \hat{G}(x_j, x_{j-1}) |x_{j-1}\rangle \equiv \exp \left[-i(x_j - x_{j-1}) \hat{O} \right] |x_{j-1}\rangle = \exp \left(-i\epsilon \hat{O} \right) |x_{j-1}\rangle \\ \implies \langle x_j|x_{j-1}\rangle &= \langle x_j | \exp \left(-i\epsilon \hat{O} \right) |x_{j-1}\rangle = \exp \left(-i\epsilon O(x_j, x_{j-1}) \right) \langle x_j|x_{j-1}\rangle \end{aligned}$$

Utilizando a equação anterior com a propriedade da completude dos momentos lineares p_k , que seguem a mesma discretização do espaço, na equação (2.8), chegamos na equação a seguir:

$$\begin{aligned} \hat{G}(x', x) &= \int \langle x_{n+1}|p_{n+1}\rangle \langle p_{n+1} | \exp \left[-i(x_{n+1} - x_n) \hat{O} \right] |x_n\rangle \cdots \\ &\quad \cdots \langle p_1 | \exp \left[-i(x_1 - x_0) \hat{O} \right] |x_0\rangle \prod_{i=1}^n dx_i \prod_{j=1}^n \frac{dp_j}{2\pi} \\ &= \int \mathcal{D}x \mathcal{D}p \exp \left(\frac{i}{\hbar} x_{n+1} \cdot p_{n+1} \right) \exp \left(-i\epsilon O(x_n, p_{n+1}) \right) \langle p_{n+1}|x_n\rangle \cdots \\ &\quad \cdots \exp \left(\frac{i}{\hbar} x_1 \cdot p_1 \right) \exp \left(-i\epsilon O(x_0, p_1) \right) \langle p_1|x_0\rangle \\ &= \int \mathcal{D}x \mathcal{D}p \exp \left(\frac{i}{\hbar} x_{n+1} \cdot p_{n+1} \right) \exp \left(-i\epsilon O(x_n, p_{n+1}) \right) \exp \left(-\frac{i}{\hbar} x_n \cdot p_{n+1} \right) \cdots \\ &\quad \cdots \exp \left(\frac{i}{\hbar} x_1 \cdot p_1 \right) \exp \left(-i\epsilon O(x_0, p_1) \right) \exp \left(-\frac{i}{\hbar} x_0 \cdot p_1 \right) \\ &= \int \mathcal{D}x \mathcal{D}p \exp \left[\sum_{i=0}^n \frac{i}{\hbar} p_{i+1} \cdot (x_{i+1} - x_i) - i\epsilon O(x_i, p_{i+1}) \right], \end{aligned}$$

onde consideramos um novo tipo de integrando, definido para uma grandeza qualquer como: $\prod_{i=1}^{\infty} d\phi_i$. E também consideramos o produto escalar entre x e p como sendo o produto escalar quadridimensional. Agora podemos, finalmente, voltar à variável contínua do tempo, para isto basta tomar o limite com $\epsilon \rightarrow 0$, logo temos:

$$\begin{aligned} \hat{G}(x', x) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int \mathcal{D}x \mathcal{D}p \exp \left(\sum_{i=0}^n \frac{i}{\hbar} p_{i+1} \cdot \epsilon - i\epsilon O(x_i, p_{i+1}) \right) \\ &= \int \mathcal{D}x \mathcal{D}p \exp \left[\frac{i}{\hbar} \left(\int p_\mu dx^\mu - \int \hbar O(x, p) d^4x \right) \right]. \end{aligned}$$

Agora consideremos o gerador clássico do grupo como a densidade de Hamiltoniano dividido por \hbar , ficando com:

$$\begin{aligned}\hat{G}(x', x) &= \int \mathcal{D}x \mathcal{D}p \exp \left[\frac{i}{\hbar} \left(\int p_\mu dx^\mu - \int \mathcal{H} d^4x \right) \right] \\ &= \int \mathcal{D}x \mathcal{D}p \exp \left(\frac{i}{\hbar} \int p_\mu \dot{x}^\mu - H dt \right),\end{aligned}\quad (2.9)$$

e esta é a chamada integral de caminho de Feynman no espaço de fase. E para fazer a passagem para o espaço das configurações temos que considerar que o Hamiltoniano é quadrático no momento, ou seja:

$$H(x, p) = \frac{p^2}{2m} + V(x)$$

e com essa condição podemos resolver a exponencial a partir do lema A.0.4, considerando $A^{-1} = m$, $b = -\dot{x}_\mu$ e $c = 0$, temos:

$$\begin{aligned}\hat{G}(x', x) &= \int \mathcal{D}x \mathcal{D}p \exp \left(\frac{i}{\hbar} \int -\langle -\dot{x}, p \rangle - \frac{1}{2} \langle m^{-1} p, p \rangle dt \right) \exp \left(\frac{i}{\hbar} \int V(x) dt \right) \\ &= N \int \mathcal{D}x \exp \left(\frac{i}{\hbar} \int \frac{1}{2} \langle -\dot{x}, -m\dot{x} \rangle dt \right) \exp \left(\frac{i}{\hbar} \int V(x) dt \right) \\ &= N \int \mathcal{D}x \exp \left(\frac{i}{\hbar} \int \frac{m\dot{x}^2}{2} + V(x) dt \right)\end{aligned}\quad (2.10)$$

$$= N \int \mathcal{D}x \exp \left(\frac{i}{\hbar} S[x, \dot{x}] \right), \quad (2.11)$$

onde N é uma constante de normalização, e esta é a chamada integral de caminho de Feynman no espaço das configurações.

2.3 Funções de Partição e Propagadores

O método de integrais de caminho de Feynman para se chegar ao propagador de espaço-tempo é bastante útil, porém ele não é um modelo geral. A ideia é chegar a uma função que possa ser descrita em função de campos. Definimos então essa grandeza de forma análoga à (2.11), para um campo escalar ϕ :

$$Z[J] = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi \exp \left(\int \mathcal{L}[\phi, \partial_\mu \phi] + J\phi d^4x \right),$$

onde J é uma corrente do campo, como no teorema 1. Essa função é chamada função de partição, e ela pode ser relacionada com o valor esperado do vácuo na presença de corrente (veja (FRADKIN, 2021)) da seguinte forma:

$$Z[J] = {}_J \langle 0|0 \rangle_J.$$

Outro importante ponto da função de partição é que, através dela podemos calcular o propagador do campo $\phi(x)$ para $\phi(y)$, para verificar isso definimos o propagador de um campo qualquer como:

$$\langle 0 | \hat{T} [\phi(x_1) \cdots \phi(x_N)] | 0 \rangle \equiv \langle \phi(x_1) \cdots \phi(x_N) \rangle,$$

para \hat{T} sendo o operador de ordenamento temporal, pois a ordem de propagação deve seguir o princípio de causalidade. Portanto, é fácil ver que se fizermos a derivada variacional de Z em relação à J , N vezes teremos:

$$\frac{\delta^N Z[J]}{\delta J(x_1) \cdots J(x_N)} = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi \phi(x_1) \cdots \phi(x_N) \exp\left(\int \mathcal{L} + J\phi d^4x\right),$$

então fazendo $J = 0$ e normalizando podemos chegar ao propagador do campo ϕ :

$$\hat{G}(x_1, \dots, x_n) = \langle 0 | \hat{T} [\phi(x_1) \cdots \phi(x_N)] | 0 \rangle = \frac{1}{\langle 0 | 0 \rangle} \frac{\delta^N Z[J]}{\delta J[x_1] \cdots J[x_N]} \Big|_{J=0}, \quad (2.12)$$

o propagador também pode ser chamado de função de N pontos.

Por exemplo, calculemos o propagador para o campo real escalar, que foi quantizado na seção 2.1.1. Para isso começamos considerando que dessa vez o sistema possui corrente, portanto, a equação de KG, se torna:

$$(\square + m^2) \phi = J,$$

então, podemos substituir a relação na função de partição, obtendo:

$$\begin{aligned} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi &= \partial_\mu (\phi \partial_\mu \phi) - \phi \square \phi \\ \implies Z[J] &= \mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi \exp \left[\int \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - m^2 \phi^2) + J\phi d^4x \right] \\ \implies Z[J] &= \mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi \exp \left[- \int \frac{1}{2} \phi (\square + m^2) \phi - J\phi d^4x \right], \end{aligned}$$

onde foi considerado que $\int \partial_\mu (\phi \partial_\mu \phi) d^4x \rightarrow 0$, pois os termos de superfície se anulam no infinito. E para resolver podemos utilizar primeiro a equação (A.0.4) para o campo ϕ , para resolver remover a integral de caminho, e em seguida utilizar (A.0.2) generalizado para ϕ , para retirar o determinante, obtendo assim:

$$\begin{aligned} Z[J] &= \mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi \exp \left[- \frac{1}{2} \int \phi (\square + m^2) \phi d^4x \right] \times \\ &\quad \times \exp \left[\frac{1}{2} \int \int J(x) \langle x | (\square + m^2)^{-1} | y \rangle J(y) d^4y d^4x \right]. \end{aligned}$$

Vemos que o primeiro termo exponencial representa justamente a função de partição para $J = 0$. E o segundo termo, caso fosse aplicado a equação (2.12), com $N = 2$, veríamos que o termo $\langle x | \square - m^2^{-1} | y \rangle$, representa justamente o propagador e consideremos isso como uma regra que será utilizada mais adiante na seção 3.5.1.

Parte II

Quantização dos Campos de Calibre

3 Quantização dos Campos de Calibre

O eletromagnetismo é uma das principais teorias da física clássica, portanto, desde o surgimento da mecânica quântica houve interesse na sua quantização. No entanto, este processo se revela extremamente não trivial, pois o caráter relativístico dos campos \vec{E} e \vec{B} fazem com que o sistema tenha simetrias locais. Além disto, diferentemente da teoria clássica, ao quantizar é necessário um olhar aprofundado na fixação do calibre.

Neste capítulo veremos alguns métodos de quantização do campo eletromagnético e os problemas associados. Trataremos tanto quando o campo for abeliano e quando ele for não abeliano.

A principal dificuldade para esse procedimento é que esse tipo de campo possui vínculos, portanto, o processo de quantização tem que ser revisto. Existe uma teoria própria para isto, porém ela não será abordada diretamente, portanto, desenvolveremos outros métodos para chegar ao resultado desejado.

3.1 Eletromagnetismo Clássico

Antes de iniciarmos os métodos de quantização para o campo eletromagnético, veremos a formulação clássica desta teoria, em termos do formalismo lagrangiano para campos. Faremos isto partindo do conhecimento prévio da formulação padrão através das equações de Maxwell, e então chegar a uma Lagrangiana que descreva todo o sistema.

Iniciamos com as quatro equações de Maxwell no vácuo, onde consideraremos que elas são verdadeiras devido aos experimentos, portanto, elas, em unidades gaussianas, são:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{E} = 4\pi\rho & \implies \partial_i E_i = \frac{4\pi}{c} J^0; \\ \nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \implies \epsilon_{0ijk} \partial^j E_k = -\partial_0 B_i; \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 & \implies \partial_i B_i = 0; \\ \nabla \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} & \implies \epsilon^{0ijk} \partial_j B_k = \frac{4\pi}{c} J^i + \partial_0 E_i; \end{aligned}$$

onde no lado direito foi introduzido a notação relativística, sendo que as grandezas de dimensão três, ou seja, os campos elétrico e magnético, possuem apenas subíndices por serem apenas grandezas vetoriais¹.

Então agora substituiremos os vetores \vec{E} e \vec{B} , pelos potenciais dos campos, o motivo da troca é que o tratamento desta teoria se torna claramente mais simples se

¹ Esta escolha de notação foi tomada para ficar claro qual é a natureza de cada grandeza.

introduzirmos outro campo A_μ , que substituirá os campos \vec{E} e \vec{B} . Pois trocaremos uma teoria com dois campos inicialmente sem relação por apenas um. Outro ponto que será beneficiado por esta troca é a fixação dos calibres utilizados. As equações de transformação do campo eletromagnético nos potenciais são:

$$\begin{aligned}\vec{E} &= -\nabla\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} & \implies & E_i = \partial^i A^0 - \partial^0 A^i \\ \vec{B} &= \nabla \times \vec{A} & \implies & B_i = -\epsilon^{0ijk}\partial_j A_k.\end{aligned}$$

E substituindo os potenciais na primeira equação de Maxwell (Lei de Gauss) e considerando o tensor métrico como o tensor métrico de Minkowski, de tipo temporal, $g_{00}=1$, $g_{ii} = -1$ e $g_{\mu\nu} = 0$, se $\mu \neq \nu$, vamos obter a seguinte relação:

$$\begin{aligned}\partial_i (\partial^i A^0 - \partial^0 A^i) &= \frac{4\pi}{c} J^0 \\ \implies \partial_i \partial^i A^0 - \partial_i \partial^0 A^i + \partial_0 \partial^0 A^0 - \partial_0 \partial^0 A^0 &= \frac{4\pi}{c} J^0 \\ \implies \partial_i \partial^i A^0 + \partial_0 \partial^0 A^0 - \partial^0 (\partial_i A^i + \partial_0 A^0) &= \frac{4\pi}{c} J^0 \\ \implies \square A^0 - \partial^0 \partial_\mu A^\mu &= \frac{4\pi}{c} J^0.\end{aligned}\tag{3.1}$$

E agora substituindo na quarta equação (Lei de Ampère-Maxwell), obteremos:

$$\begin{aligned}\epsilon^{0ijk}\partial_j (-\epsilon_{0klm}\partial^l A^m) &= \frac{4\pi}{c} J^i + \partial_0 (\partial^i A^0 - \partial^0 A^i) \\ \implies (\delta_m^i \delta_l^j - \delta_l^i \delta_m^j) \partial_j \partial^l A^m &= -\frac{4\pi}{c} J^i + \partial_0 \partial^i A^0 - \partial_0 \partial^0 A^i \\ \implies \partial_j \partial^j A^i - \partial_j \partial^i A^j &= \frac{4\pi}{c} J^i - \partial^i \partial_0 A^0 - \partial_0 \partial^0 A^i \\ \implies \square A^i + \partial^i (\partial_\mu A^\mu) &= \frac{4\pi}{c} J^i.\end{aligned}\tag{3.2}$$

