



**Universidade de Brasília
Faculdade de Tecnologia**

**Estimação Simultânea de Estados e
Parâmetros para Sistemas Lineares em Malha
Fechada**

Matheus Teixeira de Sousa

PROJETO FINAL DE CURSO
ENGENHARIA DE CONTROLE E AUTOMAÇÃO

Brasília
2023

**Universidade de Brasília
Faculdade de Tecnologia**

**Estimação Simultânea de Estados e
Parâmetros para Sistemas Lineares em Malha
Fechada**

Matheus Teixeira de Sousa

Projeto Final de Curso submetido como requi-
sito parcial para obtenção do grau de Enge-
nheiro de Controle e Automação

Orientador: Prof. Dr. Eugênio Libório Feitosa Fortaleza
Coorientador: Prof. Dr. José Oniram de Aquino Limaverde Filho

Brasília
2023

S725e Sousa, Matheus Teixeira de.
Estimação Simultânea de Estados e Parâmetros para Sistemas Lineares em Malha Fechada / Matheus Teixeira de Sousa; orientador Eugênio Libório Feitosa Fortaleza; coorientador José Oniram de Aquino Limaverde Filho. -- Brasília, 2023.
106 p.

Projeto Final de Curso (Engenharia de Controle e Automação)
-- Universidade de Brasília, 2023.

1. Estimação simultânea. 2. Estimação de estados e parâmetros. 3. Controle em malha fechada. 4. Sistemas lineares. I. Fortaleza, Eugênio Libório Feitosa, orient. II. Limaverde Filho, José Oniram de Aquino, coorient. III. Título

**Universidade de Brasília
Faculdade de Tecnologia**

**Estimação Simultânea de Estados e Parâmetros para
Sistemas Lineares em Malha Fechada**

Matheus Teixeira de Sousa

Projeto Final de Curso submetido como requisito parcial para obtenção do grau de Engenheiro de Controle e Automação

Trabalho aprovado. Brasília, 12 de dezembro de 2023:

Prof. Dr. Eugênio Libório Feitosa
Fortaleza, UnB/FT/ENM
Orientador

Prof. Dr. José Oniram de Aquino
Limaverde Filho, UnB/ENM/PPMEC
Coorientador

Prof. Dr. Eduardo Stockler Tognetti,
UnB/FT/ENE
Examinador interno

Prof. Dr. William Humberto Cuéllar
Sánchez, UnB/ENM/PPMEC
Examinador externo

Brasília
2023

Este trabalho é dedicado aos meus pais e irmãos.

Agradecimentos

Quando eu marquei a opção de Engenharia Mecatrônica no PAS, jamais imaginei o rumo para o qual essa escolha me levaria. O fato é que após 5 anos e meio, muitas disciplinas, muitos trabalhos e uma pandemia, mais um ciclo se aproxima do fim. A vontade de cursar engenharia se dividiu com a possibilidade de cursar medicina e, ao final desse período, eu consigo afirmar que encontrei o meu lugar e saio feliz com a minha opção. Definitivamente, não foi um período fácil, mas, certamente, será guardado com carinho.

Primeiro, agradeço aos meus pais, Eleomar e Maria José, pelo amor, carinho e suporte incondicional que me deram ao longo desses anos e por serem exemplos de humanidade. Apesar das ausências nos eventos de família e das incontáveis horas afastado estudando, os senhores sempre me forneceram apoio, especialmente durante a pandemia, e me permitiram arriscar, mesmo quando a minha escolha era divergente da de vocês. Depois, agradeço aos meus irmãos, Gabriella e Miguel, pelo companheirismo durante os trajetos de volta para casa, na fofoca diária, no compartilhamento das dores e das ideias. O esforço empregado para a realização deste trabalho também é por vocês.

Agradeço ao meu orientador, prof. Eugênio, pelos ensinamentos gentilmente passados, por me receber no Lab. de Petróleo e Gás, confiar em mim e, principalmente, não me julgar quando eu aparecia com inspirações oníricas para tentar resolver os problemas. Também agradeço ao meu coorientador, prof. Oniram, pela paciência e disponibilidade com as quais me auxiliou e ensinou diversas vezes. O tempo durante a orientação de vocês foi bastante engrandecedor para a minha formação. Também foi pela confiança de vocês que eu me esforcei para realizar este trabalho da melhor forma possível.

Agradeço aos amigos que fiz durante a graduação pelo convívio, pelas idas ao bar após as aulas de desenho, pelas conversas na FT pós-almoço, pelo suporte às ideias mirabolantes e, principalmente, pela parceria honesta que desenvolvemos. Passamos por eventos bastante caóticos, mas a presença de vocês, mesmo que distante, ajudou a amenizar as dificuldades enfrentadas. Em função disso, eu posso afirmar que a graduação não seria a mesma sem a participação de cada um de vocês. Logicamente, não poderia deixar de agradecer aos amigos do Lab. de Petróleo pela convivência nesse último ano e à galera do meu prédio, cuja amizade já dura muitos anos. O apoio de vocês também é parte importante deste trabalho.

Agradeço ao prof. Adriano Possebon pela confiança depositada e por me motivar a ser uma pessoa melhor. O senhor tem grande influência na minha aproximação do prof. Eugênio e na minha vontade de buscar um mestrado acadêmico. Também agradeço ao prof. Aguirre, da UFMG, e à profa. Wendy Herrera, da UFOP, pela forma gentil com a qual me trataram e pelas contribuições realizadas durante o desenvolvimento da revisão bibliográfica

do meu trabalho. Os materiais fornecidos foram de grande apoio. Agradeço à profa. Genáina e aos colegas do Lab. de Engenharia de Software por terem me recebido tão gentilmente. Ter um contato maior com robótica era uma vontade minha há muito tempo e o período que passei aí agregou muito à minha formação.

Por fim, agradeço aos profs. Eduardo e William pela participação na minha banca examinadora e a todos os amigos, colegas e familiares que não foram citados diretamente aqui, mas contribuíram de alguma forma para este trabalho.

Resumo

A abordagem de espaço de estados, desenvolvida a partir da década de 1950, é baseada na análise da evolução temporal dos estados, que contém toda a informação relevante para representar a dinâmica de um sistema em um ponto de operação. No entanto, nem sempre é possível medir os estados de um sistema diretamente. Além disso, nem sempre é possível conhecer ou medir diretamente os parâmetros do sistema, essenciais para estimar os estados quando estes não são medidos. Nesse caso, o problema resultante, isto é, estimar tanto estados quanto parâmetros, passa a ser chamado estimação simultânea. Dentro desse contexto, este trabalho propõe desenvolver uma nova abordagem de estimação simultânea para sistemas lineares em malha fechada a partir do filtro de Kalman e da média móvel exponencial. Além disso, objetiva-se explorar o impacto das estimativas realizadas no desempenho de controle do sistema. Para tanto, as principais abordagens presentes da literatura foram testadas por meio de simulações e comparadas com a nova estratégia. A partir dos resultados obtidos, observou-se um desempenho melhor ou próximo da abordagem proposta, tanto nos índices de controle quanto na precisão da estimação, em comparação com as abordagens existentes. Ademais, o método proposto se mostrou mais simples de ser aplicada em casos reais.

Palavras-chave: Estimação simultânea. Estimação de estados e parâmetros. Controle em malha fechada. Sistemas lineares. Filtro de Kalman. Média móvel exponencial.

Abstract

The state-space approach, developed since the 1950s, is based on analyzing the temporal evolution of states, which contains all the relevant information necessary to represent a system's dynamics at an operational point. However, it's not always possible to directly measure a system's states. Moreover, knowing or directly measuring the system parameters, crucial for estimating states when they are not directly measured, is also not always possible. In such cases, the resulting problem, i.e., estimating both states and parameters, is referred to as simultaneous estimation. Within this context, this study aims to develop a novel simultaneous estimation approach for linear systems in closed-loop using the Kalman filter and exponential moving average. In addition, the objective is to explore the impact of the estimates on the system's control performance. To achieve this, we tested the main approaches from the literature through simulations and compared them with the new strategy. The results indicated a performance either superior or comparable to the proposed approach, both in terms of control indices and the precision of estimation, when compared with existing methodologies. Furthermore, the proposed method shown to be simpler to apply to real problems.

Keywords: Simultaneous estimation. States and parameters estimation. Closed-loop control. Linear systems. Kalman filter. Exponential moving average.

Lista de ilustrações

Figura 1.1 – Regulador de esferas de James Watt.	18
Figura 1.2 – Diagrama de blocos do problema de estimação.	21
Figura 1.3 – Diagrama de blocos do problema proposto.	26
Figura 2.4 – Diagrama de blocos da estimação conjunta com o FKEC.	37
Figura 2.5 – Diagrama de blocos da estimação dual com o FKD livre de estados.	39
Figura 2.6 – Diagrama de blocos da estimação dual com FK e MQR.	39
Figura 2.7 – Diagrama de blocos da estimação dual com FK e MME.	40
Figura 3.8 – Esquemático do problema de quatro tanques.	42
Figura 3.9 – Diagrama de blocos do sistema de quatro tanques no problema estudado.	49
Figura 3.10–Evolução das saídas, entradas e estados não-medidos para o FK ideal.	51
Figura 3.11–Evolução das saídas com o FKEC para diferentes P_0	55
Figura 3.12–Evolução das ações de controle com o FKEC para diferentes P_0	56
Figura 3.13–Evolução dos estados não-medidos com o FKEC para diferentes P_0	57
Figura 3.14–Evolução dos parâmetros desconhecidos com o FKEC para diferentes P_0	58
Figura 3.15–Evolução das saídas com o FKEC para diferentes θ_0	59
Figura 3.16–Evolução das ações de controle com o FKEC para diferentes θ_0	60
Figura 3.17–Evolução dos estados não-medidos com o FKEC para diferentes θ_0	61
Figura 3.18–Evolução dos parâmetros desconhecidos com o FKEC para diferentes θ_0	62
Figura 3.19–Evolução das saídas com o FKD para diferentes $P_{\theta,0}$	65
Figura 3.20–Evolução das ações de controle com o FKD para diferentes $P_{\theta,0}$	66
Figura 3.21–Evolução dos estados não-medidos com o FKD para diferentes $P_{\theta,0}$	67
Figura 3.22–Evolução dos parâmetros desconhecidos com o FKD para diferentes $P_{\theta,0}$	68
Figura 3.23–Evolução das saídas com o FKD para diferentes θ_0	70
Figura 3.24–Evolução das ações de controle com o FKD para diferentes θ_0	70
Figura 3.25–Evolução dos estados não-medidos com o FKD para diferentes θ_0	71
Figura 3.26–Evolução dos parâmetros desconhecidos com o FKD para diferentes θ_0	72
Figura 3.27–Evolução das saídas com o FK e MQR- λ para diferentes $P_{\theta,0}$	75
Figura 3.28–Evolução das ações de controle com o FK e MQR- λ para diferentes $P_{\theta,0}$	75
Figura 3.29–Evolução dos estados não-medidos com o FK e MQR- λ para diferentes $P_{\theta,0}$	76
Figura 3.30–Evolução dos parâmetros desconhecidos com o FK e MQR- λ para diferentes $P_{\theta,0}$	77
Figura 3.31–Evolução das saídas com o FK e MQR- λ para diferentes λ	79
Figura 3.32–Evolução das ações de controle com o FK e MQR- λ para diferentes λ	79
Figura 3.33–Evolução dos estados não-medidos com o FK e MQR- λ para diferentes λ	80
Figura 3.34–Evolução dos parâmetros desconhecidos com o FK e MQR- λ para diferentes λ	81

Figura 3.35–Evolução das saídas com o FK e MQR- λ para diferentes θ_0	83
Figura 3.36–Evolução das ações de controle com o FK e MQR- λ para diferentes θ_0 . .	83
Figura 3.37–Evolução dos estados não-medidos com o FK e MQR- λ para diferentes θ_0 .	84
Figura 3.38–Evolução dos parâmetros desconhecidos com o FK e MQR- λ para dife- rentes θ_0	85
Figura 3.39–Evolução das saídas com o FK e MME para diferentes A^α	88
Figura 3.40–Evolução das ações de controle com o FK e MME para diferentes A^α . . .	89
Figura 3.41–Evolução dos estados não-medidos com o FK e MME para diferentes A^α .	90
Figura 3.42–Evolução dos parâmetros desconhecidos com o FK e MME para diferentes A^α	91
Figura 3.43–Evolução das saídas com o FK e MME para diferentes θ_0	92
Figura 3.44–Evolução das ações de controle com o FK e MME para diferentes θ_0 . . .	93
Figura 3.45–Evolução dos estados não-medidos com o FK e MME para diferentes θ_0 .	94
Figura 3.46–Evolução dos parâmetros desconhecidos com o FK e MME para diferentes θ_0	95
Figura 3.47–Comparação das ações de controle e estimação dos parâmetros desco- nhecidos para as abordagens testadas na condição inicial de 70% nos parâmetros desconhecidos.	98

Lista de tabelas

Tabela 3.1 – Parâmetros base do problema de quatro tanques.	43
Tabela 3.2 – Parâmetros do ponto de operação de fase mínima do problema de quatro tanques.	44
Tabela 3.3 – Condições iniciais para os parâmetros desconhecidos (θ_0).	45
Tabela 3.4 – Índices de desempenho de controle com FK ideal (intervalo 1).	52
Tabela 3.5 – Precisão dos estados não-medidos com FK ideal (intervalo 1).	52
Tabela 3.6 – Parâmetros da matriz de covariância inicial no FKEC $j_{130}(P_0)$	54
Tabela 3.7 – Resultado percentual dos índices de desempenho de controle com o FKEC para diferentes P_0 em comparação com o FK ideal (intervalo 1).	54
Tabela 3.8 – Precisão dos estados não-medidos e parâmetros desconhecidos com o FKEC para diferentes P_0 (intervalo 1).	56
Tabela 3.9 – Parâmetros da matriz de covariância inicial no FKEC $j_i(P_0)$	59
Tabela 3.10–Resultado percentual dos índices de desempenho de controle com o FKEC para diferentes θ_0 em comparação com o FK ideal (intervalo 1).	59
Tabela 3.11–Precisão dos estados não-medidos e parâmetros desconhecidos com o FKEC para diferentes θ_0 (intervalo 1).	61
Tabela 3.12–Parâmetros da matriz de covariância inicial no FKD $j_{130}(P_{\theta,0})$	64
Tabela 3.13–Resultado percentual dos índices de desempenho de controle com o FKD para diferentes $P_{\theta,0}$ em comparação com o FK ideal (intervalo 1).	65
Tabela 3.14–Resultado percentual da precisão dos estados não-medidos e parâmetros desconhecidos com o FKD para diferentes $P_{\theta,0}$ em comparação com o FKEC (intervalo 1).	67
Tabela 3.15–Parâmetros da matriz de covariância inicial no FKD $j_i(P_{\theta,0})$	69
Tabela 3.16–Resultado percentual dos índices de desempenho de controle com o FKD para diferentes θ_0 em comparação com o FK ideal (intervalo 1).	69
Tabela 3.17–Resultado percentual da precisão dos estados não-medidos e parâmetros desconhecidos com o FKD para diferentes θ_0 em comparação com o FKEC (intervalo 1).	71
Tabela 3.18–Parâmetros da matriz de covariância inicial no FK e MQR- λ $j_{130}(P_{\theta,0})$	74
Tabela 3.19–Resultado percentual dos índices de desempenho de controle com o FK e MQR- λ para diferentes $P_{\theta,0}$ em comparação com o FK ideal (intervalo 1).	74
Tabela 3.20–Resultado percentual da precisão dos estados não-medidos e parâmetros desconhecidos com o FK e MQR- λ para diferentes $P_{\theta,0}$ em comparação com o FKEC (intervalo 1).	76
Tabela 3.21–Parâmetros da matriz L no MQR- λ (λ).	78

Tabela 3.22–Resultado percentual dos índices de desempenho de controle com o FK e MQR- λ para diferentes λ em comparação com o FK ideal (intervalo 1). .	78
Tabela 3.23–Resultado percentual da precisão dos estados não-medidos e parâmetros desconhecidos com o FK e MQR- λ para diferentes λ em comparação com o FKEC (intervalo 1).	79
Tabela 3.24–Parâmetros da matriz de covariância inicial no FK e MQR- λ $j_i (P_{\theta_0})$. . .	82
Tabela 3.25–Resultado percentual dos índices de desempenho de controle com o FK e MQR- λ para diferentes θ_0 em comparação com o FK ideal (intervalo 1).	82
Tabela 3.26–Resultado percentual da precisão dos estados não-medidos e parâmetros desconhecidos com o FK e MQR- λ para diferentes θ_0 em comparação com o FKEC (intervalo 1).	84
Tabela 3.27–Parâmetros da matriz A^α no FK e MME j_{130}	87
Tabela 3.28–Resultado percentual dos índices de desempenho de controle com o FK e MME para diferentes A^α em comparação com o FK ideal (intervalo 1). .	87
Tabela 3.29–Resultado percentual de precisão dos estados não-medidos e parâmetros desconhecidos com o FK e MME para diferentes A^α em comparação com o FKEC (intervalo 1).	89
Tabela 3.30–Parâmetros da matriz A^α no FK e MME j_i	92
Tabela 3.31–Resultado percentual dos índices de desempenho de controle com o FK e MME para diferentes θ_0 em comparação com o FK ideal (intervalo 1). .	92
Tabela 3.32–Resultado percentual de precisão dos estados não-medidos e parâmetros desconhecidos com o FK e MME para diferentes θ_0 em comparação com o FKEC (intervalo 1).	94

Lista de abreviaturas e siglas

FK	Filtro de Kalman	22
FKA	Filtro de Kalman adaptativo	22
FKD	Filtro de Kalman dual	22
FKE	Filtro de Kalman estendido	24
FKEA	Filtro de Kalman estendido adaptativo	25
FKEAC	Filtro de Kalman estendido adaptativo conjunto	25
FKEC	Filtro de Kalman estendido conjunto	23
FKED	Filtro de Kalman estendido dual	22
FKU	Filtro de Kalman <i>unscented</i>	24
FKUA	Filtro de Kalman <i>unscented</i> adaptativo	25
FKUAC	Filtro de Kalman <i>unscented</i> adaptativo conjunto	25
FKUC	Filtro de Kalman <i>unscented</i> conjunto	25
FKUD	Filtro de Kalman <i>unscented</i> dual	24
IAE	Integral do Erro Absoluto	49
ISE	Integral do Erro Quadrático	49
ITAE	Integral do Erro Absoluto ponderada pelo Tempo	49
ITSE	Integral do Erro Quadrático ponderada pelo Tempo	49
MAE	Erro Absoluto Médio	50
MIMO	Multi-entradas multi-saídas	41
MME	Média móvel exponencial	32
MQ	Mínimos quadrados	22
MQR	Mínimos quadrados recursivo	22
MQR- λ	Mínimos quadrados recursivo com fator de esquecimento	30
RMSE	Raiz do Erro Quadrático Médio	50
SLIT	Sistema linear invariante no tempo	41
TVC	Variação Total da Ação de Controle	50

Lista de símbolos

Símbolos romanos

e	Vetor de erro	48
u	Vetor de entradas	33
v	Vetor de ruído de medição	33
w	Vetor de ruído de processo	33
x	Vetor de estados	33
y	Vetor de saídas	33
z	Vetor de medições da saída	28
diag{•}	Matriz diagonal	53
exp[•]	Função exponencial	32
\mathcal{C}	Matriz de controlabilidade	46
\mathcal{O}	Matriz de observabilidade	46
A^α	Matriz diagonal com os coeficientes de ajuste da média móvel exponencial	33
C	Matriz de saída	33
D^T	Matriz de regressores para múltiplas saídas	30
$Df(\bullet)$	Matriz Jacobiana de f com respeito à \bullet	35
$Dh(\bullet)$	Matriz Jacobiana de h com respeito à \bullet	35
$E[\bullet]$	Esperança matemática	34
F	Matriz de ganho de realimentação	47
$f(\bullet)$	Função não-linear do sistema	35
G	Matriz de ganho da referência	47
$h(\bullet)$	Função não-linear de observação	35
$I_{m \times m}$	Matriz identidade de dimensão $m \times m$	30
K	Ganho de Kalman	29
k_0	Instante de início da estimação	33
L	Matriz diagonal com os fatores de esquecimento para cada saída	31
m	Dimensão dos vetores de saídas e de ruído de medição	33
n	Dimensão do vetor de estados	33
n_θ	Dimensão do vetor de parâmetros	28
n_w	Dimensão do vetor de ruído de processo	33
P	Matriz de covariância da estimação ou do sistema	29
p	Dimensão do vetor de entradas	33
p_{ml}	Polo mais lento	33
Q	Matriz de covariância de ruído de processo	34
R	Matriz de covariância de ruído de medição	34

u	Sinal de entrada	29
Z	Matriz de regressores para o modelo dos parâmetros	38
z	Medição da saída	29

Símbolos gregos

α	Coefficiente de ajuste da média móvel exponencial	32
β	Coefficiente de ajuste para o polo do filtro de média móvel exponencial	33
η	Vetor de inovação	38
ψ_k	Vetor de regressores com dados até $k - 1$	29
θ	Vetor de parâmetros	28
ξ	Vetor de resíduos	28
Γ	Matriz de entrada	33
λ	Fator de esquecimento	30
Φ	Matriz de transição de estado	33
Ψ	Matriz de regressores	28
Y	Matriz de entrada de ruído de processo	33
ξ	Resíduo	29

Símbolos subscritos e sobrescritos

*	Sistema aumentado	36
+	Valor <i>a posteriori</i>	34
–	Valor <i>a priori</i>	34
0	Valor inicial	33
†	Pseudo-inversa	28
•	Valor estimado	28
θ	Referente ou relacionado aos parâmetros	36
F	Sinal filtrado	33
i	Identificador da condição inicial θ_0	53
j	Identificador da matriz P_0	53
k	Instante de tempo	29
NF	Sinal não filtrado	33
x	Referente ou relacionado aos estados	37

Sumário

1	Introdução	18
1.1	Contextualização	18
1.2	Problema de Estimação	21
1.3	Revisão Bibliográfica	22
1.4	Proposta do Trabalho	26
1.5	Objetivo Geral	27
1.6	Apresentação do Manuscrito	27
2	Fundamentação Teórica	28
2.1	Introdução	28
2.2	Mínimos Quadrados	28
2.2.1	Mínimos quadrados recursivo	29
2.2.2	Mínimos quadrados recursivo com fator de esquecimento	30
2.3	Média Móvel	31
2.3.1	Média móvel exponencial	31
2.3.2	Formulação para estimação de parâmetros	32
2.4	Filtro de Kalman	33
2.4.1	Filtro de Kalman estendido	35
2.5	Estimação Simultânea	36
2.5.1	Estimação conjunta	36
2.5.2	Estimação dual	38
3	Estudo de Caso	41
3.1	Introdução	41
3.2	Modelagem Matemática	41
3.2.1	Parâmetros desconhecidos	45
3.2.2	Estabilidade, controlabilidade e observabilidade	45
3.2.3	Definição da lei de controle	47
3.2.4	CrITÉrios de desempenho	49
3.3	Estimação dos estados com FK	50
3.4	Estimação conjunta com FKEC	52
3.4.1	Resultados	53
3.5	Estimação dual com FKD	63
3.5.1	Resultados	64
3.6	Estimação dual com FK e MQR- λ	73
3.6.1	Resultados	73

3.7	Estimação dual com FK e MME	86
3.7.1	Resultados	86
3.8	Resumo dos Resultados	96
4	Conclusões	99
4.1	Contribuições	100
4.2	Trabalhos Futuros	100
	Referências	101

1 Introdução

1.1 Contextualização

As primeiras aplicações de sistemas de controle começaram com os gregos por volta de 300 a.C. com o relógio de água de Ktesibios, que funcionava através do gotejamento à uma taxa constante, controlado por uma boia, para indicar o tempo decorrido a partir do nível de água no recipiente. Logo depois, em 250 a.C., também envolvendo um problema de escopo semelhante, Philon aplicou o controle de nível de líquido para um lampião à óleo. No século XVII, Dennis Papin inventou o primeiro regulador de pressão para controlar sistemas a vapor, semelhante ao de válvulas de panela de pressão, e Conerlis Drebbel propôs um sistema de controle de temperatura mecânico para incubação de ovos (NISE, 2013).

Então, no século XVIII, o primeiro trabalho de controle automático foi construído por James Watt para regular a velocidade de uma máquina a vapor, como apresentado na Figura 1.1. O sistema media a velocidade do eixo de saída e utilizava o movimento das esferas, em função do movimento do eixo, para controlar a válvula e, por tanto, a quantidade de vapor que entrava na máquina (DORF; BISHOP, 2016). No século XIX e na primeira metade do século XX, diversos trabalhos importantes para a área de teoria de controle foram desenvolvidos, tanto para análise de sistemas (estabilidade) quanto para o projeto de controladores (métodos no domínio da frequência e lugar geométrico das raízes) (NISE, 2013).

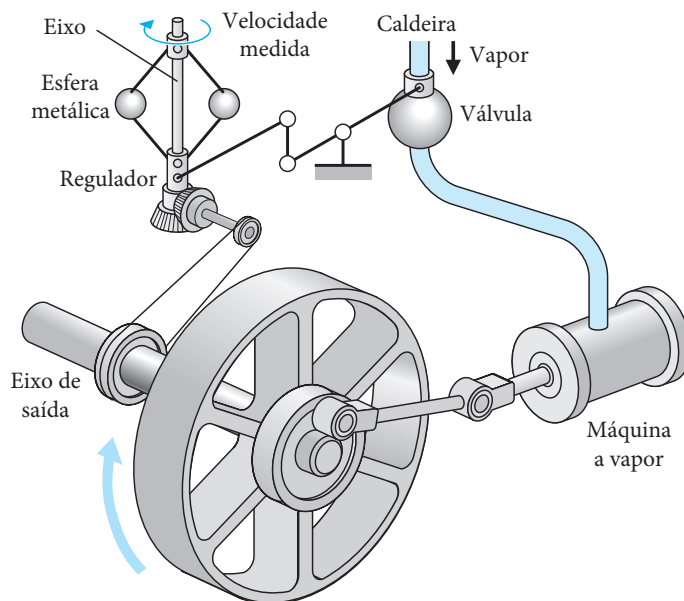


Figura 1.1 – Regulador de esferas de James Watt.

Fonte: Adaptado de Dorf e Bishop (2016, p. 6).

No entanto, a partir da década de 1950, com o aumento crescente da complexidade dos sistemas, a teoria de controle clássica, desenvolvida até então, deu espaço para a teoria de controle moderno. Esta se baseia na análise e na síntese no domínio do tempo com o emprego de variáveis de estado para lidar com problemas de múltiplas entradas e saídas. O esforço empregado a partir de segunda metade do século XX e busca por atender aos requisitos rigorosos em aplicações militares, espaciais e industriais permitiu o avanço de áreas como controle ótimo, controle robusto e controle adaptativo (OGATA, 2010).

Em diversas áreas, como engenharia, economia, física, química e biologia, muitos processos reais podem ser descritos como sistemas no espaço de estados. Se o estado de um sistema é conhecido no presente e todas entradas presentes e futuras são conhecidas, então é possível deduzir o valor de todas as saídas futuras desse mesmo sistema (SIMON, 2006). A abordagem de espaço de estados é baseada na análise da evolução temporal dos estados, que contêm toda a informação relevante para representar a dinâmica de um sistema em um ponto de operação. Em função disso, a partir do conhecimento dos estados é possível realizar tarefas como (SOUTO; ISHIHARA; BORGES, 2011):

- **Projeto de controladores realimentados por estados:** Diversas abordagens utilizam o conhecimento completo dos estados do sistema para projetar a lei de controle via realimentação a partir das características desejadas, como alocação de polos, regulador quadrático linear, rastreador quadrático linear;
- **Monitoramento de processos:** Muitas vezes, os estados têm significado físico e, nesse caso, podem informar condições do sistema em análise. Por exemplo, em um veículo que deve seguir uma trajetória planejada, os estados podem informar posição, velocidade e aceleração. Em uma aplicação industrial, pode ser importante monitorar o nível do líquido em um reservatório ou então a temperatura de uma caldeira;
- **Otimização de processos:** Uma vez que é possível monitorar o sistemas, também é possível melhorá-lo. Por exemplo, tendo o conhecimento da posição e velocidade de um conjunto de aeronaves, é possível calcular o melhor agendamento de chegadas e partidas, e a melhor rota de modo a reduzir o tempo de voo, o tempo de espera e o consumo de combustível;
- **Detecção de falhas e prognósticos:** A detecção de falhas é outra consequência do monitoramento de processos. A partir da análise da evolução temporal dos estados, é possível encontrar padrões que indiquem a presença de falha. Por exemplo, em um sistema no qual um dos estados é a corrente elétrica de um atuador, a queda desta abaixo de um limiar indica que o atuador não está funcionando corretamente.

Apesar disso, em aplicações reais, nem sempre é possível medir os estados do sistema. Um dos motivos é a necessidade de sensores. Seja pelo aumento nos custos ou pela dificuldade

de medir uma grandeza, o uso de sensores para todos os estados pode ser inviável. Outro motivo é a impossibilidade de medir um estado. Assim como alguns estados têm significado físico, outros podem ser somente representações matemáticas mais adequadas ao problema (SOUTO; ISHIHARA; BORGES, 2011). Quando os estados não são diretamente acessíveis, estes podem ser estimados por meio de técnicas adequadas, como o filtro de Kalman, para que as tarefas listadas acima sejam realizáveis.

A qualidade da estimação dos estados depende, dentre outros fatores, da precisão do valor dos parâmetros que representam o sistema. Os parâmetros são grandezas relacionadas às características físicas da planta que podem ser constantes ou variar tanto no tempo quanto com as condições do ambiente (por exemplo, temperatura e pressão). Além disso, podem ser adimensionais ou não. No entanto, assim como no caso dos estados, nem sempre os parâmetros de um sistema são conhecidos ou podem ser medidos diretamente. Nesses casos, a estimação dos parâmetros do sistema permite realizar tarefas como:

- **Identificação do sistema:** A partir da estimação dos parâmetros é possível obter modelos que descrevem o comportamento do sistema, ou seja, descrevem as relações de causa e efeito entre as variáveis de entrada e saída (AGUIRRE, 2015);
- **Ajuste do projeto do controlador:** Usualmente, o projeto de controladores é sensível aos parâmetros do sistema. O correto conhecimento destes permite que o projeto seja mais adequado às características desejadas e que a estimação dos estados seja correta. Além disso, a estimação em tempo real dos parâmetros do sistema é a chave para o controle adaptativo (ASTROM; WITTENMARK, 2008). Nesse tipo de abordagem, o controlador possui parâmetros ajustáveis e um mecanismo de ajuste para se adequar às condições estimadas do modelo;
- **Monitoramento de processos:** Assim como discutido para os estados, os parâmetros do sistema pode ser usados para monitorar o processo. Por exemplo, em um processo térmico, o monitoramento da constante de tempo pode indicar em qual fase, aquecimento ou resfriamento, o processo está. Na exploração de petróleo, o monitoramento da vazão de óleo produzido pode ser interessante para tomada de decisão no controle de produção do processo (ABREU, 2016);
- **Detecção de falhas:** A detecção de falhas é uma consequência do monitoramento dos parâmetros. No exemplo do sistema térmico, a análise da evolução temporal da constante de tempo pode ser utilizada para indicar se a porta de um forno ficou aberta. Em um sistema de transporte, o monitoramento no nível de vibração pode ser utilizado para indicar desgaste nos rolamentos ou desalinhamento do eixo.

Vale destacar que a necessidade do conhecimento dos estados para a estimação dos parâmetros depende do tipo de modelo adotado para representar o sistema. Usualmente,

para estimar um, assume-se conhecimento completo em relação ao outro. Entretanto, em aplicações reais, tanto estados quanto parâmetros podem ser desconhecidos. Nesses casos, o problema passa a ser a estimação simultânea de estados e parâmetros.

Do ponto de vista prático, a aplicação da estimação simultânea de estados e parâmetros é um desafio em função da necessidade de lidar com relações não-lineares entre estados e parâmetros, sensibilidade do estimador e problemas de convergência para alcançar a robustez adequada (NELSON, L.; STEAR, 1976). Além disso, o estudo e aplicação de abordagens adaptativas dentro do contexto da estimação simultânea é interessante não só pelos resultados, os quais, usualmente, apresentam melhora no desempenho (DAI; WEI; SUN, 2009), mas também pela variedade de cenários considerados, como incertezas no modelo e nas características estatísticas do ruído (DAS et al., 2014), que estão presentes em diversas aplicações reais de sistemas de controle.

1.2 Problema de Estimação

Com base nesse contexto, esta seção busca definir o problema de estimação dentro do trabalho a ser abordado. A teoria de estimação foi desenvolvida para que, a partir de um sinal medido ou observado da planta, seja possível estimar outro sinal que não pode ser medido diretamente ou está corrompido por ruído (SOUTO; ISHIHARA; BORGES, 2011). A Figura 1.2 ilustra o problema de estimação por meio de um diagrama de blocos, no qual um sinal x é estimado (ou seja, \hat{x} , em que "•" indica valores estimados) a partir de outros dois sinais u e y que são, respectivamente, a entrada e a saída da planta.

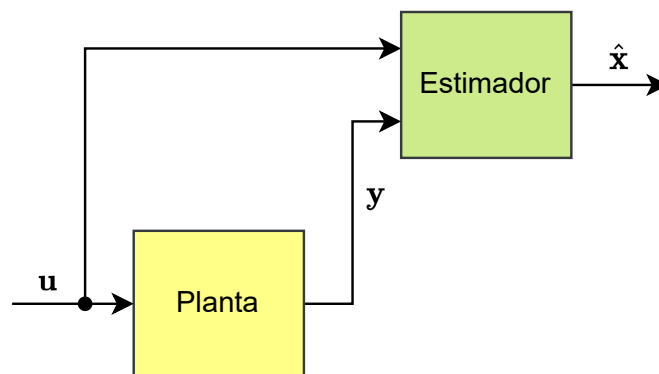


Figura 1.2 – Diagrama de blocos do problema de estimação.

Fonte: Produzido pelo autor.

Para o problema de estimação simultânea de estados e parâmetros, a literatura apresenta duas abordagens principais, estimação dual e estimação conjunta. Nesta, ambos são estimados em uma única etapa por meio de um vetor de estados aumentado que inclui os parâmetros. Enquanto isso, naquela, dois métodos de estimação são utilizados de forma concorrente, um para estados e outro para parâmetros. Na próxima seção, a aplicação desses

métodos na literatura recente será apresentada e, ao longo deste trabalho, os detalhes da implementação das duas abordagens serão discutidos.

1.3 Revisão Bibliográfica

O objetivo desta seção é descrever diferentes estratégias encontradas na literatura para estimação de estados e parâmetros aplicadas em sistemas lineares e não-lineares. A revisão bibliográfica conduzida neste trabalho focou nos métodos de estimação com o filtro de Kalman e nos métodos recursivos¹. Os problemas de estimação são tratados, inicialmente, para os sistemas lineares, com ênfase em dois dos principais métodos presentes na literatura, a estimação dual e a estimação conjunta. Em seguida, a análise é expandida para os sistemas não-lineares, com a mesma abordagem adotada na etapa anterior.

No contexto de sistemas lineares com parâmetros variantes no tempo, [Tavares, Erazo-Costa e Eras-Herrera \(2021\)](#) investigam a sincronização e dessincronização da imagética motora por meio da estimação dual. Inicialmente, os estados são estimados via filtro de Kalman (FK) e, depois, os parâmetros são estimados por meio do método de mínimos quadrados recursivo (MQR). Por outro lado, [Chenran Li et al. \(2021\)](#) propõem uma estimação dual baseada no filtro de Kalman estendido (FKED²) para controle baseado em modelo de um veículo autônomo. Quatro métodos para o cálculo da matriz Jacobiana dos parâmetros são apresentados e discutidos para demonstrar o benefício da abordagem em relação ao modelo com parâmetros fixos. A proposta também foi testada em um veículo real com estimação e controle em malha fechada.

Ainda em sistemas lineares, [Zwerger e Mercorelli \(2020\)](#) apresentam o problema da identificação das indutâncias de eixo direto e de quadratura de um motor síncrono de ímã permanente por meio da estimação dual com o filtro de Kalman (FKD), um para estados e outro para parâmetros. Os trabalhos realizados por [Gajula, Yao e Herrera \(2020\)](#) e [Gajula, Marepalli et al. \(2022\)](#) abordam estratégias para detectar e localizar falha de arco elétrico em série em *microgrids* DC (do inglês, *direct current*). As tensões nodais e correntes de injeção são estimadas como estados pelo método de mínimos quadrados (MQ), ou sua versão recursiva (MQR), e, a partir desses valores, as admitâncias das linhas são estimadas com um filtro de Kalman adaptativo (FKA) para indicar a falha em caso de mudança brusca.

Alternativamente aos métodos apresentados até então, [Alyakhni, Al-Mohamad e Hoblos \(2019\)](#) exploram a estimação conjunta da degradação de transistores MOSFET em

¹ Assim, como definido por [Aguirre \(2015\)](#), este trabalho faz distinção entre os termos estimação em tempo real (*on-line*, em inglês) e estimação recursiva. Enquanto este diz respeito ao tipo de algoritmo, no qual os dados são processados de forma sequencial, aquele diz respeito à velocidade do processamento, a qual é suficientemente rápida para influenciar o processo em questão.

² Neste trabalho, quando o método de estimação aplicar a abordagem dual com o mesmo estimador para estados e parâmetros, a convenção utilizada será adicionar um "D" ao final da sigla. Se os estimadores forem diferentes, estes serão explicitados.

conversores DC-DC. Para isso, a resistência entre o dreno e a fonte do transistor no modo ativo foi estimada conjuntamente por meio de um filtro de Kalman estendido (FKEC³) a partir da expansão do vetor de estados de um modelo linear do conversor. Para um problema relacionado, [Candan e Ankarali \(2020\)](#) propõem a aplicação do FKEC para controle e estimação dos estados (corrente no indutor e tensão no capacitor) e da resistência de uma carga na saída de um conversor DC-DC *buck* para dois modos de operação, um linear e outro não.

[Xiaohu Zhang et al. \(2021\)](#) apresentam a estimação conjunta da velocidade e da perturbação de um motor linear síncrono de ímã permanente por um filtro de Kalman para, posteriormente, estimar parâmetros do motor. Apesar da perturbação apresentar uma não linearidade (função sinal), o modelo do motor e os parâmetros estimados apresentam expressões lineares. Para identificação dos parâmetros de um sistema, [Akgün et al. \(2019\)](#) comparam quatro métodos de modelagem (MQ, MQR, rede neural NARX - *Nonlinear Auto-Regressive Exogenous* e FKEC) na função de transferência de segunda ordem de um motor DC. Todos os métodos convergiram para os parâmetros corretos, mas o FKEC apresentou o menor erro quadrático médio, seguido pelo MQR, e o menor tempo de convergência. O desempenho dos métodos também foi testado em malhada fechada com um controlador PI, em que o FKEC também apresentou o melhor desempenho.

Para comparar as estimções dual e conjunta, [Al-Mohamad, Hoblos e Puig \(2019\)](#) investigam a degradação de um conversor DC-DC *boost* linear. Para estimação dual, dois filtros de Kalman são utilizados para estimar os estados (nos modos ativo e inativo) e um terceiro é utilizado para estimar a resistência equivalente em série (ESR - *Equivalent Series Resistance*) na saída. O objetivo com os dois primeiros filtros é ser capaz de refletir a ondulação na saída. Para estimação conjunta, é utilizado um FKEC para estimar os valores médios dos estados. Apesar da estimação dual conservar a característica do sinal, a estimação conjunta, com os valores médios da saída, apresentou melhor desempenho.

[Yu et al. \(2022\)](#) comparam a estimação conjunta e a estimação dual em um oscilador ótico paramétrico (OPO - *Optical Parametric Oscillator*) para estimar estados e potência da onda de entrada (*pump*). Para aplicar as técnicas clássicas de filtragem, o modelo quântico do OPO foi adaptado por um modelo Gaussiano linear equivalente. Na estimação dual, são utilizados dois filtros de Kalman, ou seja, FKD. Na estimação conjunta, é utilizado um filtro de Kalman estendido com vetor de estados aumentado, ou seja, FKEC. Em comparação ao modelo com parâmetro fixo, as duas abordagens obtiveram resultados melhores na estimação de forma consistente e, na média, a estimação dual foi melhor que a estimação conjunta.

[Yu et al. \(2022\)](#) ainda comentam que, baseado nos trabalhos existentes sobre estimação de estados e parâmetros, é esperado que a estimação conjunta com o FKEC seja mais econômica que a estimação dual, no entanto pode sofrer com problemas de divergência. Em

³ Neste trabalho, quando o método de estimação aplicar a abordagem conjunta, a convenção utilizada será adicionar um "C" ao final da sigla para diferenciá-la da aplicação convencional em sistemas não-lineares.

função das aproximações da linearização, o FKEC é mais sensível a fatores que aumentam o erro na estimação. O problema da divergência no método da estimação conjunta também é abordado brevemente por [Tavares, Erazo-Costa e Eras-Herrera \(2021\)](#), que apontam o método da estimação dual como uma possível solução por meio do desacoplamento dos estados e parâmetros em dois sistemas.

No contexto de sistemas não-lineares, [Qingtian Li et al. \(2021\)](#) propõem uma estratégia baseada na estimação dual dos estados de carga e de saúde da bateria com o filtro de Kalman estendido (FKE) e da identificação dos parâmetros (resistores e capacitores) com o MQR. Os dois processos, identificação e estimação, são feitos para três temperaturas diferentes ao longo de diferentes níveis de carga. Trabalhos similares na área de estimação de estado de carga e parâmetros em baterias foram realizados por [Jianfeng Wang e Zhaozhen Zhang \(2020\)](#) e [Xu Wang et al. \(2021\)](#). Neste, o MQR também foi utilizado para estimar os parâmetros da bateria, enquanto, naquele, o método utilizado foi a versão adaptativa do MQR, que insere um fator de esquecimento adaptativo.

[Yifang Wang et al. \(2021\)](#) exploram a estimação dual com o filtro de Kalman *unscented* (FKUD) em veículos de superfície não tripulados (USVs - *Unmanned Surface Vehicles*). No modelo não-linear do veículo, os estados são a posição e velocidade angular no sistema de coordenadas geodésico e três dos movimentos do barco: avanço, deriva e guinada. Enquanto isso, os parâmetros são os coeficientes hidrodinâmicos inerciais. Por outro lado, [Singh, Pal e Jain \(2021\)](#) investigam para motores por ignição por centelha a estimação dual com filtro de Kalman *unscented* (FKU), para os estados, e MQR com fator de esquecimento, para os parâmetros. A abordagem proposta apresentou melhor desempenho que a estimação conjunta e a estimação dual sequencial, ambas com o FKU.

Ainda no problema de estimação do estado de carga e parâmetros em baterias, mas por meio de uma abordagem conjunta, [Beelen, Bergveld e Donkers \(2021\)](#) propõem um filtro de Kalman estendido com um único parâmetro para ajuste. Para tanto, o algoritmo clássico do FK foi adaptado para o caso em que os ruídos do sistema são correlacionados. Além disso, um fator esquecimento foi inserido para permitir adaptabilidade e os ruídos foram identificados por dois métodos: entrada-saída e ARX (*Auto-Regressive Exogenous model*). Para as condições estudadas, o filtro proposto apresentou desempenho melhor que a estimação dual com FKE e MQR, e semelhante à estimação conjunta com o FKE padrão.

