

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
INSTITUTO DE FÍSICA

YAGO DA COSTA DE ALMEIDA

ANOMALIAS EM TEORIA QUÂNTICA DE CAMPOS

BRASÍLIA
21 DE JUNHO DE 2023

Yago da Costa de Almeida

Anomalias em teoria quântica de campos

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Instituto de Física da Universidade de Brasília como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Bacharel em Física.

Orientador: Arsen R. Melikyan

Universidade de Brasília – UnB

Instituto de Física

Brasília

21 de junho de 2023

*Dedico este trabalho às minhas calopsitas,
que foram minhas aves de apoio emocional,
e à Kiara Klein Levy Wainer, minha com-
panheira, que esteve comigo durante todo o
processo.*

Resumo

Esse trabalho tem por objetivo estudar as anomalias na teoria quântica de campos. Com esse objetivo, foi feita a formulação da teoria a partir das integrais de caminho. Em seguida, foram calculadas as identidades de Ward vetorial e axial, através do diagrama triangular e, como resultado, se obteve a anomalia de ABJ. Também é possível obter essa anomalia a partir de regularizações, o que foi feito para a regularização dimensional, de Pauli-Villars e para o método de Schwinger. O trabalho finaliza mostrando como o jacobiano da transformação de gauge do funcional gerador induz a anomalia.

Palavras-chaves: Anomalias. Integral de caminho. Anomalia ABJ.

Lista de abreviaturas e siglas

SI	Sistema Internacional de Unidades (<i>Système international d'unités</i>)
IF	Instituto de Física
UnB	Universidade de Brasília
ABJ	Adler-Bell-Jackiw
PV	Pauli-Villars

Sumário

	Introdução	9
1	INTEGRAL DE CAMINHO E FORMULAÇÃO DA TEORIA QUÂN- TICA DE CAMPOS	11
1.1	Integral de caminho	11
1.1.1	Desenvolvimento da integral de caminho	11
1.1.2	Revisão de funções de Green	15
1.1.3	Propagador	17
1.1.4	Funcional gerador para a mecânica quântica	18
1.1.5	Derivada de um funcional	20
1.1.6	Derivada do funcional gerador	22
1.2	Teoria do campo escalar	22
1.2.1	Campo escalar	22
1.2.2	Função de Green livre	27
1.2.3	Campo escalar com auto-interação	28
1.3	Teoria do campo fermiônico	30
1.3.1	Álgebra de Grassmann	31
1.3.2	Generalização para dimensões infinitas não-enumeráveis	34
1.3.3	Campos de Dirac	35
1.4	Teoria dos campos de gauge	36
1.4.1	Teoria geral dos campos de gauge	36
1.4.2	Quantização do campo eletromagnético	42
1.4.3	Método de Faddeev-Popov	45
1.4.4	Funcional gerador da eletrodinâmica quântica	46
1.4.5	Regras de Feynman no espaço dos momentos para a eletrodinâmica quântica	48
2	ANOMALIAS EM TEORIA QUÂNTICA DE CAMPOS	51
2.1	Leis de conservação clássicas e simetrias	51
2.1.1	Correntes dos campos de gauge abeliano e sua conservação	51
2.1.2	Caso não-abeliano	54
2.2	Identidades de Ward	56
2.2.1	Funções de Green	56
2.2.2	Identidade de Ward anômala e anomalia de ABJ	58
2.2.3	Anomalia no espaço das configurações	65
2.2.4	Anomalias na corrente quirais	66
2.2.5	Anomalias e o funcional gerador	68

2.3	Regularizações e a anomalia ABJ	73
2.3.1	Regularização dimensional	73
2.3.2	Regularização de Pauli-Villars	77
2.3.3	Método de Schwinger	79
2.4	Anomalias e integrais de caminho	82
2.4.1	Transformação quiral do funcional gerador	83
2.4.2	Método de Fujikawa para uma regularização genérica	89
	Considerações finais	91
	Bibliografia	93
	 APÊNDICES	 95
	APÊNDICE A – INTEGRAL D-DIMENSIONAL	97

Introdução

A teoria quântica de campos possui, como uma de suas bases, as simetrias de gauge. Associadas a tais simetrias existem correntes conservadas, de acordo com o teorema de Noether. Entretanto, as leis de conservação de tais correntes podem ser violadas em suas versões quantizadas, possuindo um quadridivergente não nulo. Essa quebra na lei de conservação é chamada anomalia. Isso implica dizer que há uma violação na simetria de gauge e, conseqüentemente, a consistência da teoria é aparentemente quebrada. Entretanto, as anomalias se mostraram necessárias para se explicar fatos experimentais, e elas são coerentes com certos modelos teóricos, como o modelo de Steinberger para o decaimento $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$, além de surgirem naturalmente ao se regularizar algumas funções de Green por variados métodos de regularização, como a regularização de Pauli-Villars e a regularização dimensional.

Classicamente, para o caso de um fermion sem massa, existe a conservação da corrente axial

$$\partial^\mu j_\mu^5 = 0. \quad (1)$$

A versão quântica das leis de conservação são as identidades de Ward e, ao se calcular o diagrama triangular de Feynman, obtém-se que a identidade de Ward axial é quebrada devido ao surgimento de um termo anômalo

$$\partial^\mu j_\mu^5 = \mathcal{A}, \quad (2)$$

sendo esse termo a anomalia de Adler-Bell-Jackiw (ABJ),

$$\mathcal{A} = \frac{e^2}{16\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta}. \quad (3)$$

Para teorias não-abelianas, têm-se

$$\mathcal{A} = \frac{e^2}{16\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \text{tr}(F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta}). \quad (4)$$

Em um primeiro momento, pode surgir o questionamento sobre a origem dessas anomalias. Uma hipótese é que se trate de uma ambigüidade devido à uma divergência em alguma função de Green da teoria e que, portanto, pode ser eliminada através de um processo de renormalização. Portanto, o propósito deste trabalho é mostrar que as anomalias são uma característica da própria teoria e que nenhuma renormalização é capaz de eliminá-las.

Além disso, foram utilizados métodos de regularização que induzem as anomalias, explicitando o fato de que estas não podem ser anuladas através de alguma renormalização.

Para isso, o presente trabalho se foca na anomalia ABJ e em outras, como a anomalia quiral. Também foi estudado a forma que as anomalias surgem na integral de caminho

$$Z = \int \mathcal{D}\phi_1 \mathcal{D}\phi_2 \dots \mathcal{D}\phi_n e^{iS}. \quad (5)$$

Fazendo uso do método de Fujikawa para calcular como uma transformação de gauge afeta a medida quântica $\mathcal{D}\phi$. Portanto, a formulação da teoria quântica de campos no presente trabalho foi feita através do método de integrais de caminho, das quais é possível obter todas as funções de Green e, conseqüentemente, toda informação da teoria.

1 Integral de caminho e formulação da Teoria Quântica de Campos

1.1 Integral de caminho

1.1.1 Desenvolvimento da integral de caminho

Neste capítulo, foi estudada uma breve revisão da formulação de Feynman da mecânica quântica, também chamada de formulação das integrais de caminho [6]. A escolha de tal formalismo é devido ao fato de que o funcional gerador surge naturalmente dentro da teoria, sendo de grande utilidade no cálculo e análise das funções de Green da teoria quântica de campos. De início, por familiaridade com a mecânica quântica, as unidades serão as do Sistema Internacional (SI).

Considere o operador $\hat{x}(t)$ na representação de Heisenberg, e os respectivos auto-vetores $|x_i, t_i\rangle$ e $|x_f, t_f\rangle$ que satisfazem as propriedades

$$\hat{x}(t_f)|x_f, t_f\rangle = x_f(t_f)|x_f, t_f\rangle$$

e

$$\hat{x}(t_i)|x_i, t_i\rangle = x_i(t_i)|x_i, t_i\rangle.$$

A mudança para a representação de Schrodinger é dada por

$$\begin{aligned} \langle x, t | \hat{x}(t) | x, t \rangle &= \langle x, t | e^{i\frac{Ht}{\hbar}} \hat{x} e^{-i\frac{Ht}{\hbar}} | x, t \rangle = \langle x | x | x \rangle \\ \implies \hat{x}(e^{-i\frac{Ht}{\hbar}} | x, t \rangle) &= x | x \rangle \\ \implies \hat{x} | x \rangle &= x | x \rangle, \end{aligned}$$

logo,

$$|x, t\rangle = e^{i\frac{Ht}{\hbar}} |x\rangle.$$

Para calcular a amplitude de probabilidade de ser encontrada em $x_f(t_f)$ uma partícula que estivera inicialmente no estado $x_i(t_i)$, faz-se o produto interno

$$\langle x_f, t_f | x_i, t_i \rangle = \langle x_f | e^{-i\frac{H(t_f-t_i)}{\hbar}} | x_i \rangle. \quad (1.1)$$

Agora, define-se a função $K(x, y; \beta) = \langle x | e^{-\hat{H}\beta} | y \rangle$, e conseqüentemente,

$$\langle x_f, t_f | x_i, t_i \rangle = K\left(x_f, x_i; i\frac{t_f - t_i}{\hbar}\right). \quad (1.2)$$

Sendo necessário saber uma forma geral para a função K , chamada de propagador, faz-se o anúncio do seguinte teorema:

Teorema: Considerando $t_f - t_i = \epsilon > 0$, chamando $x_i = x$, $x_f = y$ e assumindo que $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x})$, a função K possui a forma

$$K\left(x, y; i\frac{\epsilon}{\hbar}\right) = \sqrt{\frac{m}{2\pi i\epsilon\hbar}} \exp\left(i\frac{\epsilon}{\hbar}\left(\frac{m}{2}\left(\frac{(x-y)}{\epsilon}\right)^2 - V\left(\frac{x+y}{2}\right)\right) + O(\epsilon^2) + O(\epsilon(x-y)^2)\right). \quad (1.3)$$

Para provar esse resultado, é necessário utilizar o seguinte lema.

Lema: Seja a uma constante positiva, então, vale o resultado¹

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-iax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{ia}}. \quad (1.4)$$

Agora, considere a função (1.2) para um intervalo de tempo ϵ infinitesimal,

$$\langle x | e^{-i\frac{H\epsilon}{\hbar}} | y \rangle = K\left(x, y, i\frac{\epsilon}{\hbar}\right). \quad (1.5)$$

Utilizando a propriedade de completude dos autovetores do operador momento, pode-se reescrever (1.5) como

$$\langle x | e^{-i\frac{H\epsilon}{\hbar}} | y \rangle = \int \langle x | e^{-i\frac{H\epsilon}{\hbar}} | p \rangle \langle p | y \rangle dp = \int \frac{1}{2\pi\hbar} e^{-i\frac{p}{\hbar}y} e^{-i\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V(x)\right)\frac{\epsilon}{\hbar}} e^{i\frac{p}{\hbar}x} dp. \quad (1.6)$$

A partir do resultado $[\partial_x, e^{ikx}] = ik e^{ikx}$, é possível chegar em

$$\partial_x e^{ikx} = e^{ikx}(ik + \partial_x),$$

e aplicando-o n vezes

$$\partial_x^n e^{ikx} = e^{ikx}(ik + \partial_x)^n.$$

Em seguida, expandindo $e^{a\partial_x^2}$ em uma série de potências

$$e^{-i\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V(x)\right)\frac{\epsilon}{\hbar}} e^{i\frac{p}{\hbar}x} = e^{i\frac{p}{\hbar}x} e^{-i\left(-\frac{\hbar^2}{2m}(i\frac{p}{\hbar} + \partial_x)^2 + V(x)\right)\frac{\epsilon}{\hbar}}$$

$$\implies \int \frac{1}{2\pi\hbar} e^{i\frac{p}{\hbar}(x-y)} e^{-i\left(-\frac{\hbar^2}{2m}(i\frac{p}{\hbar} + \partial_x)^2 + V(x)\right)\frac{\epsilon}{\hbar}} dp = \int \frac{1}{2\pi\hbar} e^{-\frac{i}{\hbar}\left(\frac{p^2}{2m} - p(x-y)\right)} e^{-i\left(-\frac{\hbar^2}{2m}(i2\frac{p}{\hbar}\partial_x + \partial_x^2) + V(x)\right)\frac{\epsilon}{\hbar}} dp.$$

Portanto, escolhendo a mudança de variável $k = \sqrt{\frac{\epsilon}{2m}}p$, tem-se

$$\implies \sqrt{\frac{2m}{\epsilon}} \int \frac{1}{2\pi\hbar} e^{-\frac{i}{\hbar}(k^2 - k\sqrt{\frac{2m}{\epsilon}}(x-y))} e^{-i\left(-\frac{\hbar^2}{2m}(i2\frac{k}{\hbar}\sqrt{\frac{2m}{\epsilon}}\partial_x + \partial_x^2) + V(x)\right)\frac{\epsilon}{\hbar}} dk$$

$$= \sqrt{\frac{2m}{\epsilon}} e^{i\frac{m}{\hbar}\frac{(x-y)^2}{2\epsilon}} \int \frac{1}{2\pi\hbar} e^{-\frac{i}{\hbar}(k - \sqrt{\frac{m}{2\epsilon}}(x-y))^2} e^{-i\left(-\frac{\hbar^2}{2m}(i2\frac{k}{\hbar}\sqrt{\frac{2m}{\epsilon}}\partial_x + \partial_x^2) + V(x)\right)\frac{\epsilon}{\hbar}} dk. \quad (1.7)$$

¹ Uma prova desse lema pode ser encontrada no capítulo 1 do livro do Nakahara[6].

Expandindo a exponencial da derivada

$$e^{-i\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\left(i2\frac{k}{\hbar}\sqrt{\frac{2m}{\epsilon}}\partial_x+\partial_x^2\right)+V(x)\right)\frac{\epsilon}{\hbar}} = \sum_n \left(\frac{-i\epsilon}{\hbar}\right)^n \frac{1}{n!} \left(-i2k\hbar\sqrt{\frac{1}{2m\epsilon}}\partial_x - \frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2 + V(x)\right)^n,$$

e substituindo na integral (1.7), tem-se

$$\sqrt{\frac{2m}{\epsilon}} e^{\frac{i}{\hbar}m\frac{(x-y)^2}{2\epsilon}} \int \frac{1}{2\pi\hbar} e^{\frac{-i}{\hbar}(k-\sqrt{\frac{m}{2\epsilon}}(x-y))^2} \left(\sum_n \left(\frac{-i\epsilon}{\hbar}\right)^n \frac{1}{n!} \left(-i2k\hbar\sqrt{\frac{1}{2m\epsilon}}\partial_x - \frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2 + V(x)\right)^n\right) dk.$$

Fazendo a substituição de variável $\rho = k - \sqrt{\frac{m}{2\epsilon}}(x - y)$, o lado direito de (1.7) se torna

$$\sqrt{\frac{2m}{\epsilon}} e^{\frac{i}{\hbar}m\frac{(x-y)^2}{2\epsilon}} \int \frac{d\rho}{2\pi\hbar} e^{-\frac{i\rho^2}{\hbar}} \left(\sum_n \left(\frac{-i\epsilon}{\hbar}\right)^n \frac{1}{n!} \left(-i2\rho\hbar\sqrt{\frac{1}{2m\epsilon}}\partial_x - i(x-y)\frac{\hbar}{\epsilon}\partial_x - \frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2 + V(x)\right)^n\right). \quad (1.8)$$

Esse operador está sendo aplicado em $f(x) = 1$, portanto, considerando termos até primeira ordem

$$\begin{aligned} & \sum_n \left(\frac{-i\epsilon}{\hbar}\right)^n \frac{1}{n!} \left(-i2\rho\hbar\sqrt{\frac{1}{2m\epsilon}}\partial_x - i(x-y)\frac{\hbar}{\epsilon}\partial_x - \frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2 + V(x)\right)^n \\ &= \left(1 - \frac{i\epsilon}{\hbar}V(x) + \frac{-\epsilon^2}{2\hbar^2} \frac{-i\hbar}{\epsilon}(x-y)\partial_x V(x) + O(\epsilon^2) + O(\epsilon(|x-y|^2))\right) \\ &= \left(1 - \frac{i\epsilon}{\hbar} \left(V(x) + \left(\frac{(y+x)}{2} - x\right) \partial_x V(x)\right) + O(\epsilon^2) + O(\epsilon(|x-y|^2))\right). \end{aligned}$$

Dessa forma, obtém-se $V\left(\frac{x+y}{2}\right) = V(x) + \left(\frac{x+y}{2} - x\right) \partial_x V(x)$.

Substituindo esse resultado na integral (1.8) e fazendo a integração usando o lema (1.4), o resultado se torna

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{2m}{\epsilon}} e^{\frac{i}{\hbar}m\frac{(x-y)^2}{2\epsilon}} \int \frac{d\rho}{2\pi\hbar} e^{-\frac{i\rho^2}{\hbar}} \left(1 - \frac{i\epsilon}{\hbar} \left(V(x) + \left(\frac{(y+x)}{2} - x\right) \partial_x V(x)\right) + O(\epsilon^2) + O(\epsilon|x-y|^2)\right) \\ &= \sqrt{\frac{m}{2i\pi\hbar\epsilon}} e^{\left(\frac{i\epsilon}{\hbar}m\frac{(x-y)^2}{2\epsilon^2}\right)} e^{(-\frac{i\epsilon}{\hbar}V(\frac{x+y}{2})+O(\epsilon^2)+O(\epsilon|x-y|^2))}, \quad (1.9) \end{aligned}$$

sendo esta a prova do teorema (1.3). Agora, para aplicá-lo ao caso em que o intervalo $t_f - t_i$ não é infinitesimal, pode-se dividi-lo em n partes iguais a ϵ cada, de modo que o limite do produto $n\epsilon = t_f - t_i$ seja finito.

Matematicamente, isso pode ser feito utilizando a relação de completeza

$$1 = \int dx_k |x_k, t_k\rangle \langle x_k, t_k|,$$

$$\langle x_f, t_f | x_i, t_i \rangle = \langle x_f, t_f | \left(\prod_{k=1}^{n-1} \int dx_k |x_k, t_k\rangle \langle x_k, t_k| \right) | x_i, t_i \rangle,$$

obtendo, por fim,

$$\langle x_f, t_f | x_i, t_i \rangle = \prod_{k=1}^{n-1} \int dx_k \left(\prod_{i=0}^n K(x_{i+1}, x_i, i\epsilon/\hbar) \right). \quad (1.10)$$

Ao aplicar o resultado (1.9) em (1.10), faz-se necessário analisar o que acontecerá com o termo $O(\epsilon|x-y|^2)$, uma vez que, por mais que ϵ tenda à zero, as integrais intermediárias sobre as variáveis x_k terão termos que tenderão ao infinito, de modo que o módulo $|x-y|$ assumirá valores infinitos dentro da integral, e esses valores crescerão quadraticamente, em contraste ao crescimento linear de ϵ . Entretanto, tais termos se anularão, segundo o teorema de Riemann-Lebesgue

Teorema de Riemann-Lebesgue[3]: Seja $f(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função cuja integral em todo espaço é convergente, então

$$\lim_{w \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{iwx} dx = 0. \quad (1.11)$$

Com esse resultado, é possível ver que o termo $O(\epsilon|x-y|^2)$ fará com que todo $|x-y| \gg \epsilon$ se anule, de modo que as integrais considerarão valores infinitesimais de ϵ e $|x-y|$ [3].

Para $|x-y| < \epsilon$ (que serão os casos considerados, visto que os outros são nulos), o termo no expoente de (1.9) se aproxima de uma ação clássica, no intervalo $[0, \epsilon]$,

$$\Delta S = \int_0^\epsilon dt \left(\frac{mv^2}{2} - V(X) \right) \approx \epsilon \left(\frac{mv^2}{2} - V(X) \right), \quad (1.12)$$

sendo $X = \frac{x+y}{2}$ o ponto médio e $v = \frac{x-y}{\epsilon}$ a velocidade média. Portanto, com esses resultados, chega-se em

$$\langle x_k, t_k | x_{k-1}, t_{k-1} \rangle \approx \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar \epsilon}} e^{i\Delta S_k}.$$

Aplicando à equação (1.10), obtém-se, finalmente, o resultado

$$\langle x_f, t_f | x_i, t_i \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{m}{2\pi i \hbar \epsilon} \right)^{n/2} \int \exp \left(\frac{i}{\hbar} \sum \Delta S_k \right) \prod_k dx_k \quad (1.13)$$

$$\implies \langle x_f, t_f | x_i, t_i \rangle = \int \mathcal{D}x e^{i\frac{S}{\hbar}}, \quad (1.14)$$

onde S é a ação clássica, definida por

$$S = \int_{t_i}^{t_f} L dt. \quad (1.15)$$

Já o termo $\mathcal{D}x$ é chamado de medida quântica, e carrega a informação quântica do sistema, uma vez que a ação no expoente é clássica, e é definido por

$$\mathcal{D}x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{m}{2\pi i \hbar \epsilon} \right)^{n/2} \prod dx_i. \quad (1.16)$$

Com esse formalismo, foi feita uma interpretação da ação na mecânica quântica. O resultado obtido indica que a amplitude de probabilidade de uma partícula seguir um determinado caminho entre x_i e x_f é proporcional à ação clássica desse mesmo caminho. Também é possível provar que o caminho com maior probabilidade é justamente o dado pelas equações de Euler-Lagrange. Em outras palavras, o caminho mais provável de uma partícula partir do x_i até o ponto x_f é o que torna a ação estacionária.

Vale notar que, para valores de ação tais que $S \gg \hbar$, obtém-se a mecânica clássica já conhecida. Isso ocorre porque a amplitude de probabilidade correspondente à ação estacionária tende a ficar maior e com um desvio padrão cada vez menor, de modo que, quando o erro associado ao instrumento de medida é maior que esse desvio, sequer será possível medir outras trajetórias além da trajetória clássica.

1.1.2 Revisão de funções de Green

A física é uma ciência que busca encontrar equações diferenciais que descrevam a natureza, bem como encontrar soluções para essas equações. Como existem um número considerável de classes de equações diferenciais, muitos métodos diferentes foram desenvolvidos para cada classe e continuam a ser desenvolvidos. Mesmo assim, uma enorme parte das equações diferenciais só pode ser solucionadas numericamente, utilizando métodos numéricos e computadores. Nesse capítulo, será apresentado um método de resolução de equações diferenciais que terá enorme importância no estudo feito sobre teoria quântica de campos. Tal método é o das funções de Green [1].

Suponha uma equação diferencial linear não-homogênea

$$\hat{D}f(x) = j(x), \quad (1.17)$$

onde \hat{D} é um operador diferencial linear dado por

$$\hat{D} = \sum_{i=0}^n \alpha_i(x) \partial_x^i. \quad (1.18)$$

A função de Green $G(x, y)$ para tal operador diferencial é definida como a solução da equação

$$\hat{D}G(x, y) = \delta(x - y). \quad (1.19)$$

Com essa definição, pode-se enunciar o teorema a seguir.

Teorema: A solução da equação (1.17) é dada por

$$f(y) = \int dx j(x) G(x, y). \quad (1.20)$$

Demonstração: Têm-se:

$$\hat{D}_y G(x, y) j(x) = \delta(x - y) j(x) \quad (1.21)$$

Integrando (1.21) em relação a x ,

$$\int dx \hat{D}G(x, y)j(y) = j(y).$$

Como o operador atua na variável y , ele pode ser retirado da integração. Consequentemente,

$$\int dx \hat{D}G(x, y)j(y) = \hat{D} \int dx G(x, y)j(y) = j(x).$$

Logo, pelo teorema de existência e unicidade da solução de uma equação diferencial, tem-se

$$f(y) = \int dx G(x, y)j(x).$$

Portanto, encontrar a função de Green para um determinado operador torna possível resolver a equação (1.19) para um $j(y)$ dado.

Um teorema sobre como obter a função de Green para um caso específico do operador diferencial será demonstrado a seguir.

Teorema: Se o operador \hat{D} possui autovetores cujo os autovalores são reais, isto é

$$\hat{D}\psi_n(x) = \lambda_n\psi_n(x), \quad (1.22)$$

e se esses autovetores satisfazem a relação de completeza

$$\delta(x - y) = \sum_n \psi_n^*(x)\psi_n(y), \quad (1.23)$$

então, a função de Green é dada por

$$G(x, y) = \sum_n \frac{\psi_n^*(x)\psi_n(y)}{\lambda_n}. \quad (1.24)$$

Demonstração: Têm-se que

$$\hat{D} \left(\sum_n \frac{\psi_n^*(x)\psi_n(y)}{\lambda_n} \right) = \sum_n \hat{D} \frac{\psi_n^*(x)\psi_n(y)}{\lambda_n} = \sum_n \psi_n^*(x)\psi_n(y) = \delta(x - y).$$

Mas, por definição,

$$\hat{D}G(x, y) = \delta(x - y).$$

Portanto, pelo teorema de existência e unicidade da solução, é obtido o resultado

$$G(x, y) = \sum_n \frac{\psi_n^*(x)\psi_n(y)}{\lambda_n}.$$

Com esses resultados será possível estudar os propagadores como funções de Green. De fato, eles podem ser definidos como funções de Green para operadores específicos.

1.1.3 Propagador

Nas subseções passadas, foi definida uma expressão geral para o propagador na mecânica quântica. Ele é definido pela amplitude de probabilidade de uma partícula evoluir de um estado x_i para um x_f em um intervalo de tempo dado. Usando essa definição, chega-se na expressão para o propagador

$$K(x_f, x_i, i(t_f - t_i)/\hbar) = \langle x_f, t_f | x_i, t_i \rangle = \int_{x_i}^{x_f} Dx \cdot \exp\left(\frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} L dt\right). \quad (1.25)$$

Note que, como dado pela definição, o propagador satisfaz a equação de Schrödinger. De fato, derivando o propagador em relação ao tempo, tem-se

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle x, t | x_0, t_0 \rangle = \frac{\partial}{\partial t} \langle x | e^{-i\frac{H(t-t_0)}{\hbar}} | x_0 \rangle = \frac{-iH}{\hbar} \langle x, t | x_0, t_0 \rangle.$$

Ou, escrito de outra maneira,

$$(i\hbar\partial_t - H)K(x, x_0, i(t - t_0)/\hbar) = 0. \quad (1.26)$$

Isso, é claro, para $t \neq t_0$.

A equação (1.26) pode ser usada para generalizar a definição de propagador. Perceba que, dada a função $i\hbar G(x, t : x_0, t_0) = \Theta(t - t_0)K(x, x_0, i(t - t_0)/\hbar)$, a seguinte equação é válida

$$(i\hbar\partial_t - H)G(x, t, : x_0, t_0) = \delta(t - t_0)\delta(x - x_0). \quad (1.27)$$

Isso acontece pois, para $t = t_0$, o propagador é um delta de Dirac com o argumento $(x - x_0)$.

A generalização para o propagador surge naturalmente.

Definição: Seja \hat{D} um operador diferencial linear cuja equação que descreve a dinâmica de uma função $f(x_1, x_2, \dots, x_n, t)$, no caso livre, é dada por

$$\hat{D}f(x_1, \dots, x_n, t) = 0,$$

então, o propagador é dado pela função de Green de \hat{D} .

A definição acima generaliza a ideia de propagador, pois, em determinados sistemas quânticos, nem sempre a equação de Schrödinger como escrita em (1.26) é capaz de descrever a dinâmica de evolução da função de onda. Um exemplo é a primeira tentativa de generalização da equação de onda para uma partícula relativística. Dada a equação de energia relativística

$$E^2 - (pc)^2 - (mc^2)^2 = 0,$$

fazendo a primeira quantização, i.e., substituindo $E \rightarrow i\hbar\partial_t$ e $\vec{p} \rightarrow -i\hbar\nabla$, obtém-se a equação de Klein-Gordon

$$(-\hbar^2\partial_t^2 + \hbar^2c^2\nabla^2 - (mc^2)^2)\phi = 0. \quad (1.28)$$

Como pode-se observar, o operador linear não pode ser escrito como na equação (1.26). Por isso, é importante uma definição que seja válida para quaisquer operadores diferenciais lineares que possam descrever um sistema dinâmico.

1.1.4 Funcional gerador para a mecânica quântica

O estudo do funcional gerador se inicia através do formalismo de Schwinger[2], no qual é considerada uma lagrangiana com a presença de uma fonte J . Tal fonte é adicionada para permitir a formulação do funcional gerador. Primeiro, é necessário discutir algumas ideias.

Definição: O produto de tempo ordenado é dado por

$$T[A(t_1)B(t_2)] = A(t_1)B(t_2)\Theta(t_1 - t_2) + B(t_2)A(t_1)\Theta(t_2 - t_1), \quad (1.29)$$

sendo $\Theta(x)$ a função de Heaviside.

Note que essa definição tem por objetivo permitir que a aplicação sequencial de operadores dependentes do tempo seja feita de modo que os primeiros operadores a serem aplicados sempre sejam os de menor tempo. Definir o produto de tempo ordenado é importante para o raciocínio que será desenvolvido a seguir.

Primeiramente, considere a expressão

$$\langle x_f, t_f | \hat{x}(t_N) \hat{x}(t_{N-1}) \dots \hat{x}(t_1) | x_i, t_i \rangle.$$

Esse produto está na representação de Heisenberg. Mudando para a representação de Schrödinger, esse produto se torna

$$\langle x_f | U(t_f - t_N) \hat{x} U^\dagger(t_N - t_{N-1}) \hat{x} U^\dagger(t_{N-1} - t_{N-2}) \dots U(t_2 - t_1)^\dagger \hat{x} U(t_1 - t_i) | x_i \rangle. \quad (1.30)$$

Usando a relação de completeza dos autoestados de operador \hat{x} , bem como um raciocínio análogo ao feito para encontrar a expressão da integral de caminho, obtém-se

$$\langle x_f, t_f | \hat{x}(t_N) \hat{x}(t_{N-1}) \dots \hat{x}(t_1) | x_i, t_i \rangle = \int \mathcal{D}x \cdot x(t_N) \dots x(t_1) e^{iS}. \quad (1.31)$$

O \hbar foi omitido pois, daqui por diante, será utilizado o sistema de unidades naturais tais que $\hbar = c = 1$.