Então impondo o calibre de Lorenz, $\partial_\mu A^\mu = 0$, podemos unificar as equações (3.1) e (3.2) na seguinte equação de KG:

$$\square A_\mu = \frac{4\pi}{c} J_\mu.\tag{3.3}$$

O próximo passo para se chegar a uma Lagrangiana é tentar fazer uma reversão da equação de KG do campo eletromagnético através da equação de Euler-Lagrange. Fazendo isto temos:

$$\begin{aligned}\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta A_\mu} - \partial_\nu \left[\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_\nu A_\mu)} \right] &= \square A_\mu - \frac{4\pi}{c} J_\mu \\ \implies \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta A_\mu} + \frac{4\pi}{c} J_\mu &= \partial_\nu \left[\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_\nu A_\mu)} + \partial^\nu A_\mu \right].\end{aligned}$$

Como temos dependências diferentes nos dois lados, podemos dizer que ambas têm que se anular. A solução do lado esquerdo é simples, então começaremos com a solução do lado

direito:

$$\begin{aligned} \partial_\nu \left[\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\partial_\nu A_\mu)} + \partial^\nu A_\mu \right] &= 0 \\ \implies \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\partial_\nu A_\mu)} + \partial^\nu A_\mu &= K^{(1)} [\partial A] \\ \implies \mathcal{L}_{\partial A} &= K^{(2)} [\partial A] - \frac{(\partial_\nu A_\mu)^2}{2}, \end{aligned}$$

onde $K^{(1)}$ e $K^{(2)}$ são as soluções das equações diferenciais. Agora temos que encontrar $K^{(1)}$ e $K^{(2)}$, tal que eles respeitem as condições:

$$\begin{aligned} \partial_\nu K^{(1)} &= 0 \\ \frac{\delta K^{(2)}}{\delta (\partial_\nu A_\mu)} &= K^{(1)}. \end{aligned}$$

E uma possível solução para este problema é considerar $K^{(1)} = \partial^\mu A^\nu / 2$ e $K^{(2)} = \partial_\nu A_\mu \partial^\mu A^\nu / 2$, pois a primeira equação seria respeitada graças ao calibre de Lorenz, e a segunda também é visivelmente satisfeita com essa proposta². Portanto, a parte da Lagrangiana do campo eletromagnético que depende do campo $\partial_\nu A_\mu$ é:

$$\mathcal{L}_{\partial A} = \frac{1}{2} \partial_\nu A_\mu (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu).$$

Antes de partirmos para a outra dependência da Lagrangiana, adotemos a seguinte notação, utilizando o tensor de curvatura do campo eletromagnético, ou apenas tensor eletromagnético, $F_{\mu\nu}$, seguindo a definição 2. Onde ficamos com a equação:

$$\mathcal{L}_{\partial A} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (3.4)$$

Por fim, temos a parte da Lagrangiana que depende do campo A_μ e a solução para esta parte é simplesmente:

$$\mathcal{L}_A = -\frac{4\pi}{c} J_\mu A^\mu. \quad (3.5)$$

E unindo a equação (3.4) e (3.5), chegamos à Lagrangiana do campo eletromagnético com correntes externas:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{4\pi}{c} J_\mu A^\mu, \quad (3.6)$$

e existem também, outras formas de se alcançar esta equação, como, por exemplo, partindo da energia do sistema e depois voltar para a Lagrangiana usando uma transformada de Legendre.

² Esta conta será realizada em mais detalhes na seção seguinte.

Ainda podemos calcular o Hamiltoniano³ do campo para isto usamos a seguinte fórmula:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H} &= \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\partial_0 A_\mu)} \partial_0 A_\mu + \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + J_\mu A^\mu \\
&= -E_i \partial_0 A_i + \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + J_\mu A^\mu \\
&= (\partial^0 A^i)^2 - \partial^i A^0 \partial_0 A_i + \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + J_\mu A^\mu,
\end{aligned} \tag{3.7}$$

onde foram utilizadas as equações (3.9) e (3.10).

3.2 Quantização do Campo Eletromagnético Livre

Agora que sabemos como é feita a descrição do campo eletromagnético no formalismo Lagrangiano, podemos passar ao processo de quantização do campo. Porém, para fazer isso precisamos considerar o acoplamento mínimo, pois assim como vimos na seção 1.4, o campo eletromagnético surge como um efeito da simetria local do campo das partículas. Para evitar esse problema podemos considerar que não há nenhuma partícula, ou seja, vamos quantizar o campo eletromagnético no vácuo. Portanto, também não deve haver nenhuma corrente J^μ , logo a Lagrangiana do campo eletromagnético livre, para o sistema de unidades naturais ($c = \hbar = 1$), é:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \tag{3.8}$$

O próximo passo é calcular a densidade de momento canônico do campo. Para isto substituímos o valor de $F_{\mu\nu}$ na equação (3.8), dessa forma:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= -\frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu - \partial_\nu A_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial_\mu A_\nu \partial^\nu A^\mu + \partial_\nu A_\mu \partial^\nu A^\mu) \\
&= \frac{1}{2} (\partial_\nu A_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial_\nu A_\mu \partial^\nu A^\mu) \\
&= \frac{1}{2} \partial_\nu A_\mu (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) \\
&= \frac{1}{2} \partial_\nu A_\mu [g^{\mu\rho} \partial_\rho (g^{\nu\sigma} A_\sigma) - g^{\nu\rho} \partial_\rho (g^{\mu\sigma} A_\sigma)]
\end{aligned}$$

então calculando a derivada variacional da Lagrangiana em relação ao campo $\partial_\nu A_\mu$, temos:

$$\begin{aligned}
\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\nu A_\mu} &= \frac{1}{2} [g^{\mu\rho} \partial_\rho (g^{\nu\sigma} A_\sigma) - g^{\nu\rho} \partial_\rho (g^{\mu\sigma} A_\sigma)] + \frac{1}{2} g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} \delta_\rho^\nu \delta_\sigma^\mu \partial_\nu A_\mu - \\
&\quad - \frac{1}{2} g^{\nu\rho} g^{\mu\sigma} \delta_\rho^\nu \delta_\sigma^\mu \partial_\nu A_\mu \\
&= \frac{1}{2} \partial^\mu A^\nu - \frac{1}{2} \partial^\nu A^\mu + \frac{1}{2} \partial^\mu A^\nu - \frac{1}{2} \partial^\nu A^\mu \\
&= \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = F^{\mu\nu}.
\end{aligned}$$

³ Formalmente este não é o Hamiltoniano do sistema, pois, por definição, o Hamiltoniano deve depender do campo e do seu momento conjugado, sem dependência de nenhuma derivada.

Então, sabendo que Π^μ é a derivada variacional da Lagrangiana em função da velocidade do campo, ou seja, $\nu \equiv 0$, descobrimos o momento canônico do campo eletromagnético:

$$\Pi^\mu = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_0 A_\mu} = \partial^\mu A^0 - \partial^0 A^\mu$$

$$\Pi^0 = \partial^0 A^0 - \partial^0 A^0 = 0 \quad (3.9)$$

$$\Pi^i = \partial^i A^0 - \partial^0 A^i = -E_i. \quad (3.10)$$

portanto, A_i e $-E_i$ são pares canônicos e descobrimos que o campo eletromagnético faz o papel equivalente ao momento, informação que não é trivial a princípio. Portanto, a introdução do campo de potenciais nos ajuda a chegar a esta conclusão, confirmando a vantagem de utilizar essa mudança. E também temos que os parênteses de Poisson dos campos têm que seguir a relação:

$$\{A_i(x), E_j(x')\} = -\delta_{ij}\delta(x - x'). \quad (3.11)$$

E olhando o componente A_0 , vemos que ele não possui nenhum par canônico, logo ele é arbitrário, então a quantização do componente temporal do campo A^μ deve ser feita de forma diferente.

A partir de agora, existem diferentes formas de prosseguir para a quantização do campo. Uma delas é considerando o calibre de Coulomb, $\nabla \cdot \vec{A} = 0$, e $A_0 = 0$ e então resolvemos a equação de KG, respectiva, porém desta forma perderemos as relações de comutação, sendo base da quantização e também a covariância do campo, assim como será feito na seção 3.3. Outra forma de prosseguir é adicionando um termo multiplicador de Lagrange, este calibre, sob certa condição, é chamado de calibre de Feynman (Seção 3.4), porém a desvantagem deste método é que surgem estados com normas negativas, conhecidos como fantasmas.

Portanto, o problema dos métodos de quantização são as muitas consequências inesperadas, que precisam ser corrigidas no final. Existe outra forma de fazer esse processo, cujos passos são claros, as características dos campos são mantidos e ainda o método pode ser generalizado para campos não abelianos. Este método é chamado de quantização por integrais de caminho, que será o principal método desenvolvido na seção 3.5.

3.3 Quantização no Calibre de Coulomb

Partindo da ideia apresentada na seção anterior, seguiremos com a quantização do campo eletromagnético livre de cargas. Abordaremos este problema a partir do calibre de Coulomb⁴, pois essa é a forma mais simples e clara de quantização, porém é a que traz mais problemas.

⁴ Ao utilizar as condições $\nabla \cdot \vec{A} = 0$ e $A^0 = 0$ juntas, este calibre também é conhecido como calibre de radiação.

Partindo da Lagrangiana apresentada em (3.8) e utilizando (1.1) chegamos à equação de KG do campo eletromagnético,

$$\square A_i = 0, \quad (3.12)$$

no qual o calibre de radiação já foi considerado. Para resolver a equação fazemos uma transformada de Fourier, da seguinte forma:

$$\vec{A}(x) = \int \vec{A}(\vec{p}, x_0) \exp(i\vec{p} \cdot \vec{x}) \frac{d^3p}{2p_0(2\pi)^3}, \quad (3.13)$$

que combinando com (3.12), obtemos as condições para a consistência da expansão e resolução do problema. Então fazendo isto chegamos a equação:

$$\begin{aligned} \square \vec{A}(x) &= \int \partial_0^2 [\vec{A}(\vec{p}, x_0)] \exp(i\vec{p} \cdot \vec{x}) - (i\vec{p})^2 \vec{A}(\vec{p}, x_0) \exp(i\vec{p} \cdot \vec{x}) \frac{d^3p}{2p_0(2\pi)^3} \\ &= \int [\partial_0^2 \vec{A}(\vec{p}, x_0) + |\vec{p}|^2 \vec{A}(\vec{p}, x_0)] \exp(i\vec{p} \cdot \vec{x}) \frac{d^3p}{2p_0(2\pi)^3} = 0. \end{aligned}$$

Como \vec{p} é arbitrário, a única forma da última equação ser nula é se o termo nos colchetes o for. Sendo assim temos a equação parcial de segunda ordem:

$$\frac{\partial^2}{\partial x_0^2} \vec{A}(\vec{p}, x_0) = -p_0^2 \vec{A}(\vec{p}, x_0),$$

para $p_0 = |\vec{p}|$. A solução desta equação é dada por

$$\vec{A}(\vec{p}, x_0) = \vec{A}(p) \exp(ip_0 x_0) + \vec{A}^*(p) \exp(-ip_0 x_0). \quad (3.14)$$

Antes de substituirmos o resultado anterior em (3.13), temos que recordar uma das restrições do problema, o calibre de Coulomb. Para isto fazemos com que as amplitudes $\vec{A}(\vec{p})$ obtidas em (3.14), sejam combinações lineares de vetores unitários $\vec{\epsilon}^{(\lambda)}$,

$$\vec{A}(\vec{p}) = \sum_{\lambda=1}^2 \vec{\epsilon}^{(\lambda)} a^{(\lambda)}(\vec{p}), \quad (3.15)$$

que são chamados de vetores de polarização. Esta solução remete às polarizações obtidas na teoria clássica do eletromagnetismo, por esse motivo são utilizadas apenas duas. Por fim, substituindo (3.14) e (3.15) em (3.13), obtemos a seguinte equação:

$$\vec{A}(x) = \int \sum_{\lambda=1}^2 \vec{\epsilon}^{(\lambda)} \left[\exp(ip_\mu x^\mu) a^{(\lambda)}(p) + \exp(-ip_\mu x^\mu) a^{*(\lambda)}(p) \right] \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2p_0}, \quad (3.16)$$

e aplicando a condição, do calibre de Coulomb na equação anterior, chegamos as seguintes condições para o vetor de polarização:

$$\begin{aligned} \vec{\epsilon}^{(\lambda)} \cdot \vec{\epsilon}^{(\lambda')} &= \delta_{\lambda\lambda'}, \\ \vec{p} \cdot \vec{\epsilon}^{(\lambda)} &= 0, \\ p^2 &= 0. \end{aligned}$$

Por fim a passagem para a quantização, será feita utilizando a técnica apresentada na seção 2.1. Onde, primeiramente, a condição da equação (2.2) é imposta sobre os operadores \hat{A}_i e $\hat{\Pi}_j$,

$$[\hat{A}_i(\vec{x}), \hat{\Pi}_j(\vec{x}')] = i \{A_i(\vec{x}), \Pi_j(\vec{x}')\}$$

e em seguida, substituímos as amplitudes da expansão de Fourier, $a^{(\lambda)}(\vec{p})$ e $a^{*(\lambda)}(\vec{p})$, pelos operadores escada $\hat{a}^{(\lambda)}(\vec{p})$ e $\hat{a}^{\dagger(\lambda)}(\vec{p})$, respectivamente. Estes operadores, como de costume, devem atender as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned} [\hat{a}^{(\lambda)}(\vec{p}), \hat{a}^{\dagger(\lambda')}(\vec{p}')] &= 2p_0(2\pi)^3 \delta(\vec{p} - \vec{p}'), \\ [\hat{a}^{(\lambda)}(\vec{p}), \hat{a}^{(\lambda')}(\vec{p}')] &= [a^{\dagger(\lambda)}(\vec{p}), \hat{a}^{\dagger(\lambda')}(\vec{p}')] = 0. \end{aligned}$$

Porém, ao calcularmos o comutador entre A_i e Π_j o resultado é diferente do que se espera, pois a equação (3.11) não é satisfeita. Portanto, os comutadores entre ele também não terão os valores esperados. Sendo assim temos que introduzir uma correção para consertar esse problema, é isto será feito modificando o operador δ_{ij} e o substituindo por Δ_{ij} , onde ficamos com:

$$\begin{aligned} \Delta_{ij} &= \delta_{ij} - \frac{\partial_i \partial_j}{\nabla^2}, \\ [\vec{A}_i(\vec{x}), \Pi_j(\vec{x}')] &= i \left(\delta_{ij} - \frac{\partial_i \partial_j}{\nabla^2} \right) \delta(\vec{x} - \vec{x}'), \end{aligned}$$

onde $1/\nabla^2$ é o inverso do operador laplaciano.

