

PROJETO DE GRADUAÇÃO

**Uso do Método da Máxima Variância para
estimar o dano por fadiga multiaxial em
materiais com micro-defeitos.**

Por

Fernando Mendes dos Santos

Brasília, 26 de Julho de 2023

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

FACULDADE DE TECNOLOGIA

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
Faculdade de Tecnologia
Departamento de Engenharia Mecânica

PROJETO DE GRADUAÇÃO

Uso do Método da Máxima Variância para estimar o dano por fadiga multiaxial em materiais com micro-defeitos.

Por

Fernando Mendes dos Santos

Relatório submetido como requisito parcial para obtenção
do grau de Engenheiro Mecânico

Banca Examinadora

Prof. José Alexander Araújo, UnB/ENM (Orientador) _____

Prof. Jorge Luiz de Almeida Ferreira, UnB/ENM _____

Prof. Cosme Roberto Moreira da Silva, UnB/ENM _____

Brasília 26 de Julho de 2023

Agradecimentos

À minha família por sempre me apoiarem incondicionalmente,

À minha noiva Fernanda que está sempre me incentivando,

Aos colegas de curso que fizeram parte da minha jornada,

Aos alunos do professor Alex que sempre estão prontos para ajudar,

Ao professor Alex, pela paciência e ensinamentos valiosos,

A todos que de alguma forma contribuíram para que eu chegasse até aqui.

Resumo

O presente trabalho se propõe a otimizar o método de busca pelo plano crítico utilizado na aplicação do modelo MWCM (SUSMEL; LAZZARIN, 2002) calibrado com o parâmetro \sqrt{area} (MURAKAMI, 2002) proposto pelos pesquisadores Machado et al. (2020) para avaliar o dano por fadiga no aço AISI 4140, um material naturalmente defeituoso que contém micro-defeitos internos conhecidos como inclusões não metálicas. Na proposição da metodologia apresentada no trabalho de Machado et al. (2020) são utilizados dois métodos de busca de plano, o Método do Momento de Inercia (MEGGIOLARO; CASTRO, 2015) e o Método da Caixa (ARAÚJO et al., 2011), sendo que ambos apresentam um custo computacional relativamente alto no processo de busca, principalmente em casos de carregamentos aleatórios. Para aumentar a eficiência de busca pelos planos mais propensos ao surgimento de trincas, o presente trabalho propõe a utilização da versão do Método da Máxima Variância proposto pelos pesquisadores Ferreira et al. (2022), tal ferramenta explora as relações funcionais existentes entre a tensão cisalhante projetada na direção de máxima variância e a matriz de covariância dos componentes de tensão, o que aumenta significativamente a velocidade de determinação do plano crítico. Como forma de analisar o desempenho do MMV, os dados obtidos serão comparados com os apresentados no trabalho de Machado et al. (2020).

Abstract

The present work proposes to optimize the critical plane search method used in the application of the MWCM (SUSMEL; LAZZARIN, 2002) model calibrated with the parameter \sqrt{area} (MURAKAMI, 2002) proposed by the researchers Machado et al. (2020) to evaluate the fatigue damage in AISI 4140 steel, a naturally defective material that contains internal micro-defects known as non-metallic inclusions. In the proposal of the methodology presented in the work of Machado et al. (2020) two methods of plan search are used, the Moment of Inertia Method (MEGGIOLARO; CASTRO, 2015) and the Maximum Rectangular Hull Method (ARAÚJO et al., 2011), both of which have a cost relatively high computational cost in the search process, especially in cases of random loading. To increase the efficiency of the search for the planes most prone to the appearance of cracks, the present work proposes the use of the version of the Maximum Variance Method proposed by the researchers Ferreira et al. (2022), such a tool explores the existing functional relationships between the shear stress projected on the direction of maximum variance and the covariance matrix of the stress components, which significantly increases the speed of determining the critical plane. As a way of analyzing the performance of the MMV, the data obtained will be compared with those presented in Machado et al. (2020)'s work.

Lista de Figuras

Figura 1 – Inclusões não metálicas encontradas numa amostra retirada do vira-brequim original. Adaptado de Araujo (2020).	2
Figura 2 – Etapas básicas do processo de fadiga.	7
Figura 3 – Marcas de praia típicas de seções onde ocorreu falha por fadiga. Adaptado de Fadel (2010).	7
Figura 4 – Tipos de carregamentos para diferentes razões de tensão. (a) $R = -1$; (b) $R \neq 0$; (c) $R = 0$. Adaptado de Dowling (2013).	8
Figura 5 – (a) Sistema de coordenadas em um corpo de prova sob carga combinada; (b) Plano material genérico Δ e seu vetor normal unitário \mathbf{n} ; (c) Vetor tensão \mathbf{t} e suas componentes.	9
Figura 6 – (Diagramas de fase das tensões $\sigma(t) \times \tau(t)$ para casos de histórias assíncronas. Adaptado de Dantas (2009).	11
Figura 7 – Elemento sujeito a um estado de tensão uniaxial. Adaptado de Dantas (2009).	12
Figura 8 – Plano Δ qualquer, referenciado por um sistema de coordenadas xyz	13
Figura 9 – Projeção do vetor unitário \mathbf{n} nos planos $(\mathbf{X}'\mathbf{Z})$ e (\mathbf{YX})	13
Figura 10 – Vetor tensão \mathbf{t} , sua trajetória e suas componentes. Adaptado de Araujo (2020).	14
Figura 11 – Sistema de coordenadas cujas componentes são e_A x e_B x n . Adaptado de Araujo (2020).	15
Figura 12 – Projeção do vetores e_A (a) e e_B (b) nas coordenadas do sistema de coordenadas cartesianas xyz	15
Figura 13 – Curva S - N genérica.	17
Figura 14 – Retângulo circunscrevendo a projeção da história de tensões cisalhante. Adaptado de Araujo (2020).	22
Figura 15 – Projeção do vetor tensão cisalhante na direção q . Adaptado de Ferreira et al. (2022).	24
Figura 16 – Elipsoide representado pelos autovalores λ_1 e λ_2 na base $e_1 - e_2$	27
Figura 17 – Comportamento do limite de fadiga em função do aumento do diâmetro do micro-defeito. Adaptado de Murakami (2002).	28

Figura 18 – Representação esquemática da definição do parâmetro \sqrt{area} . Adaptado de Susmel (2008).	28
Figura 19 – Possíveis posicionamentos das inclusões não metálicas.	30
Figura 20 – Método de determinação do parâmetro \sqrt{area}_{max} na amostra de área S_0 . Adaptado de Araujo (2020).	32
Figura 21 – Curva S-N do aço AISI 4140 obtida experimentalmente. Adaptado de Machado et al. (2020)	35
Figura 22 – Curva T-N do aço AISI 4140 obtida experimentalmente. Adaptado de Machado et al. (2020)	36
Figura 23 – Geometria e dimensões dos corpos de prova utilizados nos ensaios experimentais, com dimensões em mm.	37
Figura 24 – Resultados obtidos com o modelo multiaxial MWCM calibrado com o parâmetro \sqrt{area} . Adaptado de Machado et al. (2020).	39
Figura 25 – Comportamento do modelo para carregamentos em fase.	44
Figura 26 – Comportamento do modelo para carregamentos fora de fase.	44

Lista de Tabelas

Tabela 1 – Possíveis níveis de tensões num plano material.	20
Tabela 2 – Propriedades mecânicas do aço AISI 4140.	35
Tabela 3 – Limites de fadiga do aço AISI 4140 obtidos experimentalmente (MACHADO et al., 2020).	35
Tabela 4 – Resultados dos ensaios de tração-compressão utilizados na elaboração da curva S-N da Figura 21.	36
Tabela 5 – Resultados dos ensaios de torção alternada utilizados na elaboração da curva T-N da Figura 22.	37
Tabela 6 – Parâmetro \sqrt{area}_{max} determinado com o uso do método da estatística dos extremos (MACHADO et al., 2020).	38
Tabela 7 – Limites de fadiga obtidos pelo uso do parâmetro \sqrt{area}_{max} de Murakami (2002).	38
Tabela 8 – Amplitudes de tensões nos planos críticos para diferentes níveis de carregamentos obtidos com o uso do Método da Caixa.	39
Tabela 9 – Amplitude das tensões atuantes nos planos críticos, determinadas com o Método da Caixa, em diferentes razões de carregamentos combinados com ângulo de fase de 90°	40
Tabela 10 – Amplitudes de tensões nos planos críticos para diferentes níveis de carregamentos obtidos com o uso do MMV para histórias de carregamento em fase.	41
Tabela 11 – Tempo de processamento (em segundos) dos dois métodos de determinação de plano crítico.	41
Tabela 12 – Amplitude das tensões atuantes nos planos críticos, determinadas com o MMV, em diferentes razões de carregamentos combinados com ângulo de fase de 90°	42
Tabela 13 – Tempo de processamento (em segundos) do Método da Máxima Variância e do Método da Caixa.	42
Tabela 14 – Planos críticos para carregamentos simples de tração-compressão e torção.	43
Tabela 15 – Planos críticos para carregamentos combinados em fase.	43

Tabela 16 – Planos criticos para carregamentos combinados fora de fase. 43

Lista de símbolos

\sqrt{area}	Parâmetro Raiz de área
τ_a	Amplitude da tensão cisalhante
$\sigma_{n,max}$	Tensão normal máxima
σ_w	Resistência a fadiga de tração-compressão alternada para materiais com pequenos defeitos
w	Resistência a fadiga em torção alternada para materiais com pequenos defeitos
σ_{max}	Tensão Máxima
σ_{min}	Tensão Mínima
$\Delta\sigma$	Faixa de tensão
σ_a	Amplitude de tensão
σ_m	Tensão média
R	Razão de tensão
\mathbf{n}	Vetor normal unitário
\mathbf{t}	Vetor tensão
$\boldsymbol{\sigma}$	Tensor das Tensões
$\boldsymbol{\sigma}_n$	Vetor tensão normal
$\boldsymbol{\tau}$	Vetor tensão cisalhante
Δ	Plano material genérico
θ	Coordenada esférica para referenciar o vetor normal ao plano
ϕ	Coordenada esférica para referenciar o vetor normal ao plano
Φ	Trajetória fechada descrita pelo vetor tensão

Ψ	Trajetória fechada descrita pelo vetor tensão cisalhante
τ_{e_A}	Tensão cisalhante atuando na direção do vetor e_A
τ_{e_B}	Tensão cisalhante atuando na direção do vetor e_B
σ'_f	Coefficiente de resistência à fadiga
N_f	Número de ciclos até a falha
b	Expoente de resistência a fadiga
σ'_f	Coefficiente de resistência à fadiga
σ_0	Limite de fadiga genérico
N_f	Número de ciclos até a falha
b	Expoente de resistência a fadiga
σ_{-1}	Resistência a fadiga em tração-compressão alternada
τ_{-1}	Resistência a fadiga em torção alternada
τ_a^c	Máxima amplitude da tensão cisalhante atuante no plano crítico
θ_c	Coordenada esférica para referenciar o plano crítico
ϕ_c	Coordenada esférica para referenciar o plano crítico
ρ	Influência da tensão normal no dano à fadiga no modelo MWCM
τ_a^{max}	Máxima amplitude da tensão de cisalhamento
$\tau_q(\mathbf{t})$	Vetor tensão cisalhante resolvido na direção q
α	Angulo entre a direção q e e_A
$\boldsymbol{\mu}$	Matriz de covariância
τ_w	Resistência a fadiga em torção alternada para material com pequeno defeito
$H\nu$	Dureza Vickers
S_0	Área de inspeção padrão
V_0	Volume de inspeção
δ	Ângulo de fase entre os carregamentos

Lista de abreviaturas e siglas

MCC Método da Menor Circunferência Circunscrita

MRH *Maximum Rectangular Hull*

MWCM *Modified Wöhler Curve Method*

MMV Método da Máxima Variância

Sumário

	1 INTRODUÇÃO	1
1.1	Motivação	1
1.2	Estado da arte	2
1.3	Objetivo	5
	2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	6
2.1	Fenômeno de fadiga	6
2.2	Carregamentos cíclicos	7
2.3	Vetor tensão	9
2.3.1	Histórias de carregamento	10
2.3.2	Estado uniaxial de tensão	11
2.3.3	Estado multiaxial de tensão	12
2.3.4	Sistema de coordenadas utilizado na determinação de τ_a	14
2.4	Fadiga uniaxial	16
2.4.1	Curva tensão - vida (S-N)	16
2.5	Fadiga multiaxial	17
2.5.1	Modelos de plano crítico baseados em tensão	18
2.5.1.1	Modelo de Findley	18
2.5.1.2	Modelo de Mataka	18
2.5.1.3	Modelo de McDiarmid	19
2.5.1.4	Modified Wöhler Curve Method (MWCM)	19
2.5.2	Amplitude da tensão cisalhante	20
2.5.3	Método da Maior Envoltória Retangular	21
2.5.4	Método da Máxima Variância	23
2.6	Fadiga em materiais com micro-defeitos	27
2.6.1	Parâmetro \sqrt{area}	28
2.6.1.1	Processo de determinação do parâmetro \sqrt{area}_{max}	30
	3 METODOLOGIA	33

4	RESULTADOS	34
4.1	Dados da literatura	34
4.1.1	Limites de fadiga experimentais	35
4.1.2	Limites de fadiga obtidos a partir do uso do parâmetro \sqrt{area}	38
4.1.3	Desempenho do modelo	38
4.2	Dados obtidos	40
4.2.1	Carregamento em fase	40
4.2.2	Carregamento fora de fase	42
4.2.3	Planos críticos e avaliação do modelo	43
5	CONCLUSÕES	45
	REFERÊNCIAS	46

1 Introdução

1.1 Motivação

No mundo moderno, a energia elétrica é imprescindível para a sobrevivência e desenvolvimento da humanidade sendo até difícil de se imaginar um mundo sem este bem tão valioso, sendo que diversos segmentos da sociedade possuem aplicações práticas que necessitam de energia elétrica, sendo para impulsionar máquinas no setor industrial e agrícola ou para a manutenção da vida humana em aplicações hospitalares. Devido a sua grande aplicabilidade, a demanda de energia elétrica tem aumentado de forma expressiva e para suprir tal consumo, diversas fontes de energia são utilizadas, no Brasil a matriz elétrica é majoritariamente composta por fontes renováveis correspondendo a 82,9 %, enquanto as fontes não renováveis correspondem a 17,1 % sendo que esta parcela é composta principalmente por combustíveis fósseis, utilizados como matéria prima em termoeletricas (EPE, 2022).

Nas termoeletricas, a energia térmica obtida a partir da queima de combustíveis fósseis ou de biomassa é convertida em energia mecânica que movimenta um conjunto de pistões que por sua vez transmitem, por meio de bielas, movimento para o munhão principal do virabrequim que é responsável por transmitir o torque produzido para um grupo de geradores que convertem a energia mecânica em elétrica. Devido aos aspectos construtivos, cargas radiais geradas no processo de combustão são transmitidas pelos pistões e bielas gerando torção harmônica e flexão cíclica no eixo virabrequim, propiciando a ocorrência de falhas devido ao fenômeno de fadiga durante a operação. No intuito de evitar que o eixo falhe por fadiga, este é projetado para ter uma vida infinita, sendo que a previsão de falha por fadiga pode ser estimada a partir da determinação das amplitudes de tensões aplicadas no ponto mais solicitado do elemento, também chamado de ponto crítico, e com uso de critérios de fadiga multiaxial baseados em tensão, pois se a função de admissibilidade das tensões cíclicas for menor que o limite de fadiga do material em análise, se espera que o elemento não falhe por fadiga antes de atingir o tempo de uso esperado.

Apesar do uso de técnicas que previnem a falha por fadiga no projeto de fabricação dos eixos virabrequins utilizados em termoeletricas, recentemente, foram registrados casos em que estes elementos falharam por fadiga, em um dos casos o eixo foi fabricado com

aço AISI 4140, material também utilizado na confecção de eixos de veículos pesados e bielas (DUSTRE, 2022). Na análise pós-falha constatou-se a presença de impurezas não metálicas, que podem ser observadas na Figura 1.

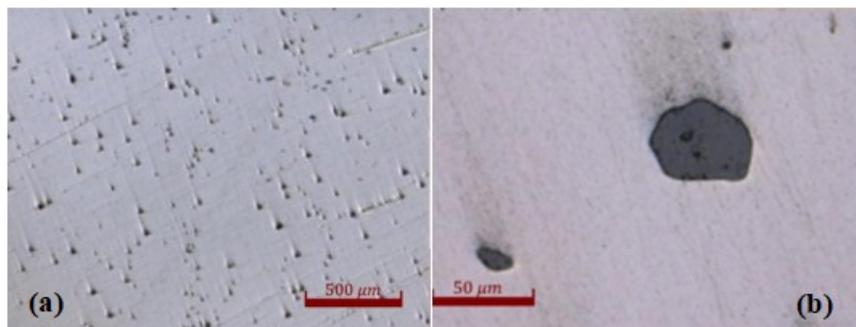


Figura 1 – Inclusões não metálicas encontradas numa amostra retirada do virabrequim original. Adaptado de Araujo (2020).

Tais impurezas são chamadas tecnicamente de inclusões não metálicas e tem sua origem no processo de fabricação, sendo que a contaminação pode ter ocorrido na etapa de fundição ou forjamento. Estes micro-defeitos possuem uma influência negativa na resistência a fadiga do material, pois defeitos como inclusões são equivalentes a uma trinca, do ponto de vista da fadiga (MURAKAMI, 2012), logo é necessário contabilizar a existência de tais defeitos no momento de se projetar contra falhas por fadiga.

