

PROJETO DE GRADUAÇÃO

Formulação e Solução do Problema de Contato entre Cilindros

Por

Rodrigo Almeida Gonçalves

Brasília, 7 de agosto de 2023

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

FACULDADE DE TECNOLOGIA

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
Faculdade de Tecnologia
Departamento de Engenharia Mecânica

PROJETO DE GRADUAÇÃO

Formulação e Solução do Problema de Contato entre Cilindros

Por

Rodrigo Almeida Gonçalves

Relatório submetido como requisito parcial para obtenção
do grau de Engenheiro Mecânico

Banca Examinadora

Prof. Dr. José Alexander Araújo - ENM/FT-UnB (Orientador)

Prof. Dr. Jorge Luiz de Almeida Ferreira - ENM/FT-UnB (Examinador interno)

Prof. Dr. Luis Augusto Conte Mendes Veloso - ENM/FT-UnB (Examinador interno)

Brasília 7 de agosto de 2023

Agradecimentos

Gostaria de deixar meus agradecimentos à minha família, ao meu Professor orientador José Alexander Araújo e aos meus amigos. Sem eles eu não chegaria até aqui.

Resumo

A fadiga por fretting é um fenômeno que afeta inúmeros componentes na engenharia, várias indústrias e aplicações, tais como: componentes aeronáuticos, automotivos e aeroespaciais, bem como de implantes médicos onde exista contato e movimento relativo de baixa amplitude entre os materiais. Nesse contexto este trabalho visa entender melhor o problema de contato entre os materiais através do estudo analítico da formulação de contato entre duas superfícies cilíndricas. É apresentada a formulação do problema à luz da Teoria da Elasticidade, abordando-se a solução analítica em estado plano de tensão e de deformação, obtendo a solução sob a forma de campo de deslocamento, de deformação e de tensão.

Palavras-chaves: *fretting*, contato, Campo de deslocamento, Campo de deformação, Campo de tensão.

Abstract

A fadiga por *fretting* é um fenômeno que afeta inúmeros componentes na engenharia, várias indústrias e aplicações, tais como: componentes aeronáuticos, automotivos e aeroespaciais, bem como de implantes médicos onde exista contato e movimento relativo de baixa amplitude entre os materiais. Nesse contexto este trabalho visa entender melhor o problema de contato entre os materiais através do estudo analítico da formulação de contato entre duas superfícies cilíndricas. É apresentada a formulação do problema à luz da Teoria da Elasticidade, abordando-se a solução analítica em estado plano de tensão e de deformação, obtendo a solução sob a forma de campo de deslocamento, de deformação e de tensão.

Fretting fatigue is a phenomenon that affects countless engineering components, industries and applications: aeronautical, automotive and aerospace components, as well as medical implants in which there is contact and low amplitude relative movement between material surfaces. In this context this work aims to better understand the problem of contact between material surfaces through the study and analytical formulation of the contact between two cylindrical surfaces. The problem formulation is shown in light of elasticity theory approaching the analytical solution in a state of plain strain and stress, obtaining the solution in the form of the fields of strain, stress and deformation.

Key-words: key-word 1, key-word 2, key-word 3.

Lista de Figuras

Figura 1 – Esquema do processo de <i>fretting</i> ocorrendo numa junta do tipo rabo de andorinha	1
Figura 2 – a) Turbina de um avião com detalhe para uma das pás que foi removida b) pá removida na qual pode ser visto o resultado de um trinca causada pelo fenômeno do <i>fretting</i>	2
Figura 3 – Tipos mais comuns de ensaio para análise de fadiga por <i>fretting</i> ; a) Contato plano-plano utilizando uma sapata em formato de ponte, b) Contato plano-cilindro utilizando sapatas cilíndricas. Adaptado (MUTOH, 1995)	2
Figura 4 – Tipos de contato entre uma geometria e uma superfície; a) Incompleto e não-conforme, b) Completo, c) Incompleto com singularidade, d) Não completo e conforme, e e) Recuante. (HILLS; NOWELL, 1994)	4
Figura 5 – Esquema representando um contato genérico entre dois corpos. Nele atuam uma força normal P , uma força tangencial Q , um momento M e as tensões resultantes em cada corpo, ς_a e ς_b . Adaptado (ANDRESEN; HILLS, 2019)	5
Figura 6 – Esquema representando as áreas de escorregamento e adesão no contato entre dois corpos. (MENDES, 2011)	7
Figura 7 – Semiplano sob ação de forças normais e cisalhantes// (HILLS; NOWELL, 1994)	10
Figura 8 – Semi-plano carregado por tensões normais e cisalhantes, respectivamente, $p(x)$ e $q(x)$ aplicadas sobre a faixa de contato()	11
Figura 9 – Perfil de distribuição de pressão e tensão para diversas configurações de Q/fP	20
Figura 10 – Gráfico do histórico da carga tangencial ao longo de um processo de <i>fretting</i>	21

Lista de Tabelas

Tabela 1 – S= Singular, N= Não singular * a condição de consistência $\int_{-a}^a \frac{h'(\xi)}{w(\xi)} d\xi =$
0 deve ser imposta 11

Sumário

	1 INTRODUÇÃO	1
1.1	Contextualização	1
	2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	4
2.1	Contato elástico bidimensional	4
2.1.1	Formulação do contato elástico bidimensional entre cilindros	4
2.1.2	Contato entre cilindros - problema de Hertz	12
2.1.3	Carga Normal	18
2.1.4	Carga Tangencial	19
2.1.5	Campo de tensão cíclico na região do contato	22
	3 CONCLUSÃO	26
	REFERÊNCIAS	27

1 Introdução

1.1 Contextualização

Dentre os muitos problemas que afetam a vida de uma peça, o fenômeno de *fretting* é um que está presente em diversas situações. O *fretting* ocorre no contato entre superfícies sujeitas a vibração, no qual essas superfícies sofrem um escorregamento em direções alternadas da ordem de micrômetros. A figura 1 exemplifica um cenário onde está ocorrendo *fretting*: na junta de um pá de uma turbina de avião. Nesse estado há um desgaste do material e uma intensificação nos processos de formação e propagação de trincas, majoritariamente abaixo da superfície. Essas trincas diminuem muito a vida útil de juntas.

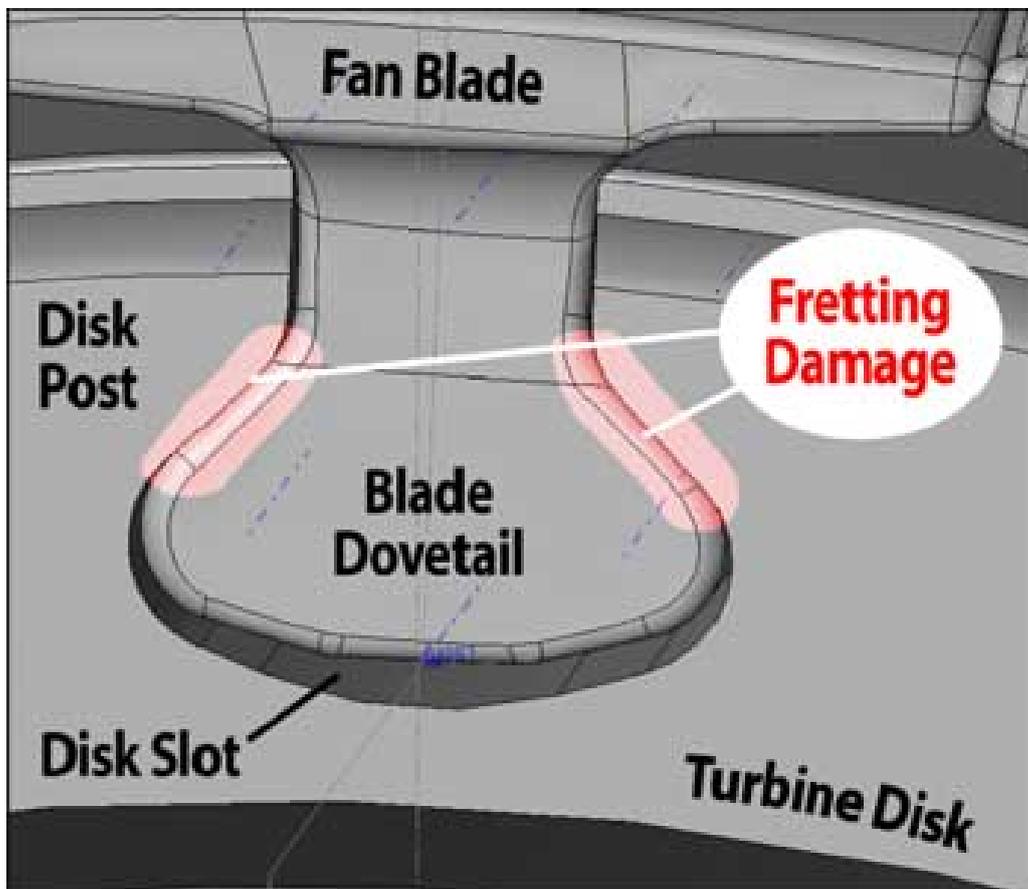


Figura 1 – Esquema do processo de *fretting* ocorrendo numa junta do tipo rabo de andorinha

O *fretting* é um problema relevante para diversas indústrias devido à sua capacidade de reduzir a vida efetiva de componentes: eixos de roda, turbinas e placas aparafusadas são apenas alguns dos elementos que podem ser afetados. Assim, a análise e previsão desse fenômeno é de grande importância. É possível ver na figura 2 o dano que pode ser causado pelo processo.

