



Universidade de Brasília - UnB
Faculdade UnB Gama - FGA
Engenharia Aeroespacial

**Análise de estabilidade aeroelástica dinâmica de
uma asa reta incluindo efeitos de rigidez não
linear cúbica.**

Autor: Lucas Pereira Resende
Orientadora: Polliana Candida Oliveira Martins,
Dra.(FGA/UnB)

Brasília, DF
2023



Lucas Pereira Resende

**Análise de estabilidade aeroelástica dinâmica de uma asa
reta incluindo efeitos de rigidez não linear cúbica.**

Monografia submetida ao curso de graduação
em Engenharia Aeroespacial da Universidade
de Brasília, como requisito parcial para ob-
tenção do Título de Bacharel em Engenharia
Aeroespacial.

Universidade de Brasília - UnB

Faculdade UnB Gama - FGA

Orientador: Polliana Candida Oliveira Martins, Dra.(FGA/UnB)

Brasília, DF

2023

Lucas Pereira Resende

Análise de estabilidade aeroelástica dinâmica de uma asa reta incluindo efeitos de rigidez não linear cúbica. / Lucas Pereira Resende. – Brasília, DF, 2023-
101 p. : il. (algumas color.) ; 30 cm.

Orientadora: Polliana Candida Oliveira Martins, Dra.(FGA/UnB)

Trabalho de Conclusão de Curso – Universidade de Brasília - UnB
Faculdade UnB Gama - FGA , 2023.

1. Aeroelasticidade. 2. Não Linearidades. I. Rigidez não linear. II. Universidade de Brasília. III. Faculdade UnB Gama. IV. Análise de estabilidade aeroelástica dinâmica de uma asa reta incluindo efeitos de rigidez não linear cúbica.

CDU 02:141:005.6

Lucas Pereira Resende

Análise de estabilidade aeroelástica dinâmica de uma asa reta incluindo efeitos de rigidez não linear cúbica.

Monografia submetida ao curso de graduação em Engenharia Aeroespacial da Universidade de Brasília, como requisito parcial para obtenção do Título de Bacharel em Engenharia Aeroespacial.

Polliana Candida Oliveira Martins,
Dra.(FGA/UnB)
Orientadora

Guilherme Ribeiro Begnini,
Dr.(UFBA)
Convidado 1

Sérgio Henrique Silva Carneiro,
Dr.(UnB/FGA)
Convidado 2

Brasília, DF
2023

Agradecimentos

Venho expressar minha profunda gratidão a toda a minha família, que sempre esteve ao meu lado, apoiando-me e sendo um pilar fundamental nos momentos mais desafiadores. Em especial, gostaria de agradecer aos meus pais, Anselmo e Mônica, e ao meu irmão, Matheus, assim como às minhas avós, Ana e Antonieta. Cada um deles foi participante direto em todas as minhas conquistas, oferecendo seu carinho e suporte incondicional.

Também sou grato aos meus queridos amigos, que sempre me deram o apoio necessário nos momentos difíceis da vida. Alexandre e Sérgio, companheiros de longa data, têm estado ao meu lado desde tempos imemoriais, sempre prontos para me ouvir e aconselhar, tanto nos momentos de adversidade quanto de felicidade.

Ao meu amigo e parceiro de graduação, João Vitor, agradeço por compartilhar comigo as dificuldades pessoais e profissionais enfrentadas durante a faculdade.

Minha gratidão também se estende aos meus professores, verdadeiros guias e mentores, que contribuíram significativamente para a minha formação profissional. Em particular, quero destacar a professora Polliana Cândida Oliveira Martins, que gentilmente me acolheu quando, sem aviso prévio, solicitei iniciar um projeto de última hora, o qual se transformou rapidamente em meu TCC.

A todos os meus primos, que sempre estiveram presentes em todas as ocasiões, transmitindo-me um sentimento de acolhimento nos momentos mais solitários e trazendo sorrisos aos momentos de tristeza, sou profundamente grato.

A todos vocês, minha família, amigos, professores, o meu mais sincero obrigado por fazerem parte da minha vida e tornarem cada instante memorável e especial.

Resumo

Aeroelasticidade trata do estudo da interação entre a dinâmica estrutural e as forças aerodinâmicas que agem em um corpo, sendo crucial para a segurança, desempenho e eficiência de veículos aeroespaciais. Alguns fenômenos aeroelásticos, se não forem tratados adequadamente, podem causar deformações estruturais que podem levar à falha estrutural ou perda de desempenho. Nesse contexto, a importância da consideração de efeitos não lineares no estudo da aeroelasticidade tornou-se mais evidente com o avanço dos sistemas aeroespaciais, que são cada vez mais leves e com geometrias desafiadoras. Sendo assim, esse estudo propõe a análise dos efeitos de não linearidades estruturais do tipo rigidez cúbica em um modelo aeroelástico de asa reta retangular com três modos de vibração (flexão, torção e torção de superfície de controle). O modelo foi analisado da forma clássica linear no domínio da frequência, utilizando a solução por autovalores para o cálculo da velocidade crítica de *flutter*. Utilizou-se o modelo de asa reta de Wiright e Cooper junto com o modelo aerodinâmico de faixas utilizando a simplificação de Hancock. A velocidade crítica foi calculada e confrontada com os resultados de referências bibliográficas. Passou-se então para a análise no domínio temporal utilizado o método de integração de Runge-Kutta de 4ª ordem para integração das equações do movimento e visualização das amplitudes de oscilação dos graus de liberdade tratados. Foi então construído o modelo não linear no domínio do tempo, por meio da inserção de uma não linearidade estrutural (rigidez cúbica) na rigidez do modelo. Foram avaliadas presenças de não linearidades nas rigidezes dos três graus de liberdade. Com base na análise dos resultados, pode-se observar que com a inserção da rigidez cúbica no modo de torção da asa, houve um aumento do amortecimento na situação de velocidade crítica do modelo linear. Vários coeficientes de não linearidade foram testados, e as respostas foram comparadas com o caso linear, a fim de evidenciar a diferença nos valores tratados e a importância da inclusão de comportamento não linear para evidenciamento de LCOs e comportamentos críticos.

Palavras-chaves: Aeroelasticidade, *flutter*, não linearidades, rigidez cúbica, LCO (Oscilação de Ciclo Limite).

Abstract

Aeroelasticity deals with the study of the interaction between structural dynamics and aerodynamic forces acting on a body, being crucial for the safety, performance, and efficiency of aerospace vehicles. Some aeroelastic phenomena, if not adequately addressed, can cause structural deformations that may lead to structural failure or performance loss. In this context, the importance of considering nonlinear effects in the study of aeroelasticity has become more evident with the advancement of aerospace systems, which are increasingly lighter and have challenging geometries. Thus, this study proposes the analysis of the effects of structural nonlinearities, specifically cubic stiffness, in aeroelastic model of a straight rectangular wing with three modes of vibration (bending, torsion, and control surface torsion). The model was initially analyzed in the classical linear frequency domain using the eigenvalue solution to calculate the critical flutter velocity. The straight wing model and the aerodynamic strip model were employed, utilizing the Hancock simplification. The critical velocity was calculated and compared with reference literature results. The analysis then transitioned to the time domain using the fourth-order Runge-Kutta integration method to integrate the equations of motion and visualize the oscillation amplitudes of the treated degrees of freedom. Subsequently, the nonlinear model was constructed in the time domain by introducing a structural nonlinearity (cubic stiffness) into the model's stiffness. Nonlinearities in the stiffness of all three degrees of freedom were evaluated.

Based on the analysis of the results, it was observed that the insertion of cubic stiffness in the wing's torsional mode resulted in increased damping at the critical velocity of the linear model. Various nonlinear coefficients were tested, and the responses were compared with the linear case to highlight the differences in the treated values and the importance of including nonlinear behavior to reveal limit cycle oscillations (LCOs) and critical behaviors.

Key-words: Aeroelasticity, flutter, nonlinearities, cubic stiffness, LCO (Limit Cycle Oscillations).

Lista de ilustrações

Figura 1 – Diagrama de Collar. Fonte: Collar (1946)	22
Figura 2 – Bombardeiro Hadley-Page. Fonte The United Kingdom Government . .	23
Figura 3 – Avião F-111C. Fonte: U.S. Air Force	24
Figura 4 – Sistema massa mola de um grau de liberdade. Fonte: Inman (2014) . .	29
Figura 5 – Sistema massa mola de dois graus de liberdade. Fonte: Wright e Cooper (2015)	31
Figura 6 – Aerofólio com forças de sustentação, arrasto e momento	33
Figura 7 – Aerofólio com movimento translacional e rotacional. Fonte Wright e Cooper (2015)	35
Figura 8 – Aerofólio com superfície de controle. Fonte: Shukla e Patil (2017) . . .	38
Figura 9 – Comportamento de uma mola linear e não linear com adição e subtra- ção de rigidez. Fonte Sharma (2005)	41
Figura 10 – Modelo binário de asa retangular com superfície de controle. Fonte: Wright e Cooper (2015)	43
Figura 11 – Fluxograma dos processos utilizados no estudo.	47
Figura 12 – Gráfico v-g-f para determinação da velocidade de <i>flutter</i>	49
Figura 13 – Deslocamento pelo tempo dos três modos	50
Figura 14 – Gráfico v-g-f. Fonte: Wright e Cooper (2015)	55
Figura 15 – Amplitudes máximas para variação de velocidade com $k_{\theta_3} = 0.001$. . .	58
Figura 16 – Deslocamentos no tempo para $V = 119.5$ m/s	59
Figura 17 – Velocidade pelo deslocamento para $V = 119.5$ m/s	60
Figura 18 – Amplitudes máximas para variação de velocidade com $k_{\theta_3} = 0.002$. . .	61
Figura 19 – Deslocamentos no tempo para $V = 118.85$ m/s	62
Figura 20 – Velocidade pelo deslocamento para $V = 118.85$ m/s	62
Figura 21 – Amplitudes máximas para variação de velocidade com $k_{\theta_3} = 0.003$. . .	63
Figura 22 – Deslocamentos no tempo para $V = 115.5$ m/s	64
Figura 23 – Amplitudes máximas para variação de velocidade do modelo linear . . .	65
Figura 24 – Deslocamentos no tempo para $V = 117.5$ m/s	66
Figura 25 – Amplitudes máximas para variação de velocidade para $k_{\beta_3} = 0.0005$. .	67
Figura 26 – Deslocamentos no tempo para $V = 106$ m/s	68
Figura 27 – Comparação entre modelos para $V = 106$ m/s	68
Figura 28 – Amplitudes máximas para variação de velocidade para $k_{\beta_3} = 0.001$. .	69
Figura 29 – Deslocamentos no tempo para $V = 82$ m/s	70
Figura 30 – Comparação entre modelos para $V = 82$ m/s	70
Figura 31 – Deslocamentos no tempo para $V = 94$ m/s	71
Figura 32 – Comparação entre modelos para $V = 94$ m/s	72

Figura 33 – Amplitudes máximas para variação de velocidade para $k_{\beta 3} = 0.001$. . .	73
Figura 34 – Deslocamentos no tempo para $V = 113$ m/s	74
Figura 35 – Comparação entre modelos para $V = 113$ m/s	74
Figura 36 – Deslocamentos no tempo para $x(0) = 0.1$ m	76
Figura 37 – Comparação entre modelos para $x(0) = 1$ m	76
Figura 38 – Velocidade pelo deslocamento em z para $V = 119.5$ m/s	85
Figura 39 – Velocidade pelo deslocamento em β para $V = 119.5$ m/s	86
Figura 40 – Velocidade pelo deslocamento em z para $V = 118.8$ m/s	86
Figura 41 – Velocidade pelo deslocamento em β para $V = 118.8$ m/s	87
Figura 42 – Velocidade pelo deslocamento em z para $V = 115.5$ m/s	87
Figura 43 – Velocidade pelo deslocamento em θ para $V = 115.5$ m/s	88
Figura 44 – Velocidade pelo deslocamento em β para $V = 115.5$ m/s	88

Lista de tabelas

Tabela 1 – Dados do modelo utilizado	48
Tabela 2 – Coeficientes de não linearidade e velocidades de <i>flutter</i> no modo de torção	64
Tabela 3 – Coeficientes de não linearidade e velocidades de <i>flutter</i> no modo de torção da superfície de controle	71
Tabela 4 – Coeficientes de não linearidade e velocidades de <i>flutter</i> no modo de flexão	75

Lista de abreviaturas e siglas

LCO	Oscilação de ciclo limite
V-g-f	Velocidade, amortecimento e frequência

Lista de símbolos

a_a, b_a, c_a	Coefficientes aerodinâmicos relacionados a asa
a_{sc}, b_{sc}, c_{sc}	Coefficientes aerodinâmicos relacionados a superfície de controle
A	Matriz de massa
B	Matriz de amortecimento aerodinâmico
C	Matriz de rigidez aerodinâmica
c	Corda do aerofólio [m]
c_l, c_m, c_d	Coefficientes de sustentação, momento e arrasto para um aerofólio
D	Matriz de amortecimento estrutural
E	Matriz de rigidez estrutural
E_c	Taxa da corda equivalente à superfície de controle [m]
i	Imaginário puro
k	Frequência reduzida
k_z, k_θ, k_β	Rigidez na vertical [N/m], rigidez de torção [N/rad] e rigidez de torção da superfície de controle [N/rad]
$K_{z3}, k_{\theta3}, k_{\beta3}$	Rigidez cúbicas na vertical [N/m], rigidez de torção [N/rad] e rigidez de torção da superfície de controle [N/rad]
m, m_a, m_{sc}	Massa, massa da asa e massa da superfície de controle por unidade de área [kg/m ²]
n	Número de modos
p_∞	Pressão dinâmica
q	Vetor de coordenadas generalizadas
s	Semi-envergadura da asa
t	Tempo
x_{ac}, x_f, x_h	Posição do eixo aerodinâmico, eixo elástico e posição da superfície de controle [m]

z	Deslocamento vertical [m]
$C(k)$	Função de Theodorsen
C_L, C_M, C_D	Coeficientes de sustentação, momento e arrasto para uma asa
D, L, M	Forças de Arrasto, sustentação e momento [N]
E, G	Módulo de elasticidade e torsional [Pa]
EI, GJ	Rigidez a flexão e a torção [N m^2]
M_∞	Número de Mach
Re	Número de Reynolds
T	Energia cinética [J]
U	Energia Potencial [J]
V	Velocidade de escoamento [m/s]
x	Vetor de deslocamentos

Símbolos Gregos

α	Ângulo de ataque [rad]
δ	Incremento
ρ	Densidade do ar [kg/m^3]
ω	Frequência natural [rad/s]
θ, β	Graus de liberdade de torção da asa e da superfície de controle [rad]
λ	Autovalor

Sumário

1	INTRODUÇÃO	21
1.1	Contextualização e Motivação	21
1.2	Objetivos	25
1.3	Metodologia	26
1.4	Organização do Trabalho	27
2	REFERENCIAL TEÓRICO	29
2.1	Vibrações de Sistemas Dinâmicos	29
2.1.1	Vibrações excitadas por uma força harmônica	29
2.1.2	Vibrações de sistemas de mais de um grau de liberdade	30
2.2	Aerodinâmica	32
2.2.1	Aerodinâmica Estacionária	32
2.2.2	Aerodinâmica Não Estacionária para um Aerofólio Oscilando Harmonicamente	33
2.2.3	Teoria das faixas	37
2.2.4	Superfícies de Controle	37
2.3	Modelo Não Linear	38
2.3.1	Introdução à Não linearidades	39
2.3.2	Inclusão de Rigidez Não Linear	40
2.3.2.1	Modelo matemático não linear	41
2.4	Modelo de asa reta com uma superfície de controle	42
3	METODOLOGIA	47
3.1	Fluxograma	47
3.2	Solução Linear no domínio da frequência	48
3.3	Solução Linear e não linear no Domínio do Tempo	49
4	RESULTADOS	51
4.1	Solução no Domínio da Frequência	51
4.1.1	Solução por Autovalores e Autovetores	51
4.1.2	Método k	52
4.1.3	Método p-k	53
4.1.4	Diagramas V-g-f	54
4.2	Solução no Domínio do tempo	55
4.2.1	Adição de não linearidades	55
4.2.2	Método de Runge Kutta	56
4.2.2.1	Runge-Kutta de quarta ordem	57

4.2.3	Solução para a rigidez cúbica no modo de torção	58
4.2.4	Solução para a rigidez cúbica no modo de torção da Superfície de controle .	65
4.2.5	Solução para a rigidez cúbica no modo de flexão	72
4.2.6	Alteração das condições iniciais	75
5	CONCLUSÃO	79
	REFERÊNCIAS	81
	APÊNDICES	83
	APÊNDICE A – GRAFICOS	85
A.1	Não linearidade no modo de torção	85
	APÊNDICE B – CÓDIGOS MATLAB®	89

1 Introdução

1.1 Contextualização e Motivação

Desde os primeiros voos controlados no século XX, os engenheiros e projetistas têm enfrentado desafios relacionados a iteração entre as forças aerodinâmicas e a flexibilidade estrutural das aeronaves. Percebeu-se que a flexibilidade das asas podia causar oscilações indesejáveis, que poderiam comprometer a estabilidade e a segurança das aeronaves. O ramo da ciência aeronáutica conhecido como aeroelasticidade, trata justamente das iterações entre as forças inerciais, elásticas e aerodinâmicas (BISPLINGHOFF; ASHLEY; HALFMAN, 1996). É um campo de estudo relativamente recente. Foi estudado como tal há um pouco mais de um século, quando Roxbee Cox e Pugsley, após seu trabalho pioneiro sobre perda e reversão do controle de aileron e sobre a capacidade de rolamento de um monoplano, iniciaram uma correlação desses estudos com as investigações sobre *flutter* (COLLAR, 1946).

Collar (1977) dizia que quando há um aumento na carga aerodinâmica que causa uma deformação na estrutura de tal forma que essa deformação amplifica ainda mais a carga aerodinâmica, temos um problema aeroelástico. Os fenômenos aeroelásticos são comumente classificados em estáticos e dinâmicos. Quando as forças aerodinâmicas e elásticas são analisadas em conjunto, surgem problemas relacionados à aeroelasticidade estática, como a divergência, em que o momento de arfagem devido ao escoamento aerodinâmico excede a rigidez torsional da asa. Um outro problema importante é a Reversão de Controle, que ocorre quando as forças de controle aplicadas são anuladas ou têm um efeito oposto ao esperado devido às deformações elásticas na estrutura. Além disso, há o problema da distribuição de cargas, onde a elasticidade da estrutura influencia a distribuição das forças aerodinâmicas.

Quando as forças inerciais, elásticas e aerodinâmicas interagem simultaneamente, originam-se fenômenos de aeroelasticidade dinâmica, como o *buffeting* e o *flutter*. O *buffeting* é uma excitação causada pelas esteiras de escoamento provenientes das asas, motores e fuselagem, que geram flutuações aerodinâmicas e causam vibrações transientes na estrutura da aeronave, especialmente no estabilizador vertical. É comum em aeronaves militares que voam em condições de velocidades e ângulos de ataque elevados, gerando esteiras de grande magnitude (ABZUG; LARABEE, 2017).

Para um melhor entendimento das forças envolvidas na aeroelasticidade e seus efeitos, utilizaremos o diagrama de Collar, ilustrado na Figura 1. Collar (1946) descreve as forças aerodinâmicas, elásticas e inerciais como A, E e I, respectivamente. A reversão

de controle (R) e a divergência (D) também estão indicados, bem como o *flutter* (F) e o *buffeting* (B).

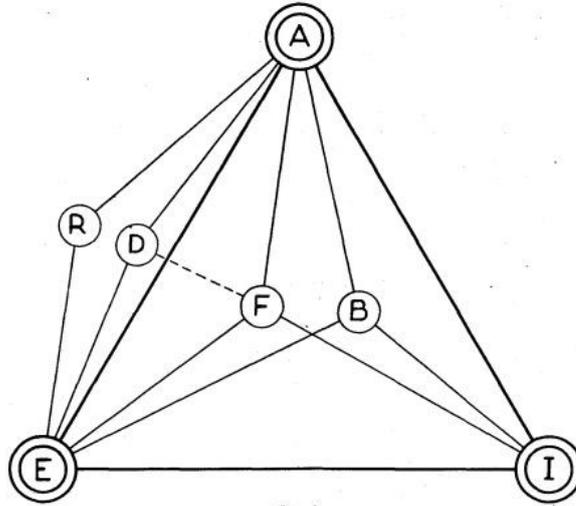


Figura 1 – Diagrama de Collar. Fonte: Collar (1946)

Dentre os fenômenos estudados em aeroelasticidade, destaca-se o *flutter*. Hodges e Pierce (2002) definem o *flutter* como sendo uma instabilidade dinâmica de um veículo aéreo associado com a interação entre as forças aerodinâmicas, inerciais e elásticas. Segundo Bisplinghoff, Ashley e Halfman (1996) o *flutter* é uma instabilidade dinâmica de um corpo elástico imerso em um fluxo de ar e é comumente observado em corpos submetidos a grandes cargas aerodinâmicas, como aerofólios e asa de aeronaves.

O fenômeno de *flutter* é considerado o problema aeroelástico dinâmico mais importante e é amplamente estudado na área de aeroelasticidade, devido seu alto potencial catastrófico (MARTINS et al., 2022) (FUNG, 1969). O *flutter* é uma oscilação autoexcitada e potencialmente prejudicial que ocorre quando as forças aerodinâmicas interagem com a estrutura da aeronave de uma maneira instável. Essas oscilações podem crescer rapidamente e podem levar a danos ou falhas estruturais se não forem controladas adequadamente. O *flutter* ocorre tipicamente em velocidades próximas ou acima da chamada velocidade crítica do *flutter*, onde as forças aerodinâmicas e a inércia estrutural interagem de forma acentuada (WRIGHT; COOPER, 2015).

No decorrer do século passado, houveram vários casos históricos de *flutter*, um fenômeno aeroelástico preocupante que afetou aeronaves e chamou a atenção dos engenheiros aeroespaciais. No início do século XX, o engenheiro Frederick Lanchester (COLLAR; SIMPSON, 1987b) iniciou os estudos na área da aeroelasticidade, analisando o fenômeno do *flutter* que ocorria em um biplano bombardeiro Handley-Page (Figura 2). Ele procurou descrever matematicamente esse fenômeno e desenvolver soluções para minimizar os efeitos aeroelásticos que afetavam a estrutura da aeronave. O trabalho pioneiro de Lan-

chester (COLLAR; SIMPSON, 1987b) estabeleceu as bases para o estudo e compreensão dos fenômenos aeroelásticos, que se tornariam fundamentais no projeto e desenvolvimento de aeronaves seguras e eficientes.



Figura 2 – Bombardeiro Hadley-Page. Fonte The United Kingdom Government

Em seguida, tivemos o caso do F-111C (Figura 3) que foi uma ocorrência significativa na história da aviação. O F-111C era uma variante do avião de ataque estratégico F-111 desenvolvido pela *General Dynamics* nos Estados Unidos, mas foi adquirido e utilizado pela Força Aérea Australiana. Durante o desenvolvimento e a fase inicial de operação do F-111C na década de 1970, foram observados problemas de *flutter*, que é um fenômeno aeroelástico caracterizado por oscilações indesejadas e autossustentadas na estrutura da aeronave (BISPLINGHOFF; ASHLEY; HALFMAN, 1996). Para resolver esse problema, foram necessárias modificações e melhorias no projeto do F-111C. Os engenheiros realizaram estudos aprofundados para entender as causas do *flutter* e implementaram mudanças no perfil da asa, adicionaram dispositivos de controle e ajustaram a rigidez estrutural para minimizar os efeitos aeroelásticos.

Para prever e evitar, ainda em fase conceitual, que fenômenos aeroelásticos ocorram dentro do envelope de velocidades de operação, várias pesquisas tem sido desenvolvidas a fim de simular em ambiente computacional e experimental, modelos aeroelásticos que envolvem controle de alguma natureza.

O controle passivo de estruturas pode ser realizado por meio de diversas abordagens, como balanceamento de massa, modificação estrutural, incorporação de mecanismos de dissipação de energia e aumento da rigidez, entre outras. Essas propostas são atrativas, mas podem impactar negativamente o desempenho da aeronave, adicionando massa à estrutura e gerando complicações no processo de projeto. Para suprimir ativamente o fenômeno de flutter, é necessário o uso de sensores para detectar o movimento da superfície de controle e atuadores para agir conforme uma lei de controle pré-definida. A colocação



Figura 3 – Avião F-111C. Fonte: U.S. Air Force

adequada dos sensores e atuadores representa um desafio. Além disso, os custos de manutenção, montagem e operação são relativamente elevados, requerendo investimento em fontes de potência alternativas (MARTINS et al., 2022).

Ainda, há de se salientar que, com o avanço tecnológico em materiais de engenharia e leis de controle, eletrônica e sistemas, vários comportamentos que antes eram previstos linearmente passaram a apresentar comportamentos não lineares significativos. A grande maioria da literatura sobre aeroelasticidade é dedicada a modelos lineares. O trabalho teórico depende fortemente de conceitos matemáticos lineares, e os resultados experimentais são comumente interpretados assumindo que o modelo físico se comporta de maneira linear (DOWELL; ILGAMOV, 1988). Efeitos não lineares são frequentemente citados como uma possível explicação para qualquer diferença entre a teoria e o experimento. Muitas vezes, esses efeitos não lineares são pequenos, daí os grandes sucessos dos modelos lineares. No entanto, às vezes os efeitos não lineares são mais importantes e, ocasionalmente, são cruciais.

Efeitos não lineares na aeroelasticidade podem surgir tanto da aerodinâmica do fluxo quanto da estrutura elástica do aerofólio. Na aerodinâmica, fontes de não linearidade incluem a presença de choques em regimes de fluxo transônico e supersônico, assim como os efeitos de ângulo de ataque elevado, nos quais o fluxo se separa da superfície do aerofólio. Já as não linearidades estruturais são conhecidas por surgirem de folgas ou jogos nas superfícies de controle, atrito entre partes móveis e não linearidades contínuas na rigidez estrutural.(SHARMA, 2005).

A aeroelasticidade não linear é o estudo das interações entre as forças inerciais, elásticas e aerodinâmicas em estruturas de engenharia que estão expostas ao fluxo de ar e apresentam não linearidade não negligenciável. A dinâmica não linear é o campo de estudo das equações diferenciais ordinárias e parciais não lineares (DIMITRIADIS, 2017).

Ao contrário das equações diferenciais lineares, as equações não lineares não possuem soluções analíticas gerais e, em alguns casos, várias soluções diferentes podem coexistir nas mesmas condições de operação. Além disso, sistemas não lineares podem ter muito mais tipos de solução do que os sistemas lineares.

O principal fenômeno da aeroelasticidade não linear são as Oscilações de Ciclo Limite (*Limit Cycle Oscillation*, LCO), que são variações amortecidas do *flutter*. Elas também envolvem oscilações sustentadas da estrutura da aeronave. Embora sejam geralmente menos prejudiciais imediatamente, as LCOs podem causar fadiga na estrutura da aeronave e reduzir sua vida útil. Isso significa que a estrutura pode não resistir a variações que normalmente seria capaz de suportar. As LCOs podem ocorrer em velocidades abaixo da velocidade crítica do flutter. Geralmente, as LCOs são caracterizadas por oscilações periódicas com amplitudes limitadas, em contraste com o crescimento exponencial observado no *flutter*.