No lado esquerdo da equação (1.31), aparecem os operadores na representação de Heisenberg para tempos diferentes, enquanto no lado direito, estão os valores que o caminho assume para um t_k específico. Por outro lado, no termo da direita, pode-se mudar as ordens das funções $x(t)$, pois essas não são operadores nessa integração. Ou seja, o termo da direita seria o mesmo se o produto de operadores fosse ordenado pelo tempo. Usando a nova definição de propagador, dada na subseção anterior, tem-se que o

mesmo deve ser nulo para valores de $t < t_0$. Portanto, isso naturalmente explicita que o resultado em (1.31) pode ser dado por

$$\langle x_f, t_f | T(\hat{x}(t_N)\hat{x}(t_{N-1})\dots\hat{x}(t_1)) | x_i, t_i \rangle = \int \mathcal{D}x \cdot x(t_N)\dots x(t_1) e^{iS}, \quad (1.32)$$

que equivale à

$$\langle x_f, t_f | T(\hat{x}(t_N)\hat{x}(t_{N-1})\dots\hat{x}(t_1)) | x_i, t_i \rangle = \int \mathcal{D}x \cdot x(t_1)x(t_2)\dots x(t_N) e^{iS}.$$

Agora, considere a lagrangiana na presença de uma fonte

$$L' = L + xJ,$$

sendo L a lagrangiana usual. Portanto, o propagador é dado por

$$\langle x_f, t_f | x_i, t_i \rangle_J = \int \mathcal{D}x e^{i \int_{t_i}^{t_f} (L+xJ) dt}.$$

Suponha que essa fonte é não-nula em um intervalo $[t, t'] \in [t_i, t_f]$, onde $t_i < t < t' < t_f$. Fora desse intervalo, ela é igual a 0. Logo,

$$\langle x_f, t_f | x_i, t_i \rangle_J = \int dx dx' \langle x_f, t_f | x', t' \rangle \langle x', t' | x, t \rangle_J \langle x, t | x_i, t_i \rangle,$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} \langle x_f, t_f | x', t' \rangle &= \sum_n \psi_n^*(x_f) \psi_n(x') e^{-iE_n(t_f-t')} \\ \langle x, t | x_i, t_i \rangle &= \sum_m \psi_m^*(x) \psi_m(x_i) e^{-iE_m(t-t_i)} \end{aligned}$$

Ao se tomar os limites de tempo para infinito, as exponenciais oscilam, de modo que tal limite não é bem definido. Portanto, faz-se necessário adicionar uma pequena perturbação ao hamiltoniano. Uma vez que a fonte já é uma expressão de primeira ordem, adiciona-se um termo de segunda ordem, $-i\epsilon x^2$, ao hamiltoniano e, após os cálculos, faz-se o limite que ϵ tende a zero.²

Com o termo de perturbação, ao se fazer o limite que $t_f \rightarrow \infty$ e $t_i \rightarrow -\infty$, somente o estado fundamental $n = 0$ sobrevive, pois o autovetor de energia terá um acréscimo infinitesimal de menor ordem. Logo

$$\begin{aligned} \lim_{t_f \rightarrow \infty} e^{iE_0 t_f} \langle x_f, t_f | x', t' \rangle &= \psi_0^*(x_f) \psi_0(x', t'), \\ \lim_{t_i \rightarrow -\infty} e^{-iE_0 t_i} \langle x, t | x_i, t_i \rangle &= \psi_0^*(x, t) \psi_0(x_i), \end{aligned}$$

implicando em

$$\lim_{t_f, t_i \rightarrow \infty, -\infty} \langle x_f, t_f | x_i, t_i \rangle_J = \psi_0^*(x_f) \psi_0(x_i) \int dx dx' \psi_0(x', t') \langle x', t' | x, t \rangle_J \psi_0^*(x, t),$$

² Vale salientar que ϵ têm um significado mais profundo, sendo uma consequência de uma renormalização da teoria, que não será aprofundado nesse trabalho. Para um estudo sobre o assunto, recomenda-se uma leitura do capítulo nove do livro do Ryder[8].

$$\lim_{t_f, t_i \rightarrow \infty, -\infty} \langle x_f, t_f | x_i, t_i \rangle_J = \psi_0^*(x_f) \psi_0(x_i) \langle 0, t' | 0, t \rangle_J.$$

Agora, já é possível definir o funcional gerador. Primeiramente, tem-se

$$\langle x_f, t_f | x_i, t_i \rangle_J = \langle x_f | e^{-iH(t_f-t')} e^{-iH'(t'-t)} e^{-iH(t-t_i)} | x_i \rangle,$$

onde $H' = H - xJ$. Considerando $\{|n\rangle\}$ um conjunto completo de autovetores do hamiltoniano, a expressão acima se torna

$$\langle x_f, t_f | x_i, t_i \rangle_J = \sum_n \sum_m \langle x_f | e^{-iH(t_f-t')} | n \rangle \langle n | e^{-iH'(t'-t)} | m \rangle \langle m | e^{-iH(t-t_i)} | x_i \rangle,$$

fazendo os limites do tempo inicial e final

$$\begin{aligned} \lim_{t_f, t_i \rightarrow \infty, -\infty} \langle x_f, t_f | x_i, t_i \rangle_J &= \langle 0 | x_i \rangle \langle x_f | 0 \rangle Z[J] \\ \implies Z[J] &= \lim_{t_f, t_i \rightarrow \infty, -\infty} \frac{\langle x_f, t_f | x_i, t_i \rangle_J}{\langle 0 | x_i \rangle \langle x_f | 0 \rangle}, \end{aligned} \quad (1.33)$$

sendo $Z[J]$ a definição de funcional gerador.

Pelos resultados anteriores, é evidente que

$$Z[J] = \langle 0, \infty | 0, -\infty \rangle_J, \quad (1.34)$$

ou seja, o funcional gerador é proporcional a um estado de vácuo no tempo $-\infty$ indo para o estado de vácuo no ∞ . Usando a fórmula da integral de caminho, encontra-se que o funcional gerador tem a forma

$$Z[J] = N^{-1} \int \mathcal{D}x e^{i \int_{-\infty}^{\infty} dt (L + xJ + i\epsilon x^2)} = N^{-1} \int \mathcal{D}x e^{iS_J}, \quad (1.35)$$

sendo N um fator de normalização e S_J a ação com a fonte J . O termo de normalização é dado por

$$N = \int \mathcal{D}x e^{iS},$$

ou seja, considerando $J = 0$, o funcional gerador assume valor igual a 1.

A ideia de funcional gerador surge justamente do objetivo de se obter as expressões da forma de (1.32) a partir das derivadas funcionais de (1.35). Mais especificamente, a derivada do funcional gerador gera o valor esperado do produto ordenado dos operadores $x(t)$ em relação ao estado de vácuo.

1.1.5 Derivada de um funcional

Antes de estudar as derivadas do funcional gerador (1.35), é necessário revisar, de maneira superficial, a definição de derivada funcional e algumas de suas propriedades.

Definição: Seja f uma função infinitamente diferenciável e que decresce mais rápido do que qualquer potência de $|x|^{-1}$, então, um funcional é definido por

$$F : f \rightarrow \mathbb{R}.$$

Em outras palavras, um funcional é uma função de funções.

Portanto, a derivada é definida como

$$\frac{\delta F[f]}{\delta f} h = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} (F[f(x) + \epsilon h(x, y)] - F[f]). \quad (1.36)$$

Sendo $F[f] = \int dx F(f)$, tem-se

$$\frac{\delta F[f]}{\delta f} h = \int dx \frac{\delta F(f(x))}{\delta f(y)} h(x, y), \quad (1.37)$$

onde

$$\frac{\delta F(f(x))}{\delta f(y)} h(x, y) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} (F(f(x) + \epsilon h(x, y)) - F(f(x))). \quad (1.38)$$

Para o caso particular de $h(x, y) = \delta(x - y)$, tem-se

$$\frac{\delta F[f](x)}{\delta f(y)} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} (F[f + \epsilon \delta] - F[f]). \quad (1.39)$$

Tendo agora tal definição, é interessante estudar alguns exemplos simples. O primeiro deles é a derivada funcional de (1.40),

$$F[f] = \int dx f(x). \quad (1.40)$$

Pela definição,

$$\frac{\delta F}{\delta f} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \left(\int dx (f(x) + \epsilon \delta(x - y)) - \int dx f(x) \right) = \int dx \delta = 1. \quad (1.41)$$

Um resultado análogo ao da derivada de uma função linear $f(x) = x$.

Outro exemplo é o dado pelo funcional (1.42),

$$F[f] = \int dx \delta(x - y) f(x) = f(y). \quad (1.42)$$

Portanto, a derivada funcional é dada por

$$\implies \frac{\delta F[f](y)}{\delta f(x)} = \delta(x - y). \quad (1.43)$$

Análogo ao caso de funções, uma expansão de Taylor de um funcional genérico pode ser obtida através da definição de derivada funcional, como dado em (1.44),

$$F[f + h] = \sum_n \frac{1}{n!} h^n \frac{\delta^n F[f]}{\delta f^n} = \sum_n \frac{1}{n!} \int dx_1 dx_2 \dots dx_n \frac{\delta^n F[f]}{\delta f(x_1) \delta f(x_2) \dots \delta f(x_n)} h(x_1) \dots h(x_n). \quad (1.44)$$

Essa expansão será importante para os estudos que virão a seguir, pois, como dito anteriormente, os valores esperados de grandezas físicas podem ser obtidos a partir da derivada funcional do funcional gerador.

1.1.6 Derivada do funcional gerador

Fazendo a derivada do funcional gerador, utilizando as técnicas estudadas na subseção anterior, obtém-se

$$\frac{\delta Z[j]}{\delta j(t')} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\alpha} \left(\int \mathcal{D}x e^{i \int dt L + x(t)(J + \alpha \delta(t-t')) + i\epsilon x^2} - \int \mathcal{D}x e^{i \int dt L + x(t)J(t) + i\epsilon x^2} \right). \quad (1.45)$$

Expandindo a exponencial de (1.45) em torno de α ,

$$e^{i \int dt \alpha \delta(t-t') x(t)} = e^{i\alpha x(t')} = 1 + ix(t')\alpha + O(\alpha^2). \quad (1.46)$$

Logo, obtém-se o resultado

$$\frac{\delta Z[J]}{\delta J(t')} = i \int \mathcal{D}x \cdot x(t') e^{iS_J}. \quad (1.47)$$

Por indução, é possível generalizar o resultado (1.47) para (1.48),

$$\langle 0, \infty | T(x(t_1) \dots x(t_n)) | 0, -\infty \rangle = (-i)^n \frac{\delta^n Z[j]}{\delta J(t_1) \dots \delta J(t_n)} \Bigg|_{J=0}. \quad (1.48)$$

O fato do produto de operadores em (1.48) ser em tempo ordenado já foi discutido.

Agora que todo o ferramental necessário já foi apresentado, será formulada a teoria quântica de campos.

1.2 Teoria do campo escalar

A natureza de um campo está intimamente associada com a sua representação no grupo de Lorentz. Campos espinoriais se transformam através da representação irredutível do grupo de Lorentz, já campos escalares transformam apenas seu argumento, que é o quadrvetor posição.

Nesta seção será apresentada o método de quantização do campo de Klein-Gordon (campo escalar) através do funcional gerador. Com ele, se torna possível obter todas as funções de Green e, conseqüentemente, toda a informação da matriz de espalhamento S [2].

1.2.1 Campo escalar

Ao passar para uma teoria de campos, a ação se torna uma integral da densidade lagrangiana em um volume do espaço-tempo, como dado em (1.49),

$$S = \int d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi, x_\mu). \quad (1.49)$$

As equações de Euler-Lagrange são obtidas tornando estacionária a ação (1.49), assim como é feito no caso da mecânica analítica. No caso de um campo escalar, a equação é dada por (1.50),

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0. \quad (1.50)$$

Portanto, o funcional gerador é definido como apresentado em (1.51),

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\phi e^{i \int d^4x (\mathcal{L} + \phi J + \frac{1}{2} i\epsilon \phi^2)}, \quad (1.51)$$

sendo o termo multiplicando ϵ é adicionado para evitar divergências nas funções de Green.

O caso estudado nesta seção é o do campo de Klein-Gordon. Portanto, a lagrangiana é a expressa em (1.52),

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - m^2 \phi^2). \quad (1.52)$$

Substituindo (1.50) em (1.52), obtém-se a equação de Klein-Gordon, dada por

$$(\partial^\mu \partial_\mu + m^2) \phi = 0. \quad (1.53)$$

Note que essa lagrangiana pode ser reescrita de uma maneira mais conveniente. Para isso, considere a ação

$$S = \int d^4x \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - m^2 \phi^2). \quad (1.54)$$

Em um volume arbitrário ω , é possível integrar por partes,

$$\implies \int_\omega d^4x \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi = \oint_{\partial\omega} d^3S_\mu \phi \partial^\mu \phi - \int_\omega \phi \partial_\mu \partial^\mu \phi d^4x.$$

Como a integral no funcional gerador é sobre todo o espaço, os termos de superfície se anularão, sobrando (1.55),

$$\int d^4x \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi = - \int d^4x \phi \partial_\mu \partial^\mu \phi. \quad (1.55)$$

Logo, a ação livre se torna

$$S = -\frac{1}{2} \int d^4x \phi (\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \phi, \quad (1.56)$$

substituindo (1.56) em (1.51),

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\phi e^{-i \int d^4x (\frac{1}{2} \phi (\partial_\mu \partial^\mu + m^2 - i\epsilon) \phi - J\phi)}. \quad (1.57)$$

Note que agora há um jeito mais conveniente de se escrever o funcional gerador. Primeiramente, perceba que a integral é sobre todos os possíveis campos (não somente o campo que satisfaz a equação de movimento), e isso pode ser usado para calcular o funcional gerador. Primeiro, defina o operador diferencial (1.58),

$$D = \partial_\mu \partial^\mu + m^2 - i\epsilon. \quad (1.58)$$

Assim, a equação de movimento com a fonte é dada por

$$D\phi = J. \quad (1.59)$$

Como já visto, o propagador de Feynman desse sistema é definido por (1.60),

$$D\Delta_F(x_\mu, y_\mu) = \delta(x_\mu - y_\mu). \quad (1.60)$$

Para calcular o propagador em (1.60) usando os métodos estudados na subseção das funções de Green, faz-se necessário, primeiramente, resolver a equação de autovalor e autovetor do operador (1.58). Portanto,

$$D\Phi = \lambda\Phi. \quad (1.61)$$

Uma solução para (1.61) é dado por $\Phi = \exp\{ip^\mu x_\mu\}$. Substituindo em (1.61), obtém-se o autovalor dado em (1.62),

$$D\phi = (-p^\mu p_\mu + m^2 - i\epsilon)\Phi = \lambda\Phi, \quad (1.62)$$

usando o resultado (1.24), têm-se que o propagador é dado por (1.63),

$$\Delta_F(x, y) = A \int d^4p \frac{e^{ip_\mu(x^\mu - y^\mu)}}{-p^2 - i\epsilon + m^2}, \quad (1.63)$$

sendo A um fator de normalização. Para que a equação (1.60) seja satisfeita, $A = (2\pi)^{-4}$.

A partir de agora, com o objetivo de facilitar a notação, x^μ será reescrito como x e $x_\mu y^\mu = xy$.

Finalmente, chega-se ao campo que satisfaz a equação de movimento (1.59) usando os resultados já obtidos,

$$\phi = \int d^4y \Delta_F(x, y) J(y). \quad (1.64)$$

O campo (1.64) será denotado por ϕ_0 . Reescrevendo o campo $\phi \rightarrow \phi_0 + \phi$ em (1.57), têm-se

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\phi D\phi - J\phi &\rightarrow \frac{1}{2}(\phi_0 + \phi)D(\phi_0 + \phi) - J(\phi_0 + \phi) = \\ &= \frac{1}{2}(\phi D\phi + \phi_0 D\phi + \phi D\phi_0 + \phi_0 D\phi_0) - J(\phi_0 + \phi). \end{aligned}$$

Note que, dentro da ação, é possível fazer

$$\int d^4x \phi_0 D\phi = \int d^4x \phi D\phi_0,$$

análogo ao que foi feito em (1.56). Consequentemente,

$$\begin{aligned} \implies \frac{1}{2}(\phi D\phi + \phi_0 D\phi_0 + 2\phi D\phi_0) - J(\phi_0 + \phi) &= \frac{1}{2}(\phi D\phi + \phi_0 D\phi_0) - J\phi_0 \\ &= \frac{1}{2}(\phi D\phi - J\phi_0). \end{aligned} \quad (1.65)$$

Assim, usando o resultado (1.65) em (1.57), chega-se em (1.66),

$$Z[J] = N^{-1} \int \mathcal{D}\phi e^{-\frac{i}{2} \int d^4x (\phi D\phi - J\phi_0)} = N^{-1} e^{\frac{i}{2} \int d^4x d^4y J(y) \Delta_F(x, y) J(x)} \int \mathcal{D}\phi e^{-\frac{i}{2} \int d^4x \phi D\phi}, \quad (1.66)$$

sendo a normalização dada por $N = Z[0]$. Consequentemente,

$$Z[J] = e^{\frac{i}{2} \int d^4x d^4y J(x) \Delta_F(x,y) J(y)}. \quad (1.67)$$

Outra noção muito importante é o de um determinante de um operador diferencial. Considere o teorema a seguir.

Teorema: Dada uma matriz A real e simétrica, tem-se que

$$\int \frac{d^n x}{(2\pi)^{n/2}} e^{-1/2(x, Ax)} = (\det(A))^{-1/2}. \quad (1.68)$$

A expressão (1.68) é chamada de fórmula gaussiana.

Demonstração: Sendo a matriz real e simétrica, então, a matriz é hermitiana e admite autovetores ortonormais entre si. Logo, escolhendo uma matriz de mudança de base B que diagonaliza a matriz A , tem-se que as transformações são dadas por (1.69) e (1.70),

$$BAB^T = A', \quad (1.69)$$

$$y = Bx. \quad (1.70)$$

Portanto,

$$(x, Ax) = (y, A'y) = \sum_n y_n^2 \alpha_n, \quad (1.71)$$

sendo $\{\alpha_n\}$, em (1.71), os autovalores de A . Portanto, a integral (1.68) se transforma em (1.72),

$$\int f(x) d^n x = \int g(y) \det \left(\frac{\partial(x_1, \dots, x_n)}{\partial(y_1, \dots, y_n)} \right) d^n y, \quad (1.72)$$

como $y = Bx$,

$$\frac{\partial(y)}{\partial(x)} = B, \quad (1.73)$$

$$\implies \det \left(\frac{\partial(y)}{\partial(x)} \right) = \pm 1, \quad (1.74)$$

pois $\det(BAB^T) = \det(BB^T A) = \det(A)$. Logo,

$$\int \frac{d^n y}{(2\pi)^{n/2}} e^{-\frac{1}{2} \sum_n \alpha_n y_n^2} = \prod_n \int dy_n \frac{e^{-\frac{1}{2} \alpha_n y_n^2}}{(2\pi)^{1/2}} = \prod_n \alpha_n^{-1/2}, \quad (1.75)$$

com $\det(A) = \det(A') = \prod_n \alpha_n$. Então,

$$\int \frac{d^n x}{(2\pi)^{n/2}} e^{-1/2(x, Ax)} = \det(A)^{-1/2}, \quad (1.76)$$

como se queria demonstrar.

Generalizando o resultado acima para variáveis complexas $z = x + iy$ e $z^* = x - iy$, têm-se

$$\frac{1}{2\pi} \int dz dz^* e^{-\frac{1}{2}zaz^*}, \quad (1.77)$$

em um espaço vetorial de dimensão 1 e corpo nos complexos. Para um espaço de dimensão n , a generalização é (1.78),

$$\int \frac{d^n z d^n z^*}{(2\pi)^n} e^{-\frac{1}{2}(z, Az)}, \quad (1.78)$$

em que A é hermitiana e o produto satisfaz a simetria hermitiana, isto é, $(z, y) = (y, z)^*$.

Essa fórmula é dada em um espaço vetorial de dimensão finita. Para o espaço de dimensão infinita incontável das funções, cujo produto interno com um operador A é definido por (1.79), a formula (1.68) é generalizada para (1.80),

$$(\phi, A\phi) = \int dx dy \phi^*(x) A(x, y) \phi(y), \quad (1.79)$$

$$\int d\phi^* d\phi e^{-\frac{1}{2}(\phi, A\phi)} = \det(A)^{-1}. \quad (1.80)$$

Importante notar que, se A é diagonal no produto 1.79, então

$$A(x, y) = A(x) \delta(x - y)$$

$$\implies (1.79) = \int dx \phi^*(x) A(x) \phi(x). \quad (1.81)$$

Retornando ao funcional gerador, são usados os resultados obtidos para reescrevê-lo da forma (1.82),

$$\int d\phi e^{-\frac{1}{2} \int d^4 x \phi i D \phi} = \det(iD)^{-1/2}. \quad (1.82)$$

Se for generalizar a teoria para campos complexos, basta usar a lagrangiana (1.83) e o funcional gerador será (1.84),

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi \phi^*), \quad (1.83)$$

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\phi e^{i \int d^4 x (\mathcal{L} + J' \phi + J \phi^* + \frac{1}{2} i \epsilon \phi \phi^*)}. \quad (1.84)$$

Assim, as equações de movimento são (1.85) e (1.86),

$$D\phi = J, \quad (1.85)$$

$$D\phi^* = J'. \quad (1.86)$$

Agora, com tudo que já foi estudado, é possível usar o funcional gerador para calcular as funções de Green. Na subseção seguinte, será mostrada a relação entre as funções de Green e o funcional gerador.

1.2.2 Função de Green livre

O funcional $Z[J]$ pode ser utilizado para calcular as funções de Green livres. O funcional encontrado na subseção anterior foi

$$Z[J] = e^{-\frac{i}{2} \int d^4x d^4y J(y) \Delta(x-y) J(x)}, \quad (1.87)$$

sendo o propagador dado por $\Delta(x) = - \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{ipx}}{-p^2 - i\epsilon + m^2}$ ³. Expandindo a exponencial em séries, obtém-se (1.88),

$$Z[J] = 1 - \left(\frac{i}{2}\right) \left[\int d^4x d^4y J(y) \Delta(x-y) J(x) \right] + \left(\frac{i}{2}\right)^2 \left[\int d^4x d^4y J(y) \Delta(x-y) J(x) \right]^2 - \dots \quad (1.88)$$

Generalizando o que foi feito no funcional gerador da mecânica quântica para a teoria de campos,

$$\langle 0|T(\phi(x_1)\dots\phi(x_n))|0\rangle = (-i)^n \frac{\delta Z[J]}{\delta J(x_1)\dots\delta J(x_n)} \Bigg|_{J=0} = \tau(x_1, \dots, x_n), \quad (1.89)$$

que são justamente as funções de Green, sendo estas o valor esperado de vácuo do operador de tempo ordenado dos campos.⁴ Usando a definição da função τ acima, é possível reescrever a expansão do funcional gerador como

$$\begin{aligned} Z[J] &= \sum_n \frac{1}{n!} \frac{\delta Z[J]}{\delta J^n} \Bigg|_{J=0} J^n \\ &= \sum_n \frac{1}{n!} \int d^4x_1 d^4x_2 \dots d^4x_n J(x_1) J(x_2) \dots J(x_n) \frac{\delta Z[J]}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_n)} \Bigg|_{J=0} \\ \implies Z[J] &= \sum_n \frac{i^n}{n!} \int d^4x_1 d^4x_2 \dots d^4x_n J(x_1) J(x_2) \dots J(x_n) \tau(x_1, x_2, \dots, x_n). \end{aligned} \quad (1.90)$$

Também é possível reescrever o funcional gerador como sendo o valor esperado de vácuo do operador de evolução temporal cuja hamiltoniana é o termo interação entre corrente e campo. Para isso, considere a expressão (1.91),

$$Z[j] = \sum_n \frac{i^n}{n!} \int d^4x_1 d^4x_2 \dots d^4x_n J(x_1) J(x_2) \dots J(x_n) \langle 0|T\phi(x_1)\dots\phi(x_n)|0\rangle, \quad (1.91)$$

que é equivalente a

$$Z[j] = \langle 0| \sum_n \frac{i^n}{n!} \int d^4x_1 d^4x_2 \dots d^4x_n J(x_1) J(x_2) \dots J(x_n) T\phi(x_1)\dots\phi(x_n) |0\rangle \quad (1.92)$$

³ Houve uma mudança de sinal em relação ao propagador da subseção anterior, que não estava na convenção comum. A partir de agora, a convenção será seguida.

⁴ As funções de Green, como já mencionado, são utilizadas no cálculo da matriz de espalhamento S , e estão intimamente relacionadas a criação e destruição das partículas associadas aos campos[9]. Por mais que tenham o mesmo nome e estejam relacionadas até certo ponto, tome cuidado para não confundir com a função de Green utilizada para resolver equações diferenciais. Estas funções de Green(apresentadas na subseção 1.1.2) estão sendo chamadas de propagadores.

$$\begin{aligned} \Rightarrow Z[j] &= \langle 0|T \sum_n \frac{i^n}{n!} \int d^4x_1 d^4x_2 \dots d^4x_n J(x_1) J(x_2) \dots J(x_n) \phi(x_1) \dots \phi(x_n) |0\rangle \\ Z[j] &= \langle 0|T e^{i \int d^4x J(x)\phi(x)} |0\rangle. \end{aligned} \quad (1.93)$$

Note que, como apresentado em (1.93), o funcional gerador é obtido considerando o produto entre um estado de vácuo e um estado de vácuo onde se opera a matriz S cujo termo de interação é $J\phi$. Isso está em concordância com a definição de funcional gerador dada em (1.34).

1.2.3 Campo escalar com auto-interação

Até agora, o único caso considerado foi o de um campo escalar livre, sem interações. Entretanto, a realidade física é que campos interagem a todo momento. As vezes, possuem auto-interação e, em outras, interagem com outros campos. Portanto, uma generalização para esses casos se torna necessária.

Considere uma interação na lagrangiana

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1 \quad (1.94)$$

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - m^2 \phi^2). \quad (1.95)$$

Para o termo de interação, considere uma auto-interação do campo escalar, dada por $\mathcal{L}_1 = -\frac{g}{4!}\phi^4$, sendo g uma constante de proporcionalidade que diz a intensidade da interação, de modo que, ao se anular, obtenha-se a lagrangiana do campo livre. Assim, a lagrangiana se torna

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - m^2 \phi^2) - \frac{g}{4!}\phi^4, \quad (1.96)$$

para a lagrangiana (1.96), a equação de movimento é dada por

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi - m^2 \phi + \frac{g}{6}\phi^3 = 0. \quad (1.97)$$

Uma pergunta importante surge: como calcular o funcional gerador de um campo com interações? O resultado que será obtido adiante pode ser generalizado para qualquer campo. Primeiramente, para a lagrangiana do campo com interação, o funcional gerador se torna

$$Z[J] = N \int \mathcal{D}\phi e^{i \int d^4x (\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1 + J\phi)}, \quad (1.98)$$

com o fator de normalização sendo

$$N^{-1} = \int \mathcal{D}\phi e^{i \int d^4x (\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1)}. \quad (1.99)$$

Mas, como a expressão para o funcional livre já foi calculada, seria interessante reescrever (1.98) em termos de $Z_0[J]$.

Proposição: O funcional gerador com interação se relaciona com o funcional gerador livre através da expressão (1.100),

$$Z[J] = N e^{i \int d^4x \mathcal{L}_1(-i \frac{\delta}{\delta J})} Z_0[J], \quad (1.100)$$

sendo Z_0 o gerador para o campo livre.

Demonstração: Suponha $\mathcal{L}_1(\phi) = gP(\phi)$, sendo $P(\phi)$ um monômio, têm-se que

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\phi e^{i \int d^4x \mathcal{L}_1} e^{i \int d^4x (\mathcal{L}_0 + J\phi)}. \quad (1.101)$$

Expandindo a exponencial de interação

$$e^{i \int d^4x \mathcal{L}_1} = \sum_n \frac{i^n}{n!} \left(\int d^4x \mathcal{L}_1 \right)^n = \sum_n \frac{i^n g^n}{n!} \left(\int d^4x P(\phi) \right)^n. \quad (1.102)$$

Um monômio genérico para o caso de auto-interação tem a forma dada em (1.103),

$$P(\phi) = a\phi^m, \quad (1.103)$$

de modo que é possível reescrever cada termo de n-ésima ordem como

$$\begin{aligned} & \int \mathcal{D}\phi \int d^4x_1 d^4x_2 \dots d^4x_n \mathcal{L}_1(\phi(x_1)) \mathcal{L}_1(\phi(x_2)) \dots \mathcal{L}_1(\phi(x_n)) e^{iS_0} = \\ & = \int \mathcal{D}\phi \int d^4x_1 d^4x_2 \dots d^4x_n a^n \phi(x_1)^m \dots \phi(x_n)^m e^{iS_0} \\ & = \int d^4x_1 d^4x_2 \dots d^4x_n a^n \int \mathcal{D}\phi \phi(x_1)^m \dots \phi(x_n)^m e^{iS_0} \\ & = \int d^4x_1 d^4x_2 \dots d^4x_n (-i)^n a^n \left(\frac{\delta^m}{\delta j(x_1)^m} \right) \dots \left(\frac{\delta^m}{\delta j(x_n)^m} \right) Z_0 \\ & = \int d^4x_1 d^4x_2 \dots d^4x_n \mathcal{L}_1 \left(-i \frac{\delta}{\delta j(x_1)} \right) \mathcal{L}_1 \left(-i \frac{\delta}{\delta j(x_2)} \right) \dots \mathcal{L}_1 \left(-i \frac{\delta}{\delta j(x_n)} \right) Z_0. \end{aligned} \quad (1.104)$$

Consequentemente, é possível escrever

$$\int \mathcal{D}\phi \left(\int d^4x P(\phi) \right)^n e^{i \int d^4x (\mathcal{L}_0 + J\phi)} = \left(\prod_{i=1}^n \int d^4x_i P \left(-i \frac{\delta}{\delta J_i} \right) \right) Z_0, \quad (1.105)$$

substituindo (1.105) em (1.101) já expandido,

$$\begin{aligned} Z[J] &= \int \mathcal{D}\phi \left(\sum_n \frac{i^n}{n!} \left(\int d^4x P(\phi) \right)^n \right) e^{i \int d^4x (\mathcal{L}_0 + J\phi)} \\ &= N \sum_n \frac{i^n}{n!} \left(\int d^4x P \left(-\frac{\delta}{\delta J} \right) \right)^n Z_0 = N e^{i \int d^4x \mathcal{L}_1(-i \frac{\delta}{\delta J})} Z_0[J], \end{aligned} \quad (1.106)$$

provando (1.100).

Exemplo: Considere, como exemplo, a própria lagrangiana de interação analisada,

$$\mathcal{L}_1 = -\frac{g}{4!} \phi^4, \quad (1.107)$$

$$Z[J] = N e^{i \int d^4x \frac{g}{4!} \frac{\delta^4}{\delta J^4} Z_0[J]}. \quad (1.108)$$

Expandindo até primeira ordem em g ,

$$Z[J] = \left(1 + i \frac{g}{4!} \int d^4x \frac{\delta^4}{\delta J^4} \right) Z_0[J]. \quad (1.109)$$

Nas subseções anteriores, foi calculado a seguinte expressão para o funcional gerador livre,

$$Z_0[J] = N_0 e^{-\frac{i}{2} \int dy dz J(z) \Delta(z-y) J(y)}, \quad (1.110)$$

calculando a quarta derivada de (1.110),

$$\begin{aligned} (-i)^4 \frac{\delta^4 Z_0[J]}{\delta J(w)^4} &= \frac{\delta^4 Z_0[J]}{\delta J(w)^4} = \left(-3\Delta(0)^2 + 6i\Delta(0) \left[\int dx_1 J(x_1) \Delta(x_1 - w) \right] + \right. \\ &\quad \left. + \left[\int dx_1 J(x_1) \Delta(x_1 - w) \right] \right) e^{-\frac{i}{2} \int dz dy J(z) \Delta(z-y) J(y)}. \end{aligned}$$

Portanto, o funcional gerador se torna

$$\begin{aligned} Z[J] &= N \left[1 + \int dw \frac{ig}{4!} \left(-3\Delta(0)^2 + 6i\Delta(0) \left[\int dx_1 J(x_1) \Delta(x_1 - w) \right] + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left[\int dx_1 J(x_1) \Delta(x_1 - w) \right] \right) \right] Z_0, \end{aligned} \quad (1.111)$$

e o fator de normalização é dado por

$$N^{-1} = 1 - 3 \frac{ig}{4!} \Delta(0)^2 \int dw. \quad (1.112)$$

Obviamente, o resultado (1.111) é uma aproximação de primeira ordem, visto que só considerou o termo de primeira ordem da expansão da exponencial de interação. De fato, as teorias quânticas de campos interagentes sempre trabalham com aproximações, como é evidente ao se observar a fórmula de Gell-Mann e Low: nela, uma exponencial da lagrangiana de interação também surge e, ao se calcular as funções de Green, deve-se expandir essa exponencial e considerar até uma certa ordem desejada.

1.3 Teoria do campo fermiônico

Na teoria quântica de campos, os campos fermiônicos obedecem a relação de anti-comutação. E, apesar de que, na formulação da integral de caminho, a ação que aparece na exponencial seja a ação clássica (portanto, os campos são clássicos), tais campos ainda obedecem essas relações. Mais especificamente, esses campos são variáveis de Grassmann.

1.3.1 Álgebra de Grassmann

Para estudar os campos espinoriais, faz-se necessário revisar a álgebra de Grassmann, visto que os campos espinoriais clássicos são variáveis contínuas de Grassmann.

Portanto, considere os geradores $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ de uma álgebra de Grassmann n -dimensional. Tais geradores satisfazem a relação de anticomutação

$$\{x_i, x_j\} = x_i x_j + x_j x_i = 0, \quad (1.113)$$

para todo $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Isso implica dizer que $x_i^2 = 0$, que é uma importante identidade utilizada ao se expandir quaisquer funções de variáveis de Grassmann, já que

$$f(x_j) = \sum_i a_i x_j^i = a_0 + a_1 x_j, \quad (1.114)$$

ou seja, as funções de variáveis de Grassmann são expandidas finitamente até o termo de primeira ordem, já que termos de ordem superior se anulam.

Outra importante definição dentro da álgebra de Grassmann é a de diferenciação.

Definição: Existem duas definições da operação de diferenciação de variáveis de Grassmann. São a derivada pela direita e a derivada pela esquerda. Elas são dadas por:

Derivada pela direita

$$\frac{\partial^R}{\partial x_k}(x_i x_j) = x_i \delta_{kj} - \delta_{ki} x_j, \quad (1.115)$$

Derivada pela esquerda

$$\frac{\partial^L}{\partial x_k}(x_i x_j) = \delta_{ki} x_j - x_i \delta_{kj}. \quad (1.116)$$

Note que, para ambas as derivadas, vale

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \{x_i, x_j\} = 0,$$

como deve ser. Além disso, ambas as derivadas são operadores lineares e satisfazem

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x_j}, x_i \right\} = \delta_{ji},$$

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\} = 0.$$

Tendo definido a derivada, torna-se importante definir a integral de uma variável de Grassmann.