No cenário de estimação conjunta com o filtro de Kalman *unscented* (FKUC), [Biswas et al. \(2018\)](#) analisam o problema da estimação simultânea (estado de carga e parâmetros) em uma bateria de íon de lítio com modelo de histerese de um estado. Esse modelo de histerese busca capturar as variações graduais da tensão de histerese (diferença entre as curvas de carga e descarga) e da taxa de decaimento para diferentes estados de carga. Enquanto isso, [Onat \(2019\)](#) propõe uma modificação do FKUC para problemas nos quais é possível obter uma transformação linear entre a saída e o erro dos parâmetros. No exemplo abordado, o modelo

modificado apresentou desempenho melhor que o FKUC tradicional, cujo desempenho foi melhor que FKUD em função da covariância cruzada entre estados e parâmetros.

No contexto de estimação com adaptação do FK, [Wu et al. \(2019\)](#) exploram a estimação dual para o problema de estado de carga em bateria com o FKE adaptativo (FKEA) para os estados e o FK para os parâmetros. Nas três condições de uso avaliadas, a estimação dual com adaptação da matriz de covariância de ruído do processo obteve desempenho melhor que o FKE e FKEA simples. [Yalong et al. \(2022\)](#) propõem um FKU adaptativo (FKUA) para estimação dual no problema de estimação de estado de carga em baterias. Assim como no trabalho anterior, o método aplicado consiste em um FK para estimar o parâmetros e um FKUA para estimar o estado de carga. Na simulação realizada, o modelo adaptativo obteve desempenho melhor que o modelo tradicional com FKU.

Alternativamente, [Zerdali \(2020\)](#) investiga o desempenho do FKEA na estimação conjunta (FKEAC) para o problema de estimação de estados e parâmetros de um motor de indução. Três abordagens adaptativas foram avaliadas e comparadas com o FKEC, duas com fator de esquecimento e uma com ajuste da matriz de covariância do processo. De maneira geral, os métodos adaptativos apresentaram melhor desempenho que o FKEC, com destaque para os dois com fator de esquecimento. Enquanto isso, [Shen et al. \(2022\)](#) expande o vetor de estados para estimar conjuntamente seis estados e nove parâmetros de um USV por meio de um FKUA (FKUAC). A abordagem proposta foi comparada com a versão tradicional do FKUC e, na média, foi melhor para a maioria dos parâmetros.

No entanto, das aplicações encontradas na literatura recente e apresentadas nesta seção, poucas investigaram diretamente o controle de sistemas em tempo real a partir do conhecimento dos valores estimados. Isso se mostra como uma área a ser explorada dentro da estimação simultânea. Além disso, daquelas que abordaram o controle em malha fechada, um número ainda menor discutiu o impacto da estimação no controle das saídas, nos esforços dos atuadores, no projeto do próprio controlador e até na sensibilidade de cada abordagem. Ao desconsiderar esses fatores, cria-se uma lacuna entre o desenvolvimento do conhecimento e sua possibilidade de aplicação em sistemas reais, porque ignora fatores que estarão presentes nestes e que podem ser relevantes. Essa é outra área que pode ser explorada no contexto de estimação simultânea.

Outro ponto observado é que os métodos de estimação dos parâmetros se concentram no FK e no MQR, os quais apresentam diferentes parâmetros a serem ajustados, como a covariância inicial e as matrizes de covariância dos ruídos, no caso do FK. Notam-se poucos comentários, tanto para estratégia de seleção desses valores quanto para as dificuldades enfrentadas durante o ajuste. Em contrapartida, abordagens de mais fácil implementação e entendimento, como as médias móveis, não são apresentadas. De fato, até onde foi possível procurar na literatura, não foram encontradas formulações de médias móveis para esse fim. Assim como no caso do impacto no controle, ignorar as limitações de implementação do

método também o distancia da aplicação em sistemas reais. Uma proposta para abordar esses três pontos será discutida de forma mais aprofundada na próxima seção.

1.4 Proposta do Trabalho

Conforme apresentado nas seções anteriores, a aplicação de técnicas adaptativas é interessante em diversos problemas em função das vantagens de robustez e desempenho apresentadas frente às técnicas não-adaptativas, tanto no controle quanto na estimação. [Partovibakhsh e Liu \(2015\)](#), por exemplo, abordam essa discussão no problema de robôs móveis autônomos e relatam a dificuldade de medir diretamente parâmetros relevantes e com comportamento complexo, e de conhecer com exatidão o ruído no sistema. A escolha equivocada desses fatores pode levar, inclusive, à divergência e instabilidade.

No entanto, a literatura carece de investigações do impacto da estimação simultânea no controle em malha fechada de sistemas, tanto lineares quanto não-lineares. Com o intuito de desenvolver ou explorar estratégias com potencial de aplicação em problemas reais, por exemplo, na indústria ou na aviação, faz-se necessário levar em conta aspectos como robustez, dificuldade de implementação e desempenho de controle em malha fechada. Para tanto, uma abordagem possível é investigar o efeito das estratégias de estimação simultânea de forma quantitativa por meio de índices de controle, medidas de erro e magnitude/variação dos esforços dos atuadores. Com isso, pode-se mensurar em quais cenários as estratégias se mostram mais adequadas ou a implementação destas é viável.

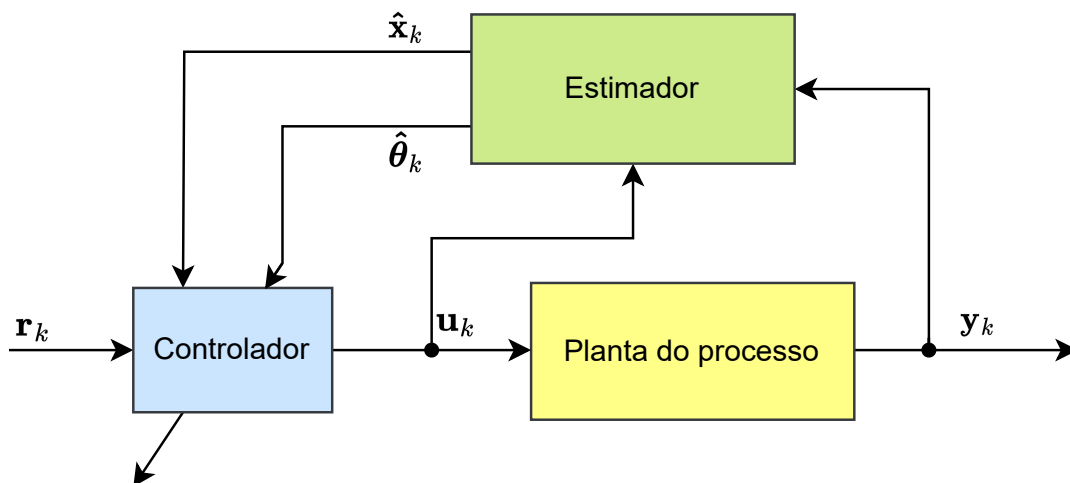


Figura 1.3 – Diagrama de blocos do problema proposto.

Fonte: Produzido pelo autor.

Com base nesse contexto, este trabalho propõe desenvolver e explorar o impacto de uma nova abordagem de estimação simultânea de estados e parâmetros para sistemas lineares em malha fechada a partir dos filtros de Kalman e de média móvel. Mais precisamente, busca-se comparar a abordagem desenvolvida com as estratégias descritas na literatura por meio de

índices de controle nas saídas e entradas do sistema e de critérios de desempenho de precisão. Para tanto, assume-se cenários nos quais as propriedades estatísticas dos ruídos presentes no sistema são amplamente conhecidas. O diagrama de blocos do problema proposto é apresentado na Figura 1.3. Primeiro, os estados e alguns parâmetros do sistema são estimados por um dos métodos de estimação (bloco verde) a partir da ação de controle e da saída do sistema (bloco amarelo). Depois, os valores estimados podem ser utilizados para ajustar o controlador (bloco azul) e calcular a nova ação de controle.

1.5 Objetivo Geral

Este trabalho tem por objetivo central desenvolver uma nova abordagem de estimação simultânea de estados e parâmetros para sistemas lineares em malha fechada a partir do filtro de Kalman e do filtro de média móvel. Para isso, é necessário:

1. Descrever os conceitos teóricos relacionados à estimação simultânea, ao filtro de Kalman e às estratégias de estimação dos parâmetros;
2. Desenvolver a estratégia de estimação de parâmetros com o filtro de média móvel e sua integração com a estimação dual;
3. Aplicar os conceitos desenvolvidos e as estratégias presentes na literatura em um estudo de caso com um sistema linear;
4. Investigar os fatores que influenciam cada abordagem e comparar os resultados obtidos por meio de critérios de desempenho de controle e de precisão;

1.6 Apresentação do Manuscrito

Neste trabalho, o Capítulo 2 apresenta os principais conceitos teóricos sobre os métodos de estimação recursiva e filtro de Kalman com o objetivo de abordar, posteriormente, os conceitos das técnicas de estimação simultânea. Este capítulo também apresenta a formulação proposta por este trabalho do filtro de média móvel para estimação recursiva de parâmetros. Depois, o Capítulo 3 implementa as abordagens descritas no capítulo anterior em um estudo de caso com um sistema linear em malha fechada. Para cada abordagem estudada, são descritos a formulação matemática do estimador, a metodologia adotada e os resultados obtidos. O final deste capítulo apresenta um resumo dos resultados individuais e uma discussão sobre os resultados gerais. Por fim, o Capítulo 4 apresenta as considerações finais sobre o trabalho, os objetivos alcançados, as contribuições realizadas e as propostas para trabalhos futuros.

2 Fundamentação Teórica

2.1 Introdução

Este capítulo é dedicado à apresentação dos principais conceitos teóricos aplicados neste trabalho para estimação simultânea de estados e parâmetros em malha fechada. Para tanto, a Seção 2.2 apresenta os conceitos teóricos presentes no método de mínimos quadrados e sua versão recursiva. Depois, a Seção 2.3 apresenta o filtro de média móvel e a formulação proposta neste trabalho para a estimação de parâmetros com esse tipo de filtro. Então, a Seção 2.4 apresenta os conceitos teóricos relacionados com o filtro de Kalman e suas variações não adaptativas tratadas neste trabalho. Por fim, a Seção 2.5 apresenta um breve histórico, os conceitos teóricos utilizados e algumas variações das estimações conjunta e dual.

2.2 Mínimos Quadrados

O algoritmo de mínimos quadrados (MQ) é uma das técnicas de estimação mais conhecidas e aplicadas em diversas áreas de ciência e tecnologia, cuja ideia original básica pode ser encontrada nos trabalhos de Gauss sobre o estudo da astronomia (AGUIRRE, 2015). Na sua forma matricial, a ideia geral do método consiste em escrever a expressão do sistema de modo que esta satisfaça o modelo de regressão linear

$$\mathbf{z} = \Psi\boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\xi}, \quad (2.1)$$

em que $\mathbf{z} = [z_k, z_{k-1}, \dots, z_{k-N+1}]^T \in \mathbb{R}^N$ é o vetor de medições da saída, $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^{n_\theta}$ é o vetor de parâmetros de ajuste (valores a serem estimados), $\Psi = [\boldsymbol{\psi}_{k-1}^T; \boldsymbol{\psi}_{k-2}^T; \dots; \boldsymbol{\psi}_{k-N}^T] \in \mathbb{R}^{N \times n_\theta}$ é a matriz de regressores e $\boldsymbol{\xi} = [\xi_k, \xi_{k-1}, \dots, \xi_{k-N+1}]^T \in \mathbb{R}^N$ é o vetor de resíduos ou erro de modelagem. Para estimação em batelada¹ (assume-se que todos os dados de entrada e saída são conhecidos *a priori*), o vetor de parâmetros que minimiza o quadrado do vetor de resíduos é dado por

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\theta}} &= [\Psi^T \Psi]^{-1} \Psi^T \mathbf{z}; \\ \hat{\boldsymbol{\theta}} &= \Psi^\dagger \mathbf{z}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

em que $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ é o vetor estimado e Ψ^\dagger é denominada matriz pseudo-inversa.

¹ Assim como discutido para os termos estimação *on-line* e estimação recursiva, este trabalho também segue a distinção feita por Aguirre (2015) para os termos estimação *off-line* e estimação em batelada. Enquanto este diz respeito ao tipo de algoritmo, no qual a massa de dados é processada toda de uma vez, aquele diz respeito aos algoritmos que não são executados em tempo real, ou seja, àqueles que não podem influenciar o processo em análise.

2.2.1 Mínimos quadrados recursivo

No algoritmo clássico de mínimos quadrados, assume-se a hipótese de conhecimento de todos os dados de entrada e saída para serem processados em batelada, no entanto nem sempre é possível seguir essa abordagem. Quando os dados são disponibilizados sequencialmente e devem ser processados à medida que são fornecidos, há a necessidade de se utilizar um estimador recursivo. Nesse caso, a estimativa atual é obtida por meio da correção de uma estimativa anterior. Agora, o modelo de regressão linear considerado é da forma

$$z_k = \boldsymbol{\psi}_k^T \boldsymbol{\theta}_k + \xi_k, \quad (2.3)$$

em que k é o índice de tempo, z_k é a medição da saída, $\boldsymbol{\psi}_k \in \mathbb{R}^{n_\theta}$ é o vetor de regressores de dimensão n_θ com informação até $k - 1$ da forma

$$\boldsymbol{\psi}_k = \begin{bmatrix} z_{k-1} & \cdots & z_{k-n_z} & u_{k-1} & \cdots & u_{k-n_u} \end{bmatrix}^T \quad (2.4)$$

em que u_k é o sinal de entrada, n_z e n_u representam as quantidades máximas de medições da saída e de entradas passadas, e ξ_k é o resíduo. Como o vetor de parâmetros é fixo, as notações $\boldsymbol{\theta}$ e $\boldsymbol{\theta}_k$ são equivalentes, mas esta será utilizada nos casos recursivos. A versão recursiva do algoritmo de mínimos quadrados, denotado neste trabalho de mínimos quadrados recursivo (MQR²), é descrita como

$$\begin{cases} K_k = \frac{P_{k-1} \boldsymbol{\psi}_k}{\boldsymbol{\psi}_k^T P_{k-1} \boldsymbol{\psi}_k + 1}; \\ \hat{\boldsymbol{\theta}}_k = \hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1} + K_k \left[z_k - \boldsymbol{\psi}_k^T \hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1} \right]; \\ P_k = P_{k-1} - K_k \boldsymbol{\psi}_k^T P_{k-1}, \end{cases} \quad (2.5)$$

na qual K_k , também conhecido como ganho de Kalman, é o ganho da correção na estimativa e P_k é a matriz de covariância da estimação. A parcela entre colchetes na expressão de correção do valor estimado é chamada de inovação (AGUIRRE, 2015). Dessa forma, o algoritmo MQR consiste em três etapas: cálculo do ganho K , correção da estimativa a partir da inovação e atualização da matriz de covariância. Apesar disso, o algoritmo MQR apresentado até então é projetado para um sistema com uma única saída. Para o caso em que existem múltiplas saídas, o sistema em análise é da forma

$$\begin{bmatrix} z_{1,k} \\ \vdots \\ z_{m,k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11,k} & \cdots & d_{1n,k} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ d_{m1,k} & \cdots & d_{mn,k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{1,k} \\ \vdots \\ \theta_{m,k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \xi_{1,k} \\ \vdots \\ \xi_{m,k} \end{bmatrix}; \quad (2.6)$$

$$\mathbf{z}_k = D_k^T \boldsymbol{\theta}_k + \boldsymbol{\xi}_k,$$

² Aguirre (2015) apresenta o mesmo algoritmo com o nome estimador recursivo de mínimos quadrados.

em que D_k^T é a matriz com regressores para cada uma das saídas e \mathbf{z}_k é o vetor de saídas. Nesse caso, o algoritmo do MQR é dado por

$$\begin{cases} K_k = P_{k-1} \boldsymbol{\psi}_k [D_k^T P_{k-1} D_k + I_{m \times m}]^{-1}; \\ \hat{\boldsymbol{\theta}}_k = \hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1} + K_k [\mathbf{z}_k - D_k^T \hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1}]; \\ P_k = P_{k-1} - K_k \boldsymbol{\psi}_k^T P_{k-1}, \end{cases} \quad (2.7)$$

em que $I_{m \times m}$ denota da matriz identidade de tamanho $m \times m$.

2.2.2 Mínimos quadrados recursivo com fator de esquecimento

O algoritmo MQR considera que todos os dados, independente do momento de chegada, possuem a mesma relevância. Em sistemas variantes no tempo, esse comportamento não é adequado, uma vez que as observações mais recentes (ou seja, dados mais atualizados) precisam ter mais influência na estimação. No algoritmo do MQR, essa dinâmica pode ser inserida por meio de pesos com um fator de esquecimento λ da forma

$$\begin{cases} w_i(k) = 1; \\ w_i(k) = \lambda w_i(k-1), \quad i < k, \end{cases} \quad (2.8)$$

em que λ recebe, na prática, valores na faixa $0,95 \leq \lambda \leq 0,99$ (AGUIRRE, 2015). Para $\lambda = 1$, não há esquecimento e, para valores pequenos (mesmo dentro da faixa), pode não ter convergência. O algoritmo do estimador de mínimos quadrados recursivo com fator de esquecimento (MQR- λ) é definido por

$$\begin{cases} K_k = \frac{P_{k-1} \boldsymbol{\psi}_k}{\boldsymbol{\psi}_k^T P_{k-1} \boldsymbol{\psi}_k + \lambda}; \\ \hat{\boldsymbol{\theta}}_k = \hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1} + K_k [\mathbf{z}_k - \boldsymbol{\psi}_k^T \hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1}]; \\ P_k = \frac{1}{\lambda} [P_{k-1} - K_k \boldsymbol{\psi}_k^T P_{k-1}], \end{cases} \quad (2.9)$$

no qual as mudanças feitas em relação às equações 2.5 aparecem nas primeira e terceira expressões, com o crescimento do fator de esquecimento. Na literatura, ainda é possível encontrar diferentes abordagens nas quais o valor do fator de esquecimento é variável, como apresentado no capítulo anterior. De forma análoga ao apresentado na subseção anterior, para o caso em que o sistema possui múltiplas saídas, ou seja, pode ser escrito como

$$\mathbf{z}_k = D_k^T \boldsymbol{\theta}_k + \boldsymbol{\xi}_k, \quad (2.10)$$

o algoritmo do MQR- λ é dado por

$$\begin{cases} K_k = P_{k-1} \boldsymbol{\psi}_k [D_k^T P_{k-1} D_k + L]^{-1}; \\ \hat{\boldsymbol{\theta}}_k = \hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1} + K_k [\mathbf{z}_k - D_k^T \hat{\boldsymbol{\theta}}_{k-1}]; \\ P_k = [P_{k-1} - K_k \boldsymbol{\psi}_k^T P_{k-1}] L^{-1}, \end{cases} \quad (2.11)$$

em que L é uma matriz diagonal com os fatores de esquecimento λ para cada saída.

2.3 Média Móvel

Em processamento de sinais digitais, a média móvel é um tipo de filtro discreto de primeira ordem amplamente utilizado, no qual a saída y_k para um instante k qualquer, por exemplo k_0 , é dada pela média dos valores de um sinal u_k na vizinhança de k_0 (OPPENHEIM; WILLSKY, 2010). Para o cálculo, podem ser considerados tanto pontos à esquerda, valores menores que k_0 , quanto pontos à direita, valores maiores que k_0 , de modo que uma representação geral do filtro de média móvel é dada por

$$y_k = \frac{1}{N + M + 1} \sum_{i=-N}^M u_{k-i}, \quad (2.12)$$

em que M define a quantidade de pontos à esquerda e N a quantidade à direita, então a média vai de u_{k-M} até u_{k+N} . A ideia básica desse filtro é que, com a média dos valores calculada localmente, componentes de alta frequência de u_k terão a média calculada e as variações de menor frequência serão mantidas, correspondendo à suavização ou à filtragem passa-baixas do sinal original (OPPENHEIM; WILLSKY, 2010). Em função desse comportamento e da simplicidade de implementação e entendimento, as médias móveis foram amplamente estudadas e aplicadas em diversos modelos de análise estatística, como análise de tendência no mercado financeiro.

Além da estrutura já apresentada, é possível manipular algebricamente a equação 2.12 para escrevê-la na forma

$$y_k = \frac{1}{N + M + 1} (u_{k+N} - u_{k-M-1}) + y_{k-1}, \quad (2.13)$$

denominada forma recursiva (SMITH, 2013). Sabendo o valor da primeira saída y_0 , o cálculo dos valores futuros envolve apenas uma subtração, uma multiplicação e uma adição, o que simplifica ainda mais a implementação do filtro. Quando não é possível acessar valores futuros do sinal, N é igual a zero e a forma recursiva do filtro de média móvel é dada por

$$y_k = \frac{1}{M + 1} (u_k - u_{k-M-1}) + y_{k-1}. \quad (2.14)$$

2.3.1 Média móvel exponencial

As formulações apresentadas até então atribuem o mesmo peso para todas as medidas de u_k , mas, assim como discutido no caso do MQR- λ (ver Subseção 2.2.2), isso pode não ser adequado uma vez que dados mais novos podem ter mais relevância. A literatura apresenta diversas técnicas para selecionar os pesos na média móvel, dessas se destaca a média móvel exponencial (MME) (BROWN, 1956), que, para o mesmo nível de ruído, apresenta maior

sensibilidade a novas informações quando comparada com a média móvel simples. Em sua forma recursiva, a MME pode ser expressa como

$$\begin{cases} y_0 = u_0; \\ y_k = \alpha u_k + (1 - \alpha)y_{k-1}, \quad 0 < \alpha < 1, \quad k > 0, \end{cases} \quad (2.15)$$

em que α é um coeficiente que regula a taxa de assimilação de novas informações e, por consequência, o nível de suavização da saída. Assim como existem diversas variações para a média móvel, também existe várias formas de se calcular o fator α , desde valores fixos com expressões simples (LIMAVERDE FILHO et al., 2022) até valores variáveis com expressões complexas (FORTALEZA et al., 2022). Dado que a MME pode ser interpretada como um filtro discreto de primeira ordem, esta pode ser escrita como

$$\begin{aligned} Y(z) &= U(z)\alpha + (1 - \alpha)Y(z)z^{-1}; \\ Y(z)(1 - (1 - \alpha)z^{-1}) &= U(z)\alpha; \\ \frac{Y(z)}{U(z)} &= \frac{\alpha}{1 - (1 - \alpha)z^{-1}}, \end{aligned} \quad (2.16)$$

em que o polo da função de transferência é dado por $(1 - \alpha)$. A MME também pode ser projetada a partir de um filtro contínuo de primeira ordem, visto que, considerando um período de amostragem T , o polo discreto se relaciona com o polo contínuo por (OGATA, 1995):

$$p_{fd} = \exp [T p_{fc}], \quad (2.17)$$

em que $p_{fd} = (1 - \alpha)$, p_{fc} é o polo contínuo e $\exp[\cdot]$ define a função exponencial. Agora, p_{fc} pode ser escolhido para que o filtro tenha o comportamento desejado.

2.3.2 Formulação para estimação de parâmetros

Além da aplicação como filtro passa-baixas, as médias móveis são comumente utilizadas na área de identificação para representar o comportamento de sistemas discretos. Aguirre (2015), por exemplo, apresenta algumas dessas representações: ARMA, ARMAX, ARIMA e NARMAX, nas quais o termo MA da sigla denota média móvel (do inglês, *moving average*). Os trabalhos presentes na literatura se concentram, principalmente, na identificação dos parâmetros do modelo (PATIL, N.; DATAR; PATIL, D. R., 2018) e na sua aplicação para análise ou controle de sistemas (SIMORGH; RAZMINIA; SHIRYAEV, 2020). Até o momento de escrita deste trabalho, não foram encontradas aplicações das médias móveis como método para estimação de parâmetros desconhecidos.

Nesse contexto, motivado pela simplicidade de uso e pelo bom desempenho na estimação de sinais constantes ou cuja variação é lenta, este trabalho propõe uma formulação da MME para estimação dos parâmetros desconhecidos de um modelo discreto. Para tanto,

assume-se a representação dada pela equação 2.6 para escrever o vetor de parâmetros que minimiza o quadrado do vetor de resíduos no instante k como

$$\begin{aligned}\hat{\theta}_k &= [D_k D_k^T]^{-1} D_k \mathbf{z}_k; \\ \hat{\theta}_k &= D_k^\dagger \mathbf{z}_k,\end{aligned}\tag{2.18}$$

em que a condição de aplicação é a existência de D^\dagger . O vetor calculado pode ser denotado por $\hat{\theta}_k$ não filtrado ($\hat{\theta}_{k,NF}$) e representa a etapa de estimação dos parâmetros no instante k . Então, considerando esse vetor como a entrada da MME, a etapa de correção da estimativa pode ser expressa por

$$\begin{cases} A^\alpha = \text{diag}\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m\}, & A^\alpha \in \mathbb{R}^{m \times m}; \\ \hat{\theta}_{k,F} = \theta_0, & k \leq k_0; \\ \hat{\theta}_{k,F} = A^\alpha \hat{\theta}_{k,NF} + (I_{m \times m} - A^\alpha) \hat{\theta}_{k-1,F}, & k > k_0,\end{cases}\tag{2.19}$$

na qual k_0 é o instante no qual a MME começa a estimar os parâmetros, θ_0 é o chute inicial para os parâmetros, $\hat{\theta}_{k,F}$ é o vetor estimado filtrado e a matriz A^α é uma matriz diagonal com os coeficientes α de cada um dos parâmetros desconhecidos.

Se o objetivo é explorar a estimação lenta dos parâmetros, o valor do polos p_{fc} , que define o comportamento do filtro, pode ser escolhido levando em conta o sistema em análise. Denotando o polo mais lento do sistema em malha fechada como p_{ml} , uma possibilidade de escolha é definir o polo do filtro como uma fração mais lento que o polo do sistema, ou seja,

$$p_{fc} = \frac{p_{ml}}{\beta},\tag{2.20}$$

em que o parâmetro β é um coeficiente a ser ajustado. Dado que, para um vetor de estados de tamanho $m \times 1$ existem m parâmetros desconhecidos, é preciso selecionar m coeficientes β , um para cada parâmetro desconhecido. Para outros objetivos, diferentes estratégias podem ser exploradas para a seleção de p_{fc} , inclusive de modo que este seja mais rápido que o sistema. No entanto, cabe destacar que quanto maior o valor de α , mais sensível a MME se torna às novas informações, o que, na presença de ruído, resulta em maiores oscilações nos valores estimados.

2.4 Filtro de Kalman

O FK é um estimador recursivo ótimo desenvolvido por Kalman (1960) e amplamente aplicado na estimação de estados em sistemas lineares em diferentes áreas. Para sua aplicação, assume-se que o sistema em análise pode ser escrito pelo seguinte modelo linear discreto no espaço de estados

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{k+1} = \Phi_k \mathbf{x}_k + \Gamma_k \mathbf{u}_k + Y_k \mathbf{w}_k; \\ \mathbf{y}_{k+1} = C_{k+1} \mathbf{x}_{k+1} + \mathbf{v}_{k+1},\end{cases}\tag{2.21}$$

em que k é o índice de tempo, $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados, $\mathbf{u}_k \in \mathbb{R}^p$ é o vetor de entradas, $\mathbf{w}_k \in \mathbb{R}^{n_w}$ é o vetor de ruído de processo, $\mathbf{y}_k \in \mathbb{R}^m$ é o vetor de saídas, $\mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^m$ é o vetor de ruído de medição, $\Phi_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é a matriz de transição de estado, $\Gamma_k \in \mathbb{R}^{n \times p}$ é a matriz de entrada, $C_k \in \mathbb{R}^{m \times n}$ é a matriz de saída e $Y_k \in \mathbb{R}^{n \times n_w}$ é a matriz de entrada de ruído do processo. Além disso, \mathbf{w}_k e \mathbf{v}_k são variáveis aleatórias independentes com média nula cujas matrizes de covariância $Q_k \in \mathbb{R}^{n_w \times n_w}$ e $R_k \in \mathbb{R}^{p \times p}$ são conhecidas e satisfazem as seguintes relações:

$$\begin{aligned} E[\mathbf{w}_k \mathbf{w}_k^T] &= Q_k; \\ E[\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T] &= R_k; \\ E[\mathbf{v}_i \mathbf{w}_j^T] &= 0, \quad \forall i, j, \end{aligned} \quad (2.22)$$

em que $E[\cdot]$ define a esperança matemática (AGUIRRE, 2015). Além disso, as matrizes de covariância Q_k e R_k são diagonais não-negativas (HAJEK, 2015). O algoritmo do FK é dividido em duas etapas: propagação e assimilação.

Na etapa de propagação, o valor estimado na iteração anterior, chamado de *a posteriori* e indicado pelo sinal "+", é propagado no tempo considerando a lei de formação do sistema, equação 2.21, para se obter a estimativa *a priori*, indicada pelo sinal "-", da iteração seguinte. Este procedimento também é realizado para a matriz de covariância do sistema. Assim, as equações da etapa de propagação são escritas como

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{x}}_{k+1}^- = \Phi_k \hat{\mathbf{x}}_k^+ + \Gamma_k \mathbf{u}_k; \\ P_{k+1}^- = \Phi_k P_k^+ \Phi_k^T + Y_k Q_k Y_k^T, \end{cases} \quad (2.23)$$

nas quais $\hat{\mathbf{x}}_k^-$ é o vetor de estados estimado *a priori*, $\hat{\mathbf{x}}_k^+$ o vetor de estados estimado *a posteriori*, P_k^- é a matriz de covariância do sistema *a priori* e P_k^+ é a matriz de covariância do sistema *a posteriori*. Enquanto isso, na etapa de assimilação, com a chegada de uma nova medição, o valor estimado *a priori* é corrigido por meio de um ganho K_k e da inovação para obter a estimativa *a posteriori* do vetor de estados. Então, as equações da etapa de assimilação são escritas como

$$\begin{cases} K_{k+1} = P_{k+1}^- C_{k+1}^T [C_{k+1} P_{k+1}^- C_{k+1}^T + R_{k+1}]^{-1}; \\ \hat{\mathbf{x}}_{k+1}^+ = \hat{\mathbf{x}}_{k+1}^- + K_{k+1} [\mathbf{y}_{k+1} - C_{k+1} \hat{\mathbf{x}}_{k+1}^-]; \\ P_{k+1}^+ = P_{k+1}^- - K_{k+1} C_{k+1} P_{k+1}^-, \end{cases} \quad (2.24)$$

em que K_k é o ganho de Kalman. Das equações, nota-se que as matrizes de estado, entrada e saída afetam diretamente os valores estimados. Enquanto isso, as matrizes Q_k e R_k afetam o ganho K_k . Valores incorretos nessas matrizes podem levar a problemas de divergência na estimação. De fato, uma das principais causas de falha do FK é o erro de modelagem. A teoria apresentada assume que as matrizes do sistema são perfeitamente conhecidas e que os ruídos são gaussianos, com média nula e completamente não correlacionados. Se qualquer uma dessas hipóteses for violada, o FK pode não funcionar (SIMON, 2006).

2.4.1 Filtro de Kalman estendido

Para aplicação do FK, o sistema em análise deve ser linear. Para sistemas não-lineares, uma adaptação da proposta do filtro de Kalman foi apresentada inicialmente por Stanley F. Schmidt, que veio a ser denominada filtro de Kalman estendido (FKE) (SIMON, 2006). O procedimento aplicado pelo FKE consiste em linearizar o sistema analiticamente por meio expansão de primeira ordem em série de Taylor em torno do estado atual. Considerando o sistema não-linear descrito como

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{k+1} = f(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, \mathbf{w}_k); \\ \mathbf{y}_{k+1} = h(\mathbf{x}_{k+1}, \mathbf{v}_{k+1}), \end{cases} \quad (2.25)$$

em que $f(\cdot)$ e $h(\cdot)$ são, respectivamente, as funções não-lineares do sistema e de observação, a matrizes Jacobiana da função f com respeito à \mathbf{x}_k é dada por

$$Df(\mathbf{x}_k) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}, \quad (2.26)$$

em que $Df(\mathbf{x}_k)$ denota a matriz Jacobiana de f com respeito à \mathbf{x}_k . As matrizes Jacobianas $Df(\mathbf{u}_k)$, $Df(\mathbf{w}_k)$, $Dh(\mathbf{x}_{k+1})$ e $Dh(\mathbf{v}_{k+1})$ são obtidas de forma análoga para que o sistema linearizado possa ser escrito como

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{k+1} \approx Df(\mathbf{x}_k)\mathbf{x}_k + Df(\mathbf{u}_k)\mathbf{u}_k + Df(\mathbf{w}_k)\mathbf{w}_k; \\ \mathbf{y}_{k+1} \approx Dh(\mathbf{x}_{k+1})\mathbf{x}_{k+1} + Dh(\mathbf{v}_{k+1})\mathbf{v}_{k+1}. \end{cases} \quad (2.27)$$

Assim, o algoritmo do FKE com o sistema linearizado é dado por

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{x}}_{k+1}^- = f(\hat{\mathbf{x}}_k^+, \mathbf{u}_k); \\ P_{k+1}^- = Df(\mathbf{x}_k)P_k^+ Df(\mathbf{x}_k)^T + Df(\mathbf{w}_k)Q_k Df(\mathbf{w}_k)^T; \\ K_{k+1} = P_{k+1}^- Dh(\mathbf{x}_{k+1})^T [Dh(\mathbf{x}_{k+1})P_{k+1}^- Dh(\mathbf{x}_{k+1})^T + \\ \quad + Dh(\mathbf{v}_{k+1})R_{k+1} Dh(\mathbf{v}_{k+1})^T]^{-1}; \\ \hat{\mathbf{x}}_{k+1}^+ = \hat{\mathbf{x}}_{k+1}^- + K_{k+1} [\mathbf{y}_{k+1} - h(\hat{\mathbf{x}}_{k+1}^-)]; \\ P_{k+1}^+ = P_{k+1}^- - K_{k+1} Dh(\mathbf{x}_{k+1}) P_{k+1}^-. \end{cases} \quad (2.28)$$

Como o objetivo é linearizar em torno do estado atual, as matrizes Jacobianas calculadas são avaliadas, para cada iteração do algoritmo, como

$$\begin{aligned} Df(\mathbf{x}_k) &= Df(\mathbf{x}_k)|_{\mathbf{x}_k=(\hat{\mathbf{x}}_k^+, \mathbf{u}_k, 0)}; \\ Df(\mathbf{w}_k) &= Df(\mathbf{w}_k)|_{\mathbf{w}_k=(\hat{\mathbf{x}}_k^+, \mathbf{u}_k, 0)}; \\ Dh(\mathbf{x}_{k+1}) &= Dh(\mathbf{x}_{k+1})|_{\mathbf{x}_{k+1}=(\hat{\mathbf{x}}_{k+1}^-, 0)}; \\ Dh(\mathbf{v}_{k+1}) &= Dh(\mathbf{v}_{k+1})|_{\mathbf{v}_{k+1}=(\hat{\mathbf{x}}_{k+1}^-, 0)}, \end{aligned} \quad (2.29)$$

em que o valor do ruído é sempre zero, o valor de x_k é o valor *a posteriori* e o valor de \mathbf{x}_{k+1} é o valor *a priori*.

Apesar de ser bastante utilizado em sistemas não-lineares, o FKE não é, usualmente, um estimador ótimo e apresenta erros de linearização, inerentes ao método, relacionados à propagação da média e covariância dos estados (SIMON, 2006). A aproximação realizada pelo FKE via série de Taylor assume que a transformação linearizada apresenta média e covariância aproximadamente iguais à verdadeira transformação não-linear. No entanto, nem sempre essa condição é verdadeira e a aproximação realizada pode ser insatisfatória. Nesse caso, o estimador pode apresentar um erro significativo ou, até mesmo, divergir. Em função disso, o FKE não é recomendado para sistemas com não-linearidades severas. Para esses casos, abordagens que visam reduzir o erro de aproximação, como o FKU e os filtros de partículas, podem ser adotadas (SIMON, 2006).

2.5 Estimação Simultânea

2.5.1 Estimação conjunta

A primeira estratégia proposta na literatura para estimar não só estados mas também parâmetros desconhecidos foi apresentada por Kopp e Orford (1963) como um problema de filtragem não-linear para controladores adaptativos. A ideia parte assumindo um vetor de parâmetros desconhecidos ou variantes no tempo θ_k que seja desejado estimar. Assim, o sistema inicial no espaço de estados é da seguinte forma:

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{k+1} = \Phi_k(\theta_k)\mathbf{x}_k + \Gamma_k(\theta_k)\mathbf{u}_k + Y_k(\theta_k)\mathbf{w}_k; \\ \mathbf{y}_{k+1} = C_{k+1}(\theta_k)\mathbf{x}_{k+1} + \mathbf{v}_{k+1}, \end{cases} \quad (2.30)$$

em que as matrizes de transição de estado, entrada, saída e entrada de ruído são dependentes do vetor de parâmetros θ_k . Se o vetor de parâmetros for escrito como

$$\theta_{k+1} = \theta_k + \mathbf{w}_{\theta_k}, \quad (2.31)$$

em que \mathbf{w}_{θ_k} é um ruído artificial gaussiano, pequeno, com média nula e matriz de covariância Q_{θ_k} não correlacionado com \mathbf{w}_k , e o vetor de estados for aumentado para incluir o vetor de parâmetros desconhecidos, o sistema assume a forma

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{k+1} \\ \theta_{k+1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \Phi_k & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_k \\ \theta_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Gamma_k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_k \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Y_k & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w}_k \\ \mathbf{w}_{\theta_k} \end{bmatrix}; \\ \mathbf{y}_{k+1} &= \begin{bmatrix} C_{k+1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{k+1} \\ \theta_{k+1} \end{bmatrix} + \mathbf{v}_{k+1}, \end{aligned} \quad (2.32)$$

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{k+1}^* = \Phi_k^* \mathbf{x}_k^* + \Gamma_k^* \mathbf{u}_k^* + Y_k^* \mathbf{w}_k^*, \\ \mathbf{y}_{k+1} = C_{k+1}^* \mathbf{x}_{k+1}^* + \mathbf{v}_{k+1}, \end{cases} \quad (2.33)$$

na qual "*" indica as grandezas aumentadas. Note que o ruído artificial na expressão dos parâmetros permite o ajuste deste pelo FK, mas valores elevados podem impedir a convergência para o valor correto (SIMON, 2006). Além disso, é preciso que os parâmetros variem mais lentamente que os estados (AGUIRRE, 2015). O sistema resultante apresenta relações não-lineares entre os novos estados. Para resolver esse problema, Kopp e Orford (1963) propuseram a aplicação do FKE no sistema aumentado, ou seja, do FKEC³. Como o sistema aumentado é não-linear, qualquer outro estimador não-linear pode ser aplicado. A Figura 2.4 apresenta um diagrama de blocos da estimação com o FKEC.

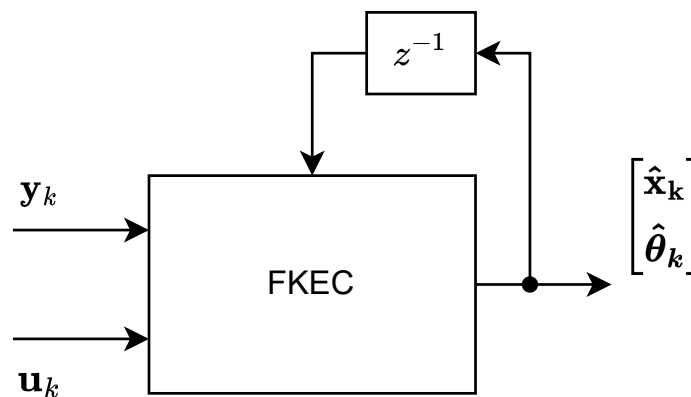


Figura 2.4 – Diagrama de blocos da estimação conjunta com o FKEC.

Fonte: Produzido pelo autor.

Apesar disso, a estimação com o FKEC herda os problemas da linearização do FKE, uma vez que o algoritmo de estimação é o mesmo. Em função disso, para sistemas com não-linearidades severas, pode ser interessante adotar outras abordagens com desempenho superior, como FKUC. Assim como o ajuste da matriz Q_k possui um papel importante no FK, o ajuste da matriz Q_{θ_k} possui um papel importante no desempenho da estimação dos parâmetros (HAYKIN, 2001). Além disso, como na estimação conjunta estados e parâmetros são acoplados, a matriz de covariância do sistema é da forma

$$P_k^* = \begin{bmatrix} P_{x_k} & P_{\theta_k, x_k} \\ P_{x_k, \theta_k} & P_{\theta_k} \end{bmatrix}, \quad (2.34)$$

em que P_k^* é a covariância do sistema aumentado e P_{x_k, θ_k} é a covariância cruzada entre estados e parâmetros. Essa covariância cruzada tende a melhorar o desempenho da estimação dos parâmetros (VAN DER MERWE, 2004).

³ Notação apresentada no começo da Seção 1.3.

2.5.2 Estimação dual

A estimação dual foi inicialmente proposta por [L. Nelson e Stear \(1976\)](#) para sistemas lineares com o intuito de desenvolver um estimador simultâneo que fosse mais robusto que o FKEC utilizado até então. A estratégia proposta consiste em aplicar um FK para os parâmetros e outro para os estados, ou seja, um FKD⁴. Para isso, na sua forma matricial⁵, os parâmetros devem ser escritos somente em termos de entrada, saída e inovação como

$$\begin{cases} \theta_{k+1} = \theta_k + \mathbf{w}_{\theta_k}; \\ \mathbf{y}_k = Z_k^T \theta_k + \eta_k, \end{cases} \quad (2.35)$$

em que η_k é o vetor de inovação, Z_k é a matriz de regressores para o modelo dos parâmetros cujas linhas tem a forma

$$z_i = [\mathbf{u}_{k-1}^T, \dots, \mathbf{u}_{k-q}^T, \mathbf{y}_{k-1}^T, \dots, \mathbf{y}_{k-q}^T, \eta_{k-1}^T, \dots, \eta_{k-q}^T]. \quad (2.36)$$

Note que as equações utilizadas tem formato semelhante às apresentadas no MQR, equação 2.6, e na estimação conjunta, equação 2.31. Então, o algoritmo do FK pode ser aplicado diretamente no sistema de equações 2.35 e a inovação pode ser estimada como

$$\hat{\eta}_k = \mathbf{y}_k - Z_k^T \hat{\theta}_k. \quad (2.37)$$

Com os parâmetros estimados, o algoritmo do FK pode ser aplicado nas equações do modelo para estimar os estados como apresentado na seção anterior. Na abordagem proposta por [L. Nelson e Stear \(1976\)](#), a representação da dinâmica dos parâmetros é livre de estados, ou seja, não é preciso conhecer os estados para estimar os parâmetros. A Figura 2.5 apresenta um diagrama de blocos com a estimação dual com FKD na representação livre de estados. A principal vantagem da ideia inicial da estimação dual é evitar os erros de aproximação em função da linearização. Como o sistema se mantém linear, não há necessidade de calcular matrizes Jacobianas e nem de expandir o vetor de estados.

Apesar disso, a formulação livre de estados pode apresentar relações não-lineares entre os parâmetros do sistema, como ilustrado pelo exemplo apresentado por [L. Nelson e Stear \(1976\)](#). Para contornar esse problema, é possível reescrever as equações de estado do sistema 2.21 na forma da equação 2.6, em que a saída é o estado atual (ou uma combinação de estado e entrada), a matriz de regressores contém informações dos estados e entradas passados, e o vetor de parâmetros são elementos desconhecidos. Dessa forma, essa expressão para ser utilizado no FKD no lugar da representação livre de estados. Analogamente, com o sistema na forma da equação 2.6, o algoritmo MQR para múltiplas saídas também pode ser aplicado para estimação dos parâmetros, como apresentado na Seção 2.2.