Portanto, o problema das relações de comutação deste método de quantização fica claro agora, porém ainda existem outros problemas. O principal dentre eles é que o campo A^μ não respeita a transformação de Lorenz, a princípio, e essa condição deve ser retomada após o cálculo dos estados. Outro problema é que esse método não pode ser generalizado para campos não abelianos, pois como veremos, o calibre de Coulomb não pode ser definido globalmente nesse caso.

3.4 Quantização no Calibre de Feynman

O principal problema da quantização do campo eletromagnético é que o componente A_0 não possui um par canônico definido. Portanto, podemos dizer que o campo eletromagnético tem uma restrição, ou seja, um vínculo. Então a quantização, chamada de quantização de Gupta-Bleuler, deve ser feita com a Lagrangiana com um multiplicador de Lagrange, descrito pela seguinte equação:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{\lambda}{2} (\partial_\mu A^\mu)^2. \quad (3.17)$$

Então calculando a equação de KG para essa Lagrangiana, chegamos à:

$$\begin{aligned} \partial^\mu \partial_\nu A^\nu - \partial_\nu \partial^\nu A^\mu - \lambda \partial^\mu \partial_\nu A^\nu &= 0 \\ \implies \square A^\mu - (1 - \lambda) \partial^\mu \partial_\nu A^\nu &= 0, \end{aligned}$$

e caso λ seja igual a um, recuperamos a equação (3.3) sem correntes. Quando fazemos essa escolha chamamos de calibre de Feynman, porém isso é um abuso de nomenclatura, pois não é de fato um calibre, apenas uma escolha. E resolvendo a equação de KG, pelo método da transformada de Fourier, chegamos ao seguinte valor do campo:

$$A_\mu = \int \sum_{\lambda=0}^3 \epsilon_\mu^{(\lambda)} \left[e^{ip_\mu x^\mu} a^{(\lambda)} + e^{-ip_\mu x^\mu} a^{*(\lambda)} \right] \frac{d^3 p}{2p_0 (2\pi)^3},$$

que é semelhante à equação (3.16), porém consideramos que os vetores de polarização, agora, têm quatro direções de polarização. Então passando para os operadores quânticos, as amplitudes da transformada de Fourier $A_\mu(p) = \epsilon_\mu^{(\lambda)} a^{(\lambda)}$ e $A_\mu^*(p) = \epsilon_\mu^{(\lambda)} a^{*(\lambda)}$, se tornam $\hat{a}(p)$ e $\hat{a}^\dagger(p)$, respectivamente.

Calculemos o estado de um fóton, ou seja, $|1\rangle$, que pode ser obtido apenas aplicando o operador \hat{a}^\dagger no estado de vácuo $|0\rangle$. Sendo assim obtemos que:

$$\begin{aligned} |1\rangle &= \hat{a}^\dagger(x) |0\rangle = \int f(p) \hat{a}(p) |0\rangle \frac{d^3 p}{2p_0 (2\pi)^3} \\ \implies |1\rangle &= \int f(p) \epsilon^{(\lambda)} \hat{a}^{\dagger(\lambda)}(p) |0\rangle \frac{d^3 p}{2p_0 (2\pi)^3} \\ \implies \langle 1|1\rangle &= \int f(p) f^*(p') \langle 0| \epsilon^{(\lambda')} \hat{a}_\rho(p') \epsilon^{(\lambda)} \hat{a}^{\dagger(\lambda)}(p) |0\rangle \frac{d^3 p}{2p_0 (2\pi)^3} \frac{d^3 p'}{2p_0 (2\pi)^3}, \end{aligned} \quad (3.18)$$

onde $f(p)$ é uma função que serve para a normalização do produto escala da última linha.

Como $\epsilon^{(\lambda)}$ é um vetor unitário que indica a direção da polarização, o produto $\epsilon^{(\lambda)} \epsilon^{(\lambda')} = g^{\lambda\lambda'}$, onde $g^{\lambda\lambda'}$. Então temos que o comutador de $\hat{a}^{(\lambda)}$ com $\hat{a}^{(\lambda')}$, é igual à:

$$\left[\hat{a}^{(\lambda)}(p), \hat{a}^{\dagger(\lambda')}(p') \right] = -g^{\lambda\rho} 2p_0 (2\pi)^3 \delta(p - p'), \quad (3.19)$$

e então substituindo na equação (3.18), vamos chegar na relação:

$$\begin{aligned} \langle 1|1\rangle &= \int f(p) f^*(p') \langle 0| \epsilon^{(\lambda')} \hat{a}_\rho(p') \epsilon^{(\lambda)} \hat{a}^{\dagger(\lambda)}(p) |0\rangle \frac{d^3 p}{2p_0 (2\pi)^3} \frac{d^3 p'}{2p_0 (2\pi)^3} \\ &= \int f(p) f^*(p') \langle 0| \left[\hat{a}^{(\lambda)}(p), \hat{a}^{\dagger(\lambda')}(p') \right] + \hat{a}^{\dagger(\lambda')}(p') \hat{a}^{(\lambda)}(p) |0\rangle \frac{d^3 p}{2p_0 (2\pi)^3} \frac{d^3 p'}{2p_0 (2\pi)^3} \\ &= - \int |f(p)|^2 g^{\lambda\lambda} \frac{d^3 p}{2p_0 (2\pi)^3}, \end{aligned}$$

ou seja, para o termo temporal da diagonal do tensor métrico, a norma será negativa e devido à interpretação probabilística da mecânica quântica, esse estado não deve existir.

Para resolver esse problema temos que fixar o calibre, que intuitivamente poderia ser os já citados calibre de radiação e o calibre de Lorenz, porém ambos nos levariam ao problema da seção anterior. Então vamos separar o campo em dois, um com frequências positivas, $\hat{A}_\mu^{(+)}$, e outro com frequências negativas, $\hat{A}_\mu^{(-)}$, e fixar o calibre como:

$$\partial^\mu \hat{A}_\mu^{(+)} |\psi\rangle = 0,$$

chamado de condição de Gupta-Bleuler, e essa condição implica que:

$$\begin{aligned} \partial^\mu \hat{A}_\mu^{(+)} &= ip^\mu e^{ip_\mu x^\mu} \epsilon_\mu^{(\lambda)} \hat{a}^{(\lambda)} \\ \implies \partial^\mu \hat{A}_\mu^{(+)} |\psi\rangle &= ip^\mu e^{ip_\mu x^\mu} \epsilon_\mu^{(\lambda)} \hat{a}^{(\lambda)} |\psi\rangle = 0 \\ \implies p^\mu \epsilon_\mu^{(\lambda)} \hat{a}^{(\lambda)} |\psi\rangle &= 0. \end{aligned}$$

Utilizando que \vec{p} indica a direção da frente de onda, temos que $\epsilon_\mu^{(1)} p^\mu = \epsilon_\mu^{(2)} p^\mu = 0$, já que as direções 1 e 2 são as direções transversais. E sabendo que p^μ é arbitrário chegamos à conclusão que:

$$\begin{aligned} (p^\mu \epsilon_\mu^{(0)} \hat{a}^{(0)} - p^\mu \epsilon_\mu^{(3)} \hat{a}^{(3)}) |\psi\rangle &= 0 \\ \implies (g_{0\mu} \hat{a}^{(0)} - g_{3\mu} \hat{a}^{(3)}) |\psi\rangle &= 0 \\ \implies (\hat{a}^{(0)} + \hat{a}^{(3)}) \psi &= 0. \end{aligned}$$

portanto, os operadores escada para as direções 0 e 3 devem se anular, resolvendo o problema da norma negativa.

Como pudemos ver, o método de quantização de Gupta-Bleuler, ou quantização no calibre de Feynman, leva a uma solução parecida com a da quantização no calibre de Coulomb e resolve o problema das relações de comutação. Porém, nesse caso surgem estados não físicos e foi necessário fazer uma restrição não trivial, para corrigi-la. Além disso, esse método não pode ser replicado para campos não abelianos.

3.5 Quantização de Campos de Calibre por Integrais de Caminho

Olhando a sequência de métodos de quantização apresentados anteriormente, fica claro que quantizar o campo eletromagnético não é um problema trivial. E os métodos utilizados geram problemas graves, que precisam ser corrigidos de formas improvisadas. A conclusão que se tem é que os vínculos presentes não permitem que a quantização canônica seja realizada da forma normal. Sendo assim, o novo método adotado para a quantização deve apresentar as seguintes características: manter a invariância de calibre e a invariância de Lorentz; o campo deve respeitar as relações de comutação; e o método pode ser generalizado para campos não abelianos. E o método a ser utilizado será o chamado quantização por integrais de caminho, como o método pode ser generalizado, o campo A^μ será um campo de calibre qualquer.

Iniciamos observando o operador \hat{J}_0 , pois ele gera transformações de calibre infinitesimais e independentes do tempo, no campo \hat{A}_j (FRADKIN, 2021). Portanto, temos uma simetria, então utilizando a liberdade dela impomos uma restrição nos estados que o operador age. Esta restrição será a seguinte:

$$\hat{J}_0 |\text{Fis}\rangle = \nabla \cdot \hat{E} |\text{Fis}\rangle, \quad (3.20)$$

onde $|\text{Fis}\rangle$ são os estados que obedecem esta restrição, com isso o espaço de Hilbert é reduzido. Outra restrição que será imposta é que o campo $A_0 = 0$, ou seja, $-E_i$ fará o papel do momento da componente espacial do campo de potencial.

Então utilizando o Hamiltoniano 3.7, com $J_\mu = 0$, construímos a função de partição, com a sua fórmula proveniente da termodinâmica:

$$Z[J] = \text{tr} \left(\hat{T} e^{-i \int \hat{H} dx_0} \prod_{\vec{x}} \delta \left(\partial_i \hat{E}_i(\vec{x}) - \hat{J}_0(\vec{x}) \right) \right),$$

para \hat{T} sendo o operador de ordenamento temporal, definição 4, e o termo no delta de Dirac sendo justamente a restrição que foi imposta em (3.20), pois somente os estados $|\{A_i(x)\}\rangle$ que obedecerem à igualdade serão computados. E assim como foi feito para as integrais de caminho na seção 2.2, o tempo será discretizado em N intervalos de tamanho Δx_0 , ficando com

$$Z[J] = \prod_{k=1}^N \int \mathcal{D} \langle \{A_j(\vec{x}, x_0^k)\} | (1 - i\Delta x_0 \hat{H}) \times \\ \times \prod_{\vec{x}} \delta \left(\partial_i \hat{E}_i(\vec{x}, x_0^k) - \hat{J}_0(\vec{x}, x_0^k) \right) | \{A_j(\vec{x}, x_0^k)\} \rangle A_j(\vec{x}, x_0^k).$$

Substituindo delta por sua forma exponencial, resolvendo a equação resultante e por fim tornando o tempo contínuo novamente (veja (FRADKIN, 2021) para este passo a passo), chegamos na seguinte função de partição:

$$Z[J] = \int \mathcal{D} A_\mu \exp \left[i \int dx^4 \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + J_\mu A^\mu \right) \right], \quad (3.21)$$

note que a função na exponencial é justamente a ação do sistema, assim como já era esperado. Por isto este método de quantização é tão geral, pois se utiliza da soma de todas as histórias do campo de calibre A^μ , com a ação da teoria fazendo uma forma de peso na função. Porém, justamente, pela soma ser sobre todas as configurações do campo, haverá uma divergência nessa integral, pois para cada campo que representa um estado físico, serão somados outros infinitos campos, obtidos por meio de transformações de calibre e que também representam o mesmo estado físico. Sendo assim, outra restrição deve ser feita, a de que cada campo que se diferencie apenas por uma transformação de calibre local, seja contado apenas uma vez.

Definição 6 (*Relação de Equivalência*). Seja um conjunto $R \subset A \times A$, qualquer, ele é uma relação de equivalência se corresponde às condições:

1. $(x, x) \in R, \forall x \in A$;
2. $(x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R, \forall x \text{ e } y \in A$;
3. $(x, y) \text{ e } (y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R, \forall x, y \text{ e } z \in A$.

Definição 7 (*Classe de Equivalência*). Uma classe de equivalência é definida como $[x] := \{\forall y \in A | (x, y) \in R\}$, onde R é uma relação de equivalência.

A maneira de garantir essa condição é, fazendo com que as transformações de calibre sejam consideradas uma relação de equivalência, logo todos os campos que, sob a ação da transformação, resultam no mesmo estado físico, formam uma classe de equivalência. E se cada classe for contada apenas uma vez, a divergência em Z não ocorrerá mais.