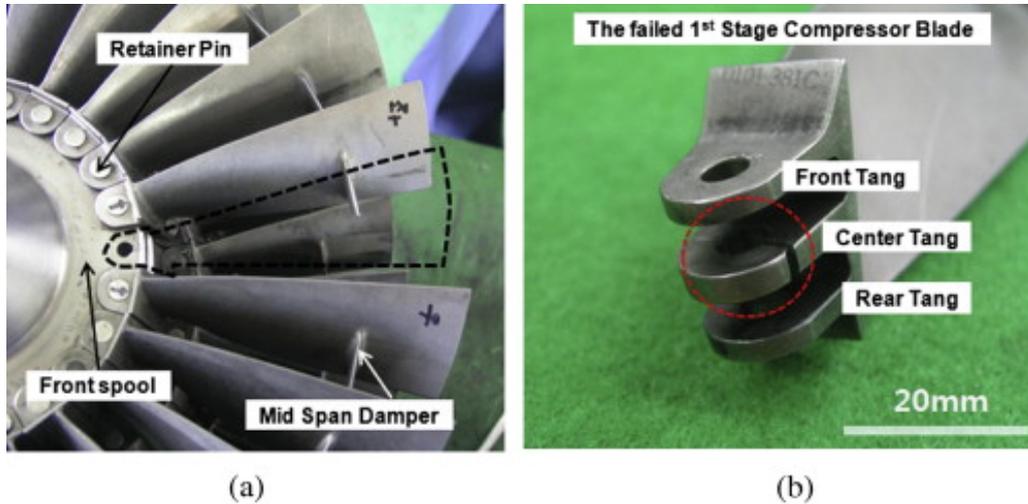


Figura 2 – a) Turbina de um avião com detalhe para uma das pás que foi removida b) pá removida na qual pode ser visto o resultado de um trinca causada pelo fenômeno do *fretting*.

Para a identificação da vida de um componente sob fadiga de *fretting* são realizados ensaios em que corpos de prova feitos do material desejado são fixados por sapatas e cargas cíclicas, de tração e cisalhamento, são aplicadas.

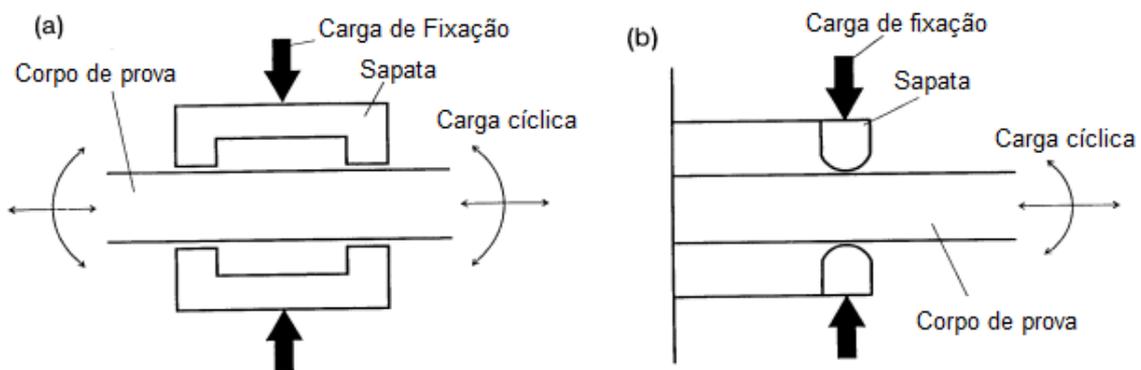


Figura 3 – Tipos mais comuns de ensaio para análise de fadiga por *fretting*; a) Contato plano-plano utilizando uma sapata em formato de ponte, b) Contato plano-cilindro utilizando sapatas cilíndricas. Adaptado (MUTOH, 1995)

A figura 3 apresenta diferentes configurações sob as quais o ensaio pode ser realizado. O formato da superfície de contato da sapata com o corpo de prova afeta o fenômeno,

alterando as zonas de escorregamento e posição do surgimento de trincas. O contato a ser estudado neste trabalho é o entre uma sapata cilíndrica e uma superfície plana.

Assim, se faz importante a compreensão dos princípios matemáticos que regem o processo de contato entre dois corpos.

Neste contexto, o entendimento do problema de contato entre dois materiais é de fundamental importância para o estudo da fadiga por *fretting* nos problemas de engenharia.

Dessa forma, este trabalho tem como objetivo formular e apresentar a solução analítica do problema de contato entre duas superfícies cilíndricas à luz da Teoria da Elasticidade sob estado plano de tensões e de deformações. A solução analítica é apresentada sob a forma de campo de deslocamentos, de deformações e de tensões.

2 Revisão Bibliográfica

2.1 Contato elástico bidimensional

2.1.1 Formulação do contato elástico bidimensional entre cilindros

O contato entre duas superfícies pode ser aproximado por uma geometria pressionada contra um semiplano. Hills e Nowell(1994) classificam esses contatos quanto a sua completude e conformidade. Um contato incompleto é aquele cuja linha de contato entre os corpos pode ser alterada quando se altera a intensidade da força aplicada para mantê-lo. A natureza elástica dos corpos fará com que o corpo se deforme numa tentativa de conformação. A geometria do corpo pode, porém, não permitir uma deformação relevante. Quando isso ocorre, tem-se um contato completo. O nível de conformidade do contato pode ser avaliado comparando metade do comprimento do contato, a , com o tamanho característico da geometria do corpo. A figura 4 apresenta diversos tipos de contato.

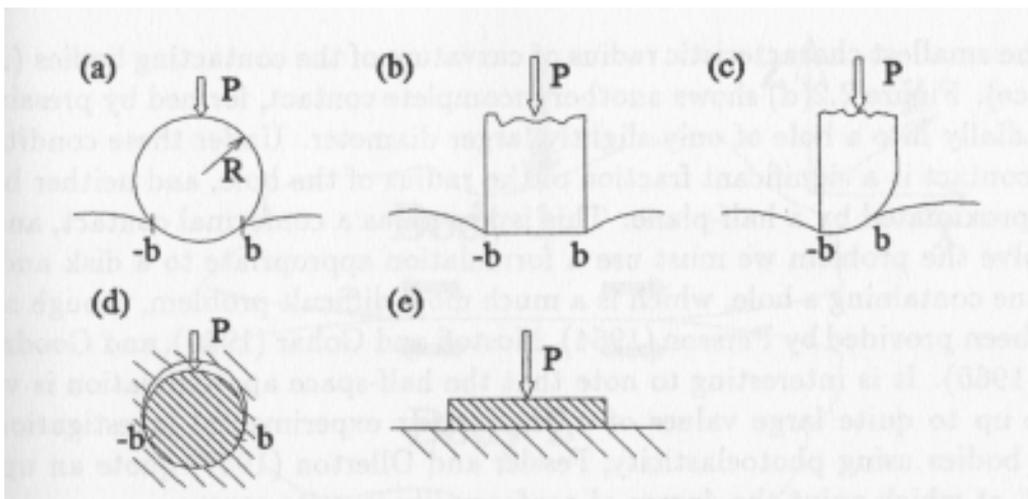


Figura 4 – Tipos de contato entre uma geometria e uma superfície; a) Incompleto e não-conforme, b) Completo, c) Incompleto com singularidade, d) Não completo e conforme, e e) Recuante. (HILLS; NOWELL, 1994)

Na figura 4.(a) está representado o contato entre um cilindro e um semiplano. Nesta configuração a carga P aplicada determinará a extensão do contato. Já na figura 4.(b)

é apresentado um contato completo. A geometria do corpo é plana e paralela ao plano contra o qual ela é pressionada, assim, o contato é mais impactado por, por exemplo, a presença de imperfeições no plano do que pela força aplicada para unir os corpos. A figura 4.(c) apresenta um contato incompleto com singularidade onde apenas um lado será afetado pela aplicação da força. As figuras d e e exemplificam a conformidade do contato. No caso da figura 4.(d) a superfície de contato é um furo de diâmetro levemente maior que o do cilindro. Nesse caso o arco de contato é uma fração significativa do raio do furo. Na figura 4.(e) uma placa fina e plana é pressionada contra o plano. Nesse caso a aplicação da força fará com que as bordas da placa recuem em relação ao plano.

Em um contato genérico existem cinco cargas relevantes para a análise, todas capazes de variar no tempo : a carga normal P , a carga tangencial Q , um momento M , e uma tensão que surge da diferença entre as tensões originadas em cada corpo $\sigma = \sigma_a - \sigma_b$.