⁴ Notação apresentada no começo da Seção 1.3

⁵ [L. Nelson e Stear \(1976\)](#) apresenta a formulação para cada uma das saídas de \mathbf{y}_k .

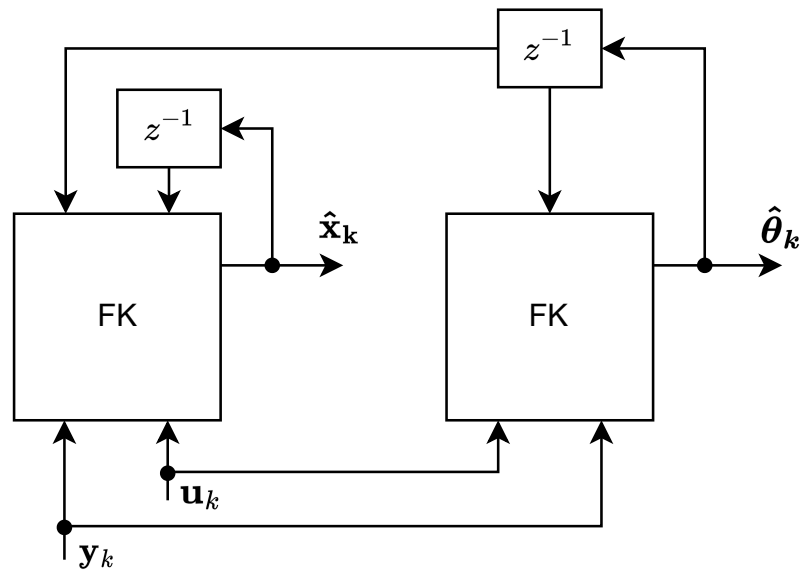


Figura 2.5 – Diagrama de blocos da estimação dual com o FKD livre de estados.

Fonte: Produzido pelo autor.

A Figura 2.6 ilustra essa estratégia com um diagrama de blocos para estimação dual, com FK para os estados e MQR para os parâmetros. Dessa forma, a aplicação de outros estimadores na estimação dual só depende de como o sistema, tanto para estados quanto para parâmetros, é representado. A estimação dual, ao contrário da estimação conjunta, propõem uma abordagem que desacopla a estimação de estados e parâmetros por meio de dois sistemas que funcionam de forma concorrente (HAYKIN, 2001). Em função disso, a matriz de covariância cruzada P_{x_k, θ_k} é igual a zero e é esperado que isso seja uma vantagem da estrutura conjunta na estimação de parâmetros (VAN DER MERWE, 2004).

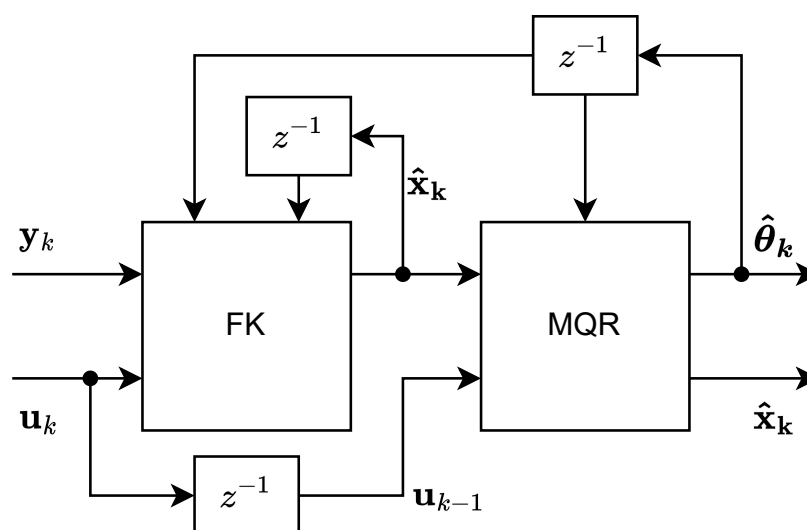


Figura 2.6 – Diagrama de blocos da estimação dual com FK e MQR.

Fonte: Produzido pelo autor.

Em 1996, Wan e A. T. Nelson (1996) expandiram a ideia de estimação dual inicial-

mente proposta para sistemas lineares para sistemas não-lineares por meio do FKED, com um FKE para estados e outro para parâmetros. Apesar da abordagem dual com o FKED atenuar alguns dos problemas de convergência e ser mais robusta que o FKED, valores muito elevados para as matrizes de covariância iniciais podem impedir a convergência (NELSON, A. T., 2000). Além disso, o FKED ainda apresenta problemas de aproximação em sistemas fortemente não-lineares. Para estimação dual, uma alternativa possível é utilizar o FKUD, cujo desempenho na estimação tende a ser superior (WAN; VAN DER MERWE, 2000).

2.5.2.1 MME para estimação dual

A abordagem proposta neste trabalho para estimação de parâmetros desconhecidos do sistema, isto é, a formulação com a MME (ver Seção 2.3), apresenta características semelhantes aos métodos já existentes para sua utilização na estimação dual. Assim como o MQR, os parâmetros desconhecidos devem ser escritos na forma da equação 2.6 de modo que o algoritmo apresentado na Seção 2.3 possa ser aplicado a cada passo de tempo. A Figura 2.7 apresenta o diagrama de blocos da implementação proposta, na qual é possível observar como o diagrama é idêntico ao apresentado para a estimação dual com FK e MQR. Note que a representação observada no diagrama considera uma formulação dos parâmetros dependentes dos estados, mas, assim como no FKD, pode ser adotada uma representação livre de estados sem que haja impedimento para aplicação do método proposto.

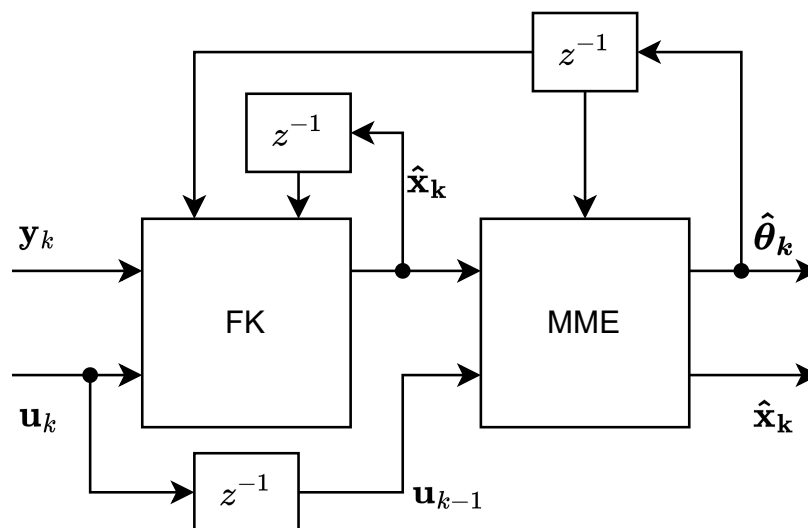


Figura 2.7 – Diagrama de blocos da estimação dual com FK e MME.

Fonte: Produzido pelo autor.

3 Estudo de Caso

3.1 Introdução

Este capítulo é dedicado à exploração da estimação simultânea de estados e parâmetros em malha fechada em um modelo no qual não há adaptação da matriz de covariância de ruído do FK. Para tanto, serão analisadas quatro abordagens (conjunta com FKEC, dual com FKD, dual com FK e MQR- λ , e dual com FK e MME) para estimação de três parâmetros desconhecidos nas matrizes de transição de estados e de entrada nos seguintes cenários:

1. Diferentes condições iniciais dos parâmetros desconhecidos;
2. Diferentes condições iniciais da matriz de covariância do sistema;
3. Diferentes valores dos parâmetros λ , para o MQR, e α , para a MME.

Assim, a Seção 3.2 apresenta a dinâmica do sistema linear invariante no tempo (SLIT) estudado, bem como os valores considerados, os parâmetros desconhecidos para análise, a lei de controle proposta e os critérios de desempenho. Depois, a Seção 3.3 apresenta a validação da estimação dos estados com o objetivo de verificar a escolha das matrizes do FK no caso em que se tem conhecimento do sistema. Em seguida, da Seção 3.4 até a Seção 3.7 são apresentados a metodologia e os resultados obtidos para as estimções conjunta com FKEC, dual com FKD, dual com FK e MQR- λ , e dual com FK e MME, respectivamente. Por fim, a Seção 3.8 apresenta um resumo das abordagens testadas e dos resultados obtidos no SLIT estudado.

3.2 Modelagem Matemática

O exemplo considerado neste capítulo é o SLIT do modelo linearizado ao redor do ponto de operação do sistema multi-entradas multi-saídas (em inglês, *multi-inputs multi-outputs* - MIMO) de quatro tanques apresentado por Johansson (2000). A escolha por esse modelo para análise se dá, principalmente, por ser um sistema MIMO amplamente conhecido e aplicado como referência para problemas de controle. A Figura 3.8 apresenta o esquemático do problema abordado no qual é possível observar a disposição dos quatro tanques (dois em cima e dois embaixo), das duas bombas, das duas válvulas e do reservatório na montagem do sistema. A partir do balanceamento das massas e da lei de Bernoulli, é possível escrever as equações dinâmicas do sistema como

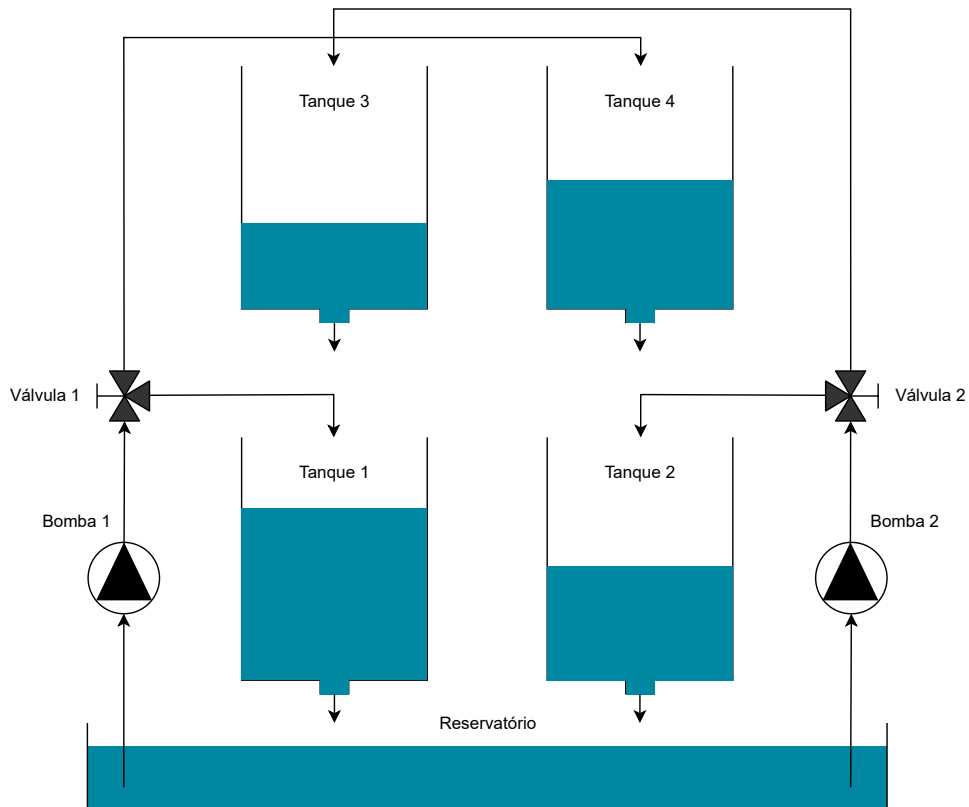


Figura 3.8 – Esquemático do problema de quatro tanques.

Fonte: Produzido pelo autor.

$$\begin{aligned}
 \dot{h}_1 &= -\frac{a_1}{A_1}\sqrt{2gh_1} + \frac{a_3}{A_1}\sqrt{2gh_3} + \frac{\gamma_1 k_1}{A_1}v_1; \\
 \dot{h}_2 &= -\frac{a_2}{A_2}\sqrt{2gh_2} + \frac{a_4}{A_2}\sqrt{2gh_4} + \frac{\gamma_2 k_2}{A_2}v_2; \\
 \dot{h}_3 &= -\frac{a_3}{A_3}\sqrt{2gh_3} + \frac{(1-\gamma_2)k_2}{A_3}v_2; \\
 \dot{h}_4 &= -\frac{a_4}{A_4}\sqrt{2gh_4} + \frac{(1-\gamma_1)k_1}{A_4}v_1; \\
 y_1 &= k_c h_1; \\
 y_2 &= k_c h_2,
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

em que:

- g : Aceleração gravitacional;
- A_i : Área de seção circular do tanque i ;
- a_i : Área de seção circular do orifício de saída do tanque i ;
- h_i : Nível do líquido no tanque i ;
- γ_i : Configuração de abertura da válvula i ;

- v_i : Tensão elétrica na bomba i ;
- k_c : Parâmetro que relaciona tensão elétrica e nível de líquido;
- k_i : Parâmetro que relaciona vazão volumétrica e tensão.

Na representação proposta, as entradas do processo são as tensões elétricas nas bombas e as saídas são os níveis de líquido nos tanques 1 e 2 (os dois de baixo) multiplicados por uma constante k_c . Como o sistema apresentado é não-linear, faz-se necessária a linearização deste em um ponto de operação. Com a introdução das variáveis $x_i := h_i - h_i^0$ e $u_i := v_i - v_i^0$, o modelo linearizado, em espaço de estados, é dado por

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{T_1} & 0 & \frac{A_3}{A_1 T_3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{T_2} & 0 & \frac{A_4}{A_2 T_4} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{T_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{T_4} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} \frac{\gamma_1 k_1}{A_1} & 0 \\ 0 & \frac{\gamma_2 k_2}{A_2} \\ 0 & \frac{(1 - \gamma_2) k_2}{A_3} \\ \frac{(1 - \gamma_1) k_1}{A_4} & 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}, \quad (3.2)$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} k_c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_c & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x},$$

em que o índice 0 sobrescrito denota o valor daquele parâmetro no ponto de operação desejado e os parâmetros T_i são da forma

$$T_i = \frac{A_i}{a_i} \sqrt{\frac{2h_i^0}{g}}, \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (3.3)$$

A Tabela 3.1 apresenta os parâmetros base utilizados no problema de quatro tanques para os outros parâmetros as áreas de seção circular, aceleração da gravidade e constante de saída. Além disso, optou-se que o processo estivesse em um ponto de operação de fase mínima. Para isso, os parâmetros da linearização, das bombas e das válvulas foram definidos como apresentado na Tabela 3.2.

Tabela 3.1 – Parâmetros base do problema de quatro tanques.

Parâmetro	Valor	Unidade
A_1, A_3	28	cm ²
A_2, A_4	32	cm ²
a_1, a_3	0,071	cm ²
a_2, a_4	0,057	cm ²
k_c	1,0	V/cm
g	981	cm/s ²

Fonte: Adaptado de Johansson (2000).

Tabela 3.2 – Parâmetros do ponto de operação de fase mínima do problema de quatro tanques.

Parâmetro	Valor	Unidade
(h_1^0, h_2^0)	(12,4, 12,7)	cm
(h_3^0, h_4^0)	(1,8, 1,4)	cm
(v_1^0, v_2^0)	(3,0, 3,0)	V
(k_1, k_2)	(3,33, 3,35)	cm ³ /Vs
(γ_1, γ_2)	(0,7, 0,6)	-

Fonte: Johansson (2000).

A partir dos valores apresentados nas tabelas acima, o modelo linearizado contínuo do processo pode ser escrito como

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -0,0159 & 0 & 0,0419 & 0 \\ 0 & -0,0111 & 0 & 0,0333 \\ 0 & 0 & -0,0419 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,0333 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0,0833 & 0 \\ 0 & 0,0628 \\ 0 & 0,0479 \\ 0,0312 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}; \quad (3.4)$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1,0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1,0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}.$$

Então, considerando um período de amostragem igual a 100 ms, o modelo linearizado contínuo do processo pode ser discretizado por um segurador de ordem zero e escrito no formato da equação 2.21 como

$$\mathbf{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} 0,9984 & 0 & 0,0042 & 0 \\ 0 & 0,9989 & 0 & 0,0033 \\ 0 & 0 & 0,9958 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,9967 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \begin{bmatrix} 0,0083 & 0 \\ 0 & 0,0063 \\ 0 & 0,0048 \\ 0,0031 & 0 \end{bmatrix} \{\mathbf{u}_k + \mathbf{w}_k\}; \quad (3.5)$$

$$\mathbf{y}_k = \begin{bmatrix} 1,0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1,0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k,$$

em que as matrizes de entrada, Γ , e de entrada de ruído de processo, Y , são iguais.

Nas seções seguintes, para fins de análise e projeto, o sistema discretizado será utilizado. Para todas as simulações realizadas neste trabalho para esse problema, os vetores de ruído de processo e de medição, \mathbf{w}_k e \mathbf{v}_k , foram definidos com média nula e desvio padrão igual a 0,5 e 0,03, respectivamente. Além disso, as entradas foram limitadas entre 0 e 10 V por meio de um saturador e a condição inicial dos estados, em centímetros, foi definida como

$$\mathbf{x}_0 = [4,0 \ 6,0 \ 0 \ 0]^T, \quad (3.6)$$

em que se considera o cenário no qual o sistema passou um longo período com as válvulas dos tanques superiores fechadas e os níveis dos tanques de baixo se estabilizaram.

3.2.1 Parâmetros desconhecidos

Para estimação simultânea, três parâmetros das matrizes de transição de estados e de entrada serão considerados desconhecidos. Os parâmetros

$$\begin{aligned} a_{11} &= -\frac{1}{T_1}; \\ a_{24} &= \frac{A_4}{A_2 T_4}; \\ b_{32} &= \frac{(1 - \gamma_2)k_2}{A_3}, \end{aligned} \quad (3.7)$$

foram escolhidos para serem estimados nos testes realizados. A escolha por esses parâmetros tem o intuito de abranger ao menos um parâmetro relacionado à dinâmica do sistema e um parâmetro da matriz de entrada. Nesse sentido, uma porcentagem (até 30% de diferença para representar, inclusive, casos mais extremos) do parâmetro original em tempo contínuo foi tomada como valor inicial e, depois, discretizada como apresentado anteriormente. Apesar da discretização afetar outros parâmetros além dos parâmetros escolhidos, essas variações são muito pequenas e foram desconsideradas. A Tabela 3.3 apresenta os valores iniciais considerados para os parâmetros escolhidos, tanto os contínuos quanto os discretizados correspondentes.

Tabela 3.3 – Condições iniciais para os parâmetros desconhecidos (θ_0).

		70%	80%	90%	110%	120%	130%
Contínuo	a_{11}	-0,0112	-0,0128	-0,0144	-0,0175	-0,0191	-0,0207
	a_{24}	0,0233	0,0267	0,0300	0,0367	0,0400	0,0433
	b_{32}	0,0335	0,0383	0,0431	0,0526	0,0574	0,0622
Discreto	ϕ_{11}	0,9989	0,9987	0,9986	0,9982	0,9981	0,9979
	ϕ_{24}	0,0023	0,0027	0,0030	0,0037	0,0040	0,0043
	γ_{32}	0,0033	0,0038	0,0043	0,0053	0,0057	0,0062

Fonte: Produzido pelo autor.

3.2.2 Estabilidade, controlabilidade e observabilidade

Antes de passar para as etapas de definição da lei de controle e da estimação simultânea, é preciso verificar a estabilidade, controlabilidade e observabilidade do sistema em análise. Considerando um sistema na forma

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{k+1} = \Phi \mathbf{x}_k + \Gamma \mathbf{u}_k; \\ \mathbf{y}_{k+1} = C \mathbf{x}_{k+1}, \end{cases} \quad (3.8)$$

este é dito marginalmente estável se e somente se todos os autovalores de Φ tem magnitude menor ou igual a 1. Além disso, este é dito assintoticamente estável se e somente se todos os

autovalores de Φ tem magnitude menor que 1 (CHEN, 1998). Os autovalores da matriz Φ no problema de quatro tanques apresentado são

$$\begin{bmatrix} 0,9984 & 0,9989 & 0,9958 & 0,9967 \end{bmatrix}, \quad (3.9)$$

e, portanto, o sistema é assintoticamente estável.

O par (Φ, Γ) é dito controlável se e somente se a matriz de controlabilidade

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} \Gamma & \Phi\Gamma & \dots & \Phi^{n-1}\Gamma \end{bmatrix}, \quad (3.10)$$

de dimensão $n \times np$, tem posto n , ou seja, posto linha completo (CHEN, 1998). A matriz de controlabilidade do problema proposto é dada por

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} 8,3184 & 0,0100 & 8,3051 & 0,0299 & 8,2919 & 0,0497 & 8,2787 & 0,0694 \\ 0,0052 & 6,2778 & 0,0156 & 6,2708 & 0,0259 & 6,2639 & 0,0361 & 6,2570 \\ 0 & 4,7757 & 0 & 4,7558 & 0 & 4,7359 & 0 & 4,7161 \\ 3,1167 & 0 & 3,1063 & 0 & 3,0960 & 0 & 3,0857 & 0 \end{bmatrix} \times 10^3, \quad (3.11)$$

cujo posto é igual a 4 e, portanto, o sistema é controlável.

Analogamente, o par (Φ, C) é dito observável se e somente se a matriz de observabilidade

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ C\Phi \\ \vdots \\ C\Phi^{n-1} \end{bmatrix}, \quad (3.12)$$

de dimensão $nm \times n$, tem posto n , ou seja, posto coluna completo (CHEN, 1998). A matriz de observabilidade do problema proposto é dada por

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} 1,0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1,0 & 0 & 0 \\ 0,9984 & 0 & 0,0042 & 0 \\ 0 & 0,9989 & 0 & 0,0033 \\ 0,9968 & 0 & 0,0084 & 0 \\ 0 & 0,9978 & 0 & 0,0066 \\ 0,9952 & 0 & 0,0125 & 0 \\ 0 & 0,9967 & 0 & 0,0099 \end{bmatrix}, \quad (3.13)$$

cujo posto também é igual a 4, ou seja, o sistema é observável. Além disso, para todas as condições iniciais apresentadas na seção anterior, o modelo se mantém estável, controlável e observável.

3.2.3 Definição da lei de controle

Para que o sistema seja capaz de rastrear uma entrada degrau e tenha polos em malha fechada em posição adequada, a lei de controle proposta é da forma

$$\mathbf{u}_k = G\mathbf{r}_k - F\mathbf{x}_k, \quad (3.14)$$

em que F e G são matrizes de ganho de realimentação e da referência, e \mathbf{r} é o sinal de referência. Como o par (Φ, Γ) é controlável (verificado na subseção anterior), o par $(\Phi - \Gamma F, \Gamma)$ também é controlável e todos os autovalores de $(\Phi - \Gamma F)$ podem ser alocados arbitrariamente pela seleção correta do ganho F (CHEN, 1998).

Para sistemas MIMO, existem diversas estratégias de alocação de polos, como projeto cíclico. A estratégia adotada para calcular o ganho F foi a alocação robusta, apresentada por Kautsky, Nichols e Van Dooren (1985), porque, além posicionar os polos na localização desejada, minimiza a sensibilidade do sistema em malha fechada a alterações nos parâmetros da planta e já está implementado no *software* MATLAB® por meio do comando `place`. Os polos do modelo em malha aberta são os mais lentos possíveis quando o valor inicial do parâmetro a_{11} é 70% do seu valor nominal (ver Tabela 3.3). Então, escolhendo os polos do sistema em malha fechada como 1,15 vezes mais lentos que estes, temos que os polos desejados em tempo contínuo são dados por

$$\mathbf{p}_c = \begin{bmatrix} -0,0097 & -0,0096 & -0,0364 & -0,0290 \end{bmatrix}, \quad (3.15)$$

de modo que os polos desejados em tempo discreto são dados por

$$\mathbf{p}_d = \begin{bmatrix} 0,9990 & 0,9990 & 0,9964 & 0,9971 \end{bmatrix}. \quad (3.16)$$

Os modelos adotados para representar sistemas físicos, frequentemente, contêm simplificações associadas a dinâmicas desprezadas, tipicamente de alta frequência (LEVINE, 2011). Isso implica que os modelos utilizados tendem a representar melhor o comportamento dos sistemas quando em baixa frequência. Dessa forma, a escolha por polos em malha fechada mais lentos tem o intuito de diminuir a intensidade da ação de controle e aumentar a adesão do modelo ao sistema real evitando excitar frequências não modeladas. Além disso, o valor de 1,15 vezes mais lento foi escolhido para evitar que as entradas do sistema saturem para as diferentes condições iniciais nos primeiros instantes de simulação. Assumindo conhecimento completo dos parâmetros, a matriz de ganho F é calculada, via alocação robusta, como

$$F = \begin{bmatrix} -0,1564 & 0,0301 & -0,0802 & -0,0520 \\ 0,1071 & -0,0361 & -0,0037 & 0,0078 \end{bmatrix}. \quad (3.17)$$

Enquanto isso, a matriz G deve ser escolhida de modo que o sistema rastreie uma entrada degrau. Para tanto, considerando a lei de controle proposta e a estabilidade do sistema, a resposta em regime permanente é dada por

$$\mathbf{y}[\infty] = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) G (C(I_{4 \times 4} z - \Phi + \Gamma F)^{-1} \Gamma) R(z), \quad (3.18)$$

em que $R(z)$ é o sinal de referência e $I_{n \times n}$ é a matriz identidade de dimensão $n \times n$. Aplicando o limite para uma entrada degrau, a saída do sistema é dada por

$$\mathbf{y}[\infty] = G (C(I_{4 \times 4} - \Phi + \Gamma F)^{-1} \Gamma) \begin{bmatrix} 1,0 \\ 1,0 \end{bmatrix}, \quad (3.19)$$

de modo que, para que o erro estacionário seja zero, a matriz G deve ter a seguinte estrutura

$$\mathbf{e}[\infty] = \mathbf{r}[\infty] - \mathbf{y}[\infty];$$

$$\begin{bmatrix} 0,0 \\ 0,0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,0 \\ 1,0 \end{bmatrix} - G (C(I_{4 \times 4} - \Phi + \Gamma F)^{-1} \Gamma) \begin{bmatrix} 1,0 \\ 1,0 \end{bmatrix}; \quad (3.20)$$

$$I_{2 \times 2} = G (C(I_{4 \times 4} - \Phi + \Gamma F)^{-1} \Gamma);$$

$$G = (C(I_{4 \times 4} - \Phi + \Gamma F)^{-1} \Gamma)^{-1},$$

em que \mathbf{e} é o vetor de erro. É importante observar que a função de transferência do sistema deve ser inversível. Então, considerando a matriz F calculada, a matriz G é dada por

$$G = \begin{bmatrix} 0,1110 & -0,1275 \\ -0,0237 & 0,2086 \end{bmatrix}. \quad (3.21)$$

Como os valores calculados para as matrizes F e G levam em consideração o correto conhecimento das matrizes do sistema, estes não podem ser diretamente aplicados no contexto de estimação simultânea. Inicialmente, o chute inicial dos parâmetros deve ser utilizado para calcular os ganhos e, depois, estes devem ser atualizados a cada nova estimação. Assim, o algoritmo de adaptação do controlador e da lei de controle deve seguir as seguintes etapas a cada passo de tempo:

1. Estimar os parâmetros desconhecidos e atualizar as matrizes Φ , Γ e Y ;
2. Calcular as matrizes F e G com os valores atualizados das matrizes do sistema;
3. Aplicar a lei de controle $\mathbf{u}_k = G\mathbf{r}_k - F\hat{\mathbf{x}}_k$, em que $\hat{\mathbf{x}}_k$ é o vetor de estados estimado.

Dessa forma, o diagrama de blocos do problema estudado pode ser representado como disposto na Figura 3.9. Primeiro, o modelo linear contínuo do processo (bloco amarelo) discretizado por um segurador de ordem zero (G_{zoh}). Depois, o estimador (bloco em verde), que estima estados e parâmetros desconhecidos a partir da ação de controle e da saída do sistema. Então, o bloco do controlador adaptativo (bloco azul), que recebe os estados e parâmetros estimados, além da referência, calcula seus novos parâmetros (como discutido acima) e calcula a ação de controle. Por fim, o bloco do saturador (bloco branco com uma curva no centro), que limita a ação de controle entre 0 e 10 V, como apresentado anteriormente.

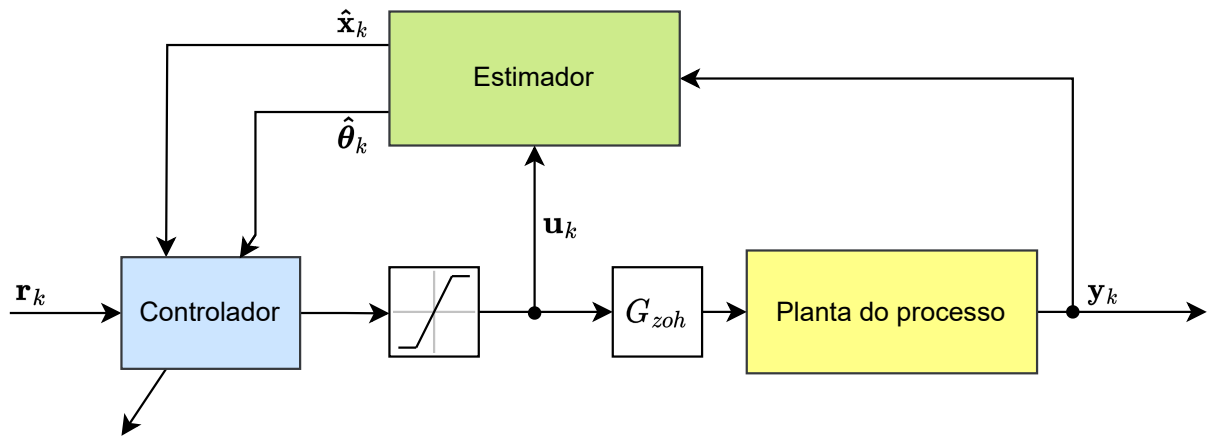


Figura 3.9 – Diagrama de blocos do sistema de quatro tanques no problema estudado.

Fonte: Produzido pelo autor.

É importante destacar que os polos desejados para o sistema em malha fechada foram mantido fixos ao longo da simulação. Uma alternativa seria calcular os polos 1,15 vezes mais lentos que os polos em malha aberta estimados e projetar o sistema de controle para eles. No entanto, experimentalmente, foi observado que essa abordagem aumenta, significativamente, a oscilação nas entradas do sistema e, por isso, não foi escolhida.

3.2.4 Critérios de desempenho

Por fim, com o intuito de avaliar quantitativamente os resultados obtidos no controle e estimação para as abordagens estudadas, serão calculados os índices de desempenho de controle tradicionais e métricas de precisão da estimação (LIMAVERDE FILHO, 2019). Para avaliar o desempenho do controle de cada saída, os seguintes índices serão utilizados:

- Integral do Erro Quadrático (ISE):

$$ISE = \sum_{k=1}^n (r_k - y_k)^2 \Delta t; \quad (3.22)$$

- Integral do Erro Quadrático ponderada pelo Tempo (ITSE):

$$ITSE = \sum_{k=1}^n t_k (r_k - y_k)^2 (\Delta t)^2; \quad (3.23)$$

- Integral do Erro Absoluto (IAE):

$$IAE = \sum_{k=1}^n |r_k - y_k| \Delta t; \quad (3.24)$$

- Integral do Erro Absoluto ponderada pelo Tempo (ITAE):

$$ITAE = \sum_{k=1}^n t_k |r_k - y_k| (\Delta t)^2. \quad (3.25)$$

Enquanto isso, para avaliar a magnitude dos esforços sobre os atuadores, o critério utilizado será a Variação Total da Ação de Controle (TVC), que é definida como:

$$TVC = \sum_{k=1}^n |u_k - u_{k-1}| \Delta t. \quad (3.26)$$

Por fim, para avaliar a precisão das estimativas dos estados não-medidos e dos parâmetros desconhecidos, as métricas adotadas serão as seguintes:

- Raiz do Erro Quadrático Médio (RMSE):

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k - \hat{x}_k)^2}; \quad (3.27)$$

- Erro Absoluto Médio (MAE):

$$MAE = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k - \hat{x}_k|. \quad (3.28)$$

3.3 Estimação dos estados com FK

Assumindo, inicialmente, as matrizes F e G calculadas na seção anterior (todos os parâmetros do sistema são conhecidos) e o conhecimento completo das propriedades estatísticas do ruído dos parâmetros, as matrizes de covariância para aplicação do FK foram definidas fixas e com o valor exato da variância dos ruídos, ou seja,

$$\begin{aligned} Q_k &= 0,5^2 I_{2 \times 2}; \\ R_k &= 0,03^2 I_{2 \times 2}, \quad \forall k \geq 0, \end{aligned} \quad (3.29)$$

em Q é a matriz de covariância do ruído de processo e R do ruído de medição. Então, o sistema em malha fechada foi simulado no *Simulink* do MATLAB® ao longo de 2.000¹ segundos. Para tanto, a matriz de covariância inicial foi definida como $P_0 = 0,01 I_{4 \times 4}$, o vetor de estados inicial foi mantido como apresentado na equação 3.6 e o sinal de referência foi definido como um degrau de amplitude 5 V, ou seja,

$$\mathbf{r}_k = \begin{bmatrix} 5,0 \\ 5,0 \end{bmatrix}, \quad \forall k \geq 0. \quad (3.30)$$

A Figura 3.10 apresenta a evolução das saídas, entradas e estados não-medidos para o FK ideal. É possível observar que tanto a saída y_1 quanto a saída y_2 alcançou a referência desejada. Além disso, as ações de controle não apresentaram grandes picos e, após o primeiro de valor de tensão, foram suaves. Por fim, os dois estados não-medidos, x_3 e x_4 , se mantiveram

¹ Valor escolhido para garantir que todas as abordagens testadas alcancem o regime permanente.

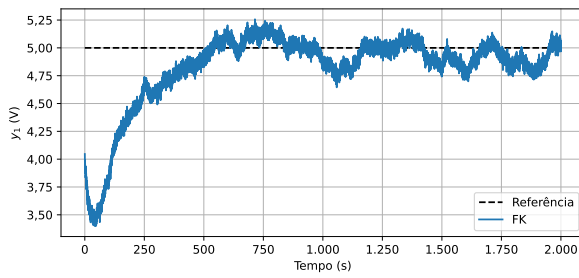
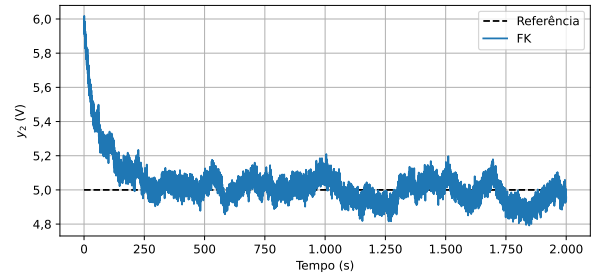
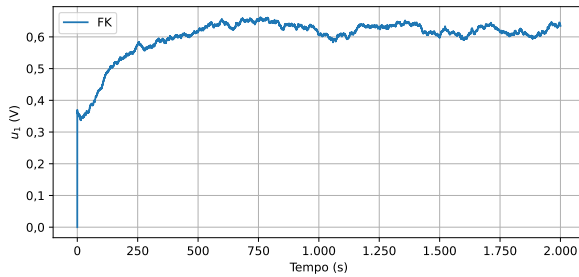
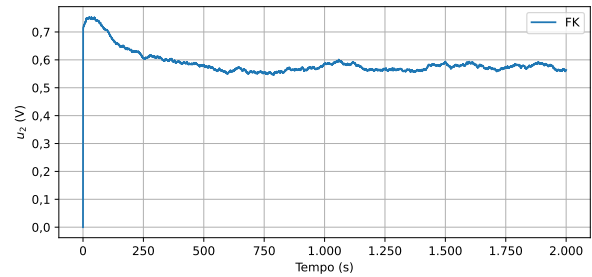
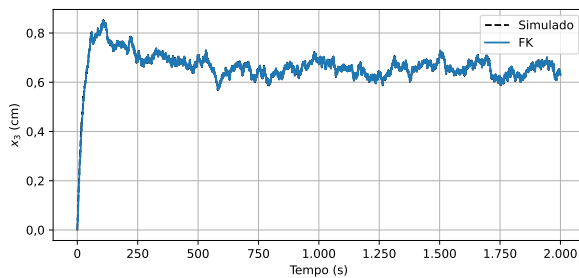
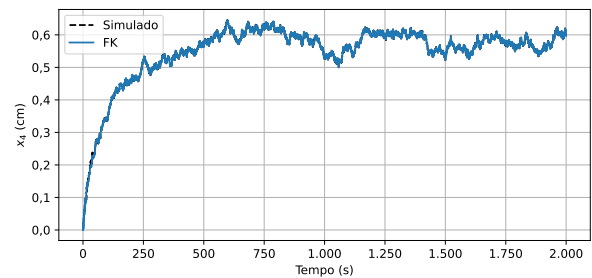
(a) Evolução da saída y_1 .(b) Evolução da saída y_2 .(c) Evolução da entrada u_1 .(d) Evolução da entrada u_2 .(e) Evolução do estado x_3 .(f) Evolução do estado x_4 .

Figura 3.10 – Evolução das saídas, entradas e estados não-medidos para o FK ideal.

Fonte: Produzido pelo autor.

próximos do valor esperado (valor simulado) ao longo da simulação. Esse resultado valida qualitativamente os parâmetros ajustados para o FK e a escolha dos polos em malha fechada.

Depois, com o intuito de poder avaliar os resultados das abordagens de estimação simultânea e os comparar com o caso do FK ideal, os critérios de desempenho foram calculados a partir das expressões apresentadas na seção anterior (ver Subseção 3.2.4). Para tanto, definiu-se que o intervalo entre 1.500 e 2.000 segundos representa o regime permanente (denotado intervalo 1) e, em seguida, aplicou-se os critérios de desempenho nesse intervalo. As Tabelas 3.4 e 3.5 apresentam os resultados obtidos. Para facilitar o entendimento dos resultados das próximas seções, os valores dos critérios de desempenho de controle serão apresentados de forma relativa percentual em comparação com o FK ideal, ou seja, serão apresentados pela seguinte fórmula:

$$INDICE_{\%} = \left(\frac{INDICE_{metodo}}{INDICE_{FKideal}} - 1 \right) \cdot 100\%, \quad (3.31)$$

em que $INDICE$ representa um dos índices de desempenho de controle avaliados. Para os critérios de precisão, o FKEC, por ser o primeiro apresentado, será utilizado como base.

Tabela 3.4 – Índices de desempenho de controle com FK ideal (intervalo 1).

	ISE	ITSE	IAE	ITAE	TVC
y_1	$8,36 \times 10^0$	$1,46 \times 10^4$	$5,49 \times 10^1$	$9,59 \times 10^4$	-
y_2	$2,84 \times 10^0$	$5,04 \times 10^3$	$3,12 \times 10^1$	$5,49 \times 10^4$	-
u_1	-	-	-	-	$2,70 \times 10^{-1}$
u_2	-	-	-	-	$1,73 \times 10^{-1}$

Fonte: Produzido pelo autor.

Tabela 3.5 – Precisão dos estados não-medidos com FK ideal (intervalo 1).

	RMSE	MAE
x_3	$2,37 \times 10^{-3}$	$1,89 \times 10^{-3}$
x_4	$1,48 \times 10^{-3}$	$1,18 \times 10^{-3}$

Fonte: Produzido pelo autor.

3.4 Estimação conjunta com FKEC

Agora, já considerando os três parâmetros desconhecidos, seja o vetor de parâmetros dado por

$$\theta_k = \begin{bmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{24} \\ \gamma_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix}, \quad (3.32)$$

com x_5 , x_6 e x_7 sendo os estados aumentados do sistema, temos que as equações de estado e de saída são escritas como

$$\begin{aligned} x_{1,k+1} &= x_{5,k}x_{1,k} + 0,0042x_{3,k} + 0,0083(u_{1,k} + w_{1,k}); \\ x_{2,k+1} &= 0,9989x_{2,k} + x_{6,k}x_{4,k} + 0,0063(u_{2,k} + w_{2,k}); \\ x_{3,k+1} &= 0,9958x_{3,k} + x_{7,k}(u_{2,k} + w_{2,k}); \\ x_{4,k+1} &= 0,9967x_{4,k} + 0,0031(u_{1,k} + w_{1,k}); \\ x_{5,k+1} &= x_{5,k}; \\ x_{6,k+1} &= x_{6,k}; \\ x_{7,k+1} &= x_{7,k}; \\ y_{1,k+1} &= x_{1,k+1} + u_{1,k+1}; \\ y_{2,k+1} &= x_{2,k+1} + u_{2,k+1}, \end{aligned} \quad (3.33)$$

em que é possível observar as relações não-lineares resultantes do novo vetor de estado. Foi verificado, experimentalmente, que manter w_θ igual a zero resultava em menores oscilações da ação de controle para as mesmas condições iniciais. Em função disso, esse termo foi retirado das equações. Então, com o sistema na forma da equação 2.32, é possível aplicar o FKEC para realizar a estimação conjunta dos estados e parâmetros. Para tanto, de acordo

com o algoritmo apresentado na Seção 2.4 para o FKE tradicional, é preciso calcular as matrizes Jacobianas. No sistema aumentado, estas são dadas por

$$Df(\mathbf{x}_k) = \begin{bmatrix} x_5 & 0 & 0,0042 & 0 & x_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,9989 & 0 & x_6 & 0 & x_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0,9958 & 0 & 0 & 0 & u_2 + w_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0,9967 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$Df(\mathbf{w}_k) = \begin{bmatrix} 0,0083 & 0 \\ 0 & 0,0063 \\ 0 & x_7 \\ 0,0031 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, Dh(\mathbf{x}_{k+1}) = \begin{bmatrix} 1,0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1,0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, Df(\mathbf{v}_{k+1}) = I_{2 \times 2}.$$
(3.34)

O FKEC foi inicializado com condição inicial \mathbf{x}_0 para o estados e de acordo com a Tabela 3.3 para os parâmetros. Além disso, a matriz de covariância inicial foi definida como

$$P_0^j = \text{diag}\{10^{-2}, 10^{-2}, 10^{-2}, 10^{-2}, p_5, p_6, p_7\}, \quad (3.35)$$

em que $\text{diag}\{\bullet\}$ define uma matriz diagonal com os elementos listados, j é um identificador da matriz e p_5 , p_6 e p_7 são valores que foram variados ao longo dos testes. Assim como realizado para o caso com FK ideal, o sistema em malha fechada foi simulado no *Simulink* do MATLAB® ao longo de 2.000 segundos.

3.4.1 Resultados

A condição inicial de 130% representa o cenário no qual os polos do sistema estão mais afastados dos polos desejados. Em função disso, essa condição será utilizada para discutir os efeitos da variação da matriz de covariância inicial. Cabe destacar que, para reduzir o número de variáveis testadas, somente os valores referentes aos parâmetros foram variados. O desenvolvimento para as outras condições foi semelhante, e apresentaremos apenas um dos melhores resultados obtidos para cada caso. Neste capítulo, FKEC j_i denota o FKEC com a matriz P_0^j e condição inicial i dos parâmetros desconhecidos.

A Tabela 3.6 apresenta alguns dos valores testados para a matriz P_0 experimentalmente na condição de 130% dos parâmetros desconhecidos. Em seguida, a Tabela 3.7 exhibe os resultados percentuais de desempenho de controle para cada P_0 . Com exceção de P_0^6 , todas

as outras condições demonstraram, em regime permanente, um desempenho de controle das saídas superior ao caso com FK ideal. A principal diferença ocorre no TVC, no qual apenas P_0^1 e P_0^5 apresentam resultados superiores. Vale ressaltar que a matriz P_0 , com o melhor resultado na saída y_1 , também exibe um dos piores desempenhos na saída y_2 , sugerindo uma relação de dualidade no desempenho. Considerando um balanço entre todos os índices, P_0^5 apresentou o melhor desempenho nos critérios de controle, seguido por P_0^1 .