Definição: Para definir a integral, é necessário impor as seguintes condições, chamadas de **regras de integração de Grassmann**,

$$\int dx_i = 0, \quad (1.117)$$

$$\int x_i dx_i = 1. \quad (1.118)$$

Com essas regras, o problema que surge devido ao fato de que $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^2 = 0$ não possui operação inversa é evitado. Além disso, a integral é um operador linear, ou seja,

$$\int (af(x_i) + bg(x_i))dx_i = a \int f(x_i)dx_i + b \int g(x_i)dx_i.$$

Para uma função de uma variável qualquer, sua expressão geral é dada por uma expansão até primeira ordem. Portanto, integrando uma função dada por $f(x) = a + bx$,

$$\int dx_i f(x_i) = b.$$

Além disso, a integral de sua derivada é nula,

$$\int \frac{\partial f(x_i)}{\partial x_i} dx_i = 0.$$

A função delta pode ser facilmente definida para a integral de Grassmann. Primeiramente, ela deve satisfazer

$$\int \delta(x - x')f(x)dx = f(x'). \quad (1.119)$$

Isso implica dizer que $\delta(x - x') = x - x'$, pois,

$$\begin{aligned} \int dx(x - x')(a + bx) &= \int dx(x - x')a + b \int dx(x - x')x \\ &= a - b \int dx x' x = a + b \int dx x x' = f(x'), \end{aligned}$$

como deve ser.

Lema: O valor da integral gaussiana para variáveis de Grassmann é dada por

$$\int dx dx' e^{-xx'} = \int dx' dx e^{xx'} = 1. \quad (1.120)$$

A prova desse lema é simples. Primeiramente, é evidente que a expansão dessa função é dada por

$$f(x) = 1 - xx', \quad (1.121)$$

portanto, o resultado sai naturalmente.

Apesar da prova ter considerado x e x' como variáveis, o lema (1.120) é válido para o caso de se tratar de um produto entre vetores de Grassmann, isto é, vetores cujas componentes são variáveis de Grassmann.

Lema: Para uma integral em duas dimensões, uma mudança de variáveis do tipo $x = Ay$ (onde A é uma matriz 2×2) é dada por

$$dx_1 dx_2 = \frac{1}{\det A} dy_1 dy_2. \quad (1.122)$$

Note a similaridade de (1.122) com a mudança de variáveis de uma integração comum.

Com esses dois lemas, considere a seguinte integral gaussiana

$$\int dx d\bar{x} e^{-x\bar{x}}, \quad (1.123)$$

onde

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

$$\bar{x} = (\bar{x}_1 \quad \bar{x}_2).$$

E também, o infinitesimal de (1.123) é em quatro dimensões, ou seja, $dx d\bar{x} = dx_1 dx_2 d\bar{x}_1 d\bar{x}_2$. Logo, considerando duas matrizes A e B que descrevem as mudanças de variáveis $x = Ay$ e $\bar{x} = \bar{y}B$, a integral (1.123) se torna

$$\int d\bar{x} dx e^{-\bar{x}x} = \frac{1}{\det A \det B} \int d\bar{y} dy e^{-\bar{y}B Ay}, \quad (1.124)$$

chamando $BA = D$,

$$\int d\bar{x} dx e^{-\bar{x}x} = \frac{1}{\det D} \int d\bar{y} dy e^{-\bar{y}D y},$$

e considerando que $\int d\bar{x} dx e^{-\bar{x}x} = 1$, obtêm-se

$$\int d\bar{y} dy e^{-\bar{y}D y} = \det D, \quad (1.125)$$

análogo ao caso de uma integral comum, onde aparece o inverso do determinante do operador.

Considere que seja feita uma translação nas variáveis originais, dada por

$$x' = x - D^{-1}\alpha, \quad (1.126)$$

$$\bar{x}' = \bar{x} - \bar{\alpha}D^{-1}, \quad (1.127)$$

o expoente se transformará como

$$\bar{x}' D x' = \bar{x} D x + \bar{\alpha} D^{-1} \alpha - (\bar{x} \alpha + \bar{\alpha} x),$$

substituindo na integral

$$\int d\bar{x} dx e^{-\bar{x} D x + (\bar{x} \alpha + \bar{\alpha} x)} = \det D e^{\bar{\alpha} D^{-1} \alpha}. \quad (1.128)$$

O resultado (1.128) é útil ao se calcular a função geradora dos campos fermiônicos.

1.3.2 Generalização para dimensões infinitas não-enumeráveis

Os campos espinoriais possuem, como "índice", um conjunto infinito não-enumerável. Portanto, é importante estudar o caso em que a álgebra de Grassmann possua uma dimensão infinita e não-enumerável.

Para uma álgebra de Grassmann desse tipo, os geradores são um $\theta(x)$ tal que $x \in \mathbb{R}$, e satisfazem

$$\{\theta(x), \theta(y)\} = \theta(x)\theta(y) + \theta(y)\theta(x) = 0, \quad (1.129)$$

$$\theta(x)^2 = 0. \quad (1.130)$$

De maneira análoga às expressões (1.116) e (1.115), as diferenciações nessa álgebra satisfazem

$$\frac{\delta\theta(x)}{\delta\theta(y)} = \delta(x - y), \quad (1.131)$$

$$\frac{\delta^R}{\delta\theta(x)}\theta(y)\theta(z) = \theta(y)\delta(z - x) - \delta(y - x)\theta(z), \quad (1.132)$$

$$\frac{\delta^L}{\delta\theta(x)}\theta(y)\theta(z) = \delta(y - x)\theta(z) - \theta(y)\delta(z - x). \quad (1.133)$$

As regras de integração são análogas à (1.117) e (1.118),

$$\int d\theta(x)\theta(x) = 1, \quad (1.134)$$

$$\int d\theta(x) = 0. \quad (1.135)$$

Portanto, a integral gaussiana se torna

$$\int d\bar{\theta}(x)d\theta(x)e^{-(\bar{\theta}, D\theta)} = \det D, \quad (1.136)$$

onde $(\bar{\theta}, D\theta) = \int dx dy \bar{\theta}(x)D(x, y)\theta(y)$ é o produto interno de funções contínuas de Grassmann.

Considerando a translação, assim como feito em (1.128),

$$\int d\bar{\theta}(x)d\theta(x)e^{-(\bar{\theta}, D\theta) + (\bar{\eta}, \theta) + (\bar{\theta}, \eta)} = e^{(\bar{\eta}, D^{-1}\eta)} \det D, \quad (1.137)$$

para D invertível. Com a álgebra de Grassmann formulada, já é possível tratar dos campos de Dirac.

1.3.3 Campos de Dirac

A lagrangiana que descreve os campos fermiônicos livres (campos de Dirac) é dada por

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} \left(\frac{1}{2} (i\rlap{\not{\partial}} - i\overleftarrow{\not{\partial}}) - m \right) \psi, \quad (1.138)$$

cuja equação de movimento é a equação de Dirac

$$(i\rlap{\not{\partial}} - m)\psi = 0, \quad (1.139)$$

e a equação de Dirac para o campo conjugado

$$\bar{\psi} (i\overleftarrow{\not{\partial}} + m) = 0, \quad (1.140)$$

sendo o campo $\bar{\psi}$ definido como $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma_0$.

Análogo ao que foi feito ao campo escalar, é possível desenvolver um funcional gerador das funções de Green do campo fermiônico. Chamando $\rlap{\not{D}} = i\rlap{\not{\partial}} - m$ e desenvolvendo o funcional gerador de maneira análoga ao campo escalar

$$Z_0[\bar{\eta}, \eta] = Z_0 = N^{-1} \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi e^{i \int d^4x (\bar{\psi} \rlap{\not{D}} \psi + \bar{\eta} \psi + \bar{\psi} \eta)}, \quad (1.141)$$

com a normalização sendo

$$N = \int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi e^{i \int d^4x (\bar{\psi} \rlap{\not{D}} \psi)}. \quad (1.142)$$

Agora, torna-se necessário procurar a solução da equação (1.143), que dará o propagador do campo de Dirac,

$$\rlap{\not{D}} S_F(x - y) = \delta(x - y). \quad (1.143)$$

Isso pode ser feito com auxílio da equação para o campo escalar e seu respectivo propagador. Lembrando da equação para o campo escalar,

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \Delta(x - y) = -\delta(x - y). \quad (1.144)$$

Note que, aplicando o operador $(i\overleftarrow{\not{\partial}} + m)$ em $\Delta(x - y)$, obtém-se,

$$\Lambda(x, y) = (i\overleftarrow{\not{\partial}} + m) \Delta(x - y), \quad (1.145)$$

aplicando o operador $\rlap{\not{D}}$ em (1.145),

$$\rlap{\not{D}} \Lambda(x, y) = (i\overleftarrow{\not{\partial}} - m)(i\overleftarrow{\not{\partial}} + m) \Delta(x - y) = -(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \Delta(x - y) = \delta(x - y), \quad (1.146)$$

logo, $S_F(x - y) = (i\overleftarrow{\not{\partial}} + m) \Delta(x - y)$. Explicitamente, o propagador do campo de Dirac é dado por

$$S_F(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p \frac{(\not{p} + m) e^{-ipx}}{p^2 - m^2} = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p \frac{e^{-ipx}}{\not{p} - m}, \quad (1.147)$$

onde o termo ϵ foi suprimido. De maneira análoga ao que foi feito para o campo escalar, o funcional gerador será dado em termos do propagador como mostrado em (1.148),

$$Z_0 = e^{-i \int d^4x d^4y \bar{\eta}(x) S_F(x-y) \eta(y)}. \quad (1.148)$$

O desenvolvimento da teoria que envolve a interação do campo fermiônico com o campo eletromagnético será feito na próxima subseção. Mas, em resumo, envolve fazer algo análogo ao campo escalar com interação. Primeiramente, a lagrangiana é separada em dois termos: o livre e o de interação,

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_i. \quad (1.149)$$

Em seguida, a relação entre o funcional gerador com interação e o funcional gerador livre é dada por (1.150),

$$Z[\eta, \bar{\eta}] = N^{-1} \exp \left(i \int d^4x \mathcal{L}_i \left(-i \frac{\delta}{\delta \eta}, -i \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}} \right) \right) Z_0. \quad (1.150)$$

Repare que foi feita a substituição de $\bar{\psi} \rightarrow -i \frac{\delta}{\delta \eta}$ e $\psi \rightarrow -i \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}}$ na lagrangiana de interação em (1.150). Fazendo uma expansão no termo de interação, obtém-se aproximações na ordem desejada do funcional com interação.

1.4 Teoria dos campos de gauge

1.4.1 Teoria geral dos campos de gauge

A teoria de Yang-Mills é uma teoria geral sobre os campos associados à transformações de gauge. Sendo o grupo de gauge abeliano ou não, as ideias desenvolvidas nessa subseção se aplicarão em ambos os casos. A importância do desenvolvimento das teorias de gauge envolve a invariância da lagrangiana sob transformações envolvendo mudanças de fase nos campos. Tal invariância só é possível ao se fazer um acoplamento mínimo nas derivadas dos campos, transformando-as em derivadas covariantes sob o grupo de gauge. Consequentemente, isso insere um outro campo na lagrangiana, que estará interagindo com os campos inicialmente tratados. Por isso, nessa subseção será desenvolvida uma teoria geral para esses campos de gauge. O exemplo mais simples de um campo de gauge é o campo eletromagnético, que será estudado mais adiante.

Inicialmente, considere a lagrangiana de um férmion. O caso dos férmions é mais simples pelo fato da lagrangiana livre possuir apenas uma derivada de primeira ordem. Claro que, para o campo escalar, a definição de derivada covariante será a mesma. Portanto, dada a lagrangiana

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} \left(\frac{1}{2} (i \not{\partial} - i \overleftarrow{\not{\partial}}) - m \right) \psi, \quad (1.151)$$

onde $\bar{\psi} i \overleftarrow{\not{\partial}} \psi$ significa $i(\partial_\mu \bar{\psi}) \gamma^\mu \psi$.

Considere um grupo de gauge (não necessariamente abeliano). Dado $g(x) \in G$ uma transformação do grupo G , o espinor se transforma como

$$\bar{\psi}^g = \bar{\psi} g, \quad (1.152)$$

$$\psi^g = g^{-1} \psi.$$

Como, por hipótese, esse grupo de gauge é uma transformação de simetria, então, a lagrangiana deve ser invariante sob tais transformações. A primeira tentativa pode ser feita na lagrangiana puramente livre, como está em (1.151). Portanto, aplicando tal transformação

$$\begin{aligned} \mathcal{L}' &= \bar{\psi}^g \left(\frac{1}{2} (i \not{\partial} - i \overleftarrow{\not{\partial}}) - m \right) \psi^g = \frac{1}{2} \bar{\psi} g (i \not{\partial} - i \overleftarrow{\not{\partial}}) g^{-1} \psi - \bar{\psi} m \psi \\ &= \bar{\psi} \left(\frac{1}{2} (i \not{\partial} - i \overleftarrow{\not{\partial}}) - m \right) \psi + \frac{1}{2} \bar{\psi} (g i \not{\partial} g^{-1} - g i \overleftarrow{\not{\partial}} g^{-1}) \psi. \end{aligned}$$

Claramente, a lagrangiana livre não é invariante. Entretanto, é possível contornar esse problema fazendo um acoplamento mínimo na derivada, de modo a se obter uma derivada covariante. Assim sendo, considere o campo auxiliar A_μ , que está associado ao grupo de transformações de gauge. Nesse caso, a derivada covariante é definida por

$$D_\mu = \partial_\mu + A_\mu, \quad (1.153)$$

$$\overleftarrow{D}_\mu = \overleftarrow{\partial}_\mu + A_\mu^\dagger. \quad (1.154)$$

Assim, deve ser imposto que esse campo se transforma como

$$A_\mu^g = g^{-1} A_\mu g + g^{-1} \partial_\mu g, \quad (1.155)$$

$$A_\mu^{\dagger g} = g^{-1} A_\mu^\dagger g + g^{-1} \overleftarrow{\partial}_\mu g. \quad (1.156)$$

Agora, considere a nova lagrangiana

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} \left(\frac{1}{2} (i \not{D} - i \overleftarrow{\not{D}}) - m \right) \psi, \quad (1.157)$$

aplicando a transformação de gauge na lagrangiana (1.157),

$$\mathcal{L}' = \bar{\psi} \left(\frac{1}{2} (i \not{\partial} - i \overleftarrow{\not{\partial}}) - m \right) \psi + \frac{1}{2} \bar{\psi} (g i \not{\partial} g^{-1} - g i \overleftarrow{\not{\partial}} g^{-1}) \psi + \bar{\psi} (g A^g (g^{-1}) - g A^{\dagger g} (g^{-1})) \psi, \quad (1.158)$$

desenvolvendo os dois ultimos termos da expressão acima,

$$\begin{aligned} \bar{\psi} (g (g^{-1} i A g + g^{-1} i \not{\partial} g) g^{-1}) \psi &= \bar{\psi} (i A + (i \not{\partial} g) g^{-1}) \psi \\ \bar{\psi} (g (g^{-1} A^\dagger g + g^{-1} i \overleftarrow{\not{\partial}} g) g^{-1}) \psi &= \bar{\psi} (i A^\dagger + g (g^{-1} i \overleftarrow{\not{\partial}})) \psi, \end{aligned}$$

substituindo esse termo na lagrangiana (1.158),

$$\begin{aligned}\mathcal{L}' &= \bar{\psi} \left(\frac{1}{2}(i\mathcal{D} - i\overleftarrow{\mathcal{D}}) - m \right) \psi + \frac{1}{2}\bar{\psi}(gi\mathcal{D}g^{-1} - gi\overleftarrow{\mathcal{D}}g^{-1})\psi + \frac{1}{2}\bar{\psi}((i\mathcal{D}g)g^{-1} - g(g^{-1}i\overleftarrow{\mathcal{D}}))\psi \\ &= \bar{\psi} \left(\frac{1}{2}(i\mathcal{D} - i\overleftarrow{\mathcal{D}}) - m \right) \psi + \frac{1}{2}\bar{\psi}(i\mathcal{D}(g \cdot g^{-1}) - (g \cdot g^{-1})i\overleftarrow{\mathcal{D}})\psi = \bar{\psi} \left(\frac{1}{2}(i\mathcal{D} - i\overleftarrow{\mathcal{D}}) - m \right) \psi.\end{aligned}$$

Portanto, a lagrangiana (1.157) se mantém invariante sob transformações de gauge. Note que a derivada covariante se transforma como

$$D_\mu = g^{-1}D_\mu g.$$

Agora, é necessário estudar os grupos de gauge. Como a transformação de gauge é análoga a uma mudança de fase, no geral, faz sentido escrever um elemento genérico do grupo G como ⁵

$$g(x) = e^{\Lambda(x)}, \quad (1.159)$$

com $\Lambda(x) = \Lambda(x)^a T^a$, e sendo $\{T^a\}_{a=1}^n$ o conjunto dos geradores do grupo (a convenção usada aqui é a de que os índices iguais e latinos indicam soma sobre esse índice). Não somente a ideia de mudança de fase corrobora a forma como (1.159) é escrita, mas, o fato de que as transformações consideradas são continuamente conectadas com a identidade permite com que um elemento dessa espécie seja representado como (1.159).

Sobre os geradores, eles satisfazem a regra de comutação

$$[T^a, T^b] = f^{abc}T^c, \quad (1.160)$$

com f^{abc} totalmente antissimétrico. No caso de $f = 0$, o grupo é abeliano. A álgebra dos geradores induz uma álgebra de Lie (devido aos comutadores). Logo, satisfazem a identidade de Jacobi,

$$[T^a, [T^b, T^c]] + [T^b, [T^c, T^a]] + [T^c, [T^a, T^b]] = 0. \quad (1.161)$$

Aplicando (1.160) em (1.161) e fazendo algumas manipulações, chega-se na identidade

$$f^{aed}f^{bce} + f^{bed}f^{cae} + f^{ced}f^{abe} = 0. \quad (1.162)$$

Note que é possível reescrever a identidade 1.162 como

$$\begin{aligned}f^{aed}f^{bce} + f^{bed}f^{cae} &= -f^{ced}f^{abe} \\ \implies f^{dae}f^{ceb} - f^{dbe}f^{cea} &= f^{cde}f^{eab},\end{aligned}$$

⁵ Na verdade, essa expressão surge ao se considerar uma transformação infinitesimal do grupo G e, em seguida, constrói-se uma equação diferencial para um elemento do grupo genérico e que possui, como resultado, essa exponencial. Claro que algumas condições devem ser satisfeitas, como, por exemplo, esse elemento estar continuamente conectado à identidade do grupo. Essa transformação infinitesimal também induz aos geradores e à álgebra de Lie que estes satisfazem.

o que permite construir as matrizes dos geradores como

$$(T^a)^{bc} = -f^{abc}, \quad (1.163)$$

portanto,

$$\begin{aligned} f^{dae} f^{ceb} - f^{cae} f^{deb} &= f^{cde} f^{eab} \\ \implies (T^d)^{ae} (T^c)^{eb} - (T^c)^{ae} (T^d)^{eb} &= -f^{cde} (T^e)^{ab}, \end{aligned} \quad (1.164)$$

que é a componente ab da relação de comutação entre os geradores. Por fim, é possível escolher os geradores de tal modo que satisfaçam as propriedades (1.165) e (1.166),

$$T^{a\dagger} = -T^a, \quad (1.165)$$

$$\text{tr}(T^a T^b) = -\frac{1}{2} \delta^{ab}. \quad (1.166)$$

Como é possível escolher uma representação de G em que os geradores são matrizes, isso significa que os elementos de G também podem ser escritos assim e, por consequência, os campos. O campo fermiônico ψ pode ser expresso por uma matriz coluna e, analogamente, $\bar{\psi}$ será uma matriz linha. Além disso, o campo A_μ será uma combinação linear dos geradores, ou seja,

$$A_\mu = A_\mu^a T^a, \quad (1.167)$$

$$A_\mu^\dagger = A_\mu^{*a} T^{\dagger a} = -A_\mu^{*a} T^a. \quad (1.168)$$

A interação e a lagrangiana do campo de Dirac livre já estão contidas em (1.157). Portanto, agora se torna necessário adicionar uma lagrangiana livre para o campo de gauge. Usando, como base, a teoria eletromagnética, cujos campos de gauge se transformam sob $SU(1)$, é possível desenvolver uma lagrangiana para o campo auxiliar

$$\mathcal{L}_{YM} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} = \frac{1}{2} \text{tr}(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}), \quad (1.169)$$

que é a lagrangiana de Yang-Mills. Na expressão (1.169), o tensor de segunda ordem é dado por

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu], \quad (1.170)$$

que é o tensor de Yang-Mills e se transforma em G como

$$F_{\mu\nu}^g = g^{-1} F_{\mu\nu} g.$$

Teorema: O tensor de Yang-Mills pode ser escrito da forma

$$[D_\mu, D_\nu] = F_{\mu\nu} \quad (1.171)$$

Demonstração:

$$[D_\mu, D_\nu] = [(\partial_\mu + A_\mu), (\partial_\nu + A_\nu)] = [\partial_\mu, \partial_\nu] + [\partial_\mu, A_\nu] + [A_\mu, \partial_\nu] + [A_\mu, A_\nu] = F_{\mu\nu},$$

como se queria demonstrar.

A derivada covariante definida em (1.153) é aplicada em ψ , uma matriz coluna. No caso da derivada covariante de um elemento matricial $\Lambda = \Lambda^a T^a$, a operação de derivar é diferente, como expresso em (1.172),

$$D_\mu = \partial_\mu + [A_\mu,], \quad (1.172)$$

$$\implies D_\mu \Lambda = \partial_\mu \Lambda + [A_\mu, \Lambda].$$

Essa diferença surge do fato de que uma matriz quadrada pode ser escrita como o produto direto de uma matriz linha e uma matriz coluna. Assim, a derivada covariante fica

$$D_\mu \Lambda = \partial_\mu \Lambda + A_\mu \Lambda + \Lambda A_\mu^\dagger. \quad (1.173)$$

Aplicando a propriedade (1.165) em (1.173) e considerando que campos vetoriais são entidades físicas e, portanto, assumem valores reais, então, a expressão (1.173) assume a forma dada pela definição (1.172). Dado em componentes,

$$\begin{aligned} [A_\mu, T^b] &= [A_\mu^a T^a, T^b] = A_\mu^a f^{abc} T^c = f^{bca} A_\mu^a T^c \\ \implies (D_\mu \Lambda)^{ab} &= \partial_\mu \Lambda^e (T^e)^{ab} + f^{cde} A_\mu^c \Lambda^d (T^e)^{ab} \\ \implies (D_\mu \Lambda)^{ab} &= \partial_\mu \Lambda^e f^{eba} + f^{cde} A_\mu^c \Lambda^d f^{eba} = (\partial_\mu \Lambda^e + f^{cde} A_\mu^c \Lambda^d) f^{eba}, \end{aligned}$$

logo,

$$D_\mu^{ab} = \partial_\mu \delta^{ab} + f^{bac} A_\mu^c.$$

Teorema: O comutador de derivadas covariantes aplicado à uma matriz quadrada satisfaz

$$[D_\mu, D_\nu] \Lambda = [F_{\mu\nu}, \Lambda]. \quad (1.174)$$

Demonstração: Têm-se que

$$\begin{aligned} D_\mu D_\nu \Lambda &= D_\mu (\partial_\nu \Lambda + [A_\nu, \Lambda]) = \partial_\mu \partial_\nu \Lambda + \partial_\mu [A_\nu, \Lambda] + [A_\mu, \partial_\nu \Lambda] + [A_\mu, [A_\nu, \Lambda]] \\ &= \partial_\mu \partial_\nu \Lambda + [\partial_\mu A_\nu, \Lambda] + [A_\nu, \partial_\mu \Lambda] + [A_\mu, \partial_\nu \Lambda] + [A_\mu, [A_\nu, \Lambda]]. \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} [D_\mu, D_\nu] \Lambda &= [\partial_\mu A_\nu, \Lambda] + [A_\mu, [A_\nu, \Lambda]] - [\partial_\nu A_\mu, \Lambda] - [A_\nu, [A_\mu, \Lambda]] \\ &= [\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \Lambda] + [A_\mu, [A_\nu, \Lambda]] + [A_\nu, [A_\mu, \Lambda]]. \end{aligned}$$

Através da identidade de Jacobi, é evidente que

$$[D_\mu, D_\nu] \Lambda = [\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \Lambda] - [\Lambda, [A_\mu, A_\nu]] = [\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \Lambda] + [[A_\mu, A_\nu], \Lambda] = [F_{\mu\nu}, \Lambda].$$

Já tendo a lagrangiana completa, é interessante saber a dinâmica destes campos. Em outras palavras, já é possível escrever as equações de Euler-Lagrange.

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu^a} - \partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu A_\mu^a)} = 0$$

Que dão as equações de campo de Yang-Mills

$$D_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu, \quad (1.175)$$

sendo $j_\nu = j_\nu^a T^a$ a quadricorrente. Para o caso do campo fermiônico, a corrente é dada por

$$j_\nu^a = -i\bar{\psi}\gamma_\mu T^a \psi. \quad (1.176)$$

Agora, é possível provar que a quadricorrente se conserva. Para que haja a conservação, a seguinte equação de continuidade deve ser satisfeita

$$D_\nu j^\nu = 0, \quad (1.177)$$

usando a equação de campo, têm-se:

$$\begin{aligned} D_\nu j^\nu &= D_\nu D_\mu F^{\mu\nu} \\ \implies \frac{1}{2}(D_\nu D_\mu F^{\mu\nu} + D_\nu D_\mu F^{\mu\nu}) & \end{aligned}$$

Como os índices são mudos e o tensor de Yang-Mills é antissimétrico,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(D_\nu D_\mu F^{\mu\nu} + D_\nu D_\mu F^{\mu\nu}) &= \frac{1}{2}(D_\nu D_\mu F^{\mu\nu} - D_\mu D_\nu F^{\mu\nu}) = \frac{1}{2}[D_\nu, D_\mu]F^{\mu\nu} \\ &= \frac{1}{2}[F_{\nu\mu}, F^{\mu\nu}] = 0. \end{aligned}$$

Então, a equação de continuidade é satisfeita.

Por último, outra propriedade que é satisfeita é a identidade de Bianchi,

$$D_\mu F_{\nu\lambda} + D_\nu F_{\lambda\mu} + D_\lambda F_{\mu\nu} = 0,$$

que também descreve o comportamento dos campos de Yang-Mills.

Com a teoria clássica dos campos de gauge desenvolvida, será estudado a quantização desses campos pelo método das integrais de caminho, como já feito para o campo escalar e espinorial. Nas próximas subseções, serão estudadas o caso de campos de gauge abeliano e não-abeliano.

1.4.2 Quantização do campo eletromagnético

No capítulo anterior, foi desenvolvida a teoria de Yang-Mills, na qual ficou evidente que uma simetria na transformação de fase do campo naturalmente induz a interação com o campo de gauge.

Aqui, será estudado o caso do grupo abeliano $SU(1)$, que seria o caso mais simples possível de uma transformação de gauge. Ao grupo $SU(1)$ tem-se, associado, um campo de gauge. Esse campo corresponde ao campo eletromagnético.

Primeiramente, um elemento genérico $g \in SU(1)$ pode ser escrito como

$$g = e^\lambda. \quad (1.178)$$

Esse grupo possui um único gerador que pode ser qualquer número complexo. Para que as propriedades (1.165) e (1.166) sejam satisfeitas, a escolha do gerador t deve ser

$$t = \frac{i}{\sqrt{2}}. \quad (1.179)$$

Portanto, $g = e^{ikf(x)}$, onde $k = q/\sqrt{2}$ é uma constante de acoplamento. Assim, os campos se transformam como

$$\bar{\psi}^g = \bar{\psi}e^{ikf(x)}, \quad (1.180)$$

$$\psi^g = e^{-ikf(x)}\psi, \quad (1.181)$$

$$iA_\mu^g = iA_\mu + \partial_\mu \lambda(x) = iA_\mu + ik\partial_\mu f(x). \quad (1.182)$$

Evidentemente, a transformação expressa em (1.182) é justamente a transformação de gauge do campo eletromagnético, o que mostra que há um grupo de gauge abeliano associado ao campo eletromagnético.

A lagrangiana será dada por

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}\left(\frac{1}{2}(i\cancel{\partial} - i\overleftarrow{\cancel{\partial}}) - m - kA\right)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \quad (1.183)$$

e para quantizar o campo eletromagnético, primeiramente, deve-se encontrar o funcional gerador livre, visto que o funcional gerador interagente é dado por derivadas funcionais do gerador livre. O candidato intuitivo é dado por

$$Z_0 = \int \mathcal{D}A_\mu \exp\left(i \int d^4x (\mathcal{L}_0 + j_\nu A^\nu)\right). \quad (1.184)$$

A lagrangiana \mathcal{L}_0 é a lagrangiana de Yang-Mills pro campo eletromagnético, dada por

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu). \quad (1.185)$$

Dentro da ação, a lagrangiana (1.185) pode ser escrita como

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2} A^\mu (g_{\mu\nu} \square^2 - \partial_\mu \partial_\nu) A^\nu, \quad (1.186)$$

cujas equações de movimento livre são

$$D_{\mu\nu} A^\nu = -j_\mu, \quad (1.187)$$

sendo $D_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} \square^2 - \partial_\mu \partial_\nu$. A função de Green desse operador é aquela que satisfaça

$$D_{\mu\nu} \Delta^{\nu\alpha}(x) = \delta_\mu^\alpha \delta(x). \quad (1.188)$$

Aplicando uma transformada de Fourier em (1.188), a equação se transforma para o espaço dos momentos em

$$(-g_{\mu\nu} k^2 + k_\mu k_\nu) \Delta^{\nu\alpha}(k) = K_{\mu\nu} \Delta^{\nu\alpha} = \delta_\mu^\alpha, \quad (1.189)$$

portanto, o propagador no espaço dos momentos é dado por

$$\Delta^{\mu\alpha} = (K^{\mu\alpha})^{-1}. \quad (1.190)$$

Entretanto, como será provado a seguir, o operador $K_{\mu\nu}$ não possui inversa.

Teorema: O operador $D_{\mu\nu}$ não possui uma função de Green.

Demonstração: Para isso, basta provar que $K_{\mu\nu}$ não possui inversa. Supondo que a inversa exista, então ela deve possuir a forma

$$ag^{\mu\nu} + bk^\mu k^\nu = (K^{-1})^{\mu\nu}, \quad (1.191)$$

onde a e b podem ser funções de k . Portanto, por hipótese,

$$\begin{aligned} (-g_{\mu\nu} k^2 + k_\mu k_\nu)(ag^{\nu\alpha} + bk^\nu k^\alpha) &= \delta_\mu^\alpha \\ \implies -a\delta_\mu^\alpha k^2 + ak_\mu k^\alpha - bk^2 k_\mu k^\alpha + bk^2 k_\mu k^\alpha &= \delta_\mu^\alpha \\ \implies (-\delta_\mu^\alpha k^2 + k_\mu k^\alpha)a &= \delta_\mu^\alpha. \end{aligned} \quad (1.192)$$

Como k é uma variável e pode assumir qualquer valor que satisfaça $k^2 = m^2$ ⁶, então, (1.192) não possui solução para a .

Essa dificuldade surge pois a integral no funcional gerador é feita sobre todos os campos possíveis. Como transformações de gauge preservam a física do sistema, quando se integra sobre todos os gauges possíveis, o funcional gerador diverge. Por isso, para se obter um operador $D_{\mu\nu}$ inversível, é necessário fixar um gauge. Assim, cada situação física terá um gauge fixo e o problema de se integrar sobre os infinitos gauges de um mesmo sistema físico desaparece.

⁶ Evidentemente, para o caso do campo eletromagnético, $m=0$.