Considerando a relevância de investigar e compreender as implicações das não linearidades em fenômenos aeroelásticos, este estudo se dedica à abordagem desse desafio com o objetivo de estabelecer um modelo analítico que englobe as características não lineares. Essa abordagem visa aperfeiçoar a compreensão e predição de comportamentos complexos em sistemas aeroelásticos, os quais podem ser influenciados por fatores não lineares que anteriormente não eram considerados.

1.2 Objetivos

O objetivo principal deste trabalho é analisar o efeito de rigidez não linear cúbica no comportamento aeroelástico dinâmico de um modelo de asa reta, com três modos assumidos de vibração, flexão, rotação e rotação da superfície de controle. Para tanto, são definidos como objetivos específicos:

1. Análise e preparação de um modelo linear aeroelástico de asa reta engastada com uma superfície de controle fixada em seu bordo de fuga.
2. Implementação do modelo linear analítico desenvolvido e obtenção da solução do problema de *flutter* no domínio da frequência, em ambiente Matlab[®].
3. Implementação do modelo linear analítico desenvolvido e obtenção da solução do problema de *flutter* no domínio do tempo, via integração pelo método de Runge-Kutta de 4^a Ordem.
4. Análise e preparação de um modelo não linear com a adição de rigidez cúbica nos modos vibração de flexão, rotação e rotação da superfície de controle.

5. Implementação do modelo não linear analítico desenvolvido e obtenção da solução do problema de *flutter* no domínio do tempo, via integração pelo método de Runge-Kutta de 4ª Ordem.
6. Comparação dos resultados dos efeitos das não linearidades no domínio do tempo em termos de valores paramétricos relacionados as não linearidades consideradas.

1.3 Metodologia

Nesse trabalho foi proposto inicialmente um modelo de asa com três graus de liberdade. Para alcançar os objetivos propostos, é realizada inicialmente uma revisão bibliográfica sobre os fenômenos aeroelásticos, com foco nos problemas e nos modelos relacionados a asas com dois ou três graus de liberdade, levando em consideração a possibilidade de incorporação de problemas não lineares. Decidiu-se, portanto, adotar o modelo de asa retangular binária adotado por [Wright e Cooper \(2015\)](#), que consiste em uma asa retangular homogênea, sem enflechamento ou afilamento, com dois graus de liberdade e uma superfície de controle fixada em seu borda de fuga.

Em seguida, realizou-se uma fundamentação teórica abordando os aspectos estruturais e aerodinâmicos para a definição desse modelo. No campo da aerodinâmica, foram utilizados materiais relacionados à aerodinâmica não estacionária e à teoria das faixas, devido às suas influências nos modelos de aeroelasticidade dinâmica. No aspecto estrutural, decidiu-se utilizar a equação de Lagrange para obter as equações do movimento para o modelo em questão.

Posteriormente, o problema aeroelástico foi abordado tanto no domínio do tempo quanto no domínio da frequência analiticamente e através do software Matlab®. No domínio da frequência, utilizou-se a solução de autovalores e autovetores para obter os gráficos V-g-f (velocidade, amortecimento e frequência) para determinar a velocidade crítica de *flutter*. Em seguida, o mesmo problema foi resolvido no domínio do tempo, utilizando o método de integração numérica de Runge-Kutta para obter os gráficos de deformação ao longo do tempo. Em seguida, inspirados no exemplo fornecido por [Dimitriadis \(2017\)](#), desenvolveu-se um modelo teórico com a inclusão de rigidez não linear cúbica nos modos de flexão, torção e torção da superfície de controle. Para isso, adicionou-se uma rigidez do tipo cúbica ao modelo aeroelástico previamente desenvolvido, após utilizar a expansão de espaço de estados.

Em seguida, realizamos uma análise no domínio do tempo do novo sistema, agora não linear, tanto numericamente, através novamente do método de Runge-Kutta, quanto com o auxílio da ferramenta Matlab® para a geração de gráficos de deformação pelo tempo. Após a conclusão de ambas as análises, tanto para o modelo linear quanto para o modelo não linear, foram feitas comparações entre as velocidades críticas obtidas e os

gráficos no domínio do tempo, a fim de analisar os efeitos da adição de não linearidades a um modelo linear.

1.4 Organização do Trabalho

O presente trabalho é dividido em seis capítulos, além dos apêndices e referências. No Capítulo 1, são apresentados os aspectos introdutórios do trabalho, incluindo contextualização, motivação, objetivos, metodologia e organização do trabalho.

No capítulo 2, são feitas introduções sobre vibrações de sistemas de um e dois graus de liberdade, além da apresentação dos conceitos principais de aerodinâmica estacionária e não estacionária.

No capítulo 3, é apresentado e definido o modelo que será utilizado nesse trabalho, o mesmo sendo o modelo de asa retangular com dois graus de liberdade mais uma superfície de controle (totalizando três graus de liberdade). Além da solução desse modelo no domínio do tempo e da frequência.

No capítulo 4, são apresentados os modelos básicos para a introdução das não linearidades no sistema. Também é definido o tipo de não linearidade que será aplicada.

No capítulo 5, são apresentados os resultados no domínio do tempo e da frequência para ambos os modelos lineares e não lineares, além da variação de parâmetros e comparação entre os mesmos.

Por fim, o Capítulo 6, são apresentadas as conclusões e considerações finais deste trabalho.

Nos apêndices são apresentados códigos em Matlab[®] utilizados.

2 Referencial Teórico

O objetivo deste capítulo é apresentar o embasamento teórico que fundamentou este trabalho. Iniciamos abordando as vibrações de sistemas dinâmicos, com ênfase em sistemas com múltiplos graus de liberdade e como o acoplamento entre eles pode resultar em fenômenos como o *flutter*. Em seguida, são discutidos os conceitos básicos relacionados à aerodinâmica não estacionária, como momento e sustentação em aerofólios que oscilam harmonicamente, bem como os efeitos do amortecimento e rigidez aerodinâmica.

2.1 Vibrações de Sistemas Dinâmicos

De acordo com [Inman \(2014\)](#), a vibração é definida como o estudo do movimento repetitivo de um objeto em relação a um referencial fixo ou posição nominal. No contexto da análise aeroelástica, o estudo das vibrações de um sistema é fundamental, uma vez que envolve a análise da interação entre forças inerciais, aerodinâmicas e elásticas.

2.1.1 Vibrações excitadas por uma força harmônica

Quando um sistema é submetido a uma excitação harmônica, ele irá gerar uma resposta também harmônica. Considere um sistema massa-mola viscosamente amortecido, como mostrado na Figura 4. A equação do movimento desse sistema pode ser expressa pela segunda lei de Newton, conforme mostrado na Equação 2.1:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t) \quad (2.1)$$

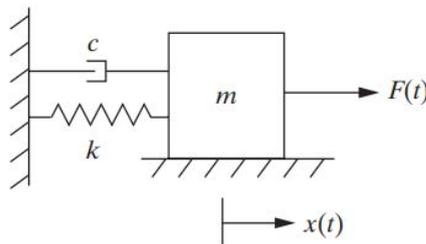


Figura 4 – Sistema massa mola de um grau de liberdade. Fonte: [Inman \(2014\)](#)

Nessa equação, m representa a massa do sistema, c é o coeficiente de amortecimento, k é a rigidez da mola, \ddot{x} é a aceleração, \dot{x} é a velocidade e x é o deslocamento do

sistema. A função $F(t)$ representa a força de excitação aplicada ao sistema em função do tempo.

Considerando uma força harmônica $F(t) = F_0 \cos \omega t$ excitando o sistema, a equação do momento se torna:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \cos \omega t \quad (2.2)$$

Dividindo todos os termos da equação pela massa m , tem-se:

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2x = f_0 \cos \omega t \quad (2.3)$$

onde ω_n é a frequência natural e é dada por $\omega_n = \sqrt{k/m}$ e ζ é fator de amortecimento dado por $\zeta = c/(2m\omega_n)$. A Equação 2.3 é a forma generalizada da equação do movimento para um sistema dinâmica excitado através de uma força harmônica.

2.1.2 Vibrações de sistemas de mais de um grau de liberdade

Para obter a equação do movimento de um sistema com n graus de liberdade, é possível utilizar as equações de Lagrange. Essas equações são uma forma de expressar as equações diferenciais do sistema em termos de energia e trabalho, como descrito em Rao (2009). Utilizando a equação de Lagrange com deslocamento em x , tem-se que:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial \dot{x}} + \frac{\partial U}{\partial x} = Q_x = \frac{\partial(\delta W)}{\partial(\delta x)} \quad (2.4)$$

onde T é a energia cinética, U é a energia potencial, ξ é a função dissipativa, Q_x é a chamada força generalizada e W é o trabalho.

Para dois graus de liberdade, como mostrado na Figura 5 tem-se que a energia cinética (Equação 2.5) e potencial (Equação 2.6) podem ser dadas por:

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 \quad (2.5)$$

$$U = \frac{1}{2}k_1x_1^2 + \frac{1}{2}k_2(x_1 - x_2)^2 \quad (2.6)$$

O amortecimento pode ser considerado como uma força dissipativa, podendo então ser incluso na função dissipativa, dada pela Equação 2.7.

$$\xi = \frac{1}{2}c_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)^2 \quad (2.7)$$

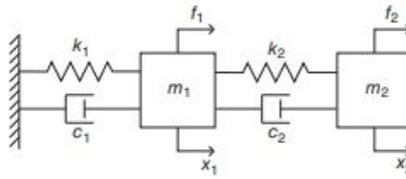


Figura 5 – Sistema massa mola de dois graus de liberdade. Fonte: [Wright e Cooper \(2015\)](#)

De acordo com [Wright e Cooper \(2015\)](#), o trabalho incremental pode ser obtido quando a força f_n se move através de um deslocamento incremental δx_n , como mostrado na Equação 2.8.

$$\delta W = f_1 \delta x_1 + f_2 \delta x_2 \quad (2.8)$$

Substituindo as Equações 2.5, 2.6, 2.7 e 2.8 na equação de energia de Lagrange (Equação 2.4) e realizando as devidas diferenciações, tem-se as equações do movimento mostradas nas Equações 2.9 e 2.10.

$$m_1 \ddot{x}_1 + (c_1 + c_2) \dot{x}_1 - c_2 \dot{x}_2 + (k_1 + k_2) x_1 - k_2 x_2 = f_1(t) \quad (2.9)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 - c_2 \dot{x}_1 + c_2 \dot{x}_2 - k_2 x_1 + k_2 x_2 = f_2(t) \quad (2.10)$$

Colocando as equações do movimento na forma matricial é obtido:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_1 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} \quad (2.11)$$

É possível observar na Equação 2.11 que a matriz de massa é diagonal, mostrando que o sistema é fisicamente desacoplado enquanto os amortecimentos e a rigidez são acoplados. Na forma simplificada tem-se que:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K} \mathbf{x} = \mathbf{f}(t) \quad (2.12)$$

onde \mathbf{M} é a matriz de massa, \mathbf{C} é a matriz de amortecimento, \mathbf{K} é a matriz de rigidez, \mathbf{x} e \mathbf{f} são a coluna de vetores de deslocamento e forças, respectivamente.

2.2 Aerodinâmica

2.2.1 Aerodinâmica Estacionária

A aerodinâmica estacionária refere-se a um cenário simplificado dentro do estudo da aerodinâmica em que se considera o escoamento de ar ao redor de um aerofólio como sendo estacionário, ou seja, sem variações significativas ao longo do tempo (GüLçAT, 2016). Nesse contexto, as forças e momentos aerodinâmicos são considerados independentes do tempo.

A distribuição de pressão e o fluxo de ar ao redor de um aerofólio, assim como as forças geradas, são influenciados pela altitude e pela velocidade do fluxo de ar. Quando a densidade do fluido ρ é constante ao longo do escoamento, o fluido é chamado de incompressível. No entanto, se houver variação na densidade, o fluido é considerado compressível. Uma propriedade importante para determinar a compressibilidade de um fluido é o número de Mach, definido como:

$$M = \frac{V}{a} \quad (2.13)$$

Outra propriedade importante em um escoamento é o número de Reynolds, uma variável adimensional dada por:

$$Re = \frac{\rho V c}{\mu} \quad (2.14)$$

O número de Reynolds é utilizado para determinar se um escoamento viscoso será classificado como laminar, em que o fluxo possui variações suaves de velocidade próximo à superfície do aerofólio, ou turbulento, em que o fluxo apresenta variações aleatórias e irregulares próximo à superfície do aerofólio (WRIGHT; COOPER, 2015).

A pressão dinâmica q é dada por:

$$q_\infty = \frac{1}{2} \rho_\infty V^2 \quad (2.15)$$

A Figura 6 representa um aerofólio genérico com a força de sustentação.

Uma simplificação comum nesse cenário é tratar o aerofólio como um objeto esbelto e substituí-lo por uma distribuição contínua de vórtices. Isso permite uma análise teórica simplificada, em que a sustentação gerada por cada elemento diferencial de corda, por unidade de comprimento da asa, pode ser calculada de acordo com o teorema de Kutta-Joukowski.

O teorema de Kutta-Joukowski estabelece uma relação entre a sustentação gerada por um aerofólio e a circulação de ar ao seu redor (ANDERSON, 2017). Ele afirma que a

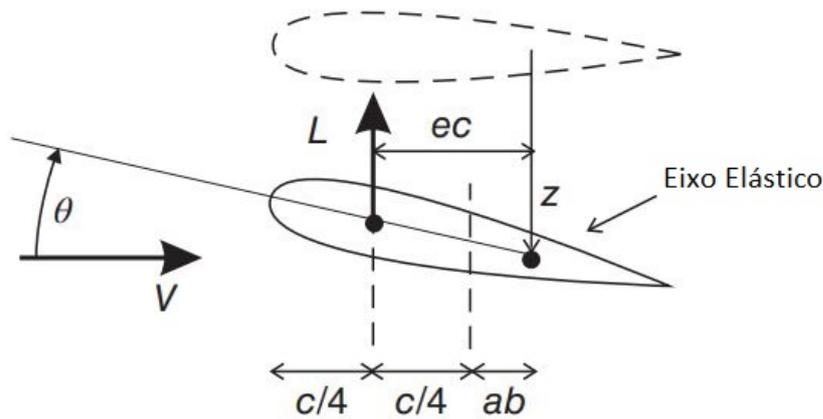


Figura 6 – Aerofólio com forças de sustentação, arrasto e momento

sustentação é proporcional à circulação e à velocidade do escoamento de ar. Esse teorema é uma importante ferramenta para a compreensão e a análise das forças aerodinâmicas atuantes em um aerofólio.

Embora a aerodinâmica estacionária seja uma simplificação, ela é útil para fins de análise teórica e estudos iniciais de projetos aerodinâmicos. No entanto, em situações reais, o escoamento de ar ao redor de um aerofólio pode ser complexo e variar ao longo do tempo, exigindo modelos mais sofisticados e técnicas de análise mais avançadas.

De acordo com o teorema de Kutta-Joukowski, tem-se:

$$L' = \rho_{\infty} V_{\infty} \Gamma \quad (2.16)$$

onde Γ é a circulação, para mais informações consultar (ANDERSON, 2017), dada por:

$$\Gamma = - \oint_C V \cdot ds \quad (2.17)$$

2.2.2 Aerodinâmica Não Estacionária para um Aerofólio Oscilando Harmonicamente

De acordo com Bisplinghoff, Ashley e Halfman (1996) quando um aerofólio está em movimento translacional (*plunge*) e/ou rotacional (*pitch*) em relação ao fluxo de ar incidente, as forças e momentos gerados por ele variam ao longo do tempo. Uma abordagem simples para calcular essas forças e momentos é assumir que, em cada instante de tempo, o aerofólio se comporta como se tivesse as mesmas características de um aerofólio estático, levando em consideração os valores instantâneos de deslocamento e velocidade. Isso

é conhecido como suposição de quasi-estacionariedade, o que implica que não há efeitos dependentes da frequência.

De acordo com [Anderson \(2017\)](#), um fluxo não estacionário é definido como um fluxo em que as variáveis de fluxo em um determinado ponto variam ao longo do tempo. Em seu estudo, [Wright e Cooper \(2015\)](#) dividem a solução para determinar a sustentação e o momento em um aerofólio oscilante de forma harmoniosa em dois termos: os termos circulatorios e os termos não circulatorios.

Os termos circulatorios estão relacionados às vorticidades, como descrito pela função de [Theodorsen \(1935\)](#), e são responsáveis pela geração de momento e sustentação. Em contraste, os termos não circulatorios englobam forças de inércia "aparentes" que surgem de razões diferentes da vorticidade. Esses termos não circulatorios podem incluir uma sustentação devido à componente de pressão, onde a diferença de pressão entre a parte superior e inferior do aerofólio gera uma força de sustentação. Essa sustentação é resultante da diferença de pressão estática e não está diretamente relacionada à circulação do fluxo de ar. Além disso, os termos não circulatorios podem envolver um arrasto devido à componente de pressão, em que a diferença de pressão entre a parte superior e inferior do aerofólio resulta em uma força de arrasto que atua como uma resistência ao movimento do aerofólio através do ar.

Considerando um aerofólio bidimensional de corda c , com um eixo elástico localizado a uma distância de $ab = \frac{ac}{2}$ aft (na parte posterior do aerofólio, atrás do bordo de fuga), como mostrado na Figura 7, que está sujeito a um movimento oscilatório harmônico no sentido translacional, dado por $z = z_0 e^{i\omega t}$, e um movimento rotacional dado por $\theta = \theta_0 e^{i\omega t}$, a solução fornecida por [Theodorsen \(1935\)](#) e [Bisplinghoff, Ashley e Halfman \(1996\)](#) é expressa como:

$$L = \pi \rho b^2 [\ddot{z} + V\dot{\theta} - ba\ddot{\theta}] + 2\pi \rho V b C(k) [\dot{z} + V\theta + b \left(\frac{1}{2} - a\right) \dot{\theta}] \quad (2.18)$$

$$M = \pi \rho b^2 [ba\ddot{z} - Vb \left(\frac{1}{2} - a\right) \dot{\theta} - b^2 \left(\frac{1}{8} + a^2\right) \ddot{\theta}] + 2\pi \rho V b^2 \left(a + \frac{1}{2}\right) C(k) [\dot{z} + V\theta + b \left(\frac{1}{2} - a\right) \dot{\theta}] \quad (2.19)$$

Escrevendo as expressões do momento e da sustentação na forma complexa:

$$L = \pi \rho b^2 [-\omega^2 z_0 + i\omega V \theta_0 + \omega^2 ba \theta_0] + 2\pi \rho V b (F + iG) [i\omega z_0 + V \theta_0 + i\omega b \left(\frac{1}{2} - a\right) \theta_0] e^{i\omega t} \quad (2.20)$$

$$M = \pi \rho b^2 [-\omega^2 ba z_0 - i\omega V b \left(\frac{1}{2} - a\right) \theta_0 + b^2 \omega^2 \left(\frac{1}{8} + a^2\right) \theta_0] + 2\pi \rho V b^2 \left(a + \frac{1}{2}\right) (F + iG) [i\omega z_0 + V \theta_0 + i\omega b \left(\frac{1}{2} - a\right) \theta_0] e^{i\omega t} \quad (2.21)$$

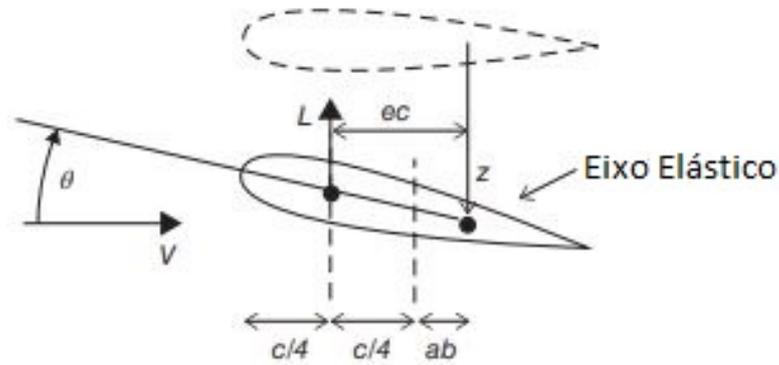


Figura 7 – Aerofólio com movimento translacional e rotacional. Fonte [Wright e Cooper \(2015\)](#)

Essas expressões também podem ser escritas como:

$$L = \rho V^2 b [(L_z + ikL_{\dot{z}}) \frac{z_0}{b} + (L_\theta + ikL_{\dot{\theta}}) \theta_0] e^{i\omega t} \quad (2.22)$$

$$M = \rho V^2 b^2 [(M_z + ikM_{\dot{z}}) \frac{z_0}{b} + (M_\theta + ikM_{\dot{\theta}}) \theta_0] e^{i\omega t} \quad (2.23)$$

Comparando as Equações 2.20 e 2.22, as derivadas de sustentação são dadas como:

$$L_z = 2\pi \left(-\frac{k^2}{2} - GK \right) \quad (2.24)$$

$$L_{\dot{z}} = 2\pi F \quad (2.25)$$

$$L_\theta = 2\pi \left[\frac{k^2 a}{2} + F - Gk \left(\frac{1}{2} - a \right) \right] \quad (2.26)$$

$$L_{\dot{\theta}} = 2\pi \left[\frac{1}{2} + F \left(\frac{1}{2} - a \right) + \frac{G}{k} \right] \quad (2.27)$$

E comparando 2.21 com 2.23, é possível obter as derivadas dos momentos sendo:

$$M_z = 2\pi \left[-\frac{k^2}{2} - k \left(a + \frac{1}{2} \right) G \right] \quad (2.28)$$

$$M_{\dot{z}} = 2\pi \left(a + \frac{1}{2} \right) F \quad (2.29)$$

$$M_\theta = 2\pi \left[\frac{k^2}{2} \left(\frac{1}{8} + a^2 \right) + F \left(s + \frac{1}{2} \right) - kG \left(A + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{2} \right) - a \right] \quad (2.30)$$

$$M_{\dot{\theta}} = 2\pi \left[-\frac{k}{2} \left(\frac{1}{2} - a \right) + kF \left(a + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{2} - a \right) + \frac{G}{k} \left(a + \frac{1}{2} \right) \right] \quad (2.31)$$

Assumindo um estado quasi-estacionário, onde $k \rightarrow 0$, $F \rightarrow 1$ e $G \rightarrow 0$, tem-se que:

$$L_z = 0; L_\theta = 2\pi k L_{\dot{\theta}} = 0; M_z = 0 \quad (2.32)$$

$$M_{\dot{z}} = 2\pi \left(a + \frac{1}{2} \right); M_\theta = 2\pi \left(a + \frac{1}{2} \right); k M_{\dot{\theta}} = 0 \quad (2.33)$$

Esses dados desempenham um papel fundamental na obtenção das matrizes de rigidez e amortecimento aerodinâmicos utilizadas em sistemas aeroelásticos dinâmicos. De acordo com a pesquisa realizada por [Hancock, Wright e Simpson \(1985\)](#), foi constatado que o termo não estacionário $M_{\dot{\theta}}$, responsável pelo amortecimento aerodinâmico devido ao momento de arfagem (*pitch*), é o componente mais relevante nessa análise. Eles sugerem uma aproximação para esse termo, com um valor aproximado de -1,2. Levando em consideração a frequência reduzida em relação à frequência natural $k = \frac{\omega b}{V}$, bem como os deslocamentos verticais e de rotação $z = z_0 e^{i\omega t}$ e $\theta = \theta_0 e^{i\omega t}$, juntamente com suas derivadas $\dot{z} = i\omega z_0 e^{i\omega t}$ e $\dot{\theta} = i\omega \theta_0 e^{i\omega t}$, ao substituir esses valores nas Equações 2.22 e 2.23, tem-se:

$$L = \rho V^2 \left(L_z z + L_{\dot{z}} \frac{b\dot{z}}{V} + L_\theta b\theta + L_{\dot{\theta}} \frac{b^2\dot{\theta}}{V} \right) \quad (2.34)$$

$$M = \rho V^2 \left(M_z bz + M_{\dot{z}} \frac{b^2\dot{z}}{V} + M_\theta b^2\theta + M_{\dot{\theta}} \frac{b^3\dot{\theta}}{V} \right) \quad (2.35)$$

Reescrevendo na forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} L \\ M \end{Bmatrix} = \rho V \begin{bmatrix} bL_z & b^2L_{\dot{\theta}} \\ b^2M_z & b^3M_{\dot{\theta}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{z} \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} + \rho V^2 \begin{bmatrix} L_z & bL_\theta \\ bM_z & b^2M_\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z \\ \theta \end{Bmatrix} = \rho V \mathbf{B} \begin{Bmatrix} \dot{z} \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} + \rho V^2 \mathbf{C} \begin{Bmatrix} z \\ \theta \end{Bmatrix} \quad (2.36)$$

onde \mathbf{B} e \mathbf{C} são as matrizes de amortecimento e rigidez aerodinâmicas, respectivamente.

2.2.3 Teoria das faixas

No modelo da teoria das faixas, a asa é dividida em um número infinito de faixas, e assume-se que o coeficiente de sustentação em cada faixa da asa é proporcional ao ângulo de incidência (α) em uma distância y da raiz da asa. Além disso, considera-se que a sustentação em uma faixa não tem influência sobre as outras faixas (WRIGHT; COOPER, 2015).

Supondo que a sustentação em uma faixa ocorra no seu centro aerodinâmico, localizado a um quarto da corda, tem-se que:

$$dL = \frac{1}{2}\rho V^2 c_d y a_1 \alpha(y) \quad (2.37)$$

Tem-se então que a sustentação total atuante em uma faixa de uma asa de semi-envergadura s pode ser encontrada como:

$$L = \int_0^s dL = \frac{1}{2}\rho V^2 c_a \int_0^s \alpha(y) dy \quad (2.38)$$

Podemos modificar a teoria das faixas para uma asa sem modificação, enflechamento ou afilamento, ficando então:

$$a_a = a_1 \left[1 - \left(\frac{y^2}{s} \right) \right] \quad (2.39)$$

$$a_a = a_1 \cos \left(\frac{\pi y}{2s} \right) \quad (2.40)$$

2.2.4 Superfícies de Controle

De acordo com Fung (1969), uma superfície de controle em uma asa é responsável pelo controle do movimento de rolagem de uma aeronave. Quando a superfície de controle é movida para baixo, a força de sustentação na parte superior da asa aumenta, gerando um momento de rolagem. No entanto, essa deflexão também gera um momento de arfagem aerodinâmico para baixo, resultando em uma torção na asa que reduz esse momento gerado.

Wright e Cooper (2015) corroboram essa afirmação, mencionando que as superfícies de controle são primariamente utilizadas para manobras de aeronaves por meio das mudanças na distribuição de pressão. Considerando um aerofólio bidimensional com uma superfície de controle (Figura 8), tem-se que β é o ângulo da superfície de controle, positivo no sentido horário, k_θ é a rigidez da mola de torção e k_z é a rigidez da mola de translação. Wright e Cooper (2015) mostram que a aplicação de uma superfície de controle aumenta a efetividade do camber (curvatura) do aerofólio, resultando em um aumento do coeficiente de sustentação.