Para construir a restrição definida anteriormente será utilizada a função δ com alguma condição. Inicialmente, a definição de calibre do campo abeliano, de forma geral, é dada pela equação:

$$g[A_\mu] = c(x),$$

onde $c(x)$ é uma função arbitrária, então essa será a condição que vai no delta de Dirac. Continuando, a função $\Delta_g[A_\mu]$ é introduzida, sendo ela inversível, e a sua inversa é definida como:

$$\Delta_g^{-1}[A_\mu] = \int \mathcal{D}U \delta(g[A_\mu^U] - c(x)), \quad (3.22)$$

onde A_μ^U é o campo que sofreu uma transformação de calibre pelo grupo U , que por enquanto é arbitrário, assim como na equação (1.9), porém com constante de acoplamento igual à 1. Substituindo o produto de $\Delta_g \Delta_g^{-1} = 1$ em (3.21), é obtido

$$\begin{aligned} Z[J] &= \int \mathcal{D}A_\mu \Delta_g[A_\mu] \Delta_g^{-1}[A_\mu] e^{iS[A, J]} \\ &= \int \mathcal{D}A_\mu \Delta_g[A_\mu] \int \mathcal{D}U \delta(g[A_\mu^U] - c(x)) e^{iS[A, J]} \end{aligned} \quad (3.23)$$

O próximo passo é provar que Δ_g^{-1} é invariante sobre uma transformação $A_\mu \rightarrow A_\mu^{U'}$, onde U' é um elemento do mesmo grupo de U

$$\begin{aligned} \Delta_g^{-1}[A_\mu^{U'}] &= \int \mathcal{D}U g[A_\mu^{U'U}] \\ &= \int \mathcal{D}U'' g[A_\mu^{U''}], \quad U'' \equiv U'U \\ \Delta_g^{-1}[A_\mu^{U'}] &= \Delta_g^{-1}[A_\mu] \end{aligned}$$

para o qual foi considerado $\mathcal{D}U'' = \mathcal{D}U$. Sendo assim, a mesma transformação é feita para a integral da equação (3.23), e utilizando a invariância de S , de $\Delta_g[A_\mu]$ e de $\mathcal{D}A_\mu$ para

chegar a equação

$$\begin{aligned} Z[J] &= \int \mathcal{D}U \int \mathcal{D}A_\mu^{U'} \Delta_g [A_\mu^{U'}] \delta(g [A_\mu^{U'U}] - c(x)) e^{iS[A^{U'}, J]} \\ &= \int \mathcal{D}U \int \mathcal{D}A_\mu \Delta_g [A_\mu] \delta(g [A_\mu^{U'U}] - c(x)) e^{iS[A, J]} \end{aligned}$$

veja que a ordem de integração foi alterada, pois $A_\mu^{U'}$ não depende de U , pois até então U' é arbitrário. Então escolhendo $U' = U^{-1}$,⁵ o termo $\delta(g [A_\mu^{U'U}] - c(x))$ se torna apenas $\delta(g [A_\mu] - c(x))$. Sendo assim nenhum termo depende de mais de U , logo a integral sobre $\mathcal{D}U$ se torna uma constante.

Para remover a função delta, podemos utilizar a equação (A.0.2), com $A = i\hat{I}/\alpha$, sendo α constante, e com $x = c(x)$. Sendo assim aplicando isso em na última equação, temos:

$$\begin{aligned} & \int \mathcal{D}c \exp\left(-\frac{1}{2} \int c(x) \frac{i\hat{I}}{\alpha} c(x) d^4x\right) \left(\det\left(\frac{i\hat{I}}{\alpha}\right)\right)^{\frac{1}{2}} = 1 \\ \implies & \mathcal{N} \int \mathcal{D}c \exp\left(-\frac{i}{2\alpha} \int c(x)^2 d^4x\right) = 1 \\ \implies & Z_\alpha[J] = \mathcal{N} \int \mathcal{D}A_\mu \int \mathcal{D}c \exp\left(-\frac{i}{2\alpha} \int c(x)^2 d^4x\right) \Delta_g [A_\mu] \delta(g [A_\mu] - c(x)) e^{iS[A, J]} \\ \implies & Z_\alpha[J] = \mathcal{N} \int \mathcal{D}A_\mu \Delta_g [A_\mu] \exp\left(-\frac{i}{2\alpha} \int g [A_\mu]^2 d^4x + i \int \mathcal{L} d^4x\right) \\ \implies & Z_\alpha[J] = \mathcal{N} \int \mathcal{D}A_\mu \Delta_g [A_\mu] \exp\left[i \int d^4x (\mathcal{L}_\alpha + \mathcal{L})\right] \\ \implies & Z_\alpha[J] = \mathcal{N} \int \mathcal{D}A_\mu \Delta_g [A_\mu] e^{iS_\alpha[A, J]}, \end{aligned}$$

onde S_α é a ação com um vínculo, que depende do multiplicador de Lagrange α e do calibre do campo e não depende da função $c(x)$. O que torna este resultado ótimo, pois agora temos uma ação generalizada. Note que, impondo $g [A_\mu] = \partial_\mu A^\mu$, ou seja, o calibre de Lorenz, a Lagrangiana (3.17) é recuperada.

Retornando, agora, à equação (3.22), é possível fazer uma mudança de variável de U para g , utilizando o jacobiano para funcionais, portanto, temos que

$$\begin{aligned} \Delta_g^{-1} [A_\mu] &= \int \mathcal{D}g \det \left| \frac{\delta U}{\delta g} \right| \delta(g - c(x)) \\ \implies \Delta_g^{-1} [A_\mu] &= \det \left| \frac{\delta U}{\delta g} \right|_{g=c(x)} \\ \implies \Delta_g [A_\mu] &= \det \left| \frac{\delta g}{\delta U} \right|_{g=c(x)}, \end{aligned} \tag{3.24}$$

onde o último termo é chamado de determinante de Fadeev-Popov. Existem diversas formas de calcular o determinante de um operador, sendo definido como:

$$\det \hat{O} := \{\det \hat{O} = \prod_n \lambda_n, \forall \lambda_n | \hat{O}\psi(x) = \lambda_n \psi(x)\}.$$

⁵ Esta escolha é possível devido a uma das propriedades dos grupos, que diz que, para todo elemento a que pertence ao grupo existe outro a^{-1} , tal que $aa^{-1} = a^{-1}a = 1$.

Entretanto, nos casos abordados a seguir, o valor deste determinante não será diretamente calculado, pois serão utilizadas outras técnicas para continuar os problemas.

Após estes desenvolvimentos, chegamos a uma função de partição que pode ser obtida conhecendo o seu grupo de transformação e o calibre do campo. E isto é justamente o objetivo procurado ao quantizar através do método de integrais de caminho.

3.5.1 Campos Abelianos

Até então tudo o que foi desenvolvido é geral para todo campo, seja ele abeliano ou não. Porém, a partir de agora o cálculo servirá apenas para o campo eletromagnético, pois a transformação U será fixada como o grupo de rotações $U(1)$, tal qual foi feito na seção 1.4, ou seja, $U(x) = e^{i\phi(x)}$, que aplicando a transformação de A_μ para A_μ^U , retorna à equação (1.4). Também será fixada a transformação de calibre para este campo, que será o calibre de Lorenz, $g[A_\mu] = \partial_\mu A^\mu$ e por fim $c(x) = 0$. Logo o determinante de Fadeev-Popov para esta transformação é:

$$\begin{aligned}
\Delta_g[A_\mu] &= \det \left| \frac{\delta [\partial_\mu (A^\mu(x) + \partial^\mu \phi(x))]}{\delta [e^{i\phi(y)}]} \right|_{g=0} \\
&= \det \left| \frac{1}{ie^{i\phi(y)}} \frac{\delta [\partial_\mu A^\mu(x) + \square \phi(x)]}{\delta \phi(y)} \right| \\
&= \det \left| \frac{1}{ie^{i\phi(y)}} \right| \left| \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} (\partial_\mu A^\mu(x) + \square (\phi(x) + \epsilon \delta(x-y)) - \partial_\mu A^\mu(x) - \square \phi(x)) \right|_{g=0} \\
&= \det \left| \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \epsilon \square \delta(x-y) \right|_{g=0} \\
&= \det [\square] \equiv \det [\partial^2],
\end{aligned}$$

note que o determinante de Fadeev-Popov não depende do campo, neste caso. O valor de $\det [\partial^2]$ não será calculado explicitamente, assim como foi mencionado a pouco. Por fim temos a função de partição para o campo eletromagnético com o calibre de Lorenz sendo igual à:

$$Z[J] = \mathcal{N} \det [\partial^2] \int \mathcal{D}A_\mu e^{iS_\alpha[A,J]}, \quad (3.25)$$

onde a Lagrangiana é definida como:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_\alpha &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + J_\mu A^\mu - \frac{1}{2\alpha}\partial_\mu A^\mu\partial_\nu A^\nu \\
&= \frac{1}{2}\left(\partial_\nu A_\mu\partial^\mu A^\nu - \partial_\mu A_\nu\partial^\mu A^\nu - \frac{1}{\alpha}\partial_\mu A^\mu\partial_\nu A^\nu\right) + J_\mu A^\mu \\
&= \frac{1}{2}\left(\partial_\nu A_\mu\partial^\mu - \partial_\mu A_\nu\partial^\mu - \frac{1}{\alpha}\partial_\mu A^\mu\partial_\nu\right)A^\nu + J_\mu A^\mu \\
&= \frac{1}{2}\left(\partial^\nu A_\mu\partial^\mu - \partial^\mu A^\nu\partial_\mu - \frac{1}{\alpha}\partial^\mu A_\mu\partial^\nu\right)A_\nu + J_\mu A^\mu \\
&= \frac{1}{2}\left[\partial^\nu(A_\mu\partial^\mu) - A_\mu\partial^\nu\partial^\mu - \partial^\mu(A^\nu\partial_\mu) + \right. \\
&\quad \left. + A^\nu\partial^\mu\partial_\mu - \frac{1}{\alpha}(\partial^\mu(A_\mu\partial^\nu) - A_\mu\partial^\mu\partial^\nu)\right]A_\nu + J_\mu A^\mu \\
&= \frac{1}{2}\left[A^\nu\Box A_\nu + \frac{1}{\alpha}(\partial^\nu(\alpha A_\mu\partial^\mu A_\nu) - \partial^\mu(\alpha A^\nu\partial_\mu A_\nu) - \partial^\mu(A_\mu\partial^\nu A_\nu) + \right. \\
&\quad \left. + \alpha A^\mu\partial^\nu(\partial_\mu A_\nu) - A_\mu\partial^\mu(\partial^\nu A_\nu))\right] + J_\mu A^\mu \\
&= \frac{1}{2}A_\mu\left(g^{\mu\nu}\Box + \frac{\alpha\partial^\nu\partial^\mu - \partial^\mu\partial^\nu}{\alpha}\right)A_\nu + \\
&\quad + \frac{1}{2\alpha}[\partial^\nu(\alpha A_\mu(\partial^\mu A_\nu - \partial_\nu A^\mu) - A_\nu\partial^\mu A_\mu)] + J_\mu A^\mu \\
&= \frac{1}{2}A_\mu\eta_{(1)}^{\mu\nu}A_\nu + \frac{1}{2\alpha}\eta_{(2)} + J_\mu A^\mu,
\end{aligned}$$

onde $\eta_{(1)}^{\mu\nu}$ é o primeiro termo entre parênteses $\eta_{(2)}$ é o termo entre colchetes. E então substituindo este resultado na equação (3.25) e utilizando a fórmula (A.0.4), com $A = -i\eta_{(1)}^{\mu\nu}$ e $B = -iJ_\mu$, temos:

$$\begin{aligned}
Z[J] &= \mathcal{N} \det[\partial^2] \exp\left[-\frac{i}{2}\langle J_\mu | (\eta_{(1)}^{\mu\nu})^{-1} | J_\nu \rangle\right] \det[-i\eta_{(1)}^{\mu\nu}]^{-\frac{1}{2}} \times \\
&\quad \times \int \mathcal{D}A_\mu \exp\left(\frac{i}{2\alpha} \int \eta_{(2)} d^4x\right).
\end{aligned}$$

E para $\eta_{(2)}$, é esperado que A_μ decaia para 0 no infinito, por tanto a integral de $\eta_{(2)}$ também será 0 e sua exponencial será igual à 1. Então substituindo o valor de $\eta_{(1)}^{\mu\nu}$ na expressão acima é possível descobrir o propagador do campo eletromagnético $G^{\mu\nu}$, colocando o elemento de matriz da exponencial na sua forma integral:

$$\begin{aligned}
Z[J] &= \mathcal{N} \det[\partial^2] \exp\left[\frac{i}{2} \int d^4x \int d^4y J_\mu(Y) G^{\mu\nu} J_\nu(x)\right] \det[-i\eta_{(1)}^{\mu\nu}]^{-\frac{1}{2}} \\
\Rightarrow G^{\mu\nu}(x-y) &= -\langle x | \left(g^{\mu\nu}\Box + \frac{\alpha-1}{\alpha}\partial^\mu\partial^\nu\right)^{-1} | y \rangle.
\end{aligned}$$

Então agora temos o chamado propagador de Feynman. Por ser um propagador ele deve obedecer à equação da função de Green:

$$-\left(g^{\mu\nu}\Box + \frac{\alpha-1}{\alpha}\partial^\mu\partial^\nu\right)G_{\nu\lambda}(x-y) = g_\lambda^\mu\delta(x-y). \quad (3.26)$$

Fazendo uma transformada de Fourier, temos:

$$G_{\nu\lambda}(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \tilde{G}_{\nu\lambda}(p) e^{-ip(x-y)},$$

e substituindo em (3.26), obtemos a seguinte relação

$$\begin{aligned} \left(g^{\mu\nu} p^2 - \frac{\alpha-1}{\alpha} p^\mu p^\nu \right) \tilde{G}_{\mu\lambda} &= g_\lambda^\mu \\ \Rightarrow \tilde{G}^{\mu\nu}(p) &= \frac{1}{p^2} \left[g^{\mu\nu} + (\alpha-1) \frac{p^\mu p^\nu}{p^2} \right] \end{aligned}$$

que é o propagador de Feynman no espaço dos momentos, para um α qualquer. Caso utilizemos o calibre de Feynman, ou seja, $\alpha = 1$, ficamos apenas com a expressão:

$$\tilde{G}^{\mu\nu}(p) = \frac{g^{\mu\nu}}{p^2}.$$

E caso façamos $\alpha \rightarrow 0$ voltaremos ao calibre de Lorenz, e obteremos a expressão

$$\tilde{G}^{\mu\nu}(p) = \frac{1}{p^2} \left[g^{\mu\nu} - \frac{p^\mu p^\nu}{p^2} \right].$$

Então verificamos que o propagador do campo eletromagnético depende diretamente da escolha do calibre.