Por exemplo, impondo o gauge de Lorentz,

$$\partial_\mu A^\mu = 0, \quad (1.193)$$

a lagrangiana (1.186) assume a forma

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2} A^\nu g_{\mu\nu} \square^2 A^\mu = \frac{1}{2} A^\nu D'_{\mu\nu} A^\mu. \quad (1.194)$$

O operador com gauge fixo $D'_{\mu\mu}$ possui inversa. De fato, é fácil ver que

$$(K^{-1})^{\mu\nu} = -g^{\mu\nu} k^{-2}. \quad (1.195)$$

Portanto, a função de Green no espaço dos momentos é dado pelo propagador de Feynman

$$\Delta_F^{\mu\mu} = -\frac{g^{\mu\nu}}{k^2}. \quad (1.196)$$

Impor um gauge fixo equivale a somar um termo que fixa o gauge à lagrangiana livre

$$\mathcal{L}_{Gfixo} = -\frac{1}{2a} (\partial_\mu A^\mu), \quad (1.197)$$

onde a é um parâmetro livre. No caso de $a = 1$, obtém-se (1.196). Para um valor de a genérico, a lagrangiana pode ser escrita como

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (A^\mu (g_{\mu\nu} \square^2 + (1/a - 1) \partial_\mu \partial_\nu) A^\nu). \quad (1.198)$$

Portanto, o propagador no espaço dos momentos é dado por

$$\begin{aligned} K_{\mu\nu} &= -(g_{\mu\nu} + (1/a - 1) k_\mu k_\nu) \\ (K^{-1})^{\mu\nu} &= c g^{\mu\nu} + b k^\mu k^\nu \\ \implies & (-\delta_\mu^\alpha k^2 + (1 - 1/a) k_\mu k^\alpha) c - (1/a) k^2 k_\mu k^\alpha b = \delta_\mu^\alpha, \end{aligned}$$

cujas soluções são

$$c = -\frac{1}{k^2}, \quad (1.199)$$

$$b = \frac{1 - a}{k^4}. \quad (1.200)$$

Consequentemente,

$$\Delta_F^{\mu\nu} = -\frac{1}{k^4} (g^{\mu\nu} k^2 + (a - 1) k^\mu k^\nu), \quad (1.201)$$

e portanto, o propagador no espaço-tempo é dado por

$$\Delta_F^{\mu\nu}(x) = \int d^4 k e^{-ikx} \Delta_F^{\mu\nu}(k). \quad (1.202)$$

Agora, é necessário escrever o funcional gerador. Entretanto, ele enfrentará os problemas de integrar em todos os gauges possíveis. Esse problema será analisado e resolvido na próxima subseção.

1.4.3 Método de Faddeev-Popov

O método de Faddeev-Popov é usado para calcular o funcional gerador de campos de gauge. Como visto anteriormente, a integral de caminho considera todos os campos possíveis, incluindo aqueles equivalentes sob transformações de gauge. O método de Faddeev-Popov consiste em fixar um gauge, análogo ao que foi feito na subseção anterior para encontrar os propagadores. Dito isso, considere um gauge fixado por

$$f[A_\mu] - \theta(x) = 0, \quad (1.203)$$

onde $\theta = \theta^a T^a$ é uma função que não depende de A_μ . Assim, para fixar o gauge, a integral se torna

$$Z = \int \mathcal{D}A_\mu \delta(f[A_\mu] - \theta) \exp(iS[A_\mu]). \quad (1.204)$$

A função delta de Dirac serve para fixar o gauge. Mas, o $\mathcal{D}A_\mu$ ainda integra sobre todo campo, entretanto, pode-se fazer a seguinte separação,

$$\mathcal{D}A_\mu \rightarrow \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}g \det \left(\frac{\delta f}{\delta g} \right), \quad (1.205)$$

onde a nova medida quântica $\mathcal{D}A_\mu$ integra sobre um ponto de cada região de campos equivalentes sob transformação de gauge. Portanto, o funcional gerador é dado por

$$Z = \int \mathcal{D}g \mathcal{D}A_\mu \det \left(\frac{\delta f}{\delta g} \right) \delta(f[A_\mu] - \theta) \exp(iS). \quad (1.206)$$

Agora, por conveniência, introduz-se um termo auxiliar que estará multiplicando o funcional gerador, dado por

$$\mathcal{N} = \int \mathcal{D}\theta \exp \left(-\frac{i}{2a} \int d^4x \theta^a \theta^a \right). \quad (1.207)$$

Multiplicar o funcional gerador por esse termo não o altera, visto que também surgirá o mesmo termo na normalização do funcional e que estará dividindo \mathcal{N} . Com esse novo termo, o funcional gerador é dado por

$$Z = \int \mathcal{D}g \mathcal{D}\theta \mathcal{D}A_\mu \det \left(\frac{\delta f}{\delta g} \right) \delta(f[A_\mu] - \theta) \exp(iS - iS_\theta), \quad (1.208)$$

sendo $S_\theta = \frac{1}{2a} \int d^4x \theta^a \theta^a$.

Já o determinante que aparece em (1.208) pode ser reescrito como uma integral gaussiana da seguinte forma

$$\det \left(\frac{\delta f}{\delta g} \right) = \int \mathcal{D}v \mathcal{D}\bar{v} \cdot \exp \left(-i \int d^4x \bar{v} \left(\frac{\delta f}{\delta g} \right) v \right) = \int \mathcal{D}v \mathcal{D}\bar{v} \cdot \exp(iS_{FP}), \quad (1.209)$$

onde v e \bar{v} são chamados de fantasmas de Faddeev-Popov. São variáveis de Grassmann, visto que foi usado o resultado (1.136).

Substituindo (1.209) em (1.208), o funcional gerador se torna

$$Z = \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}v \mathcal{D}\bar{v} \mathcal{D}g \mathcal{D}\theta \delta(f[A_\mu] - \theta) \exp(i(S + S_{FP} - S_\theta)). \quad (1.210)$$

Ao se integrar sobre θ , o delta de Dirac transformará θ em $f[A_\mu]$, de modo que a ação S_θ tomará a forma

$$S_\theta = S_{Gfixo} = \frac{1}{2a} \int f[A_\mu]^2 dx. \quad (1.211)$$

Por fim, o termo $\int \mathcal{D}g$ será uma integral sobre um volume infinito no espaço dos elementos de G . Mas, como o mesmo termo aparecerá na normalização, ambos se cancelam. Finalmente, chega-se na forma definitiva do funcional gerador,

$$Z[j^\mu, \bar{\eta}, \eta, \bar{\omega}, \omega] = \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}v \mathcal{D}\bar{v} \cdot \exp(iS_{total} + j^\mu A_\mu + \bar{\psi}\eta + \bar{\eta}\psi + \bar{v}^a \omega^a + \bar{\omega}^a v^a), \quad (1.212)$$

onde cada lagrangiana na ação de 1.212 é, explicitamente, dada por

$$\begin{aligned} & S_{total} \int d^4x \mathcal{L}_{total} \\ \implies & \mathcal{L}_{total} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{FP} + \mathcal{L}_{Gfixo}, \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{1}{4} F^{\alpha\mu\nu} F_{\mu\nu}^\alpha, \quad (1.213)$$

$$\mathcal{L}_{Gfixo} = -\frac{1}{2a} f[A_\mu](x) f[A_\mu](x), \quad (1.214)$$

$$\mathcal{L}_{FP} = -\bar{v} \frac{\delta f}{\delta g} v, \quad (1.215)$$

Importante notar que \bar{v} e v são variáveis de Grassmann independentes e genéricas, ou seja, não são espinores, pois não se transformam sob transformações de Lorentz como espinores. Na realidade, são variáveis de Grassmann escalares que, obviamente, não obedecem o teorema de spin-estatística. Entretanto, como não são observados e sequer são elementos físicos, fazendo parte apenas do processo de espalhamento, mas não aparecendo como produto final dele, então, não é um problema no teorema. Apenas se tratam de variáveis auxiliares.

Outra observação é a de que o funcional gerador (1.210) vale para qualquer grupo de gauge considerado.

1.4.4 Funcional gerador da eletrodinâmica quântica

Na subseção anterior foi desenvolvido um método para se obter o funcional gerador de um campo de gauge. Nessa subseção, o método de Faddeev-Popov será aplicado ao caso do campo eletromagnético[5]. Primeiro, o gauge fixado será o de Lorentz

$$\partial_\mu A^\mu = 0, \quad (1.216)$$

assim, a lagrangiana de Faddeev-Popov é obtida calculando-se o termo do determinante

$$\begin{aligned} f[A_\mu + \partial_\mu \lambda] - f[A_\mu] &= \delta f = \partial^2 \lambda \\ \implies \frac{\delta f[A_\mu](x)}{\delta \lambda(y)} &= \partial^2 \delta(x - y), \end{aligned} \quad (1.217)$$

consequentemente,

$$\mathcal{L}_{FP} = -\bar{v} \square^2 v. \quad (1.218)$$

Portanto, para o caso do campo eletromagnético, os fantasmas de Faddeev-Popov não interagem com o campo de gauge e, como são um auxílio matemático que não surgem na medição física, os fantasmas podem ser ignorados. A consequência disso é que o funcional gerador é dado por

$$Z = N^{-1} \int \mathcal{D}A_\mu \exp \left(\frac{i}{2} \int d^4x A^\mu (g_{\mu\nu} \square^2) A^\nu + \int d^4x j_\mu A^\mu \right). \quad (1.219)$$

Análogo ao que foi feito para o campo escalar, essa expressão pode ser evoluída para

$$Z[j_\mu] = \exp \left(-\frac{i}{2} \int d^4x d^4y j_\mu(x) \Delta_F^{\mu\nu}(x - y) j_\nu(y) \right), \quad (1.220)$$

para o caso livre.

Quando o campo eletromagnético interage com o campo espinorial, o termo de interação é dado por $-k\bar{\psi} \not{A} \psi$, onde k é a carga elementar para o caso do elétron. Portanto, o funcional gerador para a teoria com interação se torna

$$Z[j_\mu, \bar{\eta}, \eta] = N^{-1} \exp \left(i \int d^4x \mathcal{L}_I \left(-i \frac{\delta}{\delta j_\mu}, -i \frac{\delta}{\delta \eta}, -i \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}} \right) \right) Z_0[j_\mu, \bar{\eta}, \eta], \quad (1.221)$$

onde o funcional Z_0 em (1.221) é o funcional gerador para o campo de gauge e os campos fermionicos, dado por

$$Z_0 = \exp \left(-i \int d^4x d^4y (\bar{\eta}(x) S_F(x - y) \eta(y) + (1/2) j_\mu(x) \Delta_F^{\mu\nu}(x - y) j_\nu(y)) \right). \quad (1.222)$$

Uma expansão de primeira ordem é dada por (escolhendo $k=1$)

$$\begin{aligned} Z &= \left(1 + \int d^4x \frac{\delta}{\delta \eta(x)} \gamma_\mu \frac{\delta}{\delta j_\mu(x)} \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}(x)} \right) Z_0 \\ &= Z_0 - i \int d^4x \frac{\delta}{\delta \eta(x)} \gamma_\mu \frac{\delta}{\delta j_\mu(x)} \left(\int d^4x_1 S_F(x - x_1) \eta(x_1) Z_0 \right) \\ &= Z_0 - \int d^4x \left(\frac{\delta}{\delta \eta(x)} \gamma_\mu \left(\int d^4x_1 d^4x_2 S_F(x - x_1) \eta(x_1) \Delta_F^{\mu\nu}(x_2 - x) j_\nu(x_2) \right) Z_0 \right) \\ Z &= N^{-1} \left(1 - \int d^4x (S_F(0) \gamma_\mu \int d^4x_2 \Delta_F^{\mu\nu}(x_2 - x) j_\nu(x_2) + \right. \\ &\quad \left. -i \int d^4x d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 \bar{\eta}(x_3) S_F(x_3 - x) \gamma_\mu \Delta_F^{\mu\nu}(x_2 - x) j_\nu(x_2) S_F(x - x_1) \eta(x_1) \right) Z_0, \end{aligned} \quad (1.223)$$

e o fator de normalização é $N = Z[0, 0, 0]$. Com a aproximação encontrada, se torna possível calcular as funções de Green da eletrodinâmica quântica. Lembrando que termos de interação de maiores ordem podem ser obtidos de maneira análoga.

1.4.5 Regras de Feynman no espaço dos momentos para a eletrodinâmica quântica

Muitas vezes, expressões como a (1.223) se tornam maçantes de serem escritas e, portanto, elas são representadas por diagramas de Feynman. Esses diagramas representam integrais e dão uma ideia física do processo que está ocorrendo durante as interações dos campos. Para cada expansão do termo de interação, existe associado uma soma de diagramas de Feynman e tais diagramas são construídos usando as regras de Feynman. Para as funções de Green no espaço-tempo, existem regras de Feynman associados. Mas, as regras de Feynman no espaço dos momentos dão um termo da expansão da própria matriz S . Por, isso, torna-se mais conveniente construir as funções de Green no espaço dos momentos. Nessa subseção, tais regras serão revisadas [9].

Primeiro, um diagrama é formado por vértices e linhas. Cada vértice corresponde à um termo de interação e, cada linha, um propagador. Para as linhas externas, isto é, linhas que se ligam à um vértice (no caso de expansões com interação) ou a nenhum vértice (caso de diagramas formados apenas por linhas desconexas), estão associados a polarização (fóton) ou o spin (férmion) da partícula observada. Para as linhas internas, isto é, linhas que ligam dois vertices, estão associados propagadores. Para o fóton, a linha é desenhada como em (1.224), que representa o propagador $\Delta_{\mu\nu} = -\frac{ig_{\mu\nu}}{k^2+i\epsilon}$. Para o fermion, a linha associada é a (1.225) e representa o propagador $S = \frac{i(\not{k}+m)}{k^2-m^2+i\epsilon}$. A seta aponta, convencionalmente, para a direita no caso de partículas e para esquerda no caso de antipartículas.



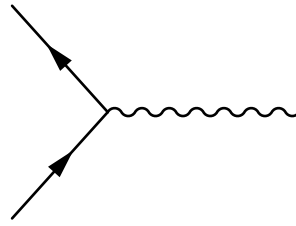
$$(1.224)$$



$$(1.225)$$

À um vértice como em (1.226) está associado uma interação e tal vértice representa a constante de acoplamento $-k\gamma^\mu$. Além disso, o momento se conserva em cada vértice, pois, como cada linha tem um termo de momento associado, então, esses termos se relacionam pela lei de conservação em cada vertice de interação. Também é importante notar que, como o termo de interação é dado por $-k\bar{\psi}\gamma_\mu^\mu\psi$, então, a cada vértice só podem

haver três linhas ligadas: uma linha de fóton e duas de férmions.



(1.226)

Para linhas externas, como no diagrama (1.226), onde cada linha só se liga à um vértice, está associado o termo de polarização. Para o caso dos fótons pós-espalhamento, têm-se (1.227) (o círculo está representando o resto do diagrama), que representa $\hat{e}^*(k)$, ou seja, o termo de polarização com momento externo k . Já os fótons antes do espalhamento são dados por 1.228, que representam o termo de polarização $\hat{e}(k)$.



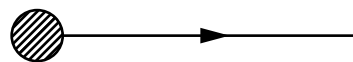
(1.227)



(1.228)

Para férmions antes e após o espalhamento têm-se os termos de spin $u^s(p)$ e $\bar{u}^s(p)$, que são representados pelos diagramas externos (1.230) e (1.229) respectivamente.

Para o caso de antipartículas, os diagramas terão as setas apontadas para a esquerda e os spins antes e após o espalhamento são dados por $\bar{v}^s(p)$ e $v^s(p)$, respectivamente.



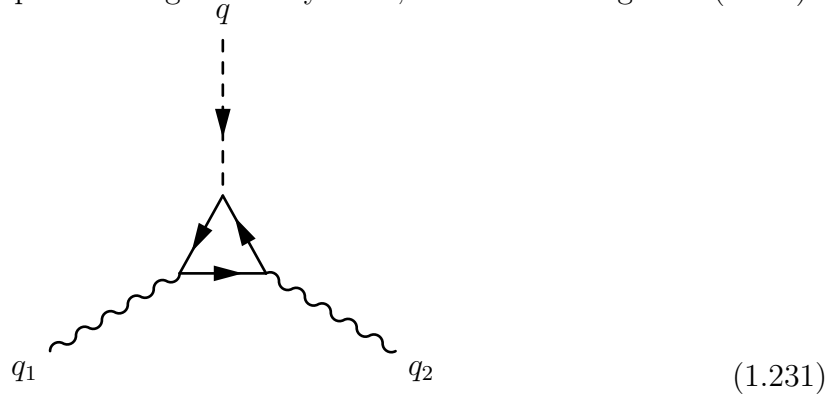
(1.229)



(1.230)

Após se fazer todas essas substituições em um gráfico, deve-se lembrar que os termos γ_μ terão seu índice contraído com o índice do propagador do fóton (linhas internas) ou com o índice do vetor polarização (linhas externas). Além disso, como são matrizes, cada uma das matrizes deve estar "sanduichada" por um espinor à direita e um espinor conjugado à esquerda. Como a função de Green de dois pontos é dada por $\langle 0|T(\psi(x)\bar{\psi}(y))|0\rangle$, então, para linhas internas, as matrizes de Dirac serão "sanduichadas" por propagadores de férmions e, para linhas externas, por termos de spin. Ao fim de tudo, integra-se sobre os momentos indefinidos dos propagadores, isto é, os momentos que não estão associados as linhas externas. Lembrando-se que, como aparecerão termos de matrizes nos integrandos, deve-se integrar o traço do produto desses propagadores. Também é importante notar que a permutação de linhas externas deve obedecer a estatística do spin da partícula ao qual essa linha está associada. Outra informação importante é que, na presença de loops de fermions nos diagramas, um sinal negativo a mais surge na integral.

Como exemplo para aplicar as regras de Feynman, considere o diagrama (1.231).



Usando as regras de Feynman, esse diagrama se torna

$$I = - \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{tr} \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \gamma_\alpha \gamma_5 \frac{i(\not{p} - \not{q} + m)}{(p - q)^2 - m^2 + i\epsilon} \gamma_\mu \frac{i(\not{p} - \not{q}_1 + m)}{(p - q_1)^2 - m^2 + i\epsilon}, \quad (1.232)$$

onde os momentos são conservados em cada vértice e os termos de polarização foram ocultados (ou seja, se trata apenas da integral associada às linhas internas). O termo $\gamma_\alpha \gamma_5$ surge devido a interação com um campo de gauge axial, que será estudada no próximo capítulo.

Conhecer as regras de Feynman se torna conveniente, pois não há a necessidade de se aplicar as funções espaciais de Green na fórmula de LSZ, apesar de que as regras surgem justamente dessa aplicação. Portanto, as vezes, é mais simples representar as funções de Green como diagramas de Feynman.

2 Anomalias em Teoria Quântica de Campos

Nesse capítulo, serão estudadas as leis de conservação clássicas, seu análogo quântico dado pelas identidades de Ward e as anomalias que surgem nas leis de conservação.

2.1 Leis de conservação clássicas e simetrias

2.1.1 Correntes dos campos de gauge abeliano e sua conservação

Começando com o caso mais simples, considere um gauge abeliano. Para a eletrodinâmica quântica, a lagrangiana é dada por

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\cancel{D} - m + e\mathcal{A})\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \quad (2.1)$$

cujas equações de movimento são

$$(i\cancel{D} - m + e\mathcal{A})\psi = 0, \quad (2.2)$$

$$\bar{\psi}(i\overleftarrow{\cancel{D}} + m - e\mathcal{A}) = 0, \quad (2.3)$$

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu. \quad (2.4)$$

Usando o teorema de Noether, é possível obter a corrente que aparece em (2.4). A análise feita se focará nas correntes (2.5) e (2.6), onde, por definição, $\gamma_5 = i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$. A função (2.6) é chamada de corrente pseudoescalar.

$$j_\mu = \bar{\psi}\gamma_\mu\psi, \quad (2.5)$$

$$j_\mu^5 = \bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi, \quad (2.6)$$

$$P = \bar{\psi}\gamma_5\psi. \quad (2.7)$$

Fazendo uma análise das leis de conservação para as correntes acima e em quais condições a equação de continuidade é satisfeita, tem-se, para a quadricorrente

$$\begin{aligned} \partial^\mu j_\mu &= \partial_\mu(\bar{\psi}\gamma_\mu\psi) \\ &= i\bar{\psi}(m - e\mathcal{A})\psi + i\bar{\psi}(-m + e\mathcal{A})\psi = 0. \end{aligned} \quad (2.8)$$

O resultado (2.8) é obtido usando as equações de movimento. Portanto, a quadricorrente elétrica é conservada.

Para a corrente (2.6), chamada de corrente axial, o processo é análogo,

$$\partial^\mu j_\mu^5 = i\bar{\psi}(m - e\mathcal{A})\gamma_5\psi - i\bar{\psi}\gamma_5(-m + e\mathcal{A})\psi = 2imP. \quad (2.9)$$

Em (2.9), o resultado foi obtido usando a propriedade de anticomutatividade $\{\gamma_5, \gamma_\mu\} = 0$. Para férmions sem massa, a corrente axial é conservada.

Sabendo que as leis de conservação estão associadas à simetrias, de acordo com o teorema de Noether, para analisar as simetrias associadas às conservações acima, faz-se necessário trabalhar com dois campos de gauge, v_μ e A_μ , que serão tratados como campos externos. Assim, a lagrangiana é reescrita como

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\mathcal{D} + \not{v} + \not{A}\gamma_5)\psi, \quad (2.10)$$

onde as constantes de acoplamento foram adotadas como 1. Para as transformações de gauge locais em $U_v(1)$, os campos de Dirac e o campo de gauge se transformam como

$$\psi \rightarrow e^{i\alpha(x)}\psi, \quad (2.11)$$

$$\bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi}e^{-i\alpha(x)}, \quad (2.12)$$

$$v_\mu \rightarrow v_\mu + \partial_\mu\alpha. \quad (2.13)$$

Para essas transformações, a lagrangiana se mantém invariante e, conseqüentemente, a quadricorrente se conserva.

Analogamente, para transformações de gauge locais $U_A(1)$,

$$\psi \rightarrow e^{i\beta(x)\gamma_5}\psi, \quad (2.14)$$

$$\bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi}e^{-i\beta(x)\gamma_5}, \quad (2.15)$$

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu\beta. \quad (2.16)$$

A lagrangiana também se mantém invariante sob as transformações desse grupo. Para essa simetria, a corrente axial é conservada. Assim, é justo nomear A_μ de campo de gauge axial.

É conveniente decompor os campos em componente esquerdo (L) e componente direito (R). Para isso, se define o operador de projeção 2.17,

$$P_\pm = \frac{1}{2}(1 \pm \gamma_5). \quad (2.17)$$

Tal operador satisfaz as propriedades

$$P_{\pm}^2 = P_{\pm}, \quad (2.18)$$

$$P_+ P_- = 0 \quad (2.19)$$

e

$$P_+ + P_- = 1. \quad (2.20)$$

Esse operador sera útil ao redefinir a lagrangiana de modo a se manter uma certa simetria. De fato, o operador projeção resulta, ao ser aplicado aos espinores, em dois campos. Definindo esses campos como

$$\psi_{L,R} = \psi_{\pm} = P_{\pm} \psi. \quad (2.21)$$

Conseqüentemente,

$$\gamma_5 \psi_{\pm} = \pm \psi_{\pm}. \quad (2.22)$$

Tambem é possível escrever as componentes L e R dos campos de gauge como combinações lineares do campo de gauge vetorial e axial,

$$A_{\mu}^L = A_{\mu} + v_{\mu} \quad (2.23)$$

e

$$A_{\mu}^R = v_{\mu} - A_{\mu}. \quad (2.24)$$

Portanto, a lagrangiana (2.10) é, em termos desses campos,

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}^L (i\partial\!\!\!/ + A^L) \psi^L + \bar{\psi}^R (i\partial\!\!\!/ + A^R) \psi^R = \mathcal{L}^L + \mathcal{L}^R. \quad (2.25)$$

Obviamente, pode-se transformar, separadamente, a componente L e R da lagrangiana.

Para transformações de gauge na componente L, têm-se

$$\psi_L \rightarrow e^{i\Lambda^L(x)} \psi^L, \quad (2.26)$$

$$A_{\mu}^L \rightarrow A_{\mu}^L + \partial_{\mu} \Lambda^L. \quad (2.27)$$

Para a componente R, analogamente

$$\psi_R \rightarrow e^{i\Lambda^R(x)} \psi^R, \quad (2.28)$$

$$A_{\mu}^R \rightarrow A_{\mu}^R + \partial_{\mu} \Lambda^R. \quad (2.29)$$

Ambas as transformações, separadamente, mantém a lagrangiana invariante. Conseqüentemente, associada a essa simetria, existem as seguintes correntes conservadas

$$j_{\mu}^L = \bar{\psi}^L \gamma_{\mu} \psi^L = \bar{\psi} \gamma_{\mu} \frac{1}{2} (1 + \gamma_5) \psi = \frac{1}{2} (j_{\mu} + j_{\mu}^5), \quad (2.30)$$

$$j_\mu^R = \bar{\psi}^R \gamma_\mu \psi^R = \bar{\psi} \gamma_\mu \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)\psi = \frac{1}{2}(j_\mu - j_\mu^5), \quad (2.31)$$

o que implica nas leis de conservação $\partial^\mu j_\mu^L = \partial^\mu j_\mu^R = 0$.¹

2.1.2 Caso não-abeliano

Para gauges não-abelianos, a lagrangiana é dada por

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}(\not{\partial} + \not{v} + \not{A}\gamma_5)\psi - m\bar{\psi}\psi, \quad (2.32)$$

onde $v_\mu = v_\mu^a T^a$ e $A_\mu = A_\mu^a T^a$ são as correntes não-abelianas vetorial e axial, respectivamente. Considere uma transformação infinitesimal em $SU_v(n)$, dada por $g = e^\alpha$. Cada componente se transforma como

$$\delta\bar{\psi} = \bar{\psi}\alpha, \quad (2.33)$$

$$\delta\psi = -\alpha\psi, \quad (2.34)$$

$$\delta v_\mu = D_\mu \alpha, \quad (2.35)$$

$$\delta A_\mu = [A_\mu, \alpha]. \quad (2.36)$$

Analogamente, para $h = e^{\beta\gamma_5}$ em $SU_A(n)$,

$$\delta\bar{\psi} = \bar{\psi}\beta\gamma_5, \quad (2.37)$$

$$\delta\psi = -\beta\gamma_5\psi, \quad (2.38)$$

$$\delta A_\mu = D'_\mu \beta, \quad (2.39)$$

$$\delta v_\mu = [v_\mu, \beta]\gamma_5. \quad (2.40)$$

Portanto, para uma transformação em $SU_v(n) \times SU_A(n)$, tem-se

$$\delta\bar{\psi} = \bar{\psi}(\beta\gamma_5 + \alpha), \quad (2.41)$$

$$\delta\psi = -(\beta\gamma_5 + \alpha)\psi, \quad (2.42)$$

¹ Para um aprofundamento sobre, basta pesquisar sobre a representação de Weyl e o férmion de Weyl. O livro do Schwartz[9] têm uma seção sobre esse assunto.

$$\delta A_\mu = D'_\mu \beta + [A_\mu, \alpha] \gamma_5, \quad (2.43)$$

$$\delta v_\mu = D_\mu \alpha + [v_\mu, \beta] \gamma_5. \quad (2.44)$$

É importante salientar que D_μ é a derivada covariante cujo a conexão é o campo de gauge vetorial, enquanto D'_μ é a derivada covariante cujo a conexão é o campo de gauge axial.

A corrente vetorial e axial são dadas por

$$j_\mu^a = i\bar{\psi}\gamma_\mu T^a \psi \quad (2.45)$$

e

$$j_\mu^{5a} = i\bar{\psi}\gamma_\mu \gamma_5 T^a \psi. \quad (2.46)$$

As leis de conservação podem ser obtidas através das equações de movimento, que são dadas por

$$\bar{\psi}(i\overleftarrow{\not{D}} - i\not{\psi} - i\not{A}\gamma_5 + m) = 0 \quad (2.47)$$

e

$$(i\not{D} + i\not{\psi} + i\not{A}\gamma_5 - m)\psi = 0. \quad (2.48)$$

Portanto, obtendo o divergente de (2.45),

$$\begin{aligned} \partial_\mu j^{a\mu} &= \bar{\psi}i\overleftarrow{\not{D}} T^a \psi + \bar{\psi}T^a i\not{D}\psi \\ &= \bar{\psi}(i\not{\psi} + i\not{A}\gamma_5)T^a \psi - \bar{\psi}T^a(i\not{\psi} + i\not{A}\gamma_5)\psi \\ &= i\bar{\psi}\gamma_\mu [T^b, T^a](v^{b\mu} + A^{b\mu}\gamma_5)\psi. \end{aligned} \quad (2.49)$$

Com isso, chega-se na lei de conservação

$$D_\mu j^{a\mu} + [A_\mu, j^{5a\mu}] = 0. \quad (2.50)$$

De maneira análoga,

$$\begin{aligned} \partial_\mu j^{5a\mu} &= \bar{\psi}i\overleftarrow{\not{D}} \gamma_5 T^a \psi - \bar{\psi}\gamma_5 T^a i\not{D}\psi \\ &= \bar{\psi}(iv^{b\mu} - iA^{b\mu}\gamma_5)\gamma_\mu \gamma_5 T^b T^a \psi - \bar{\psi}\gamma_5 \gamma_\mu T^a T^b (iA^{b\mu} - iv^{b\mu})\psi - 2m\bar{\psi}\gamma_5 T^a \psi \\ &= i\bar{\psi}\gamma_\mu \gamma_5 [T^b, T^a](v^{b\mu} - A^{b\mu}\gamma_5)\psi + 2imP^a \\ &\implies D_\mu j^{5a\mu} + [A_\mu, j^{a\mu}] = 2imP^a, \end{aligned} \quad (2.51)$$

onde $P^a = i\bar{\psi}\gamma_5 T^a \psi$.

Para se obter as correntes quirais, o processo é análogo ao caso abeliano. Tem-se

$$A_\mu^{(L)} = A_\mu + V_\mu, \quad (2.52)$$

$$A_\mu^{(R)} = A_\mu - V_\mu, \quad (2.53)$$

$$D^{(L,R)} = \partial_\mu + [A_\mu^{(L,R)},], \quad (2.54)$$

$$j_\mu^{(L)a} = \frac{1}{2}(j_\mu^a + j_\mu^{5a}), \quad (2.55)$$

$$j_\mu^{(R)a} = \frac{1}{2}(j_\mu^a - j_\mu^{5a}). \quad (2.56)$$

Com tais definições, as leis de conservação são dadas por (para $m = 0$)

$$D_\mu^{(L,R)} j^{(L,R)a\mu} = 0. \quad (2.57)$$

Note a semelhança de (2.57) com o caso abeliano. Outras generalizações acabam sendo naturais, portanto, nas próximas seções, serão tratados os casos abelianos.

2.2 Identidades de Ward

Para tratar das leis de conservação na teoria quântica de campos, é necessário ter em mente que se estará lidando com as funções de Green e com os funcionais geradores. Logo, a validade das leis de conservação induzem relações entre as funções de Green, chamadas de identidades de Ward. Tais identidades são o análogo quântico das leis de conservação.

2.2.1 Funções de Green

Considere um operador $Tj^\mu O^1 O^2 \dots O^n$, sendo j^μ a corrente tratada e O^i operadores genéricos. A função de Green desse operador é dada por

$$\langle 0 | T j^\mu(x) O^1(y_1) O^2(y_2) \dots O^n(y_n) | 0 \rangle. \quad (2.58)$$

Fazendo a quadridivergência de (2.58),

$$\begin{aligned} & \partial_\mu^x \langle 0 | T j^\mu(x) O^1(y_1) O^2(y_2) \dots O^n(y_n) | 0 \rangle = \\ & = \langle 0 | T \partial_\mu^x j^\mu(x) O^1(y_1) O^2(y_2) \dots O^n(y_n) | 0 \rangle + \\ & + \sum_{i=1}^n \langle 0 | T [j^0(x), O^i(y_i)] \delta(x_0 - y_{i0}) O^1(y_1) O^2(y_2) \dots O^{i-1} O^{i+1} \dots O^n(y_n) | 0 \rangle, \end{aligned} \quad (2.59)$$

onde o comutador surgiu da derivação da função de Heaviside.

Quando se considera a lei de conservação clássica da corrente e a álgebra dos comutadores, a relação acima se torna uma identidade de Ward. Essas relações entre as funções de Green devem ser satisfeitas para que as leis de conservação sejam satisfeitas, como visto classicamente.

Trabalhando com um caso simples da identidade de Ward, dada pela função

$$\tau^\mu(x, y, z) = \langle 0|Tj^\mu(x)\psi(y)\bar{\psi}(z)|0\rangle. \quad (2.60)$$

A comutação canônica para tempos iguais é dada por

$$[j^0(x), \psi(z)]\delta(x_0 - z_0) = [\psi^\dagger(x)\psi(x), \psi(z)]\delta(x_0 - z_0) \quad (2.61)$$

$$= -\{\psi(z), \psi^\dagger(x)\}\psi(x)\delta(x_0 - z_0) = -\psi(x)\delta^4(x - z), \quad (2.62)$$

onde as relações de anticomutação dos espinores foram utilizadas.

