

Universidade de Brasília - UnB

Faculdade UnB Gama - FGA

Engenharia Aeroespacial

**Otimização de parâmetros para modelo
aeroelástico de asa reta engastada em túnel de
vento**

Autor: Gabriel Sabino de Oliveira

Orientadora: Profa. Dra. Polliana Candida Oliveira Martins

Brasília, DF

2023



Gabriel Sabino de Oliveira

Otimização de parâmetros para modelo aeroelástico de asa reta engastada em túnel de vento

Monografia submetida ao curso de graduação em Engenharia Aeroespacial da Universidade de Brasília, como requisito parcial para obtenção do Título de Bacharel em Engenharia Aeroespacial.

Universidade de Brasília - UnB

Faculdade UnB Gama - FGA

Brasília, DF

2023

Gabriel Sabino de Oliveira

Otimização de parâmetros para modelo aeroelástico de asa reta engastada em túnel de vento

Monografia submetida ao curso de graduação em Engenharia Aeroespacial da Universidade de Brasília, como requisito parcial para obtenção do Título de Bacharel em Engenharia Aeroespacial.

Universidade de Brasília - UnB

Faculdade UnB Gama - FGA

Orientador: Profa. Dra.: Polliana Candida Oliveira Martins (FGA/UnB)

Coorientador: Prof. Dr.: Rafael Castilho Faria Mendes (FGA/UnB)

Brasília, DF

2023

Gabriel Sabino de Oliveira

Otimização de parâmetros para modelo aeroelástico de asa reta engastada em túnel de vento/ Gabriel Sabino de Oliveira. – Brasília, DF, 2023-
65 p. : il. (algumas color.) ; 30 cm.

Orientador: Profa. Dra.: Polliana Candida Oliveira Martins (FGA/UnB)

Trabalho de Conclusão de Curso – Universidade de Brasília - UnB
Faculdade UnB Gama - FGA , 2023.

1. *Flutter*. 2. Otimização. I. Profa. Dra.: Polliana Candida Oliveira Martins (FGA/UnB) . II. Universidade de Brasília. III. Faculdade UnB Gama. IV. Otimização de parâmetros para modelo aeroelástico de asa reta engastada em túnel de vento

Gabriel Sabino de Oliveira

Otimização de parâmetros para modelo aeroelástico de asa reta engastada em túnel de vento

Monografia submetida ao curso de graduação em Engenharia Aeroespacial da Universidade de Brasília, como requisito parcial para obtenção do Título de Bacharel em Engenharia Aeroespacial.

Trabalho aprovado. Brasília, DF, 14 de dezembro de 2023:

**Profa. Dra.: Polliana Candida Oliveira
Martins (FGA/UnB)**
Orientador

**Prof. Dr.: Rafael Castilho Faria
Mendes (FGA/UnB)**
Coorientador

**Prof. Dr.: Sergio Henrique da Silva
Carneiro (FGA/UnB)**
Convidado 1

**Prof. Dr.: Douglas Domingues Bueno
(UNESP)**
Convidado 2

Brasília, DF
2023

Resumo

Flutter representa um fenômeno de instabilidade estrutural dinâmica, tornando a análise da estabilidade aeroelástica dinâmica crucial. Dessa forma, é proposto a análise do fenômeno aeroelástico utilizando modelos de otimização matemática, com foco no fenômeno aeroelástico de *flutter*. O trabalho tem como objetivo principal desenvolver um modelo matemático de otimização para configurar uma asa retangular suscetível ao *flutter* em experimentos de túnel de vento. Os objetivos específicos incluem uma revisão teórica abrangente sobre *flutter*, a formulação de um problema matemático de otimização considerando as dimensões e propriedades da asa como variáveis de projeto, e a representação das dimensões do túnel de vento como restrições. Para isso, realizou-se uma revisão teórica sobre aeroelasticidade e otimização, resultando na determinação das equações aeroelásticas para o estudo do fenômeno. A implementação do modelo matemático ocorreu no MATLAB[®], fazendo uso da função *fmincon*. Os resultados indicaram que o algoritmo de otimização obteve valores ótimos para as variáveis de projeto. Dessa forma, o trabalho fornece dados teóricos para abordagens experimentais. Os resultados obtidos atendem aos objetivos propostos, evidenciando a relevância da otimização matemática na análise aeroelástica.

Palavras-chaves: *flutter*. otimização. aeroelasticidade. ensaio aeroelástico.

Abstract

Flutter represents a dynamic structural instability phenomenon, making the analysis of dynamic aeroelastic stability crucial. Thus, the analysis of the aeroelastic phenomenon is proposed using mathematical optimization models, focusing on the flutter phenomenon. The main objective of the work is to develop a mathematical optimization model to configure a rectangular wing susceptible to flutter in wind tunnel experiments. Specific objectives include a comprehensive theoretical review of flutter, the formulation of a mathematical optimization problem considering wing dimensions and properties as design variables, and the representation of wind tunnel dimensions as constraints. To achieve this, a theoretical review of aeroelasticity and optimization was conducted, resulting in the determination of aeroelastic equations for the study of the phenomenon. The implementation of the mathematical model occurred in MATLAB[®], using the *fmincon* function. The results indicated that the optimization algorithm obtained optimal values for the design variables. Thus, the work provides theoretical data for experimental approaches. The obtained results meet the proposed objectives, highlighting the relevance of mathematical optimization in aeroelastic analysis.

Key-words: flutter. optimization. aeroelasticity. aeroelastic test.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Representação em formato de fluxograma da estruturação deste trabalho.	16
Figura 2 – Diagrama de Collar, adaptado por (COELHO; MARTINS, 2022).	19
Figura 3 – Diagrama dos campos de estudo da aeroelasticidade (VERGANI, 2017).	19
Figura 4 – Representação das forças aerodinâmicas resultantes e suas componentes (ANDERSON, 2010).	21
Figura 5 – Modelo aeroelástico binário proposto por Wright e Cooper (2015) (Adaptado).	29
Figura 6 – Gráfico V - g - f para um sistema aeroelástico binário (WRIGHT; COOPER, 2015).	37
Figura 7 – Diagrama representativo do funcionamento do algoritmo de otimização.	41
Figura 8 – Diagrama V - g - f e comparação entre os métodos k e p - k .	45
Figura 9 – Túnel de vento do Laboratório de Energia e Ambiente da Universidade de Brasília (MENDES, 2020).	46
Figura 10 – Relação entre as velocidades críticas desejadas e as dimensões ótimas para a espessura de 0,7 mm e razão de aspecto igual a 2,5.	48
Figura 11 – Relação entre as velocidades críticas desejadas e as dimensões ótimas para a espessura de 0,7 mm e razão de aspecto igual a 2,5.	49
Figura 12 – Relação entre as velocidades críticas desejadas e as propriedades mecânicas ótimas para a espessura de 0,7 mm e razão de aspecto igual a 2,5.	50
Figura 13 – Relação entre as velocidades críticas desejadas e as dimensões ótimas para a espessura de 0,7 mm.	51
Figura 14 – Relação entre as velocidades críticas desejadas e as propriedades mecânicas ótimas para a espessura de 0,7 mm.	51
Figura 15 – Relação entre as velocidades críticas desejadas e as dimensões ótimas para a espessura de 0,7 mm.	53
Figura 16 – Relação entre as velocidades críticas desejadas e as propriedades mecânicas ótimas para a espessura de 0,7 mm.	53
Figura 17 – Relação entre o módulo de elasticidade E e a densidade ρ para diferentes tipos de materiais. A região retangular em vermelho representa a região que contém soluções ótimas. Adaptado de (STEINBRECHER; LEUBNER-METZGER, 2016).	54
Figura 18 – Relação entre as velocidades críticas desejadas e as velocidades críticas obtidas utilizando o método p - k , empregado na solução do problema aeroelástico de <i>flutter</i> .	56