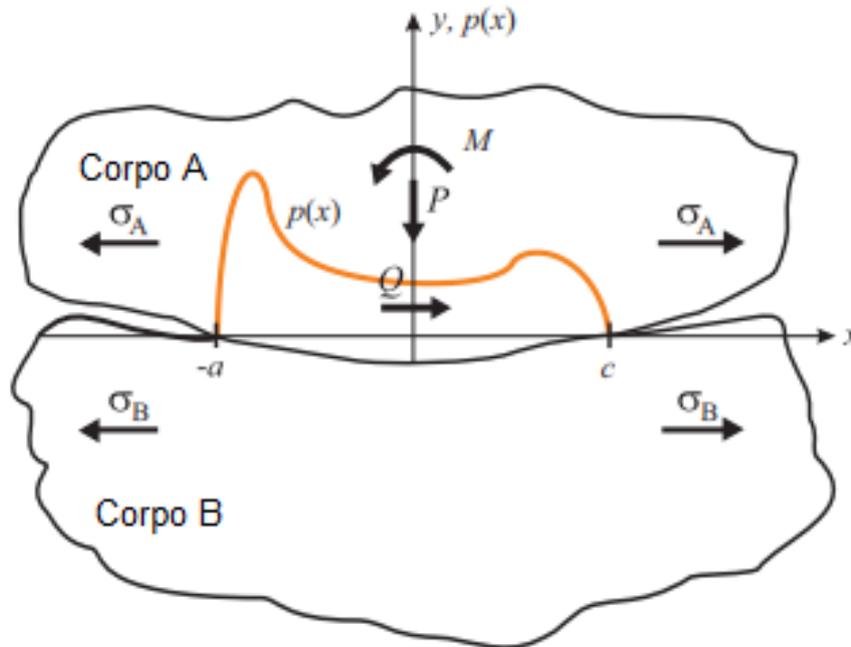


Figura 5 – Esquema representando um contato genérico entre dois corpos. Nele atuam uma força normal P , uma força tangencial Q , um momento M e as tensões resultantes em cada corpo, σ_a e σ_b . Adaptado (ANDRESEN; HILLS, 2019)

Deve-se então analisar a origem e a distribuição das tensões cisalhantes e analisar sua influência na distribuição da pressão de contato. Quando dois corpos elasticamente similares são postos em um contato normal uma pressão de contato mutual se desenvolve e as partículas na superfície de ambos os corpos são comprimidas porém também sofrem um deslocamento paralelo à superfície livre. No entanto, como os corpos são elasticamente similares esse deslocamento será o mesmo, sem tendência a escorregamento relativo (nota-se que escorregamento está sendo utilizado para referir-se ao movimento microscópico que ocorre entre as faces em contato, diferentemente do termo deslizamento que refere-se a

movimentos macroscópicos). Isso significa que não surgem trações friccionais e a solução do problema se mantém a mesma independente da ocorrência ou não de aderência entre as superfícies. Se uma força tangencial, suficiente para causar escorregamento, for aplicada tensões cisalhantes surgem e são limitadas pelo coeficiente de atrito, f :

$$|q(x, y)| = -fp(x, y) \quad (2.1)$$

onde q é a tensão cisalhante e p é a tensão normal. A presença de tensões cisalhantes causará um deslocamento normal em cada uma das superfícies. Porém, devido aos sentidos opostos nos quais tensões cisalhantes agem sobre as superfícies dos corpos e devido aos corpos serem elasticamente similares, os pontos na superfície se movem na mesma quantidade de maneira que o perfil das superfícies não são modificados. No caso de *fretting* a força cisalhante é, normalmente, fraca demais para causar deslizamento, sendo

$$|Q| < fp \quad (2.2)$$

onde P é a força normal. Nesse caso a área de contato consiste de uma mistura de zonas de adesão, onde as partículas aderem, e zonas de escorregamento, nas quais há um movimento tangencial ocorrendo e a tensão cisalhante é limitada pelo atrito. A distribuição das zonas de adesão e escorregamento é governada pelos seguintes fatores: na zona de escorregamento a tensão cisalhante é dada pela eq. 2.1 e o sentido da tensão cisalhante deve ser oposto ao sentido do incremento de deslocamento tangencial relativo entre as superfícies causado pelo ultimo incremento de carga. Devido ao fato de que as tensões cisalhantes em cada corpo tem magnitudes iguais porem sentidos opostos, o deslocamento provocado nas superfícies é o mesmo. Não há, então, diferença na curvatura relativa e a pressão de contato não é afetada. Os efeitos da carga normal e cisalhante são inteiramente separados e podem então ser analisados separadamente.

Se os corpos, porém, possuírem diferentes constantes elásticas, então ao serem postos em contato as partículas da superfície sofrerão deslocamentos tangenciais diferentes. Esses deslocamentos serão proporcionais à complacência do componente, dada por

$$\delta_i^T(r, s) \propto \frac{1 - \nu_i}{\mu_i} p(x, y) \quad i = 1, 2 \quad (2.3)$$

onde ν_i é a razão de Poisson e μ_i é o modulo de rigidez do corpo i . Assim, a não ser que

$$\frac{1 - \nu_1}{\mu_1} = \frac{1 - \nu_2}{\mu_2} \quad (2.4)$$

ocorrerá um deslocamento tangencial, o qual será resistido pelo atrito. Em algumas regiões isso será insuficiente para impedir que haja movimento relativo o que resultará em escorregamento enquanto em outras regiões a adesão será mantida. A figura 6 apresenta um esquema para formação da zona de adesão e escorregamento. Os termos físicos responsáveis pela distribuição das zonas de adesão e escorregamento são os mesmos que os

gerados pela influência de uma tensão cisalhante menor que o valor mínimo para escorregamento. Nesse caso, porém, o problema é mais complexo já que as tensões de cisalhamento superficiais causarão um deslocamento normal da superfície, δ_i^N , tal qual

$$\delta_i^N(r, s) \propto \frac{1 - \nu_i}{\mu_i} q(x, y) i = 1, 2 \quad (2.5)$$

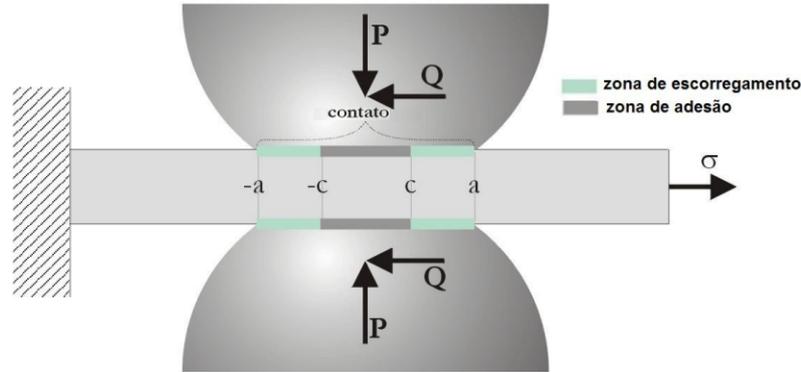


Figura 6 – Esquema representando as áreas de escorregamento e adesão no contato entre dois corpos. (MENDES, 2011)

Nessa situação, a não ser que a equação eq 2.4 seja verdade, haverá deslocamento relativo normal, o que afetará o perfil relativo das superfícies e, assim, a distribuição da pressão de contato. O problema, nesse caso, é acoplado. Similarmente, num contato deslizante o perfil da superfície se torna diferente dos perfis não carregados

A figura 7 apresenta um semiplano sujeito a uma força distribuída em linha que possui componentes normal e tangencial, P e Q por unidade de comprimento, respectivamente. Assume-se que o plano esteja em estado plano de deformação, para que o estado de tensões possa ser dado como uma solução da função de tensão de Airy para a solução biarmônica. Nesse caso

$$\phi(r, \theta) = -\frac{r\theta}{\pi} (P \sin\theta + Q \cos\theta) \quad (2.6)$$

e substituir na equação biarmonica gerará o campo de tensões

$$\sigma_{rr} = -\frac{2}{\pi r} (P \cos\theta - Q \sin\theta) \sigma_{rr} = \tau_{r\theta} = 0 \quad (2.7)$$