Analogamente,

$$[j^0(x), \bar{\psi}(z)] = \bar{\psi}(x)\delta^4(x - z) \quad (2.63)$$

Logo, diferenciando a função $\tau^\mu(x, y, z)$ e considerando a conservação da corrente, tem-se

$$\begin{aligned} \partial_\mu^x \tau^\mu &= -\langle 0|T\psi(x)\bar{\psi}(z)|0\rangle\delta^4(x - y) + \langle 0|T\psi(y)\bar{\psi}(x)|0\rangle\delta^4(x - z) \\ &= -iS(x - z)\delta^4(x - y) + iS(y - x)\delta^4(x - z). \end{aligned} \quad (2.64)$$

Fazendo uma transformação de Fourier para o espaço dos momentos,

$$(p_\mu - p'_\mu)\tau^\mu(p, p') = S(p') - S(p), \quad (2.65)$$

e dividindo ambos os lados de (2.65) por $S(p)S(p')$, obtém-se a identidade de Takahashi,

$$(p_\mu - p'_\mu)\Gamma^\mu(p, p') = S^{-1}(p) - S^{-1}(p'), \quad (2.66)$$

onde $\Gamma^\mu(p, p') = -\frac{\tau^\mu(p, p')}{S(p)S(p')}$, que seria o termo associado ao vértice. Logo,

$$\Gamma^\mu(p, p') = \frac{S^{-1}(p) - S^{-1}(p')}{p_\mu - p'_\mu}, \quad (2.67)$$

e fazendo o limite que $p' \rightarrow p$, a equação (2.67) se transforma na identidade de Ward

$$\Gamma^\mu(p, p) = \frac{\partial S^{-1}(p)}{\partial p_\mu}. \quad (2.68)$$

Outras identidades de Ward que valem a pena analisar são as das funções de Green (2.69) e (2.70),

$$\langle 0|Tj_\mu(x)j_\nu(y)j_\lambda^5(z)|0\rangle, \quad (2.69)$$

$$\langle 0|Tj_\mu(x)j_\nu(y)P(z)|0\rangle. \quad (2.70)$$

Tais funções de Green possuem propriedades importantes. Por exemplo, elas violam o resultado clássico esperado para a conservação da corrente, gerando uma anomalia.

Para provar isso, primeiramente, transforme as variáveis de (2.69) e (2.70) para o espaço dos momentos,

$$T_{\mu\nu\lambda}(k_1, k_2, q) = i \int d^4x d^4y d^4z e^{i(k_1x+k_2y-qz)} \langle 0|Tj_\mu(x)j_\nu(y)j_\lambda^5(z)|0\rangle, \quad (2.71)$$

$$T_{\mu\nu}(k_1, k_2) = i \int d^4x d^4y d^4z e^{i(k_1x+k_2y-qz)} \langle 0|Tj_\mu(x)j_\nu(y)P(z)|0\rangle. \quad (2.72)$$

Aplicando a transformação para a derivada de (2.71), tem-se

$$\int d^4x d^4y d^4z e^{i(k_1x+k_2y-qz)} \partial_z^\lambda \langle 0|Tj_\mu(x)j_\nu(y)j_\lambda^5(z)|0\rangle = q^\lambda T_{\mu\nu\lambda}, \quad (2.73)$$

e desenvolvendo a derivada(aplicando nos termos, analisando os comutadores e etc), chega-se em

$$\int d^4x d^4y d^4z e^{i(k_1x+k_2y-qz)} \langle 0|Tj_\mu(x)j_\nu(y)\partial_z^\lambda j_\lambda^5(z)|0\rangle = q^\lambda T_{\mu\nu\lambda}.$$

Usando a lei clássica de conservação $\partial^\mu j_\mu^5 = 2imP$, obtém-se a identidade de Ward axial(IWA),

$$q^\lambda T_{\mu\nu\lambda} = 2mi \int d^4x d^4y d^4z e^{i(k_1x+k_2y-qz)} \langle 0|Tj_\mu(x)j_\nu(y)P(z)|0\rangle = 2mT_{\mu\nu}. \quad (2.74)$$

Por analogia, diferenciando as outras correntes, obtém-se a identidade de Ward vetorial (I WV),

$$k^\mu T_{\mu\nu\lambda} = k^\nu T_{\mu\nu\lambda} = 0. \quad (2.75)$$

Os resultados (2.74) e (2.75) são identidades obtidas considerando que as correntes se conservam tal como obtido nos resultados clássicos. Mas, para um resultado correto, faz-se necessário calcular diretamente, sem supor que as correntes se conservam.

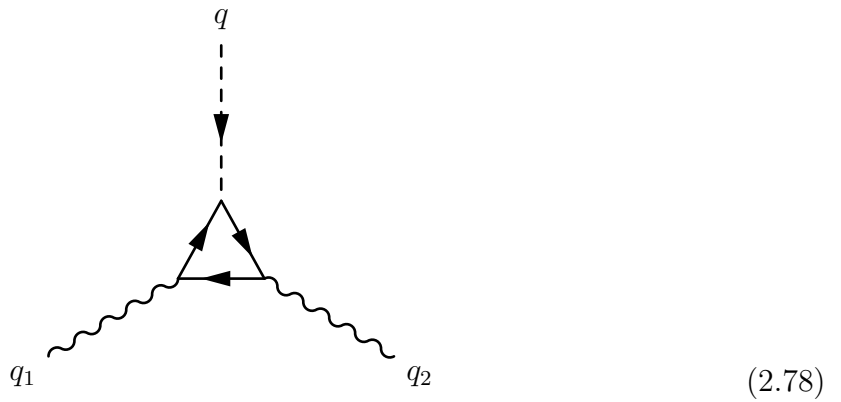
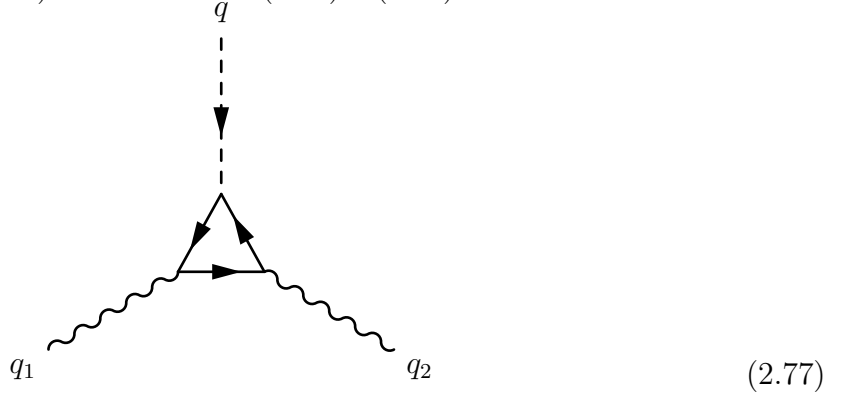
2.2.2 Identidade de Ward anômala e anomalia de ABJ

Na subseção anterior, foi feita a suposição de que as leis de conservação clássicas valem para a teoria quântica de campos. Com tal suposição, foram obtidos as identidades de Ward (2.74) e (2.75). Entretanto, com um cálculo direto dos diagramas de Feynman correspondentes as funções de Green (2.71) e (2.72), obtém-se uma anomalia nas leis de conservação.

Primeiramente, a função (2.69) tem a forma explicita

$$\langle 0|TA_\alpha(x_1)v_\beta(x_2)v_\delta(x_3) : \bar{\psi}(x)\gamma_\mu v^\mu(x)\psi(x) :: \bar{\psi}(y)\gamma_\nu v^\nu(y)\psi(y) :: \bar{\psi}(z)\gamma_\lambda A^\lambda\gamma_5\psi(z) : |0\rangle. \quad (2.76)$$

Esse é um termo da expansão da função de Green com interação. Portanto, os diagramas de Feynman associados à (2.76) são a soma de (2.77) e (2.78).



Associada ao grafico (2.77) está a integral (2.79) e, ao grafico (2.78) está a integral (2.80),

$$I = I_{\mu\nu\lambda}(q_1) = -i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{tr} \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2} \gamma_\lambda \gamma_5 \frac{i(\not{p} - \not{q} + m)}{(p - q)^2 - m^2} \gamma_\nu \frac{i(\not{p} - \not{q}_1 + m)}{(p - q_1)^2 - m^2} \gamma_\mu, \quad (2.79)$$

$$I = I_{\nu\mu\lambda}(q_2) = -i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{tr} \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2} \gamma_\lambda \gamma_5 \frac{i(\not{p} - \not{q} + m)}{(p - q)^2 - m^2} \gamma_\mu \frac{i(\not{p} - \not{q}_2 + m)}{(p - q_2)^2 - m^2} \gamma_\nu. \quad (2.80)$$

Também faz-se necessário calcular a função de Green (2.70), pois ela aparece na identidade (2.74). Os diagramas de Feynman para essa função são iguais aos (2.77) e (2.78) (a soma deles), apenas substituindo o termo $\gamma_\lambda \gamma_5$ por γ_5 . Portanto,

$$J = J_{\mu\nu}(q_1) = -i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{tr} \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2} \gamma_5 \frac{i(\not{p} - \not{q} + m)}{(p - q)^2 - m^2} \gamma_\nu \frac{i(\not{p} - \not{q}_1 + m)}{(p - q_1)^2 - m^2} \gamma_\mu \quad (2.81)$$

$$\implies T_{\mu\nu} = J_{\mu\nu}(q_1) + J_{\nu\mu}(q_2). \quad (2.82)$$

Agora, usando $\not{q} \gamma_5 = (\not{p} - m) \gamma_5 + \gamma_5 (\not{p} - \not{q} - m) + 2m \gamma_5$, e aplicando em $q^\lambda T_{\mu\nu\lambda}$, o resultado é

$$q^\lambda I_{\mu\nu\lambda}(q_1) = -i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{tr} \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2} \not{q} \gamma_5 \frac{i(\not{p} - \not{q} + m)}{(p - q)^2 - m^2} \gamma_\nu \frac{i(\not{p} - \not{q}_1 + m)}{(p - q_1)^2 - m^2} \gamma_\mu$$

$$\begin{aligned}
&= 2mJ_{\mu\nu}(q_1) - i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{tr} \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2} \gamma_5 (\not{p} - \not{q} - m) \frac{i(\not{p} - \not{q} + m)}{(p - q)^2 - m^2} \gamma_\nu \frac{i(\not{p} - \not{q}_1 + m)}{(p - q_1)^2 - m^2} \gamma_\mu + \\
&\quad - i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{tr} \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2} (\not{p} - m) \gamma_5 \frac{i(\not{p} - \not{q} + m)}{(p - q)^2 - m^2} \gamma_\nu \frac{i(\not{p} - \not{q}_1 + m)}{(p - q_1)^2 - m^2} \gamma_\mu \\
&= 2mJ_{\mu\nu} - \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{tr} \frac{(\not{p} + m)}{p^2 - m^2} \gamma_5 \gamma_\nu \frac{(\not{p} - \not{q}_1 + m)}{(p - q_1)^2 - m^2} \gamma_\mu + \gamma_5 \frac{(\not{p} - \not{q} + m)}{(p - q)^2 - m^2} \gamma_\nu \frac{(\not{p} - \not{q}_1 + m)}{(p - q_1)^2 - m^2} \gamma_\mu.
\end{aligned} \tag{2.83}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}
&q^\lambda I_{\nu\mu\lambda}(q_2) = \\
&= 2mJ_{\nu\mu}(q_2) - \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{tr} \frac{(\not{p} + m)}{p^2 - m^2} \gamma_5 \gamma_\mu \frac{(\not{p} - \not{q}_2 + m)}{(p - q_2)^2 - m^2} \gamma_\nu + \gamma_5 \frac{(\not{p} - \not{q} + m)}{(p - q)^2 - m^2} \gamma_\mu \frac{(\not{p} - \not{q}_2 + m)}{(p - q_2)^2 - m^2} \gamma_\nu,
\end{aligned} \tag{2.84}$$

portanto,

$$q^\lambda T_{\mu\nu\lambda} = 2mT_{\mu\nu} + R_{\mu\nu}^{(1)} + R_{\mu\nu}^{(2)}, \tag{2.85}$$

onde

$$R_{\mu\nu}^{(1)} = - \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{tr} \frac{(\not{q} - \not{p} + m)}{(p - q)^2 - m^2} \gamma_5 \gamma_\mu \frac{(\not{p} - \not{q}_2 + m)}{(p - q_2)^2 - m^2} \gamma_\nu - \frac{(\not{p} + m)}{p^2 - m^2} \gamma_5 \gamma_\mu \frac{(\not{q}_1 - \not{p} + m)}{(p - q_1)^2 - m^2} \gamma_\nu, \tag{2.86}$$

$$R_{\mu\nu}^{(2)} = - \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{tr} \frac{(\not{q} - \not{p} + m)}{(p - q)^2 - m^2} \gamma_5 \gamma_\nu \frac{(\not{p} - \not{q}_1 + m)}{(p - q_1)^2 - m^2} \gamma_\mu - \frac{(\not{p} + m)}{p^2 - m^2} \gamma_5 \gamma_\nu \frac{(\not{p} - \not{q}_2 + m)}{(p - q_2)^2 - m^2} \gamma_\mu. \tag{2.87}$$

Portanto, para que a identidade de Ward (2.74) seja satisfeita, $R^1 + R^2 \rightarrow 0$. Para essa análise, é necessário estudar a convergência de integrais do tipo (2.88),

$$I = \int_{\mathbb{R}^n} d^n x [f(x + a) - f(x)]. \tag{2.88}$$

Suponha que a integral (2.88) seja linearmente divergente, i.e., $f(\pm\infty) \neq 0$ e $f'(\pm\infty) = f''(\pm\infty) = \dots = 0$, então, expandindo $f(x + a)$ em (2.88),

$$I = \int d^n x [a^\mu \partial_\mu f(x) + \dots]. \tag{2.89}$$

Para resolver a integral (2.89), basta integrar sobre o volume da hipersfera de raio R e fazer o raio tender a infinito. Portanto, aplicando o teorema de Gauss, somente o primeiro termo sobrevive, por hipótese,

$$\begin{aligned}
I &= \int d^{n-1} S \left(\frac{r^\mu}{r} a^\mu f(r_\nu) \right) \\
&= a^\mu \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{R_\mu}{R} S^{n-1}(R) f(R).
\end{aligned} \tag{2.90}$$

O termo $S^{n-1}(R)$ é a superfície da hipersfera de raio R e dimensão n . Para uma hipersfera no espaço de Minkowski, a superfície é dada por (2.91). O i surge ao se fazer a substituição $x_4 = ix_0$ na superfície esférica em um espaço euclidiano de 4 dimensões,

$$S_{(n-1)}(R) = 2i\pi^2 R^3. \quad (2.91)$$

Aplicando (2.91) em (2.90),

$$I(a) = 2i\pi^2 a^\mu \left(\lim_{R \rightarrow \infty} R^2 R_\mu f(R) \right) \quad (2.92)$$

Com o resultado (2.92), é possível calcular $R^{(1)}$ e $R^{(2)}$.

Para $R^{(1)}$, é possível fazer uma translação do tipo $p \rightarrow p + q_2$,

$$R_{\mu\nu}^{(1)} = - \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{tr} \frac{(\not{q}_1 - \not{p} + m)}{(p - q_1)^2 - m^2} \gamma^5 \gamma_\mu \frac{(\not{p} + m)}{p^2 - m^2} \gamma_\nu - \frac{(\not{p} + \not{q}_2 + m)}{(p + q_2)^2 - m^2} \gamma^5 \gamma_\mu \frac{(\not{q}_1 - \not{p} - \not{q}_2 + m)}{(p + q_2 - q_1)^2 - m^2} \gamma_\nu, \quad (2.93)$$

consequentemente,

$$R_{\mu\nu}^{(1)} = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} [f(p + q_2) - f(p)]. \quad (2.94)$$

Portanto,

$$R_{\mu\nu}^{(1)} = 2i\pi(2\pi)^{-4} q_2^\eta \lim_{p \rightarrow \infty} p_\eta p^2 \text{tr} \frac{(\not{q}_1 - \not{p} + m)}{(p - q_1)^2 - m^2} \gamma^5 \gamma_\mu \frac{(\not{p} + m)}{p^2 - m^2} \gamma_\nu. \quad (2.95)$$

O limite dentro de (2.95) evolui como

$$\begin{aligned} &= \lim_{p \rightarrow \infty} p_\eta p^2 \text{tr} \frac{(\not{q}_1 - \not{p} + m)}{(p - q_1)^2 - m^2} \gamma^5 \gamma_\mu \frac{(\not{p} + m)}{p^2 - m^2} \gamma_\nu = - \lim_{p \rightarrow \infty} p_\eta p^\alpha (p^\beta - q_1^\beta) p^{-2} \text{tr} \gamma_\beta \gamma^5 \gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\nu \\ &= 4i \lim_{p \rightarrow \infty} p^{-2} p_\eta p^\alpha (p^\beta - q_1^\beta) \epsilon_{\beta\mu\alpha\nu}, \end{aligned} \quad (2.96)$$

onde $\epsilon_{\beta\mu\alpha\nu}$ é o símbolo de Levi-Civita. Como $\epsilon_{\beta\mu\alpha\nu} p^\alpha p^\beta = 0$, então somente o termo $p^\alpha q_1^\beta$ contribui. Isso também justifica o uso de (2.92), já que esse é um resultado para divergências lineares. O fato do traço surgir sem a necessidade de tirar o limite anula, de qualquer maneira, o termo $p^\alpha p^\beta$. Portanto, fazendo o limite (2.96),

$$= 4i \lim_{p \rightarrow \infty} p^{-2} p_\eta p^\alpha q_1^\beta \epsilon_{\beta\nu\alpha\mu} = i q_1^\beta \delta_\eta^\alpha \epsilon_{\beta\nu\alpha\mu}$$

$$\implies R_{\nu\mu}^{(1)} = -\frac{1}{8\pi^2} \epsilon_{\beta\nu\alpha\mu} q_1^\beta q_2^\alpha, \quad (2.97)$$

pela simetria de $R^{(2)}$, e fazendo $p \rightarrow p + q_1$, obtém-se (2.98),

$$R_{\mu\nu}^{(2)} = -\frac{1}{8\pi^2} \epsilon_{\beta\nu\alpha\mu} q_1^\beta q_2^\alpha. \quad (2.98)$$

Assim sendo, a identidade de Ward (2.85) se torna

$$q^\lambda T_{\mu\nu\lambda} = 2m T_{\mu\nu} - \frac{1}{4\pi^2} \epsilon_{\beta\nu\alpha\mu} q_1^\beta q_2^\alpha. \quad (2.99)$$

A expressão (2.99) difere de (2.74), pois $R^1 + R^2 \neq 0$. De fato, essa identidade é chamada de identidade de Ward anômala, devido a quebra da lei de conservação. Entretanto, a translação no momento que gerou o resultado (2.99) foi um tanto arbitrária. De fato, outros valores podem ser escolhidos de modo que o resultado se difere. Portanto, há uma certa ambiguidade na amplitude $T_{\mu\nu\lambda}$.²

Faz-se necessário um estudo do comportamento da amplitude (2.71) conforme a translação na variável de integração seja diferente. Com auxílio de (2.92), será estudado a diferença $T_{\mu\nu\lambda}(a) - T_{\mu\nu\lambda}(0)$, onde $T_{\mu\nu\lambda}(a)$ é igual à fazer uma translação $p \rightarrow p + a$, (tal translação é dada por $a = \alpha q_1 + (\alpha - \beta)q_2$) na variável de integração de $T_{\mu\nu\lambda}$. Portanto,

$$\Delta_{\mu\nu\lambda}(a) = T_{\mu\nu\lambda}(a) - T_{\mu\nu\lambda}(0) = \int \frac{dp}{(2\pi)^4} [F_1(p+a) + F_2(p+a) - F_1(p) - F_2(p)], \quad (2.100)$$

onde

$$F_1(p) = -\Omega p^3 \text{tr} \frac{(\not{p} + m)}{p^2 - m^2} \gamma_\lambda \gamma_5 \frac{(\not{p} - \not{q} + m)}{(p - q)^2 - m^2} \gamma_\nu \frac{(\not{p} - \not{q}_1 + m)}{(p - q_1)^2 - m^2} \gamma_\mu, \quad (2.101)$$

$$F_2(p) = -\Omega p^3 \text{tr} \frac{(\not{p} + m)}{p^2 - m^2} \gamma_\lambda \gamma_5 \frac{(\not{p} - \not{q} + m)}{(p - q)^2 - m^2} \gamma_\mu \frac{(\not{p} - \not{q}_2 + m)}{(p - q_2)^2 - m^2} \gamma_\nu. \quad (2.102)$$

Note que $\lim_{p \rightarrow \pm\infty} F_{1,2} \neq 0$, enquanto $\lim_{p \rightarrow \pm\infty} F'_{1,2} = 0$ assim como derivadas de ordem superior. Portanto, o resultado (2.92) pode ser usado. Por simplicidade, foram feitos os cálculos somente para F_1 . Por similaridade, isso dará o resultado para F_2 também. Usando o resultado (2.92) ao se expandir F_1 ,

$$-2i \frac{\pi^2}{(2\pi)^4} a^\eta \lim_{p \rightarrow \infty} p_\eta p^2 \left(\text{tr} \frac{(\not{p} + m)}{p^2 - m^2} \gamma_\lambda \gamma_5 \frac{(\not{p} - \not{q} + m)}{(p - q)^2 - m^2} \gamma_\nu \frac{(\not{p} - \not{q}_1 + m)}{(p - q_1)^2 - m^2} \gamma_\mu \right). \quad (2.103)$$

O limite em (2.103) será,

$$\begin{aligned} & \lim_{p \rightarrow \infty} p_\eta p^2 \left(\text{tr} \frac{(\not{p} + m)}{p^2 - m^2} \gamma_\lambda \gamma_5 \frac{(\not{p} - \not{q} + m)}{(p - q)^2 - m^2} \gamma_\nu \frac{(\not{p} - \not{q}_1 + m)}{(p - q_1)^2 - m^2} \gamma_\mu \right) = \\ & = - \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{p_\eta}{p} p^\alpha (p^{-1} \text{tr} (\gamma_\lambda \gamma_5 \gamma_\nu \gamma_\alpha \gamma_\mu)) \\ & = -4^{-1} \delta_\eta^\alpha \text{tr} (\gamma_\lambda \gamma_5 \gamma_\nu \gamma_\alpha \gamma_\mu) \\ & = -i \delta_\eta^\alpha \epsilon_{\nu\alpha\mu\lambda}. \end{aligned} \quad (2.104)$$

Para F_2 , o limite é

$$= -i \delta_\eta^\alpha \epsilon_{\mu\alpha\nu\lambda}. \quad (2.105)$$

² Essa ambiguidade está intimamente relacionada com a divergência superficial da função de Green. Tais divergências na teoria podem ser retiradas renormalizando a teoria.

Além disso, em F_2 , há a troca de q_1 por q_2 e vice-versa. Portanto, considerando que a translação no momento de F_1 é a^n e de F_2 é b^n , (2.100) se torna

$$\Delta_{\mu\nu\lambda}(a, b) = -\frac{1}{8\pi^2}\epsilon_{\nu\eta\mu\lambda}(a^\eta - b^\eta), \quad (2.106)$$

como $b^\alpha = \alpha q_2^\eta + (\alpha - \beta)q_1^\eta$, então, a diferença 2.106 se torna

$$\Delta_{\mu\nu\lambda}(a, b) = \frac{\beta}{8\pi^2}\epsilon_{\nu\eta\mu\lambda}(q_1^\eta - q_2^\eta). \quad (2.107)$$

Conseqüentemente, o parâmetro β determina como a amplitude se comporta com translações. Portanto,

$$T_{\mu\nu\lambda}(\beta) = T_{\mu\nu\lambda}(0) + \frac{\beta}{8\pi^2}\epsilon_{\nu\eta\mu\lambda}(q_1^\eta - q_2^\eta), \quad (2.108)$$

multiplicando (2.108) por q^λ :

$$\begin{aligned} q^\lambda T_{\mu\nu\lambda}(\beta) &= q^\lambda T_{\mu\nu\lambda}(0) + \frac{\beta}{8\pi^2}\epsilon_{\nu\eta\mu\lambda}q^\lambda(q_1^\eta - q_2^\eta) \\ \implies q^\lambda T_{\mu\nu\lambda}(\beta) &= 2mT_{\mu\nu} - \frac{1}{4\pi^2}\epsilon_{\beta\nu\alpha\mu}q_1^\beta q_2^\alpha + \frac{\beta}{8\pi^2}\epsilon_{\mu\eta\nu\lambda}q^\lambda(q_1^\eta - q_2^\eta) \\ &= 2mT_{\mu\nu} - \frac{1}{4\pi^2}\epsilon_{\beta\nu\alpha\mu}q_1^\beta q_2^\alpha + \frac{\beta}{8\pi^2}\epsilon_{\nu\eta\mu\lambda}(q_1^\lambda + q_2^\lambda)(q_1^\eta - q_2^\eta) \\ &= 2mT_{\mu\nu} - \frac{1}{4\pi^2}\epsilon_{\beta\nu\alpha\mu}q_1^\beta q_2^\alpha + \frac{\beta}{8\pi^2}\epsilon_{\nu\eta\mu\lambda}(q_1^\lambda q_1^\eta + q_2^\lambda q_1^\eta - (q_1^\lambda q_2^\eta + q_2^\lambda q_2^\eta)) \\ &= 2mT_{\mu\nu} - \frac{1}{4\pi^2}\epsilon_{\beta\nu\alpha\mu}q_1^\beta q_2^\alpha + \frac{\beta}{8\pi^2}\epsilon_{\nu\eta\mu\lambda}(q_2^\lambda q_1^\eta - q_1^\lambda q_2^\eta) \\ \implies q^\lambda T_{\mu\nu\lambda}(\beta) &= 2mT_{\mu\nu} + \frac{1-\beta}{4\pi^2}\epsilon_{\nu\mu\eta\lambda}q_1^\eta q_2^\lambda. \end{aligned} \quad (2.109)$$

Portanto, (2.109) é a identidade de Ward anômala (para $\beta \neq 1$). Note que $T_{\mu\nu}$ não está em função do parâmetro de translação β . Isso acontece pois $T_{\mu\nu}$ é convergente, ou seja, não há uma ambigüidade associada à translação na variável de integração. Para provar isso, é muito simples. De maneira análoga, considere $D_{\mu\nu}(a) = T_{\mu\nu}(a) - T_{\mu\nu}(0)$. Para $J(\mu, \nu, q_1) = J_1$,

$$\begin{aligned} J_1(a) - J_1(0) &= -\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} tr \frac{(\not{p} + \not{a} + m)}{(p+a)^2 - m^2} \gamma_5 \frac{(\not{p} + \not{a} - \not{q} + m)}{(p+a-q)^2 - m^2} \gamma_\nu \frac{(\not{p} + \not{a} - \not{q}_1 + m)}{(p+a-q_1)^2 - m^2} \gamma_\mu + \\ &\quad - \frac{(\not{p} + m)}{(p)^2 - m^2} \gamma_5 \frac{(\not{p} - \not{q} + m)}{(p-q)^2 - m^2} \gamma_\nu \frac{(\not{p} - \not{q}_1 + m)}{(p-q_1)^2 - m^2} \gamma_\mu \\ &= -i\Omega a^\delta \lim_{p \rightarrow \infty} p^2 p_\delta tr \frac{(\not{p} + m)}{(p)^2 - m^2} \gamma_5 \frac{(\not{p} - \not{q} + m)}{(p-q)^2 - m^2} \gamma_\nu \frac{(\not{p} - \not{q}_1 + m)}{(p-q_1)^2 - m^2} \gamma_\mu. \end{aligned} \quad (2.110)$$

Como o único termo que pode divergir é o proporcional a p^6 , então,

$$= -i\Omega a^\delta \lim_{p \rightarrow \infty} p^{-2} p_\delta p^\alpha tr \gamma_5 \gamma_\nu \gamma_\mu \gamma_\alpha = 0. \quad (2.111)$$

sendo que (2.111) foi usada a identidade $tr \gamma_5 \gamma_\nu \gamma_\mu \gamma_\alpha = 0$. O análogo é feito para $J(\nu, \mu, q_2) = J_2$, de modo que $D_{\mu\nu} = 0$.

Retornando a identidade de Ward (2.109), é evidente que ela não é anômala para um valor específico de β . Isso quer dizer que a anomalia na lei de conservação só surge devido a ambiguidade na função de Green? De fato, não. Isso porque ainda falta outra identidade de Ward para se analisar. Ainda não foi calculada explicitamente a identidade,

$$q_1^\mu T_{\mu\nu\lambda} = A_{\nu\lambda}(\beta). \quad (2.112)$$

Em (2.112), o termo $A_{\nu\lambda}$ é uma possível anomalia que pode surgir, e tal anomalia está em função do parâmetro β . A identidade de Ward não é anômala para o caso de $A_{\nu\lambda} = 0$. Para saber se esse é o caso, considere as seguintes identidades

$$q_1^\mu \frac{(\not{p} + m)}{p^2 - m^2} = (\not{p} - m - \not{p} + m + \not{q}_1) \frac{(\not{p} + m)}{p^2 - m^2} = 1 - (\not{p} - \not{q}_1 - m) \frac{(\not{p} + m)}{p^2 - m^2} \quad (2.113)$$

e

$$\frac{(\not{p} - \not{q} + m)}{(p - q)^2 - m^2} \not{q}_1 = \frac{(\not{p} - \not{q} + m)}{(p - q)^2 - m^2} (\not{p} - \not{q} - m - (\not{p} - \not{q} - m) + \not{q}_1) = -1 + \frac{(\not{p} - \not{q} + m)}{(p - q)^2 - m^2} (\not{p} - \not{q}_2 - m). \quad (2.114)$$

Portanto,

$$q_1^\mu I_{\mu\nu\lambda}(q_1) = - \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} tr \frac{(\not{p} + m)}{p^2 - m^2} \gamma_\lambda \gamma_5 \frac{(\not{p} - \not{q} + m)}{(p - q)^2 - m^2} \gamma_\nu \frac{(\not{p} - \not{q}_1 + m)}{(p - q_1)^2 - m^2} \not{q}_1 \quad (2.115)$$

$$\begin{aligned} &= U + \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} tr (\not{p} - \not{q}_1 - m) \frac{(\not{p} + m)}{p^2 - m^2} \gamma_\lambda \gamma_5 \frac{(\not{p} - \not{q} + m)}{(p - q)^2 - m^2} \gamma_\nu \frac{(\not{p} - \not{q}_1 + m)}{(p - q_1)^2 - m^2} \\ &= U + \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} tr \frac{(\not{p} + m)}{p^2 - m^2} \gamma_\lambda \gamma_5 \frac{(\not{p} - \not{q} + m)}{(p - q)^2 - m^2} \gamma_\nu, \end{aligned} \quad (2.116)$$

onde $U = - \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} tr \gamma_\lambda \gamma_5 \frac{(\not{p} - \not{q} + m)}{(p - q)^2 - m^2} \gamma_\nu \frac{(\not{p} - \not{q}_1 + m)}{(p - q_1)^2 - m^2}$. Para a segunda parte,

$$\begin{aligned} q_1^\mu I_{\nu\mu\lambda}(q_2) &= - \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} tr \frac{(\not{p} + m)}{p^2 - m^2} \gamma_\lambda \gamma_5 \frac{(\not{p} - \not{q} + m)}{(p - q)^2 - m^2} \not{q}_1 \frac{(\not{p} - \not{q}_2 + m)}{(p - q_2)^2 - m^2} \gamma_\nu \\ &= V - \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} tr \frac{(\not{p} + m)}{p^2 - m^2} \gamma_\lambda \gamma_5 \frac{(\not{p} - \not{q} + m)}{(p - q)^2 - m^2} (\not{p} - \not{q}_2 - m) \frac{(\not{p} - \not{q}_2 + m)}{(p - q_2)^2 - m^2} \gamma_\nu \\ &= V - \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} tr \frac{(\not{p} + m)}{p^2 - m^2} \gamma_\lambda \gamma_5 \frac{(\not{p} - \not{q} + m)}{(p - q)^2 - m^2} \gamma_\nu. \end{aligned} \quad (2.117)$$

Em (2.117), $V = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} tr \frac{(\not{p} + m)}{p^2 - m^2} \gamma_\lambda \gamma_5 \frac{(\not{p} - \not{q}_2 + m)}{(p - q_2)^2 - m^2} \gamma_\nu$. Somando (2.116) e (2.117), obtém-se

$$\begin{aligned} q_1^\mu T_{\mu\nu\lambda} &= U + V \\ &= - \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} tr \left(\gamma_\lambda \gamma_5 \frac{(\not{p} - \not{q} + m)}{(p - q)^2 - m^2} \gamma_\nu \frac{(\not{p} - \not{q}_1 + m)}{(p - q_1)^2 - m^2} - \gamma_\lambda \gamma_5 \frac{(\not{p} - \not{q}_2 + m)}{(p - q_2)^2 - m^2} \gamma_\nu \frac{(\not{p} + m)}{p^2 - m^2} \right). \end{aligned} \quad (2.118)$$

Portanto, (2.118) assume a forma

$$\begin{aligned}
q_1^\mu T_{\mu\nu\lambda} &= \frac{2i\pi^2}{(2\pi)^4} q_1^\delta \lim_{p \rightarrow \infty} p_\delta p^2 \text{tr} \gamma_\lambda \gamma_5 \frac{(\not{p} - \not{q}_2 + m)}{(p - q_2)^2 - m^2} \gamma_\nu \frac{(\not{p} + m)}{p^2 - m^2} \\
&= \frac{2i\pi^2}{(2\pi)^4} q_1^\delta \lim_{p \rightarrow \infty} p_\delta p^{-2} (p^\alpha - q_2^\alpha) p^\beta \text{tr} (\gamma_\lambda \gamma_5 \gamma_\alpha \gamma_\nu \gamma_\beta) \\
&= -\frac{8\pi^2}{(2\pi)^4} q_1^\delta \lim_{p \rightarrow \infty} p_\delta p^{-2} q_2^\alpha p^\beta \epsilon_{\lambda\alpha\nu\beta} \\
&= -\frac{1}{8\pi^4} q_2^\alpha q_1^\beta \epsilon_{\lambda\alpha\nu\beta}, \\
q_1^\mu T_{\mu\nu\lambda} &= \frac{1}{8\pi^2} q_1^\alpha q_2^\beta \epsilon_{\lambda\alpha\nu\beta}. \tag{2.119}
\end{aligned}$$

A identidade (2.119) foi calculada sem translação na variável de integração. Em outras palavras, ela vale para $\beta = 0$. Para um β arbitrário, multiplica-se (2.108) por q_1^μ e usa-se a formula 2.119, obtendo a identidade de Ward (2.120),

$$q_1^\mu T_{\mu\nu\lambda}(\beta) = \frac{1 + \beta}{8\pi^2} q_1^\alpha q_2^\beta \epsilon_{\nu\lambda\alpha\beta}. \tag{2.120}$$

Portanto, dado o conjunto de identidades de Ward (2.120) e (2.109), é possível enunciar o seguinte teorema.