Tabela 3.6 – Parâmetros da matriz de covariância inicial no FKEC j_{130} (P_0).

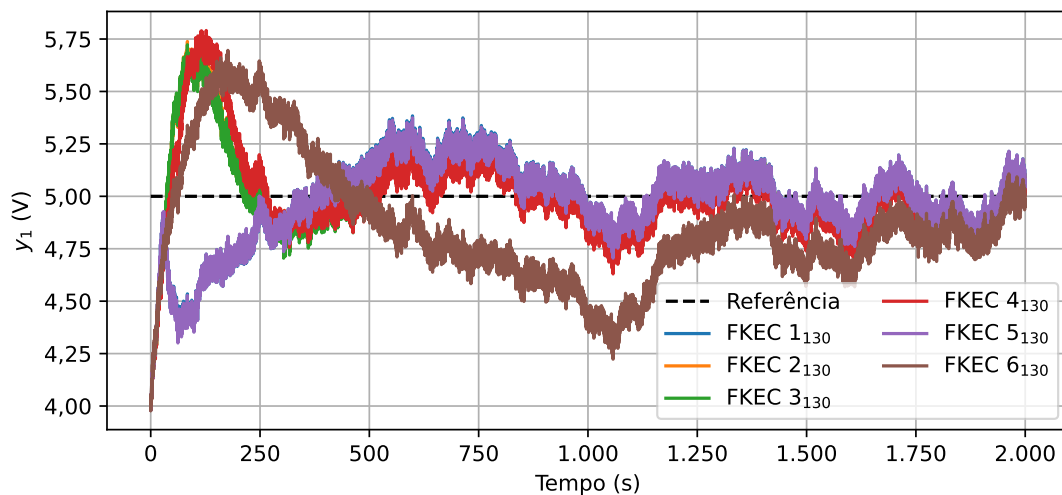
	P_0^1	P_0^2	P_0^3	P_0^4	P_0^5	P_0^6
p_5	5×10^{-7}	10^{-7}	10^{-7}	10^{-7}	10^{-6}	10^{-8}
p_6	5×10^{-7}	10^{-7}	10^{-7}	5×10^{-8}	5×10^{-7}	10^{-8}
p_7	$7,5 \times 10^{-7}$	5×10^{-7}	$2,5 \times 10^{-7}$	$7,5 \times 10^{-7}$	10^{-6}	10^{-8}

Fonte: Produzido pelo autor.

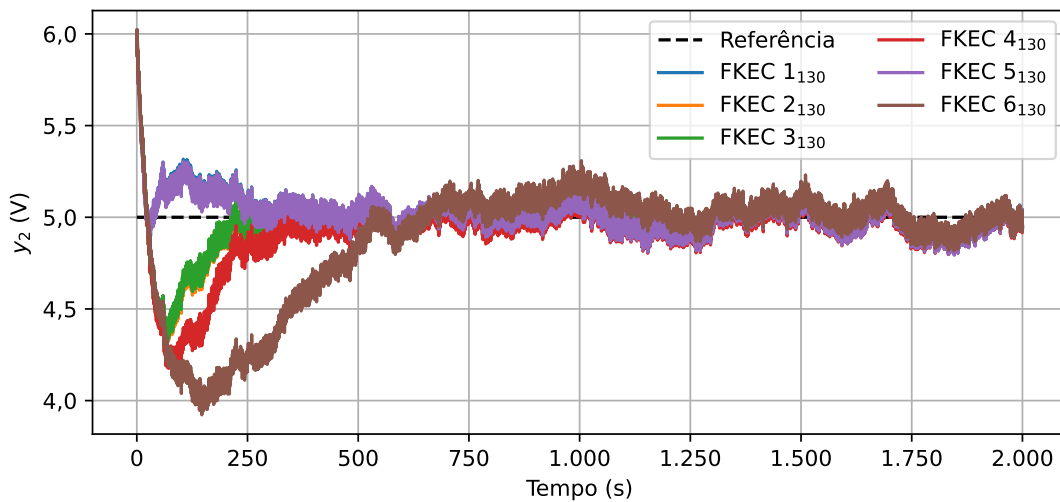
Tabela 3.7 – Resultado percentual dos índices de desempenho de controle com o FKEC para diferentes P_0 em comparação com o FK ideal (intervalo 1).

		P_0^1	P_0^2	P_0^3	P_0^4	P_0^5	P_0^6
ISE_%	y_1	-46,38%	-22,92%	-19,65%	-10,96%	-47,38%	162,87%
	y_2	-4,36%	-13,44%	-17,68%	-1,56%	-2,37%	-15,24%
ITSE_%	y_1	-45,87%	-23,19%	-20,20%	-11,40%	-46,85%	152,01%
	y_2	-4,78%	-13,99%	-18,35%	-1,77%	-2,75%	-17,17%
IAE_%	y_1	-26,45%	-11,65%	-9,86%	-5,09%	-27,17%	71,33%
	y_2	-2,66%	-7,73%	-10,23%	-1,02%	-1,59%	-9,44%
ITAE_%	y_1	-25,83%	-11,61%	-9,99%	-5,22%	-26,54%	67,06%
	y_2	-2,79%	-7,94%	-10,52%	-1,01%	-1,69%	-10,35%
TVC_%	u_1	-2,88%	15,38%	19,55%	10,67%	-6,59%	24,65%
	u_2	-1,27%	22,32%	31,68%	14,47%	-4,37%	55,03%

Fonte: Produzido pelo autor.

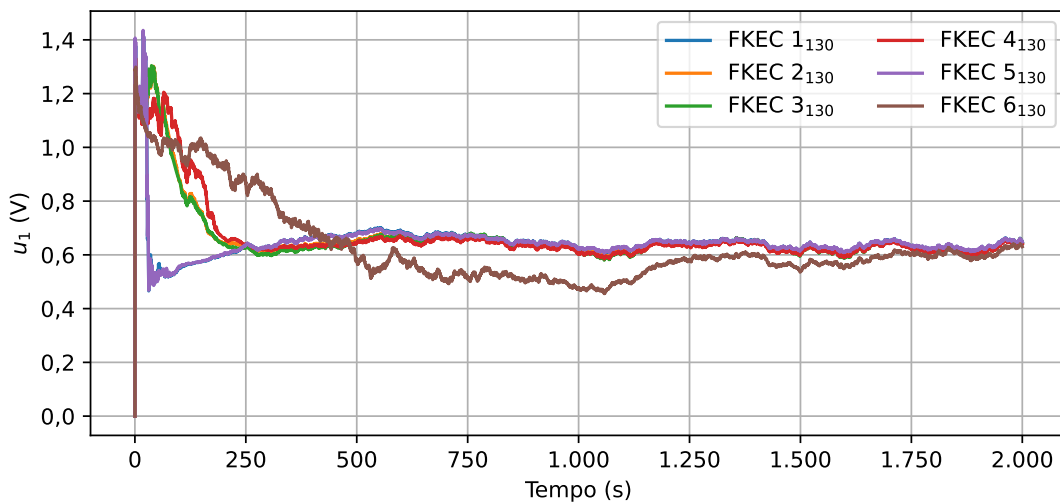


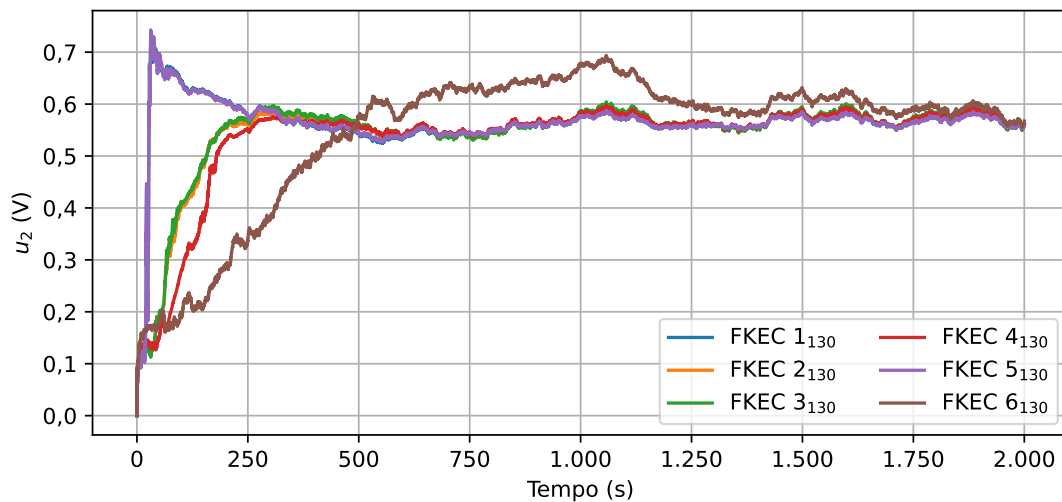
(a) Evolução da saída y_1 .

(b) Evolução da saída y_2 .Figura 3.11 – Evolução das saídas com o FKEC para diferentes P_0 .

Fonte: Produzido pelo autor.

O comportamento observado nos índices da Tabela 3.7 também pode ser visualizado nas Figuras 3.11 e 3.12. Para y_2 , todos os casos conseguiram atingir a referência desejada (linha preta tracejada), enquanto, para y_1 , apenas P_0^6 não a alcançou (curva marrom). Isso pode ser explicado pelos valores escolhidos, que foram baixos e impediram a convergência dos valores estimados. Além disso, é possível observar uma sobreposição das saídas no par P_0^1 e P_0^5 (curvas azul e roxa, respectivamente). Quanto às ações de controle, é exatamente esse par que apresenta os maiores picos e variações. No entanto, em regime permanente, todos os casos convergem para 0,6 V para as duas entradas. De fato, isso se reflete na saída y_2 , uma vez que o sistema alcançou a referência mais rapidamente nesses dois casos.

(a) Evolução da ação de controle u_1 .

(b) Evolução da ação de controle u_2 .Figura 3.12 – Evolução das ações de controle com o FKEC para diferentes P_0 .

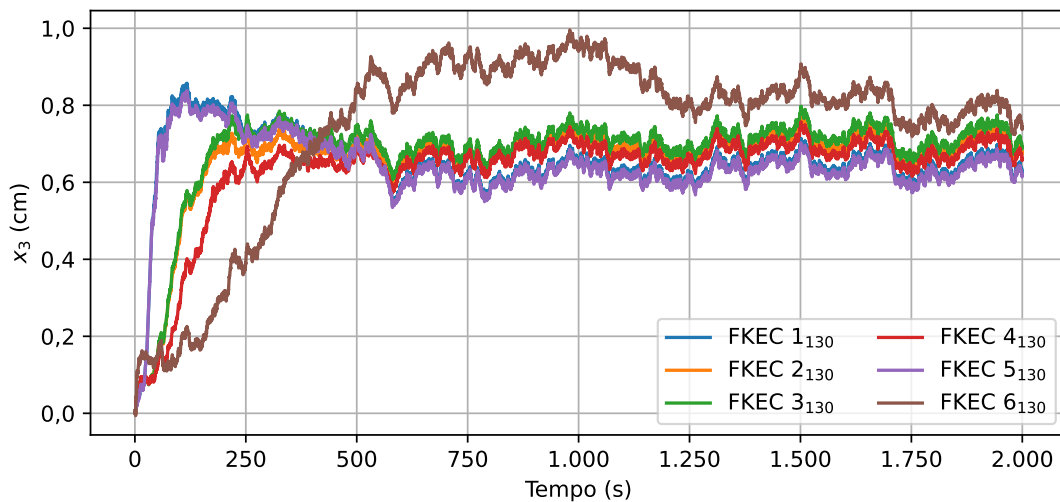
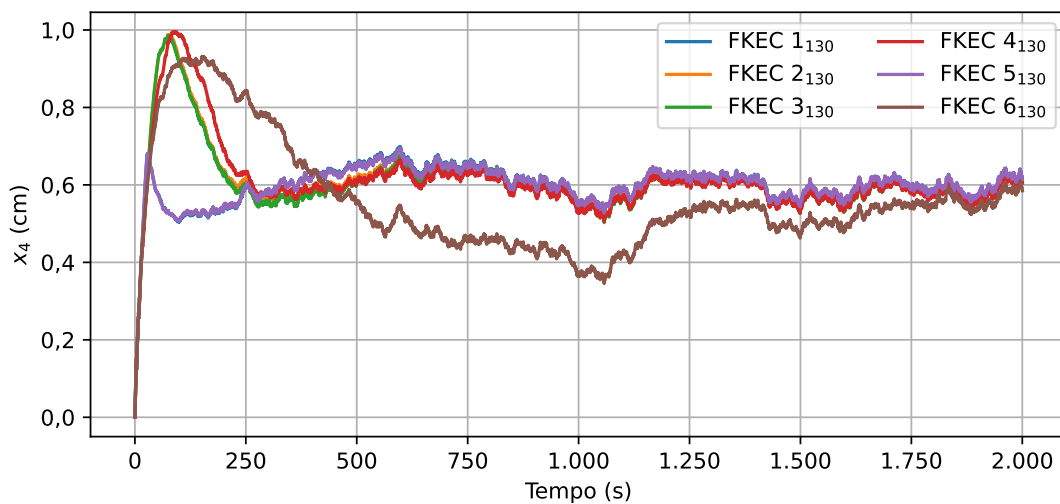
Fonte: Produzido pelo autor.

A Tabela 3.8 apresenta os resultados de desempenho de precisão na estimação dos estados não-medidos e nos parâmetros desconhecidos. A partir dos valores, fica mais evidente que P_0^6 não conseguiu convergir θ_3 e x_3 , o que, por sua vez, prejudicou o desempenho da saída y_1 . De fato, todos os casos conseguiram estimar x_4 com erro na ordem de 10^{-3} e os parâmetros θ_1 e θ_2 de 10^{-5} . Apesar disso, somente P_0^1 e P_0^5 apresentaram erro na ordem de 10^{-3} para o estado x_3 e somente o primeiro conseguiu estimar θ_3 na ordem de 10^{-5} . Isso sugere que o parâmetro mais complexo de ser estimado é o θ_3 , em função da incerteza na sua equação. Em comparação com o FK ideal, o erro na estimação dos estados foi maior para todos os casos. De maneira geral, P_0^1 apresentou o melhor desempenho na estimação.

Tabela 3.8 – Precisão dos estados não-medidos e parâmetros desconhecidos com o FKEC para diferentes P_0 (intervalo 1).

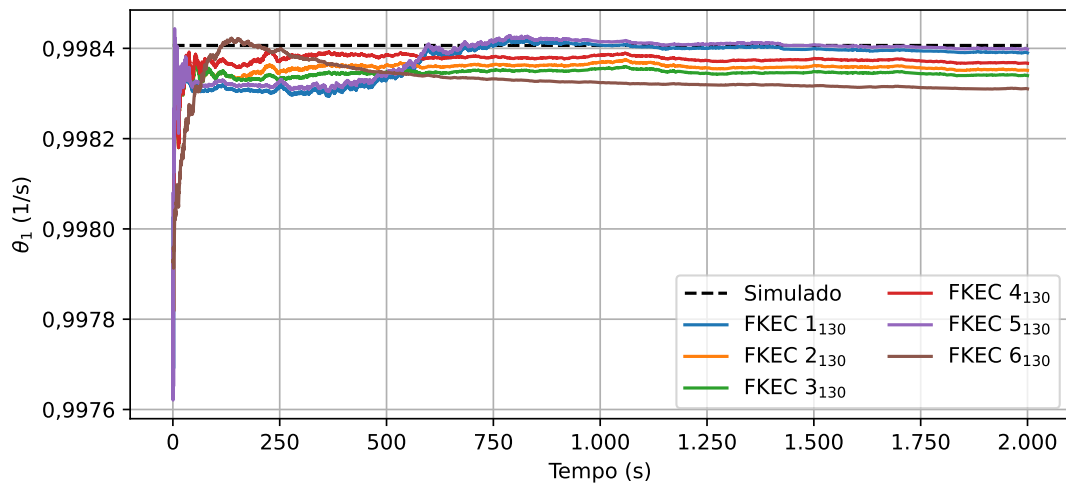
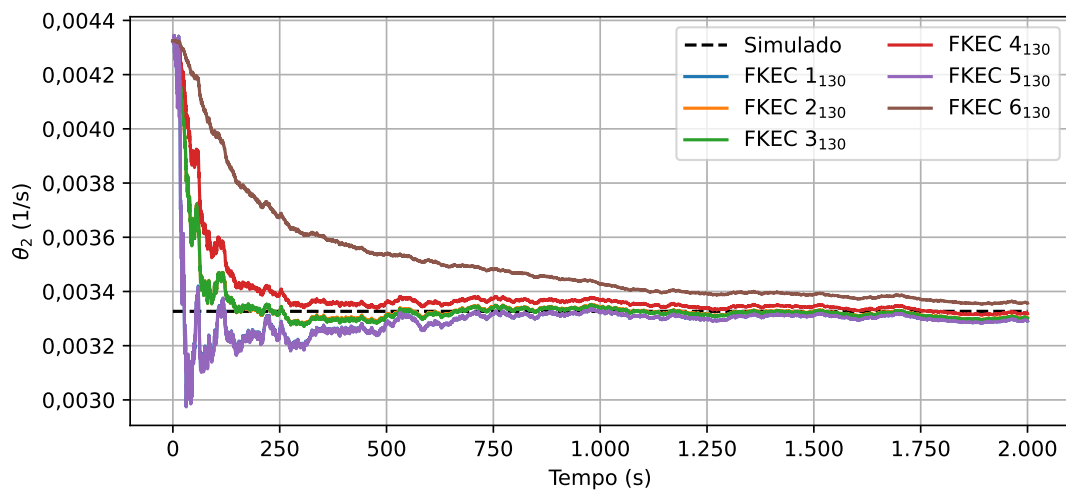
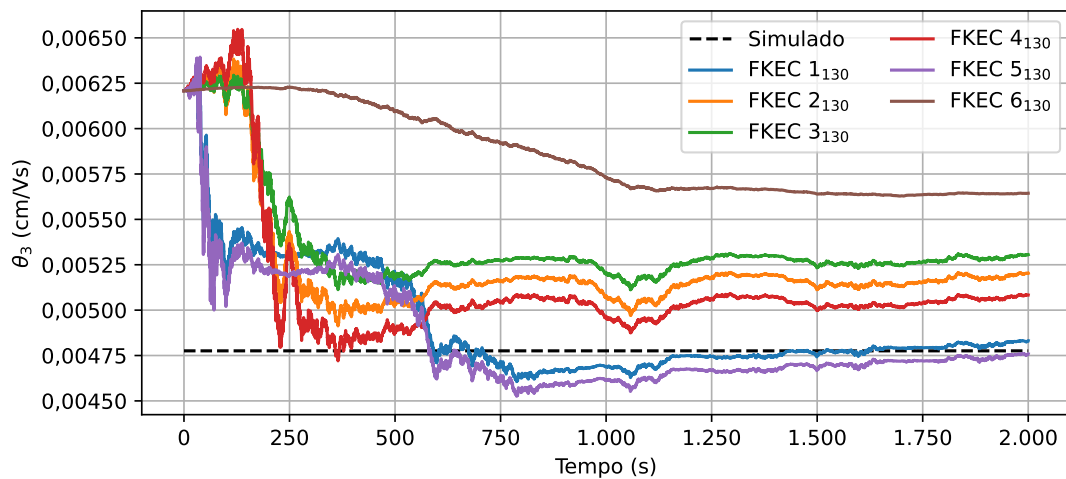
		P_0^1	P_0^2	P_0^3	P_0^4	P_0^5	P_0^6
RMSE	x_3	4,68 $\times 10^{-3}$	$5,20 \times 10^{-2}$	$6,76 \times 10^{-2}$	$3,45 \times 10^{-2}$	$9,24 \times 10^{-3}$	$1,22 \times 10^{-1}$
	x_4	$6,34 \times 10^{-3}$	$4,00 \times 10^{-3}$	3,66 $\times 10^{-3}$	$3,67 \times 10^{-3}$	$6,39 \times 10^{-3}$	$8,35 \times 10^{-3}$
	θ_1	$1,27 \times 10^{-5}$	$5,03 \times 10^{-5}$	$6,27 \times 10^{-5}$	$3,49 \times 10^{-5}$	4,88 $\times 10^{-6}$	$9,34 \times 10^{-5}$
	θ_2	$2,91 \times 10^{-5}$	$1,74 \times 10^{-5}$	$1,85 \times 10^{-5}$	1,11 $\times 10^{-5}$	$2,91 \times 10^{-5}$	$4,56 \times 10^{-5}$
	θ_3	2,73 $\times 10^{-5}$	$3,85 \times 10^{-4}$	$4,95 \times 10^{-4}$	$2,69 \times 10^{-4}$	$5,72 \times 10^{-5}$	$8,63 \times 10^{-4}$
MAE	x_3	3,81 $\times 10^{-3}$	$5,18 \times 10^{-2}$	$6,74 \times 10^{-2}$	$3,42 \times 10^{-2}$	$8,14 \times 10^{-3}$	$1,22 \times 10^{-1}$
	x_4	$6,15 \times 10^{-3}$	$3,57 \times 10^{-3}$	3,14 $\times 10^{-3}$	$3,28 \times 10^{-3}$	$6,19 \times 10^{-3}$	$7,09 \times 10^{-3}$
	θ_1	$1,24 \times 10^{-5}$	$5,02 \times 10^{-5}$	$6,26 \times 10^{-5}$	$3,48 \times 10^{-5}$	4,27 $\times 10^{-6}$	$9,33 \times 10^{-5}$
	θ_2	$2,73 \times 10^{-5}$	$1,48 \times 10^{-5}$	$1,59 \times 10^{-5}$	9,58 $\times 10^{-6}$	$2,73 \times 10^{-5}$	$4,41 \times 10^{-5}$
	θ_3	2,28 $\times 10^{-5}$	$3,85 \times 10^{-4}$	$4,95 \times 10^{-4}$	$2,68 \times 10^{-4}$	$5,36 \times 10^{-5}$	$8,63 \times 10^{-4}$

Fonte: Produzido pelo autor.

(a) Evolução da estimativa do estado x_3 .(b) Evolução da estimativa do estado x_4 .Figura 3.13 – Evolução dos estados não-medidos com o FKEC para diferentes P_0 .

Fonte: Produzido pelo autor.

O comportamento descrito na Tabela 3.8 também é observado nas Figuras 3.13 e 3.14. Em regime permanente, as estimativas do estado x_3 ficaram entre 0,6 e 0,8 cm, enquanto as do estado x_4 se aproximaram de 0,6 cm, como no FK ideal. Os valores para θ_1 ficaram entre 0,9983 e 0,9984 e é notável a oscilação na estimação para as curvas azul e roxa (P_0^1 e P_0^5 , respectivamente). O comportamento é análogo para θ_2 , mas os valores foram mais próximos, com uma grande oscilação nas curvas azul e roxa. Por fim, em θ_3 , é possível visualizar as maiores diferenças. Por exemplo, diminuir o valor de p_7 fez com que θ_3 se afastasse do valor correto (curvas laranja, verde e marrom). É possível observar que, apesar de P_0^1 e P_0^6 apresentarem os melhores resultados, também apresentaram as curvas com maiores oscilações na estimação dos parâmetros. As implicações desse resultado serão discutidas mais à frente na seção.

(a) Evolução da estimativa do parâmetro θ_1 .(b) Evolução da estimativa do parâmetro θ_2 .(c) Evolução da estimativa do parâmetro θ_3 .Figura 3.14 – Evolução dos parâmetros desconhecidos com o FKEC para diferentes P_0 .

Fonte: Produzido pelo autor.

Agora, considerando a variação na condição inicial dos parâmetros desconhecidos, a Tabela 3.9 dispõe os valores de P_0 de um dos melhores resultados obtidos experimentalmente para cada caso. Em seguida, pela Tabela 3.10, é possível notar que os valores calculados são próximos ou menores que o caso com FK ideal, indicando que o sistema conseguiu alcançar a referência desejada, como verificável pela Figura 3.15. Apesar disso, pela Figura 3.16, é possível observar que as curvas marrom, roxa e vermelha (130%, 120% e 110%, respectivamente) apresentaram grandes oscilações na ação de controle, especialmente para u_1 .

Tabela 3.9 – Parâmetros da matriz de covariância inicial no FKEC $j_i (P_0)$.

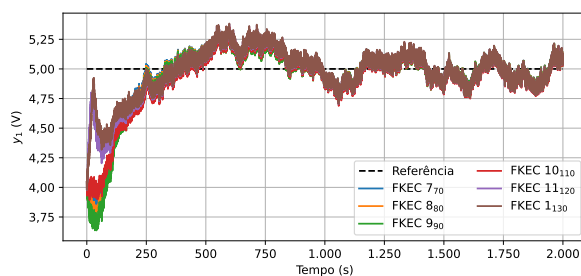
	70%	80%	90%	110%	120%	130%
	P_0^7	P_0^8	P_0^9	P_0^{10}	P_0^{11}	P_0^1
p_5	10^{-6}	10^{-6}	10^{-6}	$2,5 \times 10^{-8}$	$2,5 \times 10^{-7}$	5×10^{-7}
p_6	10^{-6}	10^{-6}	10^{-6}	5×10^{-8}	$2,5 \times 10^{-7}$	5×10^{-7}
p_7	$7,5 \times 10^{-6}$	5×10^{-6}	$2,5 \times 10^{-6}$	$2,5 \times 10^{-7}$	5×10^{-7}	$7,5 \times 10^{-7}$

Fonte: Produzido pelo autor.

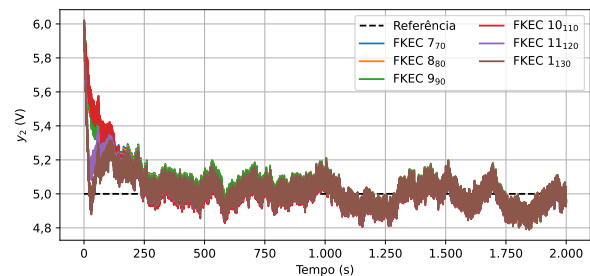
Tabela 3.10 – Resultado percentual dos índices de desempenho de controle com o FKEC para diferentes θ_0 em comparação com o FK ideal (intervalo 1).

		70%	80%	90%	110%	120%	130%
ISE_%	y_1	-51,37%	-50,81%	-50,08%	-42,46%	-46,35%	-46,38%
	y_2	4,24%	4,56%	4,72%	2,80%	-2,62%	-4,36%
ITSE_%	y_1	-50,85%	-50,31%	-49,60%	-42,11%	-45,86%	-45,87%
	y_2	3,90%	4,25%	4,43%	2,62%	-2,99%	-4,78%
IAE_%	y_1	-30,12%	-29,68%	-29,12%	-23,61%	-26,42%	-26,45%
	y_2	1,82%	1,99%	2,08%	1,20%	-1,72%	-2,66%
ITAE_%	y_1	-29,49%	-29,07%	-28,53%	-23,11%	-25,81%	-25,83%
	y_2	1,75%	1,93%	2,03%	1,23%	-1,81%	-2,79%
TVC_%	u_1	-24,10%	-23,59%	-22,62%	-4,05%	-4,49%	-2,88%
	u_2	-12,40%	-12,27%	-12,03%	-2,00%	-2,60%	-1,27%

Fonte: Produzido pelo autor.



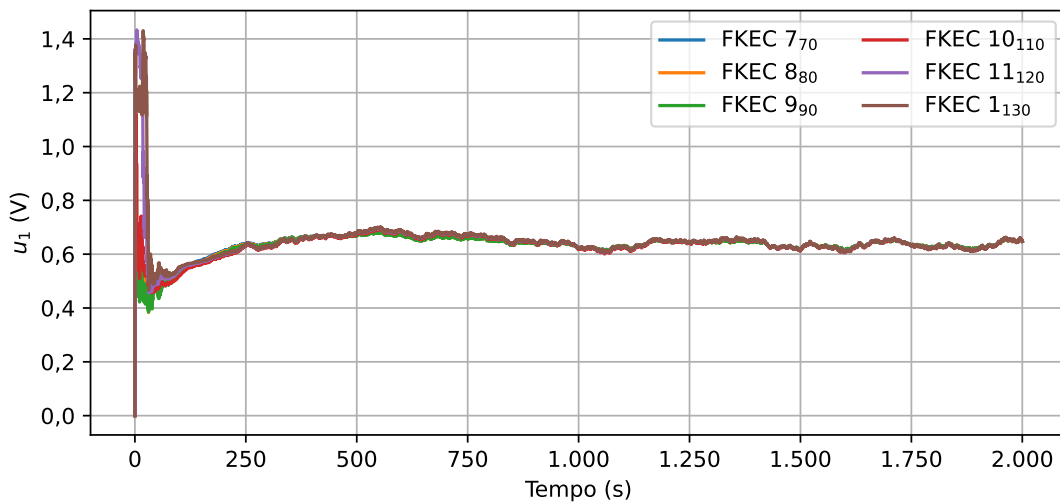
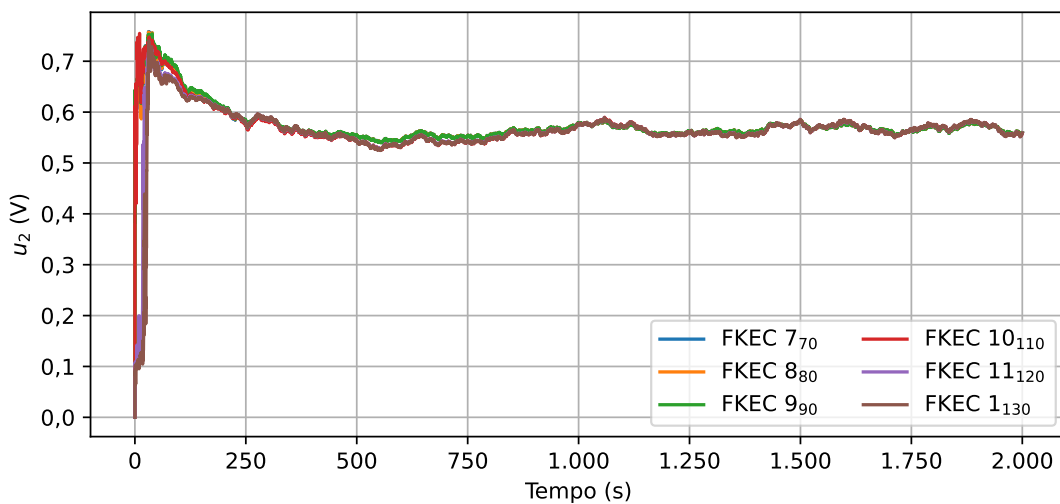
(a) Evolução da saída y_1 .



(b) Evolução da saída y_2 .

Figura 3.15 – Evolução das saídas com o FKEC para diferentes θ_0 .

Fonte: Produzido pelo autor.

(a) Evolução da ação de controle u_1 .(b) Evolução da ação de controle u_2 .Figura 3.16 – Evolução das ações de controle com o FKEC para diferentes θ_0 .

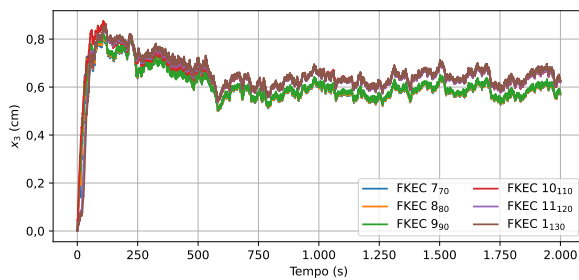
Fonte: Produzido pelo autor.

Enquanto isso, a Tabela 3.11 apresenta os resultados obtidos para precisão da estimação. É possível notar que x_4 , θ_1 e θ_2 foram estimados bem em todas as condições, mas somente para condições iguais ou acima de 110%, x_3 e θ_3 foram estimados corretamente. Esse comportamento é visualizável na Figura 3.17, na qual, para x_3 , o valor estimado se separou em dois grupos, e na Figura 3.18, na qual os valores de θ_3 se aproximaram de 0,0044. Durante os testes, foi observado que o FKEC não conseguiu convergir bem quando θ_3 era menor que sua condição nominal. De fato, grandes variações na covariância inicial resultavam em pequenas mudanças na estimação do parâmetro em troca de um aumento significativo na oscilação das entradas. Para as próximas abordagens, os valores apresentados serão comparados com o desempenho do FKEC, conforme apresentado na equação 3.31, em cada valor de θ_0 considerado para tentar facilitar o entendimento.

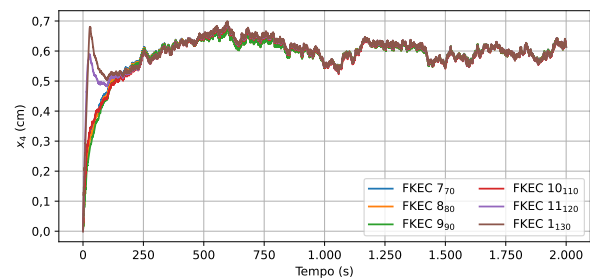
Tabela 3.11 – Precisão dos estados não-medidos e parâmetros desconhecidos com o FKEC para diferentes θ_0 (intervalo 1).

		70%	80%	90%	110%	120%	130%
RMSE	x_3	$6,09 \times 10^{-2}$	$5,93 \times 10^{-2}$	$5,61 \times 10^{-2}$	$5,32 \times 10^{-3}$	$5,00 \times 10^{-3}$	$4,68 \times 10^{-3}$
	x_4	$6,13 \times 10^{-3}$	$6,07 \times 10^{-3}$	$6,01 \times 10^{-3}$	$6,16 \times 10^{-3}$	$6,35 \times 10^{-3}$	$6,34 \times 10^{-3}$
	θ_1	$4,07 \times 10^{-5}$	$3,95 \times 10^{-5}$	$3,70 \times 10^{-5}$	$7,28 \times 10^{-6}$	$8,63 \times 10^{-6}$	$1,27 \times 10^{-5}$
	θ_2	$2,90 \times 10^{-5}$	$2,87 \times 10^{-5}$	$2,82 \times 10^{-5}$	$1,91 \times 10^{-5}$	$2,73 \times 10^{-5}$	$2,91 \times 10^{-5}$
	θ_3	$4,48 \times 10^{-4}$	$4,36 \times 10^{-4}$	$4,12 \times 10^{-4}$	$1,94 \times 10^{-5}$	$2,18 \times 10^{-5}$	$2,73 \times 10^{-5}$
MAE	x_3	$6,06 \times 10^{-2}$	$5,90 \times 10^{-2}$	$5,59 \times 10^{-2}$	$4,43 \times 10^{-3}$	$4,03 \times 10^{-3}$	$3,81 \times 10^{-3}$
	x_4	$5,86 \times 10^{-3}$	$5,80 \times 10^{-3}$	$5,74 \times 10^{-3}$	$5,96 \times 10^{-3}$	$6,16 \times 10^{-3}$	$6,15 \times 10^{-3}$
	θ_1	$4,07 \times 10^{-5}$	$3,95 \times 10^{-5}$	$3,69 \times 10^{-5}$	$7,11 \times 10^{-6}$	$8,38 \times 10^{-6}$	$1,24 \times 10^{-5}$
	θ_2	$2,72 \times 10^{-5}$	$2,68 \times 10^{-5}$	$2,63 \times 10^{-5}$	$1,63 \times 10^{-5}$	$2,54 \times 10^{-5}$	$2,73 \times 10^{-5}$
	θ_3	$4,48 \times 10^{-4}$	$4,36 \times 10^{-4}$	$4,12 \times 10^{-4}$	$1,76 \times 10^{-5}$	$1,80 \times 10^{-5}$	$2,28 \times 10^{-5}$

Fonte: Produzido pelo autor.



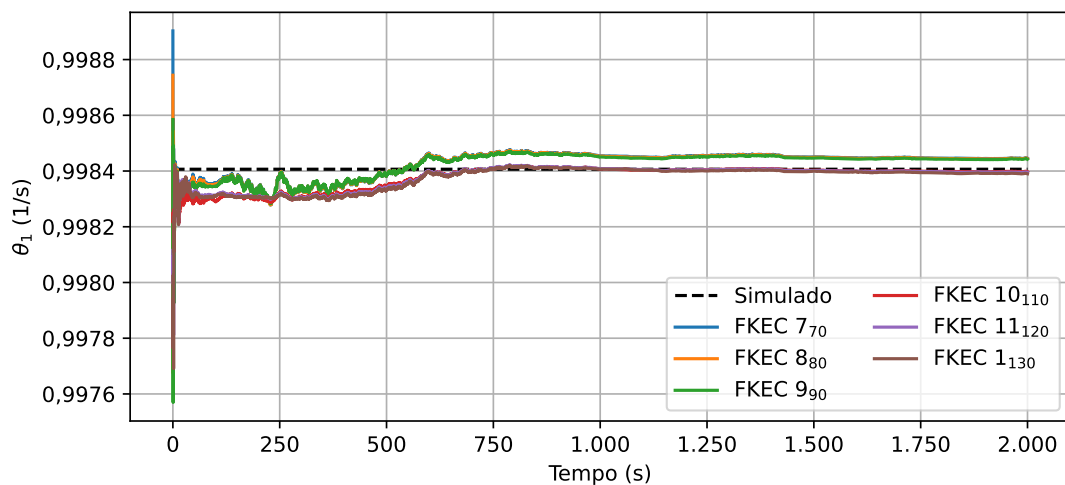
(a) Evolução da estimativa do estado x_3 .



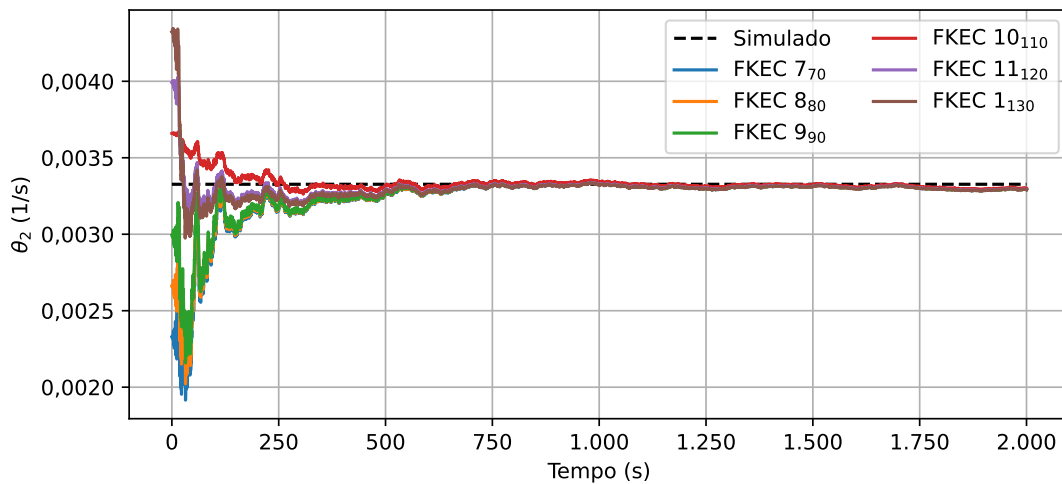
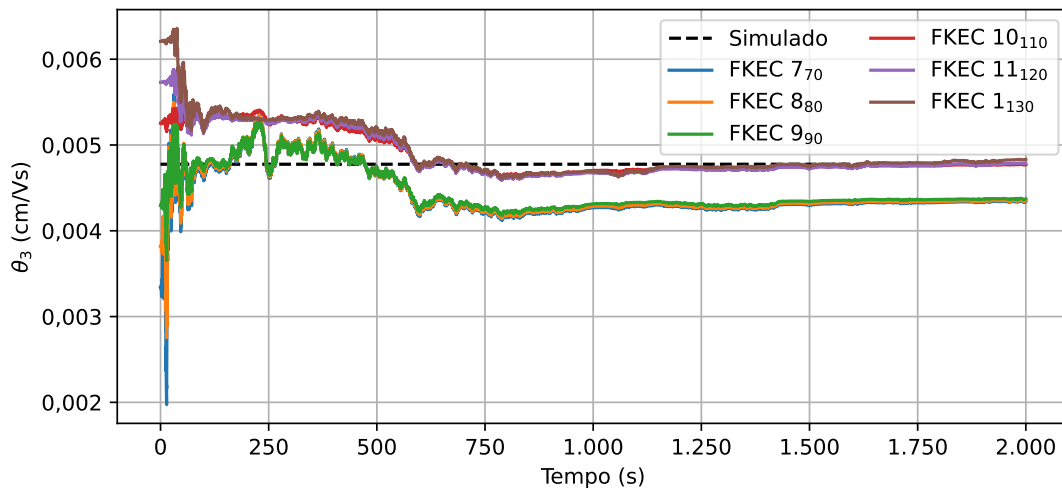
(b) Evolução da estimativa do estado x_4 .

Figura 3.17 – Evolução dos estados não-medidos com o FKEC para diferentes θ_0 .

Fonte: Produzido pelo autor.



(a) Evolução da estimativa do parâmetro θ_1 .

(b) Evolução da estimativa do parâmetro θ_2 .(c) Evolução da estimativa do parâmetro θ_3 .Figura 3.18 – Evolução dos parâmetros desconhecidos com o FKEC para diferentes θ_0 .

Fonte: Produzido pelo autor.

É possível observar pelas curvas azul, laranja e verde que a estimação dos parâmetros já oscila bastante, então aumentar ainda mais essa oscilação não parece uma solução razoável. Esse resultado sugere que o FKEC possui uma limitação de estimação nesse sistema e com esses parâmetros desconhecidos, ainda que o desempenho de controle das saídas seja comparável com o caso ideal. Em aplicações práticas, existem dinâmicas que não são modeladas, representadas, usualmente, em alta frequência. As oscilações bruscas nas entradas ou nos parâmetros, que modificam o controlador muito rapidamente, podem acabar por excitar essas frequências não modeladas e levar o sistema a responder de forma inesperada. Em função disso, a aplicação do FKEC para estimação simultânea em malha fechada pode não ser adequada em sistemas reais, nos quais essas dinâmicas realmente afetam o sistema.