3.5.2 Campos Não Abelianos

Para fazer a quantização de campos não abelianos, é preciso apenas calcular o determinante de Fadeev-Popov, pois o caráter geral do desenvolvimento feito até então permite que prossigamos a partir da função de partição:

$$Z[J] = \int \mathcal{D}A_\mu^a \Delta_g [A_\mu^a] e^{iS[A,J]}, \quad (3.27)$$

note que o campo A_μ está dividido em componentes, pois, agora, ele é descrito como $A_\mu = A_\mu^a \lambda_a$. E também a ação não é mais a mesma da apresentada anteriormente, pois a Lagrangiana para este tipo de campo muda, porém o termo \mathcal{L}_α se mantém o mesmo. Além disto a constante de normalização provinda da medida $\mathcal{D}U$, não está presente, isto ocorre, pois a medida $\mathcal{D}A_\mu$ será definida, de tal forma que cancele esse termo. Por fim, o calibre do campo será definido como:

$$g [A_\mu^a] \equiv \partial^\mu A_\mu^a = c^a(x)$$

A transformação de calibre do campo seguirá a fórmula (1.9), para o grupo U definido como:

$$\begin{aligned}
U_{ab}(x) &= \exp\left(i\lambda_k \epsilon^k(x)\right)_{ab} \approx \delta_{ab} + i\lambda_{ab}^k \epsilon_k(x) + \dots \\
\implies \left(A_\mu^U\right)^k(\lambda_k)_{ad} &= U_{ab} A_\mu^j \lambda_j^{bc} U_{cd}^{-1} - i\partial_\mu U_{ab} g^{bc} U_{cd}^{-1} \\
\implies A_\mu^k(\lambda_k)_{ad} + \delta A_\mu^k(\lambda_k)_{ad} &= \left(\delta_{ab} + i\lambda_{ab}^i \epsilon_i\right) A_\mu^j \lambda_j^{bc} \left(\delta_{cd} - i\lambda_{cd}^k \epsilon_k\right) - \\
&\quad - i\partial_\mu \left(\delta_{ab} + i\lambda_{ab}^i \epsilon_i\right) g^{bc} \left(\delta_{cd} - i\lambda_{cd}^j \epsilon_j\right) + O(\epsilon^2) \\
\implies A_\mu^k(\lambda_k)_{ad} + \delta A_\mu^k(\lambda_k)_{ad} &= A_\mu^j(\lambda_j)_{ad} + i\lambda_{ab}^i \epsilon_i A_\mu^j(\lambda_j)_d^b - iA_\mu^j(\lambda_j)_a^c \lambda_{cd}^k \epsilon_k + \\
&\quad + \lambda_{ab}^i \epsilon_i A_\mu^j \lambda_j^{bc} \lambda_{cd}^k \epsilon_k + \lambda_{ab}^i \partial_\mu \epsilon_i \left(\delta_d^b - i(\lambda^j)_d^b \epsilon_j\right) + O(\epsilon^2) \\
\implies A_\mu^k(\lambda_k)_{ad} + \delta A_\mu^k(\lambda_k)_{ad} &= A_\mu^k(\lambda_k)_{ad} + i\epsilon^i [\lambda_i, \lambda_j]_{ad} A_\mu^j + \lambda_{ad}^i \partial_\mu \epsilon_i - i\lambda_{ab}^i (\lambda^j)_d^b \epsilon_j \partial_\mu \epsilon_i + O(\epsilon^2) \\
\implies \delta A_\mu^k(\lambda_k)_{ad} &= i\epsilon^i \left(i f_{ijk} \lambda^k\right)_{ad} A_\mu^j + \lambda_{ad}^i \partial_\mu \epsilon_i + O(\epsilon^2) \\
\implies \delta A_\mu^k(\lambda_k)_{ad} \left((\lambda^k)^{ad}\right)^\dagger &= -\epsilon_i f^{ijk} \lambda_k^{ad} \left((\lambda^k)^{ad}\right)^\dagger (A_\mu)_j + \lambda_i^{ad} \left((\lambda^k)^{ad}\right)^\dagger \partial_\mu \epsilon^i + O(\epsilon^2) \\
\implies \delta A_\mu^k &= -f_{ij}^k \epsilon^i A_\mu^j + \partial_\mu \epsilon^i \delta_i^k + O(\epsilon^2) \\
\implies \delta A_\mu^k &\approx -f_{ij}^k \epsilon^i A_\mu^j + \partial_\mu \epsilon^k.
\end{aligned}$$

A partir deste valor é possível calcular o determinante de Fadeev-Popov utilizando a equação (3.24), junto da regra da cadeia para funcionais:

$$\begin{aligned}
\Delta_g[A_\mu] &= \det \left| \frac{\delta g}{\delta U} \right| = \det \left| \frac{\delta g}{\delta \epsilon} \right| = \det \left| \frac{\delta g^a}{\delta A_\mu^c} \frac{\delta A_\mu^c}{\delta \epsilon_b} \right| \\
&= \det \left(\left| \partial^\mu \delta_c^a \delta(x-z) \right| \left| -f_{ij}^c \delta^{ib} A_\mu^j + \partial_\mu \delta^{cb} \delta(z-y) \right| \right) \\
&= \det \left[\partial^\mu \left(-f_j^{ab} A_\mu^j + \partial_\mu \delta^{bc} \right) \right] \\
&= \det \left(\partial^\mu D_\mu^{ab}[A] \right), \quad D_\mu^{ab} \equiv -f_j^{ab} A_\mu^j + \delta^{ab} \partial_\mu.
\end{aligned}$$

Note que neste caso o determinante depende do campo, então para não precisarmos calculá-lo explicitamente, podemos utilizar a fórmula (A.0.5), e assim introduzir os campos η_a e $\bar{\eta}_a$ chamados de campos fantasmas. Estes campos não podem gerar estados físicos, devido a não obedecerem às condições de causalidade e unitariedade. Utilizando, temos:

$$\Delta_g[A_\mu] = \int \mathcal{D}\eta_a \mathcal{D}\bar{\eta}_a \exp \left(\int d^4x \bar{\eta}_a(x) \partial^\mu D_\mu^{ab}[A] \eta_b(x) \right).$$

Por fim substituindo esta equação em (3.27), obtemos a função de partição para um campo não abeliano com uma Lagrangiana qualquer. O resultado da substituição é

$$Z[J] = \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\eta \mathcal{D}\bar{\eta} \exp \left(i \int d^4x \mathcal{L}[A, J] + \mathcal{L}_\alpha[A] + \mathcal{L}_G[\eta, \bar{\eta}] \right), \quad (3.28)$$

sendo \mathcal{L} a Lagrangiana original, \mathcal{L}_α um termo ocasionado pelo calibre do campo e \mathcal{L}_G é o termo gerado pelos campos fantasmas que surgem com a teoria, a soma dos termos será

chamada de Lagrangiana efetiva \mathcal{L}_e . Um exemplo de Lagrangiana efetiva é a chamada Lagrangiana de Yang-Mills, sendo definida como:

$$\mathcal{L}_{YM} = -\frac{1}{4g^2} \text{tr}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) + J_\mu A^\mu + \frac{\lambda}{2g^2} (\partial_\mu A^\mu)^2 - \bar{\eta} \partial^\mu D_\mu[A] \eta, \quad (3.29)$$

onde g é uma constante de acoplamento e α é substituído por $g^2\lambda^{-1}$.

Parte III

Cromodinâmica Quântica e Teoria Quântica de Laços

4 Cromodinâmica Quântica e Teoria Quântica de Laços

A partir de agora, de fato trabalharemos com a Cromodinâmica Quântica, ou seja, estudaremos o comportamento dos quarks. Para isto definimos a Lagrangiana para o campo de espinores ψ_α^i , que representam os quarks. O índice α do campo representa as direções dos spins destes quarks, que vão até 4. E o índice i representa a cor do campo, lembrando que o campo de cores possui três cores, verde, vermelha e azul, logo $i = 1, 2$ e 3 . A Lagrangiana, seguindo a formulação feita por Dirac, é:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}_\alpha^i (i\cancel{D} - m) \psi_\alpha^i,$$

porém, impondo a invariância de calibre sob transformações locais, assim como nas seções 1.4 e 1.5, o operador derivada parcial se torna o operador derivada covariante, sendo assim a equação se torna:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}_\alpha^i (iD - m) \psi_\alpha^i.$$

Além deste pedaço, a Lagrangiana total também possui uma parte do campo de calibre, que é diferente caso o campo seja abeliano ou não.

4.1 Laço de Wilson

Devido às dificuldades de que na CDQ não é possível trabalhar com teorias perturbativas com baixas energias, temos que impor alguma restrição para podermos desenvolver uma teoria não perturbativa. E esta restrição é que os quarks não possuam dinâmica, ou em outras palavras, que a massa $m \rightarrow \infty$. Esta restrição faz com que passemos ao regime chamado de configuração geodésica do campo assim como na seção 1.5. Portanto, temos que operador que propaga o campo de um ponto x para um ponto y , através de um caminho Γ é a chamada linha de Wilson (1.11). O próximo passo é verificar como a linha de Wilson modifica sob as transformações de calibre do campo A_μ , então temos que considerar os casos em que o campo A_μ é abeliano e quando não é.

4.1.1 Caso Abeliano

Então para o campo abeliano, a transformação de calibre do campo A_μ segue a equação (1.4), portanto, temos claramente que:

$$\delta A_\mu = \partial_\mu \theta,$$

com a constante de acoplamento $e = 1$. E substituindo em (1.11), obtemos as seguintes relações:

$$\begin{aligned}
\hat{W}^U[x, y, \Gamma] &= \hat{P} \exp \left(i \int_{\Gamma(x,y)} A_\mu^U(z) dz^\mu \right) \\
&= \hat{P} \exp \left(i \int_{\Gamma(x,y)} A_\mu(z) + \partial_\mu \theta(z) dz^\mu \right) \\
&= \hat{P} \exp \left(i \int_{\Gamma(x,y)} A_\mu(z) dz^\mu + i\theta(y) - i\theta(x) \right) \\
&= \hat{P} \left[e^{i\theta(y)} \exp \left(i \int_{\Gamma(x,y)} A_\mu(z) dz^\mu \right) e^{-i\theta(x)} \right] \\
&= e^{i\theta(y)} \hat{P} \exp \left(i \int_{\Gamma(x,y)} A_\mu(z) dz^\mu \right) e^{-i\theta(x)} \\
&= e^{i\theta(y)} \hat{W}[x, y, \Gamma] e^{-i\theta(x)}.
\end{aligned}$$

Portanto, aplicando em um campo $\psi^U(x) = e^{i\theta(x)}\psi(x)$, podemos verificar como o transporte paralelo se comporta quando fazemos a transformação de calibre, fazendo isto obtemos:

$$\begin{aligned}
\psi^U(y) &= \hat{W}^U[x, y, \Gamma] \psi^U(x) \\
&= e^{i\theta(y)} \hat{W}[x, y, \Gamma] e^{-i\theta(x)} e^{i\theta(x)} \psi(x) \\
&= e^{i\theta(y)} \hat{W}[x, y, \Gamma] \psi(x) \\
&= e^{i\theta(y)} \psi(y).
\end{aligned}$$

Por fim verificamos que caso o caminho Γ seja um caminho fechado $\Gamma(x, x)$, a linha de Wilson se torna uma invariante, logo podemos dizer que ele é um observável físico e segue a equação (1.8).

4.1.2 Caso Não Abelianiano

Assim como no caso abeliano, começamos definindo a transformação de calibre do campo A_μ , como sendo igual à fórmula (1.9), com $g = 1$. Em seguida aplicamos esta transformação na linha de Wilson, e obtemos a seguinte fórmula:

$$\begin{aligned}
\hat{W}^U[x, y, \Gamma] &= \hat{P} \exp \left(i \int_{\Gamma(x,y)} A_\mu^U(z) dz^\mu \right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_n \exp \left[i A_\mu^U(z_n^\mu - z_{n+1}^\mu) \right] \\
&= \prod_z \left(\hat{I} + i A_\mu^U dz^\mu + \mathcal{O}(2) \right) \\
&= \prod_z \left[\hat{I} + i e^{i\epsilon(z)} A_\mu e^{-i\epsilon(z)} dz^\mu + i e^{i\epsilon(z)} \partial_\mu \left(e^{-i\epsilon(z)} \right) dz^\mu + \mathcal{O}(2) \right].
\end{aligned}$$

Expandindo as exponenciais de $\epsilon(z)$, obteremos:

$$\begin{aligned}
\hat{W}^U[x, y, \Gamma] &= \prod_z \left[\hat{I} + i \left(\hat{I} + i\epsilon(z) \right) A_\mu dz^\mu \left(\hat{I} - i\epsilon(z) \right) + \right. \\
&\quad \left. + i \left(\hat{I} + i\epsilon(z) \right) \left(-i\partial_\mu \epsilon(z) - \epsilon(z)\partial_\mu \epsilon(z) \right) dz^\mu + \mathcal{O}(2) \right] \\
&= \prod_z \left[\hat{I} + iA_\mu dz^\mu - \epsilon(z)A_\mu dz^\mu + A_\mu dz^\mu \epsilon(z) + \partial_\mu \epsilon(z) dz^\mu + \mathcal{O}(2) \right] \\
&= \prod_z \left[\hat{I} + iA_\mu dz^\mu - \epsilon(z)A_\mu dz^\mu + A_\mu dz^\mu \epsilon(z) + \epsilon(z + dz) - \epsilon(z) + \mathcal{O}(2) \right] \\
&= \prod_z \left[\left(\hat{I} + i\epsilon(z + dz) \right) \left(\hat{I} + iA_\mu dz^\mu \right) \left(\hat{I} - i\epsilon(z) \right) + \mathcal{O}(2) \right].
\end{aligned}$$

Tomando o limite novamente e desconsiderando os termos de segunda ordem, voltamos a equação:

$$\hat{W}^U[x, y, \Gamma] = e^{i\epsilon(y)} \hat{W}[x, y, \Gamma] e^{-i\epsilon(x)}.$$

Portanto, obtemos a mesma fórmula do caso abeliano, porém como não podemos trocar a ordem, fica claro que, caso o caminho Γ seja fechado, a linha de Wilson não será invariante. Porém, caso utilizemos o laço de Wilson, descrito pela equação (1.12), a menos de uma constante de normalização, que quando introduzimos obtemos a seguinte fórmula

$$\hat{W} = \frac{1}{N} \text{tr} \hat{W}[x, x, \Gamma] = \frac{1}{N} \text{tr} \left[\hat{P} \exp \left(i \oint_{\Gamma(x,x)} A_\mu(z) dz^\mu \right) \right].$$

Aplicando o teorema de Stokes na integral da equação anterior, podemos chegar a uma relação, será obtido uma equação igual à (1.8). Portanto, a dependência do laço será apenas sobre o tensor de curvatura do campo, e expandindo a exponencial, é obtido:

$$\hat{W} = \frac{1}{N} \text{tr} \left[\hat{I} + i \int_{\Sigma} F_{\mu\nu} dS^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \hat{P} \left(\int_{\Sigma} F_{\mu\nu} dS^{\mu\nu} \right)^2 + \mathcal{O}(3) \right].$$

E caso o caminho Γ forme um quadrado de tamanho a , tal que $F_{\mu\nu}$ seja constante dentro desta área. Temos então que o termo de ordem um será nulo, devido ao tensor $F_{\mu\nu}$ ter diagonal nula. E os termos que restam são:

$$\hat{W} = 1 - \frac{a^4}{2N} \text{tr} (F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) + \mathcal{O}(a^6),$$

ou seja, recuperamos o termo da Lagrangiana do campo de calibre, a menos das ordens superiores e das constantes. E esta é uma das vantagens o laço de Wilson, a de que temos toda a informação da teoria pura, ou seja, sem perturbações, somente com a sua expansão.