Teorema: Não existe valor de β que anule, simultaneamente, as anomalias em (2.109) e (2.120). Em outras palavras, independente da translação feita na função de Green, sempre haverá, ao menos, uma anomalia no conjunto das duas identidades de Ward calculadas.

Isso implica dizer que a anomalia não surge devido ambiguidade na função de Green $T_{\mu\nu\lambda}$. Ela é, na verdade, uma característica do sistema físico.

2.2.3 Anomalia no espaço das configurações

Os cálculos feitos até agora possuem variáveis no espaço dos momentos. Para retornar ao espaço das configurações, basta fazer a transformação de Fourier. Assim sendo, qual seria a expressão para as anomalias já calculadas em função de x ? Considere, por exemplo, a anomalia (2.109). Para $\beta = 0$, têm-se

$$\begin{aligned}
\int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{d^4 q_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 q_2}{(2\pi)^4} e^{-i(q_1 x + q_2 y - qz)} q^\lambda T_{\mu\nu\lambda} &= \partial_z^\lambda \langle 0 | j_\mu(x) j_\nu(y) j_\lambda^5(z) | 0 \rangle = \\
&= 2m \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{d^4 q_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 q_2}{(2\pi)^4} e^{-i(q_1 x + q_2 y - qz)} T_{\mu\nu} + a_{\mu\nu} \\
&= 2mi \langle 0 | j_\mu j_\nu P | 0 \rangle + a_{\mu\nu}. \tag{2.121}
\end{aligned}$$

Na expressão (2.121), o segundo termo é dado por

$$\begin{aligned}
a_{\mu\nu} &= \frac{1}{4\pi^2} \epsilon_{\nu\mu\alpha\beta} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{d^4q_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4q_2}{(2\pi)^4} e^{-i(q_1x+q_2y-qz)} q_1^\alpha q_2^\beta \\
\implies \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{d^4q_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4q_2}{(2\pi)^4} e^{-i(q_1x+q_2y-qz)} q_1^\alpha q_2^\beta &= -\delta^4(z) \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{d^4q_1}{(2\pi)^4} \partial_x^\alpha \partial_y^\beta e^{-i(q_1x+q_2y)} \\
\implies a_{\mu\nu} &= -\frac{1}{4\pi^2} \epsilon_{\nu\mu\alpha\beta} \partial_x^\alpha \partial_y^\beta (\delta^4(z) \delta^4(y) \delta^4(x)). \tag{2.122}
\end{aligned}$$

Portanto, no espaço das configurações, a identidade de Ward anômala (2.109) é dada por (2.123),

$$\partial_z^\lambda \langle 0 | j_\mu(x) j_\nu(y) j_\lambda^5(z) | 0 \rangle = 2mi \langle 0 | j_\mu j_\nu P | 0 \rangle - \frac{1}{4\pi^2} \epsilon_{\nu\mu\alpha\beta} \partial_x^\alpha \partial_y^\beta (\delta^4(z) \delta^4(y) \delta^4(x)). \tag{2.123}$$

Já a identidade vetorial é dada por

$$\partial_x^\mu \langle 0 | j_\mu(x) j_\nu(y) j_\lambda^5(z) | 0 \rangle = \partial_y^\nu \langle 0 | j_\mu(x) j_\nu(y) j_\lambda^5(z) | 0 \rangle = 0. \tag{2.124}$$

Fica evidente que, para essa escolha do parâmetro β , a anomalia surge justamente no campo da corrente axial. De fato, ela é dada por

$$\partial^\mu j_\mu^5 = 2miP - \frac{e^2}{16\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta}. \tag{2.125}$$

A prova de (2.125) é feita nas subseções posteriores. Agora, as anomalias já são conhecidas no espaço dos momentos e das configurações.

2.2.4 Anomalias na corrente quirais

Na subseção 2.1.1 foram estudadas os campos ψ_L e ψ_R e suas correntes conservadas, dadas por

$$j_\mu^L = \frac{1}{2} (\bar{\psi} \gamma_\mu (1 + \gamma_5) \psi) = \frac{1}{2} (j_\mu + j_\mu^5) \tag{2.126}$$

e

$$j_\mu^R = \frac{1}{2} (\bar{\psi} \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \psi) = \frac{1}{2} (j_\mu - j_\mu^5). \tag{2.127}$$

Considerando a corrente axial e vetorial, é possível ver que todas elas possuem a forma geral dada por

$$j_\mu^I = \bar{\psi} \Gamma_\mu^I \psi. \tag{2.128}$$

Nessa nova notação, I indica o tipo de corrente, sendo V, A, L e R os índices das correntes vetorial, axial, esquerda e direita, respectivamente. Explicitamente,

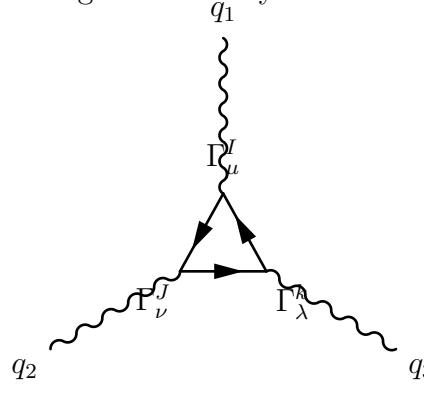
$$\begin{aligned}
\Gamma_\mu^V &= \gamma_\mu & \Gamma_\mu^A &= \gamma_\mu \gamma_5 \\
\Gamma_\mu^L &= \frac{1}{2} \gamma_\mu (1 + \gamma_5) & \Gamma_\mu^R &= \frac{1}{2} \gamma_\mu (1 - \gamma_5)
\end{aligned}$$

Como é mais simples trabalhar com as funções no espaço do momento, acaba sendo conveniente introduzir a seguinte notação [7].

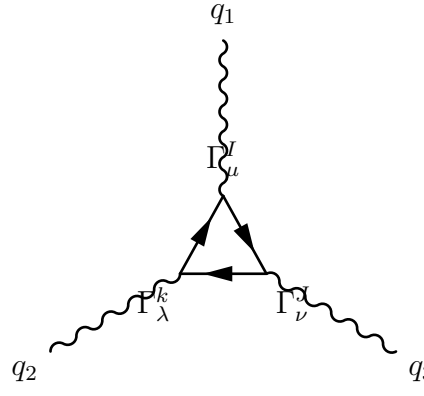
$$T_{\mu\nu\lambda}^{IJK} = i \int d^4x d^4y d^4z e^{i(q_1x + q_2y + q_3z)} \langle 0 | j_\mu^I j_\nu^J j_\lambda^K | 0 \rangle. \quad (2.129)$$

Em (2.129), I, J, K indicam os tipos de correntes, como em (2.128).

Análogo ao que foi feito para o caso de T^{VVA} , a função genérica (2.129) pode ser expressa como a soma de dois diagramas de Feynman.



$$(2.130)$$



$$(2.131)$$

Assim sendo, as integrais relacionadas aos diagramas são

$$I_{\mu\nu\lambda}^{IJK}(q_1, q_2) = - \int \frac{d^4p}{(2\pi)^2} \text{tr} \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2} \Gamma_\mu^I \frac{\not{p} - \not{q}_1 + m}{(p - q_1)^2 - m^2} \Gamma_\nu^J \frac{\not{p} - \not{q}_2 + m}{(p - q_2)^2 - m^2} \Gamma_\lambda^K \quad (2.132)$$

e

$$I_{\mu\lambda\nu}^{IKJ}(q_1, q_3) = - \int \frac{d^4p}{(2\pi)^2} \text{tr} \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2} \Gamma_\mu^I \frac{\not{p} - \not{q}_1 + m}{(p - q_1)^2 - m^2} \Gamma_\lambda^K \frac{\not{p} - \not{q}_3 + m}{(p - q_3)^2 - m^2} \Gamma_\nu^J. \quad (2.133)$$

A soma de (2.132) e (2.133) resulta em $T_{\mu\nu\lambda}^{IJK}$. Primeiramente, é explícito que

$$T_{\mu\nu\lambda}^{VVA}(q_1, q_2, q_3) = T_{\mu\nu\lambda}^{AAA}(q_1, q_2, q_3), \quad (2.134)$$

$$T_{\mu\nu\lambda}^{VVV}(q_1, q_2, q_3) = T_{\mu\nu\lambda}^{VAA}(q_1, q_2, q_3) = 0. \quad (2.135)$$

Em ambas, (2.134) e (2.135), foi usada a propriedade de que $(\gamma_5)^2 = 1$. Em (2.135), têm-se que $T^{VVV} = 0$, conforme o teorema de Furry.

Outras identidades importantes são dadas por[7]

$$T_{\mu\nu\lambda}^{IJK}(q_1, q_2, q_3) = T_{\mu\lambda\nu}^{IKJ}(q_1, q_3, q_2), \quad (2.136)$$

$$T_{\mu\nu\lambda}^{IJK}(q_1, q_2, q_3) = T_{\lambda\nu\mu}^{KJI}(q_3, q_2, q_1). \quad (2.137)$$

A propriedade (2.136) é evidente, pois $T_{\mu\nu\lambda}^{IJK}(q_1, q_2, q_3) = I_{\mu\nu\lambda}^{IJK}(q_1, q_2) + I_{\mu\lambda\nu}^{IKJ}(q_1, q_3)$. Já a propriedade (2.137) surge devido ao fato de que o traço de um produto permite permutações cíclicas e também vem de (2.136). Portanto, é possível reescrever T^{AAA} como dado por

$$T_{\mu\nu\lambda}^{AAA}(q_1, q_2, q_3) = \frac{1}{3}(T_{\mu\lambda\nu}^{VVA}(q_1, q_3, q_2) + T_{\mu\nu\lambda}^{VVA}(q_1, q_2, q_3) + T_{\nu\lambda\mu}^{AAA}(q_3, q_2, q_1)). \quad (2.138)$$

Portanto, a função de Green T^{LLL} é dada por

$$T_{\mu\nu\lambda}^{LLL} = \frac{1}{8}(T_{\mu\nu\lambda}^{VVA} + T_{\mu\nu\lambda}^{VAV} + T_{\mu\nu\lambda}^{AVV} + T_{\mu\nu\lambda}^{AAA}), \quad (2.139)$$

usando (2.136), (2.137) e (2.138), a expressão (2.139) se torna

$$T_{\mu\nu\lambda}^{LLL} = \frac{1+1/3}{8}(T_{\mu\nu\lambda}^{VVA}(q_1, q_2, q_3) + T_{\mu\lambda\nu}^{VVA}(q_1, q_3, q_2) + T_{\nu\lambda\mu}^{VVA}(q_3, q_2, q_1)). \quad (2.140)$$

Multiplicando (2.140) por q_1^μ , obtém-se a identidade de Ward

$$q_1^\mu T_{\mu\nu\alpha}^{LLL} = \frac{1}{6}(2mT_{\nu\lambda} + \frac{1}{2\pi^2}\epsilon_{\nu\lambda\alpha\beta}q_2^\alpha q_3^\beta) \quad (2.141)$$

A identidade de Ward (2.141) foi calculada já considerando as translações no integrando. Portanto, como a anomalia não tem dependência de β , isso demonstra que ela surge independente da translação considerada. Ou seja, ela não surge devido à ambiguidade da função de Green. Para T^{RRR} , a expressão difere por um sinal negativo.

2.2.5 Anomalias e o funcional gerador

A formulação da teoria quântica de campos estudada até o momento foi a das integrais de caminho, que levou ao estudo do funcional gerador e em como é possível obter toda a informação da teoria a partir de suas derivadas funcionais. Assim sendo, faz-se necessário estudar as influências das anomalias no funcional gerador. Primeiramente, algumas definições são necessárias.

Definição: A ação quântica é definida como o logaritmo do funcional gerador, como é possível ver em (2.142),

$$iW[j_\mu] = \ln(Z[j_\mu]) \quad (2.142)$$

Com tal definição, é possível provar o seguinte teorema.

Teorema: As derivadas funcionais da ação quântica (2.142) geram as funções de Green conexas.³

Como o objetivo é estudar as funções de Green das correntes conservadas, faz-se necessário um funcional gerador dessas funções. Esse resultado é um tanto trivial de se obter. Lembrando que o funcional gerador pode ser dado por (2.143), para uma generalização, basta tornar A_μ a variável do funcional, enquanto j^μ são os operadores. Isso é análogo a dizer que a expansão de (2.143) é dada por (2.144),

$$Z = \langle 0 | T \exp \left(i \int d^4x j^\mu A_\mu \right) | 0 \rangle \quad (2.143)$$

$$Z[A_\mu] = \sum_n \frac{i^n}{n!} \int d^4x_1 \dots d^4x_n A_{\mu_1}(x_1) \dots A_{\mu_n}(x_n) \langle 0 | T j^{\mu_1}(x_1) \dots j^{\mu_n}(x_n) | 0 \rangle \quad (2.144)$$

No funcional gerador, a lagrangiana que aparece é clássica. A informação quântica é justamente a dada pela integração em todos os campos possíveis. Portanto, (2.144) é análogo à (2.145),

$$Z[A_\mu] = \int \mathcal{D}j^\mu \exp \left(i \int d^4y (\mathcal{L} + j^\mu A_\mu) \right) \quad (2.145)$$

Agora, alguns resultados importantes.

Proposição: A ação quântica, definida pelo logaritmo de (2.145), é única a menos de um polinômio do gauge externo e suas derivadas. Isto é

$$W'[A_\mu] = W[A_\mu] + f(A_\mu). \quad (2.146)$$

O resultado (2.146) induz uma transformação em $U(1)$ de (2.145). De fato, isso é fácil de provar,

$$e^{W'} = e^{(W+f)}$$

$$\implies Z'[A_\mu] = e^f Z[A_\mu]. \quad (2.147)$$

Esse polinômio está associado à renormalização da teoria, adicionando termos que anulem as divergências. Esses termos surgem a partir de uma redefinição das constantes na lagrangiana.

Um exemplo onde é possível checar tal resultado é na função de Green

$$\langle 0 | j_\mu(x) j_\nu(y) | 0 \rangle. \quad (2.148)$$

Considerando (2.148) no espaço dos momentos e usando as regras de Feynman, têm-se

$$T_{\mu\nu}(p) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k \text{tr} \gamma_\mu \frac{\not{k} + m}{(k^2 - m^2)} \gamma_\nu \frac{\not{k} - \not{p} + m}{(k - p)^2 - m^2}, \quad (2.149)$$

³ Uma prova desse teorema pode ser encontrado no livro do M.O.C. Gomes[5], no capítulo 7.

que, evidentemente, é superficialmente divergente.

Uma dúvida natural é a de como se generalizar as matrizes gamma para d dimensões. Primeiramente, as relações de anticomutação são validas.

$$\{\gamma_\nu, \gamma_\mu\} = 0 \quad (2.150)$$

Em (2.150), o intervalo do índice $\mu = 0, 1, 2, 3, \dots, d-1$. Portanto, essa propriedade básica continua valendo.

Para lidar com essa divergência, será utilizado o método de regularização dimensional, onde a integral é feita em um espaço tempo de d dimensões e, então, o limite $d \rightarrow 4$ é tomado[8]. Então, (2.149) é modificada para (2.151),

$$T_{\mu\nu}(p) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int d^d k \operatorname{tr} \gamma_\mu \frac{\not{k} + m}{(k^2 - m^2)} \gamma_\nu \frac{\not{k} - \not{p} + m}{(k-p)^2 - m^2} \quad (2.151)$$

Mas, para calcular a integral (2.151), será considerada a fórmula de Feynman

$$\frac{1}{ab} = \int_0^1 \frac{dz}{(az + b(1-z))^2}. \quad (2.152)$$

Fazendo esse ajuste, obtém-se

$$T_{\mu\nu}(p) = -\frac{1}{(2\pi)^d} \int d^d k \int_0^1 dz \operatorname{tr} \gamma_\mu \frac{(\not{k} + m)\gamma_\nu(\not{k} - \not{p} + m)}{((k^2 - m^2)z + ((k-p)^2 - m^2)(1-z))^2},$$

e aplicando a mudança de variável $q = k - zp$,

$$T_{\mu\nu}(p) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int d^d q \int_0^1 dz \operatorname{tr} \gamma_\mu \frac{(\not{q} + z\not{p} + m)\gamma_\nu(\not{q} - (1-z)\not{p} + m)}{(q^2 - m^2 + z(1-z)p^2)^2}. \quad (2.153)$$

Como $\operatorname{tr} \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\alpha \gamma_\beta = f(d)(g_{\mu\nu}g_{\alpha\beta} - g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta} + g_{\mu\beta}g_{\nu\alpha})$, onde $\operatorname{tr} I = f(d)$ é uma função que é igual a 4 para $d = 4$, e também lembrando que $\operatorname{tr} \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\delta = 0$ e $\operatorname{tr} \gamma_\mu \gamma_\nu = f(d)g_{\mu\nu}$, têm-se que (2.153) se torna

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}(p) &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int d^d q \int_0^1 dz \operatorname{tr} \gamma_\mu \frac{((q^\alpha + zp^\alpha)\gamma_\alpha + m)\gamma_\nu((q^\beta - (1-z)p^\beta)\gamma_\beta + m)}{(q^2 - m^2 + z(1-z)p^2)^2} \\ &= \frac{f(d)}{(2\pi)^d} \int d^d q \int_0^1 dz \frac{(q^\alpha + zp^\alpha)(q^\beta - (1-z)p^\beta)(g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta} - g_{\mu\nu}g_{\alpha\beta} + g_{\mu\beta}g_{\nu\alpha}) + m^2 g_{\mu\nu}}{(q^2 - m^2 + z(1-z)p^2)^2}. \end{aligned} \quad (2.154)$$

No numerador, reescrevendo $(q^\alpha + zp^\alpha)(q^\beta - (1-z)p^\beta) = (q^\alpha q^\beta - z(1-z)p^\alpha p^\beta + zp^\alpha q^\beta + (z-1)q^\alpha p^\beta)$. Portanto, têm-se

$$(q^\alpha q^\beta - z(1-z)p^\alpha p^\beta)(g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta} - g_{\mu\nu}g_{\alpha\beta} + g_{\mu\beta}g_{\nu\alpha}), \quad (2.155)$$

$$(zp^\alpha q^\beta + (z-1)q^\alpha p^\beta)(g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta} - g_{\mu\nu}g_{\alpha\beta} + g_{\mu\beta}g_{\nu\alpha}). \quad (2.156)$$

Desenvolvendo (2.156), chega-se em

$$(2z - 2)(p_\mu q_\nu + p_\nu q_\mu - pqg_{\mu\nu}). \quad (2.157)$$

Portanto, a integral cujo o numerador é (2.157) pode ser reescrita como

$$I = \int d^d q \int_0^1 dz \frac{(2z - 1)a}{(bz(1 - z) + c)^2}. \quad (2.158)$$

Integrando em relação a z , obtém-se $I = 0$. Portanto, a integral (2.154) se torna

$$T_{\mu\nu} = \frac{f(d)}{(2\pi)^d} \int d^d q \int_0^1 dz \frac{(q^\alpha q^\beta - z(1 - z)p^\alpha p^\beta)(g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta} - g_{\mu\nu}g_{\alpha\beta} + g_{\mu\beta}g_{\nu\alpha}) + m^2 g_{\mu\nu}}{(q^2 - m^2 + z(1 - z)p^2)^2} \quad (2.159)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow T_{\mu\nu} = \frac{f(d)}{(2\pi)^d} \int d^d q \int_0^1 dz & \left(\frac{2q_\mu q_\nu}{(q^2 - m^2 + z(1 - z)p^2)^2} - \frac{2z(1 - z)(p_\mu p_\nu - p^2 g_{\mu\nu})}{(q^2 - m^2 + z(1 - z)p^2)^2} + \right. \\ & \left. - \frac{g_{\mu\nu}}{q^2 - m^2 + z(1 - z)p^2} \right). \end{aligned} \quad (2.160)$$

No apêndice A, é possível ver que o terceiro e o primeiro termo da integral se cancelam, sobrando apenas

$$T_{\mu\nu} = -\frac{f(d)}{(2\pi)^d} \int d^d q \int_0^1 dz \frac{2z(1 - z)(p_\mu p_\nu - p^2 g_{\mu\nu})}{(q^2 - m^2 + z(1 - z)p^2)^2}, \quad (2.161)$$

sendo $d = 4 + \epsilon$, a integral acima é dada por

$$T_{\mu\nu} = \frac{-i}{2\pi^2} (p_\mu p_\nu - p^2 g_{\mu\nu}) \left(\frac{1}{3\epsilon} + a \right), \quad (2.162)$$

sendo a um termo finito. Como $\epsilon \rightarrow 0$, o polo de $T_{\mu\nu}$ é dado por (2.163),

$$polo = \frac{-i}{6\pi^2 \epsilon} (p_\mu p_\nu - p^2 g_{\mu\nu}). \quad (2.163)$$

Portanto, é necessário fazer um processo de renormalização que subtraia (2.163). Note que, para isso, faz-se necessário considerar a constante z_R tal que a lagrangiana do campo eletromagnético seja

$$\mathcal{L} = -\frac{z_R}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad (2.164)$$

$$z_R = 1 - \frac{e^2}{6\pi^2 \epsilon} = 1 - z_p. \quad (2.165)$$

De modo que a constante (2.165) possui um acoplamento com o objetivo de renormalizar a função de Green da polarização de vácuo. De fato, é possível provar isso. Primeiramente,

$$\langle 0 | j^\mu(x) j^\nu(0) | 0 \rangle = \frac{\delta^2 \left(Z e^{i \frac{z_p}{2} \int d^4 y A_\alpha (D^{\alpha\beta}) A_\beta} \right)}{\delta A_\mu(x) \delta A_\nu(0)} \Bigg|_{A=0}.$$

Expandindo até primeira ordem,

$$\begin{aligned}
&= \frac{\delta^2 \left(Z(1 + i \frac{z_P}{2} \int d^4 y A_\alpha (D^{\alpha\beta}) A_\beta) \right)}{\delta A_\mu(x) \delta A_\nu(0)} \Big|_{A=0} = \\
&= \langle 0 | j^\mu(x) j^\nu(0) | 0 \rangle_{livre} + i z_P D^{\mu\nu} \delta(x) \\
&\implies T_{\mu\nu}^R(p) = T_{\mu\nu} + i z_P (p_\mu p_\nu - g_{\mu\nu} p^2)
\end{aligned} \tag{2.166}$$

$$= \frac{-ie^2}{2\pi^2} (p_\mu p_\nu - p^2 g_{\mu\nu}) \left(\frac{1}{3\epsilon} + a \right) + \frac{ie^2}{6\pi^2 \epsilon} (p_\mu p_\nu - p^2 g_{\mu\nu}) = \frac{-ie^2 a}{2\pi^2} (p_\mu p_\nu - p^2 g_{\mu\nu}), \tag{2.167}$$

provando que o polo é eliminado através do termo de renormalização z_P . Retornando à (2.146), é evidente que $f(A_\mu) = - \int d^4 x \frac{c}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$. Portanto, a renormalização da teoria induz uma transformação unitária no funcional gerador.

Foi estudado como a renormalização afeta o funcional gerador. Entretanto, como as identidades de Ward afetam $Z[A_\mu]$? Para isso, será provado o teorema a seguir.

Teorema: As identidades de Ward são equivalentes à invariância de gauge da ação quântica. Ou seja,

$$W[A_\mu + \partial_\mu \Lambda] - W[A_\mu] = 0. \tag{2.168}$$

Demonstração: Primeiramente,

$$iW[A_\mu + \partial_\mu \Lambda] = iW[A_\mu] + i \frac{\delta W[A_\mu]}{\delta A_\mu} \partial_\mu \Lambda + O. \tag{2.169}$$

Portanto,

$$i\delta W[A_\mu] = i \frac{\delta W[A_\mu]}{\delta A_\mu} \partial_\mu \Lambda = \sum_n \frac{i^n}{(n-1)!} \int d^4 x_1 \dots d^4 x_n \partial_\mu^{(x_1)} \Lambda(x_1) A_{\nu_2}(x_2) \dots A_{\nu_n}(x_n) \tau^{\mu\nu_2 \dots \nu_n}(x_1, x_2, \dots, x_n), \tag{2.170}$$

onde o denominador $(n-1)!$ surge pois a derivada funcional é sobre cada um dos campos de gauge no produto, resultando em um fator n multiplicando.

Integrando por partes em x_1 ,

$$i\delta W[A_\mu] = - \sum_n \frac{i^n}{(n-1)!} \int d^4 x_1 \dots d^4 x_n \Lambda(x_1) A_{\nu_2}(x_2) \dots A_{\nu_n}(x_n) \partial_\mu \tau^{\mu\nu_2 \dots \nu_n}(x_1, x_2, \dots, x_n), \tag{2.171}$$

sendo (2.171) justamente as identidades de Ward para cada função de n -pontos. Se todas as identidades valem, isto é, se há a conservação da corrente, então, (2.168) se anula, provando (2.165).

Teorema Se há uma anomalia na identidade de Ward, então, isso corresponde à seguinte transformação de gauge de ação quântica

$$i\delta W[A_\mu] = iG(\Lambda, A) = \int dx \Lambda(x) G[A_\mu](x), \tag{2.172}$$

onde $G(\Lambda, A)$ é justamente o termo associado à anomalia.

Demonstração: Para provar, use o resultado (2.168). Mas, considere que há uma anomalia na identidade de Ward de uma função de m -pontos, enquanto as outras identidades de Ward se anulam. Então,

$$i\delta W[A_\mu] = -\frac{i^m}{(m-1)!} \int dx dx_2 \dots dx_m \Lambda(x) A_{\mu_2} \dots A_{\mu_m} \partial_\mu \tau^\mu = i \int dx \Lambda G[A_\mu](x), \quad (2.173)$$

sendo $G[A_\mu] = -\frac{i^{(m-1)}}{(m-1)!} \int dx_2 \dots dx_m A_{\mu_2} \dots A_{\mu_m} \partial_\mu \tau^\mu$.

Portanto, considere uma determinada identidade de Ward anômala. Assim sendo, o funcional gerador é dado, após a transformação de gauge, por

$$Z[A_\mu + \partial\Lambda] = \exp(iW[A_\mu + \partial_\mu\Lambda]) = \exp(iW + i\delta W) = \exp(iG(\Lambda, A))Z[A_\mu]. \quad (2.174)$$

Assim sendo, é possível enunciar o seguinte teorema.

Teorema: Uma anomalia existe se não existir um polinômio de renormalização $f(A_\mu)$ que cancele a transformação de fase associada.

De fato, isso é evidente. Como uma renormalização induz uma transformação de fase, então, se existir $f(A_\mu) = -G(A_\mu)$, bastará renormalizar o funcional gerador de modo a se anular a fase devido à anomalia.

2.3 Regularizações e a anomalia ABJ

Na seção anterior foi utilizada a regularização dimensional para analisar o comportamento da divergência da polarização de vácuo. De fato, os processos de regularização permitem analisar as divergências presentes em uma função de Green e, conseqüentemente, dão uma ideia de como renormalizar a lagrangiana de modo a se remover os termos divergentes, sobrando apenas resultados finitos e físicos. Entretanto, nessa seção, serão revisados alguns métodos de regularização, de modo a se aprofundar nas possibilidades para lidar com as divergências e, principalmente, entender como as anomalias se relacionam com esses processos de regularização.

2.3.1 Regularização dimensional

Na seção anterior, com o objetivo de se encontrar a parte divergente da integral de polarização de vácuo, um método de regularização foi adotado. Esse método consiste em considerar um espaço de dimensão d e, no fim, fazer $d \rightarrow 4$, de modo que $d = 4$ é um polo da integral. Primeiramente, sabe-se que a ação é adimensional, pois, ao se considerar um sistema de unidades naturais em que $c = \hbar = 1$, o expoente $S/\hbar \rightarrow S$. Portanto, em um espaço de dimensão d , a lagrangiana possui dimensão $[\mathcal{L}] = L^{-d}$, onde L tem dimensão

de distância. Portanto, para exemplificar, considere a lagrangiana do campo escalar com autointeração,

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi^*)(\partial^\mu \phi) - m^2 |\phi|^2 - \frac{g}{4!} |\phi|^4. \quad (2.175)$$

Evidentemente, o campo escalar possui dimensão $[\phi] = L^{1-d/2}$, a massa possui $[m] = L^{-1}$ e $[g] = L^{d-4}$. Para $d = 4$, a constante g é adimensional. Portanto, é conveniente considerar substituir $g \rightarrow g\mu^{4-d}$, onde μ é um parâmetro de regularização com dimensão L^{-1} . Como consequência, a expressão (2.175) é reescrita da forma

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi^*)(\partial^\mu \phi) - m^2 |\phi|^2 - \frac{g\mu^{4-d}}{4!} |\phi|^4. \quad (2.176)$$

Com esse exemplo, é possível enxergar que a regularização dimensional induz um parâmetro de regularização. Entretanto, como o objetivo é calcular a anomalia em correntes fermiônicas, deve-se considerar a lagrangiana de Dirac

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi. \quad (2.177)$$

Lembrando que as regularizações estão sendo tratadas no contexto da anomalia de ABJ, e que as integrais que descrevem tal anomalia são dadas por

$$I_{\mu\nu\lambda}(q_1) = - \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \text{tr} \frac{(\not{p} + m)}{p^2 - m^2} \gamma_\lambda \gamma_5 \frac{(\not{p} - \not{q} + m)}{(p - q)^2 - m^2} \gamma_\nu \frac{(\not{p} - \not{q}_1 + m)}{(p - q_1)^2 - m^2} \gamma_\mu \quad (2.178)$$

e

$$J_{\mu\nu}(q_1) = - \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \text{tr} \frac{(\not{p} + m)}{p^2 - m^2} \gamma_5 \frac{(\not{p} - \not{q} + m)}{(p - q)^2 - m^2} \gamma_\nu \frac{(\not{p} - \not{q}_1 + m)}{(p - q_1)^2 - m^2} \gamma_\mu. \quad (2.179)$$

A generalização das matrizes de Dirac para uma dimensão d já foi feita, entretanto, a matriz γ_5 ainda não está bem definida. Mantendo a mesma definição, dada por $\gamma_5 = i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$, ela satisfaz

$$\{\gamma_5, \gamma_\mu\} = 0, \quad (2.180)$$

para $\mu < 4$, e

$$[\gamma_5, \gamma_\mu] = 0, \quad (2.181)$$

para $\mu \geq 4$.