3.5 Estimação dual com FKD

Enquanto isso, para a estimação dual com FKD, a dinâmica dos parâmetros foi escrita na representação dependente de estados, para evitar as não-linearidades resultantes da representação livre de estados e simplificar a implementação. Para tanto, as equações de estado foram escritas no formato da equação 2.6. Dessa forma, a equação para o primeiro parâmetro, $\phi_{11,k-1}$, pode ser escrita como

$$\begin{aligned} x_{1,k} &= \phi_{11,k-1}x_{1,k-1} + 0,0042x_{3,k-1} + 0,0083u_{1,k-1}, \\ x_{1,k} - 0,0042x_{3,k-1} - 0,0083u_{1,k-1} &= \phi_{11,k-1}x_{1,k-1}, \\ z_{1,k} &= \phi_{11,k-1}x_{1,k-1}. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Analogamente, para os parâmetros ϕ_{24} e γ_{32} , temos as seguintes equações

$$\begin{aligned} x_{2,k} &= 0,9989x_{2,k-1} + \phi_{24,k-1}x_{4,k-1} + 0,0063u_{2,k-1}, \\ x_{2,k} - 0,9989x_{2,k-1} - 0,0063u_{2,k-1} &= \phi_{24,k-1}x_{4,k-1}, \\ z_{2,k} &= \phi_{24,k-1}x_{4,k-1}; \end{aligned} \quad (3.37)$$

$$\begin{aligned} x_{3,k} &= 0,9958x_{3,k-1} + \gamma_{32,k-1}u_{2,k-1}, \\ x_{3,k} - 0,9958x_{3,k-1} &= \gamma_{32,k-1}u_{2,k-1}, \\ z_{3,k} &= \gamma_{32,k-1}u_{2,k-1}. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Assim, colocando o sistema na forma matricial, a expressão para a saída do modelo pode ser escrita como

$$\begin{bmatrix} z_{1,k} \\ z_{2,k} \\ z_{3,k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{1,k-1} & 0 & 0 \\ 0 & x_{4,k-1} & 0 \\ 0 & 0 & u_{2,k-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{11,k-1} \\ \phi_{24,k-1} \\ \gamma_{32,k-1} \end{bmatrix}; \quad (3.39)$$

$$\mathbf{z}_k = D_k^T \boldsymbol{\theta}_k.$$

Então, tomando a equação 2.31 como equação de estado, temos que a dinâmica dos parâmetros pode ser representada por

$$\begin{cases} \boldsymbol{\theta}_{k+1} = \boldsymbol{\theta}_k + \mathbf{w}_{\boldsymbol{\theta}_k}; \\ \mathbf{z}_k = D_k^T \boldsymbol{\theta}_k. \end{cases} \quad (3.40)$$

O FK dos estados foi inicializado igual ao caso ideal, ou seja, condição inicial \mathbf{x}_0 para os estados e matriz de covariância inicial $P_0 = 0,01I_{4 \times 4}$. Enquanto isso, para o FK dos parâmetros, a condição inicial foi definida conforme a Tabela 3.3 e as matrizes de covariância de ruído foram definidas como

$$\begin{cases} Q_{\theta,k} = 10^{-10}I_{3 \times 3}; \\ R_{\theta,k} = I_{3 \times 3}, \end{cases} \quad (3.41)$$

em que a matriz $R_{\theta,k}$ foi definida de forma equivalente à realizada por L. Nelson e Stear (1976) e a matriz $Q_{\theta,k}$ foi ajustada experimentalmente para equilibrar o nível de oscilação e a habilidade de estimação do FK. Além disso, a matriz de covariância inicial foi definida como

$$P_{\theta,0}^j = \text{diag}\{p_1, p_2, p_3\}, \quad (3.42)$$

em que os valores p_1 , p_2 e p_3 foram variados ao longo dos testes e j é um identificador da matriz. Assim como para o caso ideal, o sistema em malha fechada foi simulado no *Simulink* do MATLAB® ao longo de 2.000 segundos.

3.5.1 Resultados

A abordagem adotada para o FKD é semelhante à adotada para o FKEC, e, portanto, o impacto da matriz de covariância será discutido para a condição inicial de 130%. Novamente, somente os valores referentes aos parâmetros foram variados. Para as outras condições, apresentaremos apenas um dos melhores resultados obtidos. Neste capítulo, FKD j_i denota o FKD com a matriz $P_{\theta,0}^j$ e condição inicial i dos parâmetros desconhecidos.

A Tabela 3.12 apresenta alguns dos valores testados para a matriz $P_{\theta,0}$ experimentalmente. Em seguida, a Tabela 3.13 mostra os resultados percentuais de desempenho de controle para cada $P_{\theta,0}$. Apenas $P_{\theta,0}^3$ e $P_{\theta,0}^4$ foram melhores que o FK ideal em todos os critérios, mas é possível observar que $P_{\theta,0}^1$ se aproximou deste para todos os critérios nos quais não é melhor ou igual. Além disso, em função dos erros calculados, nota-se que $P_{\theta,0}^2$ e $P_{\theta,0}^5$ não conseguiram alcançar a referência desejada de forma satisfatória. O termo comum nesses dois casos é o valor de p_3 , que, por ser pequeno, pode ter impedido a convergência adequada dos parâmetros. Considerando um balanço entre todos os índices, $P_{\theta,0}^4$ apresentou o melhor desempenho nos critérios de controle.

Tabela 3.12 – Parâmetros da matriz de covariância inicial no FKD j_{130} ($P_{\theta,0}$).

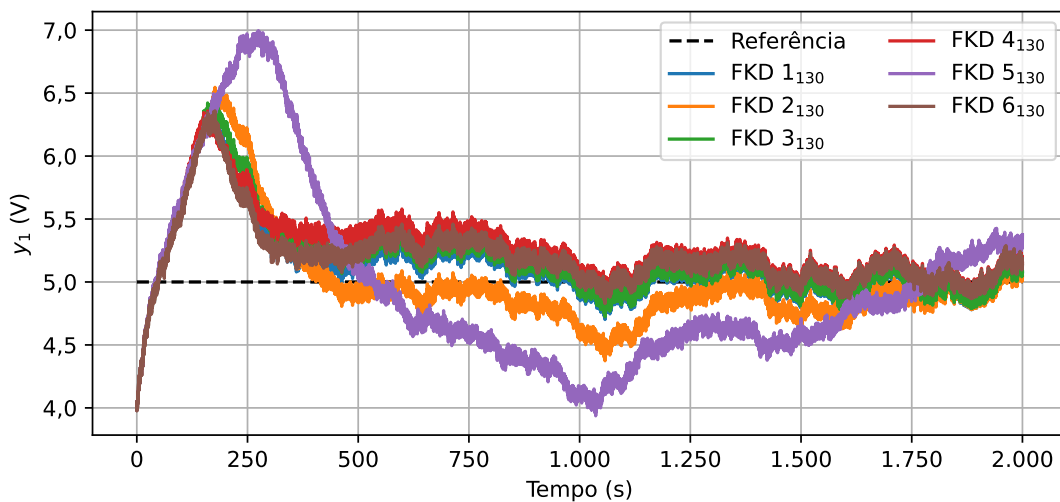
	$P_{\theta,0}^1$	$P_{\theta,0}^2$	$P_{\theta,0}^3$	$P_{\theta,0}^4$	$P_{\theta,0}^5$	$P_{\theta,0}^6$
p_1	$6,5 \times 10^{-5}$	5×10^{-5}	5×10^{-5}	5×10^{-5}	$2,5 \times 10^{-5}$	$7,5 \times 10^{-5}$
p_2	$7,5 \times 10^{-4}$	$7,5 \times 10^{-4}$	$7,5 \times 10^{-4}$	$7,5 \times 10^{-4}$	$2,5 \times 10^{-4}$	5×10^{-4}
p_3	5×10^{-3}	$2,5 \times 10^{-3}$	5×10^{-3}	$7,5 \times 10^{-3}$	$2,5 \times 10^{-3}$	$7,5 \times 10^{-3}$

Fonte: Produzido pelo autor.

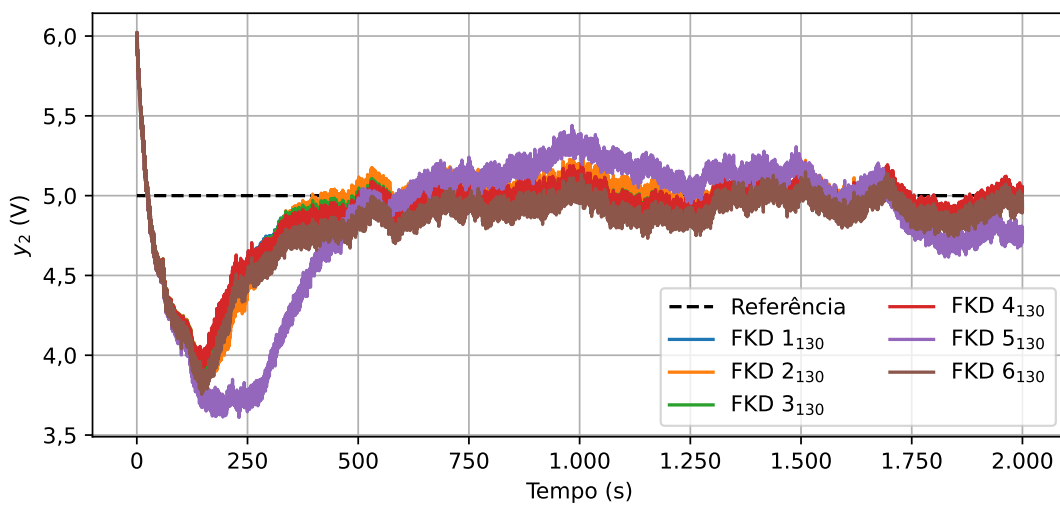
Tabela 3.13 – Resultado percentual dos índices de desempenho de controle com o FKD para diferentes $P_{\theta,0}$ em comparação com o FK ideal (intervalo 1).

		$P_{\theta,0}^1$	$P_{\theta,0}^2$	$P_{\theta,0}^3$	$P_{\theta,0}^4$	$P_{\theta,0}^5$	$P_{\theta,0}^6$
ISE_%	y_1	-47,13%	52,59%	-50,87%	-30,17%	269,43%	-43,09%
	y_2	14,71%	4,58%	-3,48%	-6,69%	522,60%	94,29%
ITSE_%	y_1	-46,62%	44,03%	-50,20%	-28,90%	261,63%	-41,81%
	y_2	14,89%	4,05%	-3,81%	-7,57%	548,20%	95,25%
IAE_%	y_1	-27,04%	25,39%	-30,00%	-21,71%	102,38%	-29,92%
	y_2	7,44%	1,78%	-2,14%	-3,96%	153,25%	42,76%
ITAE_%	y_1	-26,40%	21,45%	-29,25%	-21,02%	100,84%	-29,08%
	y_2	7,73%	1,82%	-2,20%	-4,34%	162,09%	43,63%
TVC_%	u_1	-2,85%	33,41%	-0,80%	-25,30%	246,94%	-34,69%
	u_2	-2,26%	49,31%	-0,78%	-13,96%	174,31%	-12,54%

Fonte: Produzido pelo autor.



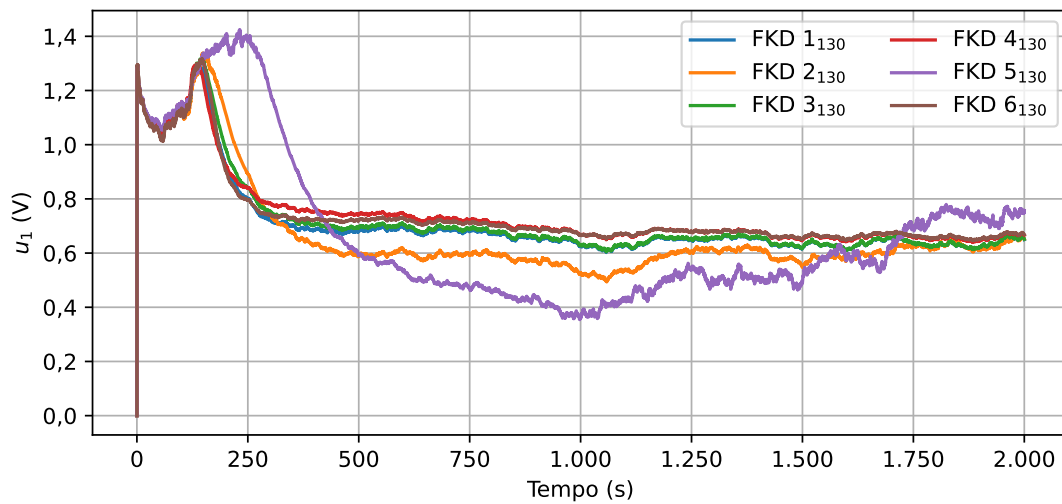
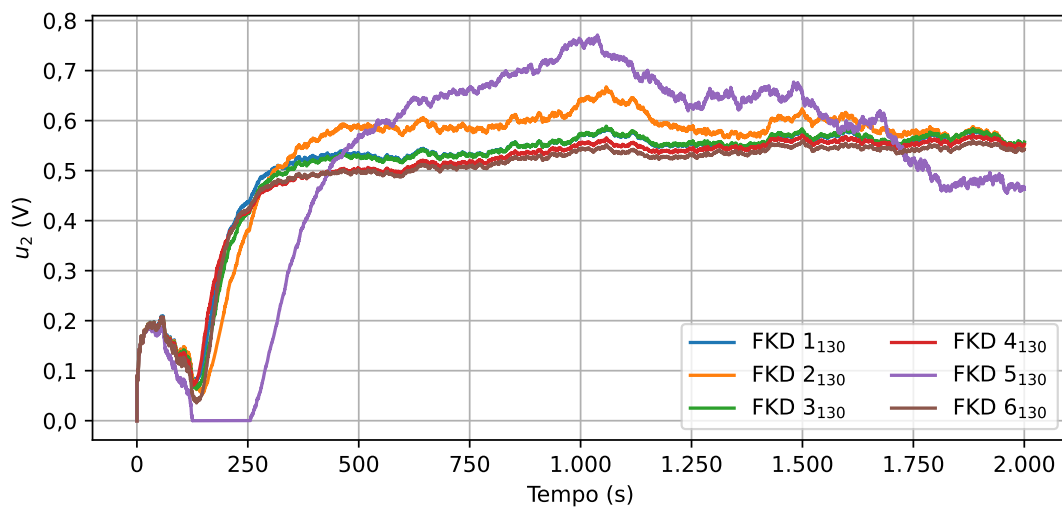
(a) Evolução da saída y_1 .



(b) Evolução da saída y_2 .

Figura 3.19 – Evolução das saídas com o FKD para diferentes $P_{\theta,0}$.

Fonte: Produzido pelo autor.

(a) Evolução da ação de controle u_1 .(b) Evolução da ação de controle u_2 .Figura 3.20 – Evolução das ações de controle com o FKD para diferentes $P_{\theta,0}$.

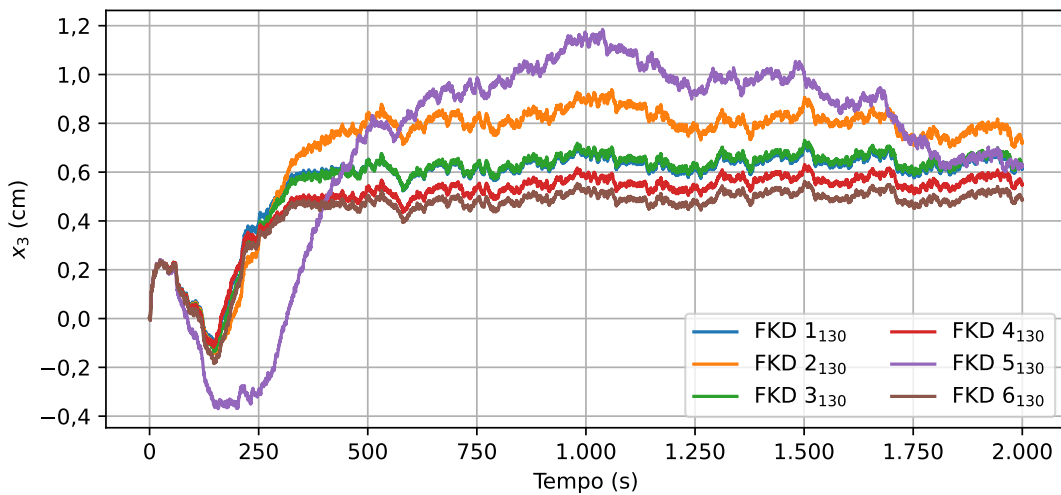
Fonte: Produzido pelo autor.

Em relação ao desempenho de precisão nos estados não-medidos e nos parâmetros desconhecidos, somente $P_{\theta,0}^1$ conseguiu estimar estados e parâmetros desconhecidos com erros melhores ou próximos ao FKEC, como apresentado na Tabela 3.14. Em função disso, $P_{\theta,0}^1$ apresentou o melhor desempenho geral. É importante destacar $P_{\theta,0}^3$, cuja precisão geral se aproximou do FKEC, mas apresentou erros elevados em x_3 e em θ_3 . A diferença entre os dois casos é o ajuste no parâmetro p_1 da matriz $P_{\theta,0}$. Para as outras condições de $P_{\theta,0}$, os erros apresentados foram maiores, com maiores variações na precisão de θ_1 e θ_3 . Assim como observado para o FKEC, em comparação com o FK ideal, o erro na precisão dos estados não-medidos foi maior para todos os casos.

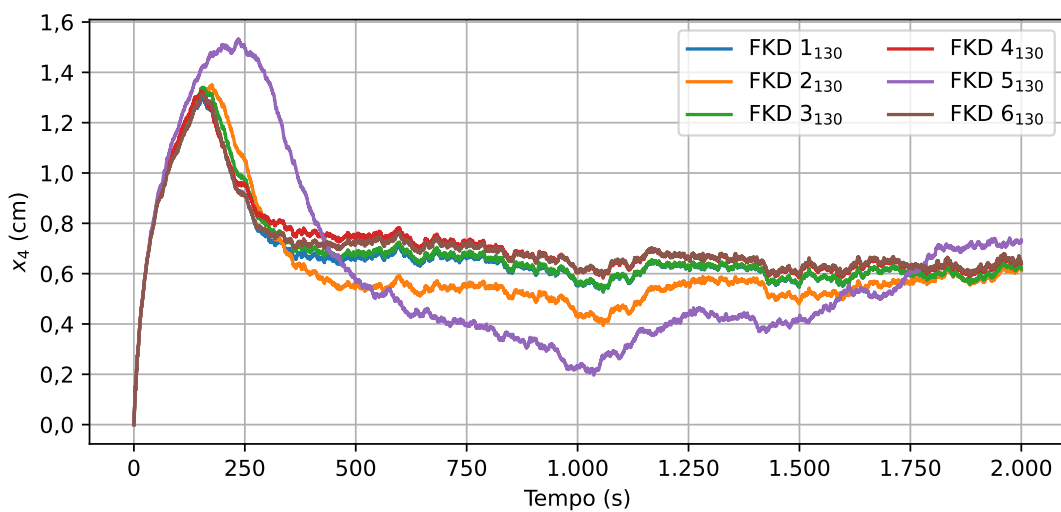
Tabela 3.14 – Resultado percentual da precisão dos estados não-medidos e parâmetros desconhecidos com o FKD para diferentes $P_{\theta,0}$ em comparação com o FKEC (intervalo 1).

	$P_{\theta,0}^1$	$P_{\theta,0}^2$	$P_{\theta,0}^3$	$P_{\theta,0}^4$	$P_{\theta,0}^5$	$P_{\theta,0}^6$	
RMSE_%	x_3	-47,72%	2573,15%	123,38%	1304,78%	3356,95%	2398,53%
	x_4	27,63%	-4,96%	21,34%	146,84%	306,56%	193,65%
	θ_1	10,67%	723,42%	73,01%	115,47%	899,26%	411,05%
	θ_2	-67,79%	67,17%	-2,57%	142,94%	472,19%	-58,43%
	θ_3	19,02%	3303,75%	221,99%	1681,45%	4733,22%	2934,51%
MAE_%	x_3	-48,62%	3172,87%	167,07%	1621,70%	3988,09%	2964,74%
	x_4	29,47%	-16,01%	22,81%	151,97%	275,50%	199,58%
	θ_1	12,39%	739,13%	76,10%	118,87%	918,23%	420,38%
	θ_2	-72,11%	75,12%	0,79%	157,36%	507,13%	-62,75%
	θ_3	33,06%	3982,64%	283,56%	2036,54%	5697,22%	3539,48%

Fonte: Produzido pelo autor.



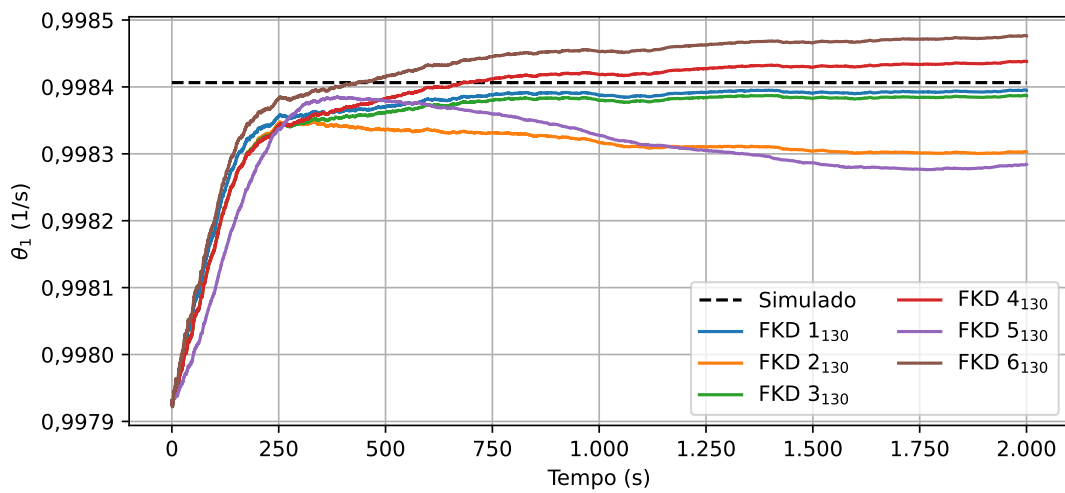
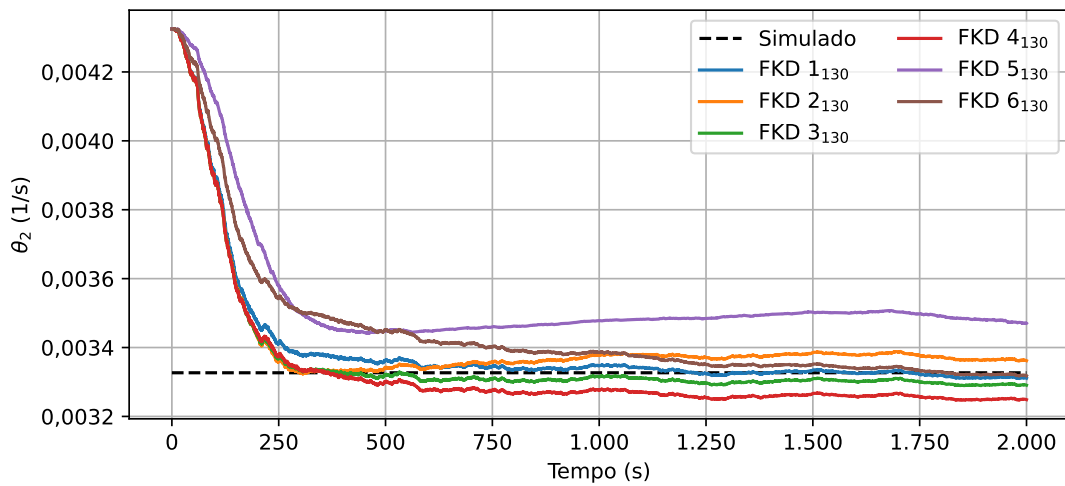
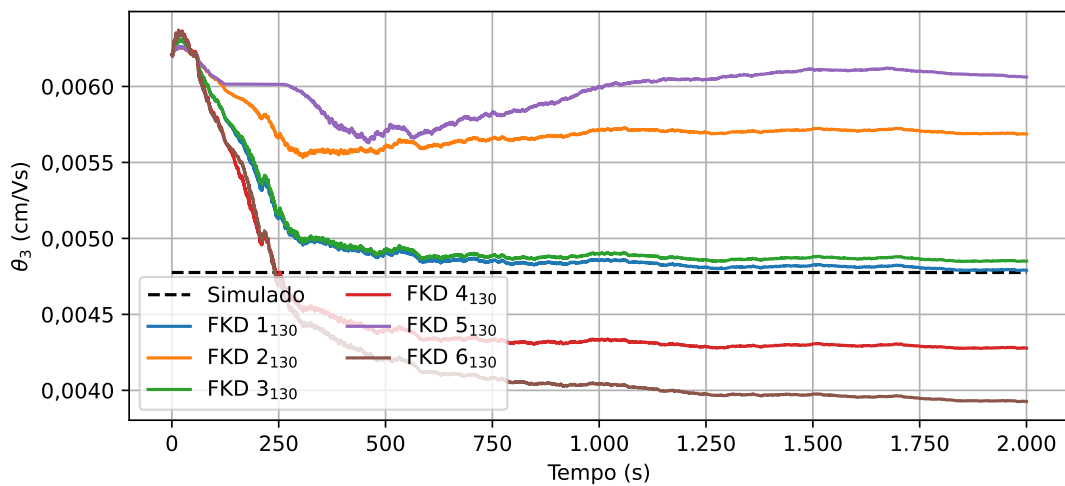
(a) Evolução da estimativa do estado x_3 .



(b) Evolução da estimativa do estado x_4 .

Figura 3.21 – Evolução dos estados não-medidos com o FKD para diferentes $P_{\theta,0}$.

Fonte: Produzido pelo autor.

(a) Evolução da estimativa do parâmetro θ_1 .(b) Evolução da estimativa do parâmetro θ_2 .(c) Evolução da estimativa do parâmetro θ_3 .Figura 3.22 – Evolução dos parâmetros desconhecidos com o FKD para diferentes $P_{\theta,0}$.

Fonte: Produzido pelo autor.

Na Figura 3.21, que apresenta as estimativas x_3 e x_4 , é possível observar a diferença na evolução dos estados para cada um dos casos. Cabe ressaltar que, apesar da estimativa de x_3 apresentar valores negativos, os valores desse estado simulados na planta foram saturados em 0 cm, para tentar representar o sistema de forma mais realista. Enquanto isso, pela Figura 3.22, é possível notar que as curvas laranja e roxa ($P_{\theta,0}^2$ e $P_{\theta,0}^5$) erraram o valor de θ_1 para menos, enquanto as curvas vermelha e marrom ($P_{\theta,0}^4$ e $P_{\theta,0}^6$) o fizeram para mais. A situação se inverteu para θ_3 . Esse resultado ilustra o efeito da escolha de p_3 na convergência dos parâmetros. É preciso notar que, apesar da curva vermelha estimar θ_3 abaixo do valor esperado, $P_{\theta,0}^4$ apresentou o melhor desempenho nos índices de controle. Outro ponto de destaque é a forma muito mais suave com a qual os parâmetros convergiram no FKD se comparado com o FKEC.

Agora, considerando a variação na condição inicial dos parâmetros desconhecidos, a Tabela 3.15 dispõe os valores de $P_{\theta,0}$ de um dos melhores resultados obtidos para cada caso. Em seguida, pela Tabela 3.16, é possível notar que todos os valores calculados são próximos ou menores que o caso com FK ideal, indicando que o sistema conseguiu alcançar a referência desejada, como verificável pela Figura 3.23. Além disso, pela Figura 3.24, é possível observar que as curvas da ação de controle oscilaram bem menos que as apresentadas para o FKEC. Inclusive, para valores menores ou iguais a 110% na condição inicial dos parâmetros, as curvas se aproximaram bastante das observadas no caso com FK ideal.

Tabela 3.15 – Parâmetros da matriz de covariância inicial no FKD j_i ($P_{\theta,0}$).

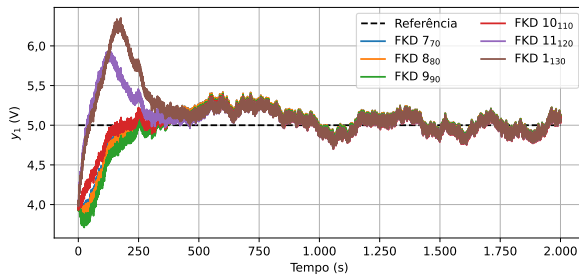
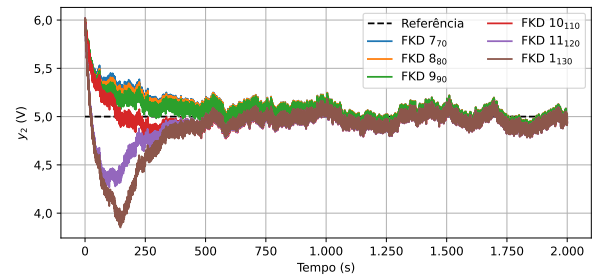
	70% $P_{\theta,0}^7$	80% $P_{\theta,0}^8$	90% $P_{\theta,0}^9$	110% $P_{\theta,0}^{10}$	120% $P_{\theta,0}^{11}$	130% $P_{\theta,0}^1$
p_1	$2,75 \times 10^{-2}$	$2,25 \times 10^{-2}$	$8,5 \times 10^{-3}$	5×10^{-5}	$7,5 \times 10^{-5}$	$6,5 \times 10^{-5}$
p_2	$1,5 \times 10^{-2}$	10^{-2}	$7,5 \times 10^{-3}$	5×10^{-4}	$7,5 \times 10^{-4}$	$7,5 \times 10^{-4}$
p_3	$1,5 \times 10^{-2}$	10^{-2}	$7,5 \times 10^{-3}$	$1,5 \times 10^{-3}$	$3,25 \times 10^{-3}$	5×10^{-3}

Fonte: Produzido pelo autor.

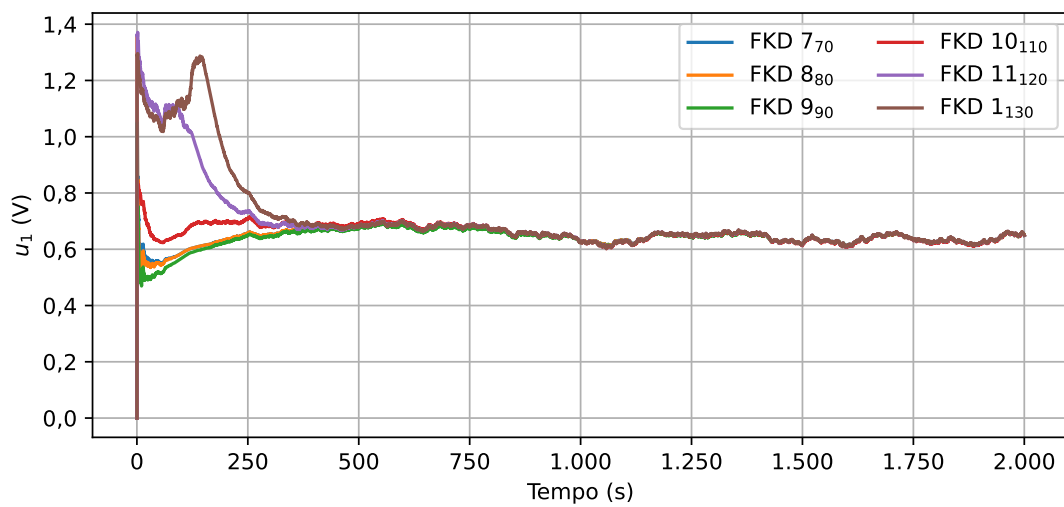
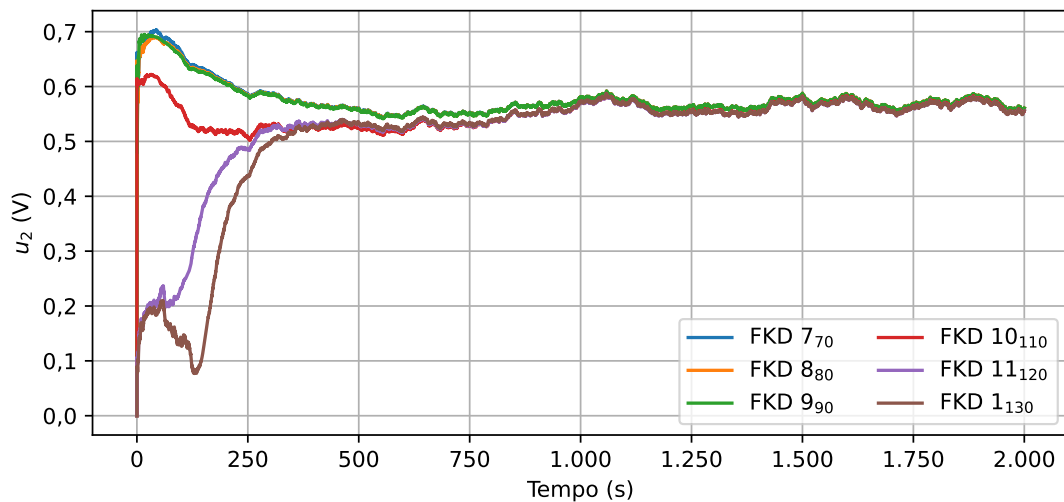
Tabela 3.16 – Resultado percentual dos índices de desempenho de controle com o FKD para diferentes θ_0 em comparação com o FK ideal (intervalo 1).

		70%	80%	90%	110%	120%	130%
ISE_%	y_1	-53,01%	-52,64%	-51,08%	-42,89%	-46,24%	-47,13%
	y_2	-16,68%	-16,83%	-14,96%	15,84%	17,82%	14,71%
ITSE_%	y_1	-52,26%	-51,91%	-50,42%	-42,49%	-45,75%	-46,62%
	y_2	-18,22%	-18,35%	-16,22%	16,04%	18,04%	14,89%
IAE_%	y_1	-31,75%	-31,43%	-30,08%	-23,97%	-26,37%	-27,04%
	y_2	-9,99%	-10,07%	-8,88%	8,02%	9,00%	7,44%
ITAE_%	y_1	-30,96%	-30,64%	-29,34%	-23,43%	-25,76%	-26,40%
	y_2	-10,72%	-10,80%	-9,47%	8,31%	9,32%	7,73%
TVC_%	u_1	-7,52%	-6,71%	-7,01%	-1,72%	-3,19%	-2,85%
	u_2	-8,17%	-7,53%	-7,64%	-1,44%	-2,64%	-2,26%

Fonte: Produzido pelo autor.

(a) Evolução da saída y_1 .(b) Evolução da saída y_2 .Figura 3.23 – Evolução das saídas com o FKD para diferentes θ_0 .

Fonte: Produzido pelo autor.

(a) Evolução da ação de controle u_1 .(b) Evolução da ação de controle u_2 .Figura 3.24 – Evolução das ações de controle com o FKD para diferentes θ_0 .

Fonte: Produzido pelo autor.

Enquanto isso, a Tabela 3.17 apresenta os resultados percentuais obtidos para precisão da estimação. É possível notar que, para todas as condições estudadas, o FKD apresentou

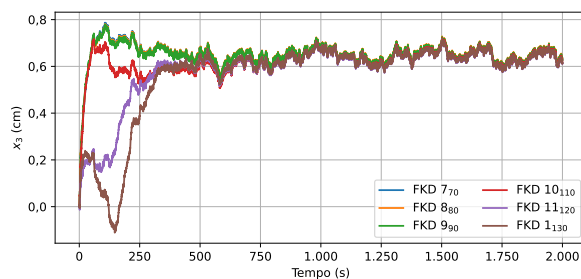
desempenho superior em x_3 e próximo em x_4 quando comparado ao FKEC. Além disso, o erro em θ_3 para as condições iniciais abaixo do valor nominal foi muito menor (cerca de 50 vezes menor) em troca de um aumento moderado no erro de θ_2 . Esse resultado por si só já aponta uma vantagem na aplicação do FKD em relação ao FKEC. A Figura 3.25 apresenta a estimação dos estados, na qual a partir de 500 segundos todos estão próximos a 0,6 cm, e a Figura 3.26 a dos parâmetros, na qual é possível observar como a estimativa se aproximou do valor esperado (linha preta tracejada) em todos os casos.

No entanto, é notável a diferença na forma de convergência dos parâmetros com valores iniciais acima e abaixo do valor nominal. De fato, para conseguir alcançar a convergência neste caso, foi preciso elevar os valores da matriz $P_{\theta,0}$ e, essa alteração, resultou no aumento de picos e oscilações como as observadas nas curvas azul, laranja e verde da Figura 3.26. Ainda que as oscilações apresentadas sejam bastante menores que as observadas no FKEC, realizar essas trocas bruscas no valor dos parâmetros pode não ser adequado em aplicações práticas porque pode excitar frequências não modeladas e levar o sistema a responder inesperadamente.

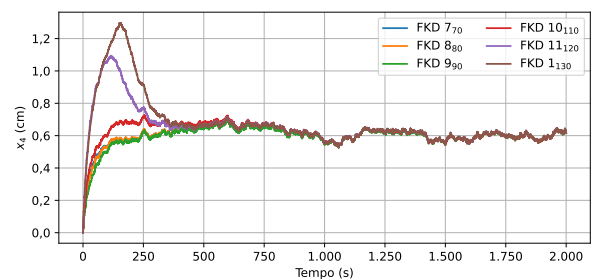
Tabela 3.17 – Resultado percentual da precisão dos estados não-medidos e parâmetros desconhecidos com o FKD para diferentes θ_0 em comparação com o FKEC (intervalo 1).

		70%	80%	90%	110%	120%	130%
RMSE_%	x_3	-94,96%	-92,04%	-94,58%	-35,16%	-42,46%	-47,72%
	x_4	-6,38%	-6,62%	-7,26%	21,97%	27,90%	27,63%
	θ_1	-71,55%	-66,45%	-69,67%	108,42%	48,45%	10,67%
	θ_2	102,65%	104,59%	82,81%	-52,39%	-67,59%	-67,79%
	θ_3	-97,59%	-97,86%	-98,25%	167,72%	13,60%	19,02%
MAE_%	x_3	-95,89%	-92,96%	-95,59%	-35,44%	-42,16%	-48,62%
	x_4	-5,49%	-5,83%	-6,64%	23,43%	29,68%	29,47%
	θ_1	-71,61%	-66,50%	-69,74%	112,82%	52,26%	12,39%
	θ_2	114,34%	117,11%	94,02%	-49,25%	-68,38%	-72,11%
	θ_3	-97,93%	-98,28%	-98,53%	190,14%	21,89%	33,06%

Fonte: Produzido pelo autor.



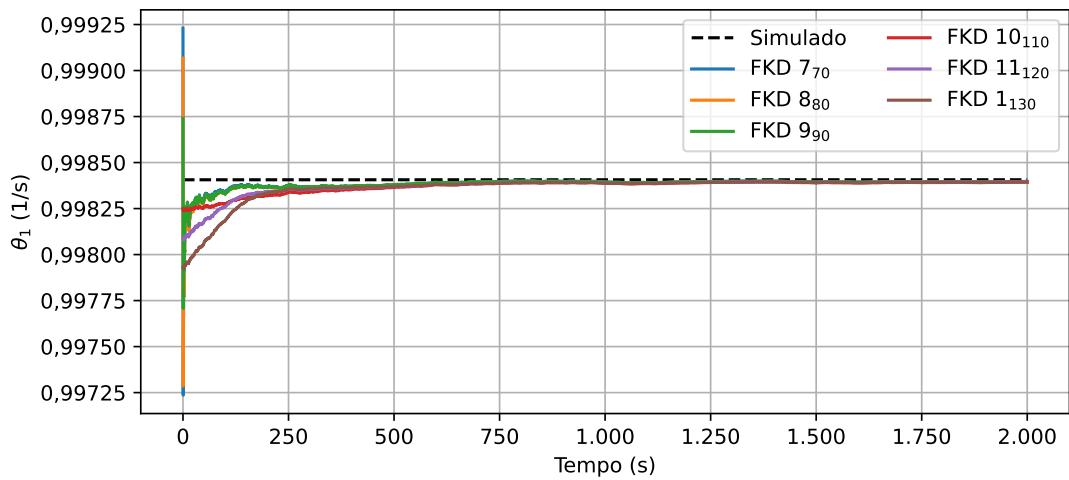
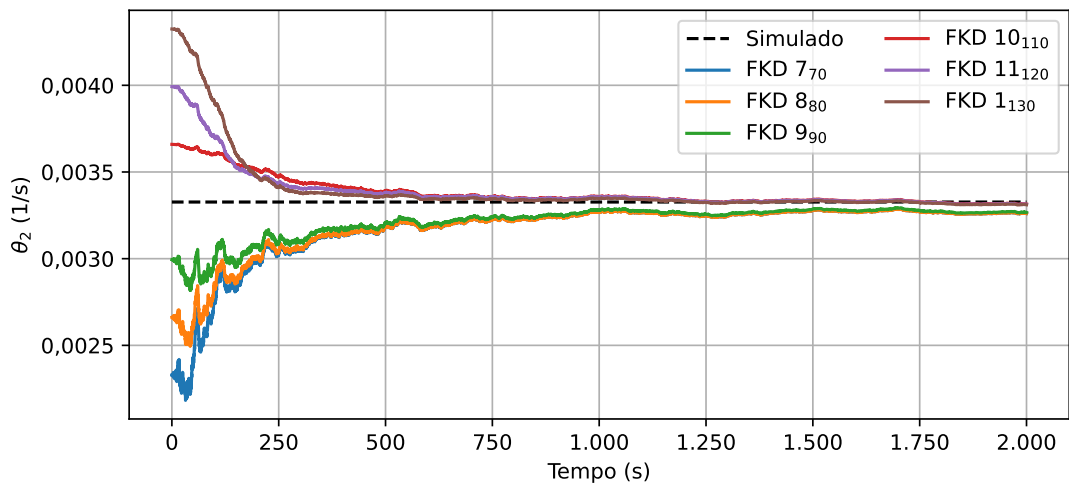
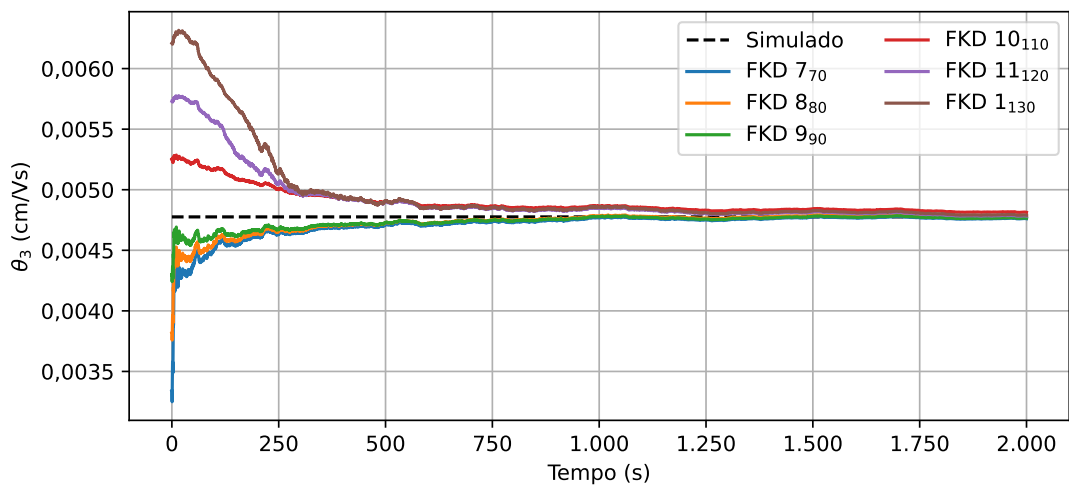
(a) Evolução da estimativa do estado x_3 .



(b) Evolução da estimativa do estado x_4 .

Figura 3.25 – Evolução dos estados não-medidos com o FKD para diferentes θ_0 .

Fonte: Produzido pelo autor.

(a) Evolução da estimativa do parâmetro θ_1 .(b) Evolução da estimativa do parâmetro θ_2 .(c) Evolução da estimativa do parâmetro θ_3 .Figura 3.26 – Evolução dos parâmetros desconhecidos com o FGD para diferentes θ_0 .

Fonte: Produzido pelo autor.