Alguns trabalhos foram feitos com o objetivo de verificar a influência das inclusões não metálicas na resistência a fadiga dos materiais de interesse da engenharia que estão sujeitos a carregamentos multiaxiais, dentre eles, Machado et al. (2020) propuseram utilizar modelos de fadiga multiaxial baseados numa abordagem de plano crítico, calibrados com o parâmetro \sqrt{area} (MURAKAMI; ENDO, 1986; MURAKAMI, 2002) para verificar o efeito das inclusões na resistência a fadiga do aço AISI 4140, tal abordagem apresentou bons resultados, pois se mostrou conservadora com erros em torno de 20%. Entretanto, a grande dificuldade de se aplicar esta metodologia reside no processo de determinação da amplitude da tensão cisalhante máxima que caracteriza o plano crítico, pois em casos onde a história de carregamento é muito complexa o custo computacional e intelectual necessário para encontrar o plano de interesse é bastante elevado. Com o intuito de reduzir o custo necessário para aplicação do modelo MWCM adaptado com o parâmetro \sqrt{area} , o presente trabalho propõem utilizar o Método da Máxima Variância na busca pelo plano crítico, uma vez que esta ferramenta permite que se avalie desde histórias de carregamentos simples até as mais complexas com uma maior eficiência computacional.

1.2 Estado da arte

Os estudos existentes a cerca da Fadiga Multiaxial se dividem principalmente em três abordagens principais (DOWLING, 2013), sendo elas baseadas na:

- Deformação
- Mecânica da fratura
- Tensão

A abordagem baseada na deformação, se concentra na análise do escoamento localizado em concentradores de tensão durante carregamentos cíclicos, já a abordagem segundo a mecânica da fratura se concentra na propagação de trincas utilizando técnicas específicas desta área de pesquisa, e por fim, a abordagem mais tradicional é baseada nas tensões, sendo que esta pode ser subdividida em quatro diferentes grupos com distintos critérios de tensão, sendo eles: a) tensões médias, b) invariante das tensões, c) tensões equivalentes empíricas e d) planos críticos (DANTAS, 2009).

Gough, Pollard e Clenshaw (1951) foram os responsáveis pelas contribuições mais importantes para o desenvolvimento da teoria baseada em critérios empíricos, propondo uma fórmula empírica de uma elipse para casos de fadiga multiaxial. Sines (1959) propôs um critério de análise de fadiga multiaxial baseado no primeiro e segundo invariante do tensor tensão. Um modelo de análise de fadiga baseado nas tensões médias foi proposto por Papadopoulos et al. (1997).

O número de estudos sobre fadiga multiaxial baseados no critério de plano crítico vem aumentando nos últimos anos, sendo que este modelo foi inicialmente criado no intuito de estimar o risco de iniciação de trincas em materiais isotrópicos submetidos a carregamentos variáveis combinados (SOCIE; MARQUIS, 2000), tal abordagem considera, em geral, que o plano mais solicitado tende a ser o plano onde ocorrerá a iniciação de trincas e caso estas se propaguem o material pode falhar por fratura frágil, logo tal plano é dito plano crítico. Não há um consenso sobre qual é a melhor maneira de se determinar o plano supracitado, de forma que vários modelos foram propostos, mas em geral para materiais dúcteis é assumido que num regime de fadiga submetido a um médio ou alto número de ciclos a nucleação de trincas ocorra devido ao escorregamento de planos cristalográficos, portanto tal fenômeno tende a ocorrer no plano onde a amplitude da tensão cisalhante, representada por τ_a , for máxima, entretanto a máxima tensão normal ($\sigma_{n,max}$) ao plano também influencia o processo de propagação de trinca. Uma das principais dificuldades da aplicação de tal metodologia consiste na determinação de τ_a , pois em carregamentos não-proporcionais, estimar tal parâmetro não é uma tarefa trivial e exige um tratamento adequado, para tanto, algumas técnicas foram elaboradas, sendo algumas delas:

- Método da Menor Circunferência Circunscrita (MCC) (PAPADOPOULOS, 1998);
- Método do Momento de Inércia (MOI) (MEGGIOLARO; CASTRO, 2015);
- Método da Maior Envoltória Retangular (cuja sigla em inglês é MRH) (ARAÚJO et al., 2011; MAMIYA; CASTRO; ARAÚJO, 2014).

Onde o método da Menor Circunferência Circunscrita (MCC) consiste em determinar a menor circunferência que circunscreva a curva fechada que é projetada no plano de análise a partir da história de tensões cisalhantes, sendo que o raio da circunferência corresponde a amplitude da tensão cisalhante (τ_a), entretanto, Mamiya, Castro e Araújo (2014) demonstraram que esta metodologia possui um erro conceitual, pois ela trata carregamentos proporcionais e não-proporcionais da mesma forma, o que pode resultar em um valor de τ_a igual para tipos distintos de carregamento. O método do Momento de Inércia (MOI) é baseado numa perspectiva integral, onde é assumido que a curva originada da história de tensões é aproximadamente igual a um fio uniforme de massa unitária. O método da Maior Envoltória Retangular, também chamado de Método da Caixa, foi elaborado com o objetivo de solucionar as falhas presentes no método MCC, quanto ao tipo de carregamento, já que este propõem a utilização do maior retângulo que circunscreva a curva gerada a partir da história de tensões diferenciando o tipo de carregamento aplicado.

Alguns modelos de plano crítico utilizados na análise de fadiga multiaxial baseados na amplitude da tensão cisalhante foram concebidos pelos pesquisadores Fatemi e Socie (1988), Findley (1959), Susmel e Lazzarin (2002), sendo que para Findley (1959) o plano crítico é o plano em que a combinação entre a amplitude da tensão cisalhante (τ_a) e a máxima tensão normal ($\sigma_{n,max}$) é máxima, já nos outros dois modelos, considera-se que o plano mais propenso para a iniciação de trincas é o de máxima amplitude de tensão cisalhante (τ_a).

O uso de modelos de plano crítico é incomum em projetos que tratam a fadiga multiaxial em materiais que apresentam inclusões não metálicas em seu interior, porém existem poucos estudos relacionados ao fenômeno de fadiga em elementos que apresentam pequenos defeitos e estão submetidos a carregamentos não-proporcionais combinados. No intuito de colaborar no preenchimento de tal lacuna, alguns pesquisadores, como Machado et al. (2020) e Castro, Mamiya e Bemfica (2021), propuseram o uso de modelos de plano crítico associados ao parâmetro \sqrt{area} proposto por Murakami e Endo (1986) e Murakami (2002), sendo que tal parâmetro relaciona a presença de pequenos defeitos, como inclusões não metálicas, com a resistência a fadiga de alguns materiais metálicos de interesse da engenharia.

O modelo \sqrt{area} pode ser utilizado na determinação, com uma precisão aceitável, da resistência a fadiga uniaxial de materiais metálicos submetidos a carregamentos de tração-compressão (σ_w), sem que precise ser realizado nenhum experimento prático de fadiga, ou seja, dispensa a necessidade de ensaios. Yanase e Endo (2014b) aperfeiçoaram a técnica aludida, na intenção de que a mesma também pudesse ser utilizada para estimar a resistência a fadiga de elementos submetidos a torção (τ_w), eximindo a realização de ensaios de fadiga em torção.

Os pesquisadores Endo e Ishimoto (2006), Nadot e Billaudeau (2006), publicaram trabalhos que tratam da concepção de modelagens que possibilitam analisar a influência

que pequenos defeitos tem sobre a vida em fadiga de elementos submetidos a carregamentos multiaxiais. No entanto, não há um consenso sobre qual é a maneira mais correta de tratar tal assunto, o que possibilita e estimula novos estudos a cerca deste tópico que tem se mostrado ser de extrema importância prática, pois falhas por fadiga em elementos que contêm inclusões não metálicas presentes na microestrutura e que operam num estado de carregamento multiaxial estão ocorrendo no setor industrial, o que gera grandes perdas de recursos financeiros.

1.3 Objetivo

Otimizar o modelo de plano crítico de Susmel e Lazzarin (2002), também conhecido como modelo MWCM, calibrado com o parâmetro \sqrt{area} de Murakami (2002), através do uso do Método da Máxima Variância (FERREIRA et al., 2022) na determinação do plano crítico. Com a utilização do MMV, é esperado um aumento da eficiência computacional da metodologia assim como uma ampliação dos tipos de carregamento em que esta é aplicável. Após a aplicação do Método da Máxima Variância, o objetivo é comparar os resultados obtidos com os dados fornecidos pelo trabalho de Machado et al. (2020) como forma de validação e avaliação dos parâmetros obtidos a partir do uso do Método da Máxima Variância.

2 Revisão Bibliográfica

2.1 Fenômeno de fadiga

Elementos estruturais sujeitos a carregamentos cíclicos podem desenvolver danos microscópicos na microestrutura, e tais danos podem se acumular até se transformarem numa trinca que pode levar o material a falhar, mesmo que este esteja submetido a tensões menores que o limite de resistência mecânica do material, este fenômeno de falha devido ao surgimento de trincas decorrentes da aplicação de carregamentos cíclicos é chamado de fadiga (DOWLING, 2013). Sendo que a definição de fadiga feita pela ASTM (1996) é bem semelhante, pois ela define que: "Fadiga é um processo de alteração estrutural permanente, progressivo e localizado, que ocorre em um material sujeito a condições que produzem tensões ou deformações cíclicas em um ponto ou em vários pontos, e que pode culminar em trincas ou em uma fratura completa após um número suficiente de variações de carga".

A falha por fadiga consiste num processo de nucleação e propagação de trincas, o que pode levar o material a falhar de forma frágil, mesmo se tratando de materiais dúcteis. Na etapa de nucleação, os materiais dúcteis apresentam bandas de escorregamentos nos grãos cristalinos que se localizam na região sujeita a altas tensões de cisalhamento, logo numa condição de carregamento axial é esperado que a iniciação de trincas ocorra no plano a 45° da direção de aplicação da carga, já em aços de alta resistência que apresentam pouca ductilidade, observa-se que o processo de nucleação de trincas tende a se iniciar em micro defeitos presentes na microestrutura ou em defeitos superficiais que agem como concentradores de tensão. Na etapa de propagação, o comprimento da trinca aumenta de forma estável a cada ciclo de carregamento até atingir um tamanho crítico, neste estágio a etapa de falha se inicia, pois o tamanho da trinca começa a aumentar de forma instável levando o material a falhar de maneira frágil. O diagrama ilustrado na figura 2 auxilia na representação das etapas que constituem o processo de fadiga.

Como o tamanho da trinca aumenta a cada novo ciclo de carregamento (GARCIA; SPIM; SANTOS, 2000), a superfície de fratura de elementos que falham por fadiga apresentam estrias curvadas em relação a origem da falha, o que permite localizar o local de início do processo de nucleação e propagação da trinca, tais estrias são comumente chamadas de "marcas de praia" devido a semelhança que estas apresentam com as marcas

de praia deixadas pelas ondas do mar. A Figura 3 apresenta seções fraturadas típicas do processo de fadiga, sendo possível visualizar as marcas deixadas nas três etapas do processo de fratura.

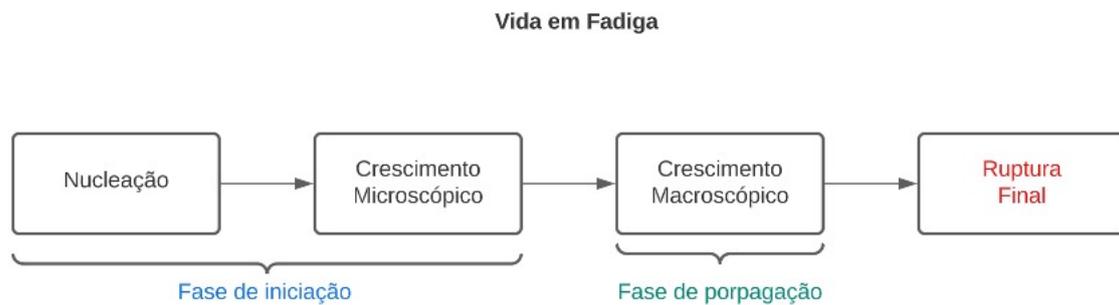


Figura 2 – Etapas básicas do processo de fadiga.

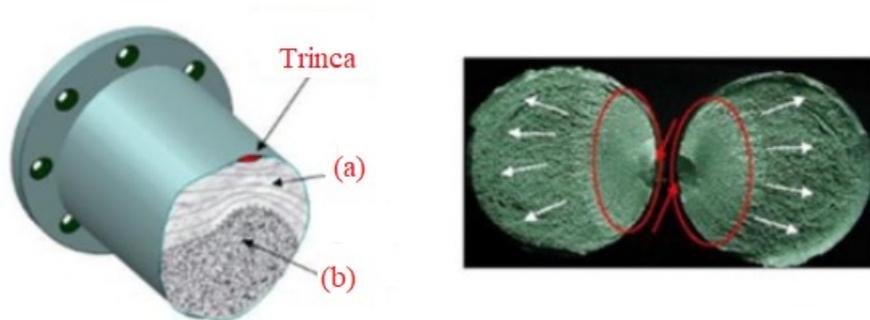


Figura 3 – Marcas de praia típicas de seções onde ocorreu falha por fadiga. Adaptado de Fadel (2010).

2.2 Carregamentos cíclicos

Em carregamentos cíclicos, a intensidade da tensão externa aplicada sobre o corpo varia ao longo do tempo, podendo variar também o sentido de aplicação, de modo que o carregamento exerça esforços de tração e compressão, ou torção alterna na estrutura do elemento. Este tipo de carregamento pode ser modelado com uma função harmônica, sendo comumente utilizado as funções seno e cosseno, de modo que os níveis de tensão fiquem dentro de um intervalo entre a tensão máxima (σ_{max}) e a mínima (σ_{min}) (DOWLING, 2013). A diferença entre a tensão máxima e mínima é definida como sendo a faixa de tensão ($\Delta\sigma$), e pode ser expressa pela Equação 2.1.

$$\Delta\sigma = \sigma_{max} - \sigma_{min} \quad (2.1)$$

Sendo que a metade da faixa de tensão ($\Delta\sigma$) é definida como amplitude de tensão (σ_a) e pode ser obtida pela Equação 2.2:

$$\sigma_a = \frac{\Delta\sigma}{2} = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2} \quad (2.2)$$

Tem-se também que a média entre os valores de tensão máxima e tensão mínima, denominada tensão média (σ_m), pode ser expressa pela Equação 2.3:

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2} \quad (2.3)$$

A partir das Equações 2.1, 2.2 e 2.3 é possível expressar as tensões máxima e mínima em função da tensão média e da amplitude de tensão conforme as Equações 2.4 e 2.5:

$$\sigma_{max} = \sigma_m + \sigma_a \quad (2.4)$$

$$\sigma_{min} = \sigma_m - \sigma_a \quad (2.5)$$

Outro termo muito utilizado em experimentos relacionados a fadiga, é denominado Razão de tensão (R) sendo expresso pela Equação 2.6, tal parâmetro é utilizado para representar o tipo de carregamento ao qual o elemento está submetido, sendo que para $R = -1$ tem-se um ciclo de tração-compressão com tensões de mesma magnitude e sentidos opostos, para $R = 0$ tem-se por exemplo um caso de tração pura, os demais valores de R são compostos pelas combinações dos valores de tensão máxima e mínima. Na Figura 4 é possível ver o comportamento das tensões no tempo para razões de tensão distintas.

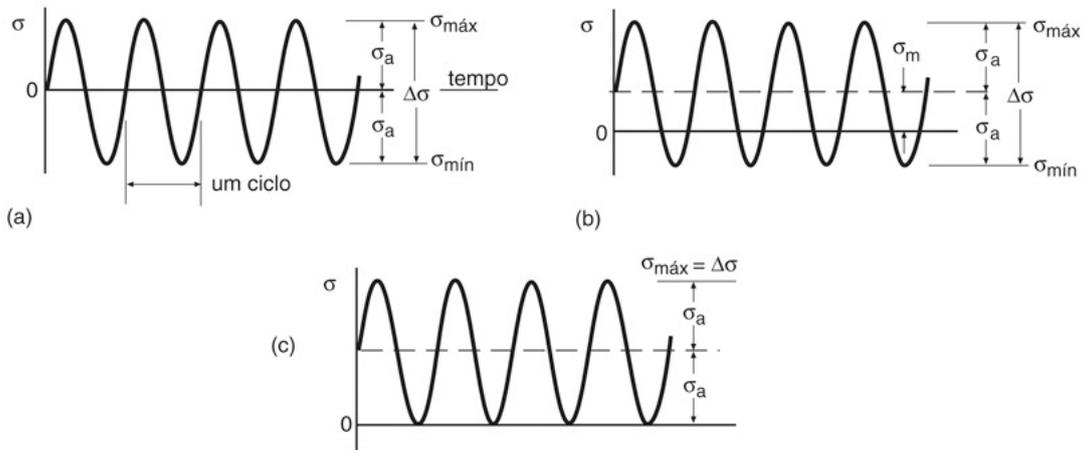


Figura 4 – Tipos de carregamentos para diferentes razões de tensão. (a) $R = -1$; (b) $R \neq 0$; (c) $R = 0$. Adaptado de Dowling (2013).

$$R = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}} \quad (2.6)$$

2.3 Vetor tensão

Suponha um corpo submetido a esforços externos combinados, como por exemplo, tração-compressão associados a torção, como pode ser observado na Figura 5(a). Adotando um plano genérico Δ que passa pelo ponto O , podemos representá-lo pelo seu vetor normal unitário \mathbf{n} como ilustrado na Figura 5(b). Pelo Teorema de Cauchy, tem-se que o vetor tensão, representado pela letra \mathbf{t} , atuante no ponto O depende da orientação do plano material, logo tem-se que, se o Tensor das Tensões ($\boldsymbol{\sigma}$) for determinado, o vetor tensão pode ser obtido pela Equação 2.7:

$$\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \quad (2.7)$$

Pela Figura 5(c), percebe-se que o vetor tensão (\mathbf{t}) possui duas componentes, sendo uma normal ao plano Δ dada pelo vetor tensão normal ($\boldsymbol{\sigma}_n$) e a outra dada pelo vetor tensão cisalhante ($\boldsymbol{\tau}$).