O campo de deformação correspondente pode ser encontrado substituindo a eq. 2.7 na lei de Hooke, que para condições planas é

$$\epsilon_{rr} = \frac{1}{8\mu} \{ \sigma_{rr}(1 + \kappa) + \sigma_{\theta\theta}(\kappa - 3) \} \quad (2.8)$$

$$\epsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{8\mu} \{ \sigma_{\theta\theta}(1 + \kappa) + \sigma_{rr}(\kappa - 3) \} \quad (2.9)$$

$$\gamma_{r\theta} = \tau_{r\theta} = 0 \quad (2.10)$$

sendo $\kappa = 3 - 4\nu$ no estado plano de deformação e $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$ no estado plano de tensão, μ é o modulo de rigidez e ν é o coeficiente de Poisson. Tendo em mãos o estado de deformação é possível encontrar os deslocamentos através de integração com o seguinte resultado:

$$2\mu u_r = 2\frac{P}{2\pi} \{ (\kappa - 1)\theta \operatorname{sen}\theta - \cos\theta + (\kappa + 1)\ln r \cos\theta \} \\ - \frac{Q}{2\pi} \{ (\kappa - 1)\theta \cos\theta + \operatorname{sen}\theta - (\kappa + 1)\ln r \operatorname{sen}\theta \} + C_1 \quad (2.11)$$

$$2\mu u_\theta = \frac{P}{2\pi} \{ (\kappa - 1)\theta \cos\theta - \operatorname{sen}\theta - (\kappa + 1)\ln r \operatorname{sen}\theta \} \\ + \frac{Q}{2\pi} \{ -(\kappa - 1)\theta \operatorname{sen}\theta - \cos\theta - (\kappa + 1)\ln r \cos\theta \} + C_2 \quad (2.12)$$

onde C_1 e C_2 são constantes cujos valores podem ser obtidos ao se especificar o valor do deslocamento relativo a um ponto remoto. Nota-se que, quanto mais profundo na superfície for o ponto escolhido, maior serão os valores do deslocamento. A impossibilidade de obter os deslocamentos absolutos vem é uma característica do problema de elasticidade bidimensional. Para encontrar a função de influência que formará o *kernel* da equação integral, será necessário encontrar os deslocamentos da superfície. Esses podem ser obtidos das equações 2.11 e 2.12 ao definir $\theta = \pm\pi/2$, e converter para coordenadas cartesianas, resultando assim em

$$u = -P \left(\frac{\kappa - 1}{8\mu} \right) \operatorname{sgn}(x) + Q \left(\frac{\kappa + 1}{4\pi\mu} \right) \ln|x| + \frac{C_1}{2\mu} \quad (2.13)$$

$$v = -p \left(\frac{\kappa + 1}{4\pi\mu} \right) \ln|x| - Q \left(\frac{\kappa - 1}{8\mu} \right) \operatorname{sgn}(x) + \frac{C_2}{2\mu} \quad (2.14)$$

A princípio, as eqs. 2.13 e 2.14 podem ser utilizadas como base para a solução de problemas de contato determinando a distribuição de tensões necessária para gerar um deslocamento normal especificado, e até mesmo tangencial. A presença das constantes C_1 e C_2 é inconveniente, sendo preferível trabalhar em termos dos derivativos de $u(x)$ e $v(x)$ ao longo das superfícies. Derivando e substituindo as forças de linha pelas tensões distribuídas tem-se

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\kappa - 1}{4\mu} p(x) + \frac{\kappa + 1}{4\pi\mu} \int \frac{q(\xi)d\xi}{x - \xi} \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\kappa - 1}{4\mu} q(x) + \frac{\kappa + 1}{4\pi\mu} \int \frac{q(\xi) d\xi}{x - \xi} \quad (2.16)$$

As eqs. 2.15 e 2.16 dão as derivadas do deslocamento superficial em qualquer ponto devido à distribuição de tensões normais e cisalhantes ($p(\xi)$, $q(\xi)$) naquela superfície. Tomando agora dois corpos postos em contato com aplicação de forças normais e cisalhantes P e Q como na figura 5. O deslocamento relativo de um par de pontos correspondentes na superfície agora terá uma componente na direção y , dada por $v_1 - v_2$. Aplicando a equação 2.16 para cada corpo, com o sinal alterado corretamente para o corpo 1, terá-se que, na faixa de contato onde $h(x) = v_1(x) - v_2(x)$ que representa a quantidade de sobreposição que ocorreria se os corpos pudessem penetrar um ao outro livremente e

$$A = \frac{\kappa_1 + 1}{4\pi_1} + \frac{\kappa_2 + 1}{4\pi_2} \quad (2.17)$$

$$\beta = \frac{\Gamma(\kappa_1 - 1) - (\kappa_2 - 1)}{\Gamma(\kappa_1 + 1) + (\kappa_2 + 1)} \quad (2.18)$$

$$\frac{1}{A} \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{1}{\pi} \int \frac{p(\xi) \partial \xi}{x - \xi} - \beta q(x) \quad (2.19)$$

$$\Gamma = \mu_2 / \mu_1 \quad (2.20)$$

Problemas de contato, normalmente, existem sobre condições de deformação plana transversa, nas quais essas quantidades se tornam

$$A = \frac{1 - \nu_1}{\mu_1} + \frac{1 - \nu_2}{\mu_2} \equiv 2 \left\{ \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \right\} \quad (2.21)$$

$$\beta = \frac{1}{2A} \left\{ \frac{1 - 2\nu_1}{\mu_1} - \frac{1 - 2\nu_2}{\mu_2} \right\} \equiv \frac{1}{A} \left\{ \frac{(1 - 2\nu_1)(1 + \nu_1)}{E_1} - \frac{(1 - 2\nu_2)(1 - \nu_2)}{E_2} \right\} \quad (2.22)$$

no qual E_i é o módulo de Young do corpo i . De maneira similar, se o deslocamento relativo tangencial de pontos correspondentes em contato é $g(x)$ a eq.2.16 gera a expressão

$$\frac{1}{A} \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{1}{\pi} \int \frac{q(\xi) d\xi}{x - \xi} + \beta p(x) \quad (2.23)$$

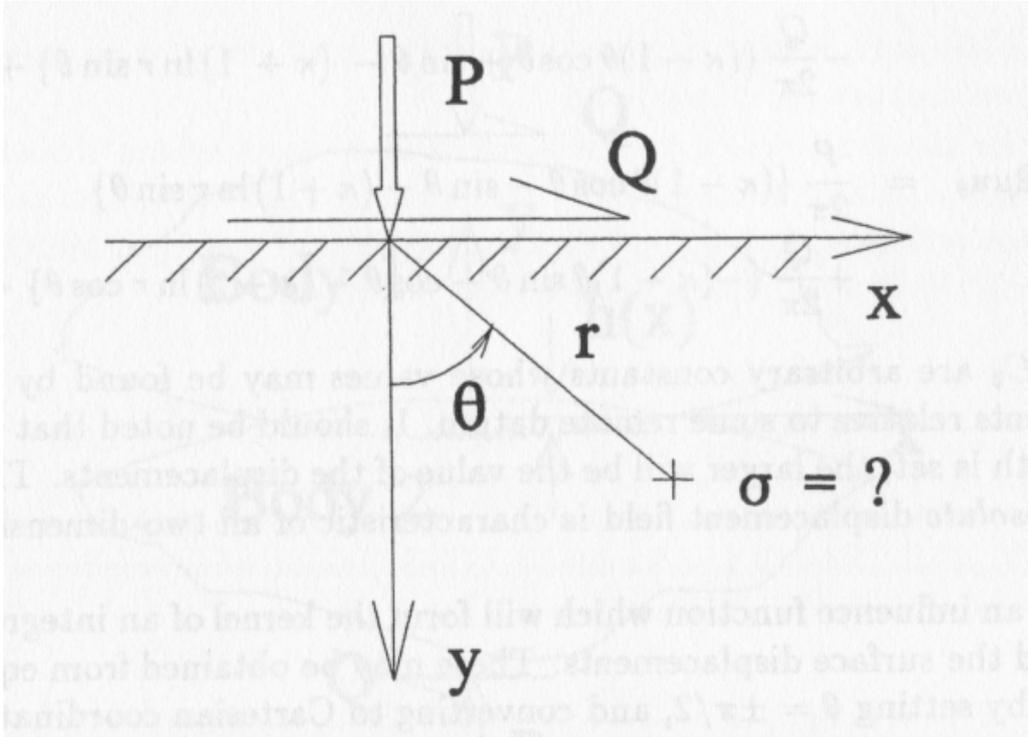


Figura 7 – Semiplano sob ação de forças normais e cisalhantes// (HILLS; NOWELL, 1994)

A eq. 2.19, e onde possível a eq. 2.23, podem ser utilizadas para resolver uma grande variedade de problemas de contato.

Começando por situações onde o segundo termo da eq. 2.19 se torna zero, simplificação que pode ser aplicada quando não existem tensões cisalhantes no contato, por exemplo por um contato sem atrito. A equação,então, se torna

$$\frac{1}{A} \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{p(\xi) d\xi}{x - \xi} \quad |x| \leq a \quad (2.24)$$

na parte em que o faixa de contato se estende de $x = -a$ até $x = a$. Pode ser demonstrado que a inversa dessa equação, isto é, a solução para $p(x)$ dado um $h(x)$, é

$$p(x) = -\frac{w(x)}{A\pi} \int_{-a}^a \frac{h'(\xi) d\xi}{w(\xi)(\xi - x)} + Cw(x) \quad (2.25)$$

na qual $h'(x) \equiv \partial h / \partial x$ e que a função fundamental $w(x)$ pode tomar uma de quatro formas, dependendo do comportamento requerido de $p(x)$ nos pontos finais, mostrado na tabela

Em experimentos de *fretting* também é necessário entender os detalhes do campo de tensões internos e os deslocamentos superficiais. Para problemas planos a maneira mais eficiente de deduzir essas quantidades é através do potencial de Muskhelishvili.