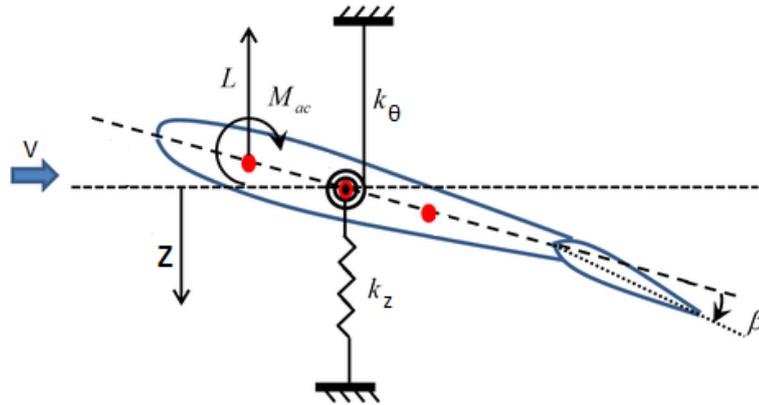


Figura 8 – Aerofólio com superfície de controle. Fonte: Shukla e Patil (2017)

A Equação 2.41 indica que o aumento dos coeficientes de sustentação e momento também gera um momento para baixo.

$$C_L = a_0 + a_1\theta + a_2\beta C_M = b_0 + b_1\theta + b_2\beta \quad (2.41)$$

Os coeficientes a_2 e b_2 são os coeficientes de inclinação da sustentação da superfície de controle e de inclinação do momento de arfagem da superfície de controle, e são definidas por Fung (1969) e Glauert (1927) como:

$$a_2 = \frac{a_1}{\pi} [\cos^{-1}(1 - 2Ec) + 2\sqrt{E(1 - Ec)}] \quad (2.42)$$

$$b_2 = -\frac{a_1}{\pi} (1 - E)\sqrt{E(1 - Ec)} \quad (2.43)$$

onde Ec é a taxa da corda da superfície de controle pela corda total da asa.

2.3 Modelo Não Linear

A adição de não linearidades em modelos aeroelásticos é essencial para capturar efeitos não lineares reais, como grandes deslocamentos, geometrias deformáveis, rigidez variável com a carga e comportamento não linear do fluido ao redor da estrutura. Essas não linearidades podem ter um impacto significativo no comportamento dinâmico da estrutura e podem levar a fenômenos complexos e imprevisíveis. O objetivo deste capítulo é modelar e investigar o impacto da adição de uma rigidez não linear em um sistema aeroelástico. Faremos uma modelagem matemática para analisar como a inclusão de uma rigidez cúbica em cada um dos modos assumidos afeta a resposta do sistema. Além disso, introduziremos o conceito de oscilações de ciclo limite, que representam uma variação amortecida do *flutter*.

2.3.1 Introdução à Não linearidades

Nos estudos aeroelásticos iniciais, a maioria considerava o comportamento linear das estruturas e das forças aerodinâmicas. Embora isso seja adequado para muitas aplicações, a inclusão de não linearidades se torna crucial em certos casos, para uma análise precisa e completa do sistema aeroelástico.

As não linearidades, sejam elas fortes ou fracas, estão sempre presentes nos sistemas de engenharia. Nos últimos anos, tem havido uma maior tolerância ou inclusão intencional de quantidades crescentes de não linearidade em muitas aplicações, uma vez que os métodos de análise não linear progrediram o suficiente para permitir o tratamento da não linearidade na fase de projeto (DIMITRIADIS, 2017).

A inclusão de não linearidades nos modelos aeroelásticos é essencial para capturar efeitos não lineares reais, como grandes deslocamentos, geometrias deformáveis, variação da rigidez com a carga e comportamento não linear do fluido ao redor da estrutura. Essas não linearidades podem ter um impacto significativo no comportamento dinâmico da estrutura e podem levar a fenômenos complexos e imprevisíveis.

Como o *flutter* é uma instabilidade, ele inicialmente cresce exponencialmente até ser limitado pela não linearidade na dinâmica da estrutura e/ou aerodinâmica, e normalmente resulta em uma oscilação de ciclo limite (MEEHAN, 2022). A oscilação de ciclo limite é o principal fenômeno da aeroelasticidade não linear, podendo ser considerada como uma forma de *flutter* amortecido.

Modelos aeroelásticos lineares não conseguem capturar a dinâmica do sistema nas proximidades do limite de *flutter*. Oscilações estáveis de ciclo limite têm sido observadas em modelos de túnel de vento e em aeronaves reais em velocidades próximas ao limite de *flutter* previsto. Essas oscilações de estado estacionário, de amplitude finita e conhecidas como "benignas", infelizmente não são o único efeito possível. Oscilações de ciclo limite instáveis também têm sido observadas não apenas após, mas também antes do início da velocidade prevista de *flutter* (SHARMA, 2005). No caso de oscilações de ciclo limite instáveis, as oscilações crescem subitamente para amplitudes muito grandes, resultando em *flutter* catastrófico e falha estrutural. É necessário um modelo aeroelástico mais preciso para incorporar as não linearidades presentes no sistema e dar conta de tais fenômenos.

Para uma aeronave, as Oscilações de Ciclo Limite (LCOs) representam problemas significativos por si só. As vibrações causadas pelas LCOs podem resultar em fadiga, reduzindo a vida útil da estrutura. Portanto, a previsão eficiente das LCOs é de extrema importância durante o projeto, especialmente para aeronaves que voam próximas aos limites das suposições lineares.

2.3.2 Inclusão de Rigidez Não Linear

Existem várias fontes de não linearidades, incluindo não linearidades estruturais, que são causadas por rigidez não uniforme e não linear na estrutura; não linearidades aerodinâmicas, que ocorrem, por exemplo, em regimes transônicos devido à presença de ondas de choque e não linearidades de controle, onde a superfície de controle não responde conforme o esperado pelas leis de controle (WRIGHT; COOPER, 2015).

A estrutura de uma aeronave é afetada por vários tipos de não linearidades estruturais, que podem ser classificadas como não linearidades distribuídas ou concentradas, dependendo da região em que atuam. As não linearidades distribuídas surgem de deformações em toda a estrutura. Por outro lado, os fenômenos não lineares concentrados são localizados e resultam de conexões mecânicas não ideais e deformações estruturais não elásticas (SHARMA, 2005).

De acordo com Sharma (2005), uma mola linear oferece uma resistência proporcional ao seu deslocamento linear ou angular, com a constante de proporcionalidade determinada pela Lei de Hooke. Em contraste, uma mola não linear não se deforma de forma proporcional ao deslocamento. Molas com rigidez crescente tornam-se mais rígidas à medida que o deslocamento aumenta, enquanto molas com rigidez decrescente oferecem menos resistência. A Figura 9 mostra o comportamento de uma mola com adição cúbica, linhas tracejadas, e subtração, linhas pontilhadas, de rigidez com uma mola linear, linha contínua, onde o parâmetro γ mostra a magnitude da adição ou subtração de rigidez.

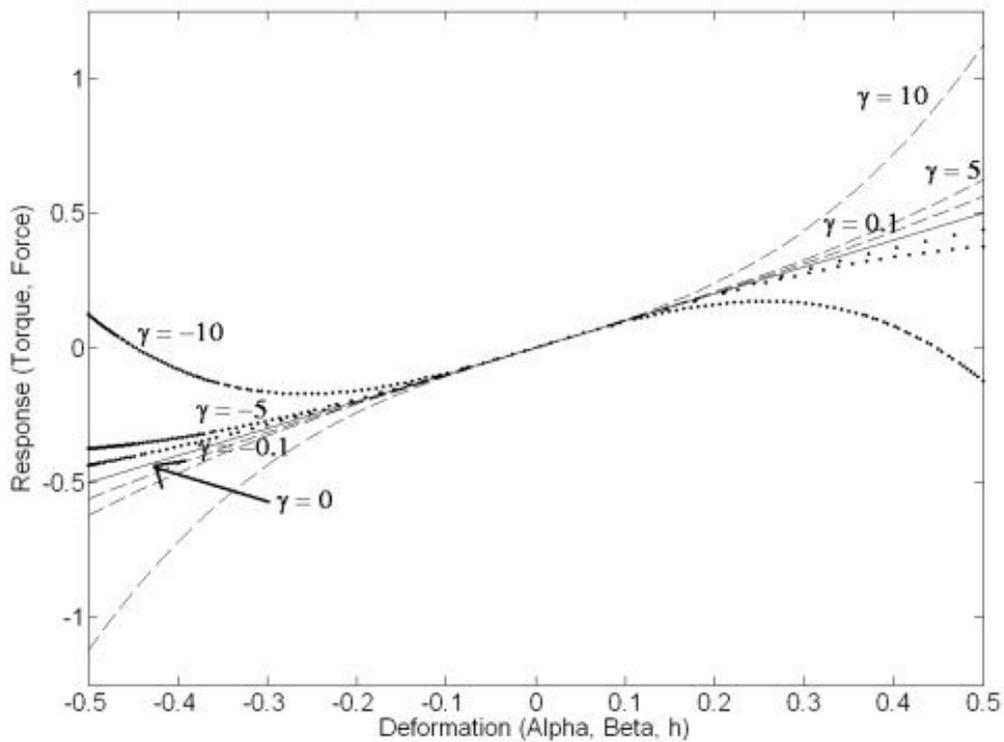


Figura 9 – Comportamento de uma mola linear e não linear com adição e subtração de rigidez. Fonte [Sharma \(2005\)](#)

O objetivo desse estudo são as não linearidades estruturais concentradas, especificamente as causadas pela adição de uma rigidez cúbica nos modos flexão (k_z), rotação (k_θ) e rotação da superfície controle (k_β).

O tipo de análise que será utilizado é conhecido como análise de bifurcação. Esse tipo de análise consiste no estudo da natureza das soluções à medida que os parâmetros do sistema variam. Ela explora as mudanças qualitativas nas soluções, como a variação do deslocamento, à medida que os parâmetros são modificados. A análise de bifurcação é uma ferramenta importante para compreender a dinâmica complexa dos sistemas não lineares e oferece informações importantes sobre a estabilidade e o comportamento do sistema em diferentes condições ([BISPLINGHOFF; ASHLEY; HALFMAN, 1996](#)).

2.3.2.1 Modelo matemático não linear

Seguindo o modelo matemático demonstrado por [Bisplinghoff, Ashley e Halfman \(1996\)](#), iremos começar o estudo com a adição de uma rigidez cúbica ao nosso sistema de três graus de liberdade. Começaremos aplicando a não linearidade na rigidez do modo de flexão k_z , que levará a uma rigidez total de

$$k_z z + k_{z3} k_z z^3 \quad (2.44)$$

onde k_{z3} é o coeficiente de rigidez cúbica, que será variado para a obtenção dos resultados, podendo ser obtido através de experimentos práticos ou simulações numéricas.

De forma análoga a primeira, a próxima bifurcação será a adição da não linearidade desta vez na rigidez do grau de liberdade torsional k_θ . Levando a uma rigidez total de:

$$k_\theta \theta + k_{\theta3} k_\theta \theta^3 \quad (2.45)$$

onde $k_{\theta3}$ é o coeficiente de rigidez cúbica aplicado em θ , que será variado para a obtenção dos resultados.

E por fim, uma adição de rigidez cúbica na rigidez do grau de liberdade de rotação da superfície de controle, ficando com uma rigidez total de:

$$k_\beta \beta + k_{\beta3} k_\beta \beta^3 \quad (2.46)$$

onde $k_{\beta3}$ é o coeficiente de rigidez cúbica aplicado em β .

Para a solução dos problemas não lineares no domínio do tempo, foi-se utilizado o mesmo método para o problema linear, o método de Runge-Kutta de quarta ordem, abordado na seção 4.2.2.1. Foi utilizado o software Matlab[®] para resolução desse problema e os gráficos obtidos através dessa integração serão apresentados e analisados na seção seguinte.

2.4 Modelo de asa reta com uma superfície de controle

O modelo utilizado para a dedução da equação do movimento para aeroelasticidade dinâmica para três graus de liberdade será o modelo apresentado por [Wright e Cooper \(2015\)](#), que consiste de uma asa reta, plana e retangular (Figura 10). Para isso, será utilizada a equação de energia de Lagrange mostrada na seção 2.1.2 e as matrizes de rigidez e amortecimento aerodinâmicos mostrados na seção 2.2.2, com a adição da derivada de amortecimento aerodinâmico de controle $M_{\dot{\beta}}$.

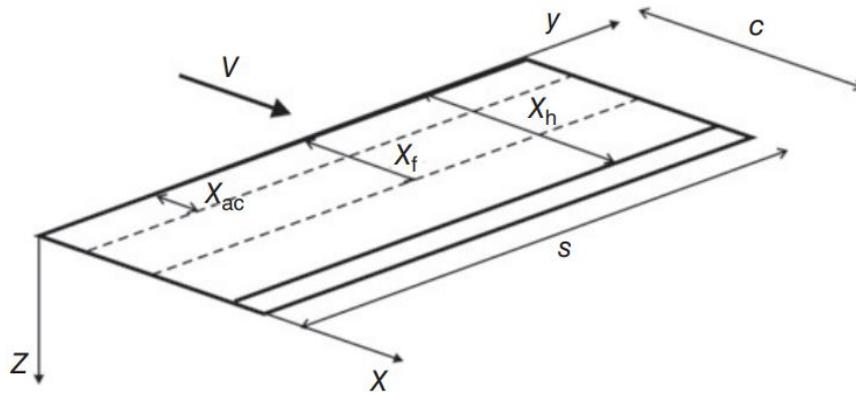


Figura 10 – Modelo binário de asa retangular com superfície de controle. Fonte: [Wright e Cooper \(2015\)](#)

Ao analisar a Figura 10, pode-se observar que as distâncias a serem consideradas são as seguintes: a distância do bordo de ataque até a linha elástica é representada por x_f , a distância até o eixo aerodinâmico é indicada como x_{ac} e a distância até o início da superfície de controle (linha de articulação) é representada por x_h . Além disso, c representa a corda da asa e s representa a semi-envergadura da asa. Para definir o modelo, optou-se por empregar uma versão simplificada do modelo aerodinâmico não estacionário, o que nos permite a integração no tempo. Nesse modelo, são considerados a sustentação e o momento como:

$$L = \frac{1}{2}\rho V^2 c a_1 \left(\theta + \frac{\dot{z}}{V} \right) \quad (2.47)$$

$$M = \frac{1}{2}\rho V^2 c^2 \left[e a_1 \left(\theta + \frac{\dot{z}}{V} \right) + M_\theta \frac{\dot{\theta}}{4V} \right] \quad (2.48)$$

A deflexão translacional (z), positiva para baixo, pode ser expressa como uma combinação das coordenadas generalizadas q_b , q_t e β , rotação da superfície de controle, da seguinte forma:

$$z = \left(\frac{y}{s} \right)^2 q_b + \left(\frac{y}{s} \right) (x - x_f) q_t + [x - x_h] \beta = \phi_b q_b + \phi_t q_t + \phi_\beta \beta \quad (2.49)$$

Com base nas informações mencionadas anteriormente e na Equação 2.49, é possível afirmar que o modelo abordado pode ser descrito matematicamente como uma contribuição dos modos assumidos de flexão, ϕ_b , torção, ϕ_t e da deflexão da superfície de controle, ϕ_{beta} . Além disso, o deslocamento para baixo ao longo do eixo elástico (z_f) e a torção positiva com o bordo de ataque para cima (θ) podem ser calculados por meio das seguintes expressões:

$$z_f = \left(\frac{y}{s}\right)^2 q_b \quad (2.50)$$

$$\theta = \left(\frac{y}{s}\right) q_t \quad (2.51)$$

Para a utilização da equação de Lagrange para a determinação das equações do movimento para três graus de liberdade, é necessário calcular a energia cinética na asa (a) e na superfície de controle (sc), dadas por

$$T_a = \frac{m_a}{2} \int_0^s \int_0^{x_h} \left(\frac{y}{s}\right)^2 \dot{q}_b + (x - x_f) \left(\frac{y}{s}\right) \dot{q}_t dx dy \quad (2.52)$$

$$T_{sc} = \frac{m_{sc}}{2} \int_0^s \int_0^{x_h} \left(\frac{y}{s}\right)^2 \dot{q}_b + (x - x_f) \left(\frac{y}{s}\right) \dot{q}_t + (x - x_h) \dot{\beta}^2 dx dy \quad (2.53)$$

onde m_a e m_{sc} são as massa por unidade de área da asa e superfície de controle, respectivamente. Para a energia potencial tem-se que:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^s EI \left(\frac{2q_b}{s^2}\right)^2 dy + \frac{1}{2} \int_0^s GJ \left(\frac{q_t}{s}\right)^2 dy + \frac{1}{2} k_\beta s \beta^2 \quad (2.54)$$

Para as matrizes aerodinâmicas, utilizaremos a mesma abordagem utilizada na seção 2.2.2 com a adição da influência da rotação da superfície de controle:

$$dL = \frac{1}{2} \rho V^2 c dy \left[a_a \left(\frac{y^2 \dot{q}_b}{s^2 V} + \frac{y}{s} q_t \right) + a_{sc} \beta \right] \quad (2.55)$$

$$dM = \frac{1}{2} \rho V^2 c^2 dy \left[b_a \left(\frac{y^2 \dot{q}_b}{s^2 V} + \frac{y}{s} q_t \right) + M_{\dot{\theta}} c \frac{(y \dot{q}_t)}{4sV} + b_{sc} \beta \right] \quad (2.56)$$

$$dH = \frac{1}{2} \rho V^2 c^2 dy \left[c_a \left(\frac{y^2 \dot{q}_b}{s^2 V} + \frac{y}{s} q_t \right) + M_{\dot{\beta}} \frac{c \dot{\beta}}{4V} + c_{sc} \beta \right] \quad (2.57)$$

Os coeficientes da asa e da superfície de controle podem ser definidos conforme detalhado em [Glauert \(1927\)](#), [Fung \(1969\)](#) e [Scanlan e Rosenbaum \(1968\)](#). Essas referências fornecem informações mais aprofundadas sobre o assunto.

$$\begin{aligned}
a_a &= 2\pi \\
b_a &= ea_a \\
c_a &= -\frac{T_{12}}{2} \\
a_{sc} &= \frac{a_a}{\pi} [\cos^{-1}(1 - 2Ec) + 2\sqrt{E(1 - E)}] \\
b_a &= ea_a \\
b_{sc} &= -\frac{a_a}{\pi} (1 - E)\sqrt{E(1 - E)} \\
c_a &= -\frac{T_{12}}{2} \\
c_{sc} &= -\frac{T_{12}T_{10}}{2\pi} \\
d &= \frac{2x_h}{c} - 1 \\
Ea &= c - x_h
\end{aligned}$$

onde T_{10} e T_{12} são funções de [Theodorsen \(1935\)](#) dadas por:

$$T_{10} = \sqrt{1 - d^2} + \cos^{-1}d \quad (2.58)$$

$$T_{12} = \sqrt{1 - d^2}(2 + d) + \cos^{-1}d(2d + 1) \quad (2.59)$$

O trabalho incremental pode ser calculado por

$$\delta W = - \int_0^s dL\delta z_f + \int_0^s dM\delta\theta + \int_0^s dH\delta\beta \quad (2.60)$$

Aplicando os valores na equação da energia de Lagrange chegamos nas equações aeroelásticas para o modelo de uma asa reta retangular envolvendo a interação entre os modos de flexão, torção e rotação da superfície de controle:

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} A_{bb} & A_{bt} & A_{b\beta} \\ A_{tb} & A_{tt} & A_{t\beta} \\ A_{\beta b} & A_{\beta t} & A_{\beta\beta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q}_b \\ \ddot{q}_t \\ \ddot{\beta} \end{Bmatrix} + \rho V \begin{bmatrix} -\frac{cs}{10}a_w & 0 & 0 \\ -\frac{c^2s}{8}b_w & \frac{-c^3s}{24}M_{\dot{\theta}} & 0 \\ -\frac{c^2s}{6}c_w & 0 & -\frac{-c^3s}{8}M_{\dot{\beta}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{q}_b \\ \dot{q}_t \\ \dot{\beta} \end{Bmatrix} \\
& + \left(\rho V^2 \begin{bmatrix} 0 & \frac{cs}{8}a_w & \frac{cs}{6}a_c \\ 0 & -\frac{c^2s}{6}b_w & -\frac{c^2s}{4}b_c \\ 0 & -\frac{c^2s}{4}c_w & -\frac{c^2s}{2}c_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{4EI}{s^3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{GJ}{s} & k_{\beta} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} q_b \\ q_t \\ \beta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.61)
\end{aligned}$$

também podendo ser escrita na forma reduzida:

$$\mathbf{A}\ddot{\mathbf{q}} + (\rho V\mathbf{B} + \mathbf{D})\dot{\mathbf{q}} + (\rho V^2\mathbf{C} + \mathbf{E})\mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (2.62)$$

Sendo \mathbf{A} a matriz de inércia, \mathbf{B} a matriz de amortecimento aerodinâmico, \mathbf{D} a matriz de amortecimento estrutural, \mathbf{C} a matriz de rigidez aerodinâmica e \mathbf{E} a matriz de rigidez estrutural. $\ddot{\mathbf{q}}$, $\dot{\mathbf{q}}$ e \mathbf{q} são os vetores de aceleração, velocidade e deslocamento das coordenadas generalizadas, respectivamente. A Equação 2.61 considera uma matriz de inércia simétrica, assumindo uma massa igual por unidade de área tanto para a asa quanto para a superfície de controle ($m_a = m_{sc} = m$), com

$$\begin{aligned}
 A_{bb} &= m \frac{sc}{5}; & A_{tt} &= m \frac{s}{3} \left(\frac{c^3}{3} - x_f c^2 + s_f^2 c \right); & A_{bt} &= m \frac{s}{4} \left(\frac{c^2}{2} - x_f c \right); \\
 A_{b\beta} &= m \frac{s}{3} \left(\frac{c^2 - x_h^3}{2} - x_h (c - x_h) \right) \\
 A_{t\beta} &= m \frac{s}{2} \left(\frac{c^3 - x_h^3}{3} - (x_f + x_h) \frac{c^2 - x_h^2}{2} + x_f x_h (c - x_h) \right); \\
 A_{\beta\beta} &= ms \left(\frac{c^3 - x_h^3}{3} + x_h^2 c - x_h c^2 \right)
 \end{aligned}$$

Para a adição das não linearidades, será utilizado o modelo matemático

3 Metodologia

Este capítulo aborda a metodologia utilizada para a condução deste estudo, fornecendo uma visão geral dos procedimentos adotados para alcançar os objetivos propostos. Para modelagem matemática, foi empregado um modelo físico que consiste em uma asa reta e homogênea com uma superfície de controle fixada em seu bordo de fuga.

3.1 Fluxograma

Com o intuito de ilustrar sistematicamente a metodologia aplicada neste estudo, foi desenvolvido um fluxograma abrangente para orientar pelos passos e processos-chave. Essa representação visual não apenas aprimora a clareza de nossa abordagem, mas também fornece um recurso valioso para entender as conexões intrincadas entre diferentes componentes do processo de pesquisa. O fluxograma encapsula a sequência lógica de ações realizadas, garantindo transparência e reprodutibilidade da metodologia utilizada.

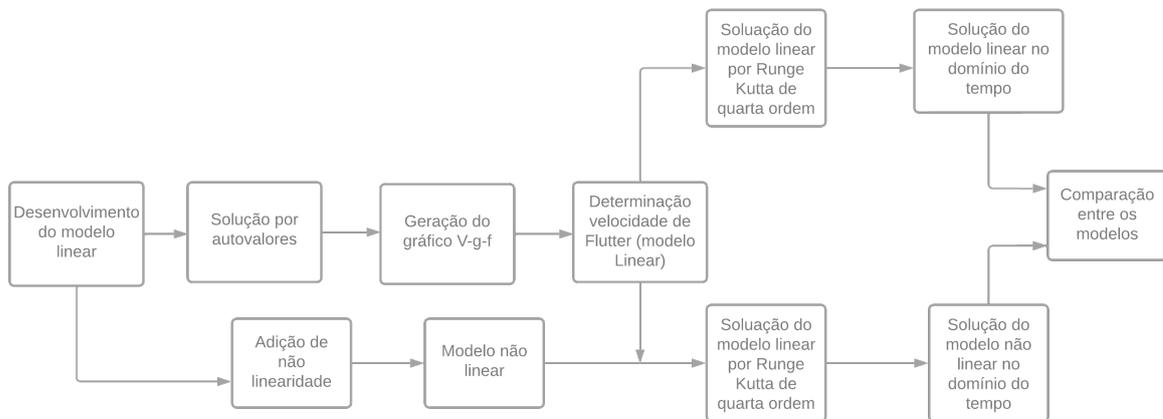


Figura 11 – Fluxograma dos processos utilizados no estudo.

Conforme ilustrado no fluxograma acima (Figura 11), iniciamos nossa investigação desenvolvendo um modelo de asa reta com uma superfície de controle fixada em seu bordo de fuga. Em seguida, determinamos a velocidade crítica de *flutter* para o modelo linear por meio da solução por autovalores. Posteriormente, introduzimos a não linearidade e aprimoramos o modelo para torná-lo não linear. Finalmente, resolvemos tanto o modelo linear quanto o não linear no domínio do tempo, utilizando o método de Runge-Kutta de quarta ordem, e procedemos à comparação dos resultados obtidos.

3.2 Solução Linear no domínio da frequência

Com base nos dados baseados no modelo estrutural de Wright e Cooper (2015), fornecidos na tabela 1, considerando amortecimento estrutural $\mathbf{D} = 0$ e utilizando o modelo descrito na seção 2.4 com a solução de autovalores e autovetores, é possível gerar um gráfico v-g-f (Figura 12) para o modelo utilizado, com o auxílio do software Matlab® (conforme mencionado no Apêndice B).

O processo para gerar o gráfico V-g-f utilizando o Matlab® envolve a implementação do modelo de três graus de liberdade no software, a resolução do sistema de equações diferenciais para obter os autovalores e autovetores correspondentes e, em seguida, a plotagem dos resultados no gráfico V-g-f.