Agora, separando o vetor $p = P + Q$ em (2.178), onde $Q = p^4 e_4 + p^5 e_5 + \dots p^{d-1} e_{d-1}$ e $P = p^0 e_0 + p^1 e_1 + p^2 e_2 + p^3 e_3$, e considerando $m = 0$ por simplicidade, a integral (2.179) é reescrita como

$$J_{\mu\nu}(q_1) = - \int \frac{d^4 P}{(2\pi)^4} \int \frac{d^{d-4} Q}{(2\pi)^{d-4}} \text{tr} \frac{(\not{P} + \not{Q})}{P^2 - Q^2} \gamma_5 \frac{(\not{P} + \not{Q} - \not{q})}{(P - q)^2 - Q^2} \gamma_\nu \frac{(\not{P} + \not{Q} - \not{q}_1)}{(P - q_1)^2 - Q^2} \gamma_\mu. \quad (2.182)$$

Sem perda de generalidade, foi assumido que $q_\mu = q_{1\mu} = 0$ para $\mu > 3$.

Agora, é importante descobrir como a regularização dimensional afeta as identidades de Ward. Primeiramente, calculando $q_1^\mu T_{\mu\nu\lambda}$,

$$q_1^\mu I_{\mu\nu\lambda}(q_1) = - \int \frac{d^4 P}{(2\pi)^4} \int \frac{d^{d-4} Q}{(2\pi)^{d-4}} \text{tr} \gamma_\lambda \gamma_5 \frac{(\not{P} + \not{Q} - \not{q})}{(P-q)^2 - Q^2} \not{q}_1 \gamma_\nu \frac{(\not{P} + \not{Q} - \not{q}_1)}{(P-q_1)^2 - Q^2} \frac{(\not{P} + \not{Q})}{P^2 - Q^2}. \quad (2.183)$$

Considere as identidades (2.184) e (2.185),

$$\not{q}_1 \gamma_\nu = (\not{P} + \not{Q}) \gamma_\nu + \gamma_\nu (\not{P} + \not{Q} - \not{q}_1), \quad (2.184)$$

$$\gamma_\nu \not{q}_1 = \gamma_\nu (\not{P} + \not{Q} - \not{q}_2) + (\not{P} + \not{Q} - \not{q}) \gamma_\nu, \quad (2.185)$$

a integral (2.183) pode ser reescrita como em (2.186), utilizando (2.184),

$$\begin{aligned} q_1^\mu I_{\mu\nu\lambda} &= \int \frac{d^4 P}{(2\pi)^4} \int \frac{d^{d-4} Q}{(2\pi)^{d-4}} \text{tr} \gamma_\lambda \gamma_5 \frac{(\not{P} + \not{Q} - \not{q})}{(P-q)^2 - Q^2} \gamma_\nu \frac{(\not{P} + \not{Q})}{P^2 - Q^2} + \\ &+ \gamma_\lambda \gamma_5 \frac{(\not{P} + \not{Q} - \not{q})}{(P-q)^2 - Q^2} \gamma_\nu \frac{(\not{P} + \not{Q} - \not{q}_1)}{(P-q_1)^2 - Q^2}. \end{aligned} \quad (2.186)$$

Analogamente, para $q_1^\mu I_{\nu\mu\lambda}(q_2)$,

$$\begin{aligned} q_1^\mu I_{\nu\mu\lambda}(q_2) &= - \int \frac{d^4 P}{(2\pi)^4} \int \frac{d^{d-4} Q}{(2\pi)^{d-4}} \text{tr} \gamma_\lambda \gamma_5 \frac{(\not{P} + \not{Q} - \not{q}_2)}{(P-q_2)^2 - Q^2} \gamma_\nu \frac{(\not{P} + \not{Q})}{P^2 - Q^2} + \\ &+ \gamma_\lambda \gamma_5 \frac{(\not{P} + \not{Q} - \not{q})}{(P-q)^2 - Q^2} \gamma_\nu \frac{(\not{P} + \not{Q})}{P^2 - Q^2}. \end{aligned} \quad (2.187)$$

Somando (2.186) e (2.187),

$$\begin{aligned} q_1^\mu T_{\mu\nu\lambda}^{reg} &= \int \frac{d^4 P}{(2\pi)^4} \int \frac{d^{d-4} Q}{(2\pi)^{d-4}} \text{tr} \gamma_\lambda \gamma_5 \frac{(\not{P} + \not{Q} - \not{q})}{(P-q)^2 - Q^2} \gamma_\nu \frac{(\not{P} + \not{Q} - \not{q}_1)}{(P-q_1)^2 - Q^2} + \\ &- \gamma_\lambda \gamma_5 \frac{(\not{P} + \not{Q} - \not{q}_2)}{(P-q_2)^2 - Q^2} \gamma_\nu \frac{(\not{P} + \not{Q})}{P^2 - Q^2}. \end{aligned} \quad (2.188)$$

Chamando $f(P) = \int \frac{d^{d-4} Q}{(2\pi)^{d-4}} \text{tr} \gamma_\lambda \gamma_5 \frac{(\not{P} + \not{Q} - \not{q})}{(P-q)^2 - Q^2} \gamma_\nu \frac{(\not{P} + \not{Q} - \not{q}_1)}{(P-q_1)^2 - Q^2}$, a integral (2.188) assume a forma

$$q_1^\mu T_{\mu\nu\lambda}^{reg} = - \int \frac{d^4 P}{(2\pi)^4} (f(P+q_1) - f(P)). \quad (2.189)$$

Como o polo ocorre em $d = 4$, mas o espaço considerado é em $d > 4$, então, pode-se fazer uma mudança de variável $P \rightarrow P - q_1$ somente na integral $\int d^4 p f(P + q_1)$ sem ambiguidades devido as divergências. Portanto,

$$q_1^\mu T_{\mu\nu\lambda}^{reg} = - \int \frac{d^4 P}{(2\pi)^4} (f(P) - f(P)) = 0. \quad (2.190)$$

Logo, a regularização dimensional induz à identidade de Ward vetorial. O cálculo para $q_2^\nu T_{\mu\nu\lambda}$ é equivalente.

Uma questão que surge é o que a regularização dimensional faz na identidade de Ward axial. Primeiramente, têm-se

$$q^\lambda I_{\mu\nu\lambda}(q_1) = - \int \frac{d^4 P}{(2\pi)^4} \int \frac{d^{d-4} Q}{(2\pi)^{d-4}} \text{tr} \frac{(\not{P} + \not{Q})}{P^2 - Q^2} \not{q} \gamma_5 \frac{(\not{P} + \not{Q} - \not{q})}{(P - q)^2 - Q^2} \gamma_\nu \frac{(\not{P} + \not{Q} - \not{q}_1)}{(P - q_1)^2 - Q^2} \gamma_\mu. \quad (2.191)$$

É possível simplificar a soma dessa integral com a integral $q^\lambda I_{\nu\mu\lambda}(q_2)$, de modo a se obter

$$16i q_1^\alpha q_2^\beta \epsilon_{\alpha\beta\nu\mu} \int \frac{d^4 P}{(2\pi)^4} \int \frac{d^{d-4} Q}{(2\pi)^{d-4}} \frac{Q^2}{(P^2 - Q^2)((P - q)^2 - Q^2)((P - q_1)^2 - Q^2)}. \quad (2.192)$$

Note que (2.192) já é a integral para $q^\lambda T_{\mu\nu\lambda}^{reg}$.

Considere a fórmula de Feynman (2.193),

$$\frac{1}{abc} = 2 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{1}{(ay + b(1-x-y) + cx)^3}, \quad (2.193)$$

aplicando em (2.192) e fazendo algumas manipulações, tem-se

$$\begin{aligned} & 2 \int \frac{d^4 P}{(2\pi)^4} \int \frac{d^{d-4} Q}{(2\pi)^{d-4}} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{Q^2}{(P^2 - 2P((1-x-y)q + xq_1) - Q^2)^3} = \\ & = \frac{i}{16\pi^2} \int \frac{d^{d-4} Q}{(2\pi)^{d-4}} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{Q^2}{Q^2 + ((1-x-y)q + xq_1)^2}, \end{aligned} \quad (2.194)$$

onde foi feito o uso da fórmula (A.12) para chegar em (2.194).

Aplicando a fórmula (2.195) em (2.194), e fazendo o limite $d \rightarrow 4$, obtém-se

$$\int \frac{d^N Q}{(2\pi)^2} \frac{Q^2}{Q^2 + f} = \frac{f^{N/2}}{(2\sqrt{\pi})^N} \frac{\Gamma(1 + N/2)\Gamma(-N/2)}{\Gamma(N/2)}, \quad (2.195)$$

$$-\frac{i}{16\pi^2} \lim_{N \rightarrow 0} \frac{f^{N/2}}{(2\sqrt{\pi})^N} \frac{\Gamma(N/2)\Gamma(1 - N/2)}{\Gamma(N/2)} = -\frac{i}{16\pi^2}. \quad (2.196)$$

Portanto,

$$q^\lambda T_{\mu\nu\lambda}^{reg} = -\frac{1}{\pi^2} q_1^\alpha q_2^\beta \epsilon_{\alpha\beta\mu\nu} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy = -\frac{1}{2\pi^2} q_1^\alpha q_2^\beta \epsilon_{\alpha\beta\mu\nu}, \quad (2.197)$$

pois $\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy = 1/2$, devido ao fato de que é integrado sobre a área de um triângulo retângulo de catetos iguais a 1. Consequentemente, a identidade de Ward axial é anômala ao se fazer a regularização dimensional,

$$q^\lambda T_{\mu\nu\lambda}^{reg} = -\frac{1}{2\pi^2} q_1^\alpha q_2^\beta \epsilon_{\alpha\beta\mu\nu}. \quad (2.198)$$

Note que a regularização não foi capaz de eliminar a anomalia, o que indica que uma renormalização baseada na regularização dimensional não seria capaz de anular os termos provenientes da anomalia na identidade de Ward axial.

2.3.2 Regularização de Pauli-Villars

A regularização de Pauli-Villars resume-se em subtrair a função de Green original pela mesma função, mas substituindo a massa original m por uma massa reguladora M e, em seguida, fazer $M \rightarrow \infty$. Matematicamente, isso se dá por

$$G_n^{reg}(m) = \lim_{M \rightarrow \infty} G_n(m) - G_n(M), \quad (2.199)$$

onde G_n é a função de Green. Se G_n for convergente, evidente que $\lim_{M \rightarrow \infty} G_n(M) = 0$.

Como o objetivo é analisar como uma função regularizada por PV (Pauli-Villars) influencia nas identidades de Ward já estudadas, então considere

$$k_1^\mu T_{\mu\nu\lambda}^{reg} = \lim_{M \rightarrow \infty} k_1^\mu (T_{\mu\nu\lambda}(m) - T_{\mu\nu\lambda}(M)). \quad (2.200)$$

Como já calculado em (2.120), o produto de k_1 pela função dependente de m dará um resultado independente da massa, o mesmo para a função dependente de M . Portanto, a diferença (2.200) será nula e, conseqüentemente, a identidade de Ward não será anômala.

Agora, considere a expressão

$$q^\lambda T_{\mu\nu\lambda}^{reg}(m) = \lim_{M \rightarrow \infty} q^\lambda (T_{\mu\nu\lambda}(m) - T_{\mu\nu\lambda}(M)), \quad (2.201)$$

como obtido em (2.109), a expressão 2.201 se torna

$$q^\lambda T_{\mu\nu\lambda}^{reg}(m) = 2mT_{\mu\nu} - \lim_{M \rightarrow \infty} 2MT_{\mu\nu}(M). \quad (2.202)$$

Para saber se a identidade de Ward (2.202) será satisfeita, é necessário calcular o limite na segunda parte. Para isso, usa-se da fórmula de Feynman (2.193). Lembrando que $T_{\mu\nu} = J_{\mu\nu}(q_1) + J_{\nu\mu}(q_2)$, e aplicando (2.193) em (2.81),

$$\begin{aligned} J_{\mu\nu} &= \\ &= -2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{\text{tr}(\not{p} + m)\gamma_5(\not{p} - \not{q} + m)\gamma_\nu(\not{p} - \not{q}_1 + m)\gamma_\mu}{((p^2 - m^2)y + ((p - q)^2 - m^2)(1 - x - y) + ((p - q_1)^2 - m^2)x)^3}. \end{aligned} \quad (2.203)$$

Considerando as propriedades dos traços de produtos das matrizes gamma, o termo que sobra em (2.203) dá a integral

$$\begin{aligned} J_{\mu\nu} &= \\ &= -2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{\text{mtr}(\not{p}\gamma_5(\not{p} - \not{q})\gamma_\nu\gamma_\mu + \not{p}\gamma_5\gamma_\nu(\not{p} - \not{q}_1)\gamma_\mu + \gamma_5(\not{p} - \not{q})\gamma_\nu(\not{p} - \not{q}_1)\gamma_\mu)}{((p^2 - m^2)y + ((p - q)^2 - m^2)(1 - x - y) + ((p - q_1)^2 - m^2)x)^3}. \end{aligned} \quad (2.204)$$

Para (2.204), têm-se ao desenvolver numerador,

$$\begin{aligned}
m \cdot \text{tr}(\not{p}\gamma_5(\not{p} - \not{q})\gamma_\nu\gamma_\mu + \not{p}\gamma_5\gamma_\nu(\not{p} - \not{q}_1)\gamma_\mu + \gamma_5(\not{p} - \not{q})\gamma_\nu(\not{p} - \not{q}_1)\gamma_\mu) &= \\
= m((p^\alpha(q_1^\beta - q^\beta) + (p^\alpha - q^\alpha)(p^\beta - q_1^\beta))\text{tr}\gamma_\alpha\gamma_5\gamma_\beta\gamma_\nu\gamma_\mu) & \\
= 4im(p^\alpha(q_1^\beta - q^\beta) + (p^\alpha - q^\alpha)(p^\beta - q_1^\beta))\epsilon_{\alpha\beta\nu\mu} & \\
= 4i\epsilon_{\alpha\beta\nu\mu}q^\alpha q_1^\beta. & \tag{2.205}
\end{aligned}$$

Portanto,

$$J_{\mu\nu} = -8im.$$

$$\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{\epsilon_{\alpha\beta\nu\mu}q^\alpha q_1^\beta}{((p^2 - m^2)y + ((p - q)^2 - m^2)(1 - x - y) + ((p - q_1)^2 - m^2)x)^3}. \tag{2.206}$$

Como $q = q_1 + q_2$ e $\epsilon_{\alpha\beta\nu\mu}q_n^\alpha q_n^\beta = 0$, a integral (2.206) é dada por

$$J_{\mu\nu} = 8im.$$

$$\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{\epsilon_{\alpha\beta\nu\mu}q_1^\alpha q_2^\beta}{((p^2 - m^2)y + ((p - q)^2 - m^2)(1 - x - y) + ((p - q_1)^2 - m^2)x)^3}. \tag{2.207}$$

Para o denominador,

$$\begin{aligned}
&((p^2 - m^2)y + ((p - q)^2 - m^2)(1 - x - y) + ((p - q_1)^2 - m^2)x)^3 = \\
&= (p^2y + (p^2 - 2qp + q^2)(1 - x - y) + (p^2 - 2pq_1 + q_1^2)x - m^2)^3 \\
&= (p^2 - m^2 - 2p(q(1 - x - y) + q_1x) + q^2(1 - x - y) + q_1^2x)^3 \\
&= (p^2 - 2pA(q, q_1, x, y) + B(m, q, q_1, x, y))^3. \tag{2.208}
\end{aligned}$$

Portanto, a integral em p é dada por

$$\int d^4p \frac{1}{(p^2 - 2pA + B)^3} = I \tag{2.209}$$

Utilizando a fórmula (A.12) na íntegral (2.209), obtém-se

$$I = -i \frac{\pi^2}{2} \frac{1}{A^2 + B}. \tag{2.210}$$

Portanto, (2.206) é dada por

$$J_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi^2 m} \epsilon_{\alpha\beta\nu\mu} q_1^\alpha q_2^\beta.$$

$$\int dx \int dy \frac{1}{-1 + m^{-2}(2q_1^2 x + q^2(1-x-y)(2-x-y) + 2q(1-x-y)q_1 x)}. \quad (2.211)$$

Note que, no limite que $M \rightarrow \infty$, têm-se

$$\begin{aligned} & \lim_{M \rightarrow \infty} I_{xy} = \\ & = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{1}{-1 + M^{-2}(2q_1^2 x + q^2(1-x-y)(2-x-y) + 2q(1-x-y)q_1 x)} \\ & \implies \lim_{M \rightarrow \infty} I_{xy} = -1/2. \end{aligned} \quad (2.212)$$

Note também que $J_{\nu\mu}(q_2) = J_{\mu\nu}(q_1)$, devido à simetria de (2.211), portanto,

$$\begin{aligned} \lim_{M \rightarrow \infty} MT_{\mu\nu}(M) &= 2 \lim_{M \rightarrow \infty} MJ_{\mu\nu}(M) = \frac{1}{2\pi^2} \epsilon_{\alpha\beta\nu\mu} q_1^\alpha q_2^\beta \lim_{M \rightarrow \infty} I_{xy} \\ &\implies \lim_{M \rightarrow \infty} MT_{\mu\nu}(M) = -\frac{1}{4\pi^2} \epsilon_{\alpha\beta\nu\mu} q_1^\alpha q_2^\beta. \end{aligned} \quad (2.213)$$

Consequentemente, (2.202) é anômala. Note que, enquanto a regularização de PV induz à identidade de Ward vetorial (2.200), ela torna anômala a identidade de Ward axial (2.202). Portanto, utilizando-se da regularização de PV, não é possível achar um polinômio de renormalização que anule ambas as anomalias. Inclusive, na seção anterior, foi provado que, ao se anular uma das identidades, a outra é anômala, e vice-versa.

2.3.3 Método de Schwinger

Até o momento, todas as regularizações foram feitas com funções de Green no espaço dos momentos. Mas, devido às relações de comutação canônicas, é sabido que o operador corrente (2.214) é um operador singular,

$$j^5(x) = i\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\gamma_5\psi(x). \quad (2.214)$$

Isso se dá pois a comutação canônica considera que a comutação de operadores no mesmo ponto do espaço-tempo é singular e, portanto, o produto de operadores no mesmo ponto do espaço-tempo é um objeto singular. Por isso, para lidar com essa singularidade, será necessário considerar algum método de regularização.

O método de Schwinger consiste em substituir (2.214) por

$$j_\mu^5(x, \epsilon) = iG\bar{\psi}(x + \epsilon/2)\gamma_\mu\gamma_5\psi(x - \epsilon), \quad (2.215)$$

e no fim, deve-se tomar $\epsilon \rightarrow 0$. O coeficiente G foi introduzido para garantir a invariância de gauge de (2.215), de modo que, ao se fazer $\epsilon \rightarrow 0$, então $G \rightarrow 1$. Para se obter a expressão explícita de G , considere uma transformação de gauge,

$$\bar{\psi}_g = \bar{\psi}(x)e^{ie\lambda(x)}, \quad (2.216)$$

$$\psi_g = e^{-ie\lambda(x)}\psi(x), \quad (2.217)$$

onde o e no expoente é uma carga elétrica. Portanto, (2.215) se transforma em

$$j_{g\mu}^5 = iG_g\bar{\psi}(x + \epsilon/2)e^{ie\lambda(x+\epsilon/2)}\gamma_\mu\gamma_5e^{-ie\lambda(x-\epsilon/2)}\psi(x - \epsilon/2), \quad (2.218)$$

onde G_g é o coeficiente após a transformação de gauge. A expressão (2.218) é reescrita como

$$j_{g\mu}^5(x, \epsilon) = G_g e^{ie(\lambda(x+\epsilon/2)-\lambda(x-\epsilon/2))}\bar{\psi}(x + \epsilon/2)\gamma_\mu\gamma_5\psi(x - \epsilon/2), \quad (2.219)$$

portanto, G deve se transformar por gauge como

$$G_g = e^{-ie(\lambda(x+\epsilon/2)-\lambda(x-\epsilon/2))}G. \quad (2.220)$$

Um G que satisfaça as duas características já previstas é dado por

$$G = \exp\left(ie \int_{(x-\epsilon/2)}^{(x+\epsilon/2)} dy^\nu A_\nu(y)\right), \quad (2.221)$$

logo,

$$j_\mu^{5(reg)} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} j_\mu^5(x, \epsilon). \quad (2.222)$$

A identidade de Ward é obtida ao se fazer o divergente de (2.215),

$$\partial_\mu j^{5\mu}(x, \epsilon) = \bar{\psi}i\overleftarrow{\not{\partial}}\gamma_5\psi G + \bar{\psi}(i\overleftarrow{\not{\partial}}\gamma_5\psi)G + i(\partial_\mu G)\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi.$$

As equações de Dirac são

$$\bar{\psi}i\overleftarrow{\not{\partial}} = -\bar{\psi}(m - e\mathcal{A}) \quad (2.223)$$

e

$$i\overrightarrow{\not{\partial}}\psi = (m - e\mathcal{A})\psi, \quad (2.224)$$

substituindo esses resultados,

$$\begin{aligned} \partial_\mu j^{5\mu}(x, \epsilon) &= -G\bar{\psi}(x + \epsilon/2)(m - e\mathcal{A}(x + \epsilon/2))\gamma_5\psi(x - \epsilon/2) + \\ &-G\bar{\psi}(x + \epsilon/2)\gamma_5(m - e\mathcal{A}(x - \epsilon/2))\psi(x - \epsilon/2) + i(\partial_\mu G)\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi \\ &= 2im(Gi\bar{\psi}\gamma_5\psi) + eG\bar{\psi}(\mathcal{A}(x + \epsilon/2) - \mathcal{A}(x - \epsilon/2))\psi + i(\partial_\mu G)\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi \end{aligned}$$

$$\implies \partial_\mu j^{5\mu}(x, \epsilon) = 2imP(x, \epsilon) - iej^{5\mu}(A_\mu(x+\epsilon/2) - A_\mu(x-\epsilon/2)) + iej^{5\mu}\partial_\mu^{(x)} \left(\int_{(x-\epsilon/2)}^{(x+\epsilon/2)} dy^\nu A_\nu(y) \right), \quad (2.225)$$

onde $P(x, \epsilon)$ é definido de maneira análoga ao (2.215),

$$P(x, \epsilon) = iG\bar{\psi}(x + \epsilon/2)\gamma_5\psi(x - \epsilon/2). \quad (2.226)$$

Para o termo multiplicando $-iej^{5\mu}$ em (2.225), tem-se

$$\left(-\partial_\mu^{(x)} \int_{(x-\epsilon/2)}^{(x+\epsilon/2)} dy^\nu A_\nu(y) + A_\mu(x + \epsilon/2) - A_\mu(x - \epsilon/2) \right),$$

usando $\int_{(x-\epsilon/2)}^{(x+\epsilon/2)} dy^\nu A_\nu(y) = \epsilon^\nu A_\nu(x')$ (teorema do valor intermediário, para um $x' = x'(x, \epsilon)$ e $x - \epsilon/2 < x' < x + \epsilon/2$) para a expressão esquerda e expandindo a diferença à direita em torno de x ,

$$\partial_\mu^{(x)} \left(\int_{(x-\epsilon/2)}^{(x+\epsilon/2)} dy^\nu A_\nu(y) \right) = \epsilon^\nu (\partial_\nu A_\mu(x) - \partial_\mu A_\nu(x')). \quad (2.227)$$

Como $x' = x + \epsilon'/2$, sendo $|\epsilon'| < \epsilon$, ao se fazer o limite $\epsilon \rightarrow 0$, o termo $A_\mu(x') \rightarrow A_\mu(x)$. Consequentemente,

$$\partial_\mu^{(x)} \left(\int_{(x-\epsilon/2)}^{(x+\epsilon/2)} dy^\nu A_\nu(y) \right) = \epsilon^\nu (\partial_\nu A_\mu(x) - \partial_\mu A_\nu(x)). \quad (2.228)$$

Portanto, (2.225) é reescrita como

$$\partial_\mu j^{5\mu}(x, \epsilon) = 2imP(x, \epsilon) -iej^{5\mu}(x, \epsilon)\epsilon^\nu (\partial_\nu A_\mu(x) - \partial_\mu A_\nu(x)). \quad (2.229)$$

Agora, calculando o valor esperado de (2.229) para o estado de vácuo, tem-se

$$\langle 0 | \partial_\mu j^{5\mu}(x, \epsilon) | 0 \rangle = 2im \langle 0 | P(x, \epsilon) | 0 \rangle - ie\epsilon^\nu \langle 0 | j^{5\mu}(x, \epsilon) | 0 \rangle (\partial_\nu A_\mu(x) - \partial_\mu A_\nu(x)). \quad (2.230)$$

Portanto, faz-se necessário calcular a função de Green $\langle 0 | j^{5\mu}(x, \epsilon) | 0 \rangle$. Entretanto, essa é uma função de Green com interação do tipo $\mathcal{L} = i\bar{\psi}A\psi$, portanto, para calcular a função de Green, será usada a expressão (1.150), com Z_0 já conhecido

$$Z_0 = \exp\left\{-i \int d^4x d^4y \bar{\eta}(x) S_F(x-y) \eta(y)\right\}, \quad (2.231)$$

considerando a expansão do operador de interação,

$$\exp\left\{\int d^4z \delta_\eta^{(z)} A \delta_\eta^{(z)}\right\} = 1 + \int d^4z \delta_\eta^{(z)} A \delta_\eta^{(z)} + \dots \quad (2.232)$$

Em (2.232), têm-se que a seguinte notação foi adotada,

$$\delta_\phi^{(x)} = \frac{\delta}{\delta\phi(x)}, \quad (2.233)$$

análogo ao que é feito para a derivada, onde $\partial^{(x)} = \partial/\partial x$. Portanto, aplicando (2.232) em (2.231),

$$Z = N^{-1} (1 + i \int d^4z S_F(0) A(z) - \int d^4z d^4x_1 d^4x_2 S_F(z-x_2) \eta(x_2) A(z) \bar{\eta}(x_1) S_F(x_1-z) + \dots) Z_0. \quad (2.234)$$

O fator de normalização N irá anular os diagramas "bolhas", que são os diagramas que vão gerar o termo $S_F(0) \int d^4z \mathcal{A}(z)$. Portanto, para calcular a função de Green, basta considerar a contribuição dos outros termos. Então, a função de Green se torna

$$-\delta_{\bar{\eta}}^{(x-\epsilon/2)} \delta_{\eta}^{(x+\epsilon/2)} Z|_{\eta=\bar{\eta}=0} = \tau_0(-\epsilon) + \int d^4z \tau(x - \epsilon/2 - z) \mathcal{A}(z) \tau(z - x - \epsilon/2) \quad (2.235)$$

$$\implies \tau(x - \epsilon/2, x + \epsilon/2) - \tau_0(-\epsilon) =$$

$$\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{d^4q}{(2\pi)^4} e^{i(p\epsilon - qx)} \frac{(\not{p} + \frac{1}{2}\not{q} + m)}{(p + \frac{1}{2}q)^2 - m^2} \mathcal{A}(q) \frac{(\not{p} - \frac{1}{2}\not{q} + m)}{((p - \frac{1}{2}q)^2 - m^2)}, \quad (2.236)$$

que, após algumas manipulações [2], chega-se em

$$\epsilon^\nu \langle 0 | j^{5\mu}(x, \epsilon) | 0 \rangle = 4\epsilon^{\mu\alpha\lambda\beta} G \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} e^{-iqx} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{\partial}{\partial p_\nu} \left(\frac{(p_\alpha q_\beta A_\lambda(q))}{((p - \frac{1}{2}q)^2 - m^2)((p + \frac{1}{2}q)^2 - m^2)} \right)$$

$$\implies \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^\nu \langle 0 | j^{5\mu}(x, \epsilon) | 0 \rangle = \frac{1}{8\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\alpha A_\beta(x). \quad (2.237)$$

Fazendo o limite em (2.230) e colocando o resultado (2.237),

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} -ie \epsilon^\nu \langle 0 | j^{5\mu}(x, \epsilon) | 0 \rangle F_{\mu\nu} = \frac{ie}{8\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} (\partial_\alpha A_\beta) F_{\mu\nu}$$

$$= \frac{ie}{16\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta} F_{\mu\nu} \quad (2.238)$$

$$\implies \langle 0 | \partial_\mu j_{(reg)}^{5\mu}(x) | 0 \rangle = 2im \langle 0 | P_{(reg)}(x) | 0 \rangle + \frac{ie}{16\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta} F_{\mu\nu}. \quad (2.239)$$

Em (2.239), é possível ver que a regularização de Schwinger induz à anomalia axial. Entretanto, a anomalia calculada difere das encontradas anteriormente por um coeficiente $-ie$. Isso se deu pois a corrente tratada nessa subseção é dada por $j_\mu^5 = i\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi$ (para a corrente axial) e $P = i\bar{\psi}\gamma_5\psi$ (para a corrente pseudoescalar), enquanto a corrente usada nas subseções anteriores é $j_\mu^5 = e\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi$ e $P = e\bar{\psi}\gamma_5\psi$. Portanto, para se obter a anomalia calculada nas subseções anteriores, basta multiplicar (2.239) por $-ie$.

2.4 Anomalias e integrais de caminho

Nas seções anteriores, foi feita uma análise superficial de como as anomalias surgem na ação quântica. Já nesta seção, foi feito um estudo mais profundo de como as anomalias surgem nas integrais de caminho.

É sabido que a ação no expoente do integrando da integral de caminho é a ação clássica, portanto, ela se mantém invariante sob transformações de simetria. O que há na integral de caminho é algo como

$$Z[\phi_1, \dots, \phi_n] = \int \prod_i \mathcal{D}\phi_i \exp\left(i \int d^4x \mathcal{L}(\phi_1, \dots, \phi_n)\right), \quad (2.240)$$

e em (2.240), como a ação é clássica, a informação quântica surge da medida quântica $\mathcal{D}\phi$. Ao se fazer transformações de simetria, não só a ação se transforma, como também a medida $\mathcal{D}\phi$, de modo que surge um jacobiano associado à transformação de variável da integral. Como descoberto por Fujikawa, a jacobiana está intimamente associada com a anomalia[2].