4.1.3 Potencial Quark-Antiquark

Considere a seguinte configuração, um quark e um antiquark com massa infinita, formando uma corrente $j_\mu = e\delta(x_\mu - s_\mu)$, onde s_μ é o conjunto de pontos que determina a localização das partículas. Suponha também que o caminho Γ forme um quadrado de

lado R na sua parte espacial e lado T em sua parte temporal, com $T \rightarrow \infty$. Sendo assim, é esperado que o campo não dependa do tempo, pois, não há dinâmica no sistema. Logo calculando o valor esperado no vácuo, temos a equação:

$$\langle 0 | \hat{W} | 0 \rangle \equiv \langle \hat{W} \rangle_0 \propto e^{T \int A_i dz^i},$$

note que, a integral pode ser vista como a fórmula de uma diferença de potencial do um campo A_i , definido como:

$$\begin{aligned} V(R) &= - \int A_i dz^i \\ \implies \langle \hat{W} \rangle_0 &\propto e^{-TV(R)}, \end{aligned} \quad (4.1)$$

portanto, conhecendo o potencial entre o quark e o antiquark é possível calcular o valor esperado do vácuo para o laço de Wilson.

Caso 1 (Lei da Área). Consideremos V como sendo da ordem de σR , onde σ é chamado de tensão de corda da CDQ, e também que R seja grande, porém ainda pequeno comparado com T . Neste caso, a teoria de calibre será uma teoria de confinamento, pois o potencial ser linear na distância, implica que a energia necessária para separar o quark e o antiquark crescerá infinitamente, ou seja, eles não podem ser separados, logo estarão confinados. E substituindo o potencial na fórmula (4.1), temos:

$$\langle \hat{W} \rangle_0 \propto e^{-\sigma TR} = e^{-\sigma A},$$

onde A é a área do caminho Γ , e por este motivo que chamamos esta equação de lei da área.

Caso 2 (Lei do Perímetro). Agora considere um potencial constante $V = \mu$, e também que R é muito grande, de tal forma que $\exp(-R) \simeq 1$. Para este caso, é possível separar o quark do antiquark. Além disto, ao substituir o potencial em (4.1), devido à consideração da exponencial de R , temos também que, $\exp(-\mu R) \simeq 1$, então, podemos multiplicá-lo no resultado, obtendo:

$$\langle \hat{W} \rangle_0 \propto e^{-\mu T} \simeq e^{-\mu(T+R)} = e^{-\mu L},$$

sendo L o perímetro do caminho Γ , e isto que dá o nome a esta lei.

Lema 4.1.1. O valor esperado de N operadores, \hat{O}_1, \dots e \hat{O}_N , invariantes sob transformações de calibre, é:

$$\langle \hat{O}_1 \dots \hat{O}_N \rangle = \langle \hat{O}_1 \rangle \dots \langle \hat{O}_N \rangle + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N^2}\right)$$

Demonstração. Veja (MAKEENKO, 2002). □

Utilizando o lema 4.1.1, para $N \rightarrow \infty$, temos que o valor esperado se distribui, como se os operadores fossem números. Portanto, se tivermos um contorno fechado \mathcal{C}

qualquer, podemos dividi-lo em N pequenos caminhos quadrados Γ , assim nos casos feitos anteriormente, e ao tomarmos o limite de $N \rightarrow \infty$ preencheremos todo o contorno. Esse processo é análogo ao feito na definição da integral de Riemann. E isto permite que os resultados alcançados nos casos 1 e 2, sejam estendidos a qualquer contorno.

4.2 Equação do Laço de Makeenko–Migdal

Após vermos algumas propriedades do laço de Wilson, vamos introduzi-lo à teoria. Para isto temos que modificar a função de partição (3.28), para podermos descrever um sistema com o laço de Wilson e então obter a equação do laço de Makeenko-Migdal.

O primeiro passo é introduzir um campo chamado de campo mestre, $\Phi[A]$. E este campo irá ser introduzido na função de partição, substituindo a dependência por A_μ^a . Portanto, precisamos calcular o determinante do Jacobiano desse campo em relação à A_μ^a . E impomos a seguinte condição, que o determinante do Jacobiano do campo mestre seja uma exponencial do próprio Jacobiano. Sendo assim, a equação e torna:

$$\det \left| \frac{\delta \Phi}{\delta A_\mu^a} \right| = e^{-N^2 \hat{d}[\Phi, A]}, \quad (4.2)$$

onde N^2 é uma constante de normalização. É fácil verificar que, uma opção para ser o campo mestre, é o laço de Wilson, pois ele segue as seguintes definições:

$$\begin{aligned} \Phi[A] &= \hat{W} \\ \implies \frac{\delta \Phi[A]}{\delta A_\mu^a(y)} &= \hat{W} \oint \delta(x - y) \lambda_a d^\mu y. \end{aligned}$$

Porém, ainda consideraremos o campo mestre como uma função desconhecida, cuja única restrição é a equação (4.2). E substituindo na função de partição (3.28), com o calibre de Lorenz, ou seja, com $\lambda \rightarrow 0$, temos:

$$\begin{aligned} Z &\sim \int \mathcal{D}A_\mu^a \exp(iS_e[A, J]) \\ \implies Z &\sim \int \mathcal{D}\Phi \det \left| \frac{\delta \Phi}{\delta A_\mu^a} \right|^{-1} e^{-N^2 S_e[\Phi]} \\ \implies Z &\sim \int \mathcal{D}\Phi e^{-N^2 (S_e[\Phi] - \hat{d}[\Phi, A])}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Então o ponto de sela dessa função de partição não será mais nulo como no caso clássico,

na verdade, o seu valor será:

$$\begin{aligned}
& \frac{\delta Z}{\delta \Phi} = 0 \\
\Rightarrow & \frac{\delta S_e}{\delta \Phi} = \frac{\delta \hat{d}[\Phi, A]}{\delta \Phi} \\
\Rightarrow & \frac{\delta S_e}{\delta A_\mu^a} \frac{\delta A_\mu^a}{\delta \Phi} = \frac{\delta \hat{d}[\Phi, A]}{\delta A_\mu^a} \frac{\delta A_\mu^a}{\delta \Phi} \\
\Rightarrow & \partial_\nu \left[\frac{\delta S_e}{\delta (\partial_\nu A_\mu^a)} \right] = \frac{\delta \hat{d}[\Phi, A]}{\delta A_\mu^a} \\
\Rightarrow & \partial_\nu F_a^{\mu\nu} + [A_\nu^a, F_a^{\mu\nu}] = \frac{\delta \hat{d}[\Phi, A]}{\delta A_\mu^a}, \tag{4.4}
\end{aligned}$$

que é a chamada equação do campo mestre. Graças à função de partição \hat{Z} , temos que os propagadores dos observáveis quânticos, podem ser descritos através do valor esperado dos laços de Wilson, em processo semelhante ao feito para os campos escalar e eletromagnético.

Logo, para determinar os propagadores temos que saber como calcular o valor esperado do laço de Wilson e as equações de Makeenko-Migdal, tornam isso possível. Antes de prosseguirmos para a sua formulação, voltemos a analisar a função de partição (4.3), da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\hat{Z} & \sim \int \mathcal{D}\Phi F[\Phi] e^{-N^2 S_e[\Phi]}, \quad F[\Phi] \equiv \det \left| \frac{\delta \Phi}{\delta A_\mu^a} \right|^{-1} \\
\Rightarrow \delta \hat{Z} & = \frac{\delta F[\Phi]}{\delta \Phi} e^{-N^2 S_e[\Phi]} - N^2 e^{-N^2 S_e[\Phi]} F[\Phi] \frac{\delta S_e[\Phi]}{\delta \Phi} = 0 \\
\Rightarrow \frac{\delta F[A]}{\delta A_\mu^a} & - N^2 F[A] \frac{\delta S_e[A]}{\delta A_\mu^a} = 0.
\end{aligned}$$

Todavia, o funcional F até então é completamente arbitrário, porque o laço de Wilson é apenas uma opção, mas ainda não o definimos de maneira única, logo chegamos à seguinte equação:

$$\frac{\delta S_e[A]}{\delta A_\mu^a} = \frac{1}{N^2} \frac{\delta}{\delta A_\mu^a}$$

E caso apliquemos, em ambos os lados dessa equação, a linha de Wilson com um caminho Γ fechado, $\hat{W}[x, x, \Gamma] \equiv \hat{W}[\Gamma]$, obtemos:

$$\nabla_\nu^a F_a^{\mu\nu} \hat{W}[\Gamma] = \frac{i}{N^2} \oint_\Gamma \delta(y-x) \hat{W}[\Gamma_{yx}] \hat{W}[\Gamma_{xy}] \lambda_a \lambda^a dy^\mu, \tag{4.5}$$

onde a notação Γ_{xy} e Γ_{yx} significa que dividimos o caminho em dois, os quais, ambos, começam e terminam em x e y , porém com os traçados dos caminhos diferentes entre si. Graças ao $\delta(x-y)$ eles se tornam o caminho fechado Γ . O operador ∇_μ^a é definido como:

$$\nabla_\mu^a (*) = \partial_\mu (*) + [A_\mu^a, (*)].$$

4.2.1 Derivadas de Caminho e de Área

Para prosseguir até as equações de Makeenko–Migdal, primeiramente temos que definir dois objetos chamados de derivada de área e derivada de caminho.

Definição 8 (*Derivada de Caminho*). Seja um funcional F , que depende de um caminho fechado \mathcal{C} . Então definimos outro caminho fechado $\mathcal{C}_{\delta x_\mu}$, que no ponto x faz uma curva na direção μ e retorna no mesmo ponto, porém de tal forma que a área seja zero. Logo a derivada de caminho possui a seguinte definição:

$$\partial_\mu^x F[\mathcal{C}] = \frac{1}{\delta x} \left(F[\mathcal{C}_{\delta x_\mu}] - F[\mathcal{C}] \right)$$

Definição 9 (*Derivada de Área*). Seja um funcional F , que depende de um caminho fechado \mathcal{C} . Definimos, também, outro caminho que possui o mesmo formato de \mathcal{C} , porém no ponto x , o caminho forma uma área infinitesimal $\delta\sigma_{\mu\nu}$, que contorna o ponto e se encontra de novo com o caminho padrão, como se fosse um "calombo" que nasceu no caminho original. Então a derivada de área é definida como:

$$\frac{\delta F[\mathcal{C}]}{\delta\sigma_{\mu\nu}} = \frac{1}{\delta\sigma_{\mu\nu}} \left(F[\mathcal{C}_{\delta\sigma_{\mu\nu}}] - F[\mathcal{C}] \right).$$

Lema 4.2.1. A derivada variacional padrão de um funcional F , pode ser escrita em função da derivada de caminho e da derivada de área, da seguinte forma:

$$\frac{\delta F}{\delta x_\mu(\sigma)} = \dot{x}_\nu \frac{\delta F}{\delta\sigma_{\mu\nu}} + \sum_{i=1}^m \partial_\mu^{x_i} F \delta(\sigma - \sigma_i),$$

onde $x_i \equiv x(\sigma_i)$ são os pontos chamados de irregulares, sendo os pontos onde a derivada de caminho de F não se anula.