Lista de tabelas

Tabela 1 – Vantagens e Desvantagens dos Métodos de Otimização Determinístico.	27
Tabela 2 – Vantagens e Desvantagens dos Métodos de Otimização Heurísticos.	28
Tabela 3 – Casos de otimização abordados.	46
Tabela 4 – Valores mínimo e máximo para c , bem como o valor da AR inserido no algoritmo de otimização.	47
Tabela 5 – Propriedades do alumínio inseridas no algoritmo de otimização.	47
Tabela 6 – Valores mínimo e máximo para E , bem como o valor da densidade e coeficiente de Poisson, os quais foram inseridos no algoritmo de otimização.	48
Tabela 7 – Valores mínimo e máximo para c , bem como o valor da AR , inserido no algoritmo de otimização.	50
Tabela 8 – Valores mínimo e máximo para E , bem como o valor da densidade e coeficiente de Poisson, os quais foram inseridos no algoritmo de otimização.	50
Tabela 9 – Valores mínimo e máximo para c , bem como o valor da AR , inserido no algoritmo de otimização.	52
Tabela 10 – Valores mínimo e máximo para E , bem como os valores mínimo e máximo para a densidade ρ , além do coeficiente de Poisson, os quais foram inseridos no algoritmo de otimização.	52
Tabela 11 – Resultado obtido considerando a madeira balsa como material do aparato aeroelástico.	55
Tabela 12 – Resultados ótimos para as quatro configurações de variáveis de projeto.	62
Tabela 13 – Parâmetros de entrada para os métodos de solução de <i>flutter</i> .	64

Lista de abreviaturas e siglas

GDL	Grau de liberdade
UnB	Universidade de Brasília

Lista de símbolos

Símbolos Gregos:

γ	Constante de torção
λ	Autovalor
ρ_n	Densidade
ω	Frequência natural aeroelástica
δW	Trabalho virtual

Alfabeto Latino (símbolos minúsculos):

a_w	Inclinação da curva de sustentação para uma asa
b	Semicorda do aerofólio
c	Corda media da seção típica
ea	Eixo elástico
g	Fator de amortecimento
i	Unidade imaginária
k	Frequência reduzida
m	Massa por unidade de área da asa
q	Deslocamento em coordenadas generalizadas
s	Envergadura da asa
x	Deslocamento em coordenadas retangulares
x_f	Posição do eixo de flexão

Alfabeto Latino (símbolos maiúsculos):

A	Matriz de inércia
<i>AR</i>	Razão de aspecto
B	Matriz de amortecimento aerodinâmico
C	Matriz de rigidez aerodinâmica
<i>C_D</i>	Coefficiente de arrasto da asa
<i>C_L</i>	Coefficiente de sustentação da asa
<i>C_M</i>	Coefficiente de momento da asa
D	Matriz de amortecimento estrutural
<i>D</i>	Força de arrasto aerodinâmico
<i>E</i>	Módulo de elasticidade
E	Matriz de rigidez estrutural
<i>G</i>	Módulo de cisalhamento
<i>I</i>	Momento de inércia
<i>J</i>	Momento polar de inércia
<i>L</i>	Força de sustentação aerodinâmica
<i>M</i>	Momento aerodinâmico
<i>M_{θ̇}</i>	Derivada do momento aerodinâmico com relação a $\dot{\theta}$
<i>Q_j</i>	Força ou momento genérico na j-ésima coordenada
Q	Matriz dinâmica
<i>T</i>	Energia cinética total
<i>U</i>	Energia potencial total
<i>V</i>	Velocidade

Sumário

1	INTRODUÇÃO	14
1.1	Contextualização e Motivação	14
1.2	Objetivos	15
1.2.1	Objetivo Específicos	15
1.3	Síntese da Metodologia	16
1.4	Organização do Trabalho	17
2	REFERENCIAL TEÓRICO	18
2.1	Aeroelasticidade: fundamentos	18
2.1.1	Fenômeno Aeroelástico de <i>Flutter</i>	19
2.1.1.1	Aparatos Aeroelásticos	20
2.2	Aerodinâmica	20
2.2.1	Aerodinâmica Estacionária	22
2.2.2	Aerodinâmica Não Estacionária	22
2.3	Vibrações Mecânicas	23
2.4	Modelos Matemáticos de Otimização	24
2.4.1	Método de Otimização Determinístico	26
2.4.2	Método de Otimização Heurístico	27
3	MODELAGEM ANALÍTICA	29
3.1	Modelo Aeroelástico de 2 Graus de Liberdade	29
3.2	Análise de <i>Flutter</i>	33
3.2.1	Solução por Autovalores	33
3.2.2	Método k	34
3.2.3	Método $p-k$	36
3.2.4	Gráficos V-g-f	36
4	EQUACIONAMENTO GERAL DO PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO	38
4.1	Definição da função objetivo	38
4.2	Definição das funções de restrição	40
4.3	Algoritmo de Otimização	41
4.3.1	Pré solução	41
4.3.2	Solução	42
4.3.3	Pós solução	43
5	RESULTADOS	44

5.1	Comparação do método k e do método $p-k$	44
5.2	Resultados do modelo analítico de otimização	45
5.2.1	Otimização do modelo de placa considerando a variável c	47
5.2.2	Otimização do modelo de placa considerando as variáveis c e E	48
5.2.3	Otimização do modelo de placa considerando as variáveis c , AR e E	49
5.2.4	Otimização do modelo de placa considerando as variáveis c , AR , E e ρ	52
5.2.4.1	Dimensões ótimas para diferentes valores do módulo de elasticidade e densidade	54
5.2.4.2	Estudo sobre a utilização de madeira balsa como material para o aparato aeroelástico	55
5.2.5	Relação entre as velocidade críticas desejadas com as velocidades críticas obtidas utilizando o método $p-k$	56
6	CONCLUSÃO	57
6.1	Sugestões para trabalhos futuros	58
	REFERÊNCIAS	59
	APÊNDICE A – SOLUÇÕES ÓTIMAS	62
	APÊNDICE B – PARÂMETROS DE ENTRADA PARA A SOLU- ÇÃO AEROELÁSTICA	63
	APÊNDICE C – REPOSITÓRIO DAS ROTINAS DO MATLAB	65

1 Introdução

1.1 Contextualização e Motivação

A indústria aeronáutica, caracterizada por projetos de alto desempenho, é impulsionada pelo avanço das ferramentas tecnológicas. De maneira geral, o desenvolvimento de uma aeronave baseia-se nos requisitos de missão estabelecidos na fase inicial do projeto e no processo de certificação da aeronave.

No contexto da aeroelasticidade, é relevante mencionar que o processo de certificação de aeronaves é crucial, referindo-se ao processo pelo qual as autoridades de aviação civil concedem aprovação para que uma aeronave seja projetada, construída, operada e mantida de acordo com padrões de segurança e desempenho estabelecidos (ANAC, 2019; FAA, 2017). Assim, garantir que o intervalo de velocidade operacional de uma aeronave não apresente instabilidades aeroelásticas é fundamental, dado o contexto (ANAC, 2021; FAA, 2014).