2.4.1 Transformação quirial do funcional gerador

Considere a lagrangiana de Dirac,

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\not{D} - m)\psi, \quad (2.241)$$

onde $D_\mu = \partial_\mu + A_\mu$ e $A_\mu = A_\mu^a T^a$. Fazendo uma transformação de gauge quirial abeliana, os campos se transformam como

$$\bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi} e^{i\beta\gamma_5}, \quad (2.242)$$

$$\psi \rightarrow e^{i\beta\gamma_5}\psi. \quad (2.243)$$

Consequentemente, para um β infinitesimal, (2.241) se transforma como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}' &= \bar{\psi}(i\not{D} - m)\psi - (\partial^\mu\beta)\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi - 2im\beta\bar{\psi}\gamma_5\psi \\ &= \mathcal{L} - (\partial^\mu\beta)j_\mu^5 - 2im\beta P, \end{aligned} \quad (2.244)$$

e a ação de (2.244) é

$$S' = \int d^4x(\mathcal{L} - (\partial^\mu\beta)j_\mu^5 - 2im\beta P) = S + \int d^4x\beta(\partial^\mu j_\mu^5 - 2imP). \quad (2.245)$$

Impor que a ação é invariante implica na lei de conservação da corrente axial,

$$S' = S \implies \partial^\mu j_\mu^5 - 2imP = 0. \quad (2.246)$$

Agora, deseja-se analisar como o funcional gerador se transforma sob transformações de gauge quirial. Por conveniência, será feita uma rotação de Wick, de modo que seja possível trabalhar com um sistema euclidiano,

$$\begin{aligned} i\gamma^4 &= \gamma^0 & x^4 &= ix^4 \\ \partial_0 &= i\partial_4 & A_0 &= iA_4. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \gamma^4\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = -\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^4. \quad (2.247)$$

Consequentemente, o funcional gerador é dado por

$$Z[\bar{\eta}, \eta, A_\mu] = \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \exp\left(\int d^4x(\mathcal{L} + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta)\right). \quad (2.248)$$

Para calcular o jacobiano, considere a seguinte expansão para os campos fermiônicos em termos dos autovetores do operador de Dirac,

$$\psi = \sum_n a_n \phi_n(x) \quad (2.249)$$

e

$$\bar{\psi} = \sum_m \phi_m^\dagger(x) \bar{b}_m, \quad (2.250)$$

onde

$$\not{D}\phi_n(x) = \lambda_n \phi_n, \quad (2.251)$$

$$\phi_n(x) = \langle x|n\rangle. \quad (2.252)$$

Como as variáveis de integração em (2.248) são variáveis de Grassmann, e como (2.249) e (2.250) estabelecem mudanças de variáveis, então

$$\begin{aligned} \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi &= \prod_n \frac{1}{\det(\phi_n(x))} \mathcal{D}a_n \prod_m \frac{1}{\det(\phi_m^\dagger(x))} \mathcal{D}\bar{b}_m \\ &= \prod_n \frac{1}{\det(\langle x|n\rangle)} \mathcal{D}a_n \prod_m \frac{1}{\det(\langle m|x\rangle)} \mathcal{D}\bar{b}_m \\ &= \prod_n \prod_m \frac{1}{\det(\langle m|x\rangle\langle x|n\rangle)} \mathcal{D}a_n \mathcal{D}\bar{b}_m \\ &\implies \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi = \prod_n \mathcal{D}a_n \mathcal{D}\bar{b}_n. \end{aligned} \quad (2.253)$$

Agora, fazendo uma transformação de gauge infinitesimal, tem-se

$$\psi' = (1 + i\beta\gamma_5)\psi = \sum_n (1 - i\beta\gamma_5)a_n \phi_n, \quad (2.254)$$

$$\bar{\psi}' = \bar{\psi}(1 + i\beta\gamma_5) = \sum_n \bar{b}_n \phi_n^\dagger (1 + i\beta\gamma_5). \quad (2.255)$$

Obviamente, os termos a_n e \bar{b}_n também se transformam por gauge,

$$a'_m = \sum_n C_{mn} a_n. \quad (2.256)$$

Para obter a matriz de transformação C_{mn} , usa-se a ortogonalidade de ϕ ,

$$\int dx \phi_m^\dagger \phi_n = \int dx \langle m|x\rangle \langle x|n\rangle = \delta_{mn}. \quad (2.257)$$

Aplicando (2.257) em (2.254),

$$\begin{aligned} \sum_n a'_n \phi_n &= (1 + i\beta\gamma_5) \sum_n a_n \phi_n \\ \implies \int dx \sum_n \phi_m^\dagger a'_n \phi_n &= \int dx \phi_m^\dagger (1 + i\beta\gamma_5) \sum_n a_n \phi_n \end{aligned}$$

$$\Rightarrow a'_m = \sum_n (\delta_{mn} + i \int dx \beta(x) \phi_m^\dagger(x) \gamma_5 \phi_n(x)) a_n = \sum_n C_{mn} a_n. \quad (2.258)$$

Já para \bar{b}_n ,

$$\bar{b}'_m = \sum_n \bar{b}_n (\delta_{mn} + i \int dx \beta(x) \phi_m^\dagger(x) \gamma_5 \phi_n(x)) = \sum_n \bar{b}_n C_{mn}. \quad (2.259)$$

Já conhecidas as expressões (2.258) e (2.259), tem-se que (2.253) se transforma como

$$\prod_n \mathcal{D}a'_n \mathcal{D}b'_n = (\det C)^{-2} \prod_n \mathcal{D}a_n \mathcal{D}b_n, \quad (2.260)$$

portanto, o jacobiano é igual a $(\det C)^{-2}$. Para calcular o determinante, será usada a propriedade $\det A = e^{\text{tr}(\ln A)}$ e $\ln(1 + A) = A + O(A^2)$,

$$\begin{aligned} (\det C)^{-2} &= \exp\{-2\text{tr}(\ln(\delta_{mn} + i \int dx \beta(x) \phi_m^\dagger(x) \gamma_5 \phi_n(x)))\} \\ &= \exp\left(-2i \int dx \beta \sum_n \phi_n^\dagger \gamma_5 \phi_n\right), \end{aligned}$$

logo,

$$\sum_n \phi_n^\dagger \gamma_5 \phi_n = \text{tr} \gamma_5 \delta(0). \quad (2.261)$$

Em (2.261), foram usadas as propriedades de ortogonalidade (2.262) e (2.263),

$$\sum_n \phi_n^\dagger \phi_n = \sum_n \langle n|x \rangle \langle x|n \rangle = \langle x|x \rangle = \delta(0), \quad (2.262)$$

$$\sum_n \phi_n^\dagger(x) \hat{O} \phi_n(y) = \text{tr}(\hat{O}) \delta(x - y), \quad (2.263)$$

onde \hat{O} é uma matriz.

Mas, o traço de γ_5 é nulo, o que faz o produto do traço pela função delta não ser definido em (2.261). Consequentemente, o jacobiano não é definido. Para acabar com esse problema, Fujikawa[4] propôs uma regularização dada por

$$\sum_n \phi_n^\dagger \gamma_5 \phi_n = \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_n \phi_n^\dagger \gamma_5 e^{\left(-\frac{\not{p}^2}{M^2}\right)} \phi_n = \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_n \phi_n^\dagger \gamma_5 e^{\left(-\frac{\lambda_n^2}{M^2}\right)} \phi_n. \quad (2.264)$$

Considerando a transformação de Fourier para os autoestados,

$$\phi(x) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^2} e^{ikx} \phi'(k), \quad (2.265)$$

a expressão (2.264) pode ser reescrita como

$$\sum_n \phi_n^\dagger \gamma_5 \phi_n = \lim_{M \rightarrow \infty} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^2} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^2} \sum_n \phi_n^\dagger(k) e^{-ikx} \gamma_5 e^{\left(-\frac{\not{p}^2}{M^2}\right)} \phi'_n(q) e^{iqx}. \quad (2.266)$$

Aplicando (2.263) em (2.266),

$$\begin{aligned} \sum_n \phi_n^\dagger \gamma_5 \phi_n &= \lim_{M \rightarrow \infty} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^2} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^2} \delta(q - k) \text{tr} e^{-ikx} \gamma_5 e^{\left(-\frac{\not{D}^2}{M^2}\right)} e^{iqx} \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^2} \text{tr} e^{-ikx} \gamma_5 e^{\left(-\frac{\not{D}^2}{M^2}\right)} e^{ikx}. \end{aligned} \quad (2.267)$$

Para a exponencial do operador de Dirac, no termo da regularização, tem-se

$$\begin{aligned} \not{D}^2 &= \gamma_\mu \gamma_\nu D^\mu D^\nu \\ &= \frac{1}{2} (\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} + [\gamma_\mu, \gamma_\nu]) D^\mu D^\nu = \left(\eta_{\mu\nu} + \frac{1}{2} [\gamma_\mu, \gamma_\nu] \right) D^\mu D^\nu \\ &= D_\mu D^\mu + \frac{1}{2} [\gamma_\mu, \gamma_\nu] D^\mu D^\nu. \end{aligned}$$

Como o campo A_μ considerado pode ser abeliano ou não, de qualquer maneira, tem-se

$$[\gamma_\mu, \gamma_\nu] D^\mu D^\nu = (\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu) D^\mu D^\nu = \gamma_\mu \gamma_\nu D^\mu D^\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu D^\mu D^\nu,$$

sendo os índices mudos, então,

$$\begin{aligned} \gamma_\mu \gamma_\nu D^\mu D^\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu D^\mu D^\nu &= \gamma_\mu \gamma_\nu D^\mu D^\nu - \gamma_\mu \gamma_\nu D^\nu D^\mu = \gamma_\mu \gamma_\nu [D^\mu, D^\nu] \\ \implies [\gamma_\mu, \gamma_\nu] D^\mu D^\nu &= \gamma_\mu \gamma_\nu [D^\mu, D^\nu] = \gamma_\mu \gamma_\nu F^{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (2.268)$$

portanto,

$$\not{D}^2 = D_\mu D^\mu + \frac{1}{2} \gamma_\mu \gamma_\nu F^{\mu\nu} = D_\mu D^\mu + \frac{1}{4} [\gamma_\mu, \gamma_\nu] F^{\mu\nu}. \quad (2.269)$$

Também é sabido, a partir dos cálculos do capítulo *Integral de caminho*, que $e^{-ikx} f(\partial_\mu) e^{ikx} = f(\partial_\mu + ik_\mu)$. Portanto, (2.267) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} &\lim_{M \rightarrow \infty} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^2} \text{tr} e^{-ikx} \gamma_5 e^{\left(-\frac{\not{D}^2}{M^2}\right)} e^{ikx} = \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^2} \text{tr} \gamma_5 e^{\left(-\frac{(D_\mu + ik^\mu)(D^\mu + ik^\mu)}{M^2} - \frac{\gamma_\mu \gamma_\nu F^{\mu\nu}}{2M^2}\right)}. \end{aligned} \quad (2.270)$$

Evoluindo (2.270),

$$\begin{aligned} &\lim_{M \rightarrow \infty} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^2} \text{tr} \gamma_5 e^{\left(-\frac{(D_\mu + ik^\mu)(D^\mu + ik^\mu)}{M^2} - \frac{\gamma_\mu \gamma_\nu F^{\mu\nu}}{2M^2}\right)} = \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^2} e^{(k^2/M^2)} \text{tr} \gamma_5 e^{\left(-\frac{2ik_\mu D^\mu}{M^2} - \frac{D_\mu D^\mu}{M^2} - \frac{\gamma_\mu \gamma_\nu F^{\mu\nu}}{2M^2}\right)}, \end{aligned}$$

e fazendo a mudança de variável $k_\mu \rightarrow Mk_\mu$,

$$= \lim_{M \rightarrow \infty} M^4 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^2} e^{k^2} \text{tr} \gamma_5 e^{\left(-\frac{2ik_\mu D^\mu}{M} - \frac{D_\mu D^\mu}{M^2} - \frac{\gamma_\mu \gamma_\nu F^{\mu\nu}}{2M^2}\right)}.$$

Para continuar, faz-se necessário expandir a segunda exponencial em séries de Taylor e usar as propriedades (2.271) e (2.272),

$$\text{tr}\gamma_5 = \text{tr}\gamma_5\gamma_\mu\gamma_\nu = 0, \quad (2.271)$$

$$\text{tr}\gamma_5\gamma_\alpha\gamma_\beta\gamma_\mu\gamma_\nu = -4i\epsilon_{\alpha\beta\mu\nu}. \quad (2.272)$$

Conseqüentemente, na expansão, todo termo com um denominador M^n de modo que $n > 4$ se anulará com o limite, e os termos com $n < 4$ se anularão pelas propriedades já citadas. Portanto, o único termo da expansão que sobra é o termo proporcional à $\gamma_\alpha\gamma_\beta\gamma_\mu\gamma_\nu F^{\alpha\beta} F^{\mu\nu}$, pois este possui um M^4 no denominador e o traço não se anula, implicando em

$$\begin{aligned} & \lim_{M \rightarrow \infty} M^4 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^2} e^{k^2} \text{tr}\gamma_5 e^{\left(-\frac{2ik_\mu D^\mu}{M} - \frac{D_\mu D^\mu}{M^2} - \frac{\gamma_\mu\gamma_\nu F^{\mu\nu}}{2M^2}\right)} = \\ & = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{M^4}{8M^4} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{k_\mu k^\mu} \text{tr}\gamma_5\gamma_\alpha\gamma_\beta\gamma_\mu\gamma_\nu \text{tr}F^{\alpha\beta} F^{\mu\nu} = \frac{-4i}{8} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{k^2} \epsilon_{\alpha\beta\mu\nu} \text{tr}F^{\alpha\beta} F^{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (2.273)$$

sendo $k^2 = k_\mu k^\mu = k_0^2 - \vec{k}^2$. Mas, como os cálculos estão sendo feitos considerando a rotação de Wick $k_0 = ik_4$, então,

$$k^2 = -\sum_{n=1}^4 k_n^2, \quad (2.274)$$

conseqüentemente,

$$\int d^4k e^{k^2} = \int d^4k e^{-(k_1^2+k_2^2+k_3^2+k_4^2)} = \pi^2 \quad (2.275)$$

$$\implies \sum_n \phi_n^\dagger \gamma_5 \phi_n = \frac{1}{32\pi^2} \epsilon_{\alpha\beta\mu\nu} \text{tr}F^{\alpha\beta} F^{\mu\nu}. \quad (2.276)$$

Finalmente, o jacobiano é dado por

$$(\det C)^{-2} = \exp\left(\frac{-i}{16\pi^2} \int d^4x \beta(x) \epsilon_{\alpha\beta\mu\nu} \text{tr}F^{\alpha\beta} F^{\mu\nu}\right) = \exp\left(\int d^4x \beta(x) \mathcal{A}[A_\mu]\right). \quad (2.277)$$

O objetivo inicial era descobrir como o funcional gerador se transforma sob transformações de gauge. Agora que o jacobiano já é conhecido, o funcional gerador se transforma como

$$\begin{aligned} Z'[\bar{\eta}, \eta, A_\mu] &= \int \mathcal{D}\psi' \mathcal{D}\bar{\psi}' \exp\left(\int d^4x (\mathcal{L}' + \bar{\eta}\psi' + \bar{\psi}'\eta)\right) \quad (2.278) \\ \implies Z' &= \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \exp\left(\int d^4x \beta(x) \mathcal{A}[A_\mu]\right) \exp\left(\int d^4x (\mathcal{L} + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta)\right) \\ &\quad \cdot \exp\left(\int d^4x \beta(\partial^\mu j_\mu^5 - 2imP + i(\bar{\eta}\gamma_5\psi + \bar{\psi}\gamma_5\eta))\right) \\ &= \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \exp\left(\int d^4x (\mathcal{L} + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta)\right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \exp \left(\int d^4x \beta (\partial^\mu j_\mu^5 - 2imP + i(\bar{\eta}\gamma_5\psi + \bar{\psi}\gamma_5\eta) + \mathcal{A}[A_\mu]) \right) \\
& = \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \exp \left(\int d^4x (\mathcal{L} + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta) \right) \\
& \cdot \left(1 + \int d^4x \beta (\partial^\mu j_\mu^5 - 2imP + i(\bar{\eta}\gamma_5\psi + \bar{\psi}\gamma_5\eta) + \mathcal{A}[A_\mu]) \right). \tag{2.279}
\end{aligned}$$

Em (2.279), o termo β é infinitesimal, então, é possível expandir e ignorar os termos de segunda ordem. Note que é possível chamar $Z'[\bar{\eta}, \eta, A_\mu] = Z[\bar{\eta}, \eta, A_\mu, \beta]$. Nesse sentido, $Z[\bar{\eta}, \eta, A_\mu] = Z[\bar{\eta}, \eta, A_\mu, 0]$. Se β é infinitesimal, então, tem-se a relação

$$Z[\bar{\eta}, \eta, A_\mu, \beta] = Z[\bar{\eta}, \eta, A_\mu, 0] + \int d^4x \beta \frac{\delta}{\delta\beta(x)} Z[\bar{\eta}, \eta, A_\mu, \beta] \Bigg|_{\beta=0}. \tag{2.280}$$

Ao se comparar (2.280) e (2.279), tem-se a relação

$$\begin{aligned}
& \frac{\delta}{\delta\beta(x)} Z[\bar{\eta}, \eta, A_\mu, \beta] \Bigg|_{\beta=0} = \\
& = \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} e^{\int d^4y (\mathcal{L} + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta)} \left(\partial^\mu j_\mu^5 - 2imP + i(\bar{\eta}\gamma_5\psi + \bar{\psi}\gamma_5\eta) + \mathcal{A}[A_\mu] \right). \tag{2.281}
\end{aligned}$$

Finalmente, chega-se no seguinte lema.

Lema: Se o funcional gerador é invariante por transformações de gauge quiral, isso implica na anomalia da corrente axial.

Isso é evidente. Se Z é invariante, tem-se

$$Z[\bar{\eta}, \eta, A_\mu, \beta] = Z[\bar{\eta}, \eta, A_\mu, 0] \implies \frac{\delta}{\delta\beta(x)} Z[\bar{\eta}, \eta, A_\mu, \beta] \Bigg|_{\beta=0} = 0. \tag{2.282}$$

Portanto,

$$\frac{\delta}{\delta\beta(x)} Z[\bar{\eta}, \eta, A_\mu, \beta] \Bigg|_{\beta, \eta, \bar{\eta}=0} = \langle 0 | (\partial^\mu j_\mu^5 - 2imP + \mathcal{A}[A_\mu]) | 0 \rangle = 0, \tag{2.283}$$

$$\langle \partial^\mu j_\mu^5 \rangle = 2im\langle P \rangle - \langle \mathcal{A}[A_\mu] \rangle. \tag{2.284}$$

A expressão (2.284) é justamente a identidade de Ward anômala que foi obtida a partir da regularização de Scwinger. Note que foi justamente o jacobiano que gerou a anomalia, sendo o jacobiano proveniente da informação quântica do sistema. E a invariância de gauge do funcional gerador implica justamente na identidade de Ward anômala, análogo ao caso clássico, em que a invariância de gauge implica na conservação da corrente. Entretanto, no caso quântico, a contribuição quântica da expressão é o responsável pelo surgimento da anomalia.

2.4.2 Método de Fujikawa para uma regularização genérica

Na subsecção anterior, foi utilizada a regularização com uma exponencial do tipo gaussiana, como expresso em (2.264). Entretanto, considere uma função genérica $f(x)$, que satisfaça as propriedades

$$f(0) = 1 \quad (2.285)$$

e

$$f(\infty) = f'(\infty) = f''(\infty) = \dots = 0. \quad (2.286)$$

Então, a regularização de Fujikawa (2.287) induz ao jacobiano (2.277),

$$\sum_n \phi_n^\dagger \gamma_5 \phi_n = \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_n \phi_n^\dagger \gamma_5 f \left(\frac{\not{D}^2}{M^2} \right) \phi_n = \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_n \phi_n^\dagger \gamma_5 f \left(\frac{\lambda_n^2}{M^2} \right) \phi_n. \quad (2.287)$$

Para provar essa afirmação, o processo é análogo ao feito para a $f(x) = e^{-x^2}$,

$$\begin{aligned} \sum_n \phi_n^\dagger \gamma_5 \phi_n &= \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_n \phi_n^\dagger \gamma_5 f \left(\frac{\not{D}^2}{M^2} \right) \phi_n \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^2} \text{tr} \gamma_5 f \left(\frac{k^2}{M} + \frac{2i k_\mu D^\mu}{M^2} + \frac{D_\mu D^\mu}{M^2} + \frac{\gamma_\mu \gamma_\nu F^{\mu\nu}}{2M^2} \right). \end{aligned} \quad (2.288)$$

Expandindo (2.288) em torno de k^2/M^2 , somente o termo proporcional à $f''(k^2/M^2)$ não se anulará, por causa dos mesmos argumentos utilizados na subsecção passada. Portanto, já fazendo a mudança $k_\mu \rightarrow M k_\mu$, obtém-se

$$\sum_n \phi_n^\dagger \gamma_5 \phi_n = \frac{1}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} f''(k^2) \epsilon_{\alpha\beta\mu\nu} F^{\alpha\beta} \text{tr} F^{\mu\nu}. \quad (2.289)$$

Para a integração, basta fazer uma mudança para coordenadas esféricas

$$\int d^4 k f''(k^2) = 2\pi^2 \int k^3 dk f''(k^2),$$

sendo $f''(k^2) = \frac{df'(k^2)}{dk^2} = \frac{df'(k^2)}{dk} \frac{1}{2k}$ e $f''(k^2) = \frac{1}{2k} \left(\frac{1}{2k} \frac{d^2 f(k^2)}{dk^2} - \frac{1}{2k^2} \frac{df(k^2)}{dk} \right)$,

$$2\pi^2 \int k^3 dk f''(k^2) = 2\pi^2 \int dk \left(\frac{k}{4} \frac{d^2 f(k^2)}{dk^2} - \frac{1}{4} \frac{df(k^2)}{dk} \right).$$

Integrando por partes o primeiro termo, obtém-se

$$\begin{aligned} \int_0^\infty dk \left(\frac{k}{4} \frac{d^2 f(k^2)}{dk^2} \right) &= \frac{k}{4} \frac{df(k^2)}{dk} \Big|_0^\infty - \frac{1}{4} \int_0^\infty \frac{df(k^2)}{dk}, \\ \int_0^\infty dk \left(\frac{k}{4} \frac{d^2 f(k^2)}{dk^2} \right) &= -\frac{1}{4} (f(\infty) - f(0)) = \frac{1}{4}. \end{aligned} \quad (2.290)$$

Para o segundo termo, o resultado também é $1/4$, de modo que

$$\int d^4 k f''(k^2) = \pi^2. \quad (2.291)$$

Por fim,

$$\sum_n \phi_n^\dagger \gamma_5 \phi_n = \frac{1}{32\pi^2} \epsilon_{\alpha\beta\mu\nu} \text{tr} F^{\alpha\beta} F^{\mu\nu}, \quad (2.292)$$

que é justamente o jacobiano encontrado para o caso da regularização utilizando a curva gaussiana. Por isso, conclui-se que diferentes funções de regularização implicam na anomalia.

Considerações finais

Os objetivos propostos neste trabalho eram analisar as identidades de Ward e a forma que as anomalias surgem, a partir de cálculos diretos das funções de Green, bem como provar como essas anomalias são uma característica física da teoria, não se devendo às divergências superficiais. Uma vez que o formalismo da teoria quântica de campos utilizado foi o da integral de caminho, outro objetivo importante era o de analisar a forma que as anomalias surgem no funcional gerador. Todos esses objetivos foram atingidos para o caso da anomalia ABJ.

No primeiro capítulo, foi feita uma construção da teoria quântica de campos pelo método das integrais de caminho, sendo mostrado que toda a informação da teoria pode ser obtida a partir do funcional gerador. Com essa ferramenta, foram estudadas as identidades de Ward, e foram feitos os cálculos do diagrama triangular que obtiveram a identidade de Ward anômala. Também foi provado que, dadas as identidades de Ward vetorial e axial, uma delas necessariamente será anômala. Em seguida, foram estudados métodos de renormalização e a forma que eles alteram o funcional gerador. Os métodos de renormalização dependem de como as divergências na teoria serão obtidas, utilizando-se as regularizações com esse objetivo. Portanto, métodos de regularização foram empregados, mostrando que esses induzem à anomalia ABJ, ou seja, uma renormalização baseada nesses métodos não seria capaz de anular essa anomalia na teoria. Por último, utilizando o método de Fujikawa, foi visto que a anomalia surge a partir do jacobiano associado à transformação de gauge da medida quântica.

O trabalho se manteve na anomalia ABJ, que possui enorme importância no fenômeno do decaimento $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$. Mas, evidentemente, os métodos empregados podem ser utilizados para se analisar outras anomalias que possam surgir em outras identidades de Ward. De fato, isso pode ser tema de pesquisas futuras.

Bibliografia

- [1] S. S. Bayin. *Mathematical Methods in Science and Engineering*. Wiley, 2006.
- [2] Reinhold A. Bertlmann. *Anomalies in Quantum Field Theory*. Oxford University Press Inc., 1996.
- [3] S. Bochner e K. Chandrasekharan. *Fourier Transform*. Princeton University Press, 1949.
- [4] Kazuo Fujikawa. “Chiral anomaly and the Wess-Zumino condition”. Em: *Physical Review D* 31.2 (1985), pp. 341–351.
- [5] Marcelo Otavio Caminha Gomes. *Teoria Quântica de Campos*. EdUSP, 2015.
- [6] Mikio Nakahara. *Geometry, topology and physics*. IoP Publishing Ltd, 2003.
- [7] J.S. Porto et al. “On the Bose symmetry and the left- and right-chiral anomalies”. en. Em: *The European Physical Journal C* 78.160 (fev. de 2018), pp. 168–176. ISSN: 1808-8546. URL: <https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-018-5648-9>.
- [8] L. H. Ryder. *Quantum Field Theory*. Cambridge University Press, 1985.
- [9] Matthew D. Schwartz. *Quantum Field Theory and the Standard Model*. Cambridge University Press, 2014.

Apêndices

APÊNDICE A – Integral d-dimensional

A integral (A.1) frequentemente aparece na teoria quântica de campos ao se fazer a regularização dimensional. Portanto, esse apêndice tem por objetivo calcular e explorar suas propriedades importantes [8].

As integrais na regularização dimensional costumam ter a seguinte forma

$$I(A) = \int d^d p \frac{1}{(p^2 - 2Ap + B)^a}. \quad (\text{A.1})$$

Para resolvê-la, faz-se uma mudança das coordenadas euclidianas para coordenadas esféricas. Desse modo, $(p_0, r, \theta_1, \dots, \theta_{d-2})$ e

$$I = \int d^{d-2} \Omega r^{d-2} dr dp_0 \frac{1}{(p_0^2 - r^2 - 2Ap + B)^a}, \quad (\text{A.2})$$

sendo A um vetor e B um escalar. Fazendo uma mudança de referencial em $q = (A_0, \vec{q})$ para $A' = (\alpha, \vec{0})$, têm-se

$$I(A') = \int d^{d-2} \Omega r^{d-2} dr dp_0 \frac{1}{(p_0^2 - r^2 - 2\alpha p_0 + B)^a}. \quad (\text{A.3})$$

O integrando de (A.3) independe das coordenadas angulares. Portanto, sendo $\int d^n \Omega = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}$, a integral (A.3) se torna

$$I(A') = \frac{2\pi^{(d-2)/2}}{\Gamma((d-1)/2)} \int r^{d-2} dr dp_0 \frac{1}{(p_0^2 - r^2 - 2\alpha p_0 + B)^a}, \quad (\text{A.4})$$

fazendo a mudança de variável $p_0 \rightarrow p_0 + \alpha$,

$$I(A') = \frac{2\pi^{(d-1)/2}}{\Gamma((d-1)/2)} \int r^{d-2} dr dp_0 \frac{1}{(p_0^2 - \alpha^2 - r^2 + B)^a}. \quad (\text{A.5})$$

Pode-se fazer as manipulações

$$\begin{aligned} I(A') &= \frac{2\pi^{(d-1)/2}}{\Gamma((d-1)/2)} \int dr dp_0 \frac{r^{d-2}}{(p_0^2 - \alpha^2 - r^2 + B)^a} \\ &= \frac{2\pi^{(d-1)/2}}{\Gamma((d-1)/2)} \int dp_0 \frac{1}{\kappa^{2a}} \int dr \frac{r^{d-2}}{(1 - (r/\kappa)^2)^a}, \end{aligned}$$

onde $\kappa^2 = p_0^2 - \alpha^2 + B$. Consequentemente, fazendo a mudança de variável $t = -(r/\kappa)^2$,

$$I = \frac{(-\pi)^{(d-1)/2}}{\Gamma((d-1)/2)} \int dp_0 \frac{1}{\kappa^{2a-d+1}} \int_0^\infty \frac{t^{(d-3)/2}}{(1+t)^a} dt. \quad (\text{A.6})$$

A função beta de Euler é dada por

$$B(x, y) = \int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+y}} dt. \quad (\text{A.7})$$

Chamando $x = (d-1)/2$ e $y = a - (d-1)/2$, a integral (A.6) pode ser reescrita em termos da função (A.7),

$$I = \frac{(-\pi)^{(d-1)/2}}{\Gamma((d-1)/2)} \int dp_0 \frac{1}{\kappa^{2a-d+1}} B((d-1)/2, (a - (d-1)/2)). \quad (\text{A.8})$$

A função beta de Euler pode ser reescrita em termos da função gamma, como expresso na fórmula

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}. \quad (\text{A.9})$$

Portanto, a integral (A.8) é dada por

$$I = \frac{(-\pi)^{(d-1)/2} \Gamma(a - (d-1)/2)}{\Gamma(a)} \int dp_0 \frac{1}{(p_0^2 - \alpha^2 + B)^{a-(d-1)/2}}. \quad (\text{A.10})$$

Para resolver a integral (A.10) será necessário fazer uso da função beta novamente, uma vez que é possível reescrever a integral da forma

$$I = \frac{(-\pi)^{(d-1)/2} \Gamma(a - (d-1)/2)}{\Gamma(a)} \frac{1}{\beta^{2a-d+1}} \int dp_0 \frac{1}{((p_0/\beta)^2 + 1)^{a-(d-1)/2}}, \quad (\text{A.11})$$

onde $\beta^2 = -\alpha^2 + B$. O integrando em (A.11) é uma função par, portanto, é possível fazer $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2 \int_0^{\infty} f(x)dx$. Logo, usando essa propriedade e mudando a variável para $t = (p_0/\beta)^2$,

$$\begin{aligned} I &= \frac{(-\pi)^{(d-1)/2} \Gamma(a - (d-1)/2)}{\Gamma(a)} \frac{1}{\beta^{2a-d}} \int_0^{\infty} dt \frac{t^{-1/2}}{(t+1)^{a-(d-1)/2}} \\ &= \frac{(-\pi)^{(d-1)/2} \Gamma(a - (d-1)/2)}{\Gamma(a)} \frac{1}{\beta^{2a-d}} \frac{\Gamma(1/2)\Gamma(a-d/2)}{\Gamma(a - (d-1)/2)}, \\ I(A) &= -i(-1)^a \frac{\pi^{d/2} \Gamma(a-d/2)}{\Gamma(a)} \frac{1}{(A^2 - B)^{a-d/2}}. \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Com o resultado (A.12), é possível calcular as integrais do tipo

$$\int d^d p \frac{p_{\mu_1} p_{\mu_2} \cdots p_{\mu_N}}{(p^2 + 2Ap - B)^a} = \left(\prod_{n=0}^{N-1} (-2(a-N+n))^{-1} \right) \frac{\partial}{\partial A^{\mu_1}} \frac{\partial}{\partial A^{\mu_2}} \cdots \frac{\partial}{\partial A^{\mu_N}} \int d^d p \frac{1}{(p^2 + 2Ap - B)^{a-N}}. \quad (\text{A.13})$$

Portanto, utilizando o resultado (A.12) em (A.13),

$$\begin{aligned} &\int d^d p \frac{p_{\mu_1} p_{\mu_2} \cdots p_{\mu_N}}{(p^2 + 2Ap - B)^a} = \\ &= -i(-1)^a \frac{\pi^{d/2} \Gamma(a - N - d/2)}{\Gamma(a - N)} \left(\prod_{n=0}^{N-1} (-2(a-N+n))^{-1} \right) \frac{\partial}{\partial A^{\mu_1}} \frac{\partial}{\partial A^{\mu_2}} \cdots \frac{\partial}{\partial A^{\mu_N}} \frac{1}{(A^2 - B)^{(a-N)-d/2}}. \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

Para $N = 1$,

$$\int d^d p \frac{p_\mu}{(p^2 + 2Ap - B)^a} = i \frac{\pi^{d/2} \Gamma(a-1-d/2)}{(a-1)\Gamma(a-1)} \frac{(a-1-d/2)A_\mu}{(A^2-B)^{a-d/2}} \quad (\text{A.15})$$

Para $N = 2$,

$$\begin{aligned} \int d^d p \frac{p_\mu p_\nu}{(p^2 + 2Ap - B)^a} &= i \frac{\pi^{d/2} \Gamma(a-2-d/2)}{2(a-2)(a-1)\Gamma(a-2)} \frac{\partial}{\partial A^\nu} \frac{(a-2-d/2)A_\mu}{(A^2-B)^{a-1-d/2}} \\ &= i \frac{\pi^{d/2} (a-2-d/2)\Gamma(a-2-d/2)}{2(a-2)(a-1)\Gamma(a-2)} (g_{\mu\nu}(A^2-B) - 2(a-1-d/2)A_\mu A_\nu) \frac{1}{(A^2-B)^{a-d/2}} \\ &= i \frac{\pi^{d/2}}{2\Gamma(a)} (g_{\mu\nu}(A^2-B)\Gamma(a-1-d/2) - 2\Gamma(a-d/2)A_\mu A_\nu) \frac{1}{(A^2-B)^{a-d/2}}. \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

Particularmente,

$$\begin{aligned} \int d^d p \frac{p_\mu p_\nu}{(p^2 + 2Ap - B)^2} &= i \frac{\pi^{d/2}}{2\Gamma(2)} (g_{\mu\nu}(A^2-B)\Gamma(1-d/2) - 2\Gamma(2-d/2)A_\mu A_\nu) \frac{1}{(A^2-B)^{2-d/2}} \\ &= i \frac{\pi^{d/2}\Gamma(1-d/2)}{2\Gamma(2)} \frac{g_{\mu\nu}}{(A^2-B)^{1-d/2}} + \int d^d p \frac{A_\mu A_\nu}{(p^2 - 2Ap + B)^2} \\ &= \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \int d^d p \frac{1}{(p^2 - 2Ap + B)} + \int d^d p \frac{A_\mu A_\nu}{(p^2 - 2Ap + B)^2}, \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

fazendo $p_\mu = k_\mu + A_\mu$,

$$\int d^d k \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2 + A^2 + B)^2} = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \int d^d k \frac{1}{(k^2 + A^2 + B)} - \int d^d k \frac{A_\mu k_\nu + k_\mu A_\nu}{(k^2 + A^2 + B)^2}. \quad (\text{A.18})$$

O integrando da segunda integral em (A.18) é uma função ímpar das variáveis k_μ e k_ν , portanto, essa integral se anula, sobrando apenas a primeira integral,

$$\int d^d k \frac{k_\mu k_\nu}{(k^2 + A^2 + B)^2} = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \int d^d k \frac{1}{(k^2 + A^2 + B)}, \quad (\text{A.19})$$

que é um resultado muito útil no cálculo da polarização de vácuo.