Tabela 1 – Dados do modelo utilizado

Parâmetro	Valor	Parâmetro	Valor
Semi-envergadura (s)	7.5m	Distância x_f até x_{ac} (x_e)	0.3m
Corda (c)	2m	$M_{\dot{\theta}}$	-1.2
Hinge Line (hline)	0.8c	$M_{\dot{\beta}}$	0.1
Bordo de ataque até hline (x_h)	1.6m	Posição eixo aerodinâmico (x_{ac})	0.25c
Posição do eixo elástico (f_a)	0.4c	centro de massa	0.5c
Rigidez a flexão (EI)	$2 \times 10^7 Nm^2$	Rigidez a Torsão (GJ)	$2 \times 10^6 Nm^2$
Massa por unidade de área	$200 kg/m^2$	Densidade (ρ)	$1.225 kg/m^3$

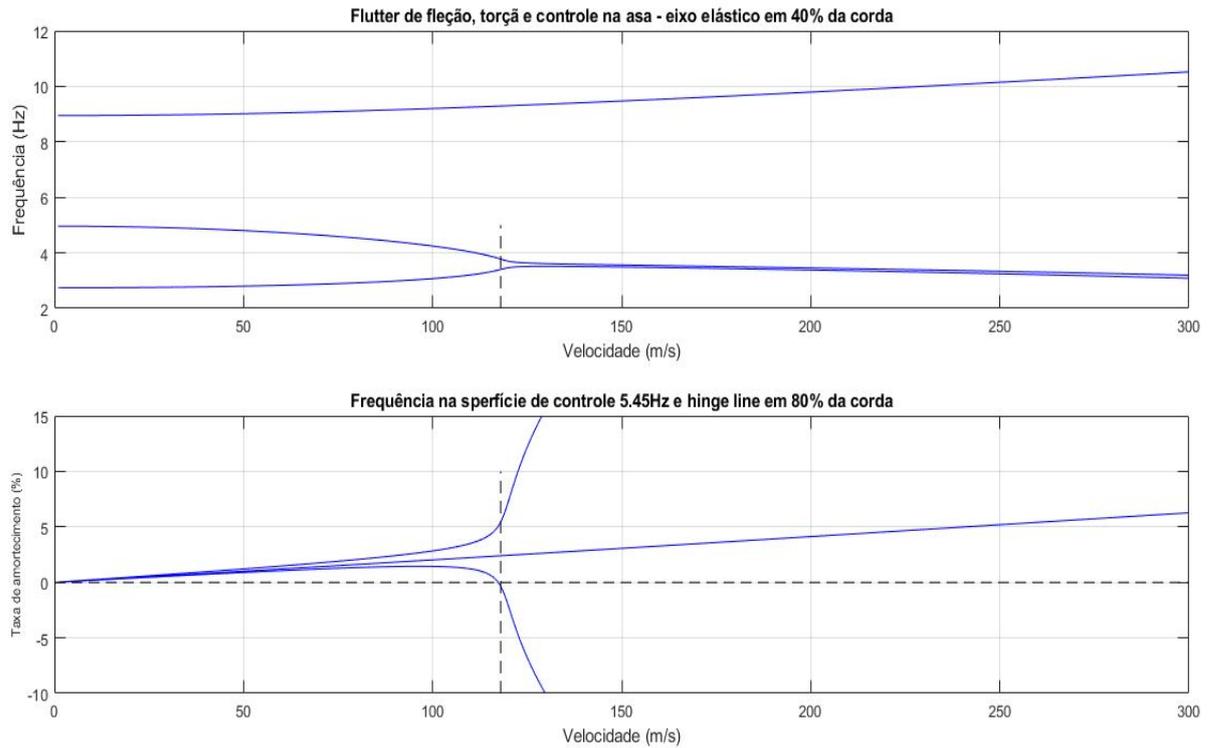


Figura 12 – Gráfico v-g-f para determinação da velocidade de *flutter*

Utilizando o software Matlab[®], foi determinado que a velocidade de eminência de *flutter*, para os dados propostos é $V_{flutter} = 117.5m/s$. Agora, com a velocidade de eminência de *flutter* conhecida, é possível verificar os gráficos de amplitude no domínio do tempo em velocidades pré, pós e próximas da velocidade de eminência *flutter*.

3.3 Solução Linear e não linear no Domínio do Tempo

Nesta seção, será feita uma análise do mesmo modelo utilizado anteriormente, porém, em vez de utilizar a solução de autovetores será feita uma integração da equação aeroelástica com a expansão de espaço de estados no domínio do tempo. Dessa forma, pode-se obter o gráfico que representa a variação da deformação ao longo do tempo.

Serão abordadas as soluções tanto do problema linear quanto do não linear, conforme introduzido na seção 2.3. Posteriormente, será feita uma comparação dos resultados e com uma análise do impacto da adição de uma rigidez cúbica nos três modos. Essa integração só é possível devido a aproximação da aerodinâmica não estacionária apresentada na seção 2.4. Será utilizado o método de integração de Runge-Kutta de quarta ordem, que foi apresentado na seção 4.2.2. Essa integração numérica permite avançar no tempo em incrementos pequenos, calculando a resposta em cada ponto.

Inicialmente, o problema foi integrado considerando o mesmo deslocamento inicial,

para que em seguida seja explorado variações desse deslocamento inicial para analisar o efeito que essa mudança tem na resposta temporal. Ao analisar diferentes deslocamentos iniciais, pode-se observar como a resposta no tempo é afetada. Isso auxilia na compreensão da influência dos deslocamentos iniciais no comportamento do sistema aeroelástico e na identificação de possíveis áreas críticas ou comportamentos não lineares que possam surgir.

Para obter os resultados mencionados, foi necessário utilizar a função **ode45** no Matlab[®] mencionado anteriormente. Essa função é amplamente utilizada para resolver problemas de valor inicial (PVI) de equações diferenciais ordinárias (EDOs) de forma geral.

Para começar a abordar o problema, é necessário reduzir a ordem das equações diferenciais apresentadas nas equações 2.61 ou 2.62. Essa redução pode ser alcançada através da aplicação da técnica de expansão de espaço de estados mencionada previamente. Com isso, obtém-se a equação diferencial $\dot{\mathbf{x}} - \mathbf{Q}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ constituída por matrizes 6×6 . Para a solução do problema, foi utilizado inicialmente como condição inicial o vetor $x_0 = [0.5, 0, 0, 0, 0, 0]$, que representa um deslocamento inicial de 0,5m no modo de flexão, e um tempo de integração de $[0,20]$ s. A Figura 13, mostra os deslocamentos dos três modos pelo tempo para o modelo linear, sem adição das não linearidades na velocidade de *flutter*.

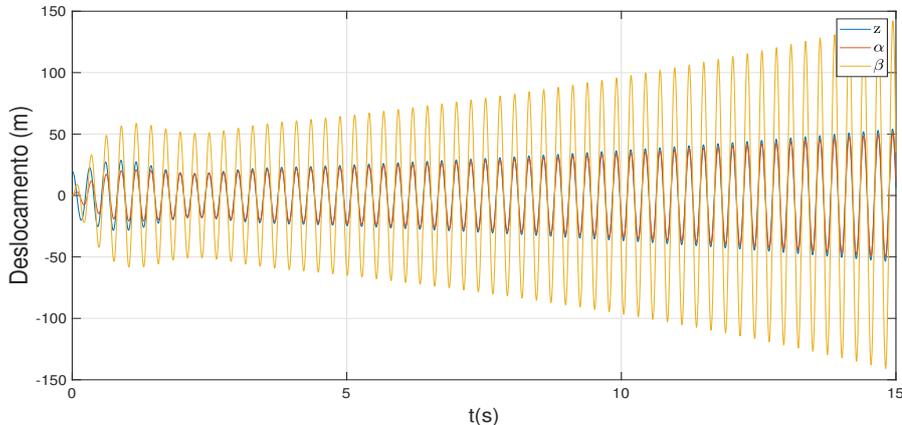


Figura 13 – Deslocamento pelo tempo dos três modos

4 Resultados

4.1 Solução no Domínio da Frequência

4.1.1 Solução por Autovalores e Autovetores

Para a solução de autovalores, será introduzida uma expressão trivial:

$$\mathbf{I} \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{I} \dot{\mathbf{q}} = 0 \quad (4.1)$$

onde \mathbf{I} é uma matriz identidade $N \times N$. Combinando a equação trivial com a Equação 2.62 utilizando a expansão de espaço de estados, obtém-se a equação:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ 0 & \mathbf{A} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \ddot{\mathbf{q}} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ -(\rho V^2 \mathbf{C} + \mathbf{E}) & -(\rho V \mathbf{B} + \mathbf{D}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (4.2)$$

Rearranjando a Equação 4.2 e pré multiplicando pela matriz inversa abaixo (Equação 4.3):

$$\left(\begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ 0 & \mathbf{A} \end{bmatrix} \right)^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}^{-1} & 0 \\ 0 & \mathbf{A}^{-1} \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

pode-se obter a equação expandida por espaço de estados:

$$\begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \ddot{\mathbf{q}} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ -\mathbf{A}^{-1}(\rho V^2 \mathbf{C} + \mathbf{E}) & -\mathbf{A}^{-1}(\rho V \mathbf{B} + \mathbf{D}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (4.4)$$

A Equação 4.4 se tornou uma equação de primeira ordem podendo ser reescrita como $\dot{\mathbf{x}} - \mathbf{Q}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ onde a matriz \mathbf{Q} é dada por:

$$\begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ -\mathbf{A}^{-1}(\rho V^2 \mathbf{C} + \mathbf{E}) & -\mathbf{A}^{-1}(\rho V \mathbf{B} + \mathbf{D}) \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

Pode-se resolver a Equação 4.5 assumindo que $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 e^{\lambda t}$, tornando a equação $\dot{\mathbf{x}} - \mathbf{Q}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ no problema clássico de autovalores e autovetores:

$$(\mathbf{Q} - \mathbf{I}\lambda)\mathbf{x}_0 = \mathbf{0} \quad (4.6)$$

De acordo com Collar e Simpson (1987a), para um sistema oscilatório, como o sistema aeroelástico, os autovalores λ do sistema de matriz \mathbf{Q} ocorrem em pares conjugados

$$\lambda_j = -\zeta_j \omega_j \pm i \omega_j \sqrt{1 - \zeta_j^2}, j = 1, 2, \dots, N \quad (4.7)$$

onde ω_j são as frequências naturais e ζ_j são os fatores de amortecimento. Os autovetores correspondentes aparecem em colunas complexas conjugadas e possuem a seguinte forma:

$$\mathbf{x}_j = \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_j \\ \lambda_j \mathbf{q}_j \end{Bmatrix}, j = 1, 2, \dots, N \quad (4.8)$$

A parte superior dos autovetores mostram os modos de vibração em coordenadas generalizadas. Resolvendo a Equação 4.4 assumindo que $q = qe^{\lambda t}$, tem-se:

$$[\lambda^2 \mathbf{A} + \lambda(\rho V(\mathbf{B} + \mathbf{D}) + (\rho V \mathbf{C} + \mathbf{E}))] \mathbf{q}_0 = \mathbf{0} \quad (4.9)$$

A análise feita por [Wright e Cooper \(2015\)](#) diz que se a parte complexa dos autovalores se tornar positiva, então o sistema se torna instável. Porém, se os autovalores forem reais, então as raízes se tornam não oscilatórias e não ocorrem em pares conjugados.

[Wright e Cooper \(2015\)](#) também apontam, entretanto, que na realidade, se não fizermos a aproximação de M_{θ} , as matrizes de rigidez e amortecimento aerodinâmicos se tornam dependentes da frequência reduzida $k = \omega b/V$, o que leva ao problema de que as matrizes \mathbf{B} e \mathbf{C} não podem ser formadas a menos que a frequência reduzida seja conhecida. E isso não pode ser determinado até que a solução dos autovalores da matriz do sistema, \mathbf{Q} , envolvendo tanto as matrizes \mathbf{B} quanto \mathbf{C} , tenha sido resolvida. Dois métodos comumente usados para a resolução desse problema são os métodos 'k' e 'p-k'.

4.1.2 Método k

Para a resolução utilizando o método K, é necessário assumir um amortecimento histerético, no qual o coeficiente de amortecimento estrutural, representado por g , é utilizado para calcular a matriz \mathbf{B} em função da matriz de rigidez estrutural \mathbf{E} . Nesse caso, a relação entre essas matrizes é dada por $\mathbf{B} = ig\mathbf{E}$, em que g é o símbolo utilizado para denotar o coeficiente de amortecimento estrutural ([WRIGHT; COOPER, 2015](#)).

Assumindo a solução harmônica $\mathbf{q} = \mathbf{q}_0 e^{i\omega t}$ e dividindo por ω^2 a Equação 2.62 se torna:

$$[\mathbf{A} - i\rho \left(\frac{b}{k}\right) \mathbf{B} - \rho \left(\frac{b^2}{k} \mathbf{C} - \frac{1 + ig}{\omega^2}\right) \mathbf{E}] \mathbf{q}_0 = \mathbf{0} \quad (4.10)$$

Reescrevendo a equação em termos da frequência reduzida k , ela se torna o problema de autovalor generalizado, em que:

$$(\mathbf{F} - \lambda \mathbf{E})\mathbf{q}_0 = \mathbf{0} \quad (4.11)$$

$$\text{onde } \mathbf{F} = [\mathbf{A} - i\rho\left(\frac{b}{k}\right)\mathbf{B} - \rho\left(\frac{b}{k}\right)^2 \mathbf{C}] \quad (4.12)$$

$$\text{e } \lambda = \frac{1 + ig}{\omega^2} \quad (4.13)$$

Também pode-se observar que:

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{\text{Re}(\lambda)}} \quad (4.14)$$

$$g = 2\zeta = \frac{\text{Im}(\lambda)}{\text{Re}(\lambda)} \quad (4.15)$$

$$V = \frac{\omega c}{2k} \quad (4.16)$$

Wright e Cooper (2015) definem que para cada frequência reduzida de interesse deve-se:

1. Calcular as matrizes \mathbf{B} e \mathbf{C} correspondentes.
2. Resolver o problema de autovalores complexos na Equação 4.11 para obter os autovalores complexos λ .
3. Determinar as frequências e coeficientes de amortecimento a partir dos autovalores usando a Equação 4.11.
4. Relacionar esses valores à velocidade do ar por meio da definição da frequência reduzida k na Equação 4.11.

Após seguir esses procedimentos para as demais frequências reduzidas, os valores das frequências correspondentes e dos coeficientes de amortecimento devem ser colocados em um gráfico V_ω e V_g . Wright e Cooper (2015) levantam algumas objeções ao método K, principalmente em relação às aproximações que são feitas. A principal objeção diz respeito à aproximação utilizada para o amortecimento estrutural (\mathbf{D}), pois em condições em que g não é zero, as frequências e amortecimentos obtidos não representam adequadamente o comportamento real do sistema.

4.1.3 Método p-k

Para o método 'p-k', Wright e Cooper (2015) não utilizam uma aproximação estrutural, e sim, eles utilizam um método iterativo, e sugerem que para cada velocidade de interesse, deve-se:

1. Fazer uma estimativa inicial para a frequência do modo (geralmente usando resultados anteriores da velocidade do ar ou condições de voo sem vento) e calcular a frequência reduzida correspondente para a combinação de velocidade do ar/frequência.
2. Determinar as matrizes de rigidez e amortecimento aerodinâmico \mathbf{B} e \mathbf{C} usando essa frequência reduzida assumida.
3. Calcular as frequências do sistema nessa condição de voo usando a solução dos autovalores da matriz mostrada na Equação 4.4 para a forma de primeira ordem.
4. Escolher a solução de frequência mais próxima da estimativa inicial e repetir o processo.
5. Continuar até que as frequências convirjam observando os coeficientes de amortecimento.

Para a determinação da velocidade de *flutter* utilizando esse método, se faz necessário colocar em um gráfico as frequências, coeficientes de amortecimento e velocidades, cada uma correspondendo a uma frequência reduzida. A velocidade de *flutter* será aquela onde o amortecimento se torna zero, ou seja, onde a linha do amortecimento toca o eixo da abscissa.

4.1.4 Diagramas V-g-f

A análise de *flutter* em sistemas aeroelásticos é fundamental para garantir a estabilidade e segurança das estruturas. Esse estudo pode ser realizado através de diferentes métodos, incluindo a solução por autovalores e autovetores, bem como os métodos k ou p-k. Uma das principais ferramentas para a análise de *flutter* é a construção dos gráficos de velocidade (v) em função da frequência (f) e da razão de amortecimento (WRIGHT; COOPER, 2015).

Esses gráficos permitem identificar pontos críticos em que as frequências de excitação se aproximam das frequências naturais do sistema. A análise dos autovalores é essencial para estudar a coalescência dessas frequências naturais e o comportamento das curvas de amortecimento. Os gráficos V-g-f também mostram o momento em que o amortecimento se torna nulo, mostrando o momento em que se ocorre o *flutter*.

A interpretação dessas representações gráficas é crucial para avaliar as condições em que o *flutter* pode ocorrer e estabelecer limites de segurança para o projeto e operação das estruturas aeroelásticas. Através dessas análises, é possível identificar ressonâncias e comportamentos dinâmicos que possam comprometer a integridade estrutural da aeronave ou do sistema em estudo. A Figura 14, mostra um exemplo de um gráfico V-g-f dado por Wright e Cooper (2015) para o caso de um modelo binário de asa reta.

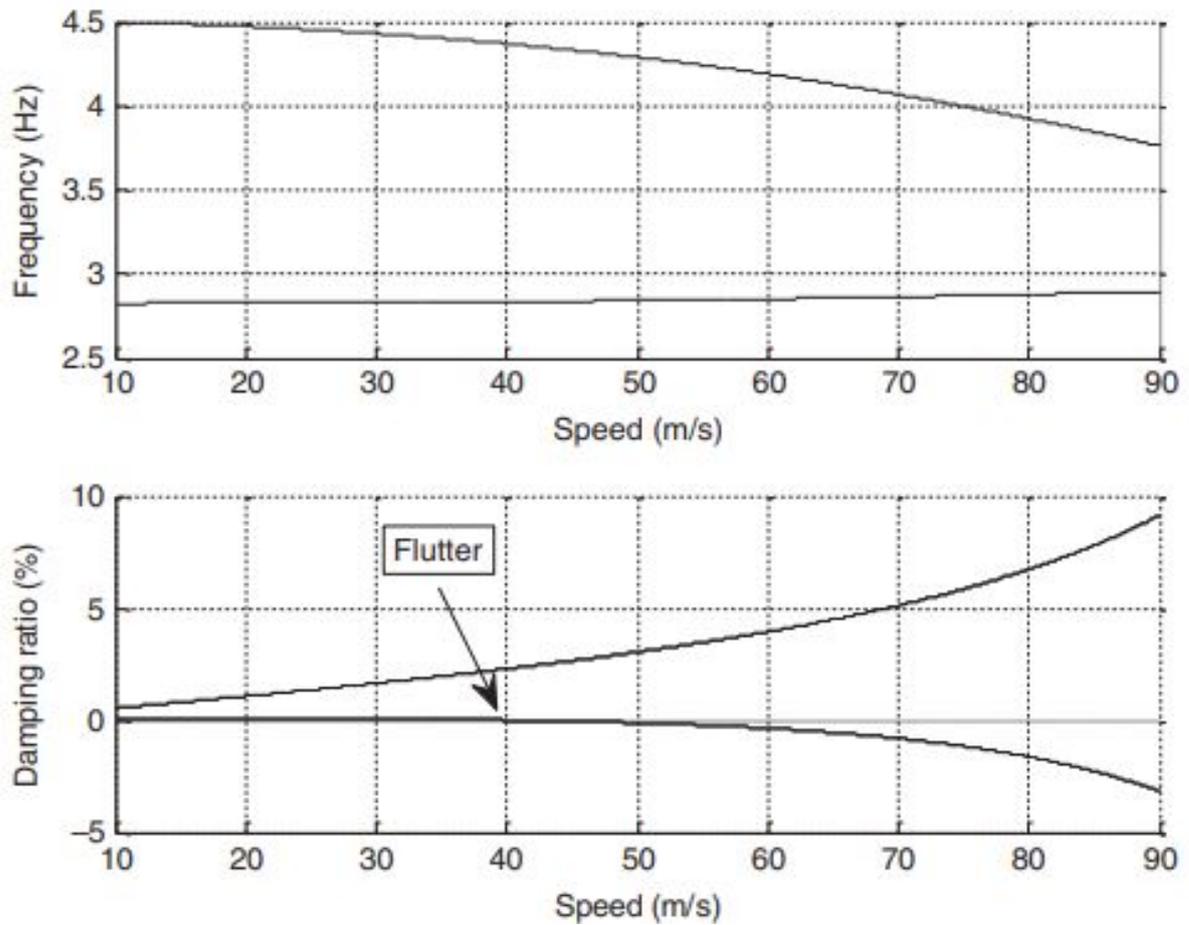


Figura 14 – Gráfico v-g-f. Fonte: [Wright e Cooper \(2015\)](#)

4.2 Solução no Domínio do tempo

4.2.1 Adição de não linearidades

Utilizando do modelo apresentado por [Dimitriadis \(2017\)](#) mostrado na seção 2.3.2.1 e mantendo os outros parâmetros iguais aos utilizados na seção 2.4. Ao aplicar a rigidez cúbica à equação obtida pela expansão de espaço de estados 4.4, podendo ser escrita como $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Q}\mathbf{x}$ onde \mathbf{Q} foi obtido na seção 4.1.1 (Equação 4.5), tem-se:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Q}\mathbf{x} + \mathbf{L}k_{z3}k_z z^3 \quad (4.17)$$

onde $\mathbf{Q}\mathbf{nlz}$ é a matriz utilizada para para a adição da não linearidade, neste caso dada por:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} -\mathbf{A}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 5} \\ \mathbf{0}_{3 \times 6} \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

onde a matriz \mathbf{A} é a matriz de massa definida na seção 2.4.

Pode-se observar através da Equação 4.18 que a adição de uma rigidez cúbica interfere nos três graus de liberdade, mostrando um acoplamento do sistema.

De forma análoga à não linearidade anterior, tem-se:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Q}\mathbf{x} + \mathbf{M}k_{\theta 3}k_{\theta}\theta^3 \quad (4.19)$$

onde a matriz \mathbf{Qnl}_{θ} é dada por

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 5} \\ \mathbf{0}_{3 \times 6} \end{bmatrix} - \mathbf{A}^{-1} \quad (4.20)$$

De forma análoga as anteriores tem-se:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Q}\mathbf{x} + \mathbf{N}k_{\beta 3}k_{\beta}\beta^3 \quad (4.21)$$

onde \mathbf{Qnl}_{β} é dado por

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 5} \\ \mathbf{0}_{3 \times 6} \end{bmatrix} - \mathbf{A}^{-1} \quad (4.22)$$

4.2.2 Método de Runge Kutta

O método de Runge-Kutta consiste em obter uma solução aproximada da EDO em pontos discretos ao longo de um intervalo de interesse. Ao contrário do método de Euler, que utiliza apenas uma única estimativa da derivada, o método de Runge-Kutta utiliza uma combinação ponderada de várias estimativas da derivada em diferentes pontos do intervalo (ISERLES, 2009).

A ideia central do método de Runge-Kutta é dividir o intervalo em vários subintervalos menores e calcular uma média ponderada das derivadas em cada subintervalo. Essas

derivadas ponderadas são então usadas para atualizar a estimativa da solução em cada ponto discreto. A precisão do método pode ser ajustada variando o número de pontos e o tamanho dos subintervalos (KIM, 2023).

A fórmula geral pode ser descrita como:

$$y_{i+1} = y_i + \phi(x_i, y_i, h)h \quad (4.23)$$

onde $\phi(x_i, y_i, h)$ é chamado de função incremento, podendo ser escrita como:

$$\phi = a_1k_1 + a_2k_2 + \dots + a_nk_n \quad (4.24)$$

onde a_n são constantes e k_n podem ser descritos como:

$$k_1 = f(x_i, y_i) \quad (4.25)$$

$$k_2 = f(x_i + p_1h, y_i + q_{11}k_1h) \quad (4.26)$$

$$k_3 = f(x_i + p_2h, y_i + q_{21}k_1h + q_{22}k_2h) \quad (4.27)$$

$$k_n = f(x_i + p_{n-1}h, y_i + q_{n-1,2}k_2h + \dots + q_{n-1,n-1}k_{n-1}h) \quad (4.28)$$

onde p e q são constantes.

4.2.2.1 Runge-Kutta de quarta ordem

O método de Runge-Kutta de quarta ordem, utilizado nesse estudo devido ao seu erro reduzido em relação as outras ordens, utiliza a mesma lógica das ordens anteriores. A forma mais comum (KIM, 2023) é dada pela Equação 4.29 abaixo:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)h \quad (4.29)$$

onde

$$k_1 = f(x_i, y_i) \quad (4.30)$$

$$k_2 = f(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1h) \quad (4.31)$$

$$k_3 = f(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_2h) \quad (4.32)$$

$$k_4 = f(x_i + h, y_i + k_3h) \quad (4.33)$$

Para a utilização do método de Runge-Kutta de quarta ordem no Matlab®, utilize-se a função **ode45** que pode ser formulado da seguinte maneira:

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \quad \text{onde} \quad x(t_0) = x_0 \quad (4.34)$$

onde t é a variável independente, x é um vetor de variáveis dependentes a serem encontradas e $f(t, x)$ é uma função de t e x .

4.2.3 Solução para a rigidez cúbica no modo de torção

Nessa seção será observado observado como a introdução e variação do coeficiente da não linearidade $k_{\theta 3}$ no modo de torção influencia a velocidade de *flutter* e os deslocamentos do sistema pelo tempo. Começando com um valor arbitrário de $k_{\theta 3} = 0.001$, será feita uma varredura de velocidades que se iniciará em uma velocidade antes da de *flutter* (105m/s) e terminará depois da mesma (120m/s), para se determinar em que momento as amplitudes máximas começam a crescer exponencialmente, indicando o *flutter* ou uma possível LCO para o modelo não linear. Após a geração de diferentes gráficos de máxima amplitude para diferentes intervalos de velocidades, obteve-se a Figura 15 que mostra o gráfico das amplitudes pelas velocidades para o intervalo de $V = 119 \text{ m/s}$ e 119.5 m/s , mostrando uma possível LCO.

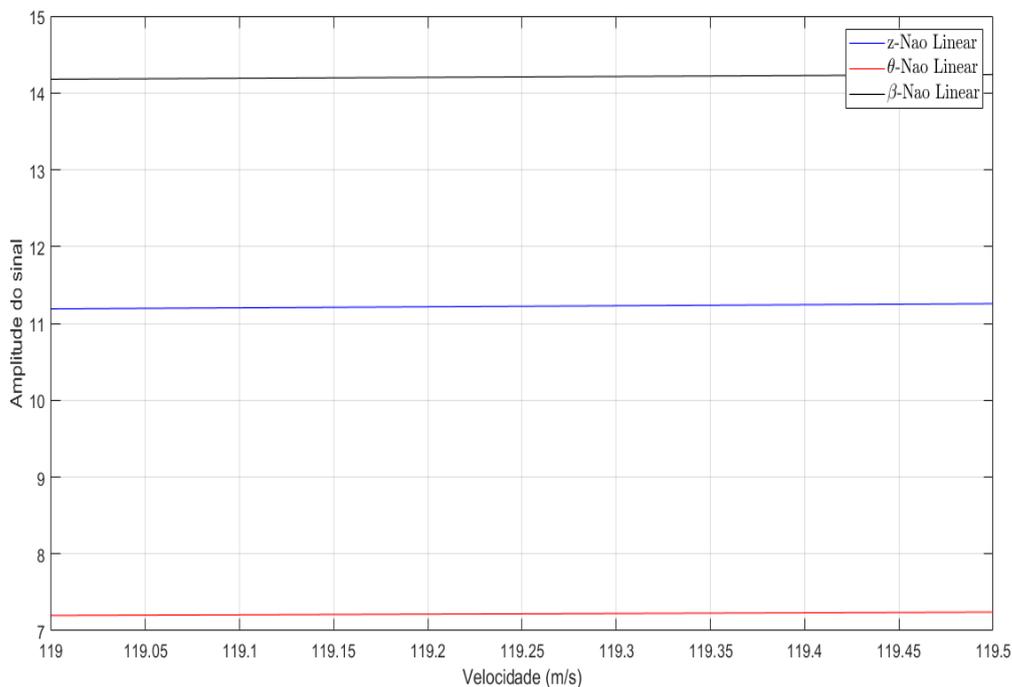


Figura 15 – Amplitudes máximas para variação de velocidade com $k_{\theta 3} = 0.001$

Ao adotar $k_{\theta 3} = 0.001$, nota-se que o modelo não linear inicia o *flutter* após o modelo linear, no intervalo de velocidade entre $V = 119 \text{ m/s}$ e 119.5 m/s . A Figura 16 exibe as deformações ao longo do tempo nos modos do modelo não linear para a velocidade de $V =$

119.45m/s, indicando uma possível oscilação de ciclo limite (LCO), devido ao fato dela não crescer exponencialmente.

Outra maneira de comparar os dois modelos é por meio dos gráficos de velocidade em relação à deformação, especialmente no modo de torção para esse caso específico, conforme representado na Figura 17, onde a cor azul representa o modelo linear e a cor vermelha representa o não linear. Para a relação entre velocidade e deformação nos outros modos, consulte o Apêndice A.