Do ponto de vista estrutural, é comum que o fabricante da aeronave registre os carregamentos aos quais a aeronave estará sujeita dentro de um envelope de projeto (WRIGHT; COOPER, 2015). As limitações das cargas aplicadas são fornecidas em termos do envelope de voo, seja por meio de diagrama V-n ou fator de carga em relação à velocidade (OXFORD, 2001). Uma vez estabelecido o envelope de voo, é necessário assegurar que a aeronave seja capaz de operar dentro das condições de voo típicas. Dentre as análises estruturais mais relevantes, destacam-se os fenômenos aeroelásticos, com especial ênfase no *flutter*, devido à sua natureza potencialmente catastrófica (FUNG, 1993).

Flutter é um fenômeno de instabilidade estrutural dinâmica. Portanto, a análise da estabilidade aeroelástica dinâmica se torna crucial, especialmente para a prevenção do *flutter*, como uma etapa crítica no projeto e certificação de aeronaves (LUBER, 2015).

A compreensão e análise do *flutter* são essenciais nos processos de projeto e certificação de aeronaves, visando assegurar a estabilidade estrutural e o desempenho do avião. Por meio do estudo do *flutter*, os engenheiros podem identificar e mitigar possíveis instabilidades, otimizar o projeto para minimizar os riscos envolvidos e estabelecer limites operacionais para garantir a operação segura e confiável da aeronave (COELHO; MARTINS, 2022; BIDINOTTO, 2007).

O avanço tecnológico na indústria aeronáutica está predominantemente focado no aprimoramento da eficiência das aeronaves, introduzindo novos materiais, como compósitos, no processo de fabricação (BIDINOTTO, 2007). Ao contrário do passado, quando os projetos eram principalmente baseados em equações analíticas, atualmente, o uso de

softwares de design, como CATIA ou SolidWorks, e de simulação numérica, como Ansys ou Nastran, possibilita a incorporação de geometrias complexas nos projetos de aeronaves. Essas ferramentas tecnológicas têm desempenhado um papel crucial no avanço da concepção e desenvolvimento de aeronaves.

Assim, o fenômeno aeroelástico de *flutter*, impulsionado pelo avanço tecnológico do mercado aeronáutico, é abordado por meio de modelos numéricos. Nesse contexto, surge a necessidade de validar os novos modelos. Para tal, uma abordagem inicial é a utilização de aparatos, os quais servem como alternativa para verificação e certificação dos componentes de aeronaves. Essa abordagem torna a investigação mais acessível em termos de custos do que os testes em voo e mais confiável do que a análise teórica Tavares.

Dada a importância do estudo e prevenção do fenômeno aeroelástico de *flutter*, é relevante destacar que os conceitos teóricos relacionados a esse tema são frequentemente abordados em disciplinas de pós-graduação. Nesse contexto, torna-se interessante proporcionar uma aproximação entre o extenso conteúdo sobre aeroelasticidade, especialmente o fenômeno de *flutter*, e os alunos de graduação da Universidade de Brasília.

Assim, para concretizar essa ideia, uma abordagem válida seria desenvolver trabalhos que proporcionem oportunidades para que os alunos de graduação realizem pesquisas, tanto práticas quanto teóricas, acerca do fenômeno aeroelástico de *flutter*.

1.2 Objetivos

Em termos gerais, o objetivo deste trabalho consiste em desenvolver um modelo matemático de otimização com o intuito de determinar não apenas as dimensões, mas também as propriedades ótimas do material de uma asa retangular. Dessa forma, busca-se configurar a asa de maneira que ela seja suscetível ao fenômeno aeroelástico de *flutter* em experimentos conduzidos em túnel de vento.

1.2.1 Objetivo Específicos

- Realizar uma revisão teórica abrangente sobre o fenômeno aeroelástico de *flutter* e as áreas de engenharia relacionadas a ele;
- Elaborar um problema matemático de otimização para uma asa retangular engastada na raiz. As variáveis de projeto representarão as dimensões e propriedades do material da asa, organizadas em quatro conjuntos distintos, com o objetivo de examinar como seus valores ótimos impactam na velocidade crítica de *flutter*. O equacionamento do problema de otimização será fundamentado nas equações aeroelásticas que descrevem o fenômeno de *flutter*. Serão incorporadas ao modelo as restrições matemáticas que se fizerem relevantes;

- primeiro conjunto: corda c ;
 - segundo conjunto: corda c e módulo de elasticidade E ;
 - terceiro conjunto: corda c , razão de aspecto AR e módulo de elasticidade E ;
 - quarto conjunto: corda c , razão de aspecto AR , módulo de elasticidade E e densidade ρ .
- Representar as dimensões da seção de teste do túnel de vento, juntamente com os parâmetros geométricos e físicos da asa, como restrições no processo de otimização, e explorar como a variação desses parâmetros afeta os resultados da velocidade crítica de *flutter*.

1.3 Síntese da Metodologia

Com o intuito de atingir os objetivos estabelecidos neste trabalho, sugere-se a seguinte estruturação para o seu desenvolvimento, conforme ilustrado na Fig. 1. Importante destacar que cada tópico representado no fluxograma será abordado em capítulos distintos.

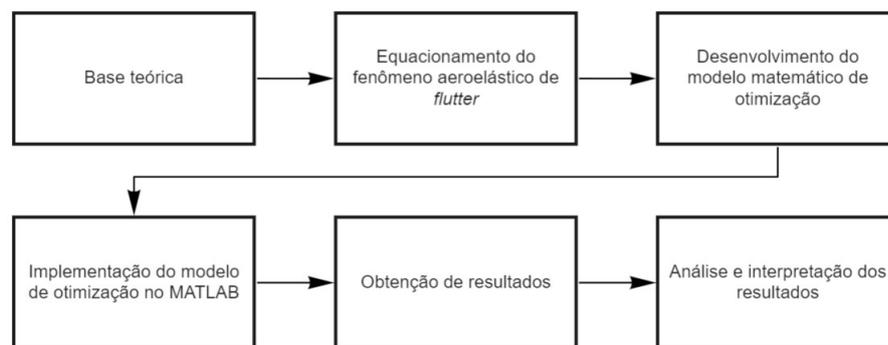


Figura 1 – Representação em formato de fluxograma da estruturação deste trabalho.

Inicialmente, é elaborada uma fundamentação teórica sobre o campo de estudo da aeroelasticidade, com foco específico no fenômeno aeroelástico conhecido como *flutter*. Da mesma forma, são apresentadas bases teóricas nas subáreas que fundamentam a aeroelasticidade, como aerodinâmica e vibrações mecânicas.

Em seguida, ainda dentro do contexto da fundamentação teórica, aborda-se o campo de estudo da otimização na engenharia. Além disso, recorre-se à bibliografia para descrever de forma geral como ocorre a construção de um modelo de otimização.

Com base na fundamentação teórica, as equações aeroelásticas que descrevem o fenômeno de *flutter* são determinadas. Esse conjunto de equações será utilizado no desenvolvimento do modelo matemático de otimização, o qual levará em consideração não

apenas as características geométricas do problema, mas também as restrições físicas da seção de teste de um túnel de vento.

Além disso, o modelo de otimização é implementado no software MATLAB[®], utilizando a função nativa do software *fmincon*. Essa função é responsável por determinar a solução ótima para a função objetivo desenvolvida no modelo matemático de otimização. O algoritmo é responsável por obter e apresentar os resultados da análise de *flutter* proposta para este trabalho.

1.4 Organização do Trabalho

A organização do presente trabalho é detalhada nos parágrafos a seguir, com o objetivo de informar ao leitor a estrutura do conteúdo do texto.