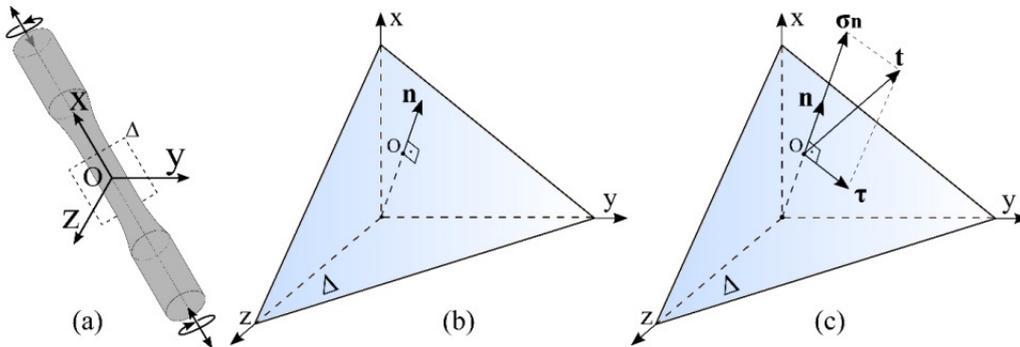


Figura 5 – (a) Sistema de coordenadas em um corpo de prova sob carga combinada; (b) Plano material genérico Δ e seu vetor normal unitário \mathbf{n} ; (c) Vetor tensão \mathbf{t} e suas componentes.

Perceba, pela Figura 5(c), que os vetores $\boldsymbol{\sigma}_n$ e $\boldsymbol{\tau}$ podem ser obtidos pelas Equações 2.8 e 2.9, respectivamente.

$$\boldsymbol{\sigma}_n = (\mathbf{t} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} \quad (2.8)$$

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{t} - \boldsymbol{\sigma}_n \quad (2.9)$$

Utilizando um sistema tridimensional de coordenadas cartesianas, cujos vetores unitários são representados por \mathbf{n}_x , \mathbf{n}_y e \mathbf{n}_z , pode-se representar o estado de tensão

tridimensional determinado pelo Tensor das Tensões em sua forma matricial, dada pela Equação 2.10.

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yx} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

Onde os elementos σ_{ii} correspondem as tensões normais e os elementos τ_{ij} são iguais às tensões cisalhantes. A partir do equilíbrio de momentos, pode-se mostrar que o Tensor das Tensões é simétrico, ou seja, $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, $\tau_{xz} = \tau_{zx}$ e $\tau_{yz} = \tau_{zy}$, logo são necessárias seis escalares independentes para definir um estado de tensão em um ponto material.

2.3.1 Histórias de carregamento

Todo carregamento cíclico possui o potencial de causar danos por fadiga, mesmo que as características destes sejam bem distintas, sendo que os fatores mais relevantes deste tipo de carregamento são a amplitude, tensão média e o número de ciclos de operação. Os carregamentos cíclicos geram o que é chamado de histórias de carregamento, ou histórias de tensão que correspondem ao comportamento das tensões no tempo, estas histórias podem ser caracterizadas por alguns fatores. Onde uma forma geral de representar o tensor das tensões ($\boldsymbol{\sigma}$) nesta situação é dada pela Equação 2.11

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{t}) = \begin{pmatrix} \sigma_{xx}(t) & \tau_{yx}(t) & \tau_{zx}(t) \\ & \sigma_{yy}(t) & \tau_{zy}(t) \\ & & \sigma_{zz}(t) \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

Onde:

$$\sigma_{ii}(t) = \sigma_{ii,m} + \sigma_{ii,a} f_{ii}(w_{ii}t) \quad (2.12)$$

$$\tau_{ij}(t) = \tau_{ij,m} + \tau_{ij,a} f_{ij}(w_{ij}t + \delta) \quad (2.13)$$

Sendo que:

- $\sigma_{ii,m}$ e $\tau_{ij,m}$ correspondem as tensões média;
- $\sigma_{ii,a}$ e $\tau_{ij,a}$ correspondem as amplitudes das tensões;
- w_{ii} e w_{ij} correspondem as frequências angulares;
- f_{ii} e f_{ij} correspondem as funções periódicas;

- δ é o ângulo de fase entre os carregamentos.

As histórias de tensões podem ser classificadas como, síncronas, assíncronas, proporcionais e não proporcionais. Sendo que uma história de tensão é dita proporcional, se suas componentes de tensão forem proporcionais durante todo o ciclo de carregamento, neste caso a direção das tensões principais permanecem constantes, caso esta relação de proporcionalidade não seja satisfeita, a história é classificada como não proporcional. Quanto a classificação em síncrona e assíncrona, se os componentes do tensor das tensões de uma história de tensões estiverem na mesma frequência ou tiverem períodos iguais, se trata de uma história síncrona, caso contrario a história é denominada assíncrona. Na Figura 6 são apresentados alguns diagramas de fase para casos de histórias de tensões assíncronas.

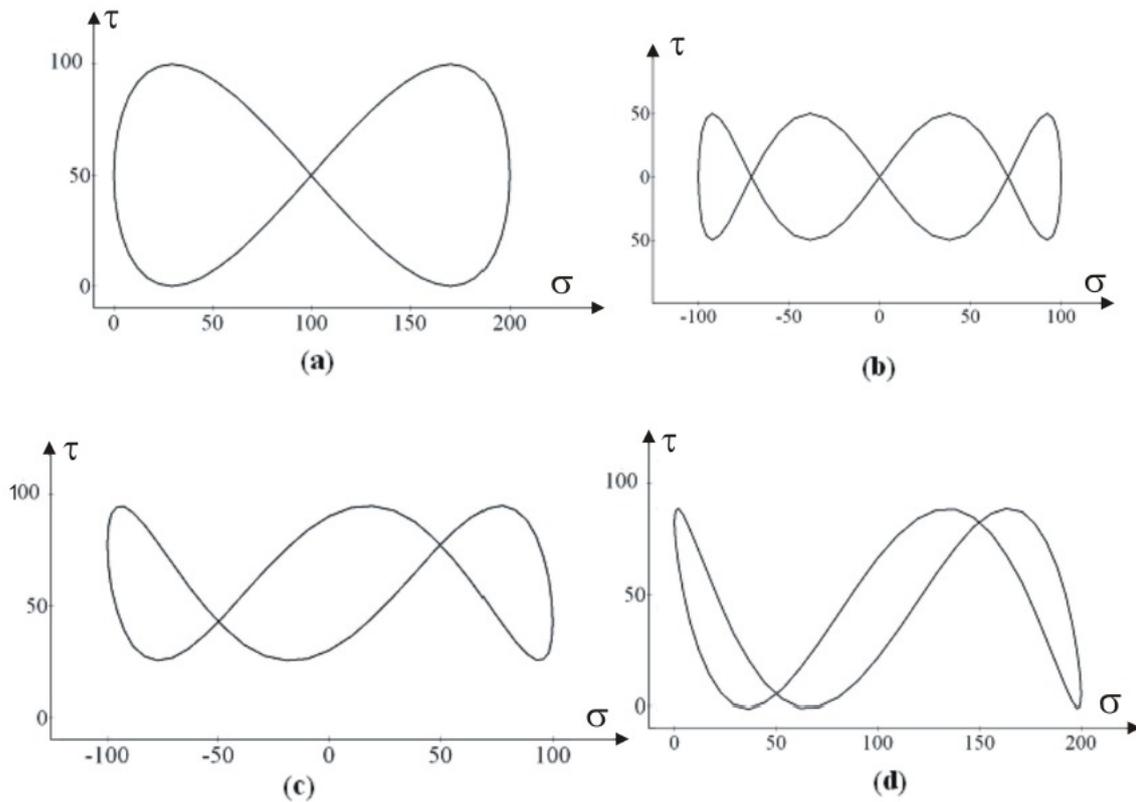


Figura 6 – (Diagramas de fase das tensões $\sigma(t) \times \tau(t)$ para casos de histórias assíncronas. Adaptado de Dantas (2009).

2.3.2 Estado uniaxial de tensão

Carregamentos periódicos externos que resultam em tensões em apenas uma direção, provocam um estado uniaxial de tensão. Analisando o ponto O presente na Figura 7, tem-se que o estado uniaxial de tensão pode ser representado pela Equação 2.14

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx}(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

Onde:

$$\sigma_{xx}(t) = \sigma_{xx,m} + \sigma_{xx,a} \sin(\omega t) \quad (2.15)$$

Sendo que, $\sigma_{xx,m}$ e $\sigma_{xx,a}$ correspondem ao valor médio e a amplitude da componente $\sigma_{xx}(t)$, e os termos t e ω representam a dependência do tempo e velocidade angular, respectivamente. Ressaltando que, $\sigma_{xx,m}$ e $\sigma_{xx,a}$ podem ser obtidas a partir das Equações 2.2 e 2.3.

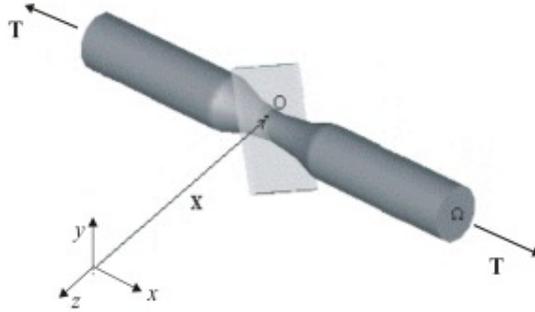


Figura 7 – Elemento sujeito a um estado de tensão uniaxial. Adaptado de Dantas (2009).

2.3.3 Estado multiaxial de tensão

Casos de carregamentos combinados são comumente encontrados em aplicações práticas, o que resulta em estados complexos de tensão cujos componentes geralmente variam em direção e magnitude, nesta situação tem-se um estado multiaxial de tensão. Dada a complexidade e dificuldade de se definir este estado de tensão, criou-se uma formulação generalizada e apropriada para determinação dos componentes de tensão em um plano qualquer. Para tanto, considere um ponto material (O) de um elemento submetido a um estado de carregamento multiaxial, de modo que um plano qualquer Δ passe pelo mesmo, como ilustrado na Figura 8:

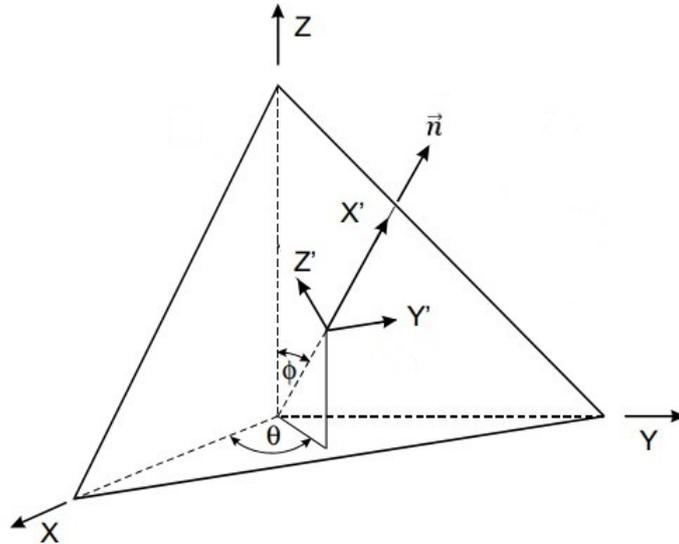


Figura 8 – Plano Δ qualquer, referenciado por um sistema de coordenadas xyz .

Sendo que o plano Δ pode ser caracterizado pelo seu vetor normal unitário \mathbf{n} , utilizando coordenadas esféricas baseadas nos ângulos θ e ϕ . Com o uso destes dois ângulos é possível descrever todos os planos materiais que passam pelo ponto O por meio da variação de θ e ϕ entre 0 e 2π , porém, devido a propriedade de simetria existente entre as componentes de tensão, basta que estes variem apenas entre 0 e π . Para definir as componentes x , y e z do vetor unitário \mathbf{n} , basta analisar a representação esquemática presente na Figura 9:

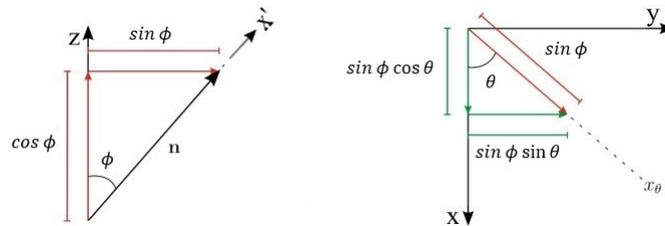


Figura 9 – Projeção do vetor unitário \mathbf{n} nos planos $(\mathbf{X}'\mathbf{Z})$ e (\mathbf{YX}) .

Nestas condições, o vetor \mathbf{n} é definido pela Equação 2.16:

$$\mathbf{n} = [n_x; n_y; n_z]^T = [\cos(\theta)\sin(\phi); \sin(\theta)\sin(\phi); \cos(\phi)]^T \quad (2.16)$$

Em alguns carregamentos cíclicos complexos, o vetor tensão \mathbf{t} descreve uma curva fechada Φ , como pode ser observado na Figura 10, de modo que a componente cisalhante $\boldsymbol{\tau}$ também descreverá uma curva fechada Ψ , por outro lado, a componente normal do vetor tensão pode ter sua amplitude σ_a e seu valor médio σ_m determinado a partir do produto escalar entre $\mathbf{t}(t)$ e \mathbf{n} , o que resulta nas Equações 2.17 e 2.18:

$$\sigma_a(\mathbf{n}) = \frac{1}{2}(\max(\mathbf{t}(t) \cdot \mathbf{n}) - \min(\mathbf{t}(t) \cdot \mathbf{n})) \quad (2.17)$$

$$\sigma_m(\mathbf{n}) = \frac{1}{2}(\max(\mathbf{t}(t) \cdot \mathbf{n}) + \min(\mathbf{t}(t) \cdot \mathbf{n})) \quad (2.18)$$

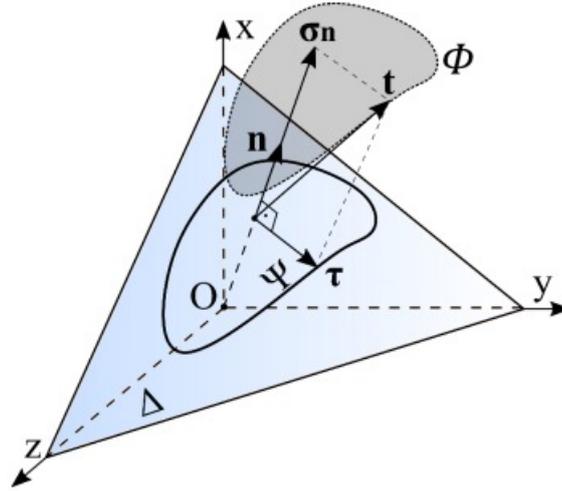


Figura 10 – Vetor tensão \mathbf{t} , sua trajetória e suas componentes. Adaptado de Araujo (2020).

Para determinar o valor médio e a amplitude da tensão cisalhante em casos de carregamentos proporcionais, pode-se utilizar expressões similares às descritas nas Equações 2.17 e 2.18. Porém, em casos de carregamentos não proporcionais, a determinação de τ_a e τ_m é uma tarefa bem mais difícil, pois o vetor tensão cisalhante $\boldsymbol{\tau}$ pode variar tanto sua direção e sentido quanto sua magnitude, de forma que para obter as grandezas desejadas é necessário que se determine a amplitude e o valor médio de uma função vetorial.

Como a curva fechada Ψ é diferente em cada plano de corte que passa pelo ponto O , pode-se concluir que a amplitude da tensão cisalhante (τ_a) é dependente da orientação do plano Δ , logo ela pode ser definida como uma função do vetor unitário \mathbf{n} e consequentemente também é uma função dos ângulos θ e ϕ . Mais adiante, será discutido um dos métodos utilizados na determinação destes parâmetros.

2.3.4 Sistema de coordenadas utilizado na determinação de τ_a

No processo de obtenção da amplitude da tensão cisalhantes comumente se utiliza o sistema de coordenadas apresentado na Figura 11, para caracterizar o plano material Δ . Sendo que o vetor unitário \mathbf{e}_A é paralelo ao plano xy variando em função do ângulo θ . Já o vetor unitário \mathbf{e}_B tem seu sentido na direção do eixo z e tem sua variação como função dos ângulos θ e ϕ .

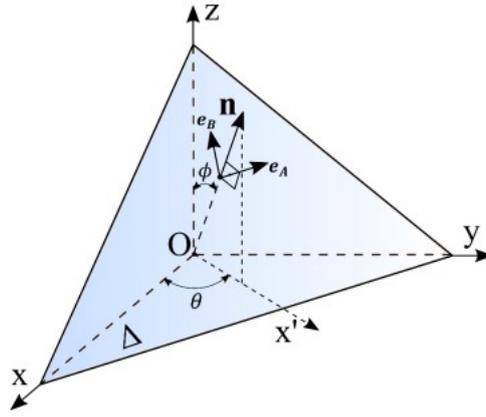


Figura 11 – Sistema de coordenadas cujas componentes são e_A e_B x n . Adaptado de Araujo (2020).