Comportamento no limite		$w(x)$	C
$x = -a$	$x = a$		
N	S	$\sqrt{(a+x)/(a-x)}$	0
S	N	$\sqrt{(a-x)/(a+x)}$	0
S	S	$1/\sqrt{a^2-x^2}$	$\neq 0$
N	N	$\sqrt{a^2-x^2}$	0^*

Tabela 1 – S= Singular, N= Não singular * a condição de consistência $\int_{-a}^a \frac{h'(\xi)}{w(\xi)} d\xi = 0$ deve ser imposta

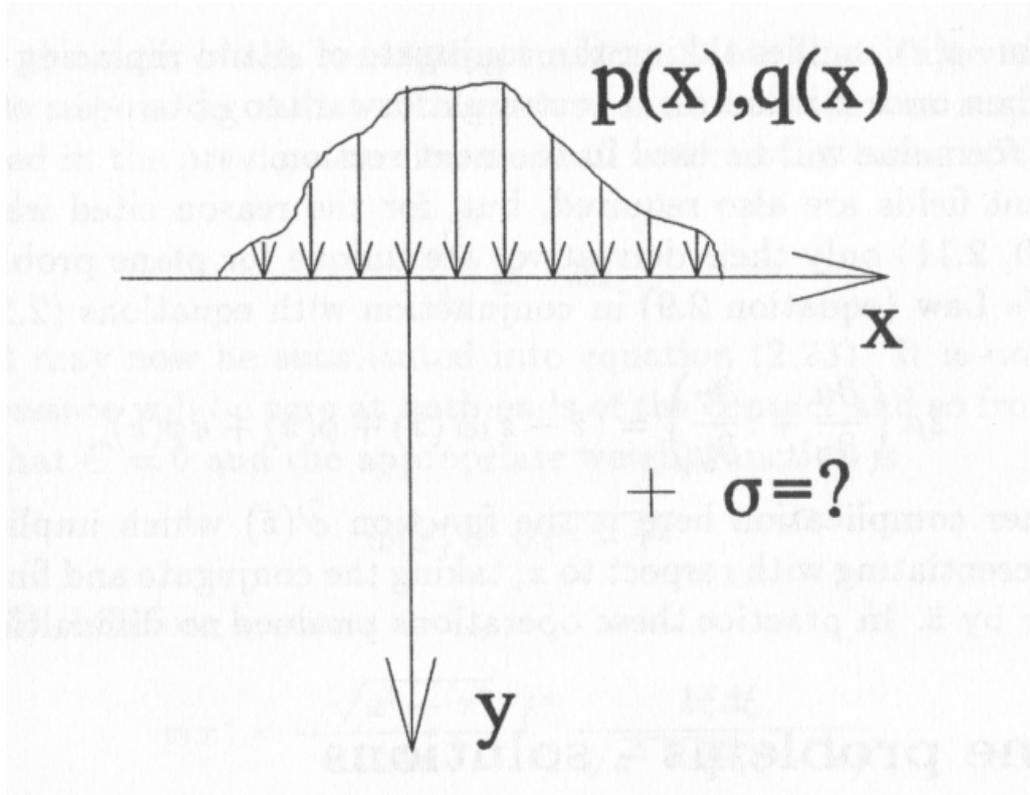


Figura 8 – Semi-plano carregado por tensões normais e cisalhantes, respectivamente, $p(x)$ e $q(x)$ aplicadas sobre a faixa de contato()

O potencial, ϕ , é uma função da posição, z , que é uma coordenada complexa ($= x + iy$). A geometria e conjunto de coordenadas são mostrados na figura 8 e o potencial propriamente dito é encontrado aplicando a seguinte integral de linha ao longo da linha do contato:

$$\phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{p(t) - iq(t)}{t - z} dt \quad (2.26)$$

onde $p(t)$, $q(t)$ são distribuições de tensão arbitrárias. Para contatos deslizantes essas variáveis se relacionam através da eq. 2.1, assim

$$\phi(z) = \frac{1 - if}{2\pi i} \oint \frac{p(t) dt}{t - z} \quad (2.27)$$

Assim que definido o potencial as componentes da tensão são definidas por

$$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} = 2(\phi(z) + \bar{\phi}(\bar{z})) \quad (2.28)$$

$$\sigma_{yy} - \sigma_{xx} + 2i\tau_{xy} = 2((\bar{z} - z)\phi'(z) - \bar{\phi}(z) - \phi(z)) \quad (2.29)$$

$\phi'(z)$ implica na derivação com respeito a z , $\bar{\phi}(z)$ implica em tomar o conjugado da função que, para os potenciais definidos pela eq. 2.27 pode ser obtido diretamente a partir de

$$\bar{\phi}(z) = \frac{1 + if}{1 - if}\phi(z) \quad (2.30)$$

e a notação $\bar{\phi}(\bar{z})$ implica em tomar o conjugado de ϕ substituido o argumento por \bar{z} . Então, assim que ϕ é conhecido, as outras funções podem ser encontradas. No caso dos campos de deslocamento, apenas suas derivadas são únicas para problemas planos. Aplicando a lei de Hooke (na forma das eqs. 2.8,2.9 e 2.10) em conjunto com as eqs. terá-se

$$2\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial u}{\partial y} \right) = (\bar{z} - z)\bar{\phi}'(\bar{z}) + \phi(\bar{z}) + \kappa\phi(z) \quad (2.31)$$

2.1.2 Contato entre cilindros - problema de Hertz

O problema clássico e bem definido de contato, admitindo uma solução exata ocorrendo entre dois cilindros paralelos e de comprimento infinito. Em pratica, o problema ideal não ocorre porque os efeitos nas bordas da geometria podem gerar concentradores de tensão intensos. Apesar disso, a solução aplicada longe das bordas com essa aproximação, num plano* bidimensional produz um resultado satisfatório. A solução descrita é aplicável para corpos com curvas que se aproximam de perfis circulares, assumindo que o raio de curvatura seja grande o suficiente em comparação a largura do contato para que o contato possa ser considerado não conformado. Isso se faz necessário para que ambos os elementos possam ser aproximados por semi-planos, além de permitir que o perfil relativo local dos pontos de contato possa ser idealizado por uma parábola, o que permite que o termo h' na equação 2.25 seja escrito de forma mais simples resultando numa integral que pode ser analisada analiticamente. A equação que resulta na quantidade de superposição entre os corpos interpenetrantes (como representado na figura 5) é

$$h(x) = \Delta - \frac{1}{2}kx^2 \quad (2.32)$$

na qual k é a curvatura relativa dada por

$$k = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad (2.33)$$

onde R_1 e R_2 são os raios das superfícies em contato. Trabalhando com a curvatura temos

$$\frac{dh}{dx} = -kx \quad (2.34)$$

esse resultado pode ser substituído na equação 2.25. Espera-se que a pressão ode contato seja zero no fim do contato e, assim, pela tabela 1 , $C = 0$ e a função peso apropriada é

$$w(x) = \sqrt{a^2 - x^2} \quad (2.35)$$

A equação 2.25, então, se torna

$$p(x) = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{A\pi} \int_{-a}^a \frac{k\xi d\xi}{\sqrt{a^2 - \xi^2}(\xi - x)} \quad (2.36)$$

Avaliando a integral temos

$$p(x) = -\frac{k}{A}\sqrt{a^2 - x^2} \quad (2.37)$$

A distribuição de pressão resultante é elíptica mas o resultado é de uso limitado nessa forma devido ao termo a , a meia largura, é desconhecida. Esse problema, porém, pode ser resolvido assegurando que o equilíbrio entre a pressão de contato e a carga aplicada P , sendo

$$P = -\int_{-a}^a p(\xi)d\xi = \frac{\pi ka^2}{2A} \quad (2.38)$$

Reescrevendo a equação de uma maneira mais conveniente

$$a^2 = \frac{2PA}{\pi k} \quad (2.39)$$

e

$$p(x) = -p_0\sqrt{1 - (x/a)^2} \quad (2.40)$$

onde

$$p_0 = \frac{2P}{\pi a} \quad (2.41)$$

é o pico da pressão de contato. Com a distribuição da tensão resolvida, agora restam os campos de tensão e deslocamento. Primeiramente, o potencial de Muskhelishvili deve ser obtido substituindo a eq. 2.40 na eq. 2.27, resultando em

$$\phi(z) = \frac{-(1-if)p_0}{2\pi i} \frac{1}{a} \int_{-a}^a \frac{\sqrt{a^2-x^2} dx}{x-z} \quad (2.42)$$

$$\phi(z) = \frac{p_0}{2a}(i+f)(z - \sqrt{z^2 - a^2}) \quad (2.43)$$

Derivando este resultado tem-se

$$\bar{\phi}(z) = \frac{p_0}{2a}(i+f) \left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 - a^2}} \right) \quad (2.44)$$

cujo conjugado é

$$\bar{\phi}(z) = -\frac{p_0}{2a}(z - \sqrt{z^2 - a^2}) \quad (2.45)$$

e, por fim, $\bar{\phi}(\bar{z})$ é dado por

$$\bar{\phi}(\bar{z}) = -\frac{p_0}{2a}(-i+f)(\bar{z} - \sqrt{\bar{z}^2 - a^2}) \quad (2.46)$$