O trabalho está dividido em 6 capítulos, cada um abordando aspectos específicos relacionados ao objetivo geral do estudo.

No Capítulo 2, é apresentado o referencial teórico que aborda o fenômeno aeroelástico de *flutter*, as noções básicas de aerodinâmica e os princípios das vibrações mecânicas.

No Capítulo 3, é apresentada a modelagem analítica para o problema de *flutter*, bem como os métodos utilizados para determinar as velocidades críticas. Além disso, são abordados conceitos gerais de modos de vibração e frequências naturais.

No Capítulo 4, é desenvolvido o equacionamento referente ao problema de otimização proposto neste trabalho. São apresentados os detalhes da construção da função objetivo e das restrições de otimização. Além disso, é fornecida uma descrição detalhada do funcionamento do algoritmo de otimização.

No Capítulo 5, são expostos os resultados obtidos neste trabalho, acompanhados de sua interpretação.

No Capítulo 6, são apresentadas as conclusões e considerações finais deste trabalho.

2 Referencial Teórico

Neste capítulo, serão abordadas as principais áreas do conhecimento necessárias para o desenvolvimento deste trabalho, como aerodinâmica, aeroelasticidade e vibrações mecânicas. Além disso, de forma geral, será definido o processo matemático de otimização.

2.1 Aeroelasticidade: fundamentos

Na visão de [Bisplinghoff, Ashley e Halfman \(2013\)](#), o termo aeroelasticidade refere-se à interação entre as forças aerodinâmicas, elásticas e inerciais. A interação ocorre quando um objeto é exposto a um fluxo de ar. Por outras palavras, a aeroelasticidade se dedica ao estudo da deformação de estruturas flexíveis de aeronaves causada pelas forças aerodinâmicas resultantes da corrente de ar ([WRIGHT; COOPER, 2015](#)).

É habitual separar os fenômenos aeroelásticos em dois campos, estático e dinâmico ([MARTINS P.C.O., 2017](#)). No estudo da aeroelasticidade estática, as forças inerciais não são consideradas, ao passo que as propriedades do sistema não se alteram ao longo do tempo. Em geral, é investigado no estudo estático a instabilidade estrutural devido a variação das cargas aerodinâmicas e flexibilidade da estrutura ([WRIGHT; COOPER, 2015](#); [OLIVEIRA; ESPER, 2023](#)).

Por sua vez, no estudo da aeroelasticidade dinâmica, as forças inerciais se fazem presentes ([OLIVEIRA; ESPER, 2023](#)). Ressaltando que as forças inerciais, também conhecidas como forças de corpo, são uma relação da massa (propriedade do corpo) e aceleração (propriedade do sistema) ([PERRY; AZAR, 1982](#)). Em suma, o estudo deste campo investiga a resposta dinâmica do sistema face a diferentes missões e ambientes de operação de uma aeronave ([WRIGHT; COOPER, 2015](#)).

Outra abordagem comum é o diagrama proposto por [Collar \(1978\)](#), no qual cada vértice de um triângulo representa as forças inerciais, aerodinâmicas e elásticas. Observando a [Fig. 2](#), é possível notar que a aeroelasticidade dinâmica sofre influência de outros campos de estudos, tal como vibrações mecânicas e controle.

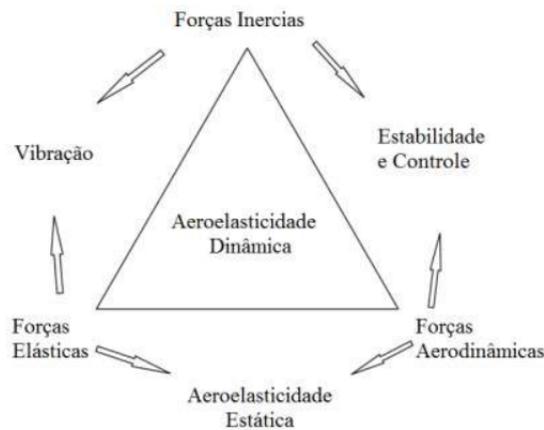


Figura 2 – Diagrama de Collar, adaptado por (COELHO; MARTINS, 2022).

Vergani (2017) propõe uma releitura do diagrama proposto por Collar (1978), a qual relaciona a aeroelasticidade a 3 grandes áreas de estudo da engenharia aeroespacial, sendo elas mecânica do voo, aerodinâmica e dinâmica estrutural. A Fig. 3 apresenta que a aeroelasticidade dinâmica é um campo de estudo com múltiplas faces.

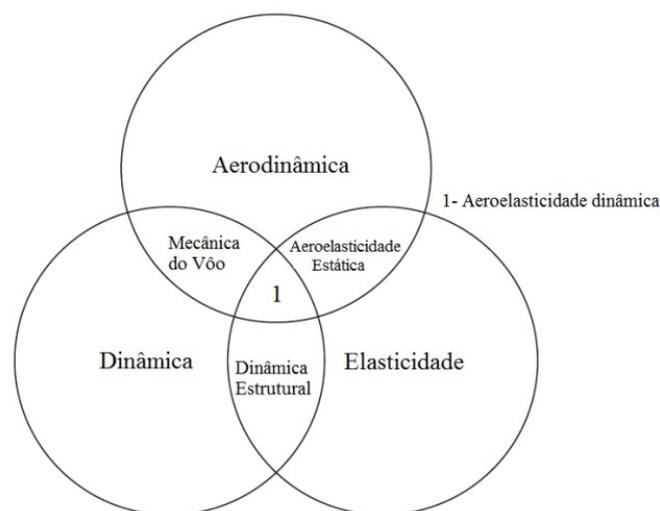


Figura 3 – Diagrama dos campos de estudo da aeroelasticidade (VERGANI, 2017).

2.1.1 Fenômeno Aeroelástico de *Flutter*

Para Collar (1978), *flutter* é o fenômeno aeroelástico dinâmico mais importante. Wright e Cooper (2015) por sua vez, descreve o *flutter* como um fenômeno de instabilidade dinâmica que ocorre em uma velocidade específica conhecida como velocidade de *flutter*. Nessa velocidade, o escoamento de ar excita, geralmente, componentes estruturais da aeronave, os quais possuem modos de vibração acoplados. Como resultado, a resposta oscilatória autoexcitada provoca a falha da estrutura (MARQUI, 2004).

A princípio, os componentes estruturais da aeronave submetidos às cargas do tipo sustentação, tais como a asa, cauda e superfícies de controle, extraem energia do fluxo de ar

(BISPLINGHOFF; ASHLEY; HALFMAN, 2013). Dessa forma, na velocidade de *flutter*, a capacidade da estrutura de amortecer as vibrações é perdida. Acima da velocidade de *flutter*, ocorrem oscilações instáveis (COELHO; MARTINS, 2022).

O fenômeno aeroelástico de *flutter* se manifesta de formas distintas (DOWELL et al., 1995). A seguir, são discutidas algumas das mais comuns.

- *Stall flutter*: quando um aerofólio oscila próximo à sua condição de estol em regime permanente, o fenômeno do estol adquire um caráter dinâmico. Este fenômeno de *flutter* geralmente está associado a um movimento de um grau de liberdade, o qual não pode ser explicado pela teoria clássica de *flutter*;
- Oscilações de ciclo limite (LCO): a oscilação em ciclo limite é caracterizada por uma oscilação de amplitude constante que está associada às frequências dos modos aeroelásticos da estrutura. É um fenômeno não linear que está associado a condições iniciais específicas;
- *Buzz-flutter*: refere-se geralmente a um fenômeno não catastrófico de padrão repetitivo intenso, que recebe esse nome devido ao seu comportamento oscilatório constante. Também pode ser compreendido como um LCO (oscilações de ciclo limite) de baixa frequência.