Utilizando o vetor normal unitário \mathbf{n} , definido na seção 2.3.2, pode-se representar os vetores \mathbf{e}_A e \mathbf{e}_B a partir do sistema de coordenadas cartesianas xyz . Para tanto, basta analisar as relações presentes na Figura 12, que se chega às Equações 2.19 e 2.20:

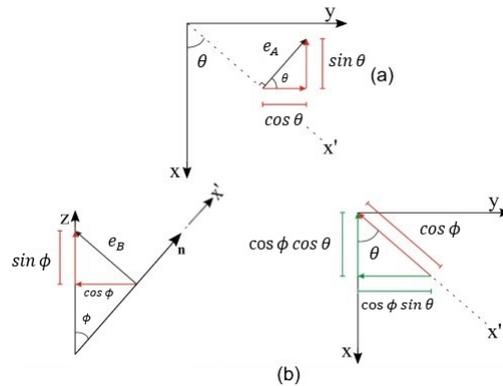


Figura 12 – Projeção do vetores e_A (a) e e_B (b) nas coordenadas do sistema de coordenadas cartesianas xyz .

$$\mathbf{e}_A = \begin{pmatrix} e_{A,x} \\ e_{A,y} \\ e_{A,z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

$$\mathbf{e}_B = \begin{pmatrix} e_{B,x} \\ e_{B,y} \\ e_{B,z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos(\phi) \cos(\theta) \\ -\cos(\phi) \sin(\theta) \\ \sin(\phi) \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

Utilizando o sistema de coordenadas descrito acima, pode-se representar as componentes cisalhantes do vetor tensão pelas Equações 2.21 e 2.22:

$$\tau_{e_A} = \mathbf{t} \cdot \mathbf{e}_A \quad (2.21)$$

$$\tau_{e_B} = \mathbf{t} \cdot \mathbf{e}_B \quad (2.22)$$

Logo, a história do vetor tensão cisalhante que atua no plano Δ pode ser expressa pela Equação 2.23:

$$\Psi = \tau(t_i) = (\tau_{e_A}(t_i), \tau_{e_B}(t_i)), \quad i = 1, \dots, n \quad (2.23)$$

O uso deste sistema de coordenadas facilita o procedimento de aplicação dos métodos utilizados no processo de determinação da amplitude da tensão cisalhante.

2.4 Fadiga uniaxial

August Wöhler foi um dos primeiros estudiosos a perceber que a tensão nominal exercia influência sobre a vida em fadiga, foi responsável por propor o conceito de limite de fadiga, e além disto, também contribuiu por meio do fornecimento de dados experimentais para a concepção da Equação 2.24, que relaciona o número de ciclos de carregamentos até o elemento falhar por fadiga (N_f) com a amplitude de tensão (σ_a) para um dado material em uma condição de carregamento uniaxial:

$$\sigma_a = \sigma'_f (2N_f)^b \quad (2.24)$$

A Equação 2.24 é conhecida como equação de Basquin, onde N_f representa o número de ciclos até que ocorra a falha, b é o expoente de resistência a fadiga e σ'_f corresponde ao coeficiente de resistência à fadiga. A equação de Basquin pode ser aplicada em uma quantidade elevada de materiais metálicos de interesse da engenharia, desde que estes não sejam entalhados e nem estejam submetidos a histórias de carregamentos uniaxiais de alto ciclo. Em casos unidimensionais de alto ciclo, o comportamento de um material submetido a carregamentos cíclicos em diferentes níveis de tensão pode ser analisado pelo gráfico conhecido como curva S-N, onde é possível determinar o número de ciclos que o material suporta até falhar para um determinado nível de tensão.

2.4.1 Curva tensão - vida (S-N)

A curva Tensão - Vida ou curva de Wöhler comumente denotada por S-N, relaciona o número de ciclos de carregamento que um determinado material suporta até falhar por fadiga, com a amplitude da tensão (σ_a) aplicada. A Figura 13 apresenta o comportamento típico das curvas presentes nos gráficos S-N de alguns aços de interesse da engenharia, ao

analisa-ló, é perceptível que há um nível de amplitude de tensão abaixo do qual espera-se que o material não falhe por fadiga até atingir o número de ciclos conhecido como vida infinita, que fica entre 10^6 e 10^8 ciclos, tal nível de tensão é denominado limite de fadiga (σ_0). Para Murakami (2002) o limite de fadiga estabelece a amplitude de tensão máxima que pode ser aplicada sem que ocorra propagação das trincas nucleadas.

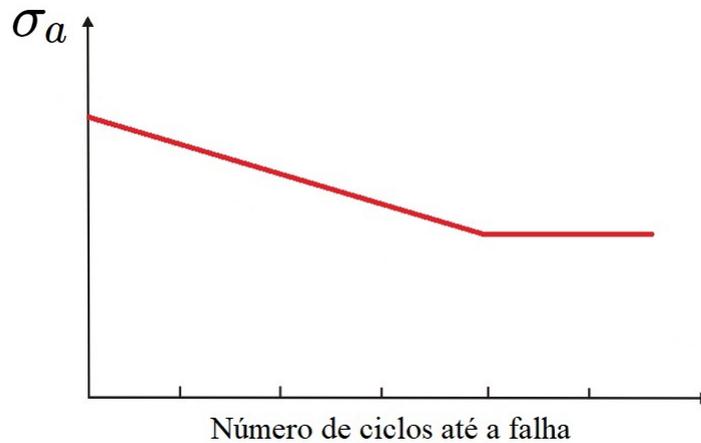


Figura 13 – Curva S - N genérica.

O comportamento da curva S-N pode ser descrito pela função apresentada na Equação 2.25 em gráficos com escala log-log, onde N_f representa o número de ciclos até que ocorra a falha, b é o expoente de resistência a fadiga e S_f' corresponde ao coeficiente de resistência à fadiga em casos onde está se utilizando um corpo de prova padrão na realização dos ensaios de fadiga.

$$\sigma_a = S_f'(N_f)^b \quad (2.25)$$

2.5 Fadiga multiaxial

Em várias aplicações de engenharia, os elementos mecânicos estão sob efeito de carregamentos com tensões atuantes em diferentes direções do plano material o que resulta num estado multiaxial de tensões, sendo que se as cargas aplicadas forem variáveis, há a possibilidade de nucleação e propagação de trincas, tal fenômeno é denominado fadiga multiaxial. Devido a importância prática deste assunto, vários estudos foram desenvolvidos com o intuito de elaborar uma metodologia que permitisse modelar problemas que envolvam fadiga multiaxial, sendo que as metodologias desenvolvidas até o presente momento podem ser divididas em cinco grupos:

- Modelos empíricos;
- Modelos baseados nos termos invariantes do Tensor de Tensões;

- Modelos baseados em tensões médias e deformações em volume material;
- Modelos baseados em energia acumulada;
- Modelos baseados em plano crítico;

Os modelos baseados em plano crítico estão entre os mais utilizados atualmente, sendo que tais modelos possuem um forte apelo físico, pois além de auxiliar na estimativa da vida em fadiga também preveem o plano material onde ocorrerá a nucleação de trincas. A ideia principal desta abordagem é baseada na observação de que num ponto material submetido a uma história de tensão podem ocorrer níveis de amplitudes de tensões diferentes em planos distintos, de modo que um determinado plano seja mais solicitado que outros, sendo que o plano mais solicitado é denominado plano crítico, por ser o plano onde há a maior probabilidade de nucleação e propagação de trincas. Segundo Carpinteri e Spagnoli (2001), os modelos de plano crítico são responsáveis por determinar o dano por fadiga em um plano onde a amplitude ou a componente de tensão ou a combinação destas for máxima.

2.5.1 Modelos de plano crítico baseados em tensão

A seguir, será apresentado a definição de alguns modelos de plano crítico presentes na literatura, sendo que a principal diferença entre eles é a forma como caracterizam o plano mais solicitado.

2.5.1.1 Modelo de Findley

O modelo proposto por Findley (1959) considera que o plano crítico é aquele onde a combinação entre a amplitude da tensão cisalhante (τ_a) e a máxima tensão normal ($\sigma_{n,max}$) é máxima, sendo possível expressar o seu modelo pela Equação 2.26:

$$\max \{ \tau_a + k_F \sigma_{n,max} \} \leq \lambda_F \quad (2.26)$$

Onde k_F e λ_F são parâmetros materiais a serem determinados.

2.5.1.2 Modelo de Matake

O modelo proposto por Matake (1977) define o plano crítico como sendo aquele onde a amplitude da tensão cisalhante é máxima, sendo que a definição matemática deste modelo é dada pela Equação 2.27:

$$\tau_a(\theta^c, \phi^c) + \kappa \sigma_{n,max}(\theta, \phi) \leq \lambda \quad (2.27)$$

Onde k e λ são parâmetros materiais a serem determinados.

2.5.1.3 Modelo de McDiarmid

O modelo de McDiarmid (1994) também considera que o plano crítico é aquele onde a amplitude da tensão cisalhante é máxima, sendo possível expressar a definição do modelo através da Equação 2.28:

$$\tau_a(\theta^c, \phi^c) + a \sigma_{n,max}(\theta, \phi) \leq b \quad (2.28)$$

Sendo que a e b são parâmetros materiais a serem definidos.

2.5.1.4 Modified Wöhler Curve Method (MWCM)

Para Susmel e Lazzarin (2002), o plano crítico é aquele submetido a maior amplitude de tensão de cisalhamento (τ_a) sendo que a tensão normal máxima ($\sigma_{n,max}$) exerce grande influência no processo de falha, este modelo também é conhecido como Método das Curvas Modificadas de Wöhler, comumente chamado de MWCM. Como este modelo é sensível ao efeito de carregamentos combinados fora de fase e ao efeito da tensão média, este será utilizado no presente trabalho para estimar o dano por fadiga. A expressão matemática do método pode ser representada pela Equação 2.29:

$$\tau_a^c + k_A \frac{\sigma_{n,max}}{\tau_a^c} \leq \lambda_A \quad (2.29)$$

Onde k_A e λ_A são constantes materiais que podem ser determinadas a partir dos limites de fadiga de tração-compressão (σ_{-1}) e torção alternada (τ_{-1}), sendo expressos pelas Equações 2.30 e 2.31

$$k_A = \tau_{-1} - \frac{\sigma_{-1}}{2} \quad (2.30)$$

$$\lambda_A = \tau_{-1} \quad (2.31)$$

Já as variáveis τ_a^c e $\sigma_{n,max}$ são definidas no plano crítico, sendo este o plano onde a amplitude da tensão cisalhante τ_a é máxima, porém, como τ_a é máxima em mais de um plano, o plano mais propenso a falha dentre os que apresentam a máxima amplitude de tensão cisalhante é aquele que apresenta a maior tensão normal $\sigma_{n,max}$. Como a análise utilizada para determinação do plano crítico é geralmente feita utilizando coordenadas esféricas (θ e ϕ) a Equação 2.29 pode ser expressa pela Equação 2.32

$$\tau_a(\phi_c, \theta_c) + k_A \frac{\sigma_{n,max}}{\tau_a}(\phi_c, \theta_c) \leq \lambda_A \quad (2.32)$$

Onde θ_c e ϕ_c são as coordenadas esféricas do plano crítico. A relação $\sigma_{n,max}/\tau_a$ também definida pela letra grega ρ , quantifica a influência da tensão normal no processo de falha por fadiga, sendo que a máxima tensão normal ($\sigma_{n,max}$) é utilizada para contabilizar os efeitos das tensões médias na resistência a fadiga em casos de fadiga multiaxial.

Segundo (ARAÚJO et al., 2011), a falha deste método está no fato de que numa história de carregamento podem haver planos em que a diferença entre as suas amplitudes de tensão cisalhante (τ_a) é mínima, porém há a possibilidade de a diferença entre as tensões normais ser significativa o que pode levar a conclusões incorretas. De modo a exemplificar esta situação, considere os valores hipotéticos de τ_a e $\sigma_{n,max}$ apresentados na Tabela 1, pelo método MWCM original, o plano crítico seria o plano 1, entretanto é evidente que o plano 2 é mais propenso a propagação de trincas.

Tabela 1 – Possíveis níveis de tensões num plano material.

Plano	τ_a (MPa)	$\sigma_{n,max}$ (MPa)
1	200	70
2	199,9	100
3	199,8	80

De modo a contornar esta falha no método, Araújo et al. (2011), propôs a utilização de uma faixa de tolerância abaixo do valor da máxima amplitude da tensão de cisalhamento (τ_a^{max}) de modo que seja possível avaliar as tensões normais que atuam em planos onde τ_a se aproxime de τ_a^{max} . O processo de definição do plano crítico considerando uma tolerância de 1% pode ser definido a partir de quatro etapas:

- Etapa 1: Determinação de τ_a^{max} ;
- Etapa 2: Seleção dos candidatos a planos críticos considerando uma tolerância de 1% sobre τ_a^{max} ;
- Etapa 3: Dentre os candidatos a plano crítico, selecionar aquele que estiver sob efeito da maior tensão normal;
- Etapa 4: Utilizar o modelo MWCM considerando o plano selecionado na etapa anterior.

Porém, há ainda outra forma de lidar com este detalhe, realizando o truncamento do valor da amplitude da tensão cisalhante em uma quantidade adequada de Algarismos significativos, diferenças mínimas entre os níveis de τ_a^{max} deixam de influenciar na determinação do plano mais propenso a iniciação de trincas.

2.5.2 Amplitude da tensão cisalhante

Como discutido na seção anterior, para se definir o plano crítico é necessário que se determine a máxima amplitude da tensão cisalhante, mas como a projeção da tensão

cisalhante no plano material varia em magnitude, direção e sentido, determinar τ_a é uma tarefa complicada, não tendo uma solução trivial (PETRUCCI, 2015). Entretanto, existem alguns métodos que se propõem a determinar tal grandeza, como por exemplo, o Método da Mínima Circunferência Circunscrita (PAPADOPOULOS, 1998), e o Método da Maior Envoltória Retangular (ARAÚJO et al., 2011; MAMIYA; CASTRO; ARAÚJO, 2014), sendo que o método da Mínima Circunferência é o mais utilizado e conhecido, porém em alguns casos este modelo não consegue diferenciar histórias de tensões proporcionais de histórias não proporcionais, sendo recomendado para estas situações o uso do Método da Maior Envoltória Retangular (MRH), pois tal método é capaz de diferenciar carregamentos proporcionais de não proporcionais.

2.5.3 Método da Maior Envoltória Retangular

O presente método proposto pelos pesquisadores Araújo et al. (2011), Mamiya, Castro e Araújo (2014), tem como objetivo determinar a amplitude da tensão cisalhante utilizando o maior retângulo que circunscreva a curva gerada pela história de tensões cisalhantes. O modelo propõe que apenas os estados de tensão presentes na borda da curva gerada pela história de carregamento sejam significativos para representar a magnitude da história de tensões cisalhantes. Considere o retângulo que circunscreve a curva Ψ gerada por uma história de tensão cisalhante arbitrária presente na Figura 14.

Sendo que os pontos onde o retângulo tangência à história de tensões são descritos pelas Equações 2.33 e 2.34:

$$p_i(\varphi) = \arg \{ \max_t \tau_i(\varphi, t) \}, i = 1, 2 \quad (2.33)$$

$$q_i(\varphi) = \arg \{ \min_t \tau_i(\varphi, t) \}, i = 1, 2 \quad (2.34)$$

onde p_i e q_i são pontos da curva Ψ e $\tau_i(\varphi, t)$ representa a i -ésima componente da tensão cisalhante projetada no plano no tempo t , descrita numa base φ .

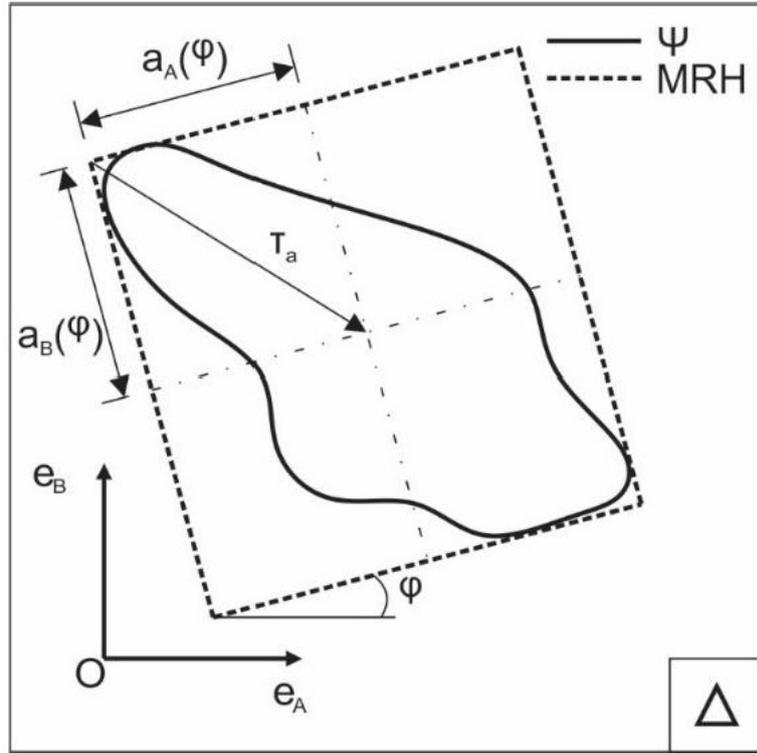


Figura 14 – Retângulo circunscrevendo a projeção da história de tensões cisalhante. Adaptado de Araujo (2020).