O estado das tensões e deslocamentos (mais um constante arbitrária) pode ser encontrado utilizando as eqs. 2.42 a 2.46 em conjunto das eqs. 2.28, 2.29 e 2.31. Valores explícitos podem ser encontrados através de métodos numéricos. Apesar disso, pode-se

trabalhar aritmeticamente com o resultado a seguir

$$\begin{aligned}
\frac{\sigma_{xx}^n}{p_0} &= \frac{y}{a} \left\{ 2 - \frac{s}{\sqrt{a^2 - s^2}} - \frac{\sqrt{a^2 + s^2}}{s} - \frac{x^2 s^3 a^2}{(a^2 + s^2)^{\frac{3}{2}} (s^4 + y^2 a^2)} \right\} \\
\frac{\sigma_{xx}^n}{p_0} &= \frac{-2\nu y}{a} \left\{ \frac{\sqrt{a^2 + s^2}}{s} - 1 \right\} \\
\tau_{xx}^n &= \tau_{yx}^n = 0 \\
\frac{\sigma_{yy}^n}{p_0} &= -\frac{y^3 a \sqrt{a^2 + s^2}}{s(s^4 + y^2 a^2)} \\
\frac{\tau_{xy}^n}{p_0} &= -\frac{xy^2 sa}{\sqrt{a^2 + s^2}(s^4 + y^2 a^2)} \\
\frac{\sigma_{xx}^t}{fp_0} &= \frac{-2x}{a} \left(1 - \frac{s}{\sqrt{a^2 + s^2}} \right) + \frac{xy^2 sa}{\sqrt{a^2 + s^2}(s^4 + y^2 a^2)} \\
\frac{\sigma_{xx}^t}{fp_0} &= \frac{-2\nu x}{a} \left(1 - \frac{s}{\sqrt{a^2 + s^2}} \right) \\
\frac{\sigma_{yy}^t}{fp_0} &= \tau_{xy}^n \\
\frac{\tau_{xy}^t}{f} &= \sigma_{xx}^n \\
\tau_{xx}^t &= \tau_{yz}^t = 0
\end{aligned} \tag{2.47}$$

Nos quais os subscritos n e t denotam tensões causadas por forças normais e tangenciais, respectivamente, ν é o coeficiente de Poisson e s^2 é a maior das raízes da equação quadrática

$$\frac{x^2}{a^2 + s^2} + \frac{y^2}{s^2} = 1 \tag{2.48}$$

com

$$s^2 = \frac{1}{2} \left\{ -(a^2 - x^2 - y^2) + \sqrt{(a^2 - x^2 - y^2)^2 + 4y^2} \right\} \tag{2.49}$$

Nota-se que dentro da faixa de contato, como $y \rightarrow 0$, $s \rightarrow 0$, assim y/s se mantém finito, com

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{y^2}{s^2} \right) = a^2 - x^2 \quad |x| < a \tag{2.50}$$

Fretting causa dano na superfície, e, sendo assim as tensões e deslocamentos são particularmente importantes. Dentro da faixa de contato as tensões na superfície são dadas por

$$\frac{\sigma_{xx}^n}{p_0} = \frac{\sigma_{yy}^n}{p_0} = \frac{\tau_{xy}^t}{fp_0} = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a} \tag{2.51}$$

$$\frac{\sigma_{xx}^t}{p_0} = -2\frac{x}{a} \quad (2.52)$$

$$\frac{\sigma_{yy}^t}{fp_0} = \frac{\tau_{zy}^n}{p_0} = 0 \quad (2.53)$$

$$\frac{\sigma_{zz}^n}{p_0} = -2\nu\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a} \quad (2.54)$$

$$\frac{\sigma_{zz}^t}{fp_0} = -2\nu\frac{x}{a} \quad (2.55)$$

No exterior do contato, todas as componentes de tensão na superfície, devido à pressão normal, se anulam, enquanto que àquelas associadas com forças cisalhantes tangenciais são

$$\frac{\sigma_{yy}^t}{fp_0} = \frac{\tau_{xy}^t}{fp_0} = 0 \quad (2.56)$$

$$\frac{\sigma_x^t}{fp_0} = \frac{-2x}{a} + \frac{2\sqrt{x^2 - a^2}}{a} \text{sgn}(x) \quad (2.57)$$

$$\frac{\sigma_{zz}^t}{fp_0} = -2\nu \left[x + \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a} \text{sgn}(x) \right] \quad (2.58)$$

O deslocamento superficial relativo para o contato normal entre cilindros é útil para calcular o escorregamento parcial e pode ser deduzido dos campos de tensão utilizando a lei de Hooke e integrando. Os resultados a seguir são exatos se os corpos forem elasticamente similares. Eles também podem ser utilizados para corpos dissimilares, porém serão obtidos através da solução desacoplada para a eq. 2.19, sendo apenas aproximadamente corretos nessas circunstâncias. A componente normal do deslocamento

é

$$v(x) = -\frac{AP}{\pi} \left[\left(\frac{x}{a} \right)^2 + C_0 \right] \quad |x| \leq a \quad (2.59)$$

$$v(x) = -\frac{AP}{\pi} \left[\ln |X| + \frac{1}{2X^2} + C_1 \right] \quad |x| \geq a \quad (2.60)$$

onde

$$X = \left| \frac{x}{a} + \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1} \right| \quad (2.61)$$

e A é a complacência composta. O deslocamento relativo tangencial da superfície é dado por

$$u(x) = \frac{2A\beta P}{\pi}(\pi + C_2) \quad x < -a \quad (2.62)$$

$$u(x) = \frac{2A\beta P}{\pi}C_2 \quad x > a \quad (2.63)$$

$$u(x) = \frac{2A\beta P}{\pi} \left(\cos^{-1} \left(\frac{x}{a} \right) - \left(\frac{x}{a} \right) \sqrt{1 - (x/a)^2} \right) + C_2 \quad |x| \leq a \quad (2.64)$$

no qual β é a constante de Dundurs 2.22. As constantes C_0, C_1 e C_2 são arbitrárias porém C_0 e C_1 devem ser escolhidas de modo que os deslocamentos sejam contínuos em $x = \pm a$ e tomar $C_2 = -\pi/2$ garante a anti-simetria do deslocamento tangencial.

A influência das forças cisalhantes pode ser encontrada se aproveitando da simetria dos deslocamentos aparentes pelas equações 2.12 e 2.13 com o resultado

$$u_t(x) = -fv_n(x) \quad (2.65)$$

$$v_t(x) = fu_n(x) \quad (2.66)$$

Entretanto, deve-se tomar cuidado pois a distribuição das forças será perturbada da forma semi-elíptica se $\beta \neq 0$

Em um contato entre cilindro e plano o comportamento incompleto causa um decréscimo gradual da tensão de contato em suas bordas. Isso torna esse tipo de contato propenso a escorregamento

O primeiro passo para se obter uma solução para o campo de tensões interior ao contato é resolver o próprio problema de contato, isto é, achar a magnitude e a distribuição das tensões na superfície de contato. Uma grande quantidade de problemas de contato pode ser solucionada usando duas equações integrais que relacionam a distribuição de pressão,

$p(x)$, ao deslocamento normal, $h(x)$, e a tensão cisalhante superficial, $q(x)$, ao deslocamento tangencial relativo, $g(x)$.

as equações integrais para dois corpos similarmente elásticos

$$\frac{1}{A} \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{1}{\pi} \int \frac{p(\zeta) \partial \zeta}{\zeta - x} \quad (2.67)$$

e

$$\frac{1}{A} \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{1}{\pi} \int \frac{q(\zeta) \partial \zeta}{\zeta - x} \quad (2.68)$$

2.1.3 Carga Normal

O raio da sapata, R , e o carregamento normal por unidade de comprimento, P , serão definidos considerando cada corpo como um semiplano elástico. Assim a solução para a distribuição de pressão é Hertziana. Os resultados de Hertz(1882) preveem que devido a força normal elástica, uma distribuição de pressão elíptica é desenvolvida:

$$p(x) = -p_0 \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}, \quad (2.69)$$

onde p_0 é o valor máximo da pressão no contato, obtida a partir da condição de equilíbrio

$$p_0 = \frac{2P}{\pi a}, \quad (2.70)$$

a é o tamanho da metade do comprimento da região do contato

$$a = \sqrt{\frac{APR_{eq}}{\pi E^*}} \quad (2.71)$$

onde A é a complacência composta, e R_{eq} e E^* são definidos pelas relações:

$$R_{eq} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)^{-1} \quad (2.72)$$

e

$$E^* = \left(\frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2}\right) \quad (2.73)$$

Os subscritos 1 e 2 referem-se aos corpos 1 e 2 respectivamente, E é o modulo de elasticidade e ν é o coeficiente de poisson.