2.1.1.1 Aparatos Aeroelásticos

Uma abordagem comum e valiosa para o estudo do fenômeno aeroelástico de *flutter* são os ensaios em túneis de vento. Os ensaios aeroelásticos em túneis de vento desempenham um papel crucial na verificação do fenômeno de *flutter* e no estudo do comportamento da estrutura em relação ao fluxo de ar. Esses ensaios podem ser conduzidos utilizando modelos de asas flexíveis ou modelos de asas rígidas combinadas com dispositivos flexíveis (OLIVEIRA; ESPER, 2023).

Para a investigação experimental do fenômeno de *flutter* em túneis de vento, utiliza-se aparatos aeroelásticos (SANCHES, 2022). Hodges e Pierce (2011) relatam que o desenvolvimento de um aparato aeroelástico que represente o fenômeno de *flutter* em uma aeronave real é uma tarefa complexa. Em vez disso, se faz mais interessante fabricar uma versão em escala que reproduza adequadamente o comportamento estrutural.

2.2 Aerodinâmica

No contexto das aeronaves, as forças e momentos aerodinâmicos são gerados principalmente pelas asas, que desempenham um papel fundamental na aerodinâmica. Essas grandezas são resultantes da distribuição de pressão e tensão de cisalhamento ao redor do

corpo da aeronave, sendo que as asas são particularmente responsáveis por essa interação com o escoamento de ar (ANDERSON, 2010).

Anderson (2010) menciona que a força aerodinâmica resultante e o momento aerodinâmico podem ser obtidos por meio da integração das pressões e tensões de cisalhamento. Na Fig. 4, a componente horizontal da força resultante é denominada arrasto, enquanto a componente vertical representa a sustentação.

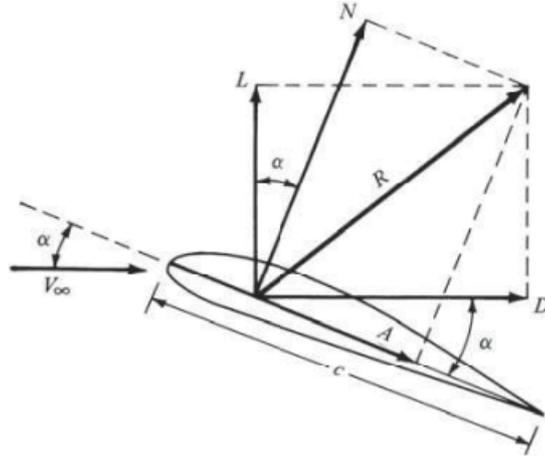


Figura 4 – Representação das forças aerodinâmicas resultantes e suas componentes (ANDERSON, 2010).

As forças aerodinâmicas apresentadas na Fig. 4 podem ser expressas de forma matemática. Portanto, as seguintes equações são obtidas:

- Equação do arrasto:

$$D = \frac{\rho_\infty}{2} c_D S_{AE} V_\infty^2 \quad (2.1)$$

Na equação, D representa a força aerodinâmica de arrasto, ρ_∞ denota a densidade do ar, c_D é o coeficiente aerodinâmico de arrasto, S_{AE} corresponde à área da superfície do aerofólio exposta ao fluxo de ar, e V_∞ é a velocidade do ar relativa ao aerofólio.

- Equação do sustentação:

$$L = \frac{\rho_\infty}{2} c_L S_{AE} V_\infty^2 \quad (2.2)$$

Na equação, L representa a força aerodinâmica de sustentação, ρ_∞ denota a densidade do ar, c_L é o coeficiente aerodinâmico de sustentação, S_{AE} corresponde à área da superfície do aerofólio exposta ao fluxo de ar, e V_∞ é a velocidade do ar relativa ao aerofólio.

- Equação do momento aerodinâmico:

$$M = \frac{\rho_\infty}{2} c_M S_{AE} V_\infty^2 \quad (2.3)$$

Na equação, M representa o momento aerodinâmico, ρ_∞ é a densidade do ar, c representa o comprimento de corda do aerofólio, c_M é o coeficiente de momento aerodinâmico, S_{AE} denota a área da superfície do aerofólio exposta ao fluxo de ar, e V_∞ é a velocidade do ar relativa ao aerofólio.

É importante destacar que os coeficientes c_D , c_L e c_M são determinados experimentalmente. [Anderson \(2010\)](#) apresenta valores desses coeficientes para diferentes tipos de aerofólios.

2.2.1 Aerodinâmica Estacionária

A aerodinâmica estacionária, uma disciplina dentro da engenharia aeroespacial, concentra-se na análise do comportamento do fluxo de ar em torno de um corpo quando tanto o corpo quanto o fluxo de ar estão em um estado estacionário, caracterizado pela ausência de variações temporais. Dentro dessa perspectiva, o termo estacionário denota que as grandezas de velocidade e pressão no fluxo de ar mantêm-se constantes ([MILNE-THOMSON, 1973](#); [WRIGHT](#); [COOPER, 2015](#)).

O propósito da aerodinâmica estacionária é examinar minuciosamente as características do fluxo de ar, englobando as forças aerodinâmicas, tais como arrasto e sustentação, bem como os padrões de escoamento que ocorrem em objetos estáticos ou em movimento com velocidades constantes. Essa análise é conduzida por meio da aplicação de princípios fundamentais da aerodinâmica, que abrangem a equação de Bernoulli, as leis de conservação de massa e momento, e as equações de Navier-Stokes ([ANDERSON, 2010](#)).

2.2.2 Aerodinâmica Não Estacionária

Para realizar análises de *flutter*, é imprescindível considerar o comportamento das superfícies aerodinâmicas durante movimentos dinâmicos, levando em conta o efeito do movimento dessas superfícies nas forças e momentos resultantes. Esses efeitos, denominados como instável, são resultantes da circulação e da interferência variável em uma asa em movimento, podendo exercer uma influência significativa nas forças e momentos aerodinâmicos resultantes. Conseqüentemente, faz-se necessário uma abordagem analítica mais sofisticada do que meramente considerar o ângulo de incidência - ângulo de ataque, a fim de capturar adequadamente esses fenômenos complexos ([WRIGHT](#); [COOPER, 2015](#)).

O campo de análise da aerodinâmica não estacionária engloba uma variedade de modelos matemáticos que descrevem, de diferentes maneiras, a influência do comportamento dinâmico do sistema. A seleção do modelo aerodinâmico não estacionário deve ser feita levando em consideração a natureza do estudo em questão. A escolha adequada do modelo é crucial para capturar com precisão os fenômenos dinâmicos presentes no sistema

aerodinâmico em análise, garantindo resultados confiáveis e significativos. Dessa forma, é necessário realizar uma avaliação criteriosa dos modelos disponíveis, considerando suas limitações e capacidades em relação aos aspectos específicos do estudo em pauta (FUNG, 1993; BISPLINGHOFF; ASHLEY; HALFMAN, 2013).

2.3 Vibrações Mecânicas

Em suma, a análise de *flutter* é amplamente fundamentada na teoria das vibrações mecânicas. Essa relação se tornará evidente ao longo da progressão deste trabalho.

A vibração é a subdisciplina da dinâmica que lida com o movimento repetitivo. Em boa parte dos sistemas mecânicos e estruturas, a vibração é indesejada e até mesmo destrutiva (INMAN, 2014).