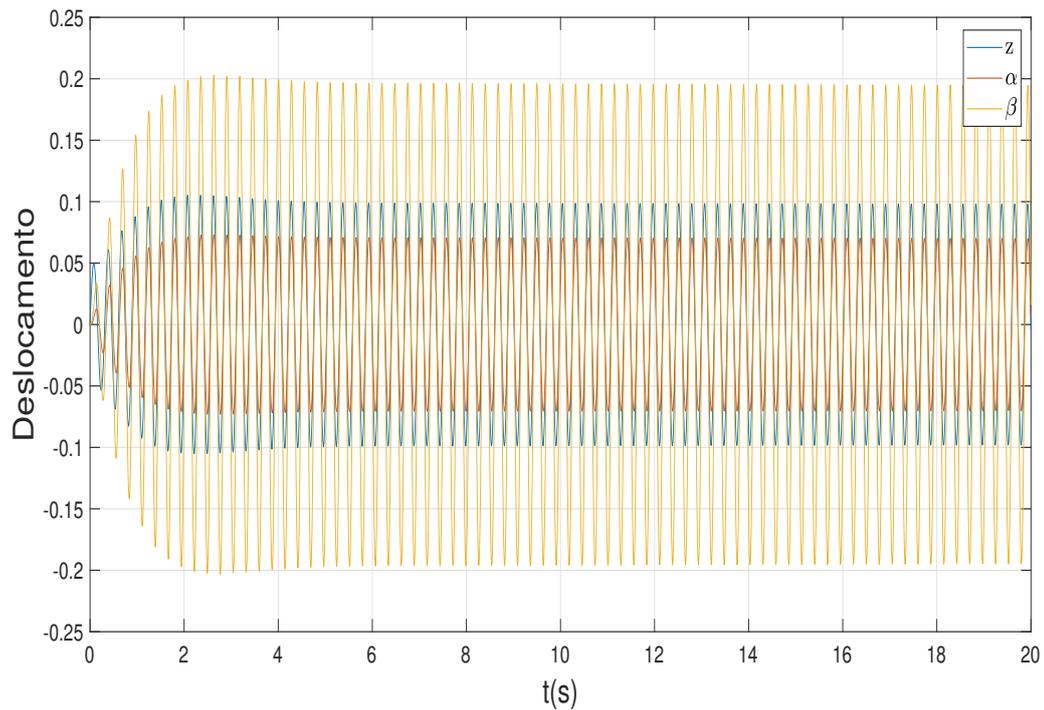


Figura 16 – Deslocamentos no tempo para $V = 119.5$ m/s

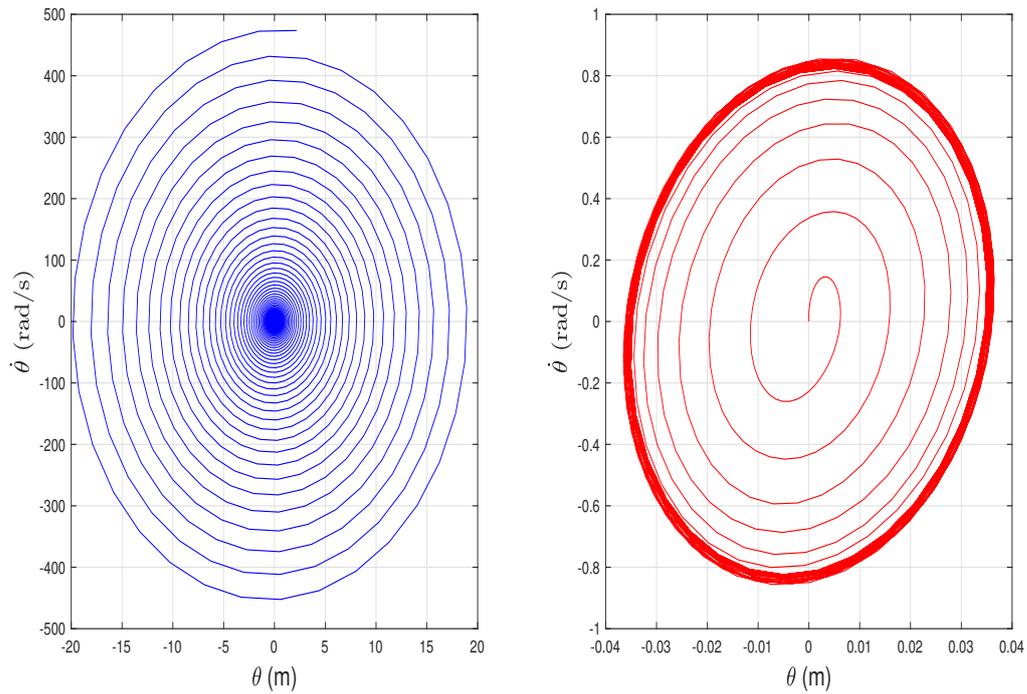


Figura 17 – Velocidade pelo deslocamento para $V = 119.5$ m/s

Pode-se observar da Figura 15 que enquanto o modelo linear entra em *flutter* na velocidade de $V = 117.5$ m/s o modelo não linear é impedido de fazê-lo, pois é necessário uma maior velocidade para que ele possa entrar em *flutter*, como é mostrado na Figura 16. Aumentando o valor dessa não linearidade para $k_{\theta 3} = 0.002$, obtém-se a Figura 18.

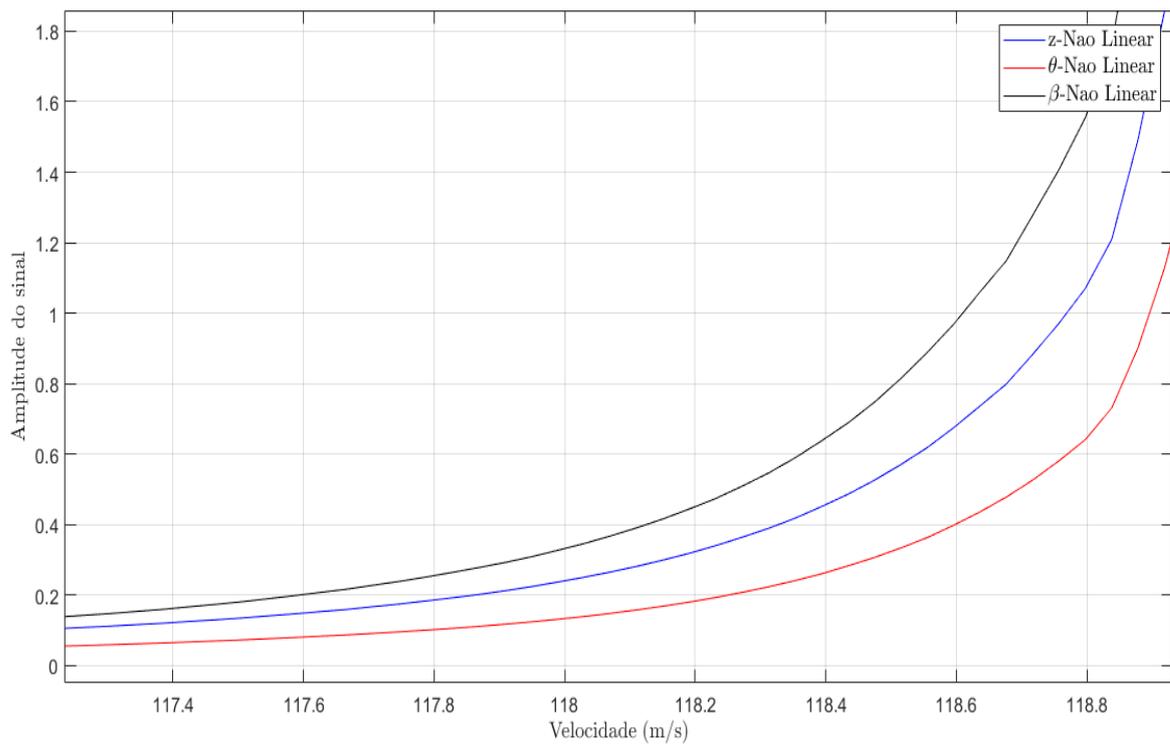
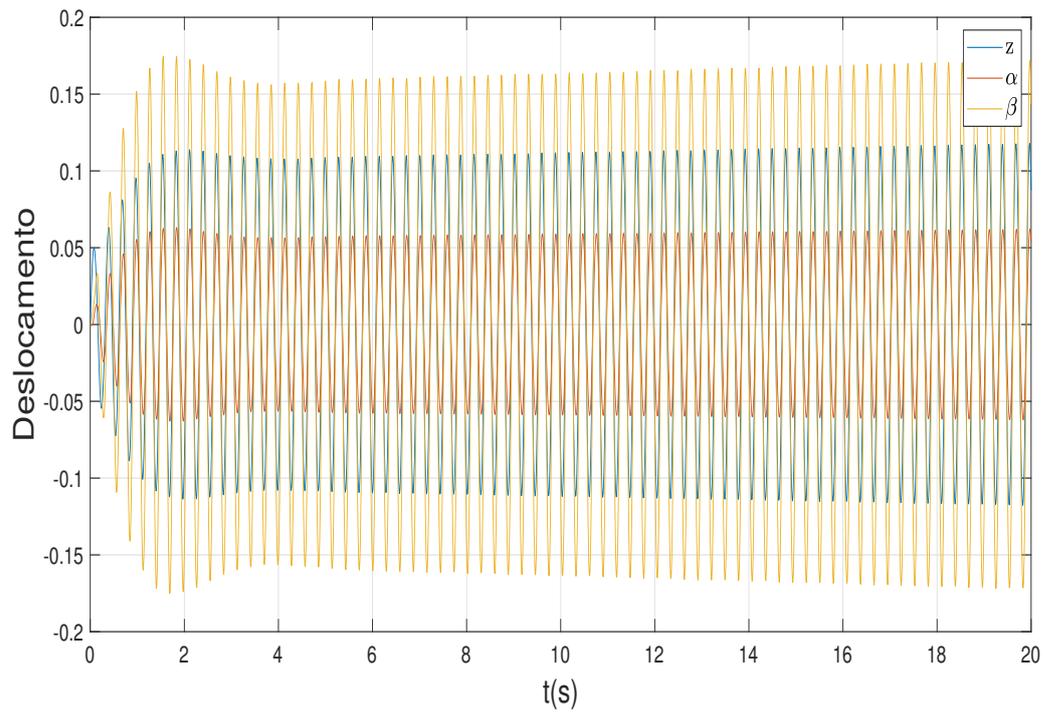
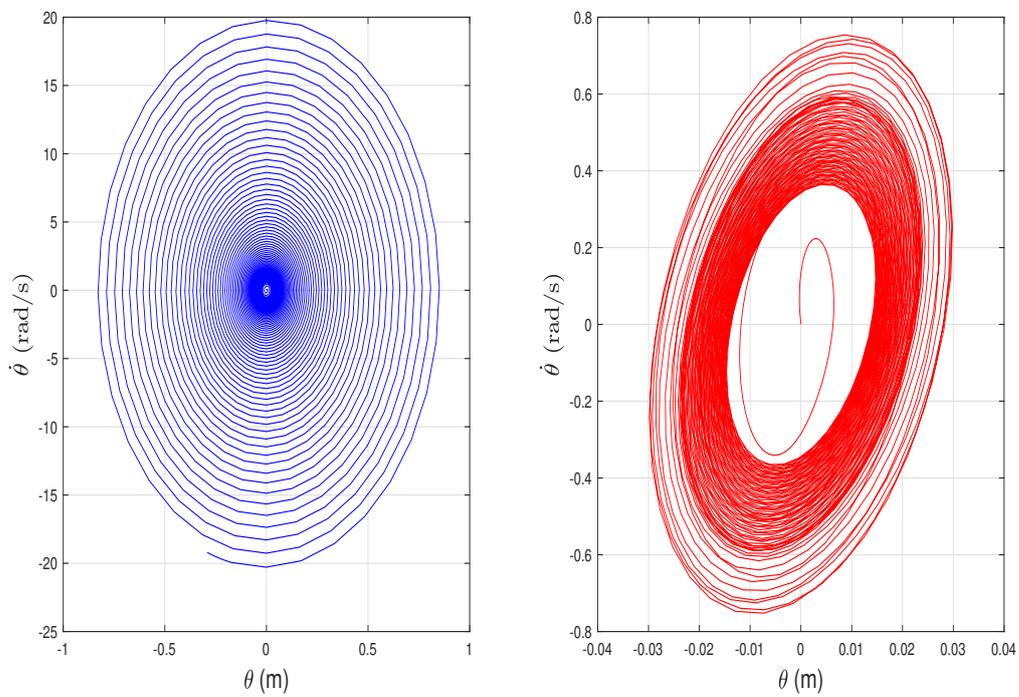


Figura 18 – Amplitudes máximas para variação de velocidade com $k_{\theta 3} = 0.002$

É possível observar através do gráfico apresentado na Figura 18 que ao aumentar a não linearidade, as amplitudes máximas crescem para o infinito a uma velocidade ainda acima do modelo linear, na faixa de $V = 118.85m/s$. A Figura 19 mostra a deformação pelo tempo do modelo não linear para essa velocidade supracitada, enquanto a Figura 20 mostra o gráfico da velocidade pela deformação no modo de torção.

Figura 19 – Deslocamentos no tempo para $V = 118.85$ m/sFigura 20 – Velocidade pelo deslocamento para $V = 118.85$ m/s

Ao comparar os gráficos não lineares com os lineares (Figura 20), é possível observar uma simetria presente e um comportamento previsível nos gráficos do modelo linear. Isso ocorre devido à relação linear entre a velocidade e a deformação. No entanto, com a inclusão da rigidez cúbica, essa relação se torna não linear. Isso significa que a mudança na velocidade já não é mais proporcional à mudança na deformação, mas sim depende da forma não linear da rigidez (DIMITRIADIS, 2017).

Ainda, comparado ao comportamento linear, onde as linhas estão mais próximas, a inclusão da rigidez cúbica introduz uma mudança lenta na velocidade e na deformação, refletindo-se em um maior espaçamento entre as linhas do gráfico, até o momento em que o modelo não linear entra em *flutter*, onde as linhas se tornam mais próximas, mostrando um aumento mais acelerado na proporção velocidade pela deformação Dimitriadis (2017). Para os gráficos nos outros modos, consultar A. Em seguida, o valor da rigidez cúbica foi definido como $k_{\theta 3} = 0.003$, gerando o gráfico mostrado na Figura 21.

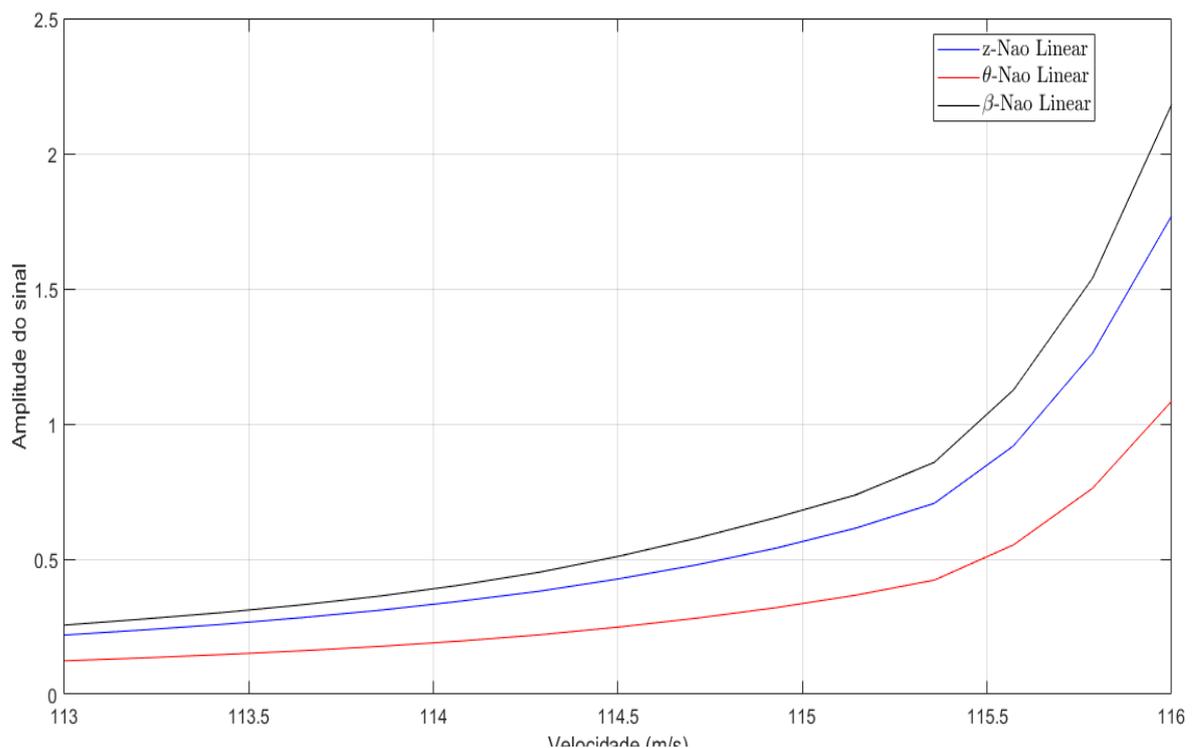


Figura 21 – Amplitudes máximas para variação de velocidade com $k_{\theta 3} = 0.003$

Por meio da Figura 21, é perceptível que as amplitudes máximas agora tendem ao infinito em velocidades abaixo de 116 m/s, mostrando que a velocidade de *flutter* para o modelo não linear atinge agora é entre uma faixa de $V = 113$ m/s e $V = 116$ m/s. Após uma simulação para as velocidades nessa faixa, obtém-se a Figura 22 que ilustra o momento em que o sistema entra em *flutter* a uma velocidade de $V = 115.5$ m/s, e compara os gráficos de deslocamento ao longo do tempo para ambos os modelos. É evidente que o modelo linear

exibe amortecimento com o passar do tempo, ao passo que o modelo não linear indica uma oscilação de ciclo limite.

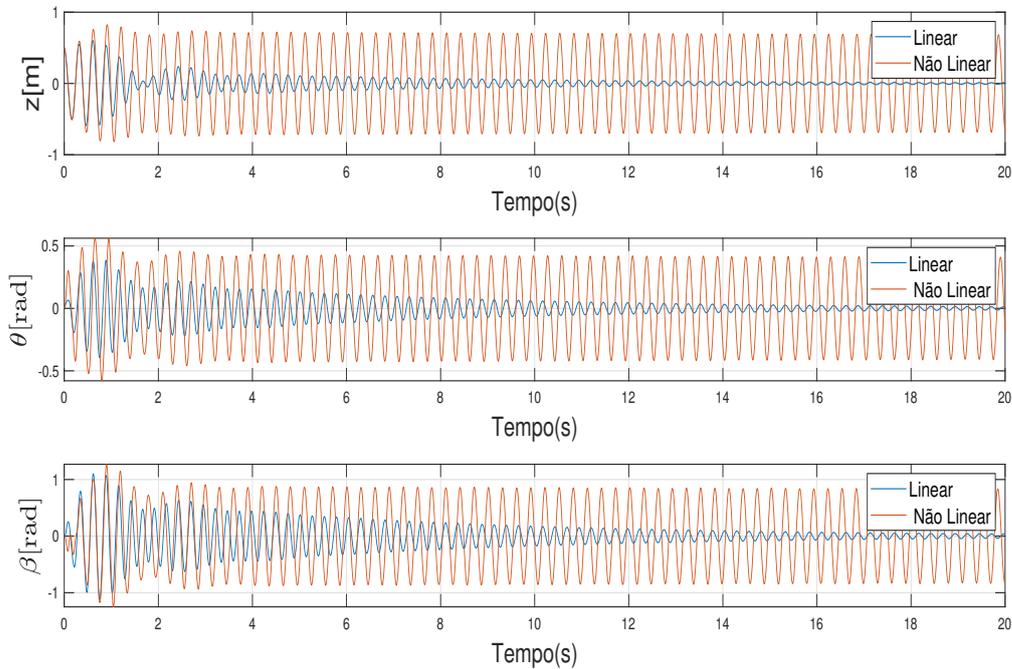


Figura 22 – Deslocamentos no tempo para $V = 115.5$ m/s

Da mesma forma que anteriormente, foram realizados testes com mais dois valores de não linearidades, $k_{\theta 3} = 0.0001$, $k_{\theta 3} = 0.004$, $k_{\theta 3} = 0.005$. Os resultados obtidos para todas as variações do coeficiente de não linearidade, juntamente com suas correspondentes velocidades de *flutter*, foram compilados na tabela a seguir (Tabela 4.2.5). Os gráficos da amplitude pela velocidade e da deformação pelo tempo dos outros valores de coeficiente de rigidez cúbica podem ser encontrados no apêndice A.

Tabela 2 – Coeficientes de não linearidade e velocidades de *flutter* no modo de torção

$K_{\theta 3}$	Velocidade(<i>flutter</i>) (m/s)
0.0001	118
0.001	119.5
0.002	118.9
0.003	115.5
0.004	111
0.005	106.4

Na Tabela 2, é evidente a variação irregular e desproporcional da velocidade de *flutter* em relação ao coeficiente de rigidez cúbico. Ao empregar um valor de rigidez cúbico de

$k_{\theta 3} = 0.0001$, observa-se uma tendência à aproximação do comportamento ao modelo linear, conforme demonstrado por Dimitriadis (2017). Entretanto, ao aumentar essa não linearidade para $k_{\theta 3} = 0.002$, ocorreu um aumento na velocidade de *flutter*, seguido por uma diminuição à medida que a rigidez cúbica foi aumentada.

A amplificação das oscilações e o surgimento de comportamentos não lineares após aumentar a rigidez cúbica ocorrem devido à natureza não linear da relação entre a força aplicada e o deslocamento resultante (SHARMA, 2005). Quando a rigidez cúbica é aumentada, a influência dos termos não lineares na equação do movimento aumentam significativamente. Isso significa que o comportamento da estrutura se torna mais sensível às mudanças de amplitude e as oscilações podem se tornar mais pronunciadas.

4.2.4 Solução para a rigidez cúbica no modo de torção da Superfície de controle

Para iniciar a abordagem da inclusão da não linearidade no modo de torção da superfície de controle, será apresentado inicialmente um gráfico de amplitudes em função da velocidade (Figura 23) e da deformação ao longo do tempo para a velocidade de *flutter* (Figura 24) do modelo linear, utilizando o método de autovalores apresentado na seção 4.1 utilizando as mesmas condições iniciais e intervalo de tempo de integração. Esses gráficos visam destacar a intensidade do modo de torção da superfície de controle em comparação com outros modos.

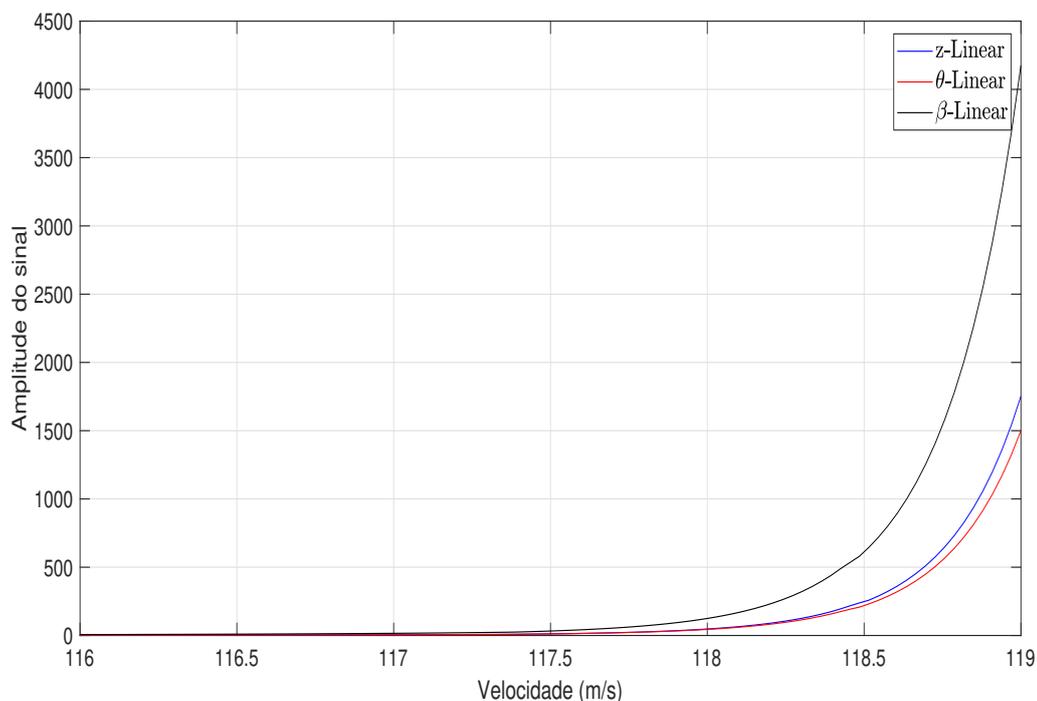


Figura 23 – Amplitudes máximas para variação de velocidade do modelo linear

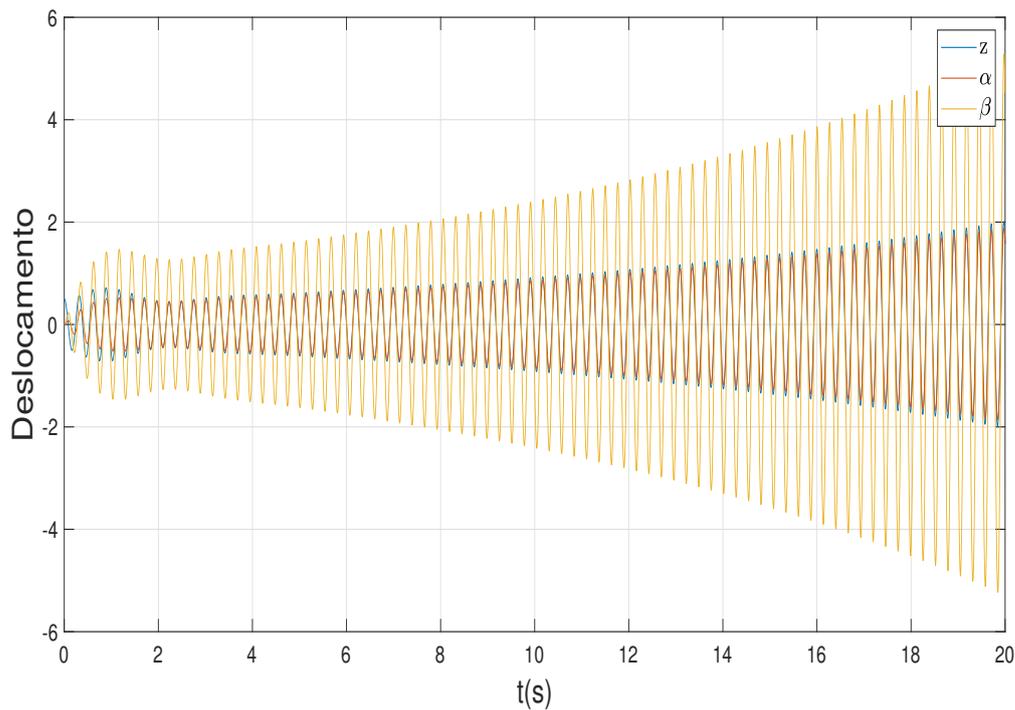


Figura 24 – Deslocamentos no tempo para $V = 117.5 \text{ m/s}$

Pode-se ser observado nas Figuras 23 e 24 que o modo de rotação da superfície de controle é o mais afetado durante o *flutter*. Isso pode ocorrer devido a liberdade de rotação da superfície de controle, a não ser que haja um bloqueio desse movimento (ELLER, 2007). No contexto de um modelo cúbico, a folga (*freeplay*) pode ser considerada uma forma de não linearidade cúbica, pois a resistência ao movimento aumenta de maneira não linear à medida que a deflexão ultrapassa certos limites, mostrando a importância do estudo da adição de um modelo de rigidez cúbica para outros modos além do de torção.