Demonstração. Veja (MAKEENKO, 2002) □

4.2.2 Equações do Laço de Makeenko–Migdal

Agora podemos chegar de fato às equações do laço de Makeenko–Migdal, para isso precisamos calcular a derivada de área do laço de Wilson:

$$\begin{aligned} \frac{\delta \hat{W}}{\delta\sigma^{\mu\nu}} &= \frac{1}{N} \frac{1}{\delta\sigma^{\mu\nu}} \left\{ \text{tr} \hat{P} \left[\exp \left(i \int_{\partial\Gamma+\delta\sigma} F_{\mu\nu} dS^{\mu\nu} \right) \right] - \text{tr} \hat{P} \left[\exp \left(i \int_{\partial\Gamma} F_{\mu\nu} dS^{\mu\nu} \right) \right] \right\} \\ &= \frac{1}{N} \frac{1}{\delta\sigma^{\mu\nu}} \text{tr} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[\left(i \int_{\partial\Gamma} F_{\mu\nu} dS^{\mu\nu} + i \int_{\delta\sigma} F_{\mu\nu} dS^{\mu\nu} \right)^n - \left(i \int_{\partial\Gamma} F_{\mu\nu} dS^{\mu\nu} \right)^n \right] \right\} \\ &= \frac{1}{N} \frac{1}{\delta\sigma^{\mu\nu}} \text{tr} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(i \int_{\partial\Gamma} F_{\mu\nu} dS^{\mu\nu} \right)^n \int_{\delta\sigma} i F_{\mu\nu} dS^{\mu\nu} \right] \\ &= \frac{1}{N} \frac{1}{\delta\sigma^{\mu\nu}} \text{tr} \left[\hat{P} \exp \left(i \oint_{\Gamma} A_\mu dz^\mu \right) i F_{\mu\nu} \delta\sigma^{\mu\nu} \right] \\ &= \frac{i}{N} \text{tr} \left[F_{\mu\nu} \hat{P} \exp \left(i \oint_{\Gamma} A_\mu dz^\mu \right) \right]. \end{aligned}$$

Calcularemos, agora, a derivada de caminho desse resultado, lembrando que a linha de Wilson, com Γ fechado, não depende do caminho feito, portanto, utilizando a regra da cadeia, temos apenas a derivada em $F_{\mu\nu}$, que se torna uma derivada parcial padrão. E calculando essa derivada temos:

$$\begin{aligned}\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial z^\mu} &= \frac{\partial}{\partial z^\mu} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu]) \\ &= \partial_\mu \partial_\mu A_\nu + [A_\mu, \partial_\mu A_\nu] - \partial_\mu \partial_\nu A_\mu - [A_\nu, \partial_\mu A_\mu] \\ &= \nabla_\mu \partial_\mu A_\nu - \nabla_\nu \partial_\mu A_\mu \\ &= \nabla_\mu F_{\mu\nu} = \partial_\mu F_{\mu\nu} + [A_\mu, F_{\mu\nu}].\end{aligned}\tag{4.6}$$

Com isso, chegamos ao seguinte valor das derivadas do laço de Wilson:

$$\partial_\mu^x \frac{\delta \hat{W}}{\delta \sigma_{\mu\nu}} = \frac{i}{N} \text{tr} \left[\nabla_a^\mu F_{\mu\nu}^a \exp \left(i \oint_\Gamma A_\mu dz^\mu \right) \right] = \frac{i}{N} \text{tr} \left(\nabla_a^\mu F_{\mu\nu}^a \hat{W}[\Gamma] \right),$$

note que, nos parênteses, temos a mesma fórmula que a equação, (4.5), fazendo a correção dos índices. Portanto, temos que o valor esperado da última equação, usando o lema 4.1.1, é:

$$\begin{aligned}\partial_\mu^x \frac{\delta}{\delta \sigma_{\mu\nu}} \langle \hat{W} \rangle &= g \oint \delta(y-x) \langle \text{tr} \left(\hat{W}[\Gamma_{yx}] \hat{W}[\Gamma_{xy}] \lambda^a \lambda_a \right) \rangle dy_\nu \\ &= g \oint \delta(y-x) \langle \text{tr} \hat{W}[\Gamma_{yx}] \rangle \langle \text{tr} \hat{W}[\Gamma_{xy}] \rangle - \frac{1}{N^2} \langle \hat{W} \rangle dy_\nu,\end{aligned}$$

e esta é a equação do laço de Makeenko-Migdal, na sua forma geral, onde g é a constante de acoplamento. E fazendo com que $N \rightarrow \infty$, chegamos a forma principal da equação de Makeenko-Migdal:

$$\partial_\mu^x \frac{\delta}{\delta \sigma_{\mu\nu}} \langle \hat{W} \rangle = g \oint \delta(y-x) \langle \text{tr} \hat{W}[\Gamma_{yx}] \rangle \langle \text{tr} \hat{W}[\Gamma_{xy}] \rangle dy_\nu.$$

E com essa equação é possível resolver problemas na Cromodinâmica Quântica exatamente, como é possível ver no livro (POLYAKOV, 1987).

4.3 Equação de Yang-Mills e o Campo Quiral

4.3.1 Versão Contínua

Nesta seção trabalharemos com a linha de Wilson, porém o caminho Γ será fechado ao redor de um ponto x , portanto, a notação será $\hat{W}[x, x, \Gamma] \equiv \hat{W}[\Gamma]$. Agora definimos uma grandeza \mathcal{F}_μ , que fará um papel de uma corrente da linha de Wilson, da seguinte forma:

$$\mathcal{F}_\mu = \frac{\delta \hat{W}[\Gamma]}{\delta z^\mu} \hat{W}^{-1}[\Gamma].\tag{4.7}$$

Para chegar no valor dessa corrente primeiramente calculamos a derivada de área da linha de Wilson que é semelhante ao processo do laço de Wilson. Portanto, a derivada de área da linha de Wilson, é:

$$\begin{aligned}
\frac{\delta \hat{W}[\Gamma]}{\delta \sigma^{\mu\nu}} &= \frac{1}{\delta \sigma^{\mu\nu}} \hat{P} \left[\exp \left(i \oint_{\Gamma+d\Gamma} A_\mu dz^\mu \right) \right] - \frac{1}{\delta \sigma^{\mu\nu}} \hat{P} \left[\exp \left(i \oint_{\Gamma} A_\mu dz^\mu \right) \right] \\
&= \frac{1}{\delta \sigma^{\mu\nu}} \hat{P} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(i \int_{\partial\Gamma} F_{\mu\nu} dS^{\mu\nu} + i \int_{\sigma} F_{\mu\nu} dS^{\mu\nu} \right)^n \frac{1}{n!} - \left(i \int_{\partial\Gamma} F_{\mu\nu} dS^{\mu\nu} \right)^n \frac{1}{n!} \right] \\
&= \frac{1}{\delta \sigma^{\mu\nu}} \hat{P} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} \left(i \int_{\partial\Gamma} F_{\mu\nu} dS^{\mu\nu} \right)^{n-k} \left(i \int_{\sigma} F_{\mu\nu} dS^{\mu\nu} \right)^k \frac{1}{n!} \right] - \\
&\quad - \frac{1}{\delta \sigma^{\mu\nu}} \hat{P} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(i \int_{\partial\Gamma} F_{\mu\nu} dS^{\mu\nu} \right)^n \frac{1}{n!} \right] \\
&= \frac{1}{\delta \sigma^{\mu\nu}} \hat{P} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(i \int_{\sigma} F_{\mu\nu} dS^{\mu\nu} \right)^n \frac{1}{n!} \right] - \frac{1}{\delta \sigma^{\mu\nu}} \hat{P} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(i \int_{\partial\Gamma} F_{\mu\nu} dS^{\mu\nu} \right)^n \frac{1}{n!} \right] + \\
&\quad + \frac{1}{\delta \sigma^{\mu\nu}} \hat{P} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n-1!} \left(i \int_{\partial\Gamma} F_{\mu\nu} dS^{\mu\nu} \right)^{n-1} \left(i \int_{\sigma} F_{\mu\nu} dS^{\mu\nu} \right) \right] \\
&= i \frac{1}{\delta \sigma^{\mu\nu}} \hat{P} \left[\exp \left(i \oint_{\Gamma} A_\mu dz^\mu \right) \right] F_{\mu\nu} \delta \sigma^{\mu\nu} = i \hat{W}[\Gamma] F_{\mu\nu}
\end{aligned}$$

Então podemos usar o lema 4.2.1, par calcularmos a derivada variacional da linha de Wilson, e considerando que a linha de Wilson não possui pontos irregulares, já que ela não depende do caminho, então calculamos a derivada variacional:

$$\begin{aligned}
\frac{\delta \hat{W}[\Gamma]}{\delta z^\mu} &= \dot{z}^\nu \frac{\delta \hat{W}[\Gamma]}{\delta \sigma^{\mu\nu}} \\
&= i \hat{P} \left[\exp \left(i \oint A_\mu dz^\mu \right) \right] F_{\mu\nu} \dot{z}^\nu.
\end{aligned}$$

Agora podemos calcular o valor da corrente \mathcal{F}_μ , apenas substituindo essa última equação em (4.7), sendo assim obtemos:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_\mu(\Gamma, s) &= i \hat{P} \left[\exp \left(i \oint A_\mu dz^\mu \right) \right] F_{\mu\nu} \dot{z}^\nu \hat{P} \left[\exp \left(-i \oint A_\mu dz^\mu \right) \right] \\
&= i \hat{W}[\Gamma] F_{\mu\nu}[z(s)] \dot{z}^\nu(s) \hat{W}^{-1}[\Gamma].
\end{aligned}$$

Vamos também calcular a derivada variacional de \mathcal{F}_μ em relação à z^μ . Partindo da equação (4.7) e usando a fórmula (4.6), temos:

$$\begin{aligned}
\frac{\delta \mathcal{F}_\mu}{\delta z^\nu} &= \frac{\delta^2 \hat{W}[\Gamma]}{(\delta z^\nu)^2} \hat{W}^{-1}[\Gamma] + \frac{\delta \hat{W}[\Gamma]}{\delta z^\mu} \frac{\delta \hat{W}^{-1}[\Gamma]}{\delta z^\nu} \\
&= \frac{\delta}{\delta z^\nu} \left(i \hat{W}[\Gamma] F_{\mu\nu} \dot{z}^\nu \right) \hat{W}^{-1}[\Gamma] + i \hat{W}[\Gamma] F_{\mu\nu} \dot{z}^\nu \left(-i \hat{W}^{-1} F_{\nu\rho} \dot{z}^\rho \right) \\
&= i \frac{\delta \hat{W}[\Gamma]}{\delta z^\nu} F_{\mu\nu} \dot{z}^\nu \hat{W}^{-1}[\Gamma] + i \hat{W}[\Gamma] \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial z^\nu} \dot{z}^\nu \hat{W}^{-1}[\Gamma] + \hat{W}[\Gamma] F_{\mu\nu} \dot{z}^\nu \hat{W}^{-1}[\Gamma] F_{\nu\rho} \dot{z}^\rho \\
&= i \left(i \hat{W}[\Gamma] F_{\nu\rho} \dot{z}^\rho \right) F_{\mu\nu} \dot{z}^\nu \hat{W}^{-1}[\Gamma] + i \hat{W}[\Gamma] \nabla_\nu F_{\mu\nu} \dot{z}^\nu \hat{W}^{-1}[\Gamma] + \hat{W}[\Gamma] F_{\mu\nu} \dot{z}^\nu \hat{W}^{-1}[\Gamma] F_{\nu\rho} \dot{z}^\rho \\
&= i \hat{W}[\Gamma] \nabla_\nu F_{\mu\nu} \dot{z}^\nu \hat{W}^{-1}[\Gamma],
\end{aligned}$$

e utilizando a equação de Yang-Mills, lema 4.3.1, temos que essa derivada variacional também é nula, portanto, podemos reescrever a equação em função da linha de Wilson da seguinte forma:

$$\frac{\delta \mathcal{F}_\mu}{\delta z_\nu} = \frac{\delta}{\delta z_\nu} \left(\frac{\delta \hat{W}[\Gamma]}{\delta z^\mu} \hat{W}^{-1}[\Gamma] \right) = 0$$

Lema 4.3.1 (*Equação de Yang-Mills*). A equação de KG para uma Lagrangiana de Yang-Mills, livre de correntes e no calibre de Lorenz, é:

$$\nabla_\mu F^{\mu\nu} = 0$$

Demonstração. Veja (POLYAKOV, 1987) □

Outra forma calcular a linha de Wilson, é utilizando uma parametrização s qualquer. Porém, é bastante claro que a linha deve ser invariante para a escolha de parametrização, portanto, a derivada de $\hat{W}[\Gamma]$ em relação à s , deve ser zero, sendo assim:

$$\frac{\partial W_\Gamma}{\partial s} = \frac{dz^\mu}{ds} \frac{\delta W_\Gamma}{\delta z^\mu(s)} = \frac{dz^\mu}{ds} \mathcal{F}_\mu = 0$$

Por fim, analisando a fórmula de \mathcal{F}_μ , temos que $\hat{W}[\Gamma]$ é um operador unitário e $F_{\mu\nu}$ é antissimétrico, portanto, temos que \mathcal{F}_μ também deve ser antissimétrico. Sendo assim, o comutador de \mathcal{F}_μ e \mathcal{F}_ν deve ser zero. Então podemos definir uma equação semelhante à equação do tensor de curvatura, descrito na definição 2, como sendo:

$$\frac{\delta \mathcal{F}_\mu}{\delta z^\nu} - \frac{\delta \mathcal{F}_\nu}{\delta z^\mu} + [\mathcal{F}_\mu, \mathcal{F}_\nu] = 0, \quad (4.8)$$

ou seja, nesse espaço dos laços temos um espaço plano, e veremos na seção 4.3.3, que essa equação também aparece no modelo principal quiral.

4.3.2 Versão Discreta

Para melhor entendermos como se comporta a corrente \mathcal{F}_μ , podemos discretizar o sistema para ser possível aplicar um modelo computacional e assim entender as soluções para o problema.

Começamos discretizando a linha de Wilson, no produto de funções $B_{x,\alpha}$, cujo primeiro índice determina a localização na malha, e o segundo determina a direção, tanto α quanto x pertencem ao caminho $\Gamma(x, y)$. Portanto, temos que:

$$\hat{W}[x, y, \Gamma] = \prod_{x,\alpha} B_{x,\alpha}.$$

E definimos a ação, a partir da linha de Wilson como sendo:

$$S = \text{tr} \sum_{x,\alpha,\beta} B_{x,\alpha} B_{x+\alpha,\beta} B_{x+\beta,\alpha}^\dagger B_{x,\beta}^\dagger \equiv F_{x,\alpha,\beta}, \quad (4.9)$$

formando um quadrado na malha. E tomando o variacional da ação temos que:

$$\delta S = \text{tr} \sum_{x,\alpha,\beta} F_{x,\alpha,\beta} \omega_{x,\alpha} - F_{x,\alpha,\beta}^\dagger \omega_{x,\alpha} = 0, \quad (4.10)$$

onde ω é um elemento da álgebra do grupo G , o qual pertencem os elementos B . Essas fórmulas também podem ser escritas, na forma como aparece na malha, para podermos entender o seu funcionamento. Então a equação (4.9) se torna:

$$S = \text{tr} \sum_{x,\alpha,\beta} B_{x,\alpha} B_{x+\alpha,\beta} B_{x+\beta,\alpha}^\dagger B_{x,\beta}^\dagger = \text{tr} \sum_{x,\alpha,\beta} \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \beta$$

e a equação (4.10), fica:

$$\delta S = \text{tr} \sum_{x,\alpha,\beta} F_{x,\alpha,\beta} - F_{x,\alpha,\beta}^\dagger = \text{tr} \sum_{x,\alpha,\beta} \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \beta - \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} -\beta = 0.$$

Como $F_{x,\alpha,\beta}$ é definido como o produto de matrizes B , temos que $B_{x,\alpha} F_{x,\alpha,\beta}^\dagger B_{x,\beta}^\dagger = F_{x,\alpha,\beta}^\dagger$, ou seja, podemos gerar uma deformação no segundo laço. Sendo assim podemos fazer as seguintes transformações:

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha} \hat{W}[\Gamma] - \hat{W}[\Gamma + \Pi_{s,\alpha}] &= 0 \\ \implies \sum_{\alpha} \mathcal{F}_{s\alpha}[\Gamma] - \mathcal{F}_{s\alpha}[\Gamma - \Pi_{s\alpha}] &= 0, \end{aligned}$$

onde $\Pi_{s\alpha}$ é a área deformada no ponto s e na direção α ; e $\mathcal{F}_{s\alpha}$ segue a mesma definição que (4.7), porém com a derivada sendo apenas $\hat{W}[\Gamma + \Pi_{s\alpha}]$. Portanto, chegamos ao mesmo resultado que para a versão contínua, assim como esperado.