A vibração de um sistema envolve a transferência alternada de energia potencial para energia cinética e vice-versa. Em sistemas com amortecimento, uma quantidade específica de energia é dissipada durante cada ciclo de vibração e precisa ser reposta por uma fonte externa para manter um regime vibratório contínuo - resposta permanente (RAO, 2009a).

A teoria de sistemas de parâmetros concentrados em vibrações mecânicas é uma abordagem que simplifica a modelagem de estruturas vibratórias, tratando a massa, rigidez e amortecimento como concentrados em pontos específicos do sistema. Nesta teoria, assume-se que as propriedades físicas relevantes, como a massa, a rigidez e o amortecimento, estão concentradas em determinados locais ou graus de liberdade da estrutura. A equação geral de movimento para esse sistema pode ser expressa como (INMAN, 2014):

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{F}(t) \quad (2.4)$$

Cada termo da Eq. 2.4 é detalhado abaixo.

- \mathbf{M} é a matriz de massa;
- \mathbf{C} é a matriz de amortecimento;
- \mathbf{K} é a matriz de rigidez;
- \mathbf{u} é o vetor de deslocamento;
- $\dot{\mathbf{u}}$ é o vetor de velocidade;
- $\ddot{\mathbf{u}}$ é o vetor de aceleração; e
- $\mathbf{F}(t)$ é o vetor de forças externas aplicadas.

A teoria de sistemas de parâmetros concentrados é frequentemente empregada na abordagem inicial de sistemas mecânicos vibratórios (INMAN, 2014).

Em outra perspectiva, para resolver esse sistema, é possível utilizar o método de modos assumidos, que sugere que a solução pode ser aproximadamente representada pela combinação linear dos modos de vibração (MEIROVITCH, 2001). A teoria de modos assumidos de vibração é uma abordagem na análise de vibrações de estruturas que simplifica o sistema complexo em modos de vibração mais simples. A ideia fundamental é decompor a resposta vibratória da estrutura em uma combinação linear de modos de vibração conhecidos (MEIROVITCH, 2001; SOUSA, 2022).

Assim, a solução do sistema, utilizando o método de modos assumidos, frequentemente referido na literatura como MMA, toma a seguinte forma (SOUSA, 2022):

$$u(t, x) = \sum_{i=1}^n q_i(t) \phi_i(x) \quad (2.5)$$

Na Eq. 2.5, n denota o número de modos considerados, $q_i(t)$ corresponde às coordenadas modais generalizadas, que são dependentes do tempo, e ϕ_i simboliza os modos de vibração do sistema. Nesse sentido, há sistemas em que é preciso adotar os modos de vibração, visto que não possuem formulação analítica.

A modelagem de sistemas com parâmetros distribuídos considera que a massa do corpo está distribuída por toda a estrutura como uma série de elementos infinitamente pequenos. Consequentemente, quando a estrutura vibra, cada um desses infinitos elementos se move em relação aos outros de maneira contínua. Por esse motivo, esses sistemas são chamados de sistemas de parâmetros distribuídos (INMAN, 2014). Além disso, sistemas de parâmetros distribuídos possuem uma quantidade infinita de modos de vibração, resultando em um número infinito de frequências naturais (RAO, 2009a).

A descrição matemática desses sistemas muitas vezes envolve o uso de equações diferenciais parciais para representar as relações entre as variáveis ao longo do domínio espacial ou temporal. Essas equações podem ser resolvidas para obter informações sobre a distribuição de parâmetros ao longo do sistema (INMAN, 2014; RAO, 2009a).

2.4 Modelos Matemáticos de Otimização

O processo matemático de otimização consiste em determinar os valores de entrada que maximizam ou minimizam uma função objetivo, levando em consideração um conjunto de restrições. Utilizando algoritmos e métodos numéricos, busca-se a solução ótima considerando as condições e limitações estabelecidas pelo problema. O objetivo é encontrar os parâmetros que otimizem o desempenho ou atendam aos critérios estabelecidos para o projeto (RAO, 2009b).

O estudo da otimização, geralmente, adota uma abordagem teórica e computacional. A abordagem teórica é extremamente útil quando o objetivo é desenvolver novos métodos de otimização ou avaliar o desempenho dos métodos existentes. Além disso, o estudo da otimização frequentemente se concentra na compreensão de variados algoritmos desenvolvidos para solucionar os problemas de otimização (MESSAC, 2015).

Atualmente, a aplicação dos modelos matemáticos de otimização na engenharia é facilitada pelo uso de ferramentas de modelagem computacional e programação, como o MATLAB®, uma opção para a implementação desses modelos (MESSAC, 2015).

O problema a ser otimizado é formalmente descrito por meio de uma equação matemática, chamada de função objetivo. As variáveis presentes nessa função objetivo são denominadas variáveis de projeto. É comum que o modelo de otimização inclua restrições, como restrições de custo, dimensão ou outras. Resumidamente, essas restrições são expressas como equações, conhecidas como equações de restrição. Vale ressaltar que a presença de restrições afeta o conjunto de soluções ótimas da função objetivo (RAO, 2009b; BERTSEKAS D. P.; OZDAGLAR, 2003).

De acordo com Ravindran, Ragsdell e Reklaitis (2006), um problema matemático de otimização pode ser generalizado da seguinte forma.

$$\begin{aligned}
 & \text{Minimize} && f(\mathbf{x}) \\
 & \text{Sujeita a} && h_k(\mathbf{x}) = 0 && k = 1, 2, \dots, K \\
 & && g_j(\mathbf{x}) \geq 0 && j = 1, 2, \dots, J \\
 & && x_n^{(S)} \geq x_n \geq x_n^{(I)} && n = 1, 2, \dots, N
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

Na equação 2.6, $f(\mathbf{x})$ representa a função objetivo, $h_k(\mathbf{x}) = 0$ a restrição de igualdade, $g_j(\mathbf{x}) \geq 0$ a restrição de desigualdade, e, por sua vez, $x_n^{(S)} \geq x_n \geq x_n^{(I)}$ representa a restrição de domínio da função objetivo. Utilizando a última relação, é possível determinar o intervalo de valores que o vetor de variáveis \mathbf{x} pode assumir. Vale ressaltar que o vetor \mathbf{x} representa o conjunto de variáveis de projeto.

O conjunto de variáveis de projeto pode estar associado a mais de um resultado ótimo para a função objetivo (RAVINDRAN; RAGSDELL; REKLAITIS, 2006). A quantidade de conjuntos de valores ótimos que satisfazem o problema de otimização é influenciada pela maneira como o problema de otimização é formulado, dadas as restrições de otimização (RAO, 2009b). Em determinados casos, é de interesse da análise determinar o extremo absoluto, ou seja, qual é o conjunto de valores ótimos que configura o resultado de maior influência - mínimo global da função objetivo (UFRJ, 2015).

Problemas matemáticos de engenharia de otimização apresentam funções objetivos robustas, as exigem métodos de solução avançados do ponto de vista matemático (BREDA; MESTRIA, 2020). Assim, nas subseções a seguir são apresentados os métodos

matemáticos comumente aplicados na solução de problemas matemáticos de otimização de grande complexidade. A saber, os métodos matemáticos de otimização são comumente separados em dois tipos: determinísticos e heurísticos (UFRJ, 2015; BREDA; MESTRIA, 2020).