Seguindo uma abordagem análoga à consideração do modo de torção, utilizando as mesmas condições iniciais, o mesmo intervalo de tempo de integração, porém, mudando o intervalo da varredura de velocidades, devido ao fato que o modelo não linear entra em *flutter* em velocidades abaixo das obtidas para o modo anterior, utilizando então um intervalo de $V = 75 \text{ m/s}$ até $V = 118 \text{ m/s}$. será feita a variação do coeficiente de rigidez cúbica da superfície de controle ($k_{\beta 3}$) para examinar o impacto dessa variação na velocidade de *flutter* e nas deformações associadas a todos os modos de vibração assumidos, começando com o valor de $K_{\beta 3} = 0.0005$. A Figura 25 abaixo, mostra as amplitudes máximas com a variação da velocidade para esse coeficiente.

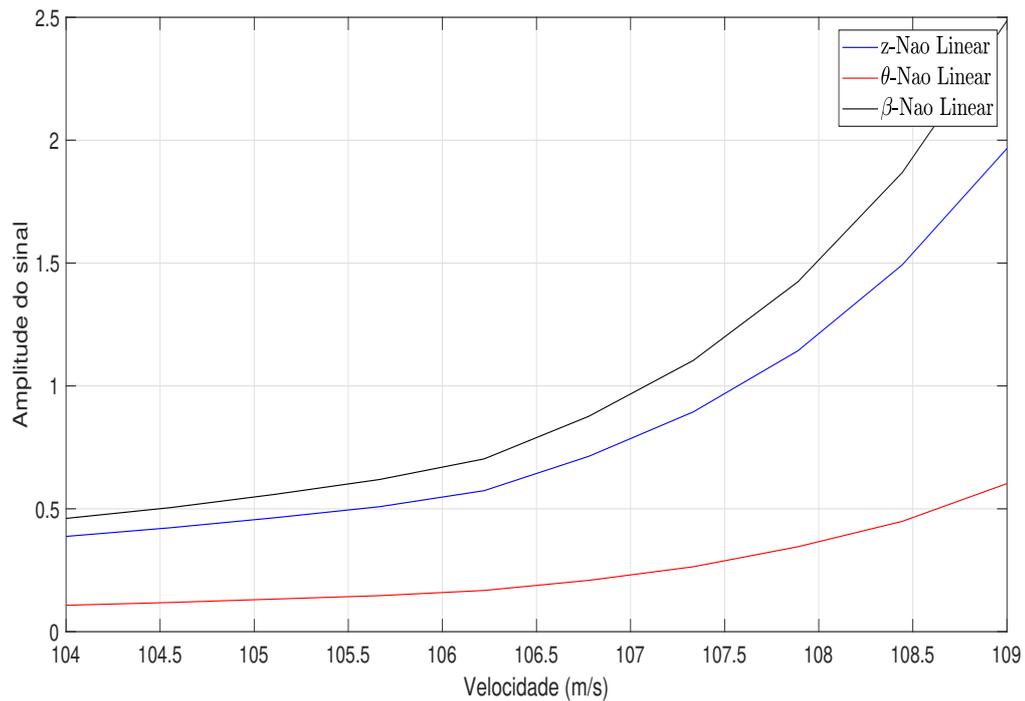
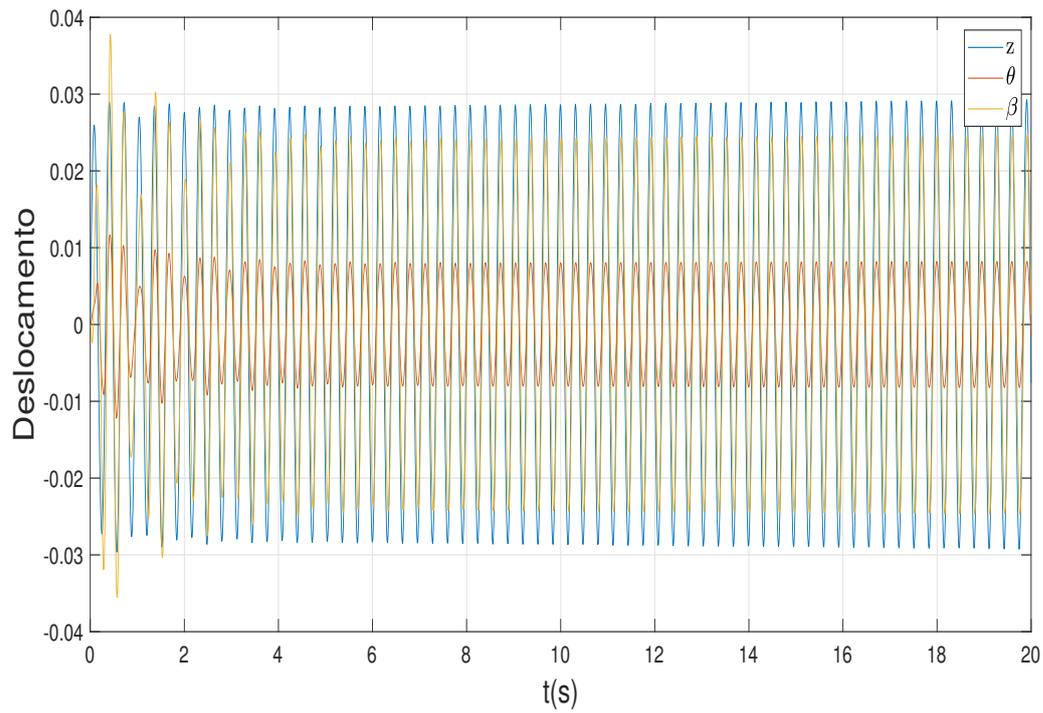
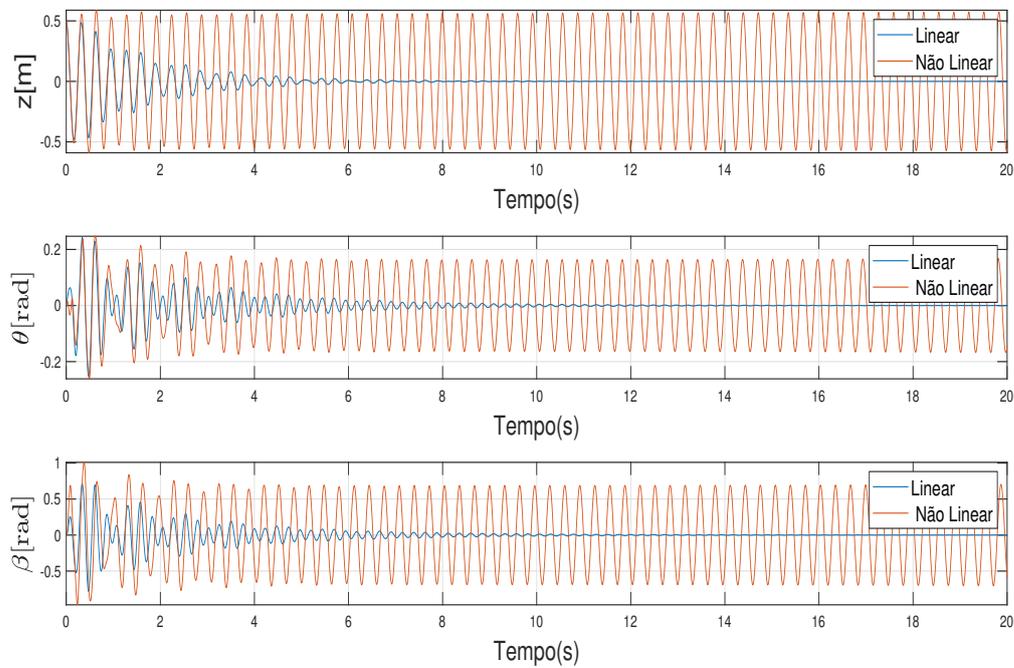


Figura 25 – Amplitudes máximas para variação de velocidade para $k_{\beta 3} = 0.0005$

Analisando o gráfico, é evidente que a velocidade de *flutter* ocorre em aproximadamente $V = 106\text{m/s}$. Com base nisso, foram geradas as Figuras 26 e 27, nas quais é possível identificar uma potencial LCO.

Figura 26 – Deslocamentos no tempo para $V = 106$ m/sFigura 27 – Comparação entre modelos para $V = 106$ m/s

Devido a alta reatividade do modo de torção da superfície de controle, serão utilizadas variações menores do coeficiente de rigidez cúbico $k_{\beta 3}$, passando agora para $k_{\beta 3} = 0.001$. A Figura 28 mostra as amplitudes pelas velocidades para esse coeficiente.

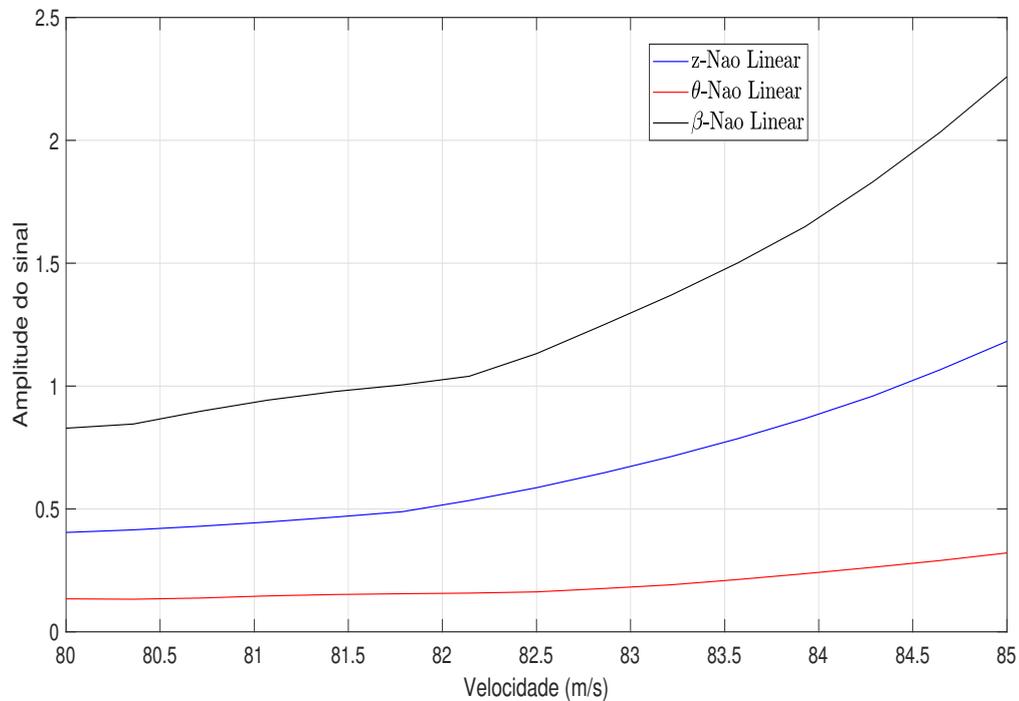
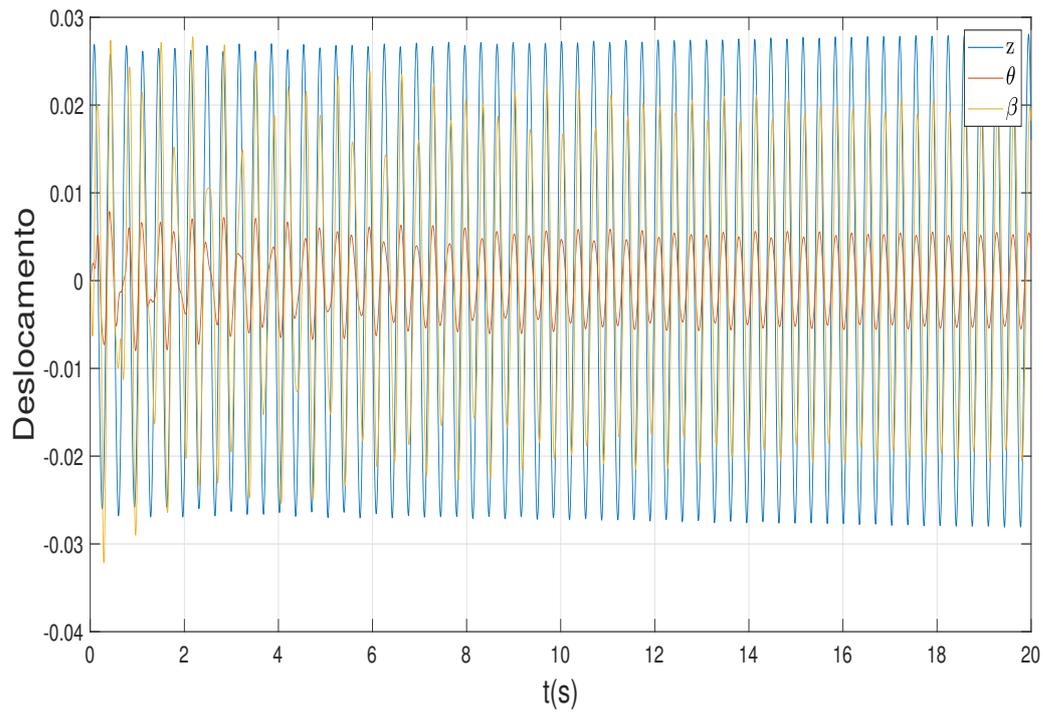
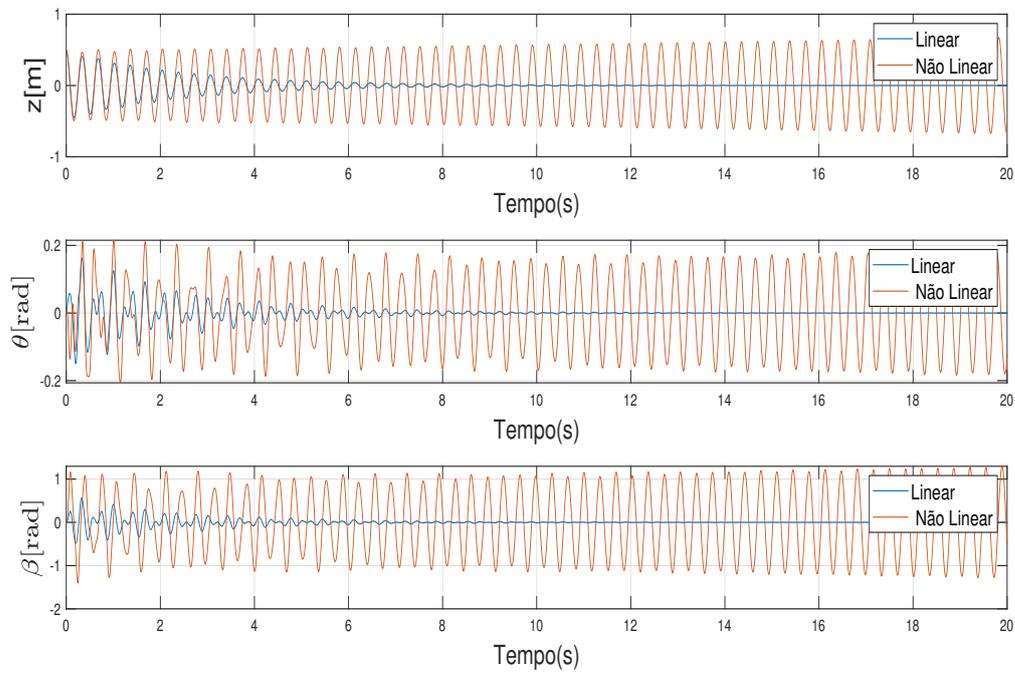


Figura 28 – Amplitudes máximas para variação de velocidade para $k_{\beta 3} = 0.001$

Conforme ilustrado na Figura 28, nota-se que a velocidade de *flutter* para este modelo reduziu de 106m/s para $k_{\beta 3}=0.0005$ para aproximadamente 82m/s para $k_{\beta 3} = 0.001$. Essa alteração pode ser atribuída à menor rigidez do modo de torção da superfície de controle em comparação com os outros modos, tornando-o mais suscetível às influências das não linearidades. As Figuras 29 e 32 apresentam a variação do deslocamento ao longo do tempo e a entre os dois modelos, respectivamente.

Figura 29 – Deslocamentos no tempo para $V = 82$ m/sFigura 30 – Comparação entre modelos para $V = 82$ m/s

De forma análoga ao feito no modo de torção, foi gerado uma tabela mostrando a variação da velocidade de *flutter* com o aumento da não linearidade do tipo cúbica.

Tabela 3 – Coeficientes de não linearidade e velocidades de *flutter* no modo de torção da superfície de controle

$K_{\beta 3}$	Velocidade(<i>flutter</i>) (m/s)
0.0001	119.4
0.0003	117.9
0.0005	106
0.0007	94
0.001	82

É interessante ressaltar que para o coeficiente $k_{\beta 3} = 0.0007$, foi identificado uma posição LCO, como mostrado nas Figuras 31 e 32. É possível observar que não é possível observar uma LCO para todos os valores testados.

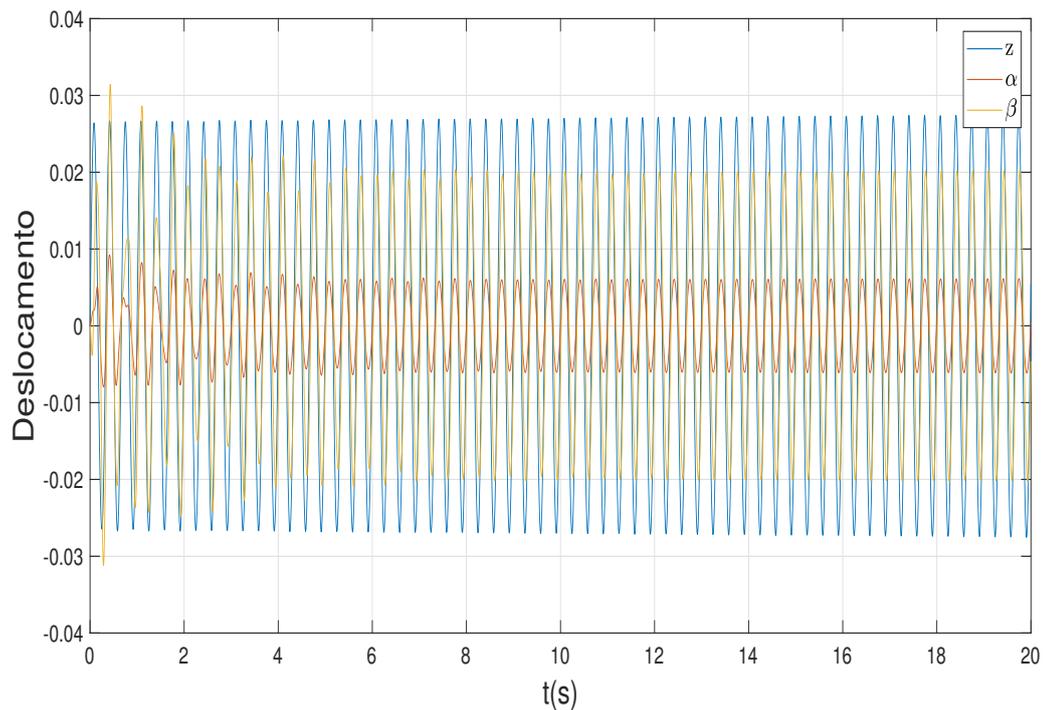


Figura 31 – Deslocamentos no tempo para $V = 94$ m/s

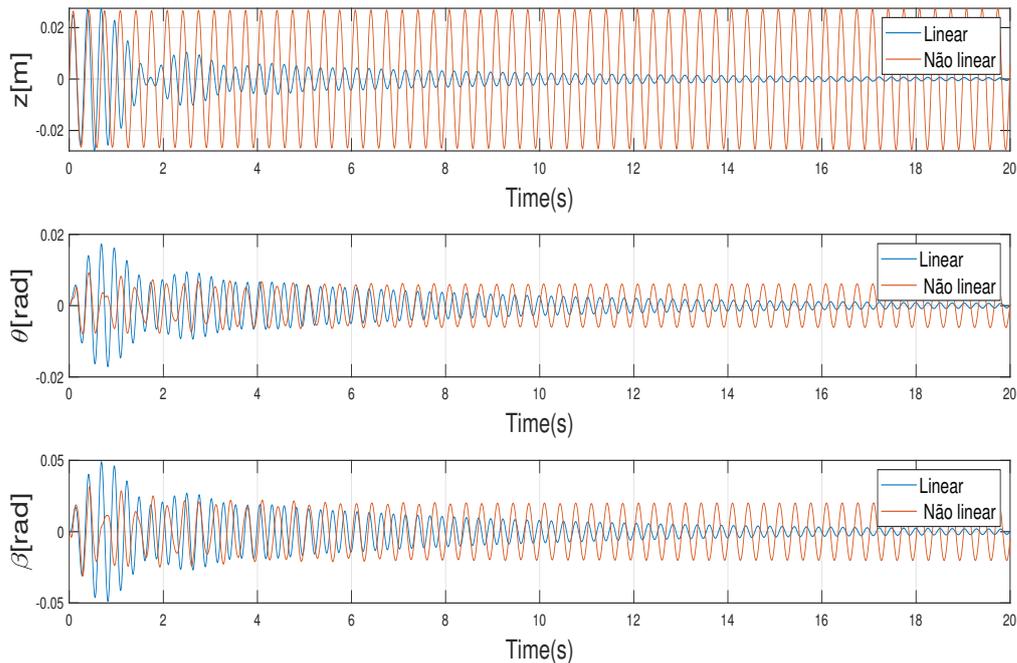


Figura 32 – Comparação entre modelos para $V = 94$ m/s

Observa-se claramente que o modo de flexão é mais impactado do que os outros modos, o que se deve à sua maior rigidez, frequência natural superior e, conseqüentemente, maior amplitude. Essa característica evidencia o acoplamento entre os modos, conforme descrito por [Wright e Cooper \(2015\)](#). O acoplamento entre os modos indica que as alterações em um modo específico podem influenciar e serem influenciadas pelos outros modos, resultando em comportamentos vibratórios inter-relacionados e complexos. Para valores de não linearidades acima de $k_{\beta 3} = 0.001$, a velocidade de *flutter* se torna negativa, ou seja, não possui um significado físico real.

4.2.5 Solução para a rigidez cúbica no modo de flexão

De maneira análoga aos modos anteriores, agora a não linearidade será incorporada ao modo de flexão. Mantendo as mesmas condições iniciais, intervalo de tempo de integração e faixa de velocidades utilizadas para o modo de torção, começaremos com um valor de $k_{z3} = 0.001$. Com isso, obtivemos o gráfico representado na [Figura 33](#).

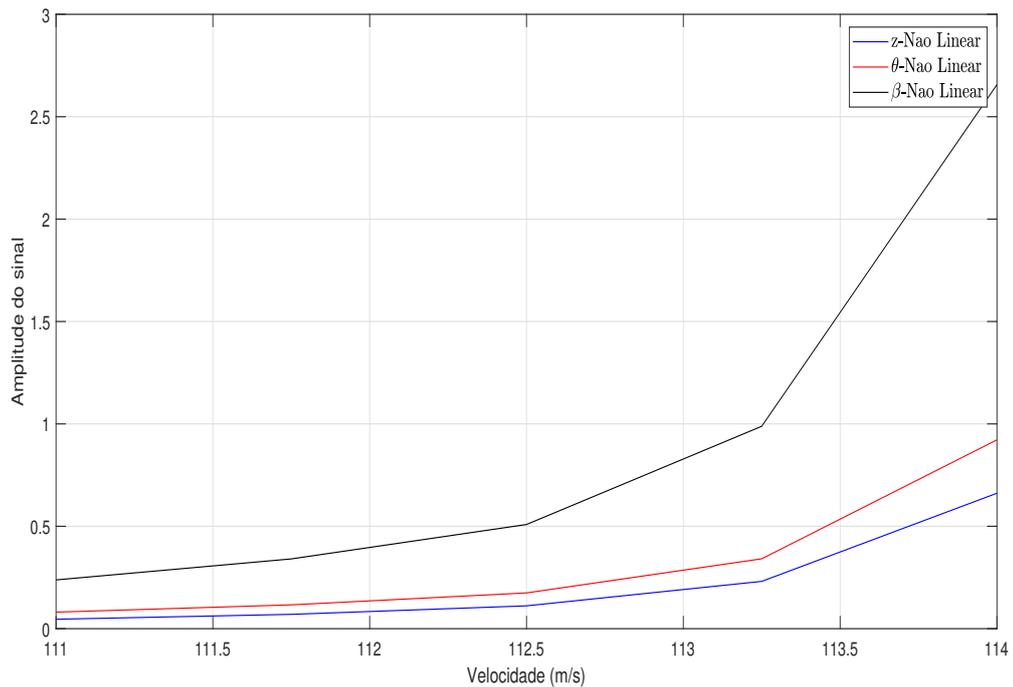
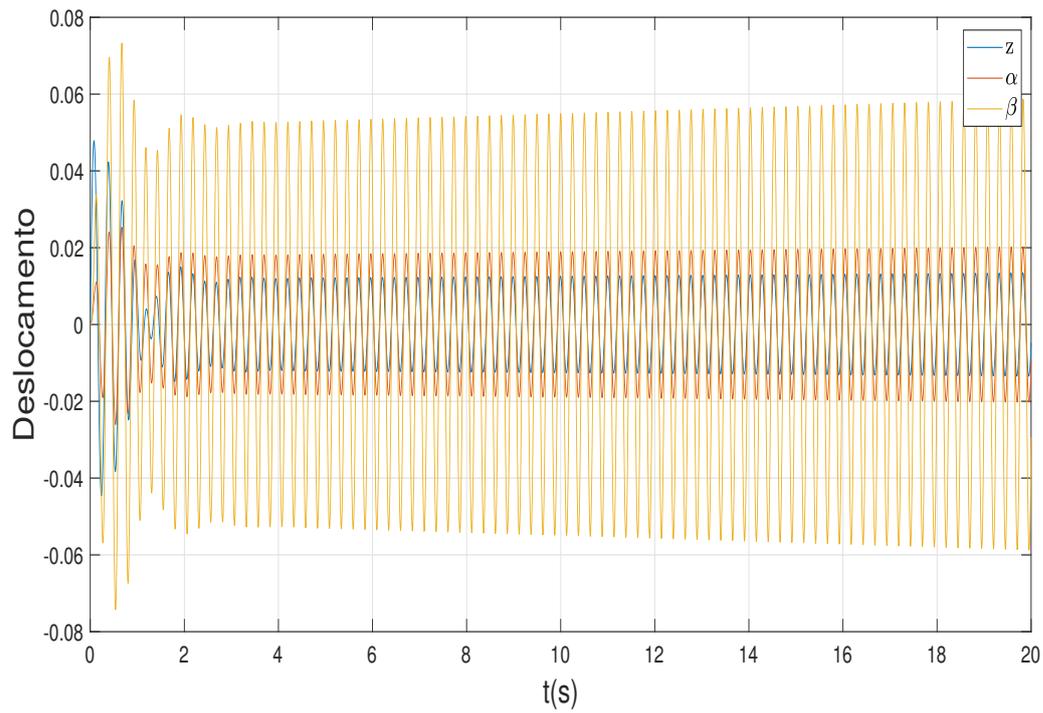
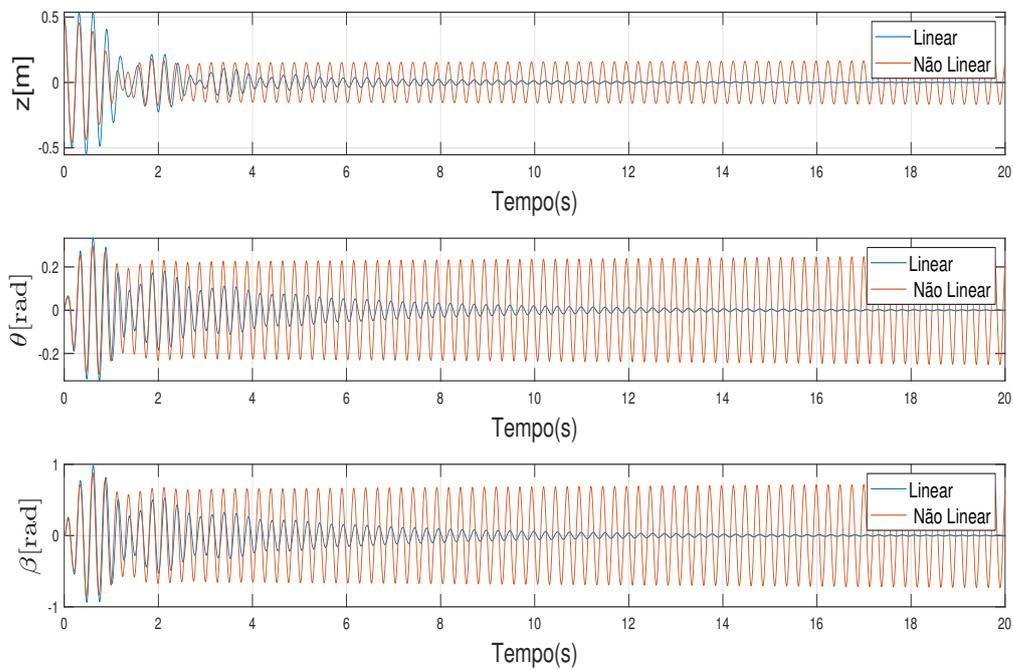


Figura 33 – Amplitudes máximas para variação de velocidade para $k_{\beta 3} = 0.001$

Com base na Figura 33, identifica-se que o sistema entra em *flutter* entre as velocidades de $V = 111$ m/s e 114 m/s. Após uma simulação para as velocidades dentro dessa faixa a velocidade de *flutter* para o modelo não linear ocorre aproximadamente em $V = 113$ m/s, como mostrado nas Figuras 34 e 35, que representam o gráfico da variação do deslocamento nos modos do modelo não linear e uma comparação entre os dois modelos, respectivamente.