3.6 Estimação dual com FK e MQR- λ

Para a estimação dual com FK e MQR- λ , as equações de estado foram escritas como na equação 2.6, assim como utilizado para o FKD (ver Seção 3.5). Dessa forma, a equação para os parâmetros desconhecidos na forma matricial é dada por

$$\begin{bmatrix} z_{1,k} \\ z_{2,k} \\ z_{3,k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{1,k-1} & 0 & 0 \\ 0 & x_{4,k-1} & 0 \\ 0 & 0 & u_{2,k-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{11,k-1} \\ \phi_{24,k-1} \\ \gamma_{32,k-1} \end{bmatrix}; \quad (3.43)$$

$$\mathbf{z}_k = D_k^T \boldsymbol{\theta}_k.$$

Com o sistema na forma da equação 2.6, é possível aplicar o MQR (ou MQR- λ) para realizar a estimação dos parâmetros. Para tanto, o FK foi inicializado com condição inicial \mathbf{x}_0 para o estados e o MQR- λ de acordo com a Tabela 3.3 para os parâmetros. Além disso, a matriz de covariância inicial do FK foi definida como $P_0 = 0,01I_{4 \times 4}$ e a matriz do MQR- λ foi definida como

$$P_{\theta,0}^j = \text{diag}\{p_1, p_2, p_3\}, \quad (3.44)$$

em que p_1 , p_2 e p_3 são valores que foram variados aos longo dos testes e j é um identificador da matriz. Assim como para o caso ideal, o sistema em malha fechada foi simulado no *Simulink* do MATLAB® ao longo de 2.000 segundos.

3.6.1 Resultados

A abordagem adotada para o FK e MQR- λ é semelhante à adotada nas seções anteriores. Neste capítulo, FK e MQR- λ_i denota o FK e MQR- λ com o conjunto i de parâmetros λ , a matriz $P_{\theta,0}^j$ e condição inicial i dos parâmetros desconhecidos.

Para tanto, a Tabela 3.18 apresenta alguns dos valores testados para a matriz $P_{\theta,0}$ experimentalmente. Inicialmente, todos os casos testados para a condição de 130% foram realizados com a matriz $L = I_{3 \times 3}$, ou seja, o algoritmo clássico do MQR em sua versão para múltiplas saídas. Essa condição será denotada por λ_1 . Em seguida, a Tabela 3.19 apresenta os resultados percentuais de desempenho de controle para cada $P_{\theta,0}$. É possível notar que nenhum dos resultados apresentados conseguiu ser melhor que o FK ideal em todos os critérios; no entanto, somente $P_{\theta,0}^5$ e $P_{\theta,0}^6$ têm desempenho pior em todos os índices. Para os outros casos, o TVC nas ações de controle e o desempenho da saída y_1 foram melhores ou próximos ao FK ideal. Vale destacar que, até este ponto, a estimação dual com FK e MQR apresentou os piores desempenhos nos índices de controle. Considerando um balanço de todos os índices, $P_{\theta,0}^4$ apresentou o melhor desempenho nos critérios de controle.

Tabela 3.18 – Parâmetros da matriz de covariância inicial no FK e MQR- λ J_{130} ($P_{\theta,0}$).

	$P_{\theta,0}^1$	$P_{\theta,0}^2$	$P_{\theta,0}^3$	$P_{\theta,0}^4$	$P_{\theta,0}^5$	$P_{\theta,0}^6$
p_1	10^{-4}	5×10^{-4}	$2,5 \times 10^{-4}$	10^{-4}	10^{-4}	10^{-4}
p_2	$7,5 \times 10^{-4}$	10^{-3}	10^{-3}	$7,5 \times 10^{-4}$	$7,5 \times 10^{-4}$	$7,5 \times 10^{-4}$
p_3	$4,75 \times 10^{-3}$	5×10^{-3}	$7,5 \times 10^{-3}$	$7,5 \times 10^{-3}$	$2,5 \times 10^{-3}$	$3,5 \times 10^{-3}$

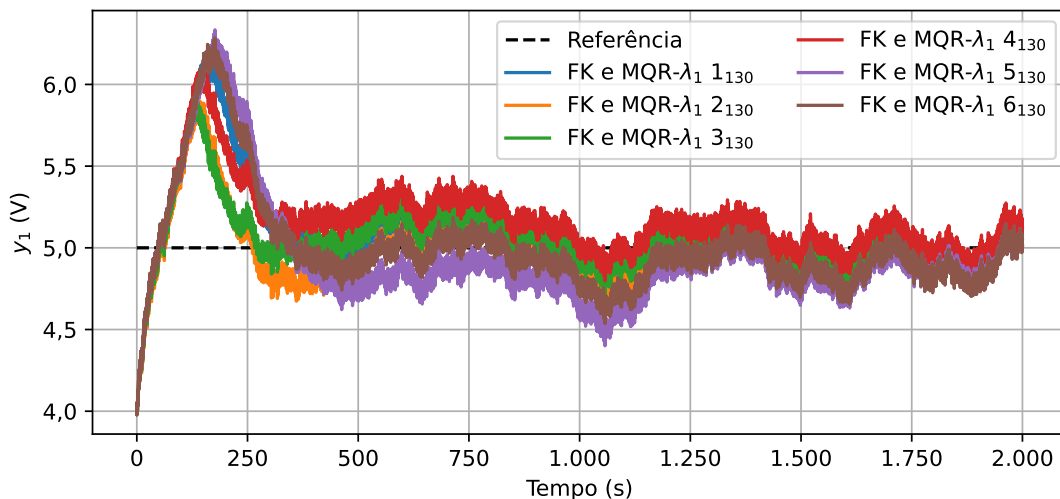
Fonte: Produzido pelo autor.

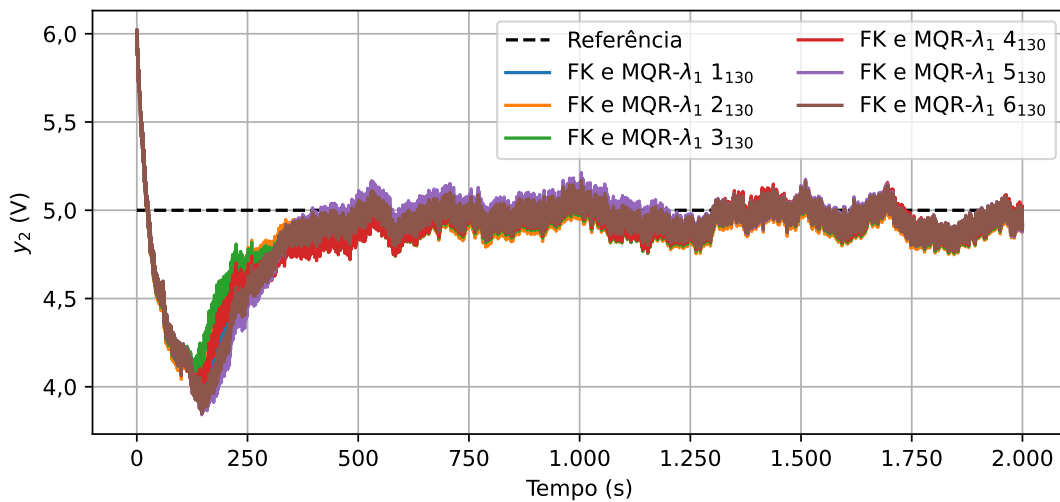
Tabela 3.19 – Resultado percentual dos índices de desempenho de controle com o FK e MQR- λ para diferentes $P_{\theta,0}$ em comparação com o FK ideal (intervalo 1).

		$P_{\theta,0}^1$	$P_{\theta,0}^2$	$P_{\theta,0}^3$	$P_{\theta,0}^4$	$P_{\theta,0}^5$	$P_{\theta,0}^6$
ISE%	y_1	-33,25%	5,07%	-52,91%	-51,74%	56,69%	36,77%
	y_2	54,02%	96,70%	66,21%	44,97%	33,82%	37,93%
ITSE%	y_1	-33,17%	4,21%	-52,28%	-50,49%	50,90%	34,85%
	y_2	54,77%	97,55%	67,03%	45,56%	34,96%	38,64%
IAE%	y_1	-17,66%	3,34%	-31,44%	-35,12%	28,78%	18,66%
	y_2	26,30%	45,04%	31,30%	21,56%	16,44%	19,06%
ITAE%	y_1	-17,37%	2,90%	-30,73%	-34,16%	26,02%	17,62%
	y_2	27,03%	45,94%	32,05%	22,11%	17,43%	19,77%
TVC%	u_1	-0,62%	4,88%	-18,48%	-26,69%	22,47%	19,34%
	u_2	0,34%	7,06%	-11,54%	-13,09%	55,82%	30,14%

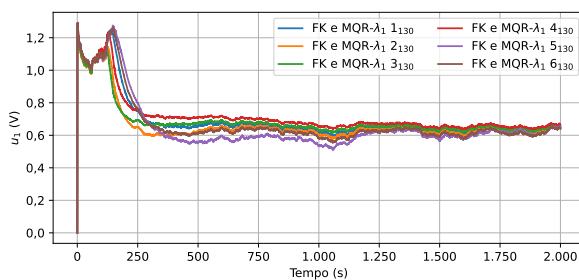
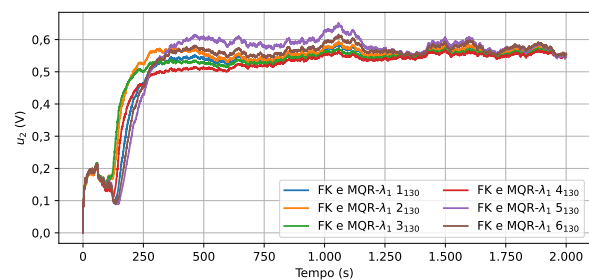
Fonte: Produzido pelo autor.

A partir das Figuras 3.27, é possível observar que, apesar dos resultados adversos nos índices de controle, o sistema conseguiu convergir para a referência desejada na saída y_2 em todos os casos. Além disso, em y_1 , somente as curvas roxa e marrom ($P_{\theta,0}^5$ e $P_{\theta,0}^6$) não conseguiram alcançar a referência. Depois, a Figura 3.28 apresenta as ações de controle, e é possível notar que são semelhantes às apresentadas para o FKD e, assim como observado para estas, possuem menos oscilações e picos que as apresentadas para o FKEC.

(a) Evolução da saída y_1 .

(b) Evolução da saída y_2 .Figura 3.27 – Evolução das saídas com o FK e MQR- λ para diferentes $P_{\theta,0}$.

Fonte: Produzido pelo autor.

(a) Evolução da ação de controle u_1 .(b) Evolução da ação de controle u_2 .Figura 3.28 – Evolução das ações de controle com o FK e MQR- λ para diferentes $P_{\theta,0}$.

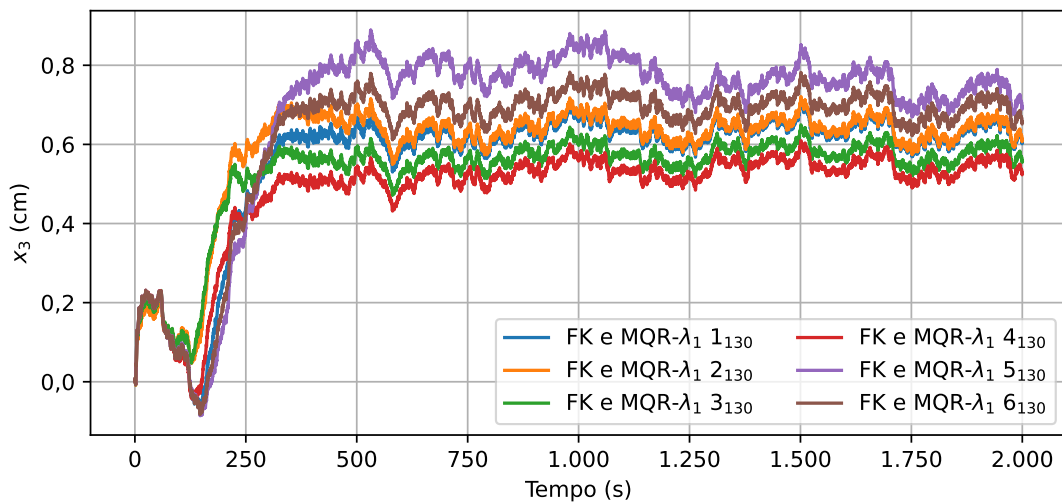
Fonte: Produzido pelo autor.

Em relação ao desempenho de precisão nos estados não-medidos e nos parâmetros desconhecidos, tanto $P_{\theta,0}^1$ quanto $P_{\theta,0}^2$ conseguiram estimar estados e parâmetros com resultados próximos ou melhores que o FKEC, conforme apresentado na Tabela 3.20. Desses, aquele apresentou o melhor desempenho geral para a condição inicial estudada. Com exceção de $P_{\theta,0}^5$, todos os casos conseguiram estimar os parâmetros θ_1 e θ_2 com erros próximos do FKEC. De $P_{\theta,0}^4$ para $P_{\theta,0}^5$, nota-se uma piora em todos os valores, exceto x_4 , e de $P_{\theta,0}^5$ para $P_{\theta,0}^6$ uma melhora no desempenho geral. A diferença entre cada um desses casos é o ajuste do parâmetro p_3 . Assim como observado nas seções anteriores, em comparação com o FK ideal, o erro na precisão dos estados foi maior para todos os casos.

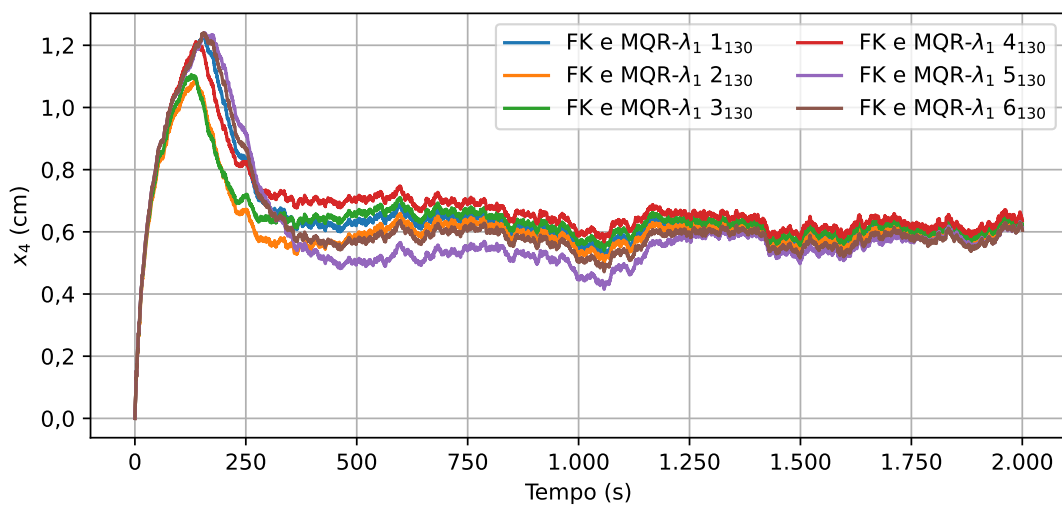
Tabela 3.20 – Resultado percentual da precisão dos estados não-medidos e parâmetros desconhecidos com o FK e MQR- λ para diferentes $P_{\theta,0}$ em comparação com o FKEC (intervalo 1).

		$P_{\theta,0}^1$	$P_{\theta,0}^2$	$P_{\theta,0}^3$	$P_{\theta,0}^4$	$P_{\theta,0}^5$	$P_{\theta,0}^6$
RMSE_%	x_3	32,20%	-44,21%	1052,24%	1669,55%	1892,13%	849,53%
	x_4	30,60%	13,77%	67,36%	140,15%	-36,14%	-31,30%
	θ_1	-23,64%	1,51%	111,85%	234,43%	547,59%	252,54%
	θ_2	21,79%	171,85%	-21,39%	-44,13%	262,59%	137,15%
	θ_3	-11,32%	253,48%	1177,36%	2026,05%	2723,15%	1352,23%
MAE_%	x_3	48,90%	-45,37%	1312,20%	2069,93%	2339,41%	1062,02%
	x_4	32,60%	14,63%	70,54%	145,33%	-42,21%	-37,42%
	θ_1	-22,55%	3,21%	115,68%	240,54%	559,97%	259,26%
	θ_2	23,90%	184,38%	-27,02%	-50,41%	282,73%	148,91%
	θ_3	-13,68%	317,93%	1431,18%	2449,72%	3285,73%	1640,75%

Fonte: Produzido pelo autor.



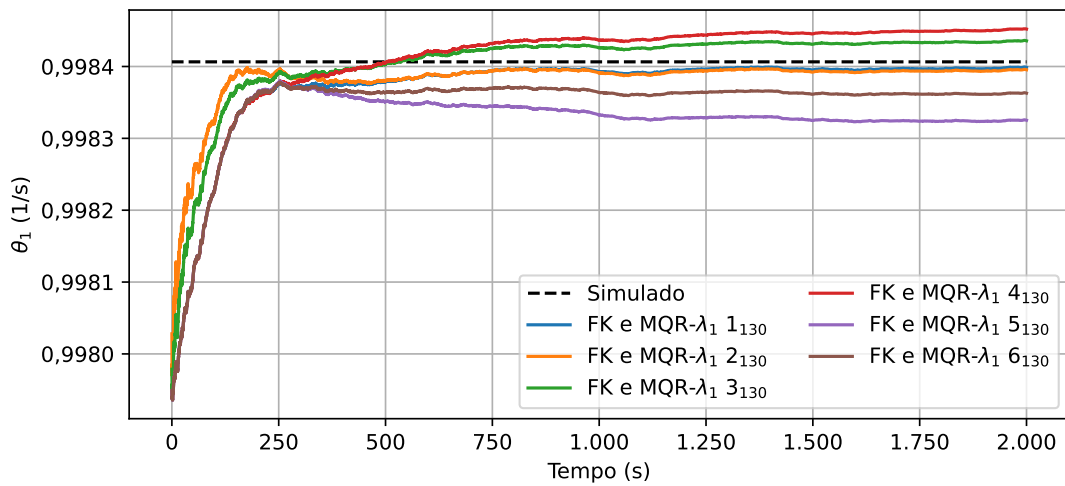
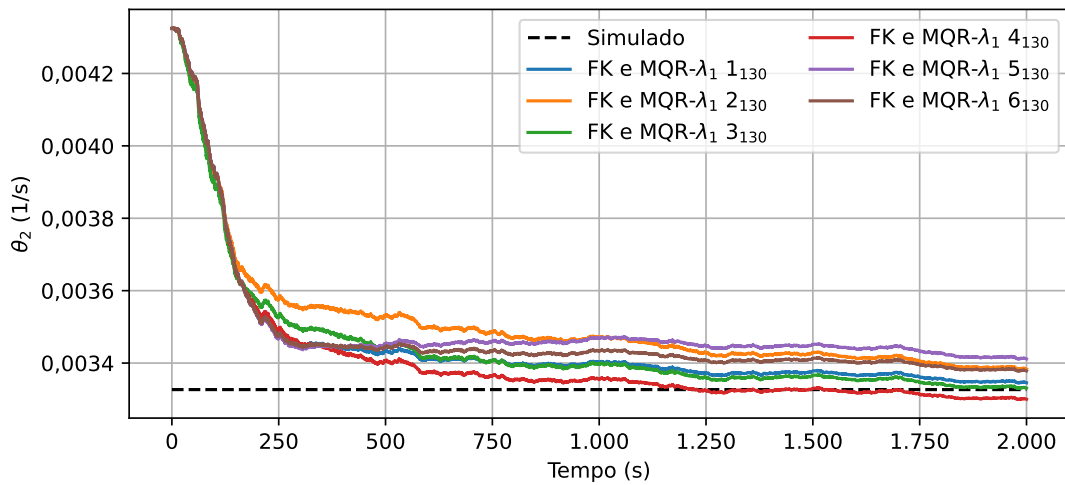
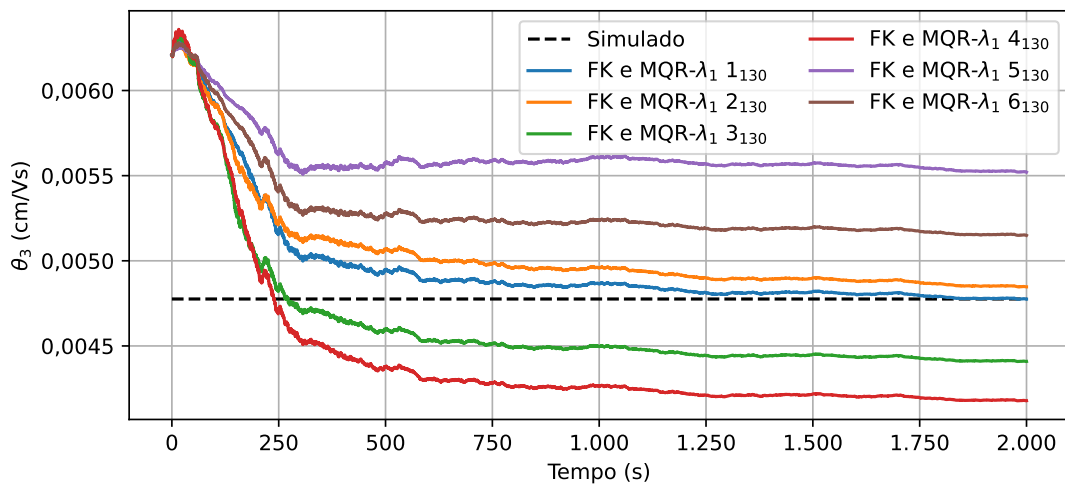
(a) Evolução da estimativa do estado x_3 .



(b) Evolução da estimativa do estado x_4 .

Figura 3.29 – Evolução dos estados não-medidos com o FK e MQR- λ para diferentes $P_{\theta,0}$.

Fonte: Produzido pelo autor.

(a) Evolução da estimativa do parâmetro θ_1 .(b) Evolução da estimativa do parâmetro θ_2 .(c) Evolução da estimativa do parâmetro θ_3 .Figura 3.30 – Evolução dos parâmetros desconhecidos com o FK e MQR- λ para diferentes $P_{\theta,0}$.

Fonte: Produzido pelo autor.

A Figura 3.29 apresenta as estimativas dos estados x_3 e x_4 , na qual cabe destacar, assim como feito para o FKD, que os valores negativos observados só foram permitidos no FK, porque na planta foram saturados em 0 cm, para tentar representar o sistema de forma mais realista. Enquanto isso, pela Figura 3.30, é possível observar que as curvas verde e vermelha ($P_{\theta,0}^3$ e $P_{\theta,0}^4$) erraram o valor de θ_1 para mais, enquanto as curvas roxa e marrom ($P_{\theta,0}^5$ e $P_{\theta,0}^6$) o fizeram para menos. A situação se inverteu para θ_3 . Assim como observado no FKD, esse resultado ilustra o efeito da escolha de p_3 na convergência dos parâmetros. Novamente, é interessante notar que, apesar das curvas verde e vermelha estimarem θ_3 abaixo do valor esperado, $P_{\theta,0}^3$ e $P_{\theta,0}^4$ apresentaram os melhores desempenhos nos índices de controle. De forma semelhante ao FKD, a convergência dos parâmetros foi muito mais suave.

Agora, considerando somente $P_{\theta,0}^5$, ainda para a condição inicial de 130% nos parâmetros desconhecidos, a Tabela 3.21 dispõe alguns casos estudados para a escolha dos fatores de esquecimento da matriz L . Em seguida, pela Tabela 3.22, é possível observar que ajustar o valor de esquecimento pode melhorar o desempenho do sistema, uma vez que as novas informações passam a ser mais relevantes, como visto em λ_2 , λ_4 e λ_6 . No entanto, tornar o sistema muito sensível a novas informações pode piorar o seu desempenho, como apresentado em λ_3 e na saída y_2 de λ_5 . Além disso, todas as ações de controle apresentaram variância menor em regime permanente. Esses resultados podem ser visualizados graficamente nas Figuras 3.31, para as saídas, e 3.32, para as entradas.

Tabela 3.21 – Parâmetros da matriz L no MQR- λ (λ).

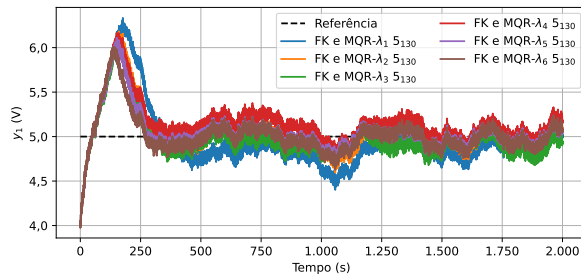
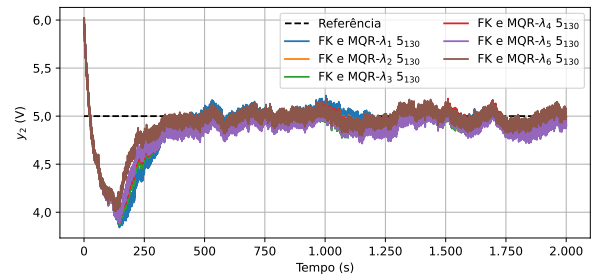
	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6
l_1	0,9998	0,999	0,9999	0,9995	0,9995
l_2	0,9999	1,0	0,9999	1,0	0,9995
l_3	0,9997	1,0	0,9995	0,9995	0,9995

Fonte: Produzido pelo autor.

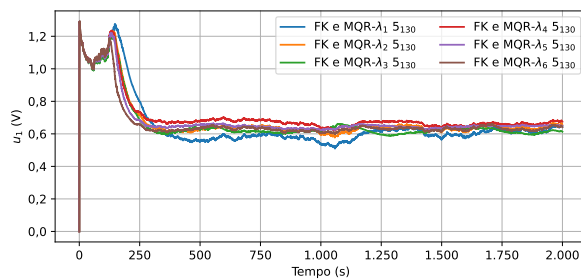
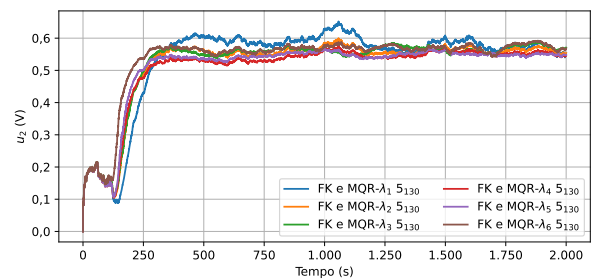
Tabela 3.22 – Resultado percentual dos índices de desempenho de controle com o FK e MQR- λ para diferentes λ em comparação com o FK ideal (intervalo 1).

		λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6
ISE%	y_1	56,69%	-42,66%	2,75%	-37,01%	-60,86%	-45,42%
	y_2	33,82%	33,99%	78,01%	20,21%	176,98%	-22,98%
ITSE%	y_1	50,90%	-42,85%	5,76%	-34,09%	-60,55%	-45,44%
	y_2	34,96%	34,12%	75,67%	20,22%	178,49%	-24,33%
IAE%	y_1	28,78%	-24,13%	-1,26%	-28,45%	-37,81%	-25,31%
	y_2	16,44%	16,66%	38,72%	9,66%	74,35%	-11,45%
ITAE%	y_1	26,02%	-24,09%	0,24%	-26,76%	-37,46%	-25,19%
	y_2	17,43%	16,93%	38,01%	9,77%	75,64%	-12,26%
TVC%	u_1	22,47%	-11,38%	-68,50%	-28,76%	-64,75%	-28,60%
	u_2	55,82%	-5,76%	-32,83%	-15,32%	-22,49%	-1,96%

Fonte: Produzido pelo autor.

(a) Evolução da saída y_1 .(b) Evolução da saída y_2 .Figura 3.31 – Evolução das saídas com o FK e MQR- λ para diferentes λ .

Fonte: Produzido pelo autor.

(a) Evolução da ação de controle u_1 .(b) Evolução da ação de controle u_2 .Figura 3.32 – Evolução das ações de controle com o FK e MQR- λ para diferentes λ .

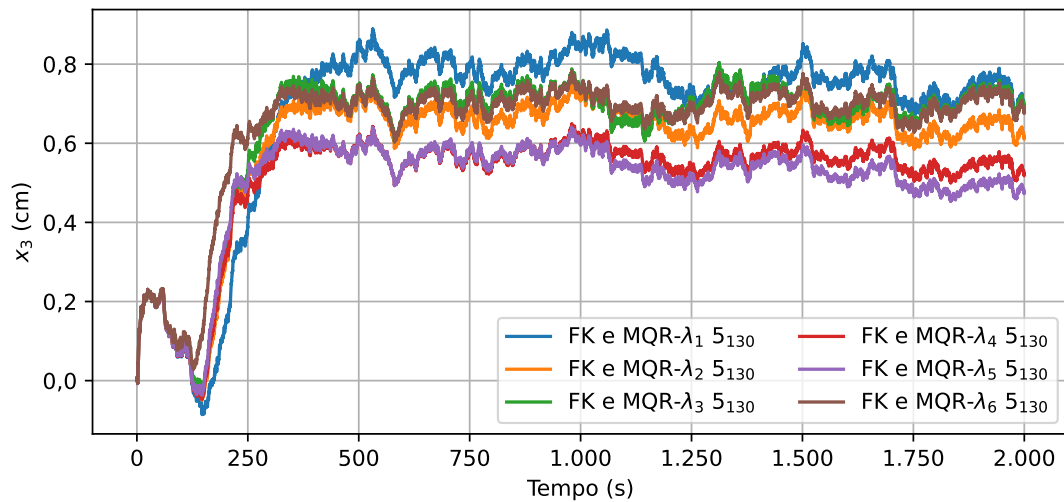
Fonte: Produzido pelo autor.

Tabela 3.23 – Resultado percentual da precisão dos estados não-medidos e parâmetros desconhecidos com o FK e MQR- λ para diferentes λ em comparação com o FKEC (intervalo 1).

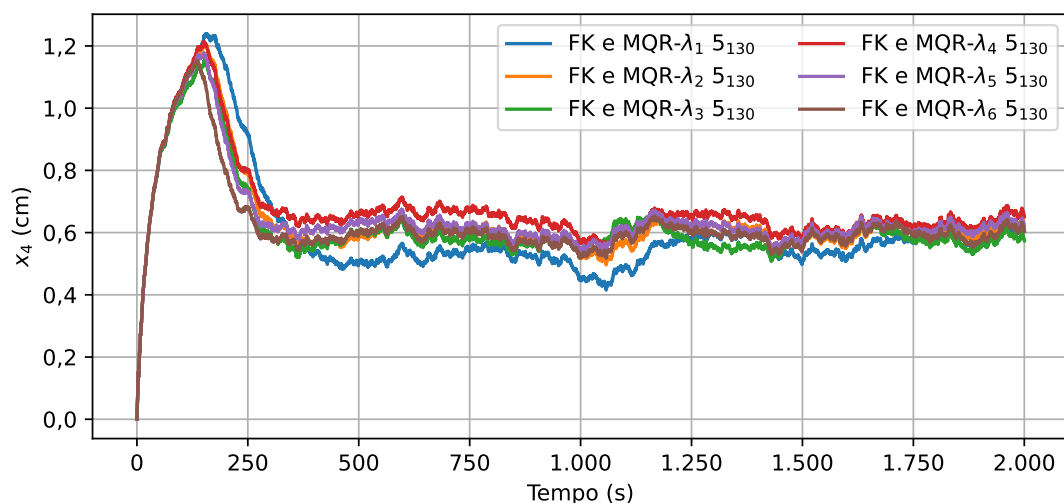
	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6	
RMSE_%	x_3	1892,13%	150,21%	1110,77%	1497,17%	2370,59%	961,39%
	x_4	-36,14%	58,05%	85,50%	161,29%	102,82%	33,18%
	θ_1	547,59%	105,78%	388,67%	155,68%	500,64%	332,49%
	θ_2	262,59%	-5,43%	275,42%	63,77%	113,36%	222,99%
	θ_3	2723,15%	387,04%	1942,67%	1896,70%	2889,43%	1234,90%
MAE_%	x_3	2339,41%	155,91%	1379,34%	1845,61%	2912,63%	1200,82%
	x_4	-42,21%	59,63%	45,10%	166,60%	102,00%	22,49%
	θ_1	559,97%	106,28%	383,56%	158,23%	502,59%	335,76%
	θ_2	282,73%	-9,79%	295,38%	54,93%	121,40%	189,04%
	θ_3	3285,73%	414,22%	2348,72%	2267,12%	3449,65%	1474,74%

Fonte: Produzido pelo autor.

A Tabela 3.23 apresenta os resultados percentuais obtidos para a precisão da estimação, na qual é possível notar que, mesmo para parâmetros constantes, o ajuste do fator de esquecimento pôde melhorar o desempenho na estimação dos parâmetros na maior parte dos casos apresentados. No entanto, para os estados, apesar de melhorar para x_3 , piorou para x_4 . A evolução das estimativas dos estados não-medidos pode ser visualizada na Figura 3.33. Enquanto isso, pela Figura 3.34, é possível observar que selecionar um fator de esquecimento também envolve balancear a assimilação de novas informações com o grau de oscilação do sinal. Por exemplo, apesar de λ_6 melhorar o desempenho das saídas, também fez com que o valor de θ_2 oscilasse bem mais (curva marrom). Além disso, para valores muito pequenos, o valor estimado pode ultrapassar o valor esperado, como visto nas curvas vermelha e roxa (casos de λ_4 e λ_5).



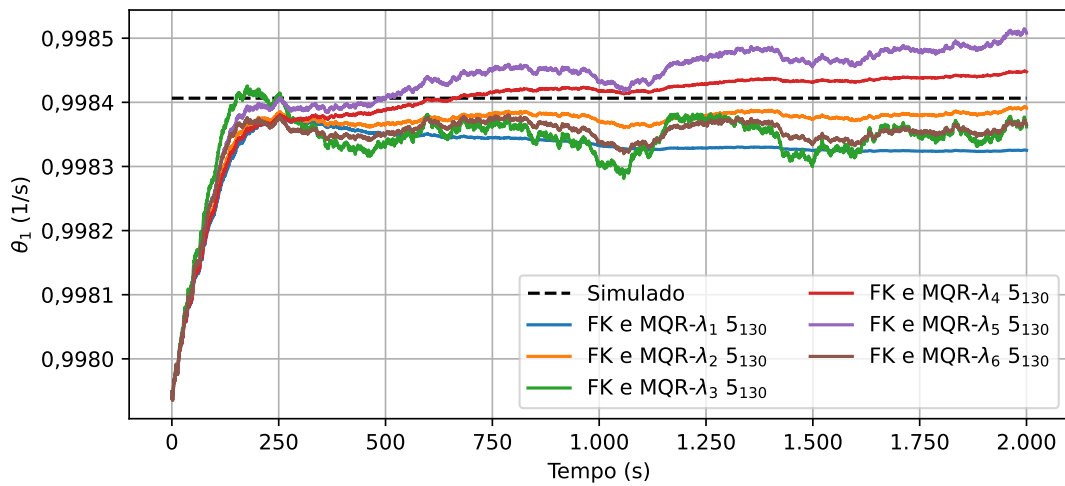
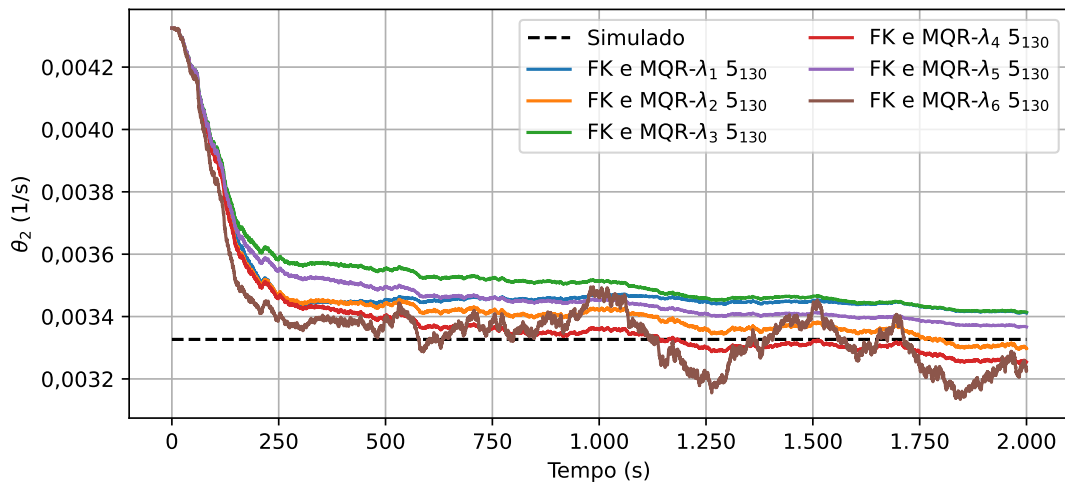
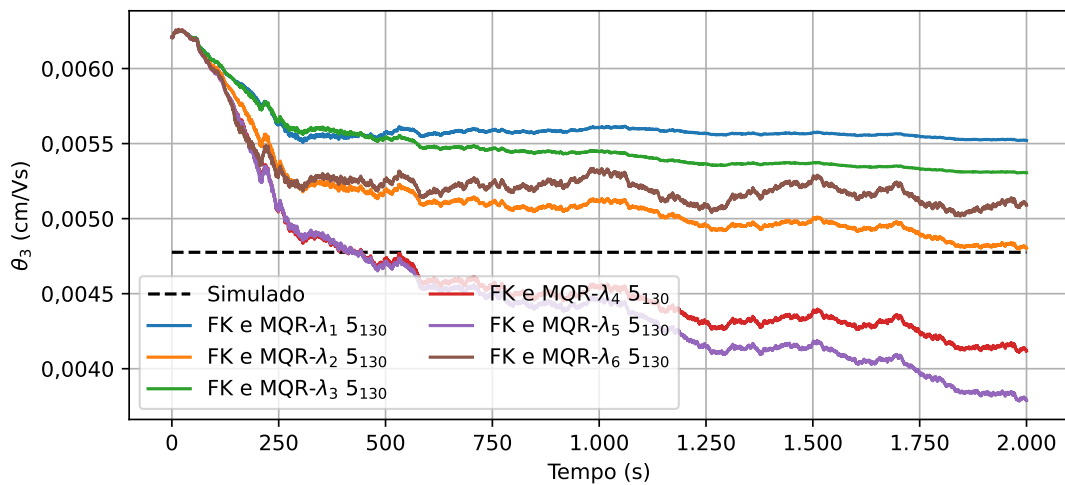
(a) Evolução da estimativa do estado x_3 .



(b) Evolução da estimativa do estado x_4 .

Figura 3.33 – Evolução dos estados não-medidos com o FK e MQR- λ para diferentes λ .

Fonte: Produzido pelo autor.

(a) Evolução da estimativa do parâmetro θ_1 .(b) Evolução da estimativa do parâmetro θ_2 .(c) Evolução da estimativa do parâmetro θ_3 .Figura 3.34 – Evolução dos parâmetros desconhecidos com o FK e MQR- λ para diferentes λ .

Fonte: Produzido pelo autor.

Por fim, considerando a variação na condição inicial dos parâmetros desconhecidos, a Tabela 3.24 dispõe os valores de $P_{\theta,0}$ e λ de um dos melhores resultados obtidos para cada caso. Assim como discutido para o FKEC, não foram encontradas matrizes $P_{\theta,0}$ com boa convergência nos parâmetros para valores de θ_0 abaixo da condição nominal com λ_1 . No entanto, ajustando experimentalmente os valores de λ na matriz L , foi possível alcançar a convergência. Os valores utilizados na matriz L também estão dispostos na Tabela 3.24.

Tabela 3.24 – Parâmetros da matriz de covariância inicial no FK e MQR- λ j_i ($P_{\theta,0}$).

	70%	80%	90%	110%	120%	130%
	$P_{\theta,0}^7/\lambda_7$	$P_{\theta,0}^8/\lambda_8$	$P_{\theta,0}^9/\lambda_9$	$P_{\theta,0}^{10}/\lambda_1$	$P_{\theta,0}^{11}/\lambda_1$	$P_{\theta,0}^1/\lambda_1$
p_1	2×10^{-3}	$2,5 \times 10^{-3}$	10^{-3}	$2,5 \times 10^{-4}$	10^{-4}	10^{-4}
p_2	10^{-3}	6×10^{-4}	$2,5 \times 10^{-4}$	$7,5 \times 10^{-4}$	$7,5 \times 10^{-4}$	$7,5 \times 10^{-4}$
p_3	2×10^{-3}	$2,5 \times 10^{-3}$	10^{-3}	$3,5 \times 10^{-3}$	$3,25 \times 10^{-3}$	$4,75 \times 10^{-3}$
l_1	0,9995	0,9996	0,99975	1,0	1,0	1,0
l_2	0,9999	0,9999	0,9999	1,0	1,0	1,0
l_3	0,9994	0,9996	0,99975	1,0	1,0	1,0

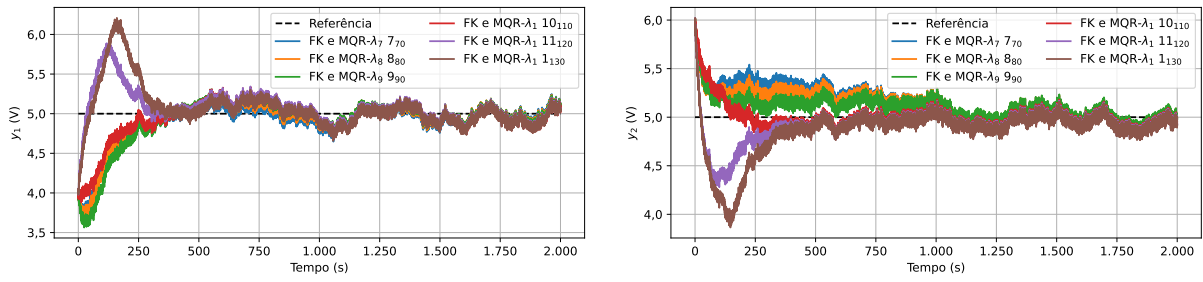
Fonte: Produzido pelo autor.

Em seguida, pela Tabela 3.25, é possível observar que todos os valores calculados se aproximaram, apesar de estar um pouco pior para a saída y_2 em parte dos resultados, do caso com FK ideal. De fato, isso indica que o sistema conseguiu alcançar a referência desejada, como verificável pela Figura 3.35. Além disso, pela Figura 3.36, é possível notar que as curvas da ação de controle oscilaram bem menos que as apresentadas para o FKEC e de forma bastante semelhante à observada no FKD. No entanto, cabe destacar que, para obter este resultado, foi preciso ajustar, além dos valores de $P_{\theta,0}$, os valores do fator de esquecimento de cada parâmetro. Essa necessidade aumenta a complexidade de uso do MQR- λ em comparação com o FK para estimar parâmetros.