4.3.3 Modelo Principal Quiral

O modelo principal quiral é um modelo bastante estudado na física, na qual um grupo de Lie compacto G , de dimensão (1+1), tem como elemento os valores da função $g(x)$, esta função é o campo quiral. Esse modelo tem muitas características que o tornam tão interessante. Por exemplo, a solução do campo é feita exatamente, sem utilizar de perturbações. Além disto, o modelo apresenta uma característica de ser confinado, ou seja, que para separar duas partículas é necessária uma energia infinita. Definimos para esse campo uma corrente com a seguinte relação:

$$L_{\mu}(x) = \partial_{\mu} g \cdot g^{-1} = \sum_a L_{\mu}^a t_a, \quad (4.11)$$

com $-L < x < L$ e $g(x) = g(x+2L)$, ou seja, condições periódicas, além disto, as matrizes t_a são os geradores do grupo G . Então a Lagrangiana desse sistema é escrita como:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2\gamma c_2} \int_{-L}^L \text{tr} (L_{\mu}^2) dx = \frac{1}{2\gamma} \sum_a \int_{-L}^L (L_{\mu}^a)^2 dx,$$

sendo γ uma constante de acoplamento, que não possui dimensão, e $-c_2$ é definido a partir dos geradores do grupo, onde ele é o valor do traço entre dois geradores, ou seja,

$$\text{tr} (t_a t^b) = -c_2 \delta_a^b.$$

e a partir da Lagrangiana é possível chegar as equações de movimento aplicando a equação de Euler-Lagrange, o resultado é que:

$$\begin{aligned} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta g} - \partial_\mu \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_\mu g} \right) &= 0 \\ \implies \partial_\mu \left(\frac{1}{\gamma} \partial^\mu g g^{-1} \right) &= 0 \\ \implies \partial_\mu L^\mu &= 0. \end{aligned}$$

Agora calculamos o tensor de curvatura para L_μ , seguindo a definição 2, porém note que o índice da corrente está atrelado à derivada, logo temos que $\partial_\mu L_\nu = \partial_\nu L_\mu$, e o mesmo vale para o comutador, portanto, o tensor de curvatura deve ser nulo. Então introduzimos as seguintes notações, para reescrevermos o tensor de curvatura:

$$\begin{aligned} S &= \frac{i}{2\gamma} (L_0 + L_1), \\ T &= \frac{i}{2\gamma} (L_0 - L_1) \end{aligned}$$

e com esta notação podemos substituir na fórmula e obter as seguintes relações:

$$-i2\gamma (\partial_0 S - \partial_1 S + i\gamma [S, T]) = 0 \quad (4.12)$$

$$-i2\gamma (\partial_x T + \partial_0 T - i\gamma [S, T]) = 0. \quad (4.13)$$

Por fim, definimos o chamado par de Lax, que reduzirá estas equações à apenas uma. Os termos do par de Lax são:

$$\begin{aligned} N &= -i\partial_1 + \frac{S}{\lambda - a} + \frac{T}{\lambda + a}, \\ M &= -i\partial_0 + \frac{S}{\lambda - a} - \frac{T}{\lambda + a}, \end{aligned}$$

então substituindo nas equações (4.12) e (4.13), chegamos à seguinte relação:

$$[N, M] = 0.$$

e com essa equação temos que esse modelo também um sistema integrável.

E essa foi uma breve introdução ao modelo principal quirral clássico, o próximo passo seria quantiza-lo, porém esse não é o objetivo. Um desenvolvimento mais aprofundado pode ser encontrado em (FADDEEV; RESHETIKHIN, 1986). O objetivo para a apresentação desse modelo é a clara semelhança entre ele e o apresentado na seção 4.3.1,

e isso fica claro, pois é possível realizar o processo feito para obter o par de Lax, na equação (4.8), portanto, temos:

$$\begin{aligned}\frac{\delta \mathcal{F}_\mu}{\delta z^\nu} - \frac{\delta \mathcal{F}_\nu}{\delta z^\mu} + [\mathcal{F}_\mu, \mathcal{F}_\nu] &= 0 \implies [N_{YM}, M_{YM}] = 0 \\ \partial_\nu L_\mu - \partial_\mu L_\nu + [L_\mu, L_\nu] &= 0 \implies [N_Q, M_Q] = 0.\end{aligned}$$

Além disso, podemos comparar também as equações de \mathcal{F}_μ com L_μ , e ver que elas também são semelhantes, assim como podemos ver:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_\mu &= \frac{\delta \hat{W}[\Gamma]}{\delta z^\mu} \hat{W}^{-1}[\Gamma] \\ L_\mu &= \partial_\mu g \cdot g^{-1}.\end{aligned}$$

A principal diferença entre os dois sistemas é o espaço, enquanto \mathcal{F}_μ é definido no espaço de laços quadridimensional, a corrente L_μ é definido no espaço de duas dimensões, uma de espaço e outra de tempo.

4.3.4 Problema Original

A teoria de cordas é uma teoria física bem conhecida, explicando de forma bastante simplificada, nela tratamos as interações entre as partículas como cordas. Porém, o que de fato nos importa é que a teoria de cordas pode ser entendida como uma generalização do modelo principal quiral com mesma dimensão, mas com um grupo muito maior.

E durante o desenvolvimento dessa teoria, os físicos perceberam que, em alguns casos, havia uma correspondência entre a teoria de cordas e o modelo padrão, também chamado de modelo de Yang-Mills. Essa correspondência é chamada de correspondência AdS/CFT, onde a sigla AdS significa, *Anti de Sitter*, sendo um espaço que possui uma geometria utilizada na Relatividade Geral e a sigla CFT, significa *Conformal Field Theory*, sendo a TQC padrão. Existem diversos métodos para obter essa correspondência, mas não existe um método geral.

Agora voltando ao estudo dos laços, vemos que a linha de Wilson, com a corrente \mathcal{F} , possuem um comportamento muito parecido com o do campo quiral, isso é facilmente visto comparando a equação (4.7) com a equação (4.11). Também existem outras semelhanças como as condições periódicas que ambos os campos obedecem, e também o tensor de curvatura de ambas as correntes são nulas e por último ambas as teorias possuem a característica de serem teorias de confinamento.

E são essas semelhanças são o que nos leva ao problema em aberto, que motiva ao estudo dessa área. A questão é, se existe alguma relação entre a linha de Wilson, que representa o modelo de Yang-Mills, e o modelo principal quiral, que representa a teoria de cordas. E se essa possível relação explica algo na correspondência AdS/CFT. O primeiro

passo para a verificação dessa possível correspondência é analisar os resultados via cálculos numéricos, assim como feito em ([ANDERSON; KRUCZENSKI, 2018](#)).

Conclusão

Para a formulação da teoria quântica de campos são necessários inúmeros conceitos, por se tratar de uma das teorias mais completas da física. Como é possível ver no processo de quantização, por ser necessário fazer a análise de diversas características do sistema, devido aos vínculos presentes, fazendo com que a teoria se torne extremamente avançada.

Também verificamos que a formulação das funções de partição, além de conectar a física clássica com a quântica, também proporciona um método de quantização. Através das funções de partição também é possível chegar aos resultados de um problema, por meio da construção dos diagramas de Feynman, que constituem métodos perturbativos. Mas no estudo da QCD, os métodos perturbativos se tornam divergentes graças à presença da força forte.

Então foi necessário formular uma teoria nova, com uma técnica avançada, obtida através da construção dos laços de Wilson. Essa teoria nova é chamada de Teoria Quântica de Laços e como foi visto, além de resolver problemas da QCD com métodos não perturbativos, ela também fornece uma ampla área de estudos. Pois, a sua conexão com a teoria de cordas ainda é um problema em aberto na física, podendo levar ao entendimento do maior problema de toda a física, sendo o problema da unificação das forças fundamentais. Porque a teoria das cordas já possui a unificação das forças em sua fundamentação, bastando apenas conseguir ligá-la à teoria padrão de Yang-Mills, assim como foi sugerido.

Sendo assim, o interesse nessa área torna-se cada vez mais alto, devido a sua formulação numérica que permite resolver e estudar problemas que podem ser resolvidos em um computador. Então torna-se importante apresentar essa grande área de estudos.

Referências

- ANDERSON, P.; KRUCZENSKI, M. Loop equation in lattice gauge theories and bootstrap methods. In: EDP SCIENCES. *EPJ Web of Conferences*. [S.l.], 2018. v. 175, p. 11011. Citado na página 76.
- FADDEEV, L.; RESHETIKHIN, N. Y. Integrability of the principal chiral field model in 1+1 dimension. *Annals of physics*, Elsevier, v. 167, n. 2, p. 227–256, 1986. Citado na página 74.
- FRADKIN, E. *Quantum field theory: an integrated approach*. [S.l.]: Princeton University Press, 2021. Citado 2 vezes nas páginas 38 e 52.
- ITZYKSON, C.; ZUBER, J.-B. *Quantum field theory*. [S.l.]: Courier Corporation, 2006. Nenhuma citação no texto.
- KREYSZIG, E. *Introductory functional analysis with applications*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 1991. v. 17. Citado na página 31.
- MAKEENKO, Y. *Methods of contemporary gauge theory*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2002. Citado 2 vezes nas páginas 66 e 69.
- NASTASE, H. *Introduction to Quantum Field Theory*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2019. Nenhuma citação no texto.
- POLYAKOV, A. M. *Gauge fields and strings*. [S.l.]: Taylor & Francis, 1987. Citado 2 vezes nas páginas 70 e 72.
- RYDER, L. H. *Quantum field theory*. [S.l.]: Cambridge university press, 1996. Citado na página 84.

Apêndices

APÊNDICE A – Integrais Gaussianas

Neste apêndice serão resolvidas algumas integrais de suma importância para resultados aplicados nas contas. Estas integrais que serão resolvidas, são conhecidas como integrais gaussianas, elas têm em comum que em todas aparece ao menos um termo exponencial.

Lema A.0.1. $I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$

Demonstração.

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha y^2} dy \\ \implies I^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha y^2} dy \\ \implies I^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha(x^2+y^2)} dx dy \\ \implies I^2 &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-\alpha r^2} r dr d\theta \\ \implies I^2 &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} e^{-\alpha r^2} \frac{d(r^2)}{2} \\ \implies I^2 &= 2\pi \left. \frac{-e^{-\alpha r^2}}{2\alpha} \right|_0^{\infty} \\ \implies I &= \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \end{aligned}$$

□

Lema A.0.2. $I = \int \exp\left(-\frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle\right) d^n x = (2\pi)^{\frac{n}{2}} (\det A)^{-\frac{1}{2}}$, onde A é uma matriz diagonal, de componentes a_1, \dots, a_n e x é o vetor (x_1, \dots, x_n) .

Demonstração.

$$\begin{aligned} I &= \int \exp\left(-\frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle\right) d^n x = \\ &= \int \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_n a_n x_n^2\right) dx_1 \cdots dx_n = \\ &= \int \exp\left(-\frac{1}{2} a_1 x_1^2\right) dx_1 \cdots \int \exp\left(-\frac{1}{2} a_n x_n^2\right) dx_n = \\ &= \prod_{i=1}^n \left(\frac{a_i}{2\pi}\right)^{-\frac{1}{2}} = \\ &= (2\pi)^{\frac{n}{2}} (\det A)^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

□

Lema A.0.3. $I = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ax^2 + bx + c) dx = \exp\left(\frac{b^2}{4a} + c\right) \sqrt{\frac{\pi}{a}}$

Demonstração.

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-a\left[\left(x - \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}\right]\right\} dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-a\left(x - \frac{b}{2a}\right)^2\right] \exp\left(\frac{b^2}{4a} + c\right) dx = \\ &= \exp\left(\frac{b^2}{4a} + c\right) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-aU^2} dU, \quad U = x - \frac{b}{2a} \\ &= \exp\left(\frac{b^2}{4a} + c\right) \sqrt{\frac{\pi}{a}} \end{aligned}$$

□

Lema A.0.4. $\int \exp\left(-\frac{1}{2}\langle Ax, x \rangle - \langle b, x \rangle - c\right) \mathcal{D}x = \exp\left(\frac{1}{2}\langle b, A^{-1}b \rangle - c\right) (\det A)^{-\frac{1}{2}}$

Demonstração.

$$\begin{aligned} I &= \int \exp\left(-\frac{1}{2}\langle Ax + b, x \rangle - c\right) \mathcal{D}x = \\ &= \int \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\langle Ax + b, x \rangle + \langle b, A^{-1}b \rangle - \langle b, A^{-1}b \rangle\right) - c\right] \mathcal{D}x = \\ &= \exp\left(\frac{1}{2}\langle b, A^{-1}b \rangle - c\right) \int \exp\left[-\frac{1}{2}\langle Ax + b, x + A^{-1}b \rangle\right] \mathcal{D}x = \\ &= \exp\left(\frac{1}{2}\langle b, A^{-1}b \rangle - c\right) \int \exp\left[-\frac{1}{2}\langle AU, U \rangle\right] \mathcal{D}U, \quad U \equiv x + A^{-1}b \\ &= \exp\left(\frac{1}{2}\langle b, A^{-1}b \rangle - c\right) (\det A)^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

□

Lema A.0.5. $I = \int \mathcal{D}\alpha \mathcal{D}\bar{\alpha} \exp\left(i \int \bar{\alpha} A \alpha d^n x\right) = \det A$, onde α e $\bar{\alpha}$ são campos fermiônicos.

Demonstração. Veja (RYDER, 1996)

□