Figura 34 – Deslocamentos no tempo para $V = 113$ m/sFigura 35 – Comparação entre modelos para $V = 113$ m/s

As Figuras 34 e 35 indicam que a introdução da não linearidade ao modo de flexão resultou em uma alteração na frequência natural desse modo, culminando em um aumento na amplitude. Devido ao acoplamento entre os três modos, a inclusão da não linearidade no modo de flexão também contribuiu para a introdução de não linearidades na rigidez dos outros modos. De forma análoga ao feito no modo de torção, foi gerado uma tabela mostrando a variação da velocidade de *flutter* com o aumento da não linearidade do tipo cúbica.

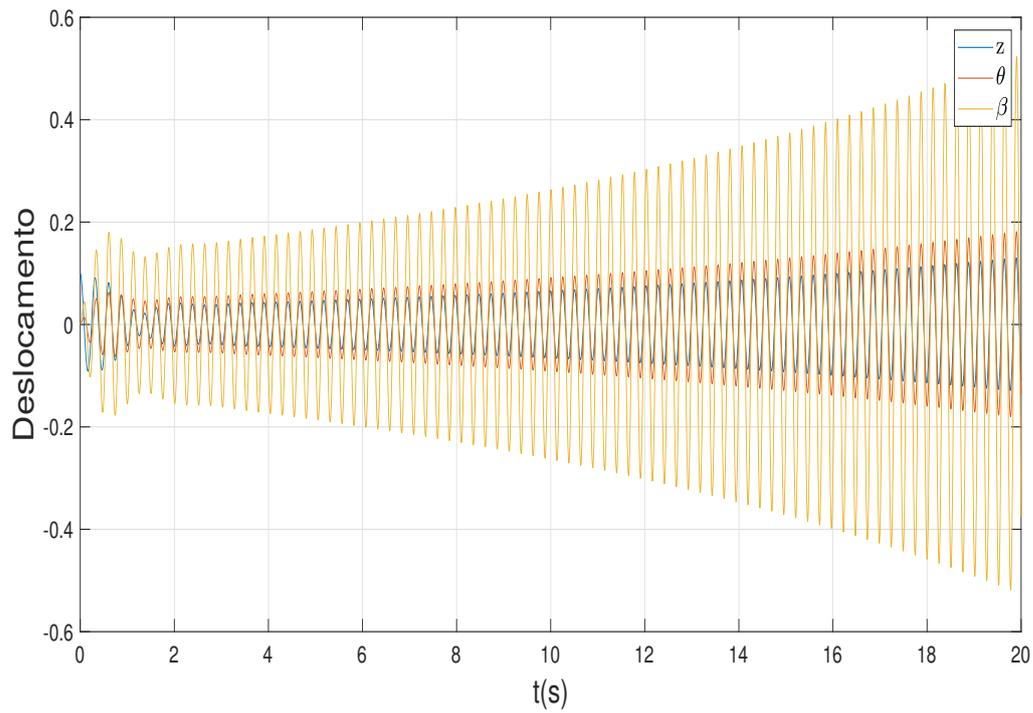
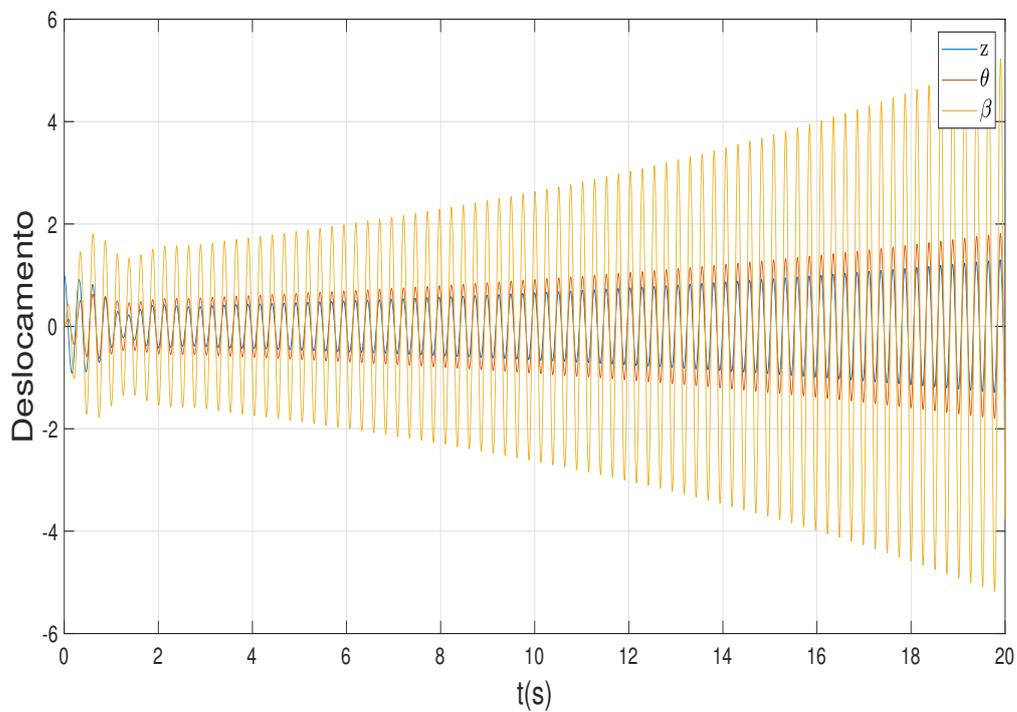
Tabela 4 – Coeficientes de não linearidade e velocidades de *flutter* no modo de flexão

K_{z3}	Velocidade(<i>flutter</i>) (m/s) no modo de flexão
0.001	113
0.002	110
0.003	107.5
0.004	111
0.005	106.5

Observa-se que, assim como no modo de torção, ao aumentar a não linearidade, ocorre uma diminuição na velocidade crítica de *flutter*. Isso destaca mais uma vez a importância do estudo detalhado e da necessidade de atribuir valores físicos precisos a essas não linearidades consideradas. O entendimento desses efeitos não lineares é crucial para a predição precisa do comportamento aeroelástico e para garantir a segurança e estabilidade estrutural em condições operacionais.

4.2.6 Alteração das condições iniciais

Este capítulo se dedica à investigação dos efeitos da variação das condições iniciais no modo de torção do modelo não linear. O objetivo central é examinar como diferentes configurações iniciais impactam a velocidade de *flutter*, enquanto a não linearidade é mantida fixa em um valor constante de $k_{\theta 3} = 0.001$. A escolha de manter a não linearidade constante proporciona uma abordagem focada na variação específica das condições iniciais, isolando esse aspecto para uma compreensão mais aprofundada dos fenômenos aeroelásticos. Será alterado apenas o deslocamento inicial em z, com um valor inicial de $x = [0.1m, 0, 0, 0, 0, 0]$ e em seguida de $x = [1m, 0, 0, 0, 0, 0]$. Não foi possível identificar variações na velocidade de *flutter* com as variações no deslocamento inicial para o modelo abordado, como mostrado nas Figuras 36 e 37.

Figura 36 – Deslocamentos no tempo para $x(0) = 0.1\text{m}$ Figura 37 – Comparação entre modelos para $x(0) = 1\text{m}$

É evidente que a única modificação observada reside na amplitude do sistema em questão. A fim de alcançar resultados mais precisos e aprofundados, torna-se imperativo conduzir experimentos práticos efetivos ou recorrer a simulações numéricas. Essas abordagens são cruciais para a obtenção de valores físicos reais, proporcionando uma base sólida para a análise e compreensão mais aprofundada do comportamento do sistema em estudo.

5 Conclusão

Neste trabalho, foi proposta uma análise de estabilidade aeroelástica de um sistema com a inclusão de não linearidades estruturais nas rigidezas dos diferentes graus de liberdade. O modelo adotado consiste em três modos assumidos, um de flexão e um de torção para a asa e um para a torção da superfície de controle. A não linearidade foi introduzida por meio de uma rigidez cúbica.

No aspecto aerodinâmico, foi utilizado o modelo proposto por [Hancock, Wright e Simpson \(1985\)](#), que considera a tridimensionalidade do escoamento usando a teoria das faixas. O modelo aeroelástico adotado consiste em uma asa reta de modos assumidos, conforme proposto por [Wright e Cooper \(2015\)](#). A equação aeroelástica para o sistema foi deduzida e utilizada como base para as análises realizadas.

Para determinar a velocidade crítica de flutter no domínio da frequência, utilizou-se a solução por autovalores e autovetores da equação aeroelástica expandida em espaço de estados, utilizando o software Matlab®.

No domínio do tempo, utilizou-se o método de integração de Runge-Kutta para obter os gráficos de deformação e velocidade ao longo do tempo.

A inclusão das não linearidades estruturais foi feita com base nos modelos propostos por [Dimitriadis \(2017\)](#). Essa não linearidade foi adicionada à matriz aeroelástica expandida em espaço de estados para a geração dos gráficos comparativos entre os modelos lineares e não lineares usando o Matlab®.

Foram produzidos gráficos V-g-f para determinar a velocidade de flutter no modelo linear. Posteriormente, essas velocidades foram empregadas na criação de gráficos de deslocamento ao longo do tempo correspondentes à velocidade crítica. Em seguida, realizou-se uma varredura de velocidades, resultando em um gráfico que exhibe as amplitudes máximas dos modos assumidos em relação às diferentes velocidades. Em seguida, foi possível se fazer uma simulação para as velocidades obtidas através desse método, possibilitando a identificação das velocidades críticas de flutter para o modelo não linear.

Na comparação entre os dois modelos após essas análises, notou-se que a inclusão da não linearidade afeta de maneira distinta cada modo. No modo de torção assumido, verificou-se que os valores iniciais da rigidez não linear elevaram a velocidade crítica de flutter para o modelo não linear em comparação com o linear. Entretanto, ao aumentar o valor dessa rigidez cúbica a partir de certo ponto, observou-se uma redução na velocidade crítica. Foram identificadas órbitas de ciclo limite (LCOs) para os coeficientes de não linearidade $k_{\theta 3} = 0.001$ e $k_{\theta 3} = 0.003$ no modo de torção. No modo de flexão, o procedimento foi repetido sob as

mesmas condições iniciais. Nesse modo, também se constatou uma diminuição da velocidade crítica de flutter com o aumento do coeficiente de rigidez cúbica k_{z3} .

Ao analisar o modo de torção da superfície de controle, observou-se um impacto mais expressivo na velocidade crítica em comparação com o modo de torção, resultando em uma redução de $V = 119m/s$ para $V = 83m/s$ para o mesmo coeficiente de $k_3 = 0.001$. Em seguida, esse coeficiente foi variado de forma sutil, destacando como o modo de torção da superfície de controle é mais sensível a pequenas variações. Ao aumentar ainda mais o valor da não linearidade para esse modo, não foram possíveis obter resultados significativos. Tabelas foram elaboradas para facilitar comparações entre coeficientes de rigidez cúbica e velocidades críticas.

Adicionalmente, as condições iniciais foram variadas para avaliar sua influência na velocidade crítica, não sendo possível observar variações na velocidade, apenas uma variação da amplitude máxima.

Este estudo abordou a estabilidade aeroelástica com inclusão de não linearidades estruturais. Foram analisados três modos de vibração, um de flexão, torção e torção da superfície de controle, com uma rigidez não linear introduzida por rigidez cúbica. Utilizou-se o modelo aerodinâmico de Hancock e o modelo aeroelástico proposto por Wright e Cooper. A análise da velocidade crítica de flutter foi conduzida no domínio da frequência e do tempo, evidenciando o impacto diferenciado das não linearidades em cada modo. Destacou-se a sensibilidade do modo de torção da superfície de controle a pequenas variações. Tabelas foram fornecidas para comparação entre os coeficientes de rigidez cúbica e as velocidades críticas. Adicionalmente, variações nas condições iniciais foram examinadas, com efeitos limitados na velocidade crítica.

Para trabalhos futuros, é necessário aplicar o modelo desenvolvido em uma asa reta real, podendo adicionar um enflechamento,ofilamento e possivelmente um *winglet* na ponta da asa, fazendo assim um modelo semelhante aos utilizados nas aeronaves atuais. Também se faz necessário a aplicação de diferentes métodos para determinar valores físicos reais para os coeficientes de não linearidade, seja através de experimentos práticos, como túneis de vento, ou simulações numéricas. Após a determinação de valores reais para as não linearidades, pode-se também ser feita uma variação simultânea desses coeficientes, adicionando-as a diferentes modos simultaneamente.

Referências

- ABZUG, M. J.; LARABEE, E. E. *Airplane Stability and Control: a History of the Technologies That Made Aviation Possible*. [S.l.]: Cambridge University Press, Cambridge., 2017. Citado na página 21.
- ANDERSON, J. D. *Fundamentals of Aerodynamics*. [S.l.]: McGraw-Hill Education, 2017. ISBN 978-1-259-12991-9. Citado 3 vezes nas páginas 32, 33 e 34.
- BISPLINGHOFF, R. L.; ASHLEY, H.; HALFMAN, R. L. *Aeroelasticity*. [S.l.]: Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1996. ISBN 978-0486691893. Citado 6 vezes nas páginas 21, 22, 23, 33, 34 e 41.
- COLLAR, A. R. *The Expanding Domain of Aeroelasticity*. [S.l.]: Royal Aeronautical Society Historical Group, 1946. Citado 3 vezes nas páginas 11, 21 e 22.
- COLLAR, A. R. *The first fifty years of aeroelasticity*. [S.l.]: Royal Aeronautical Society Historical Group, 1977. Citado na página 21.
- COLLAR, A. R.; SIMPSON, A. *Matrices and Engineering Dynamics*. [S.l.]: John Wiley Sons Inc, 1987. ISBN 978-0470202715. Citado na página 51.
- COLLAR, A. R.; SIMPSON, A. *Torsional Vibrations of the Tail of an Aeroplane*. [S.l.]: Reports and Memoranda, n. 276, of the Technical Report of the Advisory Committee for Aeronautics of the Year 1916-1917, 1987. Citado 2 vezes nas páginas 22 e 23.
- DIMITRIADIS, G. *Introduction to Nonlinear Aeroelasticity*. [S.l.]: John Wiley Sons Ltd, 2017. ISBN 9781118756454. Citado 7 vezes nas páginas 24, 26, 39, 55, 63, 65 e 79.
- DOWELL, E. H.; ILGAMOV, M. *Studies in Nonlinear Aeroelasticity*. [S.l.]: y Springer-Verlag New York Inc., 1988. ISBN 13:978-1-4612-3908 · 6. Citado na página 24.
- ELLER, D. Friction, freeplay and flutter of manually controlled aircraft. *Aeronautical and Vehicle Engineering*, p. 1–16, 05 2007. Citado na página 66.
- FUNG, Y. C. *An Introduction to the theory of Aeroelasticity*. [S.l.]: Dover Publications, Inc., 1969. ISBN 0-486-67871-7. Citado 4 vezes nas páginas 22, 37, 38 e 44.
- GLAUERT, H. *The Effect of Compressibility on the Lift of an Aerofoil*. [S.l.]: Royal Aeronautical Society Historical Group, 1927. Citado 2 vezes nas páginas 38 e 44.
- GülçAT Ülgen. *Fundamentals of Modern Unsteady Aerodynamics*. [S.l.]: Springer, 2016. ISBN 978-981-10-0016-4. Citado na página 32.
- HANCOCK, G. J.; WRIGHT, J.; SIMPSON, A. *On the teaching of the principles of wing flexure-torsion flutter*. [S.l.]: The Aeronautical Journal, 1985. Citado 2 vezes nas páginas 36 e 79.
- HODGES, D. H.; PIERCE, G. A. *Introduction to Structural Dynamics and Aeroelasticity*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2002. ISBN 0-521-80698. Citado na página 22.

- INMAN, D. J. *Engineering Vibration*. [S.l.]: Pearson Education, Inc., 2014. ISBN 978-0132871693. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 29.
- ISERLES, A. *A First Course in the Numerical Analysis of Differential Equations*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2009. ISBN 978-0-511-50637-6. Citado na página 56.
- KIM, S. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*. [S.l.]: Department of Mathematics and Statistics Mississippi State University, 2023. ISBN 978-0-07-339792-4. Citado na página 57.
- MARTINS, P. C. et al. Hybrid control technique applied to an aero-servo-viscoelastic simplified wing model. *Aerospace Science and Technology*, v. 122, p. 107387, 2022. ISSN 1270-9638. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S127096382200061X>>. Citado 2 vezes nas páginas 22 e 24.
- MEEHAN, P. A. Flutter prediction of its occurrence, amplitude and nonlinear behaviour. Elsevier Ltd., 2022. Citado na página 39.
- RAO, S. *Vibrações Mecânicas*. [S.l.]: Pearson Education, Inc., 2009. ISBN 978-8576052005. Citado na página 30.
- SCANLLAN, R. H.; ROSENBAUM, R. *Introduction to the Study of Aircraft Vibration and Flutter*. [S.l.]: Dover Publications, 1968. Citado na página 44.
- SHARMA, U. Effects of cubic hardening nonlinearities on the flutter of a three degree of freedom airfoil. School of Aerospace Engineering Georgia Institute of Technology, 2005. Citado 6 vezes nas páginas 11, 24, 39, 40, 41 e 65.
- SHUKLA, H.; PATIL, M. Controlling limit cycle oscillation amplitudes in nonlinear aeroelastic systems. *Journal of Aircraft*, v. 54, p. 1–12, 05 2017. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 38.
- THEODORSEN, T. *General Theory of Aerodynamic Instability and the Mechanism of Flutter*. [S.l.]: National Advisory Committee for Aeronautics NACA report 496, AERADE Reports Archive, 1935. Citado 2 vezes nas páginas 34 e 45.
- WRIGHT, J. R.; COOPER, J. E. *Introduction to Aircraft Aeroelasticity and Loads*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2015. ISBN 978-1-118-48801-0. Citado 18 vezes nas páginas 11, 22, 26, 31, 32, 34, 35, 37, 40, 42, 43, 48, 52, 53, 54, 55, 72 e 79.