Para cada orientação φ do retângulo, define-se a amplitude da i -ésima componente $a_i(\varphi)$ da história de tensões cisalhantes, como descrito na Equação 2.35:

$$a_i(\varphi) = \frac{1}{2} \{ \max_t \tau_i(\varphi, t) - \min_t \tau_i(\varphi, t) \}, i = 1, 2 \quad (2.35)$$

Utilizando o sistema de coordenadas descrito na seção 2.3.4, de modo que as componentes da tensão cisalhante $\tau_1(t)$ e $\tau_2(t)$ atuantes na mesma direção dos vetores unitários \mathbf{e}_A e \mathbf{e}_B , respectivamente, e fazendo o uso da matriz de rotação descrita na Equação 2.36, pode-se aplicar a matriz de rotação nas componentes de tensão cisalhante atuantes nas direções \mathbf{e}_A e \mathbf{e}_B , de modo a obter as Equações 2.37 e 2.38.

$$R_{rot} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \quad (2.36)$$

$$\tau_{e_A}(\varphi, t) = \cos(\varphi)\tau_{e_A}(t) + \sin(\varphi)\tau_{e_B}(t) \quad (2.37)$$

$$\tau_{e_B}(\varphi, t) = -\sin(\varphi)\tau_{e_A}(t) + \cos(\varphi)\tau_{e_B}(t) \quad (2.38)$$

Sendo que a maior amplitude da tensão cisalhante em um plano qualquer pode ser definida com:

$$\tau_a = \max \sqrt{a_1^2(\varphi) + a_2^2(\varphi)} \quad (2.39)$$

2.5.4 Método da Máxima Variância

Os pesquisadores Rice (1944), Wirsching (1980), Zhao e Baker (1992) e Dirlik (1985), dentre outros, constataram que a variação do histórico de tensões influencia no surgimento de danos relacionados a fadiga. Baseado nesta constatação, o Método da Máxima Variância assume que o plano mais propenso a falhar por fadiga é aquele onde a variância de uma tensão equivalente é máxima (BEDKOWSKI; MACHA, 1985; SUSMEL, 2010), sendo que a escolha desta tensão equivalente depende do modelo de plano crítico utilizado, como o presente trabalho utilizará o modelo MWCM, temos que o plano crítico é aquele onde a variância da história de tensões cisalhantes é máxima. Este modelo foi proposto inicialmente pelos pesquisadores Bedkowski e Macha (1985) e desde então várias versões modificadas foram apresentadas, contudo a ideia central ainda permanece a mesma, sendo que uma das principais vantagens dessa ferramenta está na alta velocidade de determinação do plano crítico, sendo mais rápido que outros métodos existentes, o que diminui o custo computacional necessário para a determinação do ponto mais propenso ao surgimento de danos causados pelo fenômeno de fadiga, tal rapidez se deve ao uso das relações funcionais existentes entre a história de tensão resolvida e a matriz de covariância dos componentes de tensão.

O Método da Máxima Variância clássico consiste em representar o comportamento do vetor tensão cisalhante o projetando em uma direção qualquer q situada num plano genérico Δ , sendo que a direção q é definida pelo ângulo α medido a partir da direção \mathbf{e}_a , como ilustrado na Figura 15. Porém, como o plano Δ é caracterizado pelos ângulos de Euler θ e ϕ , temos que o vetor tensão cisalhante resolvido na direção q , $\boldsymbol{\tau}_q(\mathbf{t})$, também é uma função que depende de θ e ϕ além de variar com o ângulo α , logo $\boldsymbol{\tau}_q(\mathbf{t})$ depende de quatro variáveis como descrito na Equação 2.40.

$$\boldsymbol{\tau}_q = f(t, \theta, \phi, \alpha) \quad (2.40)$$

Utilizando esta versão, o plano crítico será aquele onde a variância de $\boldsymbol{\tau}_q(\mathbf{t})$ for máxima, logo faz-se necessário verificar a variância desta tensão em todos os planos definidos pelos ângulos θ e ϕ , sendo que a variância de $\boldsymbol{\tau}_q(\mathbf{t})$ pode ser obtida pela Equação 2.41:

$$\text{Var}(\boldsymbol{\tau}_q(\mathbf{t})) = \boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{\tau}_q} \cong \mathbf{d}^T \boldsymbol{\mu} \mathbf{d} \quad (2.41)$$

Onde, \mathbf{d} é um vetor que depende dos cossenos diretores que definem a direção na qual se está projetando o vetor $\boldsymbol{\tau}_q(\mathbf{t})$ e $\boldsymbol{\mu}$ é a matriz de covariância das componentes do Tensor das Tensões dada pela Equação 2.42:

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_{x,x} & \mu_{x,y} & \mu_{x,z} & \mu_{x,xy} & \mu_{x,xz} & \mu_{x,yz} \\ \mu_{x,y} & \mu_{y,y} & \mu_{y,z} & \mu_{y,xy} & \mu_{y,xz} & \mu_{y,yz} \\ \mu_{x,z} & \mu_{y,z} & \mu_{z,z} & \mu_{z,xy} & \mu_{z,xz} & \mu_{z,yz} \\ \mu_{x,xy} & \mu_{y,xy} & \mu_{z,xy} & \mu_{xy,xy} & \mu_{xy,xz} & \mu_{xy,yz} \\ \mu_{x,xz} & \mu_{y,xz} & \mu_{z,xz} & \mu_{xy,xz} & \mu_{xz,xz} & \mu_{xz,yz} \\ \mu_{x,yz} & \mu_{y,yz} & \mu_{z,yz} & \mu_{xy,yz} & \mu_{xz,yz} & \mu_{yz,yz} \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

Onde $\mu_{i,i} = \text{Var}[\sigma_i(t)]$ para $i = x, y, z, xy, xz, yz$ e $\mu_{i,j} = \text{Cov}[\sigma_i(t), \sigma_j(t)]$ para $i, j = x, y, z, xy, xz, yz$.

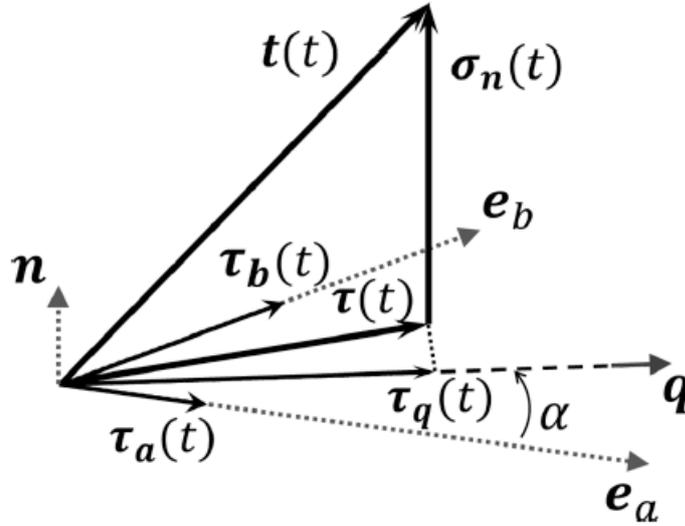


Figura 15 – Projeção do vetor tensão cisalhante na direção q . Adaptado de Ferreira et al. (2022).

Com o uso da Equação 2.41 a estimativa da variância de $\tau_q(t)$ para qualquer tripleto ϕ, θ e α é obtida de forma relativamente rápida, desta forma, a determinação do plano crítico é realizada a partir de um processo iterativo de escaneamento dos ângulos de Euler, onde devido a simetria dos Tensor Tensão basta varia-los de 0 a 180° , com objetivo de encontrar a maior variância de $\tau_q(t)$. Com esta estratégia, o tempo de processamento é consideravelmente menor que o gasto por outras técnicas que utilizam a construção de figuras geométricas na identificação do plano crítico, porém, o uso do ângulo α ainda resulta num alto custo computacional, pois também é necessário varrê-lo de 0 a 180° , e por isto alguns trabalhos foram desenvolvidos com o objetivo de apresentar versões mais poderosas do MMV que forneçam alternativas ao uso deste ângulo.

Neste trabalho, será utilizada a versão do MMV apresentada pelos pesquisadores Ferreira et al. (2022), que propõem uma forma mais eficiente de identificação do plano onde a variância da história de tensão cisalhante é máxima, baseada na construção da matriz de covariância das histórias de tensão $\tau_a(t)$ e $\tau_b(t)$, como exposto na Equação 2.43:

$$\boldsymbol{\mu}_\Delta = \begin{bmatrix} \mu_{\tau_a} & \mu_{\tau_a, \tau_b} \\ \mu_{\tau_a, \tau_b} & \mu_{\tau_b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Var}[\tau_a(t)] & \text{Cov}[\tau_a(t), \tau_b(t)] \\ \text{Cov}[\tau_a(t), \tau_b(t)] & \text{Var}[\tau_b(t)] \end{bmatrix} \quad (2.43)$$

Onde os termos da diagonal principal podem ser obtidos pela Equações 2.44 e 2.45 e os termos de covariância podem se expressos pela Equação 2.46

$$\text{Var}(\tau_a(t)) = \mu_{\tau_a} \cong \mathbf{d}_a^T \boldsymbol{\mu} \mathbf{d}_a \quad (2.44)$$

$$\text{Var}(\tau_b(t)) = \mu_{\tau_b} \cong \mathbf{d}_b^T \boldsymbol{\mu} \mathbf{d}_b \quad (2.45)$$

$$\text{Cov}(\tau_a(t), \tau_b(t)) = \mu_{\tau_a, \tau_b} \cong \mathbf{d}_a^T \boldsymbol{\mu} \mathbf{d}_b \quad (2.46)$$

Sendo que os vetores \mathbf{d}_a e \mathbf{d}_b são dados pelas Equações 2.47 e 2.48, respectivamente.

$$\mathbf{d}_a = [a_x n_x \quad a_y n_y \quad a_z n_z \quad a_x n_y + a_y n_x \quad a_x n_z + a_z n_x \quad a_y n_z + a_z n_y]^T \quad (2.47)$$

$$\mathbf{d}_b = [b_x n_x \quad b_y n_y \quad b_z n_z \quad b_x n_y + b_y n_x \quad b_x n_z + b_z n_x \quad b_y n_z + b_z n_y]^T \quad (2.48)$$

Utilizando a base $\mathbf{e}_a - \mathbf{e}_b$ tem-se que a direção e a intensidade que definem a condição de máxima variância de $\boldsymbol{\tau}_q(t)$ atuando no plano de análise pode ser quantificada a partir de uma transformação linear ortogonal onde é possível representar o histórico de tensões em um sistema de coordenadas $\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$ de forma que a máxima variância de qualquer projeção de $\boldsymbol{\tau}_q(t)$ seja orientada na direção de \mathbf{e}_1 e a segunda maior na direção de \mathbf{e}_2 . Devido a simetria da matriz de covariância, a base $\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$ pode ser determinada com o uso do teorema da decomposição espectral (KENT; BIBBY; MARDIA, 2006; RENCHER; CHRISTENSEN, 2012) que estabelece as condições nas quais é possível diagonalizar um operador sobre uma base ortonormal constituída pelos autovetores dessa matriz, logo podemos escrever a matriz de covariância $\boldsymbol{\mu}_\Delta$ de acordo com a Equação 2.49:

$$\boldsymbol{\mu}_\Delta = \mathbf{G} \mathbf{L} \mathbf{G}^T = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

Sendo que o termo \mathbf{L} da Equação 2.49 é uma matriz diagonal que contém os autovalores de $\boldsymbol{\mu}_\Delta$ e \mathbf{G} é a matriz cujas colunas correspondem aos autovetores de $\boldsymbol{\mu}_\Delta$. Os autovalores λ_1 e λ_2 podem ser determinados a partir do cálculo das raízes do polinômio característico apresentado na Equação 2.50:

$$\mathbf{P}_{\boldsymbol{\mu}_\Delta}(\lambda) = \det[\lambda \mathbf{I} - \boldsymbol{\mu}_\Delta] = \lambda^2 - \lambda(\mu_{\Delta 11} + \mu_{\Delta 22}) + (\mu_{\Delta 11} \mu_{\Delta 22} - \mu_{\Delta 112}) \quad (2.50)$$

Como:

$$\mu_{\Delta 11} = Var[\boldsymbol{\tau}_a(t)] \quad (2.51)$$

$$\mu_{\Delta 22} = Var[\boldsymbol{\tau}_b(t)] \quad (2.52)$$

$$\mu_{\Delta 12} = Cov[\boldsymbol{\tau}_a(t), \boldsymbol{\tau}_b(t)] \quad (2.53)$$

Os autovetores λ_1 e λ_2 são dados pelas Equações 2.54 e 2.55, respectivamente.

$$\lambda_1 = \frac{\mu_{\Delta 11} + \mu_{\Delta 22}}{2} + \delta \quad (2.54)$$

$$\lambda_2 = \frac{\mu_{\Delta 11} + \mu_{\Delta 22}}{2} - \delta \quad (2.55)$$

Onde.

$$\delta = \sqrt{\left(\frac{\mu_{\Delta 11} + \mu_{\Delta 22}}{2}\right)^2 + (\mu_{\Delta 12})^2} \quad (2.56)$$

Por fim, esta metodologia apresenta duas formas de caracterizar o plano de máxima variância, sendo que a primeira assume que o processo de falha está diretamente relacionado ao valor RMS da história de tensão cisalhante resolvida na direção de máxima variância, com isto, a amplitude da máxima tensão cisalhante atuando no plano de análise pode ser determinada pela Equação 2.57

$$\tau_{a_{eq1}} = \sqrt{2Var(\tau_q(t, \theta, \phi, \alpha_1))} = \sqrt{2\lambda_1} \quad (2.57)$$

Já a segunda forma adota a metodologia do menor elipsoide circunscrito, de modo que o histórico de tensões cisalhantes pode ser caracterizado a partir das informações contidas nos semi-eixos principais do menor elipsoide que circunscribe o histórico de tensões como ilustrado na Figura 16, com isto, amplitude da máxima tensão cisalhante atuando no plano de estudo pode ser determinada pela Equação 2.58:

$$\tau_{a_{eq2}} = \sqrt{2(\lambda_1 + \lambda_2)} \quad (2.58)$$

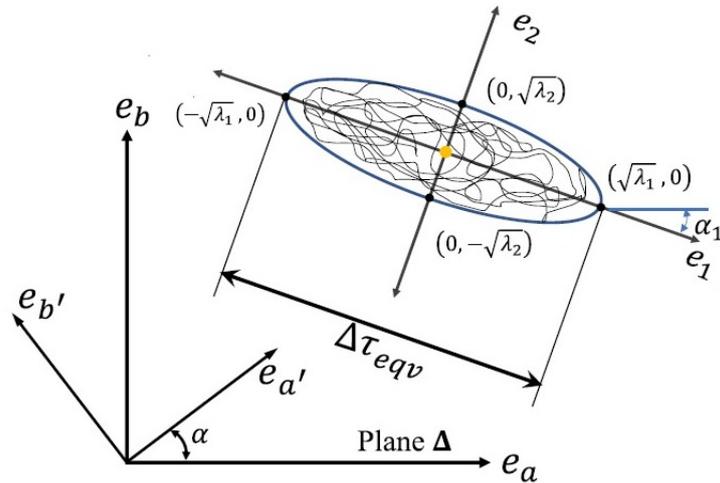


Figura 16 – Elipsoide representado pelos autovalores λ_1 e λ_2 na base $e_1 - e_2$

2.6 Fadiga em materiais com micro-defeitos

Como discutido anteriormente e relatado pelos pesquisadores Murakami (1994), Endo e Ishimoto (2006), Nadot e Billaudeau (2006), a presença de micro-defeitos, internos e superficiais, em elementos que estão sob o efeito de carregamentos cíclicos provoca a diminuição do limite de fadiga do material, o que pode ocasionar falhas por fadiga em condições onde o nível da amplitude de tensão aplicada é menor que a amplitude de tensão admissível prevista por métodos que desconsideram a existência de tais defeitos. Vários trabalhos foram elaborados com o intuito de compreender melhor tal fenômeno, dentre estes, o trabalho de Murakami (2002) apresentou algumas contribuições importantes que permitiram o avanço de estudos na área.

Em seus estudos Murakami (2002) constatou que micro-defeitos que apresentem um diâmetro mínimo, não exercem influência sobre o limite de fadiga do material, porém a partir de um certo valor, o tamanho do diâmetro do micro-defeito apresenta uma relação inversamente proporcional com o limite de fadiga, pois o aumento do diâmetro provoca uma diminuição do limite de fadiga, como pode ser visto na Figura 17.

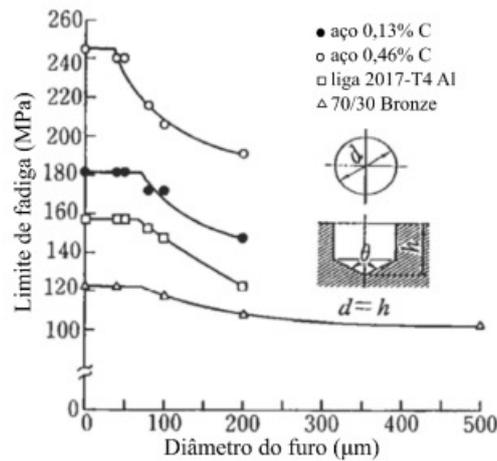


Figura 17 – Comportamento do limite de fadiga em função do aumento do diâmetro do micro-defeito. Adaptado de Murakami (2002).

No intuito de contabilizar a influência de micro-defeitos no limite de fadiga de um determinado material Murakami e Endo (1986) e Murakami (2002) propuseram o parâmetro \sqrt{area} , a partir do qual é possível determinar o limite de fadiga de um elemento que contém micro-defeitos em sua estrutura.

2.6.1 Parâmetro \sqrt{area}

O parâmetro geométrico \sqrt{area} (MURAKAMI; ENDO, 1986; MURAKAMI, 2002), foi criado com o intuito de auxiliar na avaliação da influência dos micro-defeitos na resistência a fadiga de materiais de interesse da engenharia, sendo definido como a raiz quadrada da área obtida pela projeção do micro-defeito no plano perpendicular ao plano de máxima tensão principal. A ilustração presente na Figura 18 tem o intuito de proporcionar uma melhor compreensão da definição de tal parâmetro.