2.1.4 Carga Tangencial

A aplicação de uma carga tangencial, Q , fará surgir tensões cisalhantes na superfície dos corpos, como foi descrito por Cattaneo(1938) e mais tarde de forma independente por Mindlin (1949). Devido à formação das zonas de adesão e escorregamento causadas pela aplicação da carga tangencial faz sentido modelar as tensões superficiais cisalhantes como uma perturbação da solução de escorregamento total:

$$q(x) = fp_0 \sqrt{1 - \left(\frac{x^2}{a}\right)} - q'(x) \quad (2.74)$$

Na zona de adesão, pode-se obter $q'(x)$ resolvendo-se a 2.68 e levando em consideração o fato de que não há movimento relativo na direção x entre pontos correspondentes da região de adesão ($g(x) = 0, \forall x \in |x| \leq c$). Portanto,

$$q'(x) = fp_0 \frac{c}{a} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{c}\right)^2} \quad (2.75)$$

Na zona de escorregamento não há perturbação completa, assim:

$$q'(x) = 0 \quad \forall x \in c \leq |x| \leq a \quad (2.76)$$

O tamanho da zona de adesão, c , é encontrado considerando-se o equilíbrio na direção tangencial.

$$\frac{c}{a} = \sqrt{1 - \frac{Q}{fp}} \quad (2.77)$$

A figura 10 mostra a distribuição de pressão e das tensões cisalhantes no contato para uma configuração típica de carregamento. Pode-se notar que na região central ou de adesão, as tensões cisalhantes são menores devido à perturbação na solução.

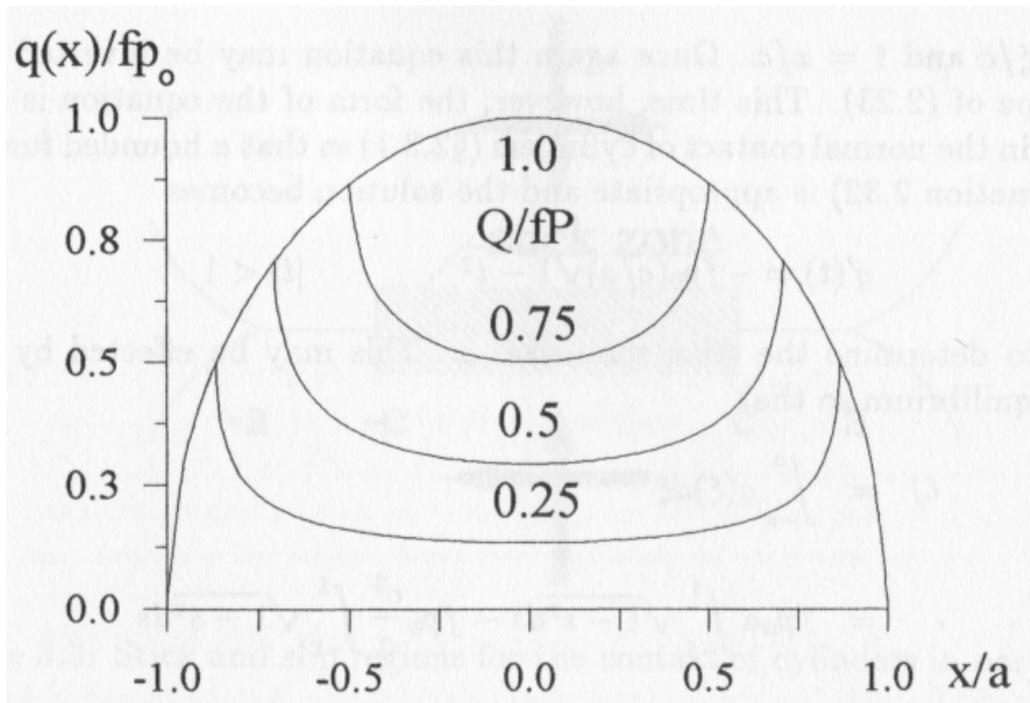


Figura 9 – Perfil de distribuição de pressão e tensão para diversas configurações de Q/fP

As expressões elaboradas até este ponto para a distribuição da tensão cisalhante na superfície de contato são válidas apenas quando a força tangencial atinge o seu valor máximo durante o ciclo de carregamento. Para investigar as tensões superficiais e, por conseguinte, a tensão e/ou deformação em diferentes instantes do ciclo de *fretting*, é imprescindível analisar o comportamento durante o carregamento inverso.

Para qualquer ponto x dentro da zona de escorregamento, as tensões superficiais são relacionadas pela lei de Amontons.

$$|q(x)| = -fp(x) \quad (2.78)$$

Além disso, a direção das tensões cisalhantes é oposta ao movimento da superfície, fornecendo:

$$\text{sgn}(q(x)) = -\text{sgn}\left(\frac{\partial g}{\partial t}\right) \quad (2.79)$$

onde $\frac{\partial g}{\partial t}$ é a taxa de deslocamento na direção x .

Na região central, onde não ocorre movimento relativo entre partículas adjacentes, as forças de cisalhamento na superfície devem ser inferiores ao limite máximo de atrito, dessa forma:

$$|q(x)| < -fp(x) \quad (2.80)$$

A figura 10 será utilizada para auxiliar na determinação das tensões superficiais cisalhantes. Ela descreve a variação da carga tangencial Q com o tempo t ($Q(t) = Q_{max} \sin(\omega t)$). Durante a primeira fase de carregamento, ou seja, quando o carregamento tangencial parte do zero e atinge seu valor máximo, ponto A da figura 10 as equações 2.74 a 2.76 descrevem apropriadamente a variação de $q(x)$. Porém, durante o descarregamento do ponto A para o ponto B, o descolamento relativo muda de sinal, provocando a violação da Eq.2.79 e a adesão em todo o contato. Continuando o descarregamento até o ponto C, pode-se verificar um escorregamento reverso a parti dos limites da região de contato. Nesta nova zona de escorregamento ($c' \leq |x| < a$), as tensões cisalhantes superficiais terão mudado de $fp(x)\sqrt{1 - (\frac{x}{a})^2}$ para $-fp(x)\sqrt{1 - (\frac{x}{a})^2}$. Assim, por analogia, é possível concluir quem dentro das zonas de adesão, a tensão superficial corretiva necessária para prever o escorregamento, será dada por:

$$q''(x) = 2fp_0 \frac{c'}{a} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{c'}\right)^2} \quad (2.81)$$

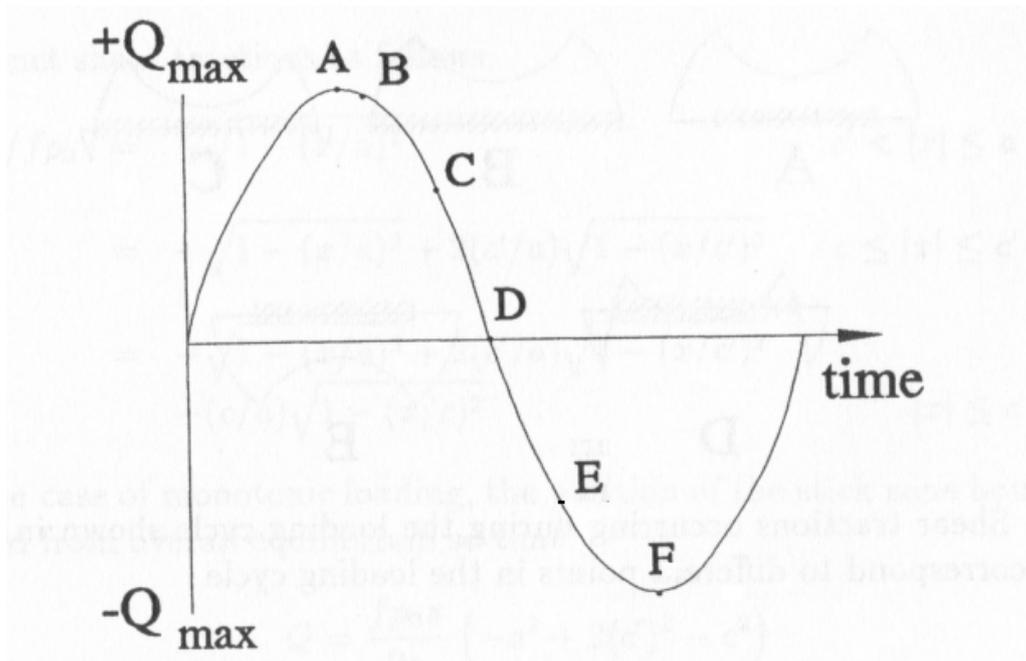


Figura 10 – Gráfico do histórico da carga tangencial ao longo de um processo de *fretting*.

Vale notar que o fator dois, Eq. 2.81, deve cancelar o deslocamento relativo quando as tensões superficiais na zona de escorregamento passam a ser calculadas por $2fp(x)\sqrt{1 - (\frac{x}{a})^2}$ ao invés de $fp(x)\sqrt{1 - (\frac{x}{a})^2}$ como ocorre durante a fase de carregamento. As distribuições das tensões cisalhantes superficiais para cada região durante a fase de descarregamento são apresentadas na Tab. 2.1

O tamanho da nova zona de adesão em qualquer instante t de carregamento é obtido da condição de equilíbrio (onde $s_1 = 1$ para situação de descarregamento e carga mínima e

$s_1 = -1$ para recarregamento de carga máxima) o que fornece:

$$\frac{c'(t)}{a} = \sqrt{1 - \left(\frac{Q_{max} - s_1 Q(t)}{2fP} \right)^2} \quad (2.82)$$

A figura 2.5(a) mostra a variação ds tensões cisalhantes superficiais para diferentes valores de Q , correspondentes aos pontos A, C, D, E e F do ciclo de *fretting* mostrado na figura 2.4. É importante notar que as tensões cisalhantes superficiais para valores extremos do carregamento tangencial (pontos A, $+Q_{max}$, e F, $-Q_{max}$) são iguais e opostas. Além disso, observa-se que, depois da remoção total da força cisalhante (ponto D), tensões cisalhantes superficiais não nulas, mas em equilíbrio, persistem. Isso significa que o atrito no contato não é linear e as tensões cisalhantes superficiais e consequentemente, as tensões e deformações nos corpos em contato são dependentes da história de carregamento. Portanto a aplicação do princípio de superposição tem de ser exercitado com cuidado em problemas de contato com atrito.