2.4.1 Método de Otimização Determinístico

Os métodos determinísticos, também conhecidos como métodos clássicos, aproximam-se do ponto ótimo através de uma sequência determinística. Esta sequência gera soluções potenciais utilizando um ponto de referência como ponto de partida e um vetor de direção de busca, exigindo o uso da primeira derivada da função objetivo em relação às variáveis de projeto. Um método de otimização é chamado de método determinístico quando todas as suas etapas podem ser previstas conhecendo o ponto de partida. Essencialmente, os métodos determinísticos sempre produzirão a mesma resposta quando partirem do mesmo ponto de partida (UFRJ, 2015; HOLTZ, 2005).

Saramago e Steffen (2009) descrevem que o uso dos métodos determinísticos de otimização produz bons resultados em funções contínuas, convexas e funções unimodais, as quais possuem apenas um ponto de mínimo ou máximo. A título de curiosidade, a função objetivo relacionada ao exemplo apresentado no início desta seção é classificada como unimodal.

Em resumo, métodos de otimização determinísticos referem-se a métodos que buscam a melhor solução para um problema específico sob um conjunto de restrições sem considerar a aleatoriedade. Esses métodos tratam de problemas determinísticos onde as relações entre variáveis e parâmetros do problema são completamente conhecidas e não envolvem incerteza ou variabilidade (SARAMAGO; STEFFEN, 2009).

A Tab. 1) destaca alguns dos principais métodos matemáticos de otimização determinísticos, oferecendo uma comparação entre as vantagens e desvantagens de seu uso, sob a perspectiva de Saramago e Steffen (2009) e Ravindran, Ragsdell e Reklaitis (2006).

Tabela 1 – Vantagens e Desvantagens dos Métodos de Otimização Determinístico.

Método de Otimização	Vantagens	Desvantagens
Método de Newton	<ul style="list-style-type: none"> • Convergência rápida em muitos casos • Eficiente em torno de mínimos locais 	<ul style="list-style-type: none"> • Sensível à escolha inicial • Requer cálculo de derivadas de segunda ordem • Pode não convergir se a matriz Hessiana não for definida positiva
Gradiente	<ul style="list-style-type: none"> • Simplicidade e facilidade de implementação • É eficaz na análise de funções objetivo que envolvem um grande número de variáveis 	<ul style="list-style-type: none"> • Convergência mais lenta • Existe a possibilidade da solução ótima ser fixada em mínimos locais ou regiões "sela"
Máxima Descida	<ul style="list-style-type: none"> • Simplicidade e baixo custo computacional • Pode ser útil quando não é possível calcular derivadas analiticamente 	<ul style="list-style-type: none"> • Convergência lenta • Sensível à escolha do tamanho do passo

2.4.2 Método de Otimização Heurístico

Os métodos heurísticos utilizam apenas informações sobre a função objetivo a ser otimizada, que, exceto pela multimodalidade, podem ser difíceis de representar, não lineares, descontínuas e não diferenciáveis. Esses métodos buscam soluções ótimas por meio de regras probabilísticas e operam de forma “aleatória direcionada”. Tais técnicas requerem avaliação extensiva do problema, por isso é necessário explorar completamente toda a região do espaço de busca que contém a solução ótima. Isso resulta na necessidade de um grande número de avaliações - interações - da função objetivo para encontrar uma solução (SARAMAGO; STEFFEN, 2009; UFRJ, 2015).

É comum que os métodos heurísticos dispensem o uso de derivadas da função objetivo. Ao fazer isso, a otimização passa a ser orientada por parâmetros estocásticos (HOLTZ, 2005). Um processo estocástico é um conjunto de variáveis aleatórias que evoluem ao longo do tempo, e o comportamento futuro desse processo não pode ser previsto

com certeza, mas pode ser descrito por meio de probabilidades (FERNANDEZ, 2014).

De certa maneira, tais métodos assumem características matemáticas iterativas, ou seja, exigem múltiplas avaliações do problema de otimização para determinar os resultados ótimos (HOLTZ, 2005). Portanto, é comum que os métodos heurísticos sejam implementados por meio de software. Ao fazer isso, é necessário considerar o esforço computacional associado ao uso desses métodos, uma vez que determinadas análises podem demandar longos períodos de tempo para a obtenção de resultados (BERTSEKAS D. P.; OZDAGLAR, 2003).

Assim como realizado na subseção anterior, é apresentado um comparativo para alguns dos principais métodos de otimização heurística.

Tabela 2 – Vantagens e Desvantagens dos Métodos de Otimização Heurísticos.

Método de Otimização	Vantagens	Desvantagens
Recozimento Simulado	<ul style="list-style-type: none"> • Exploração eficaz de espaços de busca extensos e complexos • Flexibilidade para escapar de mínimos locais 	<ul style="list-style-type: none"> • Sensível à configuração de parâmetros • Convergência para a solução global não garantida
Algoritmo Genético	<ul style="list-style-type: none"> • Abordagem inspirada na evolução biológica • Trabalha bem em problemas com espaços de busca complexos 	<ul style="list-style-type: none"> • Pode exigir um grande número de avaliações de função • Eficácia dependente da escolha adequada de operadores genéticos
Métodos Baseados em População	<ul style="list-style-type: none"> • Exploração robusta de múltiplas soluções candidatas • Lida com espaços de busca multimodais e variáveis dependentes 	<ul style="list-style-type: none"> • Requer uma população inicial diversificada • Eficácia pode depender da escolha de parâmetros e operadores de evolução

3 Modelagem Analítica

No presente capítulo, será fornecida uma descrição da modelagem matemática analítica para o fenômeno de *flutter*. Para essa finalidade, será adotado tanto o modelo aeroelástico binário quanto uma abordagem simplificada que considera as forças aerodinâmicas não estacionárias.

3.1 Modelo Aeroelástico de 2 Graus de Liberdade

A configuração geométrica adotada para o estudo será a de uma asa retangular com engaste na raiz. O comprimento ao longo do eixo longitudinal será denotado por s , correspondendo à envergadura da asa. Da mesma forma, o comprimento transversal ao eixo longitudinal da asa será representado por c , referindo-se à corda do aerofólio.

O modelo aeroelástico binário adotado neste estudo considera que a geometria do sistema possui apenas dois graus de liberdade (GDL), que são flexão e torção. A asa retangular é caracterizada por uma distribuição de massa uniforme, enquanto as equações de deslocamento são baseadas no comportamento dos modos assumidos, conforme proposto por [Wright e Cooper \(2015\)](#). A Fig. 5 ilustra a geometria retangular do sistema. É de suma importância destacar que as equações aeroelásticas dependem dos seguintes parâmetros: o centro aerodinâmico ac , o centro elástico ec , o eixo elástico ea , a posição do eixo de flexão x_f , a envergadura da asa s e a corda do aerofólio c . Esses parâmetros desempenham um papel fundamental na formulação e análise do comportamento aeroelástico do sistema em questão.

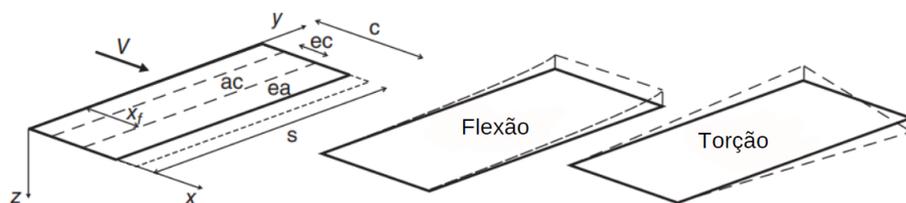


Figura 5 – Modelo aeroelástico binário proposto por [Wright e Cooper \(2015\)](#) (Adaptado).

$$z(x, y, t) = \left(\frac{y}{s}\right)^2 q_b(t) + \left(\frac{y}{s}\right) (x - x_f) q_t(t) \quad (3.1)$$

O deslocamento devido a flexão da asa retangular é descrito pela Eq. 3.1, a qual é dependente tanto das coordenadas generalizadas q_b e q_t , associadas aos movimentos de flexão e torção, respectivamente, quanto do tempo t .

$$\theta(y, t) = \left(\frac{y}{s}\right) q_t(t) \quad (3.2)$$

Por inspeção da Eq. 3.1, pode-se determinar que o deslocamento de torção é expresso pela Eq. 3.2.