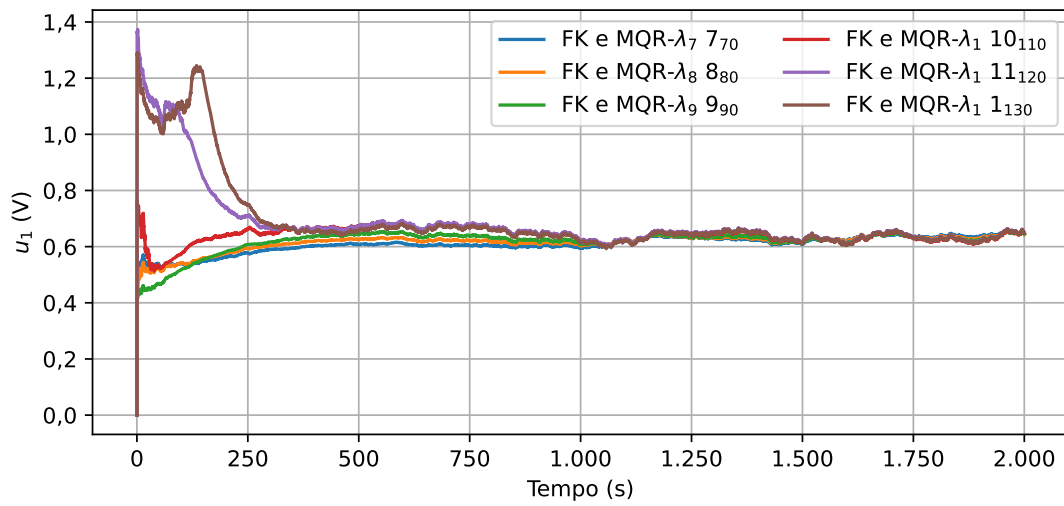
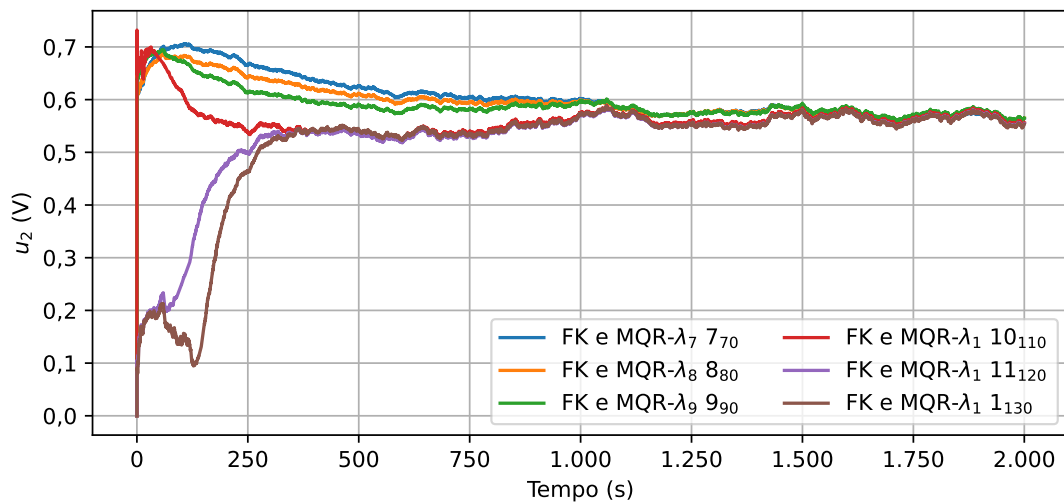
Tabela 3.25 – Resultado percentual dos índices de desempenho de controle com o FK e MQR- λ para diferentes θ_0 em comparação com o FK ideal (intervalo 1).

		70%	80%	90%	110%	120%	130%
ISE%	y_1	-51,32%	-52,39%	-50,00%	-36,84%	-41,27%	-33,25%
	y_2	-5,63%	-12,32%	-14,79%	16,90%	33,80%	53,87%
ITSE%	y_1	-51,44%	-52,19%	-49,73%	-36,58%	-40,89%	-33,15%
	y_2	-6,55%	-13,69%	-16,87%	17,06%	34,33%	54,76%
IAE%	y_1	-30,60%	-30,78%	-28,96%	-19,85%	-22,77%	-17,67%
	y_2	-3,53%	-7,37%	-9,29%	8,65%	16,99%	26,28%
ITAE%	y_1	-30,55%	-30,66%	-28,57%	-19,50%	-22,31%	-17,41%
	y_2	-3,83%	-8,01%	-10,20%	8,74%	17,49%	26,96%
TVC%	u_1	-46,30%	-38,89%	-26,67%	-3,70%	-1,48%	-0,74%
	u_2	-31,21%	-28,32%	-20,81%	-3,47%	-1,16%	0,58%

Fonte: Produzido pelo autor.

(a) Evolução da saída y_1 .(b) Evolução da saída y_2 .Figura 3.35 – Evolução das saídas com o FK e MQR- λ para diferentes θ_0 .

Fonte: Produzido pelo autor.

(a) Evolução da ação de controle u_1 .(b) Evolução da ação de controle u_2 .Figura 3.36 – Evolução das ações de controle com o FK e MQR- λ para diferentes θ_0 .

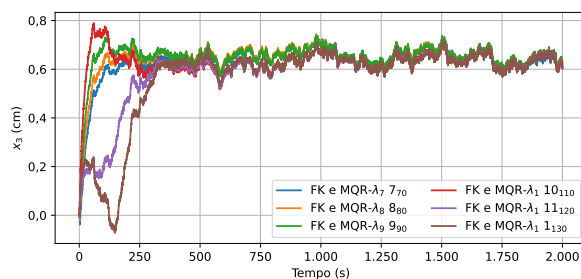
Fonte: Produzido pelo autor.

Enquanto isso, pela Tabela 3.26, é possível notar que, para todos os casos estudados, o FK e MQR- λ apresentou desempenhos semelhante ao observado no FKD, inclusive na melhora de desempenho em estimação de x_3 e θ_3 em relação ao FKED para θ_0 abaixo da condição nominal. A Figura 3.37 apresenta a estimação dos estados, na qual a partir de 500 segundos todos estão próximos a 0,6 cm, e a Figura 3.38 a dos parâmetros, na qual é possível identificar como a estimativa se aproxima do valor esperado (linha preta tracejada) em todos os casos. Além disso, em comparação com o FKD, é possível observar que a estimação de todos os parâmetros é mais suave, ainda que θ_1 tenha uma oscilação maior no começo. No entanto, essa troca vem com o aumento da oscilação em regime permanente, como observado nas curvas azul, laranja e verde do θ_3 .

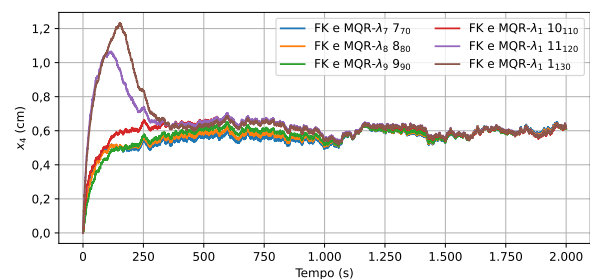
Tabela 3.26 – Resultado percentual da precisão dos estados não-medidos e parâmetros desconhecidos com o FK e MQR- λ para diferentes θ_0 em comparação com o FKED (intervalo 1).

		70%	80%	90%	110%	120%	130%
RMSE_%	x_3	-84,62%	-91,04%	-93,98%	-6,79%	-8,47%	32,25%
	x_4	21,74%	2,19%	-25,74%	2,62%	30,72%	30,53%
	θ_1	-67,83%	-69,36%	-78,88%	-0,41%	29,73%	-23,66%
	θ_2	67,04%	100,54%	134,56%	-44,90%	-32,67%	21,74%
	θ_3	-81,90%	-89,01%	-89,56%	-46,45%	1,99%	-11,32%
MAE_%	x_3	-86,99%	-92,34%	-95,08%	-0,53%	-0,69%	48,80%
	x_4	14,55%	-1,89%	-29,84%	3,18%	32,73%	32,60%
	θ_1	-70,99%	-71,87%	-80,43%	1,26%	33,64%	-22,52%
	θ_2	62,08%	105,37%	147,61%	-42,71%	-38,99%	23,97%
	θ_3	-84,60%	-90,70%	-91,02%	-50,01%	2,12%	-13,85%

Fonte: Produzido pelo autor.



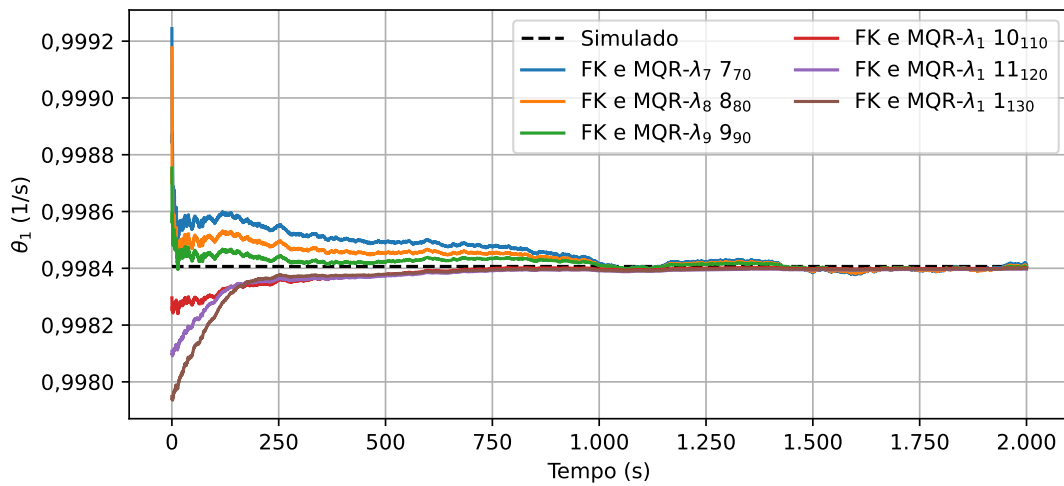
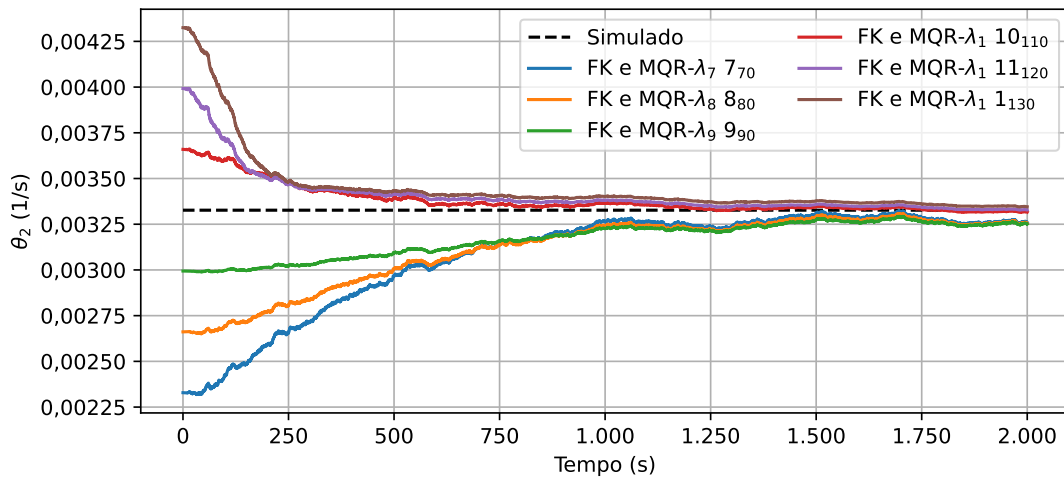
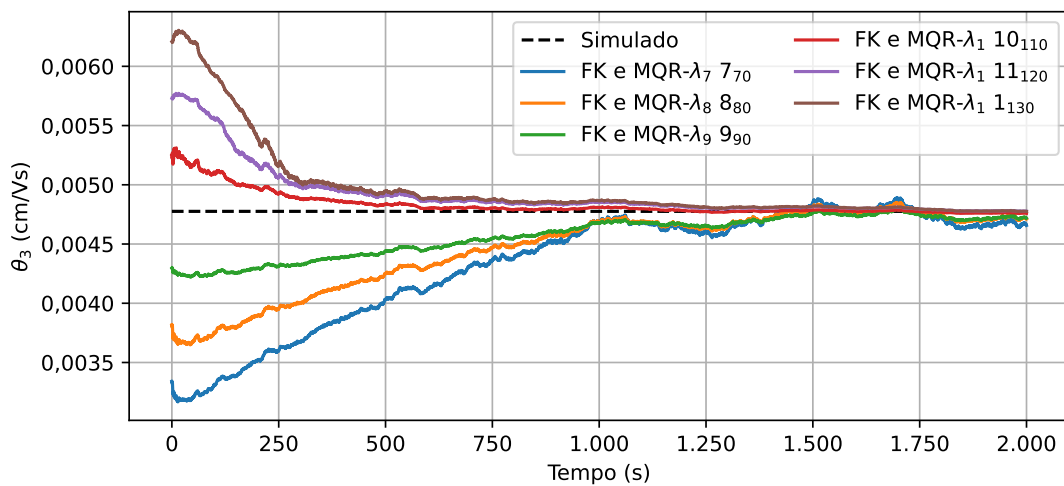
(a) Evolução da estimativa do estado x_3 .



(b) Evolução da estimativa do estado x_4 .

Figura 3.37 – Evolução dos estados não-medidos com o FK e MQR- λ para diferentes θ_0 .

Fonte: Produzido pelo autor.

(a) Evolução da estimativa do parâmetro θ_1 .(b) Evolução da estimativa do parâmetro θ_2 .(c) Evolução da estimativa do parâmetro θ_3 .Figura 3.38 – Evolução dos parâmetros desconhecidos com o FK e MQR- λ para diferentes θ_0 .

Fonte: Produzido pelo autor.

3.7 Estimação dual com FK e MME

De forma análoga às realizadas até então para a estimação dual, as equações de estado foram escritas na forma da equação 2.6 (ver Seção 3.5). Dessa forma, a equação para os parâmetros desconhecidos na forma matricial é dada por

$$\begin{bmatrix} z_{1,k} \\ z_{2,k} \\ z_{3,k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{1,k-1} & 0 & 0 \\ 0 & x_{4,k-1} & 0 \\ 0 & 0 & u_{2,k-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{11,k-1} \\ \phi_{24,k-1} \\ \gamma_{32,k-1} \end{bmatrix}; \quad (3.45)$$

$$\mathbf{z}_k = D_k^T \boldsymbol{\theta}_k.$$

Com o sistema na forma da equação 2.6, é possível aplicar a abordagem descrita nas equações 2.18 e 2.19 para estimar os parâmetros desconhecidos com a MME. Para tanto, o FK foi inicializado com condição inicial \mathbf{x}_0 para o estados e a MME de acordo com a Tabela 3.3 para os parâmetros. Além disso, a matriz de covariância inicial do FK foi definida como $P_0 = 0,01I_{4 \times 4}$ e a matriz A^α da MME foi definida como

$$\begin{cases} \alpha_i = 1 - \exp \left[T p_{ml} / \sqrt{\beta_i} \right], & i = 1, 2, 3; \\ A^{\alpha,j} = \text{diag} \{ \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \} \end{cases} \quad (3.46)$$

em que p_{ml} é o polo mais lento do sistema em malha fechada, ou seja, $-0,0096$ e β_1, β_2 e β_3 são valores que foram variados aos longo dos testes. Além disso, foi observado experimentalmente que a MME apresentava melhor desempenho com $k_0 \neq 0$ e, portanto, seu valor foi ajustado para $k_0 = 5$ segundos, de modo que a MME só estima os parâmetros quando D^\dagger existe e o tempo de simulação é maior que 5 segundos. Caso contrário, o modelo mantém o último valor estimado ou o valor inicial, se só tiver ele. Esse comportamento pode ser relacionado com algum transiente presente durante os primeiros segundos e modificar o começo da estimação da MME é equivalente a pular esses valores. Assim como para o caso ideal, o sistema em malha fechada foi simulado no *Simulink* do MATLAB® ao longo de 2.000 segundos.

3.7.1 Resultados

Assim como realizado nas outras abordagens, o impacto da seleção dos parâmetros β será discutido para a condição inicial de 130%. Para as outras condições, será apresentado somente um dos melhores resultados obtidos. Neste capítulo, FK e MME j_i denota o FK e MME com a matriz $A^{\alpha,j}$ e a condição inicial i dos parâmetros desconhecidos.

Para isso, a Tabela 3.27 apresenta alguns dos valores testados experimentalmente para a matriz A^α . Em seguida, a Tabela 3.28 mostra os resultados percentuais de desempenho de controle para cada A^α . Observa-se que todos os resultados apresentados são melhores ou aproximam-se do FK ideal quando não o superam. Isso implica que todos conseguiram

alcançar a referência desejada em regime permanente de forma adequada. Além disso, o TVC apresentado é menor do que o visualizado no FKEC, FKD e FK com MQR- λ (até cerca de 7 vezes menor que FK ideal). Considerando um balanço de todos os índices, $A^{\alpha,4}$ apresenta o melhor desempenho nos critérios de controle. As Figuras 3.39 e 3.40 ilustram os resultados discutidos na Tabela 3.28. Além das observações já realizadas, é possível notar que o formato das curvas, tanto nas saídas quanto nas ações de controle, é bastante semelhante ao observado nos outros casos de estimação dual, portanto, não serão feitos comentários adicionais nessa parte.

Tabela 3.27 – Parâmetros da matriz A^α no FK e MME j_{130} .

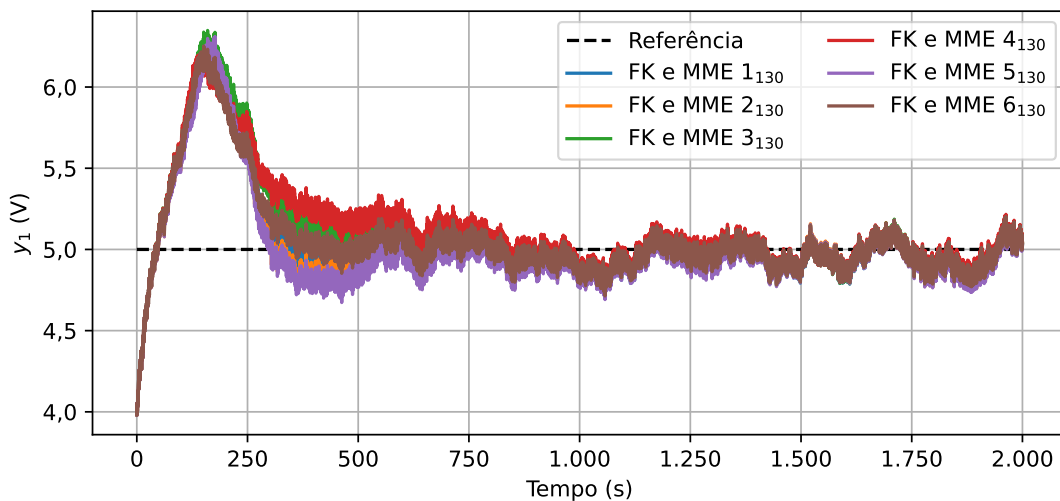
	$A^{\alpha,1}$	$A^{\alpha,2}$	$A^{\alpha,3}$	$A^{\alpha,4}$	$A^{\alpha,5}$	$A^{\alpha,6}$
β_1	2	1,3333	2,5	2,5	1,4286	2
β_2	10	6,6667	7,5	10	10	10
β_3	400	200	150	40	200	100

Fonte: Produzido pelo autor.

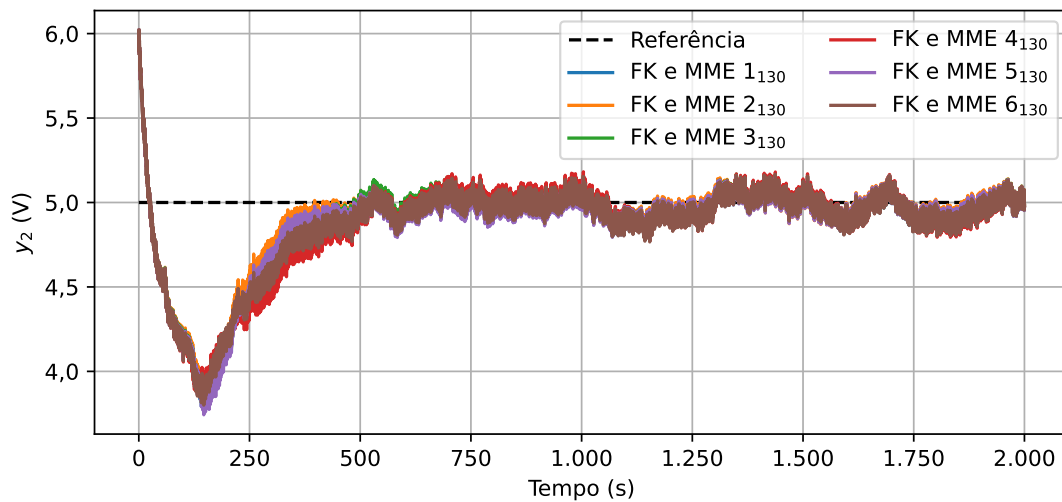
Tabela 3.28 – Resultado percentual dos índices de desempenho de controle com o FK e MME para diferentes A^α em comparação com o FK ideal (intervalo 1).

		$A^{\alpha,1}$	$A^{\alpha,2}$	$A^{\alpha,3}$	$A^{\alpha,4}$	$A^{\alpha,5}$	$A^{\alpha,6}$
ISE%	y_1	-42,18%	-39,00%	-47,36%	-58,76%	-37,27%	-50,67%
	y_2	-4,33%	-21,58%	-4,19%	12,51%	-13,44%	5,33%
ITSE%	y_1	-40,80%	-37,12%	-46,24%	-58,05%	-35,44%	-49,63%
	y_2	-6,22%	-23,68%	-5,98%	11,16%	-15,51%	3,60%
IAE%	y_1	-24,12%	-22,50%	-27,20%	-35,77%	-21,66%	-29,72%
	y_2	-1,41%	-10,76%	-1,34%	6,74%	-6,24%	3,43%
ITAE%	y_1	-22,94%	-20,98%	-26,17%	-35,02%	-20,22%	-28,74%
	y_2	-2,48%	-12,07%	-2,35%	6,06%	-7,48%	2,50%
TVC%	u_1	-52,31%	-46,10%	-55,89%	-85,93%	-48,24%	-70,84%
	u_2	-44,86%	-14,03%	-50,37%	-54,35%	-28,06%	-61,35%

Fonte: Produzido pelo autor.

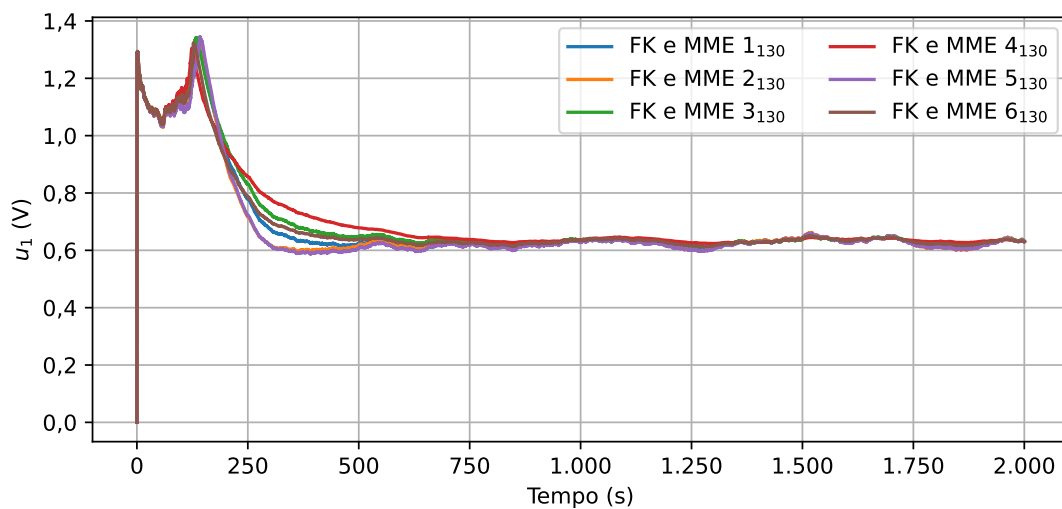


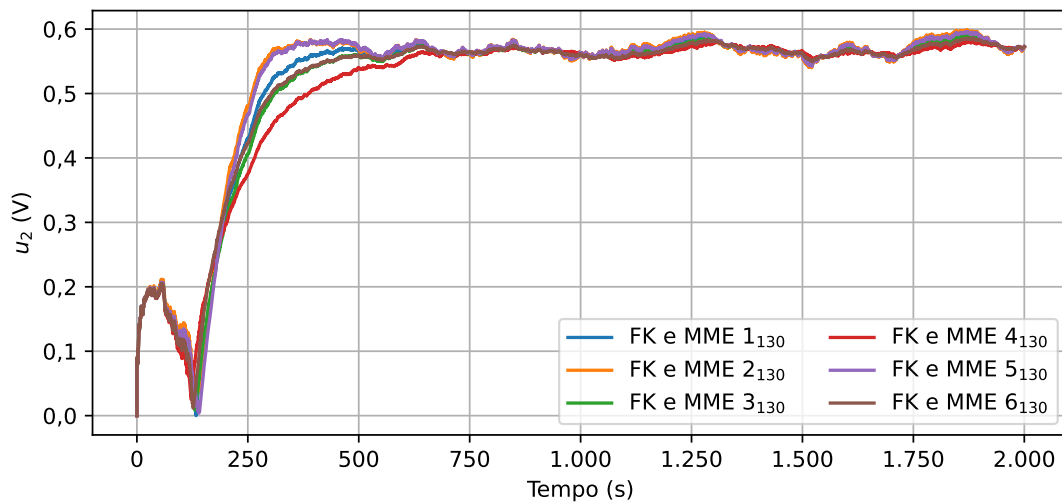
(a) Evolução da saída y_1 .

(b) Evolução da saída y_2 .Figura 3.39 – Evolução das saídas com o FK e MME para diferentes A^α .

Fonte: Produzido pelo autor.

Quanto ao desempenho de precisão nos estados não-medidos e nos parâmetros desconhecidos, todos conseguiram estimar θ_1 e θ_2 com erros de ordem próxima à observada no FKEC. No entanto, somente $A^{\alpha,1}$ obteve bom desempenho na estimação dos estados e parâmetros desconhecidos, como apresentado na Tabela 3.29. Em função disso, $A^{\alpha,1}$ apresentou o melhor desempenho geral na precisão. É importante destacar $A^{\alpha,3}$, cuja precisão geral é boa, mas apresenta erros elevados em x_3 e θ_3 . Assim como observado para as abordagens anteriores, em comparação com o FK ideal, o erro na precisão dos estados foi maior para todos os casos.

(a) Evolução da ação de controle u_1 .

(b) Evolução da ação de controle u_2 .Figura 3.40 – Evolução das ações de controle com o FK e MME para diferentes A^α .

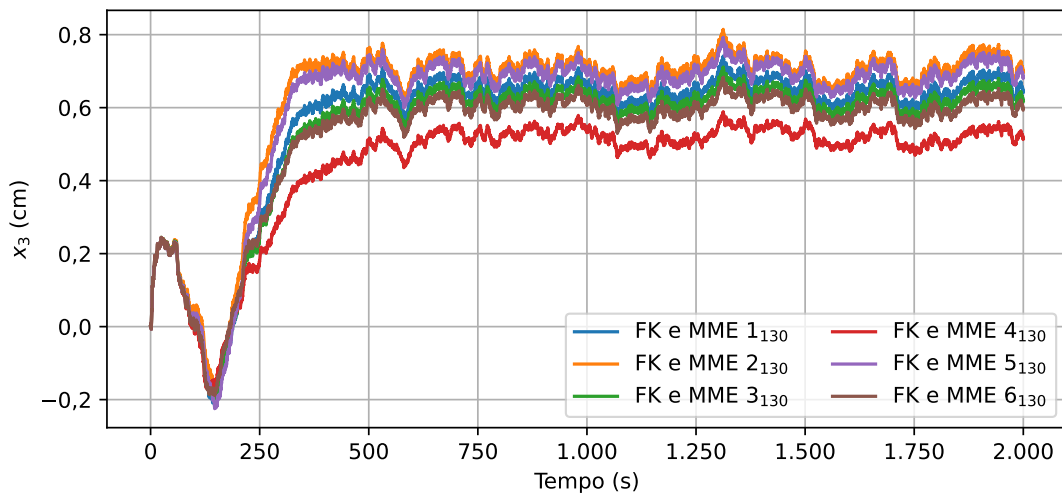
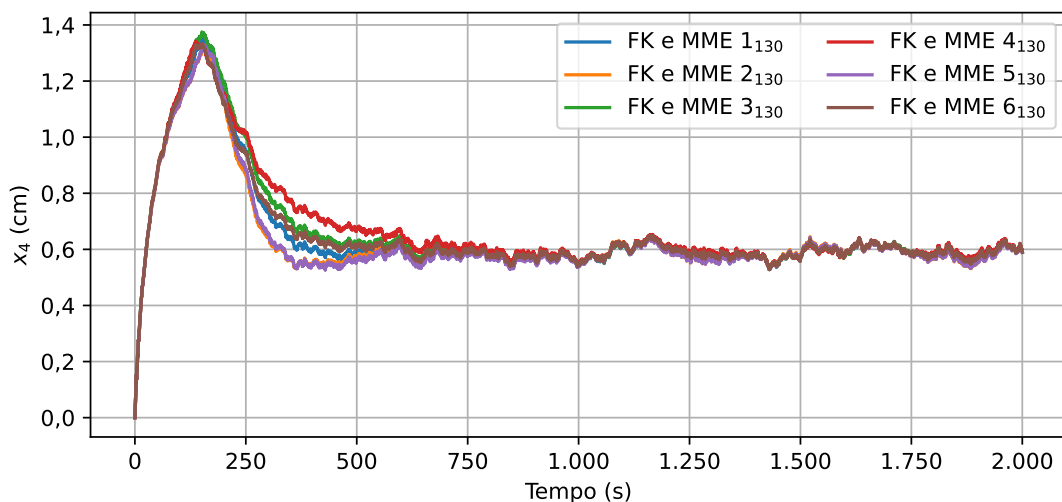
Fonte: Produzido pelo autor.

Tabela 3.29 – Resultado percentual de precisão dos estados não-medidos e parâmetros desconhecidos com o FK e MME para diferentes A^α em comparação com o FKEC (intervalo 1).

	$A^{\alpha,1}$	$A^{\alpha,2}$	$A^{\alpha,3}$	$A^{\alpha,4}$	$A^{\alpha,5}$	$A^{\alpha,6}$	
RMSE_%	x_3	79,39%	1182,90%	396,19%	2543,47%	827,48%	868,59%
	x_4	48,49%	68,23%	40,90%	31,90%	63,42%	42,96%
	θ_1	19,46%	376,14%	-7,60%	639,70%	267,90%	128,18%
	θ_2	103,02%	137,96%	129,46%	105,56%	101,87%	104,01%
	θ_3	26,57%	1535,72%	470,48%	3253,68%	1112,08%	1078,34%
	MAE_%	x_3	94,35%	1449,85%	478,73%	3141,19%	1009,72%
x_4		17,12%	23,74%	14,13%	12,16%	22,55%	16,56%
θ_1		0,54%	377,75%	-21,29%	650,92%	265,53%	120,54%
θ_2		81,85%	113,09%	105,25%	83,33%	80,95%	82,54%
θ_3		48,74%	1861,66%	582,83%	3922,26%	1353,67%	1312,39%

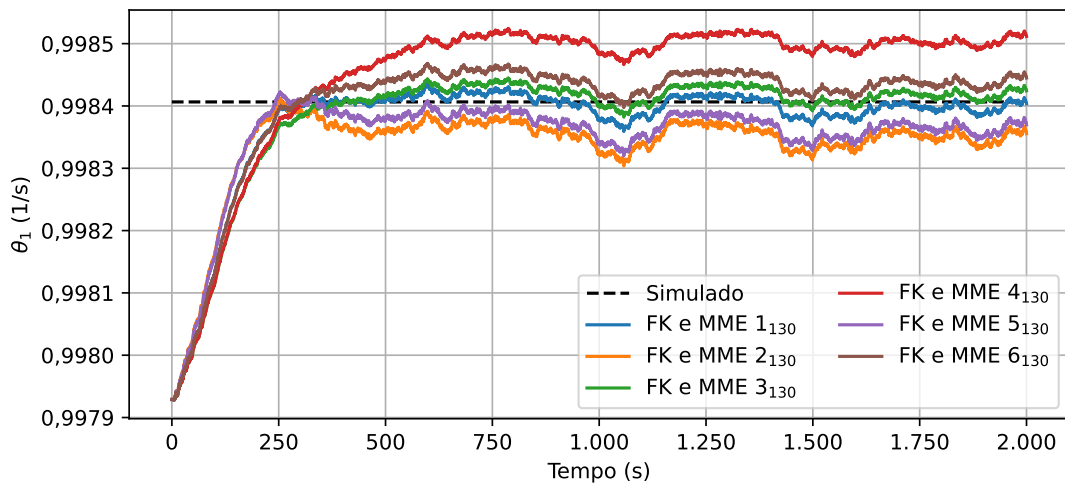
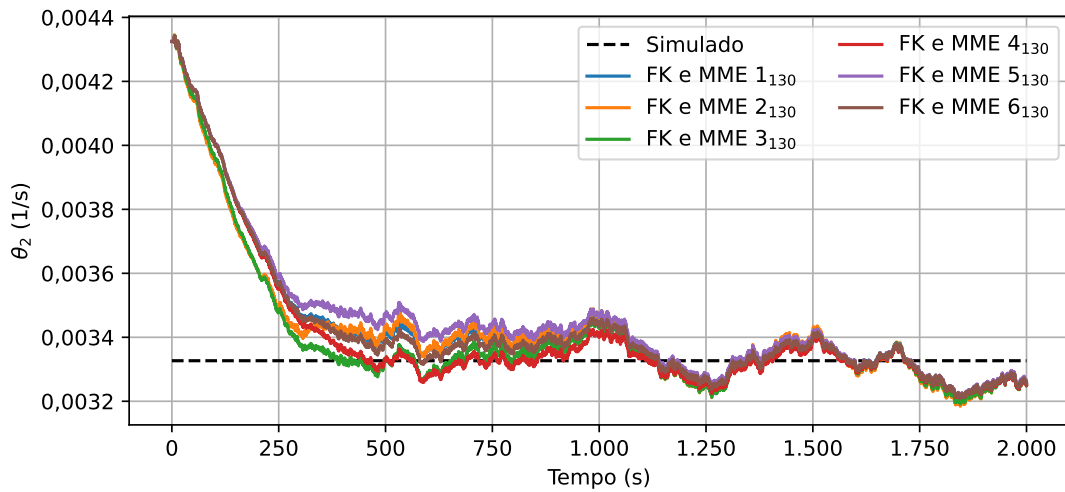
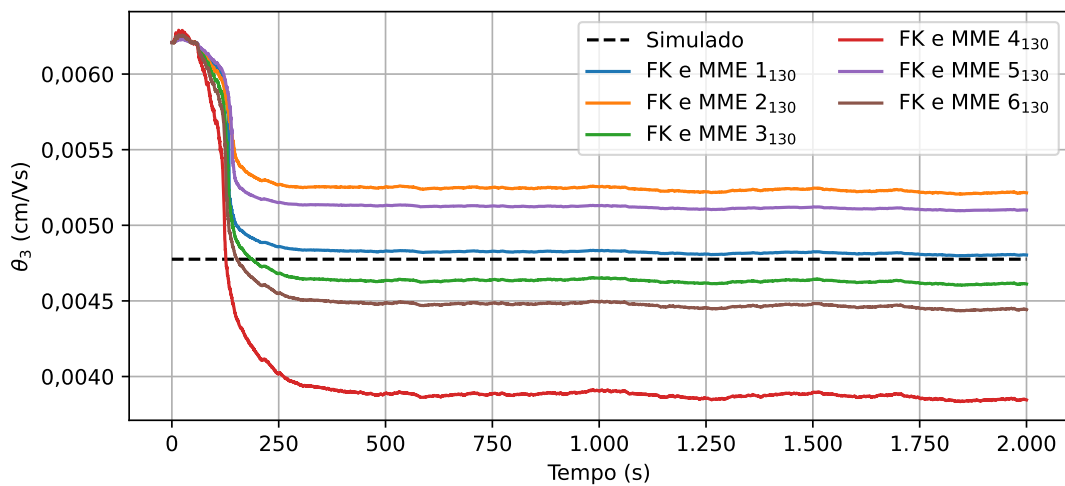
Fonte: Produzido pelo autor.

A Figura 3.41 apresenta a evolução da estimação dos estados x_3 e x_4 . É possível notar que as curvas apresentaram comportamento semelhante para x_4 , todas muito próximas a partir de 500 segundos. Para x_3 , a diferença entre as curvas fica mais evidente, principalmente as curvas laranja, vermelha e roxa ($A^{\alpha,2}$, $A^{\alpha,4}$ e $A^{\alpha,5}$). Enquanto isso, pela Figura 3.42, é possível observar que a diferença apresentada em x_3 também ocorre em θ_1 . Além disso, o formato apresentado pelas curvas θ_1 e θ_2 lembra o comportamento observado na estimação com FK e MQR- λ com a inserção do fator de esquecimento. Na prática, o funcionamento do fator de esquecimento é equivalente a uma média móvel ponderada, na qual informações mais recentes têm relevância maior. A diferença se dá na forma de assimilação.

(a) Evolução da estimativa do estado x_3 .(b) Evolução da estimativa do estado x_4 .Figura 3.41 – Evolução dos estados não-medidos com o FK e MME para diferentes A^α .

Fonte: Produzido pelo autor.

No entanto, é possível observar que a curva θ_3 é bastante distinta das apresentadas anteriormente. Como o padrão de resposta se mantém para as diferentes combinações da matriz A^α , é seguro entender que esse comportamento está relacionado com a condição inicial na qual a MME foi submetida. A variação acentuada no valor do parâmetro coincide com a queda nos valores de x_3 e u_2 , como observável nos gráficos. Em função da estrutura da equação, o valor não filtrado diminui muito rapidamente, de modo que nem mesmo o ajuste de α_3 conseguiu suavizar a curva. Dada a estrutura da MME, reformular o FK para considerar as restrições físicas nos estados estimados (valores maiores ou iguais a zero) deve suavizar a curva desse parâmetro e flexibilizar a escolha de α_i dos outros dois para melhorar os resultados na estimação.

(a) Evolução da estimativa do parâmetro θ_1 .(b) Evolução da estimativa do parâmetro θ_2 .(c) Evolução da estimativa do parâmetro θ_3 .Figura 3.42 – Evolução dos parâmetros desconhecidos com o FK e MME para diferentes A^α .

Fonte: Produzido pelo autor.

Agora, considerando a variação na condição inicial dos parâmetros desconhecidos, a Tabela 3.30 apresenta os valores de A^α de um dos melhores resultados obtidos para cada caso. Em seguida, pela Tabela 3.31, é possível observar que todos os valores calculados são próximos ou melhores que o caso com FK ideal, indicando que o sistema conseguiu alcançar a referência desejada (verificável na Figura 3.43). Além disso, o TVC apresentado é o menor entre as abordagens estudadas e até cerca de 2 vezes menor que FK ideal. Além disso, pela Figura 3.44, é possível notar que, assim como já observado para os outros casos de estimação dual, as curvas da ação de controle oscilam bem menos que as apresentadas para o FKEC.

Tabela 3.30 – Parâmetros da matriz A^α no FK e MME j_i .

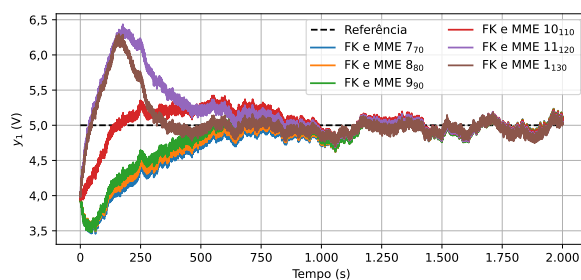
	70%	80%	90%	110%	120%	130%
	$A^{\alpha,7}$	$A^{\alpha,8}$	$A^{\alpha,9}$	$A^{\alpha,10}$	$A^{\alpha,11}$	$A^{\alpha,1}$
β_1	5	6,67	10	10	6,67	2
β_2	100	100	100	40	18,18	10
β_3	5	6,67	10	20	133,33	400

Fonte: Produzido pelo autor.

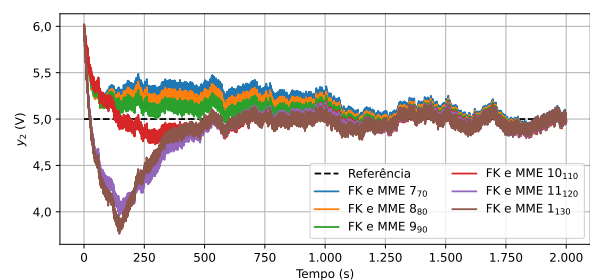
Tabela 3.31 – Resultado percentual dos índices de desempenho de controle com o FK e MME para diferentes θ_0 em comparação com o FK ideal (intervalo 1).

		70%	80%	90%	110%	120%	130%
ISE_%	y_1	-51,22%	-48,67%	-45,46%	-47,86%	-42,58%	-42,18%
	y_2	-9,86%	-10,34%	-1,11%	1,44%	-1,85%	-4,33%
ITSE_%	y_1	-51,29%	-48,80%	-45,65%	-47,60%	-41,95%	-40,80%
	y_2	-13,00%	-11,81%	-1,68%	0,84%	-2,94%	-6,22%
IAE_%	y_1	-29,92%	-27,98%	-25,58%	-27,13%	-23,46%	-24,12%
	y_2	-7,09%	-6,32%	-0,99%	0,56%	-0,76%	-1,41%
ITAE_%	y_1	-29,87%	-27,94%	-25,54%	-26,74%	-22,83%	-22,94%
	y_2	-8,54%	-6,99%	-1,20%	0,27%	-1,37%	-2,48%
TVC_%	u_1	-43,93%	-35,83%	-29,01%	-28,47%	-31,61%	-52,31%
	u_2	-29,71%	-25,04%	-20,74%	-23,59%	-28,95%	-44,86%

Fonte: Produzido pelo autor.



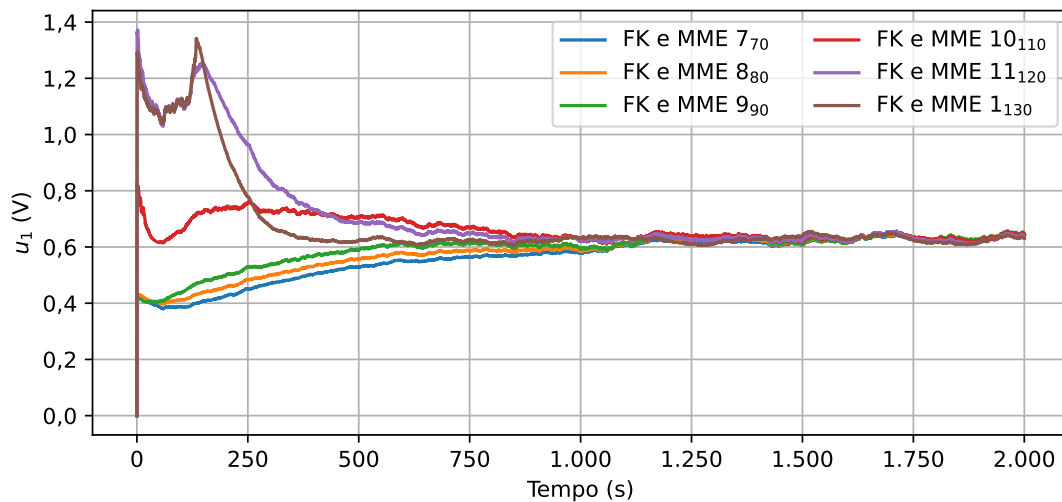
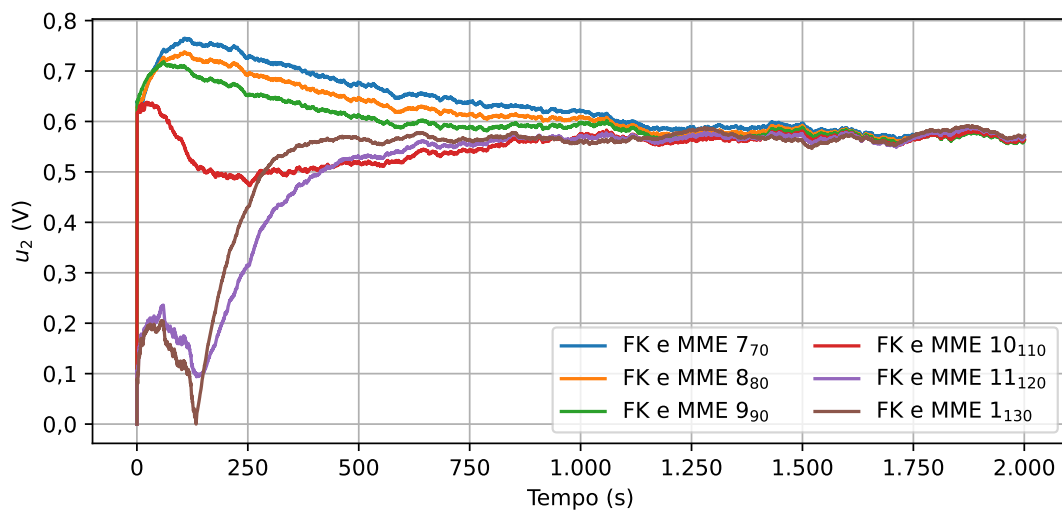
(a) Evolução da saída y_1 .