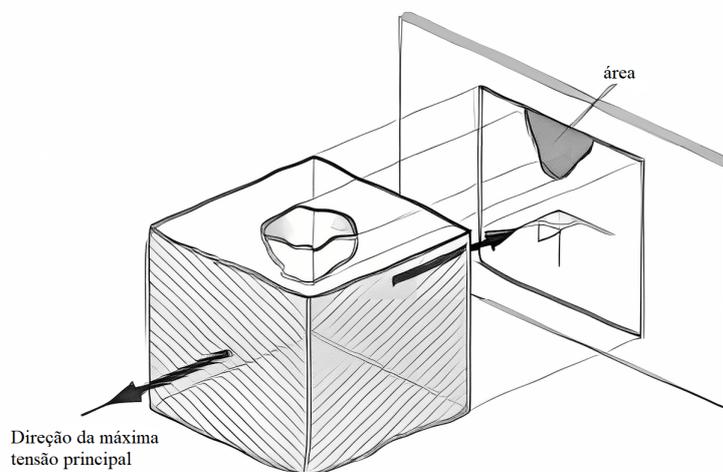


Figura 18 – Representação esquemática da definição do parâmetro \sqrt{area} . Adaptado de Susmel (2008).

Murakami e Endo (1986) e Murakami (2002) propuseram uma forma de estimar o limite de fadiga nominal para carregamentos axiais totalmente alternados (σ_w) de materiais que contenham pequenos defeitos na superfície, utilizando apenas o parâmetro \sqrt{area} e a dureza Vickers do material ($H\nu$). Tal proposta foi sintetizada na elaboração da Equação 2.59:

$$\sigma_w = \frac{1,43 (H\nu + 120)}{(\sqrt{area})^{1/6}} \quad (2.59)$$

Inspirados na Equação 2.59 Yanase e Endo (2014a) propuseram a Equação 2.60 para que se pudesse estimar o limite de fadiga sob torção totalmente revertida (τ_w) de materiais que contenham micro-defeitos na superfície.

$$\tau_w = \frac{1,21 (H\nu + 120)}{(\sqrt{area})^{1/6}} \quad (2.60)$$

Como a dureza Vickers ($H\nu$) de um determinado material é facilmente obtida através de um teste de dureza, o único empecilho que dificulta a obtenção dos limites de fadiga σ_w e τ_w é justamente a determinação do parâmetro \sqrt{area} . Pois se o defeito que está presente na superfície do elemento tem origem artificial, o cálculo do parâmetro \sqrt{area} é facilmente realizado. Entretanto, em materiais naturalmente defeituosos onde há a presença de inclusões não metálicas de vários tamanhos e formas, o cálculo do parâmetro \sqrt{area} não é uma tarefa trivial, neste caso, faz-se o uso do método de estatísticas dos extremos para a determinação do parâmetro \sqrt{area} do maior defeito que se espera encontrar num volume de material analisado. O parâmetro \sqrt{area} do maior defeito é evidenciado como \sqrt{area}_{max} , logo para se determinar os limites de fadiga σ_w e τ_w de materiais que apresentem defeitos naturais em sua superfície, como ilustrado na Figura 19(a), pode-se utilizar as Equações 2.61 e 2.62:

$$\sigma_w = \frac{1,43 (H\nu + 120)}{(\sqrt{area}_{max})^{1/6}} \quad (2.61)$$

$$\tau_w = \frac{1,21 (H\nu + 120)}{(\sqrt{area}_{max})^{1/6}} \quad (2.62)$$

Se o material apresentar inclusões não metálicas subsuperficiais, como ilustrado na Figura 19(b), os limites de fadiga σ_w e τ_w podem ser determinados pelo uso das Equações 2.63 e 2.64:

$$\sigma_w = \frac{1,41 (H\nu + 120)}{(\sqrt{area}_{max})^{1/6}} \quad (2.63)$$

$$\tau_w = \frac{1,19 (H\nu + 120)}{(\sqrt{area}_{max})^{1/6}} \quad (2.64)$$

Entretanto, se as inclusões estiverem localizadas no interior do material, como ilustrado na Figura 19(c), os limites de fadiga σ_w e τ_w são obtidos pelas Equações 2.65 e 2.66:

$$\sigma_w = \frac{1,56 (H\nu + 120)}{(\sqrt{area_{max}})^{1/6}} \quad (2.65)$$

$$\tau_w = \frac{1,32 (H\nu + 120)}{(\sqrt{area_{max}})^{1/6}} \quad (2.66)$$

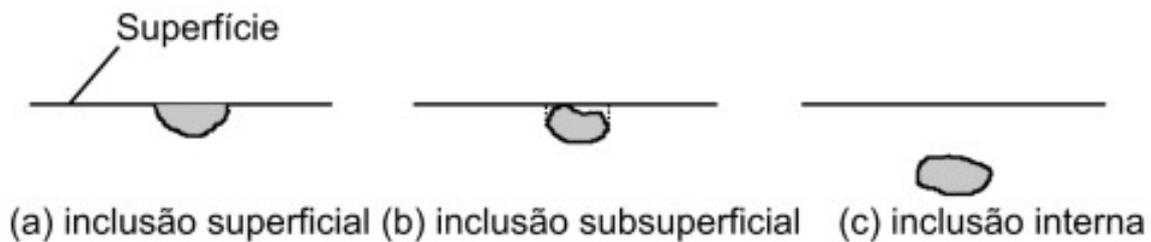


Figura 19 – Possíveis posicionamentos das inclusões não metálicas.

2.6.1.1 Processo de determinação do parâmetro $\sqrt{area_{max}}$

A metodologia utilizada na determinação do parâmetro $\sqrt{area_{max}}$ faz uso da teoria estatística dos valores extremos para estimar qual é o maior defeito natural presente no material. Tal método é constituído pelas seguintes etapas:

- **Etapa 1:** Uma amostra perpendicular à direção da máxima tensão principal deve ser retirada do elemento a ser analisado. Tal amostra deve ser polida com o uso de um conjunto de lixas que vão até a N^o 2000. Após o termino do processo de polimento com as lixas, deve-se utilizar alumina de $0,3 \mu m$ para produzir um acabamento espelhado na superfície da amostra.
- **Etapa 2:** Uma área de inspeção padrão (S_0) deve ser adotada, onde tal área pode ser igual a área de visualização do microscópio. Em seguida, deve-se selecionar a maior inclusão contida na área S_0 e a raiz quadrada de sua área projetada deve ser calculada. Este procedimento deve ser repetido n vezes em diferentes áreas próximas da extremidade da amostra. O procedimento descrito nesta etapa está ilustrada na Figura 20.
- **Etapa 3:** Os valores de $\sqrt{area_{max}}$ registrados na etapa anterior devem ordenados em ordem crescente e indexados com um subíndice $j = 1, \dots, n$.
- **Etapa 4:** Aplica-se a função de distribuição cumulativa F_j (%) utilizando os parâmetros n e j , sendo também necessário determinar as variáveis reduzidas y_j para o

mesmo par (n, j) . Os termos citados nesta etapa são calculados pelas Equações 2.67 e 2.68:

$$F_j = \frac{j}{n+1} \times 100 \quad (2.67)$$

$$y_j = -\ln \left[-\ln \left(\frac{j}{n+1} \right) \right] \quad (2.68)$$

- **Etapa 5:** Os dados gerados na etapa anterior são plotados num gráfico de probabilidade de distribuição de valor extremo, sendo que no eixo x é indicado os valores de $\sqrt{area_{max,j}}$ e no eixo y são apresentadas as variáveis reduzidas y_j e a distribuição cumulativa.
- **Etapa 6:** Deve-se descartar a faixa de dados relacionada a função de distribuição que apresenta $F_j < 10\%$ e $F_j > 85\%$, caso não haja linearidade nessa faixa, contanto que o numero de medições n permaneça maior ou igual a 40.
- **Etapa 7:** A regressão linear da distribuição do tamanho máximo de inclusões pode ser expressa pela Equação 2.69:

$$\sqrt{area_{max}} = ay + b \quad (2.69)$$

Sendo que:

$$y = -\ln \left[-\ln \left(\frac{T-1}{T} \right) \right] \quad (2.70)$$

Onde T é o valor de retorno para a varável reduzida, em função do volume de previsão.

- **Etapa 8:** Para se definir o valor de retorno, é necessário transformar a área de inspeção num volume de inspeção V_0 , pois o parâmetro $\sqrt{area_{max}}$ depende do volume da área de inspeção, sendo este volume definido pela Equação 2.71:

$$V_0 = S_0 h \quad (2.71)$$

Onde o termo h se refere a espessura da área S_0 e é definido como o valor médio das medidas de $\sqrt{area_{max,j}}$, dado pela equação 2.72:

$$h = \frac{\sum_j^n \sqrt{area_{max,j}}}{n} \quad (2.72)$$

Portanto, o valor de retorno T é definido pela Equação 2.73:

$$T = \frac{V}{V_0} \quad (2.73)$$

Onde, V é o volume útil da amostra analisada.

- **Etapa 9:** Com o valor de retorno T , obter a previsão do parâmetro $\sqrt{area_{max}}$ a partir do procedimento descrito na etapa 7, e a distribuição da probabilidade de existência de tal inclusão na etapa 4.

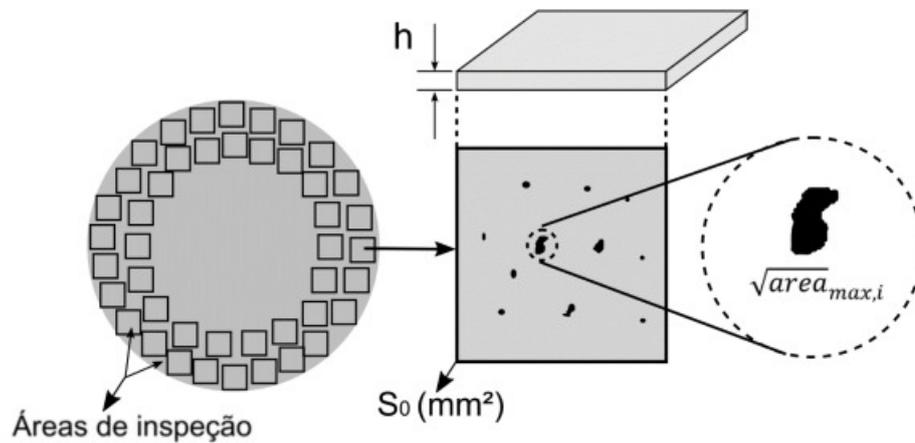


Figura 20 – Método de determinação do parâmetro $\sqrt{area_{max}}$ na amostra de área S_0 . Adaptado de Araujo (2020).

3 Metodologia

Nas seções anteriores foram apresentados vários conceitos relacionados a modelagem de problemas que envolvem fadiga uniaxial e multiaxial, sendo que o segundo caso teve mais destaque devido a ocorrência deste fenômeno em aplicações de grande interesse econômico. Para tanto, discutiu-se modelos de plano crítico baseados em tensões, métodos utilizados na determinação da amplitude da tensão cisalhante e o parâmetro \sqrt{area} (MURAKAMI, 2002). Logo, o intuito do presente trabalho é utilizar a teoria de plano crítico através do modelo MWCM adaptado com o parâmetro \sqrt{area} para avaliar o dano por fadiga em uma aço AISI 4140, sendo este um material naturalmente defeituoso, onde a contribuição mais relevante será o uso do Método da Máxima Variância para estimar a amplitude da tensão cisalhante de modo a encontrar a amplitude máxima que caracterize o plano crítico. Para tanto, as seguintes etapas serão executadas:

- **Etapa 1:** Utilização do parâmetro \sqrt{area} do material analisado, sendo que este foi determinado por Machado et al. (2020), para calibrar o modelo MWCM, onde tal abordagem torna o modelo de plano crítico sensível a presença de micro defeitos, como por exemplo, inclusões não metálicos;
- **Etapa 2:** Utilizar o Método da Máxima Variância para computar a amplitude da tensão cisalhante (τ_a), de modo a encontrar a amplitude máxima (τ_a^{max}) que caracterize o plano crítico, contabilizando também a influência da máxima tensão normal ($\sigma_{n,max}$);
- **Etapa 3:** Aplicar os parâmetros descritos nas etapas 1 e 2 no modelo MWCM para avaliar o dano por fadiga decorrente da presença de micro-defeitos;
- **Etapa 4:** Comparar os resultados obtidos com os presentes na literatura para avaliação e validação da metodologia utilizada.

4 Resultados

Nesta seção, serão apresentados os resultados esperados com base em dados presentes na literatura, sendo que o presente trabalho utilizará os dados disponibilizados no artigo de Machado et al. (2020) como parâmetro de avaliação dos resultados obtidos. Também serão expostos os resultados obtidos com a utilização do método da Máxima Variância e os parâmetros alcançados serão utilizados na análise do modelo MWCM calibrado com o $\sqrt{\text{área}}$ de Murakami e Endo (1986). Conjuntamente será feita a comparação da eficiência computacional do MMV com o MRH, no intuito de verificar qual apresenta o melhor desempenho.

4.1 Dados da literatura

Machado et al. (2020) estudaram o dano por fadiga no aço AISI 4140 na presença de micro-defeitos utilizando os modelos de plano crítico de Findley (1959) e MWCM (SUSMEL; LAZZARIN, 2002), calibrados tanto com o parâmetro $\sqrt{\text{área}}$ (MURAKAMI, 2002) como a partir de dados experimentais, sendo que a amplitude da tensão cisalhante (τ_a) foi determinada a partir do Método da Maior Envoltória Retangular (ARAÚJO et al., 2011; MAMIYA; CASTRO; ARAÚJO, 2014). Para calibrar o modelo MWCM é necessário determinar as constantes k_A e λ_A por meio das equações 2.30 e 2.31, para tanto é necessário que se determine os limites de fadiga do material. A contribuição feita por Machado et al. (2020) foi justamente utilizar os limites de fadiga de materiais que continham micro defeitos proposto por Murakami (2002) para calibrar as constantes k_A e λ_A e comparar os resultados com os obtidos pelo uso de ensaios experimentais de fadiga.

O material analisado no presente estudo foi o aço AISI 4140, temperado a óleo e revenido a 600 °C, cujas propriedades mecânicas estão apresentadas na Tabela 2. Como descrito anteriormente, estudos acerca da resistência a fadiga deste material são de grande interesse da indústria, pois os mesmos são utilizados na fabricação de eixos virabrequins com aplicações na área de geração de energia térmica e no setor de transporte rodoviário.

Tabela 2 – Propriedades mecânicas do aço AISI 4140.

Tensão de Escoamento (MPa)	Limite de Resistência a Tração (MPa)	Alongamento (%)	Dureza Vickers
710	900	20	320

4.1.1 Limites de fadiga experimentais

Os limites de fadiga obtidos experimentalmente, com o uso do método da escada modificado, para o aço AISI 4140 contendo apenas inclusões não metálicas em sua estrutura são apresentados na Tabela 3.

Tabela 3 – Limites de fadiga do aço AISI 4140 obtidos experimentalmente (MACHADO et al., 2020).

σ_{-1} (MPa)	τ_{-1} (MPa)	Intervalo de confiança
375	282	90%

As Figuras 21 e 22 apresentam as curvas S-N e T-N geradas a partir dos dados obtidos nos ensaios de tração-compressão e torção alternada, respectivamente, realizados para determinação do limites de fadiga apresentados na Tabela 3:

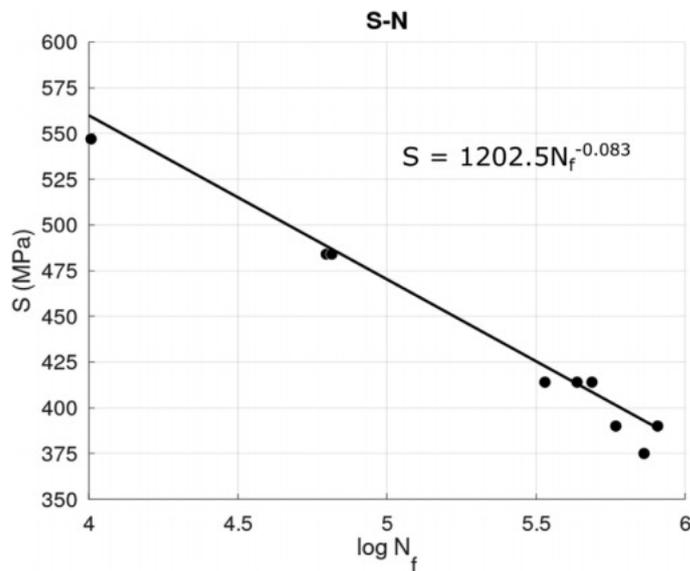


Figura 21 – Curva S-N do aço AISI 4140 obtida experimentalmente. Adaptado de Machado et al. (2020)

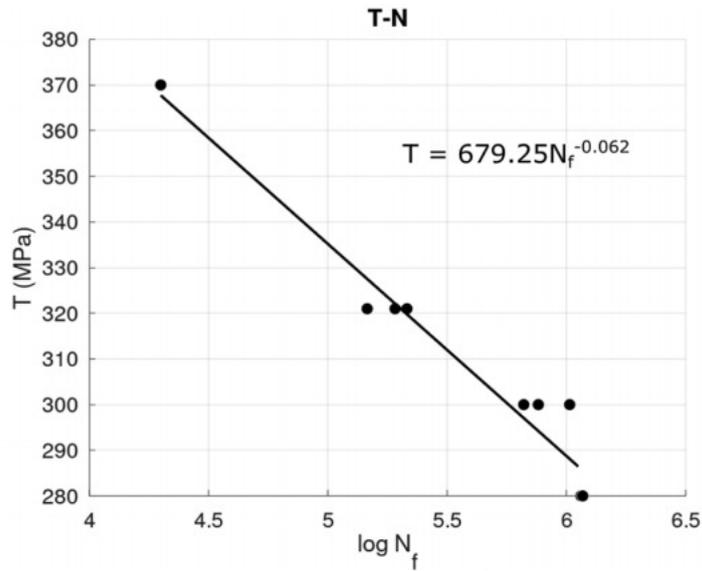


Figura 22 – Curva T-N do aço AISI 4140 obtida experimentalmente. Adaptado de Machado et al. (2020)

Os parâmetros experimentais utilizados nos ensaios de tração-compressão e torção alternada, assim como o número de ciclos de cada ensaio realizado para determinação dos limites de fadiga são apresentados nas Tabela 4 e 5.