2.1.5 Campo de tensão cíclico na região do contato

O campo de tensão inteiro ao contato resultante pode ser obtido pela superposição dos campos de tensão gerados por $p(x)$ e $q(x)$, embora a variação originada pelos termos de perturbação, q' e q'' , terá que ser levado em conta. É particularmente importante notar que quatro diferentes combinações de superposição serão necessárias para descrever o campo de tensão nos estados de carregamento máximo e mínimo e durante o descarregamento e recarregamento. Assim, o tensor tensão para este problema de contato sob um regime de escorregamento parcial, é dado por:

$$\frac{\sigma \left(\frac{x}{a}, \frac{y}{a} \right)}{p_0} = \frac{\sigma^n \left(\frac{x}{a}, \frac{y}{a} \right)}{p_0} \pm f \frac{\sigma^t \left(\frac{x}{a}, \frac{y}{a} \right)}{p_0} \mp f \frac{c}{a} \frac{\sigma^t \left(\frac{x-e}{c}, \frac{y}{c} \right)}{p_0} + \frac{\sigma_{\mathbf{B}}(\mathbf{t})}{p_0} \quad (2.83)$$

para os instantes em que $Q(t) = Q_{max}$ e $Q = Q_{min}$, e

$$\frac{\sigma \left(\frac{x}{a}, \frac{y}{a} \right)}{p_0} = \frac{\sigma^n \left(\frac{x}{a}, \frac{y}{a} \right)}{p_0} \pm f \frac{\sigma^t \left(\frac{x}{a}, \frac{y}{a} \right)}{p_0} \mp 2f \frac{c'(t)}{a} \frac{\sigma^t \left(\frac{x-e'(t)}{c'(t)}, \frac{y}{c'(t)} \right)}{p_0} + f \frac{c}{a} \frac{\sigma^t \left(\frac{x-e}{c}, \frac{y}{c} \right)}{p_0} + \frac{\sigma_{\mathbf{B}}(\mathbf{t})}{p_0} \quad (2.84)$$

durante o descarregamento e o recarregamento, onde,

$$\sigma_{\mathbf{B}} = \sigma_B(t) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.85)$$

No instante de Q_{max} , o sinal do 2º termo da equação 2.83 é positivo, enquanto o sinal do 3º termo é negativo. Os sinais se invertem na ocorrência de Q_{min} . Já, durante o descarregamento, o sinal do 2º termo da equação 2.21 é negativo, o do 3º termo é positivo e o do 4º termo é negativo. Da mesma forma como acontece com os sinais nos instantes de carga máxima e mínima, os sinais se invertem durante o carregamento. Os sobrescritos n e t referem-se aos tensores de tensão produzidos pelos carregamentos normal e tangencial, respectivamente.

Estes tensores podem ser avaliados usando-se a função potencial de Muskhelishvili, Eq 2.86 (Muskhelishvili, 1953, Hilss et al., 1993) e considerando um estado plano de deformação. O sistema de coordenadas é o mesmo da fig 5 sendo $z = x + iy$ ($i =$ unidade imaginária) a coordenada complexa e $s_2 = sgn(x)$ o sinal de x .

$$\phi(z) = -\frac{p_0}{2a} (i + f) \left(z - s_2 \sqrt{z^2 - a^2} \right) \quad (2.86)$$

Derivando a Eq 2.86 tem-se:

$$\phi'(z) = -\frac{p_0}{2a} (i + f) \left(z - s_2 \frac{z}{\sqrt{z^2 - a^2}} \right) \quad (2.87)$$

O conjugado da função Potencial de Muskhelishvili:

$$\bar{\phi}(z) = -\frac{p_0}{2a} (-i + f) \left(z - s_2 \sqrt{z^2 - a^2} \right) \quad (2.88)$$

Por fim, a função conjugada do conjugado de z ,

$$\bar{\phi}(\bar{z}) = -\frac{p_0}{2a} (-i + f) \left(\bar{z} - s_2 \sqrt{\bar{z}^2 - a^2} \right) \quad (2.89)$$

Assim, as Eqs. 2.86 a 2.89 o estado de tensão pode ser calculado das Eqs 2.90 e 2.91 usando-se aritmética complexa em um código computacional

$$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} = 2 \left(\phi(z) + \bar{\phi}(\bar{z}) \right) \quad (2.90)$$

$$\sigma_{yy} - \sigma_{xx} + 2i\tau_{xy} = 2 \left((\bar{z} - z)\phi'(z) - \bar{\phi}(z) - \phi(z) \right) \quad (2.91)$$

Vale lembrar que as componentes de tensão das Eqs. 2.90 e 2.91 são a superposição das tensões devido as cargas estacionárias P e Q , ou seja,

$$\sigma_{xx} = \sigma_{xx}^n + \sigma_{xx}^t \quad (2.92)$$

$$\sigma_{yy} = \sigma_{yy}^n + \sigma_{yy}^t \quad (2.93)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{xy}^n + \tau_{xy}^t \quad (2.94)$$

Para separar essas componentes n e t basta resolver inicialmente as Eqs. 2.90 e 2.91 utilizando-se nas Eqs. 2.86 a 2.89 um fator de atrito hipoteticamente nulo $f = 0$ e somar as Eqs. 2.90 e 2.91, o que leva a,

$$\zeta(z) = \sigma_{yy}^n + i\tau_{xy}^n = (\bar{z} - z)\phi'(z) + \bar{\phi}(\bar{z}) - \bar{\phi}(z) \quad (2.95)$$

obtendo-se

$$\sigma_{yy}^n = \text{Real}(\zeta(z)) \quad (2.96)$$

$$\tau_{xy}^n = \text{Imag}(\zeta(z)) \quad (2.97)$$

$$\sigma_{xx}^n = 2(\phi(z) + \bar{\phi}(\bar{z})) - \sigma_{yy}^n \quad (2.98)$$

Utilizando-se agora nas Eqs. 2.86 a 2.89 o fator de atrito do problema de contato $f \neq 0$, e somando-se as Eqs. 2.90 e 2.91 tem-se,

$$\xi(z) = \sigma_{yy} + i\tau_{xy} = (\bar{z} - z)\phi'(z) + \bar{\phi}(\bar{z}) - \bar{\phi}(z) \quad (2.99)$$

de onde obtendo-se,

$$\sigma_{yy} = \text{Real}(\xi(z)) \quad (2.100)$$

$$\tau_{xy} = \text{Imag}(\xi(z)) \quad (2.101)$$

$$\sigma_{xx} = 2(\phi(z) + \bar{\phi}(\bar{z})) - \sigma_{yy} \quad (2.102)$$

E finalmente, substituindo as Eqs. 2.100 a 2.102 e as 2.96 a 2.98 nas Eqs. 2.92 a 2.94 obtem-se as componentes devido a carga Q com sobrescrito t . Nas Eqs. 2.84 e 2.83, os termos $\sigma^t[(x - e'(t))/c'(t), y/c'(t)]$ e $\sigma^t[(x - e)/c, y/c]$ podem ser obtidos pelo mesmo procedimento, mas efetuando-se uma mudança de variáveis de x/a para $(x - e'(t))/c'(t)$ ou $(x - e)/c$ e de y/a para $y/c'(t)$ ou y/c , respectivamente

3 Conclusão

Tomando-se como base a Teoria da Elasticidade, foi apresentada a solução analítica para o problema de contato entre duas superfícies cilíndricas. A formulação analítica apresentada contribui para o estudo da fadiga por *fretting* nos materiais, uma vez que a formulação apresentada permite a avaliação de resultados obtidos experimentalmente, bem como a validação de modelos numéricos utilizados para análise de contato entre duas superfícies.

Referências

ANDRESEN, H.; HILLS, D. A review of partial slip solutions for contacts represented by half-planes including bulk tension and moments. 11 2019. Citado 2 vezes nas páginas v e 5.

HILLS, D.; NOWELL, D. *Mechanics of Fretting*. [S.l.]: Kluwer Academic Publisher, 1994. Citado 3 vezes nas páginas v, 4 e 10.

MENDES, M. F. R. *Estimativa do limite de fadiga sob condições de fretting considerando o método da distância crítica do ponto em uma abordagem por elementos finitos*. Dissertação (Mestrado) — Universidade de Brasília, 2011. Citado 2 vezes nas páginas v e 7.

MUTOH, Y. Mechanisms of fretting fatigue. *JSME international journal*, v. 38, p. 405–415, 2 1995. Citado 2 vezes nas páginas v e 2.