(b) Evolução da saída y_2 .

Figura 3.43 – Evolução das saídas com o FK e MME para diferentes θ_0 .

Fonte: Produzido pelo autor.

(a) Evolução da ação de controle u_1 .(b) Evolução da ação de controle u_2 .Figura 3.44 – Evolução das ações de controle com o FK e MME para diferentes θ_0 .

Fonte: Produzido pelo autor.

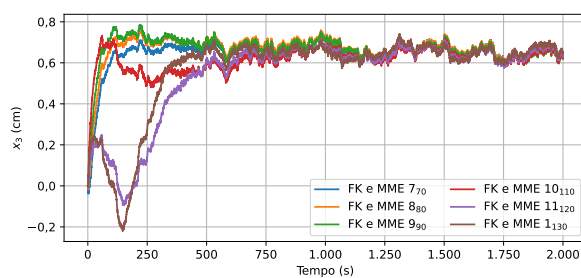
Enquanto isso, a Tabela 3.32 apresenta os resultados obtidos para a precisão da estimação. É possível notar que, para todos os casos estudados, o FK e MME apresenta resultado semelhante às abordagens duais já discutidas e consegue melhorar o desempenho na estimação de θ_3 quando comparado ao FKEC. A Figura 3.45 apresenta a estimação dos estados, na qual a partir de 750 segundos todos estão próximos a 0,6 cm, e a Figura 3.46 a dos parâmetros, na qual é possível observar como a estimativa se aproximou do valor esperado (linha preta tracejada) em todos os casos. Além disso, é possível identificar que a curva roxa (caso 120%) também apresenta uma queda mais acentuada no valor do parâmetro θ_3 , assim como valores negativos em x_3 . Esse resultado corrobora a discussão realizada para o caso de 130% sobre a causa dessa variação brusca nos valores estimados para esse parâmetro.

Outro ponto de destaque é a forma como os parâmetros convergem. De fato, ela é bem mais suave que as do FKD e do FK com MQR- λ , no qual foi preciso regular o fator de esquecimento para as condições abaixo dos valores nominais. Observa-se como as curvas azul, laranja, verde e vermelha se aproximam dos valores esperados mais lentamente. Esse tipo de resultado sugere que a abordagem com a MME tem grande potencial para aplicações práticas, uma vez que consegue incorporar as novas informações de forma gradual sem precisar de mais parâmetros (além dos valores α_i e do instante k_0). Por levar em conta a dinâmica do sistema (polos mais lentos), essa abordagem busca evitar que frequências não modeladas sejam excitadas e garante que os parâmetros se alterem mais lentamente que os estados.

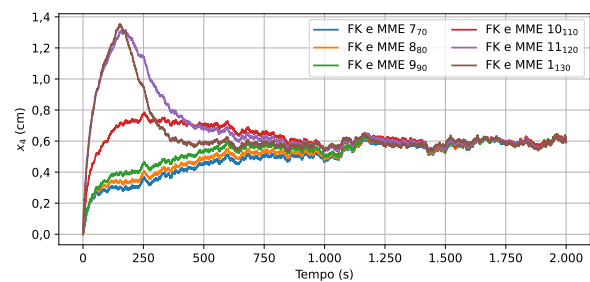
Tabela 3.32 – Resultado percentual de precisão dos estados não-medidos e parâmetros desconhecidos com o FK e MME para diferentes θ_0 em comparação com o FKEC (intervalo 1).

		70%	80%	90%	110%	120%	130%
RMSE_%	x_3	-90,91%	-89,85%	-90,21%	-2,68%	11,82%	79,39%
	x_4	-24,01%	-3,43%	9,43%	20,47%	17,23%	48,49%
	θ_1	-82,06%	-68,18%	-70,13%	37,27%	10,86%	19,46%
	θ_2	166,17%	77,85%	12,78%	91,11%	71,65%	103,02%
	θ_3	-84,24%	-89,87%	-89,08%	100,75%	-25,48%	26,57%
MAE_%	x_3	-92,55%	-91,28%	-91,89%	1,22%	14,83%	94,35%
	x_4	-33,68%	-8,76%	7,74%	18,92%	5,51%	17,12%
	θ_1	-84,57%	-70,72%	-72,60%	25,77%	-1,80%	0,54%
	θ_2	181,34%	83,13%	3,27%	81,93%	54,63%	81,85%
	θ_3	-86,08%	-91,10%	-90,33%	82,68%	-25,91%	48,74%

Fonte: Produzido pelo autor.



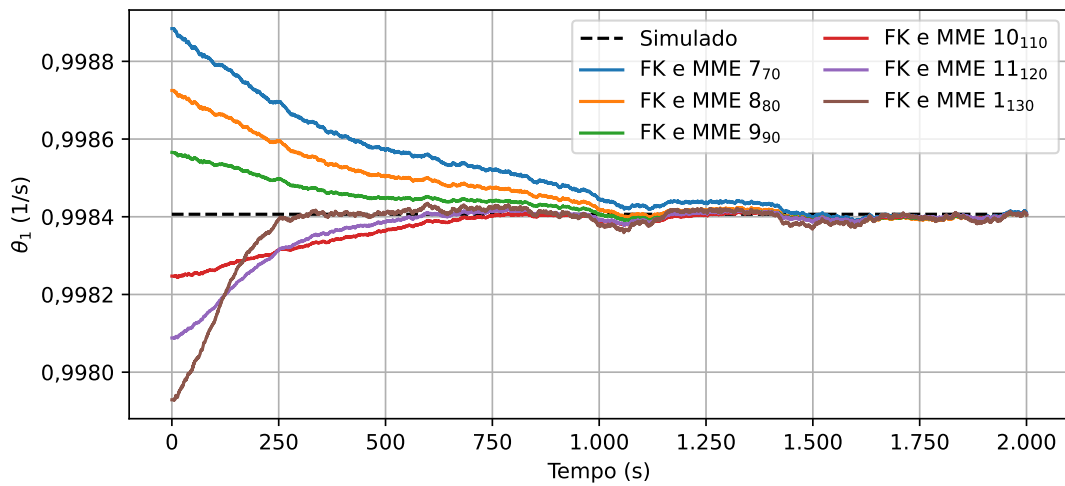
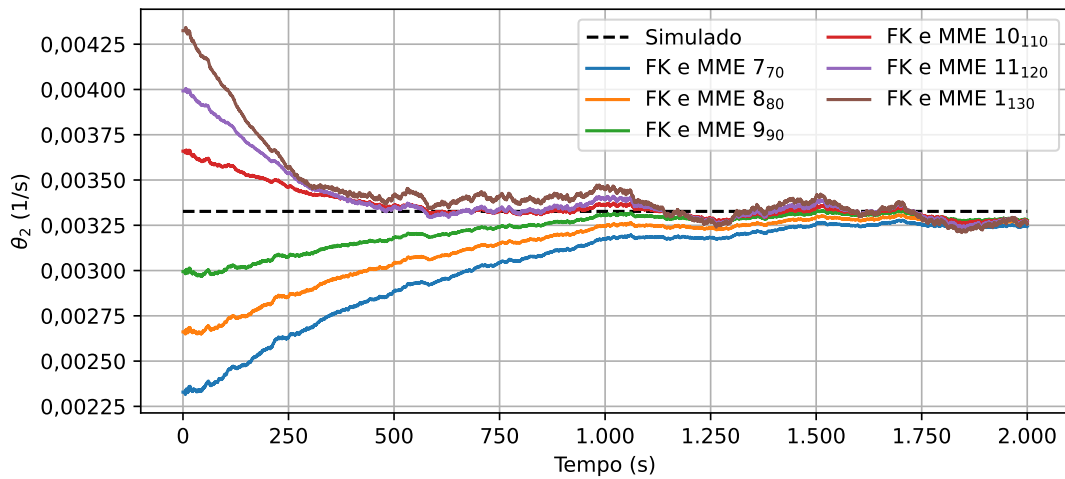
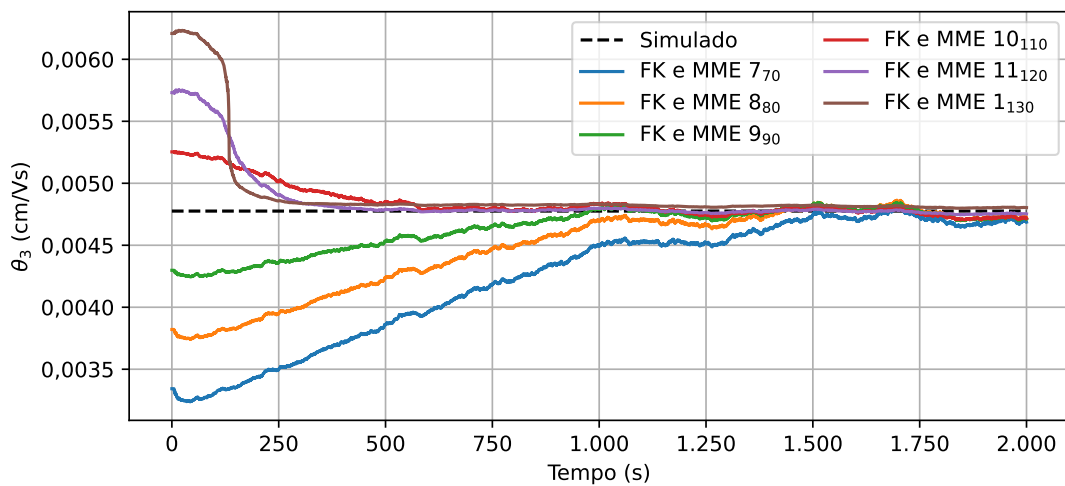
(a) Evolução da estimativa do estado x_3 .



(b) Evolução da estimativa do estado x_4 .

Figura 3.45 – Evolução dos estados não-medidos com o FK e MME para diferentes θ_0 .

Fonte: Produzido pelo autor.

(a) Evolução da estimativa do parâmetro θ_1 .(b) Evolução da estimativa do parâmetro θ_2 .(c) Evolução da estimativa do parâmetro θ_3 .Figura 3.46 – Evolução dos parâmetros desconhecidos com o FK e MME para diferentes θ_0 .

Fonte: Produzido pelo autor.

3.8 Resumo dos Resultados

Neste capítulo, a estimação simultânea em malha fechada foi explorada em um sistema MIMO linearizado através de quatro abordagens, uma conjunta e três duais. Para tanto, três parâmetros da planta foram definidos como desconhecidos. Em cada abordagem, foram variados a condição inicial dos parâmetros desconhecidos, a configuração da matriz de covariância inicial, o valor do parâmetro λ ou o valor do parâmetro α . Os resultados foram avaliados em termos de critério de controle e critérios de precisão, e comparados com o FK ideal (caso no qual se conhecem as características estatísticas do ruído e os parâmetros da planta). A seguir, são apresentados um resumo dos resultados obtidos para cada método estudado e uma discussão sobre os resultados gerais:

- **Estimação conjunta com FKEC:** O FKEC obteve desempenho próximo ao FK ideal nos índices de controle para todas as condições iniciais, mas não convergiu o valor de θ_3 para as condições iniciais abaixo do valor nominal. De fato, o FKEC apresentou desempenho de controle próximo ao FK ideal em y_2 , até 2 vezes melhor em y_1 e até 1,32 vezes melhor nas entradas. Além disso, a precisão do FKEC na estimação se mostrou sensível à escolha da matriz de covariância inicial. Por fim, apesar de apresentar bons resultados, o FKEC apresentou curvas com fortes oscilações, tanto nas ações de controle quanto nos valores estimados dos parâmetros, o que pode excitar frequências não modeladas em aplicações reais;
- **Estimação dual com FKD:** De forma análoga ao FKEC, o FKD obteve desempenho nos índices de controle próximo ao FK ideal para todas as condições iniciais (semelhante ao FKEC, mas com maior variação nos resultados de y_2) e, além disso, convergiu para os valores corretos dos parâmetros desconhecidos em todos os casos. O FKD melhorou em até 50 vezes os resultados do FKEC no θ_3 com uma piora de até 2 vezes no θ_2 para valores abaixo da condição nominal de θ_0 . Para cenários acima, o desempenho entre os dois foi próximo. Os resultados de estimação do FKD também se mostraram sensíveis à escolha da matriz de covariância inicial. Por fim, o FKD conseguiu suavizar as curvas de ação de controle e de estimação em relação ao FKEC, mas, para os casos abaixo da condição nominal, os parâmetros não foram estimados tão suavemente como observado para os casos acima da condição nominal;
- **Estimação dual com FK e MQR- λ :** O FK com MQR- λ também obteve resultados próximos ao FK ideal nos índices de controle, mas piores que os observados para as outras abordagens para os casos acima da condição nominal. A precisão na estimação foi semelhante ao FKD, tanto para valores acima quanto para valores abaixo da condição nominal de θ_0 . A matriz de covariância inicial também afetou a precisão na estimação dos estados e, além disso, o fator de esquecimento λ permitiu uma melhora no desempenho da abordagem, mesmo para parâmetros constantes. Os melhores resultados são

obtidos com o ajuste de um λ para cada saída do MQR. Em função da flexibilidade do fator de esquecimento, o FK com MQR- λ também convergiu para os valores corretos dos parâmetros desconhecidos em troca de uma aumento na oscilação dessas curvas em regime permanente. De fato, esse ajuste permitiu que os resultados obtidos para as condições abaixo do valor nominal fosse mais suaves que no FKD, com TVC até 1,86 vezes melhor que o FK ideal nas entradas.

- **Estimação dual com FK e MME:** Assim como as outras abordagens de estimação dual, o FK com MME convergiu para os valores corretos dos parâmetros desconhecidos para todas as condições iniciais e obteve resultados próximos ao FK ideal nos índices de controle (semelhantes aos observados no FKEC). O TVC apresentado nesta estratégia foi até 2 vezes melhor que o FK ideal. O destaque ocorre na forma com a qual os parâmetros convergiram, que foi suave para todos os parâmetros e em quase todos os casos (a exceção foi θ_3 para as condições iniciais de 130% e 120% do valor nominal, em função da falta de restrição no FK). Assim como observado com a matriz de covariância inicial nas outras abordagens, o FK com MME foi sensível à escolha do parâmetro α da média móvel e os melhores resultados foram obtidos com a escolha adequada de um α para cada parâmetro estimado. Por fim, um recurso introduzido nessa abordagem foi o parâmetro k_0 , que regula o instante no qual a estimação começa e permite saltar transientes fortes;
- **Desempenho geral no controle:** Considerando, exclusivamente, o desempenho apresentado nos índices de controle e as curvas de ação de controle e saída, é possível afirmar que o FK com MME apresentou os melhores resultados. Mesmo que os resultados no controle das saídas sejam semelhante entre as abordagens para todas as condições iniciais, a estimação dual com FK e MME apresentou os menores valores de TVC em regime permanente e as ações de controle com menos oscilações no começo da simulação. Como abordado ao longo do capítulo, isso sugere que essa abordagem tem potencial para aplicações reais, uma vez que evita que frequências não modeladas sejam excitadas;
- **Desempenho geral na estimação:** Levando em conta somente o desempenho na precisão da estimação e as curvas dos estados não-medidos e parâmetros desconhecidos, os destaques são as abordagens de estimação dual. De fato, a estimação conjunta não conseguiu bom desempenho em metade das condições testadas. De maneira geral, os métodos duais apresentaram resultados próximos nos parâmetros e o FKD se destacou positivamente nos estados. Apesar de não ter os melhores resultados na precisão, somente o FK com MME conseguiu estimar os parâmetros de forma suave para a maioria dos casos;
- **Complexidade de ajuste:** Neste trabalho, os valores de P_0 relacionados aos estados

originais permaneceram inalterados e os outros parâmetros foram ajustados experimentalmente em cada uma das abordagens. Nesse contexto, no FKEC, foi necessário o ajuste de 3 parâmetros e o cálculo das matrizes Jacobianas. Enquanto isso, o FKD precisou do ajuste de até 6 parâmetros, 3 de $P_{\theta,0}$ e 3 de Q_{θ} . Analogamente, o FK com MQR- λ também precisou do ajuste de até 6 parâmetros, 3 de $P_{\theta,0}$ e 3 fatores λ . Por fim, no FK com MME, foi necessário ajustar 4 parâmetros, 3 fatores α e o k_0 . Então, levando em conta o número de valores a serem ajustados e os cálculos a serem realizados, o FK com MME é a abordagem com a menor complexidade. Em aplicações reais, menos parâmetros implica em menos hipóteses, o que pode reduzir a quantidade de pontos de falha.

A Figura 3.47 abaixo apresenta as curvas obtidas em cada um dos métodos testados na condição inicial de 70% nos parâmetros desconhecidos para os resultados com maiores diferenças entre as abordagens, ou seja, entradas e parâmetros. De fato, os resultados resumidos nos tópicos acima sobre a forma suave de estimação, o alcance das referências desejadas e a variação nas ações de controle podem ser facilmente observados nas figuras.

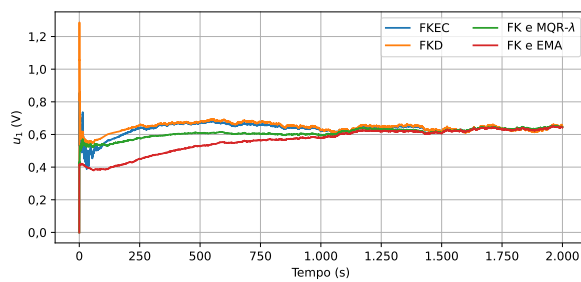
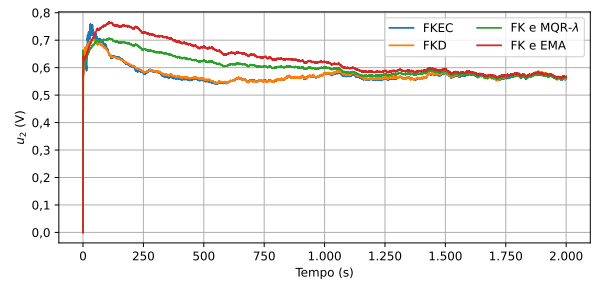
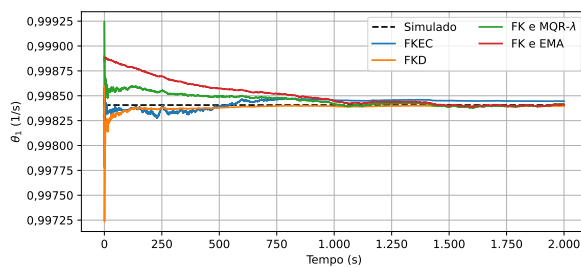
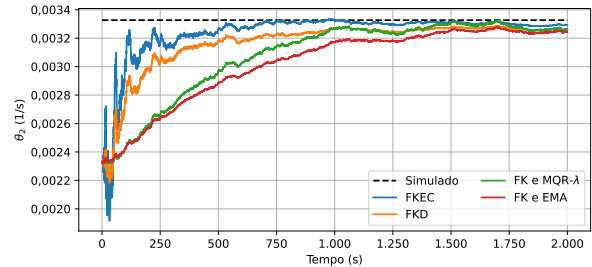
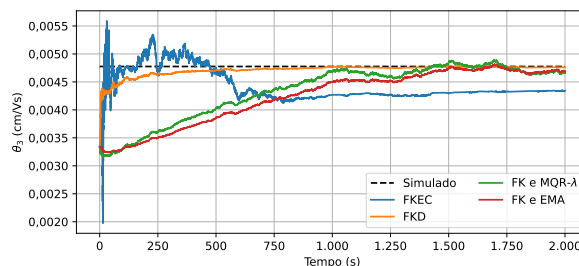
(a) Evolução da entrada u_1 .(b) Evolução da entrada u_2 .(c) Evolução estimativa do parâmetro θ_1 .(d) Evolução estimativa do parâmetro θ_2 .(e) Evolução estimativa do parâmetro θ_3 .

Figura 3.47 – Comparação das ações de controle e estimação dos parâmetros desconhecidos para as abordagens testadas na condição inicial de 70% nos parâmetros desconhecidos.

4 Conclusões

Ao longo deste trabalho, a estimação simultânea de estados e parâmetros foi explorada no contexto de sistemas lineares em malha fechada. Para tanto, as seguintes etapas foram realizadas:

- Inicialmente, foram apresentados os principais conceitos teóricos relacionados com a estimação simultânea, filtro de Kalman e métodos de mínimos quadrados;
- Em seguida, foi introduzida a formulação proposta neste trabalho para estimar os parâmetros desconhecidos de um sistema a partir do filtro de média móvel exponencial. Para tanto, foi considerada a aproximação da média móvel como um filtro contínuo de primeira ordem de modo que o estimador pudesse levar em conta a dinâmica do sistema e aspectos presentes em sistemas reais de forma simples de entender e aplicar. A abordagem proposta também foi integrada com o filtro de Kalman para estimação dual em sistemas lineares;
- Depois, as principais estratégias de estimação simultânea e a estratégia proposta foram testadas para diferentes condições iniciais dos parâmetros desconhecidos em um sistema MIMO linearizado amplamente conhecido na literatura de controle. Para tanto, as abordagens de estimação foram implementadas em ambiente simulado, por meio do *Simulink* do MATLAB®, em malha fechada com um controle adaptativo;
- Por fim, alguns dos fatores que influenciam cada abordagem foram investigados e os resultados de cada teste foram comparados de forma quantitativa por meio de índices de desempenho de controle e métricas de precisão. Essa estratégia permitiu comparar os métodos de estimação simultânea em mais aspectos além da qualidade da estimativa. A partir de uma análise qualitativa das curvas obtidas, foi possível relacionar o resultado de cada abordagem com problemas que podem ser observados na implementação em sistemas reais.

Em função disso, é possível afirmar que tanto o objetivo geral quanto os objetivos específicos propostos para este trabalho na Seção 1.5 foram atingidos. Além disso, a formulação proposta para estimação dual com FK e MME se apresenta como uma estratégia com potencial de aplicação em sistemas reais por levar em conta a dinâmica do sistema em questão, aspectos de robustez e facilidade de implementação. Os resultados apresentados por essa abordagem são comparáveis aos melhores resultados observados, tanto em relação ao controle quanto na precisão dos valores estimados, no entanto são necessárias mais validações da proposta antes de planejar sua implementação em um sistema real.

4.1 Contribuições

Este trabalho destaca as seguintes contribuições:

1. Desenvolvimento de uma nova abordagem de estimação dual com FK e MME levando em consideração a dinâmica do sistema estimado, as características da ação de controle e facilidade de implementação (ver Seção 2.3 e 3.7);
2. Análise quantitativa e qualitativa da influência das principais técnicas estimação simultânea no controle em malha fechada de sistemas lineares, bem com a discussão sobre os fatores que as influenciam na presença de cenários com diferentes condições iniciais (ver Capítulo 3);

4.2 Trabalhos Futuros

Para trabalhos futuros, recomenda-se as seguintes tarefas:

1. Investigar as abordagens apresentadas para outros cenários de estimação, isto é, sistema MIMO linear com parâmetros desconhecidos variantes no tempo e sistemas não-lineares (com parâmetros variantes ou não);
2. Investigar as abordagens descritas para sistemas MIMO lineares e não-lineares com adaptação das matrizes de covariância de ruído de processo e de medição do FK;
3. Investigar o desempenho das abordagens apresentadas para outros conjuntos de parâmetros desconhecidos em malha fechada ou com variação dos parâmetros do covariância dos estados;
4. Investigar o desempenho das estratégias apresentadas com controles mais agressivos ou com outras técnicas presentes na literatura, como controlador PI e controle escalonado;
5. Formular uma estrutura matemática de seleção dos parâmetros α da MME para simplificar o ajuste desse filtro para diferentes sistemas;
6. Implementar as estratégias estudadas em sistemas reais para validar os resultados observados durante as simulações.

Referências

- ABREU, P. E. O. G. B. **Projeto de Sensores Virtuais e Estudo de Algoritmos para Estimação Online de Parâmetros em Dados com Excitação Intermitente**. 2016. Diss. (Mestrado) – Universidade Federal de Minas Gerais. Citado na p. 20.
- AGUIRRE, L. A. **Introdução à Identificação de Sistemas - Técnicas Lineares e Não-Lineares: Teoria e Aplicação**. 4. ed.: Editora UFMG, 2015. P. 730. ISBN 978-85-423-0079-6. DOI: [10.13140/RG.2.1.1616.7925](https://doi.org/10.13140/RG.2.1.1616.7925). Citado nas pp. 20, 22, 28–30, 32, 34, 37.
- AKGÜN, G.; HASAN KHAN, H. u.; HEBAISH, M.; GOHRINGER, D. System Identification using LMS, RLS, EKF and Neural Network. In: 2019 IEEE International Conference on Vehicular Electronics and Safety (ICVES). 2019. P. 1–6. DOI: [10.1109/ICVES.2019.8906339](https://doi.org/10.1109/ICVES.2019.8906339). Citado na p. 23.
- ALYAKHNI, A.; AL-MOHAMAD, A.; HOBLOS, G. Joint Estimation of MOSFET Degradation in a DC-DC Converter Using Extended Kalman Filter. In: 2019 4th Conference on Control and Fault Tolerant Systems (SysTol). 2019. P. 319–324. DOI: [10.1109/SYSTOL.2019.8864731](https://doi.org/10.1109/SYSTOL.2019.8864731). Citado na p. 22.
- ASTROM, K. J.; WITTENMARK, B. **Adaptive Control**. 2. ed.: Dover Publications, 2008. P. 590. ISBN 978-04-864-6278-3. Citado na p. 20.
- BEELEN, H.; BERGVELD, H. J.; DONKERS, M. C. F. Joint Estimation of Battery Parameters and State of Charge Using an Extended Kalman Filter: A Single-Parameter Tuning Approach. **IEEE Transactions on Control Systems Technology**, v. 29, n. 3, p. 1087–1101, 2021. DOI: [10.1109/TCST.2020.2992523](https://doi.org/10.1109/TCST.2020.2992523). Citado na p. 24.
- BISWAS, A.; GU, R.; KOLLMEYER, P.; AHMED, R.; EMADI, A. Simultaneous State and Parameter Estimation of Li-Ion Battery With One State Hysteresis Model Using Augmented Unscented Kalman Filter. In: 2018 IEEE Transportation Electrification Conference and Expo (ITEC). 2018. P. 1065–1070. DOI: [10.1109/ITEC.2018.8450197](https://doi.org/10.1109/ITEC.2018.8450197). Citado na p. 24.
- BROWN, R. G. **Exponential smoothing for predicting demand**. 1956. Citado na p. 31.
- CANDAN, M. Y.; ANKARALI, M. M. Extended Kalman Filter Based State and Parameter Estimation Method for a Buck Converter Operating in a Wide Load Range. In: 2020 IEEE Energy Conversion Congress and Exposition (ECCE). 2020. P. 3238–3244. DOI: [10.1109/ECCE44975.2020.9235695](https://doi.org/10.1109/ECCE44975.2020.9235695). Citado na p. 23.
- CHEN, C.-T. **Linear System Theory and Design**. 3. ed.: Oxford University Press, 1998. P. 352. ISBN 978-01-951-1777-6. Citado nas pp. 46, 47.

- DAI, H.; WEI, X.; SUN, Z. State and Parameter Estimation of a HEV Li-ion Battery Pack Using Adaptive Kalman Filter with a New SOC-OCV Concept. In: 2009 International Conference on Measuring Technology and Mechatronics Automation. 2009. v. 2, p. 375–380. DOI: [10.1109/ICMTMA.2009.333](https://doi.org/10.1109/ICMTMA.2009.333). Citado na p. 21.
- DAS, M.; DEY, A.; SADHU, S.; GHOSHAL, T. K. Joint Estimation of States and Parameters of a Reentry Ballistic Target Using Adaptive UKF. In: 2014 Fifth International Symposium on Electronic System Design. 2014. P. 99–103. DOI: [10.1109/ISED.2014.28](https://doi.org/10.1109/ISED.2014.28). Citado na p. 21.
- DORF, R. C.; BISHOP, R. H. **Modern Control Systems**. 13. ed.: Pearson, 2016. P. 1032. ISBN 978-01-344-0762-8. Citado na p. 18.
- FORTALEZA, E. L.; GOMES, L. M.; DE A. LIMAVERDE FILHO, J. O.; DE CAMPOS, M. C.; LONGHI, L. G. S.; DE LIMA, M. L.; TOGNETTI, E. S. Model-free adaptive filter to mitigate actuator wear. **ISA Transactions**, v. 129, p. 493–504, 2022. ISSN 0019-0578. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.isatra.2022.02.026>. Citado na p. 32.
- GAJULA, K.; MAREPALLI, L. K.; YAO, X.; HERRERA, L. Recursive Least Squares and Adaptive Kalman Filter-Based State and Parameter Estimation for Series Arc Fault Detection on DC Microgrids. **IEEE Journal of Emerging and Selected Topics in Power Electronics**, v. 10, n. 4, p. 4715–4724, 2022. DOI: [10.1109/JESTPE.2021.3135409](https://doi.org/10.1109/JESTPE.2021.3135409). Citado na p. 22.
- GAJULA, K.; YAO, X.; HERRERA, L. Dual State - Parameter Estimation for Series Arc Fault Detection on a DC Microgrid. In: 2020 IEEE Energy Conversion Congress and Exposition (ECCE). 2020. P. 4649–4655. DOI: [10.1109/ECCE44975.2020.9235753](https://doi.org/10.1109/ECCE44975.2020.9235753). Citado na p. 22.
- HAJEK, B. **Random Processes for Engineers**. 1. ed.: Cambridge University Press, 2015. P. 432. ISBN 978-11-071-0012-1. Citado na p. 34.
- HAYKIN, S. **Kalman Filtering and Neural Networks**. 1. ed.: John Wiley & Sons, Ltd, 2001. P. 304. ISBN 978-04-712-2154-6. Citado nas pp. 37, 39.
- JOHANSSON, K. The quadruple-tank process: a multivariable laboratory process with an adjustable zero. **IEEE Transactions on Control Systems Technology**, v. 8, n. 3, p. 456–465, 2000. DOI: [10.1109/87.845876](https://doi.org/10.1109/87.845876). Citado nas pp. 41, 43, 44.
- KALMAN, R. E. A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems. **Journal of Basic Engineering**, v. 82, n. 1, p. 35–45, mar. 1960. ISSN 0021-9223. DOI: <https://doi.org/10.1115/1.3662552>. Citado na p. 33.
- KAUTSKY, J.; NICHOLS, N. K.; VAN DOOREN, P. Robust pole assignment in linear state feedback. **International Journal of Control**, Taylor & Francis, v. 41, n. 5, p. 1129–1155, 1985. DOI: [10.1080/0020718508961188](https://doi.org/10.1080/0020718508961188). Citado na p. 47.

- KOPP, R. E.; ORFORD, R. J. Linear Regression Applied to System Identification for Adaptive Control Systems. **AIAA Journal**, v. 1, n. 10, p. 2300–2306, out. 1963. DOI: [10.2514/3.2056](https://doi.org/10.2514/3.2056). Citado nas pp. 36, 37.
- LEVINE, W. S. **The Control Systems Handbook: Control System Advanced Methods**. 2. ed.: CRC Press, 2011. P. 1798. (Electrical Engineering Handbook). ISBN 978-14-200-7364-5. Citado na p. 47.
- LI, C.; LIU, Y.; SUN, L.; LIU, Y.; TOMIZUKA, M.; ZHAN, W. Dual Extended Kalman Filter Based State and Parameter Estimator for Model-Based Control in Autonomous Vehicles. In: 2021 IEEE International Intelligent Transportation Systems Conference (ITSC). 2021. P. 327–333. DOI: [10.1109/ITSC48978.2021.9564571](https://doi.org/10.1109/ITSC48978.2021.9564571). Citado na p. 22.
- LI, Q.; CHEN, H.; CAI, S.; WANG, L.; GU, H.; ZHENG, M. State Estimation of Lithium-Ion Battery at Different Temperatures Based on DEKF and RLS. In: 2021 IEEE 16th Conference on Industrial Electronics and Applications (ICIEA). 2021. P. 1619–1624. DOI: [10.1109/ICIEA51954.2021.9516414](https://doi.org/10.1109/ICIEA51954.2021.9516414). Citado na p. 24.
- LIMAVERDE FILHO, J. O. A. **Estimação Adaptativa para Sistemas Não-Lineares em Malha Fechada e Teoria de Planicidade Diferencial**. 2019. Tese (Doutorado) – Universidade de Brasília. Citado na p. 49.
- LIMAVERDE FILHO, J. O. A.; FORTALEZA, E. L. F.; SILVA, J. G.; CAMPOS, M. C. M. M. de. Adaptive Kalman filtering for closed-loop systems based on the observation vector covariance. **International Journal of Control**, Taylor & Francis, v. 95, n. 7, p. 1731–1746, 2022. DOI: [10.1080/00207179.2020.1870158](https://doi.org/10.1080/00207179.2020.1870158). Citado na p. 32.
- AL-MOHAMAD, A.; HOBLOS, G.; PUIG, V. A Model-Based Prognostics Approach for RUL Forecasting of a Degraded DC-DC Converter. In: 2019 4th Conference on Control and Fault Tolerant Systems (SysTol). 2019. P. 312–318. DOI: [10.1109/SYSTOL.2019.8864778](https://doi.org/10.1109/SYSTOL.2019.8864778). Citado na p. 23.
- NELSON, A. T. **Nonlinear estimation and modeling of noisy time-series by dual Kalman filtering**. 2000. Tese (Doutorado) – Oregon Health & Science University. Citado na p. 40.
- NELSON, L.; STEAR, E. The simultaneous on-line estimation of parameters and states in linear systems. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v. 21, n. 1, p. 94–98, 1976. DOI: [10.1109/TAC.1976.1101148](https://doi.org/10.1109/TAC.1976.1101148). Citado nas pp. 21, 38, 64.
- NISE, N. S. **Engenharia de Sistemas de Controle**. 6. ed.: LTC, 2013. P. 1285. ISBN 978-85-216-2136-2. Citado na p. 18.
- OGATA, K. **Engenharia de Controle Moderno**. 5. ed.: Pearson, 2010. P. 824. ISBN 978-85-760-5810-6. Citado na p. 19.
- OGATA, K. **Discrete-Time Control Systems**. 2. ed.: Prentice-Hall, 1995. P. 745. ISBN 978-01-303-4281-2. Citado na p. 32.

- ONAT, A. A Novel and Computationally Efficient Joint Unscented Kalman Filtering Scheme for Parameter Estimation of a Class of Nonlinear Systems. **IEEE Access**, v. 7, p. 31634–31655, 2019. DOI: [10.1109/ACCESS.2019.2902368](https://doi.org/10.1109/ACCESS.2019.2902368). Citado na p. 24.
- OPPENHEIM, A. V.; WILLSKY, A. S. **Sinais e Sistemas**. 2. ed.: Pearson, 2010. P. 592. ISBN 978-85-760-5504-4. Citado na p. 31.
- PARTOVIBAKHSH, M.; LIU, G. An Adaptive Unscented Kalman Filtering Approach for Online Estimation of Model Parameters and State-of-Charge of Lithium-Ion Batteries for Autonomous Mobile Robots. **IEEE Transactions on Control Systems Technology**, v. 23, n. 1, p. 357–363, 2015. DOI: [10.1109/TCST.2014.2317781](https://doi.org/10.1109/TCST.2014.2317781). Citado na p. 26.
- PATIL, N.; DATAR, R. G.; PATIL, D. R. System Identification of a Temperature Control Process using Open Loop and Closed Loop methods. In: 2018 Second International Conference on Computing Methodologies and Communication (ICCMC). 2018. P. 240–246. DOI: [10.1109/ICCMC.2018.8488035](https://doi.org/10.1109/ICCMC.2018.8488035). Citado na p. 32.
- SHEN, H.; LV, Y.; ZHOU, J.; WANG, L.; FENG, Y. An Online Parameter Estimation Method Based on Adaptive Unscented Kalman Filter for Unmanned Surface Vessel. In: 2022 34th Chinese Control and Decision Conference (CCDC). 2022. P. 2584–2589. DOI: [10.1109/CCDC55256.2022.10033675](https://doi.org/10.1109/CCDC55256.2022.10033675). Citado na p. 25.
- SIMON, D. **Optimal State Estimation: Kalman, H Infinity and Nonlinear Approaches**. 1. ed.: John Wiley & Sons, Ltd, 2006. P. 552. ISBN 978-04-717-0858-2. Citado nas pp. 19, 34–37.
- SIMORGH, A.; RAZMINIA, A.; SHIRYAEV, V. I. System identification and control design of a nonlinear continuously stirred tank reactor. **Mathematics and Computers in Simulation**, v. 173, p. 16–31, 2020. ISSN 0378-4754. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.matcom.2020.01.010>. Citado na p. 32.
- SINGH, V.; PAL, B.; JAIN, T. A UKF and RLS Based State and Parameter Estimation Algorithm for Spark-Ignition Engines. In: 2021 European Control Conference (ECC). 2021. P. 1901–1906. DOI: [10.23919/ECC54610.2021.9655107](https://doi.org/10.23919/ECC54610.2021.9655107). Citado na p. 24.
- SMITH, S. W. **Digital Signal Processing: A Practical Guide for Engineers and Scientists**. 1. ed.: Newnes, 2013. P. 650. ISBN 978-07-506-7444-7. Citado na p. 31.
- SOUTO, R.; ISHIHARA, J.; BORGES, G. Kalman Filtering for Discrete Time Uncertain Systems. In: JORDÁN, M. A. (Ed.). **Discrete Time Systems**. Rijeka: IntechOpen, 2011. cap. 6. DOI: [10.5772/15411](https://doi.org/10.5772/15411). Disponível em: <https://doi.org/10.5772/15411>. Citado nas pp. 19–21.

- TAVARES, F. A.; ERAZO-COSTA, F. J.; ERAS-HERRERA, W. Y. Estimaco da sincronizao/dessincronizao relacionada ao evento (SRE/DRE) utilizando a estimaco dual de estados e parâmetros. In: SIMPSIO Brasileiro de Automao Inteligente - SBAI. 2021. P. 1132–1137. DOI: <https://doi.org/10.20906/sbai.v1i1.2710>. Citado nas pp. 22, 24.
- VAN DER MERWE, R. **Sigma-Point Kalman Filters for Probabilistic Inference in Dynamic State-Space Models**. 2004. Tese (Doutorado) – Oregon Health & Science University. Citado nas pp. 37, 39.
- WAN, E. A.; NELSON, A. T. Dual Kalman Filtering Methods for Nonlinear Prediction, Smoothing and Estimation. In: PROCEEDINGS of the 9th International Conference on Neural Information Processing Systems. MIT Press, 1996. P. 793–799. DOI: [10.5555/2998981.2999093](https://doi.org/10.5555/2998981.2999093). Citado na p. 39.
- WAN, E. A.; VAN DER MERWE, R. The unscented Kalman filter for nonlinear estimation. In: PROCEEDINGS of the IEEE 2000 Adaptive Systems for Signal Processing, Communications, and Control Symposium (Cat. No.00EX373). 2000. P. 153–158. DOI: [10.1109/ASSPCC.2000.882463](https://doi.org/10.1109/ASSPCC.2000.882463). Citado na p. 40.
- WANG, J.; ZHANG, Z. Lithium-ion Battery SOC Estimation Based on Weighted Adaptive Recursive Extended Kalman Filter Joint Algorithm. In: 2020 IEEE 8th International Conference on Computer Science and Network Technology (ICCSNT). 2020. P. 11–15. DOI: [10.1109/ICCSNT50940.2020.9304993](https://doi.org/10.1109/ICCSNT50940.2020.9304993). Citado na p. 24.
- WANG, X.; SU, Q.; JIN, P.; WANG, Y.; HUANG, D.; LI, C.; WEI, Z.; ZHAO, J.; LIU, Z. Online Joint Estimation of SOC and SOP for High-rate Battery based on EKF. In: 2021 IEEE 16th Conference on Industrial Electronics and Applications (ICIEA). 2021. P. 1605–1609. DOI: [10.1109/ICIEA51954.2021.9516115](https://doi.org/10.1109/ICIEA51954.2021.9516115). Citado na p. 24.
- WANG, Y.; HE, X.; LIU, D.; QIN, J.; LI, P. States Estimation for Unmanned Surface Vehicles (USVs) Using Dual Unscented Kalman Filters. In: 2021 International Conference on Intelligent Computing, Automation and Applications (ICAA). 2021. P. 911–916. DOI: [10.1109/ICAA53760.2021.00166](https://doi.org/10.1109/ICAA53760.2021.00166). Citado na p. 24.
- WU, J.; JIAO, C.; CHEN, M.; CHEN, J.; ZHANG, Z. SOC Estimation of Li-ion Battery by Adaptive Dual Kalman Filter under Typical Working Conditions. In: 2019 IEEE 3rd International Electrical and Energy Conference (CIEEC). 2019. P. 1561–1567. DOI: [10.1109/CIEEC47146.2019.CIEEC-2019558](https://doi.org/10.1109/CIEEC47146.2019.CIEEC-2019558). Citado na p. 25.
- YALONG, F.; DINGJUN, Z.; SHANBIN, W.; WEI, L. SOC Estimation of LiFePO4 Battery with Dual Adaptive Unscented Kalman Filter. In: 2022 37th Youth Academic Annual Conference of Chinese Association of Automation (YAC). 2022. P. 29–35. DOI: [10.1109/YAC57282.2022.10023755](https://doi.org/10.1109/YAC57282.2022.10023755). Citado na p. 25.

-
- YU, Q.; YOKOYAMA, S.; DONG, D.; MCMANUS, D.; YONEZAWA, H. Simultaneous Estimation of Parameters and the State of an Optical Parametric Oscillator System. **IEEE Transactions on Quantum Engineering**, v. 3, p. 1–9, 2022. DOI: [10.1109/TQE.2022.3185234](https://doi.org/10.1109/TQE.2022.3185234). Citado na p. 23.
- ZERDALI, E. A Comparative Study on Adaptive EKF Observers for State and Parameter Estimation of Induction Motor. **IEEE Transactions on Energy Conversion**, v. 35, n. 3, p. 1443–1452, 2020. DOI: [10.1109/TEC.2020.2979850](https://doi.org/10.1109/TEC.2020.2979850). Citado na p. 25.
- ZHANG, X.; ZHAO, J.; WANG, L.; HU, D.; XIE, L.; BAO, X. Joint Kalman Observer for Mechanical Multi-Parameter Decoupling Estimation of Permanent Magnet Synchronous Linear Motor. In: 2021 13th International Symposium on Linear Drives for Industry Applications (LDIA). 2021. P. 1–4. DOI: [10.1109/LDIA49489.2021.9505720](https://doi.org/10.1109/LDIA49489.2021.9505720). Citado na p. 23.
- ZWERGER, T.; MERCORELLI, P. A Dual Kalman Filter to Identify Parameters of a Permanent Magnet Synchronous Motor. In: 2020 24th International Conference on System Theory, Control and Computing (ICSTCC). 2020. P. 619–623. DOI: [10.1109/ICSTCC50638.2020.9259686](https://doi.org/10.1109/ICSTCC50638.2020.9259686). Citado na p. 22.