Tabela 4 – Resultados dos ensaios de tração-compressão utilizados na elaboração da curva S-N da Figura 21.

Número de ensaios	Amplitude de tensão $\sigma_{xx,a}$ (MPa)	Número de ciclos até a falha (N_f)
1	547	10.167
2	484	62.560
3	484	65.230
4	414	338.148
5	414	433.329
6	414	486.296
7	390	807.115
8	390	584.601
9	390	run-out
10	375	726.900
11	375	run-out

Os corpos de prova utilizados nos ensaios foram produzidos a partir de amostras de um eixo virabrequim que falhou por fadiga durante a operação, sendo que os CP's foram fabricados com uma geometria padrão cujas dimensões são apresentadas na Figura 23. Foram utilizadas duas máquinas nos ensaios de fadiga, sendo estas dos modelos MTS - 810

Tabela 5 – Resultados dos ensaios de torção alternada utilizados na elaboração da curva T-N da Figura 22.

Número de ensaios	Amplitude de tensão $\tau_{xy,a}$ (MPa)	Número de ciclos até a falha (N_f)
1	370	19.884
2	320	213.990
3	320	145776
4	320	190.806
5	300	760.193
6	300	660.321
7	300	1.028.658
8	300	run-out
9	280	1.146.823
10	230	run-out

Material test system capaz de aplicar tração-compressão e MTS – 809 Axial/torsional test system apta para testes de tração-compressão e torção. Durante os ensaios a temperatura ambiente do laboratório permaneceu dentro da faixa entre 20 e 23 °C e as frequências utilizadas ficaram no intervalo de 5 a 15 Hz dependendo do nível de carga. Todos os testes foram realizados com controle de carga com ondas senoidais totalmente alternadas, $R = -1$, com histórias de tensão dadas pelas equações 4.1 e 4.2:

$$\sigma_{xx}(t) = \sigma_{xx,a} \sin(\omega t) \quad (4.1)$$

$$\tau_{xy}(t) = \tau_{xy,a} \sin(\omega t + \delta) \quad (4.2)$$

Onde $\sigma_{xx,a}$ e $\tau_{xy,a}$ correspondem as amplitudes das tensões normal e cisalhantes, respectivamente, t é o tempo, ω a frequência angular, e δ o ângulo de fase entre os carregamentos.

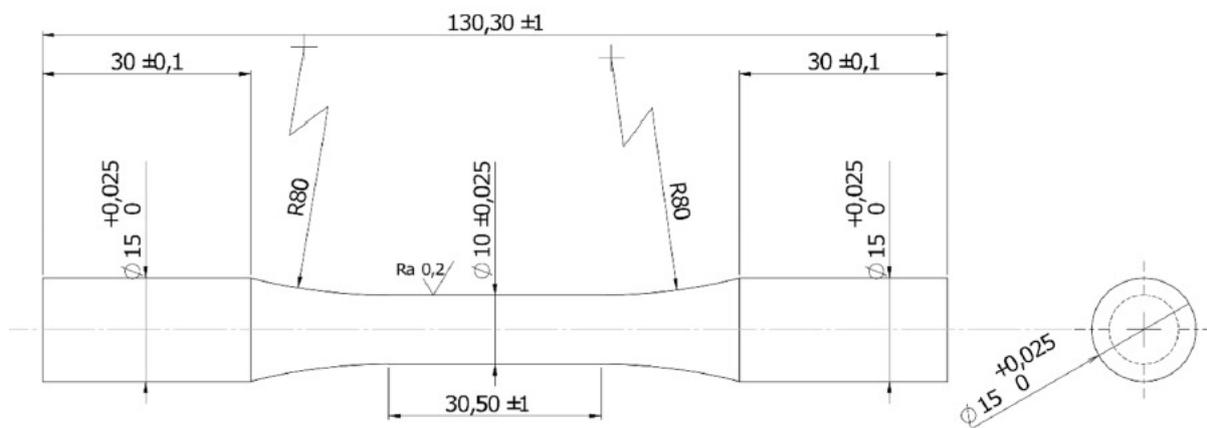


Figura 23 – Geometria e dimensões dos corpos de prova utilizados nos ensaios experimentais, com dimensões em mm.

4.1.2 Limites de fadiga obtidos a partir do uso do parâmetro \sqrt{area}

Em seu artigo, Machado et al. (2020) determinou o parâmetro \sqrt{area}_{max} de duas amostras cortadas em planos distintos, sendo uma num plano a 90° do eixo longitudinal do corpo de prova e a outra a 45° graus. Após a aplicação da metodologia descrita na seção 2.6.1 determinou-se o \sqrt{area}_{max} de ambas as amostras, sendo que os resultados estão na Tabela 6:

Tabela 6 – Parâmetro \sqrt{area}_{max} determinado com o uso do método da estatística dos extremos (MACHADO et al., 2020).

Plano de corte	\sqrt{area}_{max} (μm)
90°	145
45°	121

Aplicando o parâmetro \sqrt{area}_{max} estimado nas equações 2.65 e 2.66 obteve-se os limites de fadiga contabilizando os efeitos sobre a resistência do material provocado pela existência de inclusões não metálicas no interior do material. Tais limites estão listados na Tabela 7:

Tabela 7 – Limites de fadiga obtidos pelo uso do parâmetro \sqrt{area}_{max} de Murakami (2002).

σ_w (MPa)	τ_w (MPa)
270	235

4.1.3 Desempenho do modelo

No intuito de avaliar e validar o modelo MWCM calibrado com os limites de fadiga da Tabela 7, Machado et al. (2020) realizaram ensaios de fadiga multiaxial cujos resultados estão apresentados na Figura 24 juntamente com o diagrama da amplitude de tensão cisalhante (τ_a) contra o parâmetro ρ determinados pelo critério MWCM. A região abaixo da linha contínua delimita uma zona segura contra falha por fadiga, logo é esperado que estados de tensão cuja combinação de τ_a com ρ que forneçam pontos abaixo da linha contínua não falhem, já combinações que resultem em pontos acima da linha devem provocar a fratura. A posição da linha contínua é influenciada pelos limites de fadiga do material. Bandas de erro de 20% são representadas pelas linhas pontilhadas.

Os ensaios foram realizados com corpos de prova de mesma geometria e dimensões do ilustrado na Figura 23, utilizando a máquina do modelo MTS – 809 Axial/torsional test system, com condições ambientais semelhantes as dos ensaios de torção e tração-compressão.

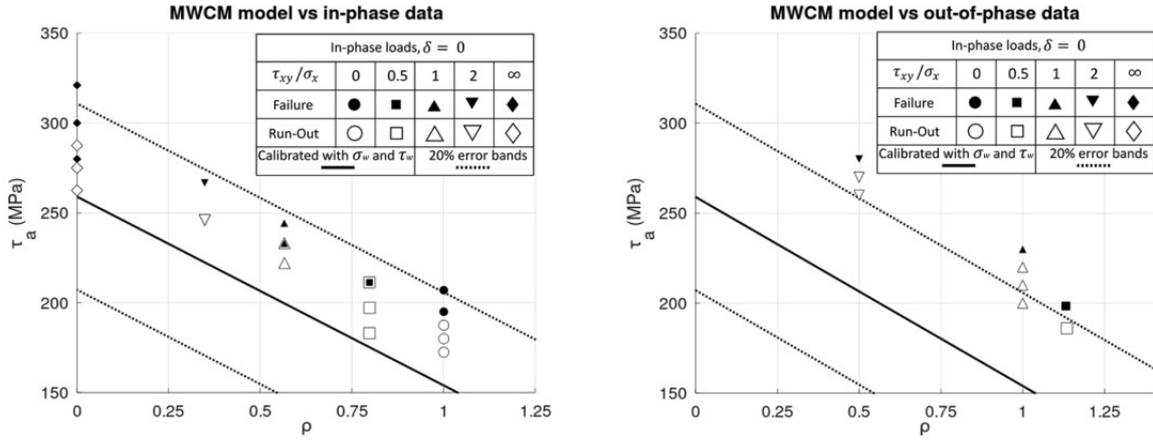


Figura 24 – Resultados obtidos com o modelo multiaxial MWCM calibrado com o parâmetro \sqrt{area} . Adaptado de Machado et al. (2020).

Na construção do modelo apresentado na Figura 24, os valores de tensão cisalhante críticos τ_a^c e de tensão normal máxima $\sigma_{n,max}$ determinados com o método da caixa para cada nível de carregamento aplicado são apresentados na Tabela 8 para casos em fase, e na Tabela 9 para casos fora de fase.

Tabela 8 – Amplitudes de tensões nos planos críticos para diferentes níveis de carregamentos obtidos com o uso do Método da Caixa.

Ensaio	$\sigma_{xx,a}$	$\tau_{xy,a}$	$\tau_{xy,a} / \sigma_{xx,a}$	τ_a^c	$\sigma_{n,max}$	N_f
1	414	0	0	207	207	486.296
2	390	0	0	195	195	Run-out
3	390	0	0	195	195	584.601
4	375	0	0	188	188	726.900
5	375	0	0	188	188	Run-out
6	300	150	0,5	211	176	1.649.870
7	300	150	0,5	211	176	Run-out
8	280	140	0,5	197	164	Run-out
9	260	130	0,5	182	152	Run-out
10	220	220	1	244	142	332.449
11	220	220	1	244	142	1.363.493
12	210	210	1	233	135	Run-out
13	210	210	1	233	135	477.573
14	200	200	1	222	129	Run-out
15	130	260	2	265	102	535.059
16	130	260	2	265	102	535.304
17	120	240	2	245	95	Run-out
18	120	240	2	245	95	Run-out
19	0	320	∞	320	0	213.990
20	0	300	∞	300	0	660.321
21	0	300	∞	300	0	Run-out
22	0	280	∞	280	0	1.166.978
23	0	230	∞	230	0	Run-out

Tabela 9 – Amplitude das tensões atuantes nos planos críticos, determinadas com o Método da Caixa, em diferentes razões de carregamentos combinados com ângulo de fase de 90°.

<i>Ensaio</i>	$\sigma_{xx,a}$	$\tau_{xy,a}$	$\tau_{xy,a}/\sigma_{xx,a}$	τ_a^c	$\sigma_{n,max}$	N_f
1	320	160	0,5	198	225	750.695
2	320	160	0,5	198	225	352.444
3	300	150	0,5	186	211	Run-out
4	300	150	0,5	186	211	733.995
5	230	230	1	230	230	771.198
6	230	230	1	230	230	1.649.979
7	220	220	1	220	220	Run-out
8	210	210	1	210	210	Run-out
9	200	200	1	200	200	Run-out
10	140	280	2	277	144	1.039.328
11	140	280	2	277	144	261.442
12	135	270	2	267	138	Run-out
13	130	260	2	267	133	Run-out

4.2 Dados obtidos

4.2.1 Carregamento em fase

O processo de busca pelos planos críticos em casos de carregamentos simples totalmente alternados de tração - compressão e também de torção foi executado com a utilização do MMV, proposto pelos pesquisadores Ferreira et al. (2022), combinado com o modelo de falha MWCM (SUSMEL; LAZZARIN, 2002), sendo que esta estratégia também foi aplicada em casos de carregamentos em fase de tração/compressão combinados com torção totalmente alternada. As amplitudes das tensões cisalhantes críticas, τ_a^c , e das tensões normais máximas, $\sigma_{n,max}$, determinadas nos planos mais propensos ao surgimento de defeitos para cada nível de carregamento estão apresentados na Tabela 10.

Ao compararmos os níveis de tensão atuantes nos planos críticos apresentados nas Tabelas 10 e 8, temos que em casos de carregamento simples o Método da Máxima Variância e o Método da Caixa apresentam as mesmas amplitudes de tensões. Já em casos de carregamentos combinados em fase, temos que o MMV apresentou uma amplitude normal máxima correspondente a 85% das determinadas pelo MRH, entretanto as amplitudes de τ_a^c não apresentaram diferenças significativas, e o índice de erro médio foi de 22%, logo os dois métodos apresentam aproximadamente os mesmos níveis de tensão atuando no plano crítico.

Resta agora avaliar a eficiência computacional entre os dois métodos, na tabela 11 são apresentados os tempos de processamento necessário para cada metodologia identificar o plano mais propenso a falhar em casos de carregamentos em fase. O MMV se mostrou mais rápido em todos os ensaios, sendo que na média esta técnica levou 3, 65% do tempo de processamento que o MRH utilizou para realizar a busca pelos mesmos parâmetros.

Tabela 10 – Amplitudes de tensões nos planos críticos para diferentes níveis de carregamentos obtidos com o uso do MMV para histórias de carregamento em fase.

Ensaio	$\sigma_{xx,a}$	$\tau_{xy,a}$	$\tau_{xy,a} / \sigma_{xx,a}$	τ_a^c	$\sigma_{n,max}$	N_f
1	414	0	0	207	207	486.296
2	390	0	0	195	195	Run-out
3	390	0	0	195	195	584.601
4	375	0	0	188	188	726.900
5	375	0	0	188	188	Run-out
6	300	150	0,5	212	161	1.649.870
7	300	150	0,5	212	161	Run-out
8	280	140	0,5	198	150	Run-out
9	260	130	0,5	184	139	Run-out
10	220	220	1	246	121	332.449
11	220	220	1	246	121	1.363.493
12	210	210	1	235	116	Run-out
13	210	210	1	235	116	477.573
14	200	200	1	223	110	Run-out
15	130	260	2	268	75	535.059
16	130	260	2	268	75	535.304
17	120	240	2	247	69	Run-out
18	120	240	2	247	69	Run-out
19	0	320	∞	320	0	213.990
20	0	300	∞	300	0	660.321
21	0	300	∞	300	0	Run-out
22	0	280	∞	280	0	1.166.978
23	0	230	∞	230	0	Run-out

Tabela 11 – Tempo de processamento (em segundos) dos dois métodos de determinação de plano crítico.

Ensaio	Tempo de Processamento	
	MMV	MRH
1	0,89	24,17
2	0,73	21,24
3	0,73	21,24
4	0,84	22,29
5	0,84	23,04
6	0,88	20,97
7	0,88	20,97
8	0,68	21,64
9	0,62	20,05
10	0,78	20,71
11	0,78	20,71
12	0,84	21,181
13	0,84	21,181
14	0,43	20,57
15	0,79	19,26
16	0,79	19,26
17	0,75	21,92
18	0,75	21,92
19	0,51	21,21
20	0,77	20,24
21	0,77	20,24
22	0,82	20,84
23	0,23	20,51

4.2.2 Carregamento fora de fase

Nesta seção será apresentado a amplitude da tensão cisalhantes critica τ_a^c e a amplitude da tensão normal máxima $\sigma_{n,max}$ determinadas pelo MMV para diferentes razões de carregamentos combinados (tração-compressão combinado com torção, ambos totalmente alternados) com um ângulo de fase de 90° . Sendo que tais grandezas são apresentadas na Tabela 12. Comparando os níveis de solicitação apresentados nas Tabelas 9 e 12, temos que o MMV apresentou uma amplitude de tensão cisalhante critica (τ_a^c) 2,79% maior, em média, que as apresentadas pelo MRH e uma tensão normal máxima ($\sigma_{n,max}$) 3,30% menor, também na média, sendo que o índice de erro médio foi de 34%. Quando ao tempo de processamento, ao analisar a Tabela 13 temos que o MMV se mostrou mais eficiente em todas as razões de carregamento, levando em média 2,66% do tempo que o método MRH precisou para determinar as amplitudes atuantes no plano crítico.

Tabela 12 – Amplitude das tensões atuantes nos planos críticos, determinadas com o MMV, em diferentes razões de carregamentos combinados com ângulo de fase de 90° .

<i>Ensaio</i>	$\sigma_{xx,a}$	$\tau_{xy,a}$	$\tau_{xy,a}/\sigma_{xx,a}$	τ_a^c	$\sigma_{n,max}$	N_f
1	320	160	0,5	202	209	750.695
2	320	160	0,5	202	209	352.444
3	300	150	0,5	190	196	Run-out
4	300	150	0,5	190	196	733.995
5	230	230	1	237	229	771.198
6	230	230	1	227	219	1.649.979
7	220	220	1	227	219	Run-out
8	210	210	1	215	210	Run-out
9	200	200	1	206	200	Run-out
10	140	280	2	289	140	1.039.328
11	140	280	2	289	140	261.442
12	135	270	2	278	135	Run-out
13	130	260	2	268	130	Run-out

Tabela 13 – Tempo de processamento (em segundos) do Método da Máxima Variância e do Método da Caixa.

Ensaio	Tempo de Processamento	
	MMV	MRH
1	0,79	20,18
2	0,79	20,18
3	0,30	21,75
4	0,30	21,75
5	0,43	21,21
6	0,51	21,21
7	0,51	20,22
8	0,40	20,52
9	0,35	21,32
10	0,85	21,28
11	0,85	21,28
12	0,76	21,25
13	0,47	24,66

4.2.3 Planos críticos e avaliação do modelo

Os ângulos de Euler utilizados para caracterizar os planos críticos determinados pelo MMV são apresentados nas Tabelas 14, 15 e 16, onde é possível observar que os dois métodos encontraram os mesmos planos para as mesmas razões de carregamento, o que já era esperado, pois ambos utilizam o mesmo critério que define o plano mais propenso a iniciação de trincas.