Apêndices

APÊNDICE A – Graficos

A.1 Não linearidade no modo de torção

Gráficos da velocidade pelo deslocamento para $V = 119.5m/s$

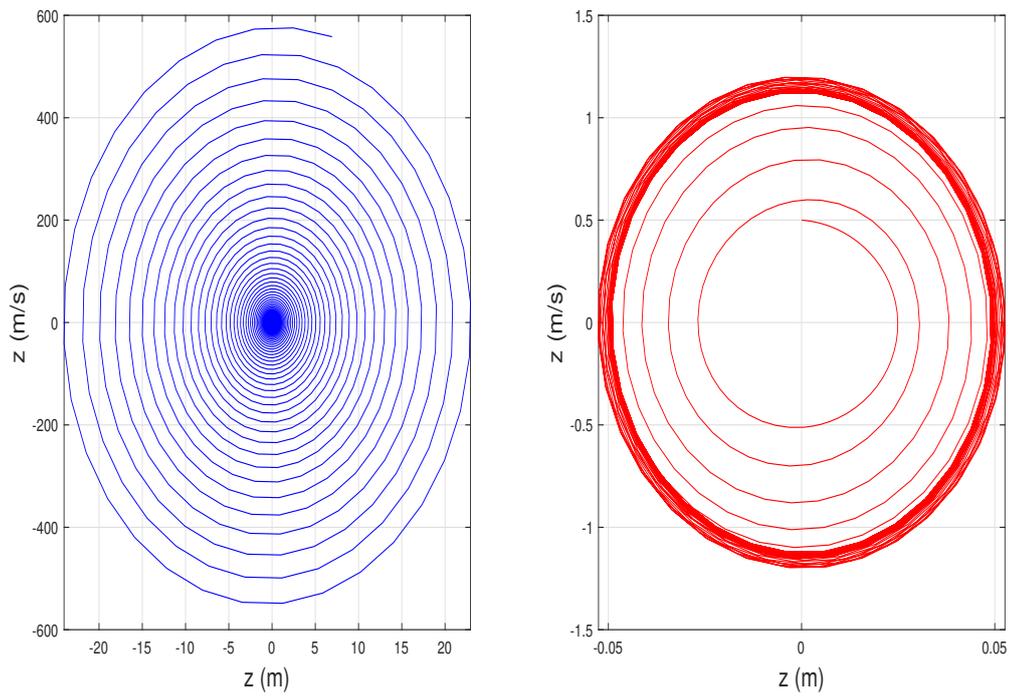


Figura 38 – Velocidade pelo deslocamento em z para $V = 119.5 m/s$

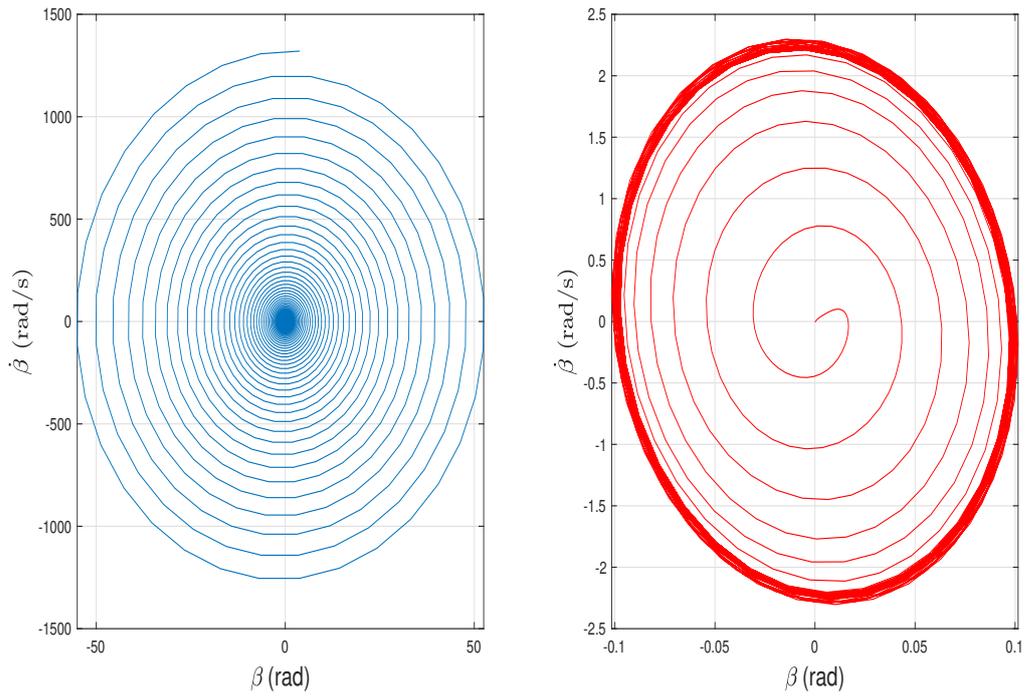


Figura 39 – Velocidade pelo deslocamento em β para $V = 119.5 m/s$

Gráficos da velocidade pelo deslocamento para $V = 118.8 m/s$

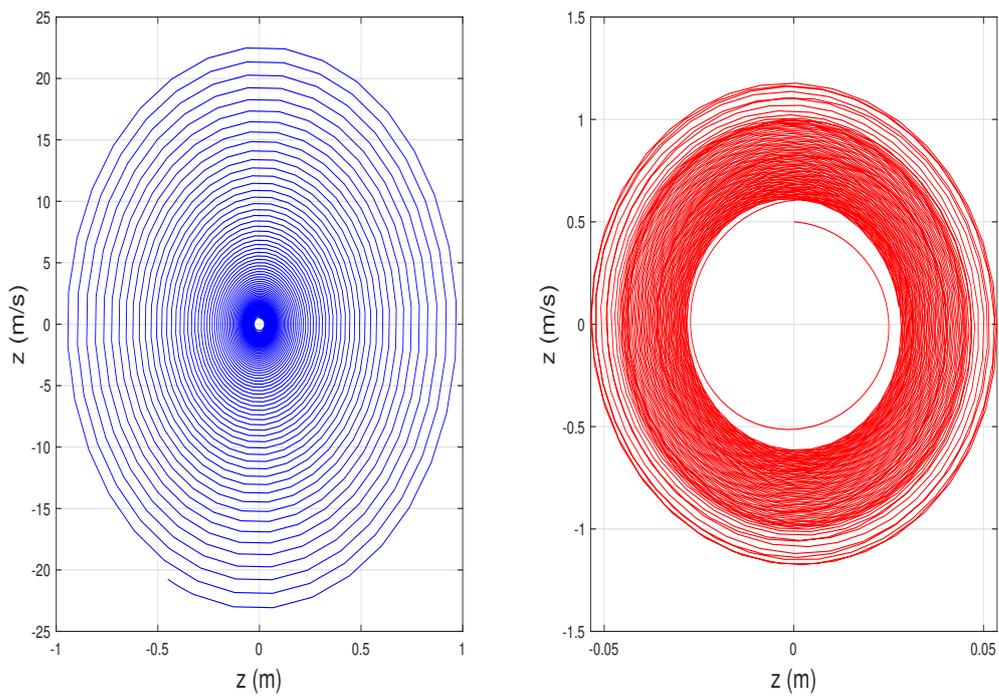
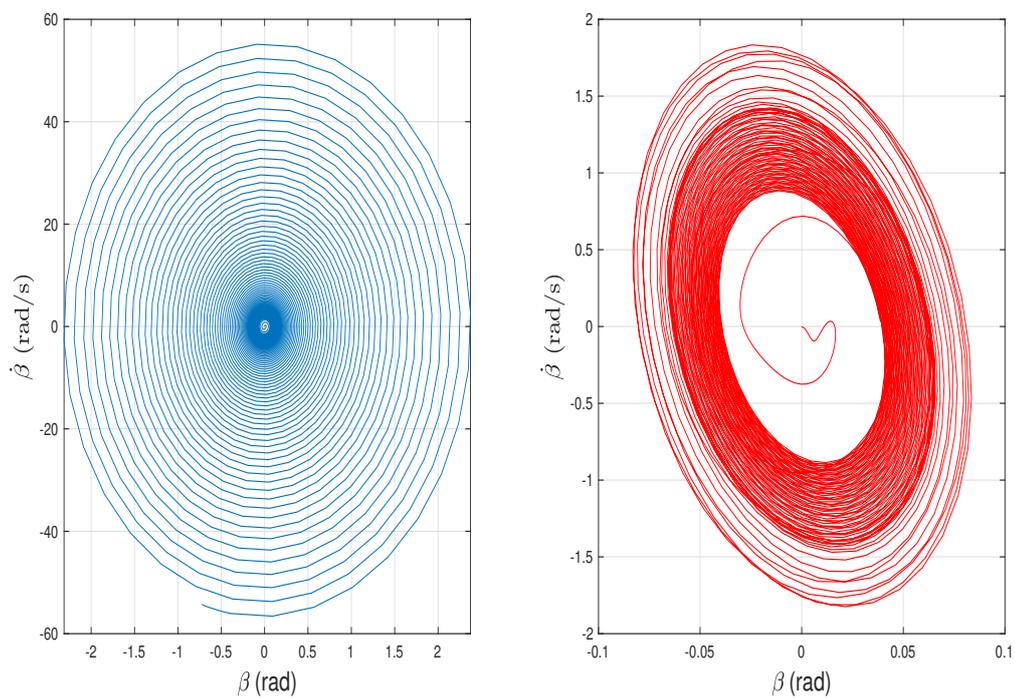
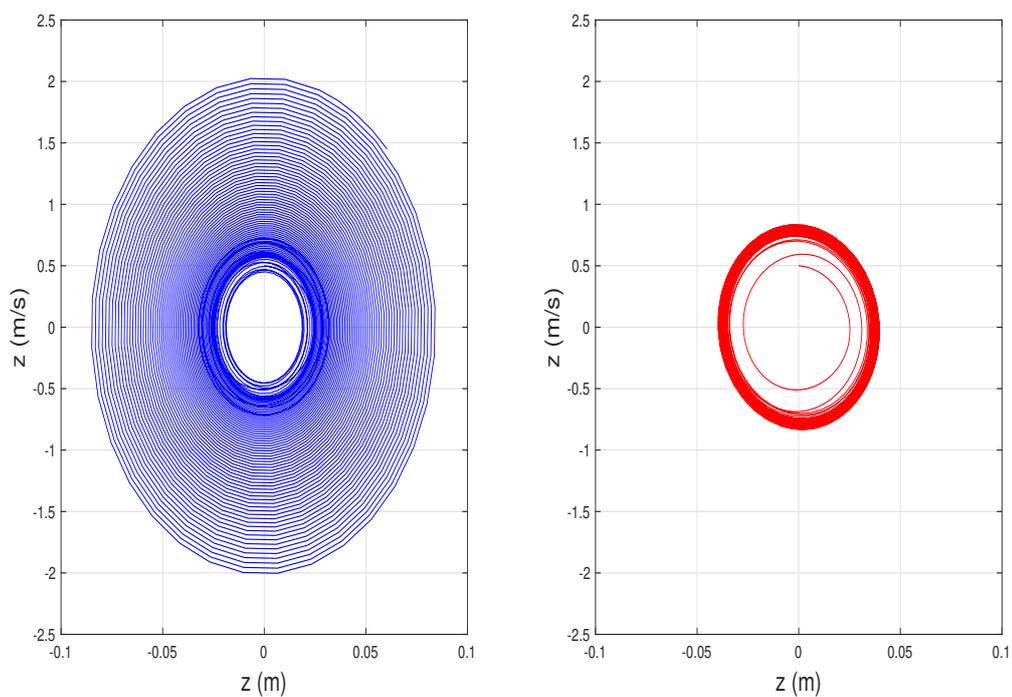


Figura 40 – Velocidade pelo deslocamento em z para $V = 118.8 m/s$

Figura 41 – Velocidade pelo deslocamento em β para $V = 118.8\text{m/s}$

Gráficos da velocidade pelo deslocamento para $V = 115.5\text{m/s}$:

Figura 42 – Velocidade pelo deslocamento em z para $V = 115.5\text{ m/s}$

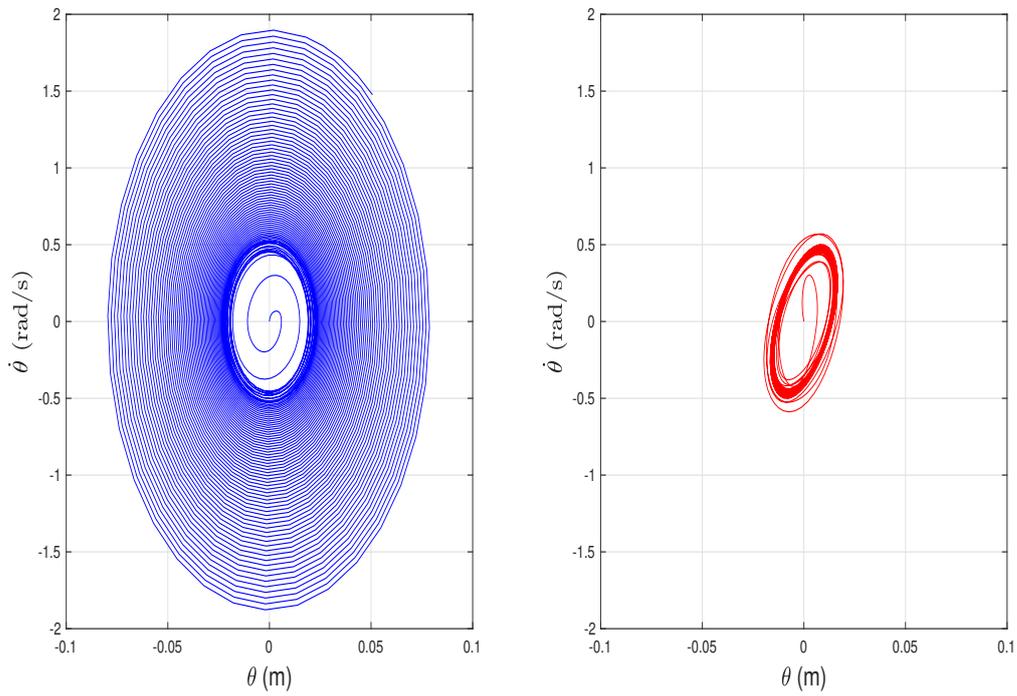


Figura 43 – Velocidade pelo deslocamento em $\theta para V = 115.5m/s$

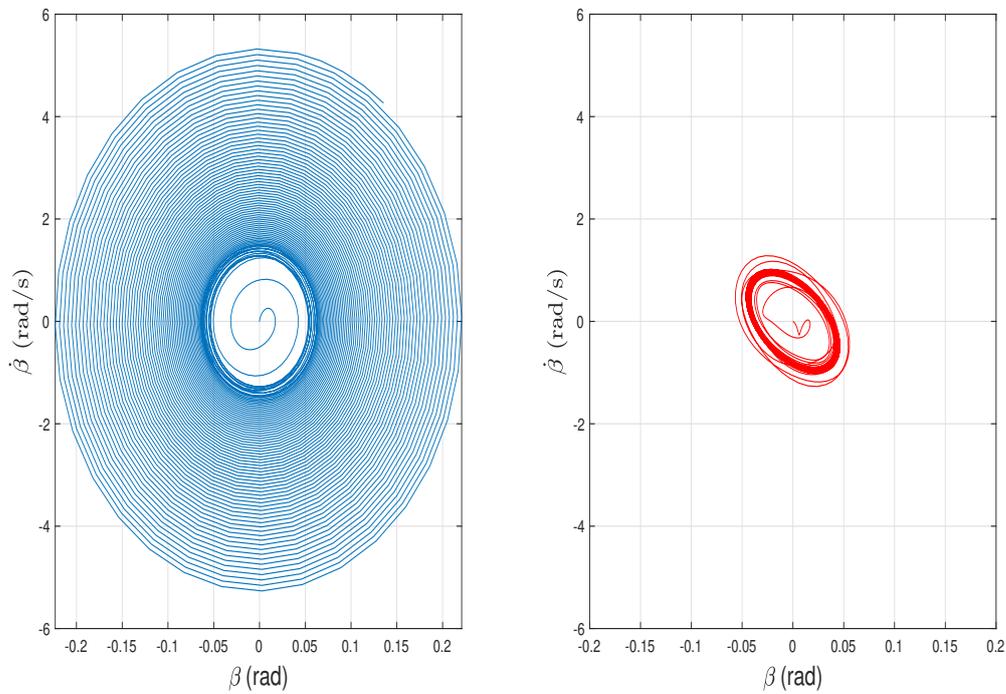


Figura 44 – Velocidade pelo deslocamento em $\beta para V = 115.5m/s$

APÊNDICE B – Códigos Matlab[®]

%Codigo base para analise do tempo e da frequencia

```
function [Mat_L,Mat_NL, A, B, C, D, E, xf, c, xh, rho, fa,
        fcont] = base(ka3,V)
```

```
s = 7.5; % semi span
c = 2; % chord
hline = 80; % hinge line as percentage of
        chord
xh = hline / 100 * c; % distance of hinge line aft of
        leading edge
fa = 40; % elastic axis as percentage of
        chord
xf = fa / 100 * c; % position of elastic axis aft of
        le
xac = 0.25 * c; % distance of ac aft of le
xe = xf - xac; % distance of elastic axis aft of
        ac
e = xe / c; % eccentricity of fa aft of ac
        per chord

% Mass data
m = 400; % mass per unit area
mmain = m; % mass per unit area of main
        surface
mcont = m; % mass per unit area of control
        surface

% Stiffness data
EI = 4e+7; % flexural rigidity
GJ = 8e+6; % torsional rigidity
kbeta = 1e+4; % control stiffness per unit span
kh = 4 * EI / s^3; % bending spring stiffness
ka = GJ / s;
```

```

n = 3;

% Inertia matrix
A = zeros(n, n);
% Main surface
Amain = zeros(n, n);
Amain(1,1) = xh * s / 5;
Amain(1,2) = (xh^2 / 2 - xh * xf) * s / 4;
Amain(2,1) = Amain(1,2);
Amain(2,2) = (xh^3 / 3 - xh^2 * xf + xf^2 * xh) * s / 3;
% Control surface
Acont = zeros(n, n);
Acont(1,1) = (c - xh) * s / 5;
Acont(1,2) = ((c^2 - xh^2) / 2 - xf * (c - xh)) * s / 4;
Acont(1,3) = ((c^2 - xh^2) / 2 - xh * (c - xh)) * s / 3;
Acont(2,2) = ((c^3 - xh^3) / 3 - xf * (c^2 - xh^2) + xf^2 * (
    c - xh)) * s / 3;
Acont(2,3) = ((c^3 - xh^3) / 3 - xf * (c^2 - xh^2) / 2 - xh *
    (c^2 - xh^2) / 2 + xf * xh * (c - xh)) * s / 2;
Acont(3,3) = ((c^3 - xh^3) / 3 - xh * (c^2 - xh^2) + xh^2 * (
    c - xh)) * s;
Acont(2,1) = Acont(1,2);
Acont(3,1) = Acont(1,3);
Acont(3,2) = Acont(2,3);

A = mmain * Amain + mcont * Acont;

% Structural damping matrix is zero
D = zeros(n, n);

%Structural stiffness matrix
E = zeros(n, n);
E(1,1) = kh;
E(2,2) = ka;
E(3,3) = kbeta * s;

[evects, evals1] = eig(A \ E) ;
sfreqs = sqrt(diag(eval1s1))/(2 * pi);
[sfreqs, sort_f] = sort(sfreqs);

```

```

freqs = sfreqs '

% Transformation of normal modes to tip displacements
Ttip = [1^2 -1 * xf 0;
        1^2 1 * (xh - xf) 0;
        1^2 1 * (c - xf) (c - xh)];
Tvects = Ttip * evecs;
Tvects = Tvects(:, sort_f');
max_Tvect = max(abs(Tvects));
for jj = 1:n
    Tvects(1:n, jj) = Tvects(1:n, jj) / max_Tvect(jj);
end
Tvects

% Plot mode shapes at wing tip
zline = [0 0 0];
zvals = [0 xh/c 1];
figure(1)
subplot(311)
plot(zvals, Tvects(:,1), '0-')
title(['Primeiro modo de vibracao em z ', num2str(sfreqs(1)
    ,3), ' Hz'], 'FontSize', 12)
hold on
plot(zvals, zline, '--b')
subplot(312)
plot(zvals, Tvects(:,2), '0-')
hold on
plot(zvals, zline, '--b')
title(['Segundo modo de Vibracao em \theta ', num2str(sfreqs
    (2),3), ' Hz'], 'FontSize', 12)
subplot(313)
plot(zvals, Tvects(:,3), '0-')
hold on
plot(zvals, zline, '--b')
title(['Terceiro modo de vibracao em \beta ', num2str(sfreqs
    (3),3), ' Hz'], 'FontSize', 12)

% Bending / torsion / control alone natural frequencies

```

```

fbend = 1/2/pi * sqrt(E(1,1)/A(1,1));
ftors = 1/2/pi * sqrt(E(2,2)/A(2,2));
fcont = 1/2/pi * sqrt(E(3,3)/A(3,3));

chat = 2 * (xh / c) - 1;

T4 = - acos(chat) + chat * sqrt(1 - chat ^ 2);
T10 = sqrt(1 - chat ^ 2) + acos(chat);
T11 = acos(chat) * (1 - 2 * chat) + sqrt(1 - chat ^ 2) * (2 -
    chat);
T12 = sqrt(1 - chat ^ 2) * (2 + chat) - acos(chat) * (2 *
    chat + 1);

% Aerodynamic coefficients

aw = 2 * pi;           % lift per incidence
ac = aw * T10 / pi;   % lift per control rotation
bw = e * aw;          % pitching moment per control
    rotation
bc = e * aw * T10 / pi; % pitching moment per control
    rotation
cw = - T12 / 2;       % hinge moment per incidence
cc = - T12 * T10 / 2 / pi; % hinge moment per control
    rotation

Mtdot = -1.2;         % unsteady torsional damping term
Mbdot = -0.1;         % unsteady control rotation
    damping term

rho = 1.225;          % air density

% Aerodynamic matrices

B = zeros(n, n);      % aero damping - based on rho*V*B
C = zeros(n, n);      % aero stiffness - based on rho*V^2*C

B(1,1) = aw * c * s / 10;

```

```

B(1,2) = 0;
B(1,3) = 0;
B(2,1) = - bw * c^2 * s / 8;
B(2,2) = - Mtdot * c^3 * s / 24;
B(2,3) = 0;
B(3,1) = - cw * c^2 * s / 6;
B(3,2) = 0;
B(3,3) = - Mbdot * c^3 * s / 8;

```

```

C(1,1) = 0;
C(1,2) = aw * c * s / 8;
C(1,3) = ac * c * s / 6;
C(2,1) = 0;
C(2,2) = - bw * c^2 * s / 6;
C(2,3) = - bc * c^2 * s / 4;
C(3,1) = 0;
C(3,2) = - cw * c^2 * s / 4;
C(3,3) = - cc * c^2 * s / 2;

```

```

%% Base para o dominio do tempo

```

```

Mat_L=[zeros(n,n),eye(n,n); -A\rho*V*V*C+E), -A\rho*V*B+D)
];

```

```

Mat_NL=[-ka3*E(3,3)*inv(A)*[0; 0 ;1], zeros(3,5); zeros(3,6)
];

```

```

end

```

```

%Dados para o modelo linear na frequencia

```

```

function [ka3, V, n] = freq_dados_L
ka3 = 0; % rigidez cubica
V = 0;
n = 3;

```

```

%Funcao para resolucao da solucao por autovalores

```

```

function [delta,V, v, vel, evalr, evali, v_all, f, vend, d] =

```

```

    freq_eig_L;

[ka3, V, n] = freq_dados_L;
[Mat_L, Mat_NL, A, B, C, D, E, xf, c, xh, rho] = base(ka3, V);

vstart = 1;                % velocity range
vinc = 1;
vend = 300;
delta = xh/c;
% Natural frequencies and mode shapes of the wind off system
[evects, evals1] = eig(A \ E) ;
sfreqs = sqrt(diag(eval1))/(2 * pi);
[sfreqs, sort_f] = sort(sfreqs);
freqs = sfreqs '

% Transformation of normal modes to tip displacements
Ttip = [1^2 -1 * xf 0;
        1^2 1 * (xh - xf) 0;
        1^2 1 * (c - xf) (c - xh)];
Tvects = Ttip * evects;
Tvects = Tvects(:, sort_f ');
max_Tvect = max(abs(Tvects));
for jj = 1:n
    Tvects(1:n, jj) = Tvects(1:n, jj) / max_Tvect(jj);
end
Tvects

% Set up for flutter solution

f = []; d = []; evalr = []; evali = []; ev = [];
icount = 0;

% Loop round for flutter solution at each velocity
% Determine first order eval solution      evals = eig(A\(\
    rho*v^2*C + E));

for v = vstart : vinc : vend
    icount = icount + 1;
    vel(icount) = v;

```

```

QL = [zeros(n,n),eye(n,n); -A\rho*v*v*C+E), -A\rho*v*B+
      D)];
evals = eig(QL);
er = real(evals);
ei = imag(evals);

for ii = 1 : 2 * n
    wrad(ii,1) = abs(evals(ii));
    zeta(ii,1) = -real(evals(ii)) / wrad(ii);
    whz(ii,1) = wrad(ii) / (2 * pi);
end

% [ei, eisort] = sort(ei);    % sort evalues in order
%   of imaginary part of evalue
% [er, ersort] = sort(er);    % real part of evals for
%   plotting

[whz, wsort] = sort(whz);    % sort frequencies in order

f = [f whz]; d = [d zeta(wsort) * 100];
evalr = [evalr er(wsort)]; evali = [evali ei(wsort)];
ev = [ev evals(wsort)];
end

% Determine the flutter and divergence velocity based upon
%   real evalue behaviour picking out crossings
% Depending upon imag evalue determine whether flutter or
%   divergence

vs = sum(cumsum((real(ev) > 0), 2) == 1);
nvels = vs(sum(cumsum((real(ev) > 0), 2) == 1) > 0); %
    number of roots that change at each stability bound
vcrit = vel(sum(cumsum((real(ev) > 0), 2) == 1) > 0); %
    velocities at stability bounds

icount = 0;
for ii = 1:max(size(nvels))
    for jj = 1:nvels(ii)
        icount = icount + 1;
    end
end

```

```

        v_all(icount) = vcrit(ii);      % crit velocity vector
        with extra (same) value for flutter root
    end
end

ecrit = ev(cumsum((real(ev) > 0), 2) == 1);

for ii = 1:max(size(ecrit))
    if imag(ecrit(ii)) == 0 % check for flutter or
        divergence
        [num2str(v_all(ii)) ' m/s = divergence']
    else
        fflut = abs(ecrit(ii))/(2 * pi);
        [num2str(v_all(ii)) ' m/s = flutter      ' num2str(
            fflut) ' Hz']
    end
end
end

```

Solução no domínio do tempo:

```

%Dados modelo linear

function [ka3 ,V]= tempo_dados_L;
    ka3 =0; %Rigidez Cubica
    V=118; %Velocidade a ser analisada

%Dados modelo nao linear

function [ka3 ,V]= tempo_dados_NL;
    ka3 = 0.0038; %Rigidez cubica
    V=118; %Velocidade a ser analisada

%Funcao para integracao da matriz linear

function dxdt = tempo_SysEDO_L(t,x)

[ka3 ,V ]= tempo_dados_L;

[Mat_L,Mat_NL] = base(ka3,V);

Mat3 = Mat_L*[x(1); x(2); x(3); x(4); x(5); x(6)];

```

```
dx1dt = Mat3(1,:);
dx2dt = Mat3(2,:);
dx3dt = Mat3(3,:);
dx4dt = Mat3(4,:);
dx5dt = Mat3(5,:);
dx6dt = Mat3(6,:);

dxdt = [dx1dt; dx2dt; dx3dt; dx4dt; dx5dt; dx6dt];

end

%Funcao para integracao da matriz linear somando a nao
    linearidade

function dxdt = tempo_SysEDO_NL(t,x)

[ka3 ,V ]= tempo_dados_NL;

[Mat_L,Mat_NL] = base(ka3,V);

Mat3 = Mat_L*[x(1); x(2); x(3); x(4); x(5); x(6)]+ Mat_NL*[x
    (1); x(2); x(3).^3; x(4); x(5); x(6)];

dx1dt = Mat3(1,:);
dx2dt = Mat3(2,:);
dx3dt = Mat3(3,:);
dx4dt = Mat3(4,:);
dx5dt = Mat3(5,:);
dx6dt = Mat3(6,:);

dxdt = [dx1dt; dx2dt; dx3dt; dx4dt; dx5dt; dx6dt];

end

%Codigo da integracao no dominio do tempo de ambos os modelos
    e %geracao de
%gr fiicos

clc;
```

```

clear all;
close all;
%hold on
[tn,xn] = ode45(@tempo_SysEDO_NL,[0,15],[0.01 0 0 0 0 0]');

[t,x] = ode45(@tempo_SysEDO_L,[0,15],[0.01 0 0 0 0 0]');

% [tn1,xn1] = ode45(@tempo_SysEDO_NL,[0,15],[0.02 0 0 0 0 0
    0]');
%
% [t1,x1] = ode45(@tempo_SysEDO_L,[0,15],[0.02 0 0 0 0 0]');

h = 118;
figure(1)
subplot(3,1,1)
plot (t,x(:,1), tn,xn(:,1),t1,x1(:,1), tn1,xn1(:,1))
grid on
xlabel('Tempo(s)', 'FontSize',14)
ylabel('z[m]', 'FontSize',16)
legend({'Linear', 'N o Linear'}, 'FontSize',11)
title(['Gr fico de deslocamento de z pelo tempo para a
    velocidade ',num2str(h), ' m/s'], 'FontSize',12)
subplot(3,1,2)
plot (t,x(:,2), tn,xn(:,2),t1,x1(:,2), tn1,xn1(:,2))
grid on
xlabel('Tempo(s)', 'FontSize',14)
ylabel('\theta[rad]', 'FontSize',16)
legend({'Linear', ' N o Linear'}, 'FontSize',11)
title(['Gr fico de deslocamento de \theta pelo tempo para a
    velocidade ',num2str(h), ' m/s'], 'FontSize',12)
subplot(3,1,3)
plot (t,x(:,3), tn,xn(:,3),t1,x1(:,3), tn1,xn1(:,3))
grid on
xlabel('Tempo(s)', 'FontSize',14)
ylabel('\beta[rad]', 'FontSize',16)
legend({'Linear', ' N o Linear'}, 'FontSize',11)
title(['Gr fico de deslocamento de \beta pelo tempo para a
    velocidade ',num2str(h), ' m/s'], 'FontSize',12)

```

```

figure(3)
subplot(3,1,1)
plot (t,x(:,4), tn,xn(:,4))
grid on
xlabel('Tempo(s)', 'FontSize',14)
ylabel('Velocidade (z)', 'FontSize',12)
legend({'Linear', 'N o Linear'}, 'FontSize',11)
title(['Gr fico da velocidade de z pelo tempo para a
      velocidade ', num2str(h), ' m/s'], 'FontSize',12)
subplot(3,1,2)
plot (t,x(:,5), tn,xn(:,5))
grid on
xlabel('Tempo(s)', 'FontSize',14)
ylabel('Velocidade (\theta)', 'FontSize',12)
legend({'Linear', ' N o Linear'}, 'FontSize',11)
title(['Gr fico da velocidade de \theta pelo tempo para a
      velocidade ', num2str(h), ' m/s'], 'FontSize',12)
subplot(3,1,3)
plot (t,x(:,6), tn,xn(:,6))
grid on
xlabel('Tempo(s)', 'FontSize',14)
ylabel('Velocidade (\beta)', 'FontSize',11)
legend({'Linear', 'N o Linear'}, 'FontSize',11)
title(['Gr fico da velocidade de \beta pelo tempo para a
      velocidade ', num2str(h), ' m/s'], 'FontSize',10)

figure(4)
subplot(121)
plot(x(:,1),x(:,4), 'b')
ylabel('z (m/s)', 'FontSize',14)
xlabel('z (m)', 'FontSize',14)
title(['Plot da velocidade pela deformacao em z linear V= ',
      num2str(h), ' m/s'], 'FontSize',10)
grid on
subplot(122)
plot(xn(:,1),xn(:,4), 'r')
ylabel('z (m/s)', 'FontSize',14)

```

```

xlabel('z (m)', 'FontSize', 14)
title(['Plot da velocidade pela deformacao em z n o linear V
      = ', num2str(h), ' m/s'], 'FontSize', 10)
grid on

figure(5)
subplot(121)
plot(x(:,2), x(:,5), 'b')
ylabel('$\dot{\theta}$ (rad/s)', 'FontSize', 14, 'Interpreter',
      'Latex')
xlabel('\theta (m)', 'FontSize', 14)
title(['Plot da velocidade pela deformacao em \theta linear
      para V= ', num2str(h), ' m/s'], 'FontSize', 10)
grid on
subplot(122)
plot(xn(:,2), xn(:,5), 'r')
ylabel('$\dot{\theta}$ (rad/s)', 'FontSize', 14, 'Interpreter',
      'Latex')
xlabel('\theta (m)', 'FontSize', 14)
title(['Plot da velocidade pela deformacao em \theta n o
      linear para V= ', num2str(h), ' m/s'], 'FontSize', 10)
grid on

figure(6)
subplot(121)
plot(x(:,3), x(:,6))
ylabel('$\dot{\beta}$ (rad/s)', 'FontSize', 14, 'Interpreter',
      'Latex')
xlabel('\beta (rad)', 'FontSize', 14)
title(['Plot da velocidade pela deformacao em \beta linear V=
      ', num2str(h), ' m/s'], 'FontSize', 10)
grid on
subplot(122)
plot(xn(:,3), xn(:,6), 'r')
ylabel('$\dot{\beta}$ (rad/s)', 'FontSize', 14, 'Interpreter',
      'Latex')
xlabel('\beta (rad)', 'FontSize', 14)
title(['Plot da velocidade pela deformacao em \beta n o
      linear V= ', num2str(h), ' m/s'], 'FontSize', 10)

```

grid on