Tabela 14 – Planos críticos para carregamentos simples de tração-compressão e torção.

$\tau_{xy,a}/\sigma_{xx,a}$	0	∞
Plano crítico utilizando MRH (θ, ϕ)	$0^\circ, 135^\circ$	$0^\circ, 90^\circ$
Plano crítico utilizando MMV (θ, ϕ)	$0^\circ, 135^\circ$	$0^\circ, 90^\circ$

Tabela 15 – Planos críticos para carregamentos combinados em fase.

$\tau_{xy,a}/\sigma_{xx,a}$	0,5	1	2
Plano crítico utilizando MRH (θ, ϕ)	$161^\circ, 90^\circ$	$73^\circ, 90^\circ$	$177^\circ, 90^\circ$
Plano crítico utilizando MMV (θ, ϕ)	$161^\circ, 90^\circ$	$73^\circ, 90^\circ$	$177^\circ, 90^\circ$

Tabela 16 – Planos críticos para carregamentos combinados fora de fase.

$\tau_{xy,a}/\sigma_{xx,a}$	0,5	1	2
Plano crítico utilizando MRH (θ, ϕ)	$0^\circ, 57^\circ$	$0^\circ, 90^\circ$	$0^\circ, 90^\circ$
Plano crítico utilizando MMV (θ, ϕ)	$0^\circ, 54^\circ$	$0^\circ, 90^\circ$	$0^\circ, 90^\circ$

Para avaliação e validação do modelo MWCM calibrado com \sqrt{area} , construiu-se um diagrama τ_a vs ρ , como apresentado nas Figuras 25 e 26, onde a linha contínua separa a região segura da de falha, sendo assim, os estados de tensão que geram uma combinação de τ_a e ρ que resulte num ponto abaixo da linha contínua não deve levar o material a falhar por fadiga, já as linhas pontilhadas representam as bandas de erro de 30% . As amplitudes das tensões dos pontos experimentais foram determinadas pelo Método da Máxima Variância (FERREIRA et al., 2022).

Na Figura 25 é ilustrado o comportamento do modelo para casos de carregamento constante, sendo possível observar que nenhum corpo de prova falhou dentro da região segura o que indica a validade do modelo proposto. Ao analisar a Figura 26 que aborda o caso de carregamentos fora de fase, temos um comportamento semelhante, porém mais conservativo, já que nenhum corpo de prova falhou dentro da banda de erro superior.

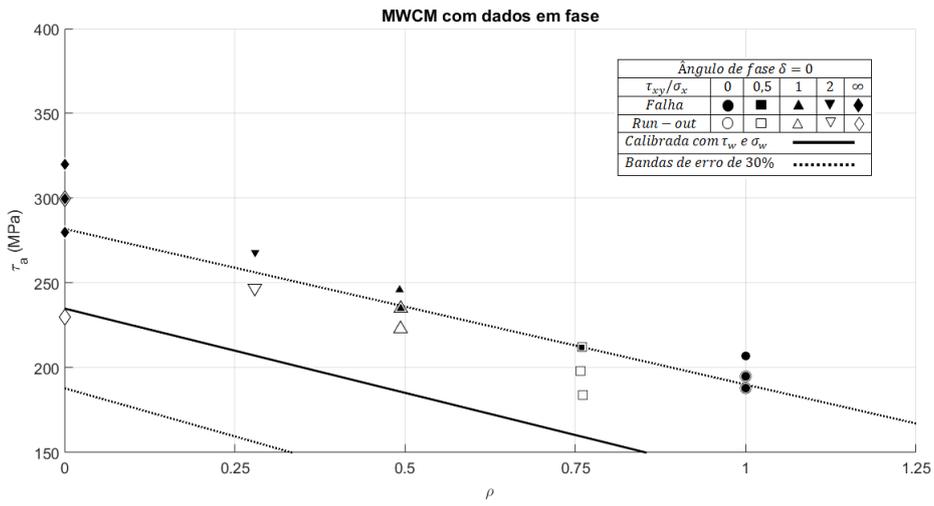


Figura 25 – Comportamento do modelo para carregamentos em fase.

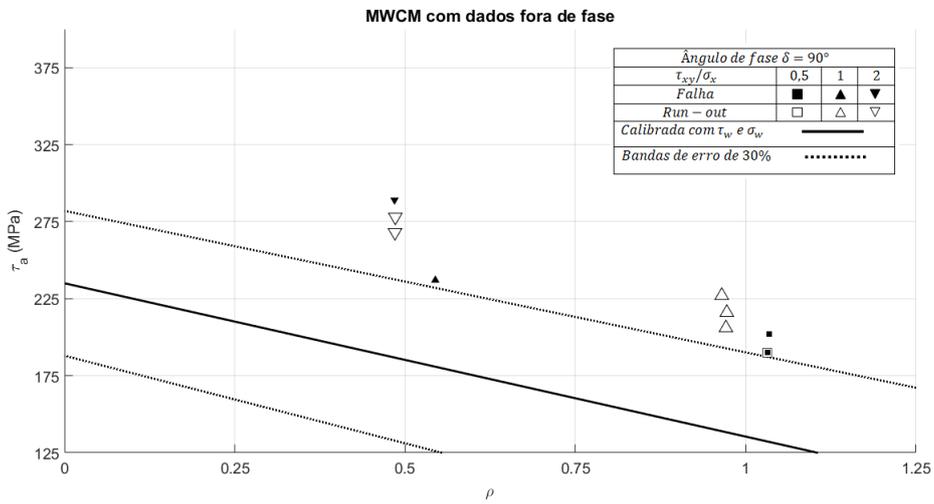


Figura 26 – Comportamento do modelo para carregamentos fora de fase.

5 Conclusões

Neste projeto de graduação, foi proposto a utilização do Método da Máxima Variância na busca de planos críticos para aplicação do modelo MWCM calibrado com o parâmetro $\sqrt{\text{área}}$ de modo a estimar o dano por fadiga multiaxial em materiais com micro-defeitos. A utilização do modelo MWCM calibrado com $\sqrt{\text{área}}$ para avaliar a influência de micro-defeitos na resistência a fadiga de materiais naturalmente defeituosos foi proposto pelos pesquisadores Araújo et al. (2011), entretanto, as ferramentas adotadas na determinação dos planos críticos apresentam algumas limitações, como custo computacional bastante elevado e impossibilidade de analisar casos de carregamentos aleatórios. Portanto, o objetivo deste trabalho foi apresentar uma ferramenta alternativa de busca de plano crítico capaz de aumentar a eficiência computacional do modelo, além expandir a aplicabilidade da metodologia para casos de carregamentos aleatórios, sendo que ao final da análise dos resultados obtidos foi possível obter as seguintes conclusões:

- O Método da Máxima Variância possui um tempo de processamento muito menor que o Método da Maior Envoltória Retangular, logo seu uso aumenta a eficiência computacional do modelo;
- O MMV e o MRH fornecem aproximadamente as mesmas amplitudes de tensão crítica para o mesmo carregamento;
- Os dois métodos selecionam os mesmos planos críticos quando estão sendo utilizados com o mesmo modelo de plano;
- Aplicar modelo MWCM calibrado com $\sqrt{\text{área}}$ em conjunto com o MMV aumenta a abrangência da metodologia, pois o torna aplicável em casos de carregamento aleatório com um baixo custo computacional;

Referências

ARAÚJO, J.; DANTAS, A.; CASTRO, F.; MAMIYA, E.; FERREIRA, J. On the characterization of the critical plane with a simple and fast alternative measure of the shear stress amplitude in multiaxial fatigue. *International Journal of Fatigue*, Elsevier, v. 33, n. 8, p. 1092–1100, 2011. Citado 7 vezes nas páginas iii, iv, 3, 20, 21, 34, and 45.

ARAÚJO, L. C. Adaptação de modelos de plano crítico para projeto contra fadiga multiaxial de material internamente defeituoso e na presença de micro-defeitos artificiais. *Dissertação de mestrado*, ENM.DM-07/2020, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de Brasília, DF, 73 p., 2020. Citado 7 vezes nas páginas v, vi, 2, 14, 15, 22, and 32.

ASTM. *Standard Terminology Relating to Fatigue and Fracture Testing*. Philadelphia: Annual Book Of Standards, 1996. Citado na página 6.

BEDKOWSKI, W.; MACHA, E. *Fatigue Criterion of the Maximum Strain in the Direction Perpendicular to a Fracture Plane: The Expected Fatigue Failure Planes Under Random Triaxial State of Stress*:(spine Title: *Fatigue Fracture Plane for Multiaxial Random Loadings*). [S.l.]: VDI-Verlag, 1985. Citado na página 23.

CARPINTERI, A.; SPAGNOLI, A. Multiaxial high-cycle fatigue criterion for hard metals. *International Journal of Fatigue*, Elsevier, v. 23, n. 2, p. 135–145, 2001. Citado na página 18.

CASTRO, F.; MAMIYA, E.; BEMFICA, C. A critical plane criterion to multiaxial fatigue of metals containing small defects. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, Springer, v. 43, n. 11, p. 517, 2021. Citado na página 4.

DANTAS, A. *Proposta alternativa para cálculo da amplitude da tensão cisalhante e uso de algoritmos genéticos para determinação do plano crítico em fadiga multiaxial*. Tese (Doutorado) — PhD thesis, 2009.[in portuguese], 2009. Citado 4 vezes nas páginas v, 3, 11, and 12.

DIRLIK, T. *Application of computers in fatigue analysis*. Tese (Doutorado) — University of Warwick, 1985. Citado na página 23.

DOWLING, N. *Comportamento Mecânico dos Materiais - Análise de engenharia aplicada a deformação, fratura e fadiga*. Brasil: Editora LTC, 2013. Citado 5 vezes nas páginas v, 2, 6, 7, and 8.

DUSTRE. *Aço 4140: Propriedades, Características e composição*. 2022. Data de acesso: 29/12/2023. Disponível em: <<https://dustre.com.br/aco-4140/>>. Citado na página 2.

ENDO, M.; ISHIMOTO, I. The fatigue strength of steels containing small holes under out-of-phase combined loading. *International journal of fatigue*, Elsevier, v. 28, n. 5-6, p. 592–597, 2006. Citado 2 vezes nas páginas 4 and 27.

EPE. *Matriz Energética e Elétrica*. 2022. Data de acesso: 28/12/2023. Disponível em: <<https://www.epe.gov.br/pt/abcdenergia/matriz-energetica-e-eletrica>>. Citado na página 1.

FADEL, A. A. Avaliação do efeito de tracionamento em elevados níveis de eds sobre a resistência em fadiga do condutor ibis (caa 397,5 mcm). *Dissertação de doutorado*, ENM.DM-005/2010, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de Brasília, DF, 185 p., 2010. Citado 2 vezes nas páginas v and 7.

FATEMI, A.; SOCIE, D. F. A critical plane approach to multiaxial fatigue damage including out-of-phase loading. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, Wiley Online Library, v. 11, n. 3, p. 149–165, 1988. Citado na página 4.

FERREIRA, J.; DIAS, J.; CARDOSO, E.; ARAÚJO, J.; SILVA, C. da. A contribution to the identification of the critical plane using the maximum variance method. *International Journal of Fatigue*, Elsevier, v. 165, p. 107228, 2022. Citado 7 vezes nas páginas iii, iv, v, 5, 24, 40, and 43.

FINDLEY, W. N. A theory for the effect of mean stress on fatigue of metals under combined torsion and axial load or bending. *Journal of Engineering for Industry*, American Society of Mechanical Engineers, v. 81, n. 4, p. 301–305, 1959. Citado 3 vezes nas páginas 4, 18, and 34.

GARCIA, A.; SPIM, J. A.; SANTOS, C. A. *Ensaaios dos Materiais*. Rio de Janeiro: LTC, 2000. Citado na página 6.

GOUGH, H. J.; POLLARD, H.; CLENSHAW, W. Some experiments on the resistance of metals to fatigue under combined stresses. 1951. Citado na página 3.

KENT, J.; BIBBY, J.; MARDIA, K. *Multivariate analysis (probability and mathematical statistics)*. [S.l.]: Elsevier Amsterdam, 2006. Citado na página 25.

MACHADO, P. V. S.; ARAUJO, L. C.; SOARES, M. V.; REIS, L.; ARAUJO, J. A. Multiaxial fatigue assessment of steels with non-metallic inclusions by means of adapted critical plane criteria. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, Elsevier, v. 108, p. 102585, 2020. Citado 13 vezes nas páginas iii, iv, vi, vii, 2, 4, 5, 33, 34, 35, 36, 38, and 39.

MAMIYA, E.; CASTRO, F.; ARAÚJO, J. Recent developments on multiaxial fatigue: The contribution of the university of brasília. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, Elsevier, v. 73, p. 48–59, 2014. Citado 4 vezes nas páginas 3, 4, 21, and 34.

MATAKE, T. An explanation on fatigue limit under combined stress. *Bulletin of JSME*, The Japan Society of Mechanical Engineers, v. 20, n. 141, p. 257–263, 1977. Citado na página 18.

MCDIARMID, D. L. A shear stress based critical-plane criterion of multiaxial fatigue failure for design and life prediction. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, Wiley Online Library, v. 17, n. 12, p. 1475–1484, 1994. Citado na página 19.

MEGGIOLARO, M. A.; CASTRO, J. T. P. de. The moment of inertia method to calculate equivalent ranges in non-proportional tension–torsion histories. *Journal of Materials Research and Technology*, Elsevier, v. 4, n. 3, p. 229–234, 2015. Citado 3 vezes nas páginas iii, iv, and 3.

MURAKAMI, Y. Inclusion rating by statistics of extreme values and its application to fatigue strength prediction and quality control of materials. *Journal of Research-National Institute of Standards and Technology*, UNITED STATES DEPT OF COMMERCE NIST, v. 99, p. 345–345, 1994. Citado na página 27.

MURAKAMI, Y. Metal fatigue: Effects of small defects and nonmetallic inclusions,” elsevier science ltd. uk. *New York*, 2002. Citado 14 vezes nas páginas iii, iv, v, vii, 2, 4, 5, 17, 27, 28, 29, 33, 34, and 38.

MURAKAMI, Y. Material defects as the basis of fatigue design. *International Journal of Fatigue*, Elsevier, v. 41, p. 2–10, 2012. Citado na página 2.

MURAKAMI, Y.; ENDO, M. Effects of hardness and crack geometries on ΔK_{th} of small cracks emanating from small defects. 1986. Citado 5 vezes nas páginas 2, 4, 28, 29, and 34.

NADOT, Y.; BILLAudeau, T. Multiaxial fatigue limit criterion for defective materials. *Engineering fracture mechanics*, Elsevier, v. 73, n. 1, p. 112–133, 2006. Citado 2 vezes nas páginas 4 and 27.

PAPADOPOULOS, I. V. Critical plane approaches in high-cycle fatigue: on the definition of the amplitude and mean value of the shear stress acting on the critical plane. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, Wiley Online Library, v. 21, n. 3, p. 269–285, 1998. Citado 2 vezes nas páginas 3 and 21.

PAPADOPOULOS, I. V.; DAVOLI, P.; GORLA, C.; FILIPPINI, M.; BERNASCONI, A. A comparative study of multiaxial high-cycle fatigue criteria for metals. *International Journal of Fatigue*, Elsevier, v. 19, n. 3, p. 219–235, 1997. Citado na página 3.

PETRUCCI, G. A critical assessment of methods for the determination of the shear stress amplitude in multiaxial fatigue criteria belonging to critical plane class. *International Journal of Fatigue*, Elsevier, v. 74, p. 119–131, 2015. Citado na página 21.

RENCHER, A.; CHRISTENSEN, W. *Methods of multivariate analysis.*—john wiley & sons, inc. 2012. Citado na página 25.

RICE, S. O. Mathematical analysis of random noise. *The Bell System Technical Journal*, Nokia Bell Labs, v. 23, n. 3, p. 282–332, 1944. Citado na página 23.

SINES, G. Behaviour of metals under complex stresses. metal fatigue. *New York: McGraw-Hill*, p. 145–69, 1959. Citado na página 3.

SOCIE, D.; MARQUIS, G. Multiaxial fatigue, sae international, society of automotive engineers. *Inc, Warrendale, Pennsylvania*, 2000. Citado na página 3.

SUSMEL, L. The theory of critical distances: a review of its applications in fatigue. *Engineering Fracture Mechanics*, Elsevier, v. 75, n. 7, p. 1706–1724, 2008. Citado 2 vezes nas páginas vi and 28.

SUSMEL, L. A simple and efficient numerical algorithm to determine the orientation of the critical plane in multiaxial fatigue problems. *International Journal of Fatigue*, Elsevier, v. 32, n. 11, p. 1875–1883, 2010. Citado na página 23.

SUSMEL, L.; LAZZARIN, P. A bi-parametric wöhler curve for high cycle multiaxial fatigue assessment. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, Wiley Online Library, v. 25, n. 1, p. 63–78, 2002. Citado 7 vezes nas páginas iii, iv, 4, 5, 19, 34, and 40.

WIRSCHING, P. Fatigue reliability in welded joints of offshore structures. *International Journal of Fatigue*, Elsevier, v. 2, n. 2, p. 77–83, 1980. Citado na página 23.

YANASE, K.; ENDO, M. Multiaxial high cycle fatigue threshold with small defects and cracks. *Engineering Fracture Mechanics*, Elsevier, v. 123, p. 182–196, 2014. Citado na página 29.

YANASE, K.; ENDO, M. Prediction for multiaxial fatigue strength with small defects. In: EDP SCIENCES. *MATEC Web of Conferences*. [S.l.], 2014. v. 12, p. 08002. Citado na página 4.

ZHAO, W.; BAKER, M. J. On the probability density function of rainflow stress range for stationary gaussian processes. *International Journal of Fatigue*, Elsevier, v. 14, n. 2, p. 121–135, 1992. Citado na página 23.