As equações de energia de Lagrange são empregadas para formular o conjunto de equações que descrevem o movimento da asa retangular. As equações de energia de Lagrange são um conjunto de equações diferenciais parciais que descrevem o comportamento de um sistema físico em termos das grandezas cinéticas e potenciais do sistema (LANDAU, 1976).

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial x_j} + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_j} + \frac{\partial U}{\partial x_j} = \frac{\partial (\delta W)}{\partial (\delta x_j)} \quad (3.3)$$

Assim, a equação de Lagrange é representada pela Eq. 3.3, na qual x_j assumirá o valor de q_b e q_t .

$$T = \frac{1}{2} \int_{asa} \dot{z} dm \quad (3.4)$$

A energia cinética da asa é expressa de forma geral pela Eq. 3.4.

$$dm = m dx dy \quad (3.5)$$

A relação entre a massa e as coordenadas físicas da geometria da asa é representada na Eq. 3.5. Lembrando que a unidade de m é $\frac{kg}{m^2}$.

$$T = \frac{1}{2} \int_0^s \int_0^c m \left(\left(\frac{y}{s}\right)^2 \dot{q}_b + \left(\frac{y}{s}\right) (x - x_f) \dot{q}_t \right)^2 dx dy \quad (3.6)$$

Logo, a energia cinética do sistema é representada pela Eq. 3.6.

$$U = \frac{1}{2} EI \int_0^s \left(\frac{2q_b}{s^2}\right)^2 dy + \frac{1}{2} GJ \int_0^s \left(\frac{q_t}{s}\right)^2 dy \quad (3.7)$$

A energia potencial do sistema, por sua vez, é expressa pela Eq. 3.7.

$$U = 2EI \frac{q_b^2}{s^3} + \frac{1}{2} GJ \frac{q_t^2}{s} \quad (3.8)$$

Após a resolução das integrais presentes na Eq. 3.7, obtém-se a Eq. 3.8. Além disso, é importante destacar que na equação da energia potencial do sistema estão presentes os termos EI e GJ , que correspondem às rigidezes à flexão e à torção, respectivamente.

$$m \begin{bmatrix} \frac{s^3 c}{3} & \frac{s^2}{2} (c^2 - cx_f) \\ \frac{s^2}{2} (c^2 - cx_f) & s (c^3 - c^2 x_f + cx_f^2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q}_b \\ \ddot{q}_t \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{4EI}{s^3} & 0 \\ 0 & \frac{GJ}{s} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_b \\ q_t \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.9)$$

Aplicando o método de Lagrange às Equações 3.6 e 3.8, considerando os dois GDL representados pelas coordenadas generalizadas q_b e q_t , é obtido o sistema de equações na forma matricial, conforme demonstrado na Eq. 3.9.

As equações de movimento representadas pela Eq. 3.9 não incluem as forças aerodinâmicas. De acordo com Wright e Cooper (2015), a matriz de inercia é assumida com a seguinte forma:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{bb} & A_{bt} \\ A_{tb} & A_{tt} \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

Dessa forma, pode-se observar que, no caso em que não há acoplamento pela matriz de inércia, as frequências naturais de flexão e torção podem ser expressas por:

$$\omega_f = \sqrt{\frac{4EI}{A_{bb}s^3}} \quad \omega_t = \sqrt{\frac{GJ}{A_{tt}s}} \quad (3.11)$$

Para completar o modelo aeroelástico, é necessário considerar que as forças generalizadas Q_b e Q_t atuam no sistema na forma de forças aerodinâmicas não estacionárias. Para tal, elas podem ser escritas em termos de derivadas aerodinâmicas.

$$dL = \frac{1}{2} \rho V^2 c dy a_w \left(\frac{y^2 \dot{q}_b}{s^2 V} + \frac{y}{s} q_t \right) \quad (3.12)$$

$$dM = \frac{1}{2} \rho V^2 c^2 dy \left(e a_w \left(\frac{y^2 \dot{q}_b}{s^2 V} + \frac{y}{s} q_t \right) + M_{\delta} c \frac{y \dot{q}_t}{4sV} \right) \quad (3.13)$$

Assim, considerando a teoria das tiras, são obtidas as Eq. 3.12 e 3.13 (WRIGHT; COOPER, 2015).

O trabalho incremental realizado sobre a asa, correspondente à força e momento aerodinâmico que realiza trabalho através de deflexões incrementais δq_b e δq_t , é expresso por:

$$\delta W = \int_{asa} \left[dL \left(- \left(\frac{y}{s} \right)^2 \delta q_b \right) + dM \frac{y}{s} \delta q_t \right] \quad (3.14)$$

Por fim, considerando as forças generalizadas Q_b e Q_t , as quais devem ser inseridas na equação de Lagrange, representada pela Eq. 3.3, obtêm-se as equações do movimento aeroelástico.

$$\begin{aligned}
& m \begin{bmatrix} \frac{sc}{5} & \frac{s}{4} \left(\frac{c^2}{2} - cx_f \right) \\ \frac{s}{4} \left(\frac{c^2}{2} - cx_f \right) & \frac{s}{3} \left(\frac{c^3}{3} - c^2x_f + cx_f^2 \right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q}_b \\ \ddot{q}_t \end{Bmatrix} + \\
& \rho V \begin{bmatrix} \frac{cs}{10} a_W & 0 \\ -\frac{c^2s}{8} e a_W & -\frac{c^3s}{24} M_{\dot{\theta}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{q}_b \\ \dot{q}_t \end{Bmatrix} + \\
& \left(\rho V^2 \begin{bmatrix} 0 & \frac{cs}{8} a_W \\ 0 & -\frac{c^2s}{6} b_W \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{4EI}{s^3} & 0 \\ 0 & \frac{GJ}{s} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} q_b \\ q_t \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.15}$$

O conjunto de equações já é apresentado no formato matricial, sendo representado pela Eq. 3.15. De acordo com Wright (WRIGHT; COOPER, 2015), é apresentada uma forma geral de escrever as equações aeroelásticas. As matrizes apresentadas na Eq. 3.15 podem ser representadas de maneira explícita, como é feito a seguir.

$$A = m \begin{bmatrix} \frac{sc}{5} & \frac{s}{4} \left(\frac{c^2}{2} - cx_f \right) \\ \frac{s}{4} \left(\frac{c^2}{2} - cx_f \right) & \frac{s}{3} \left(\frac{c^3}{3} - c^2x_f + cx_f^2 \right) \end{bmatrix} \tag{3.16}$$

A matriz apresentada na Eq. 3.16 representa a matriz de inércia.

$$B = \begin{bmatrix} \frac{cs}{10} a_W & 0 \\ -\frac{c^2s}{8} e a_W & -\frac{c^3s}{24} M_{\dot{\theta}} \end{bmatrix} \tag{3.17}$$

Por sua vez, a matriz apresentada na Eq. 3.17 representa a matriz de amortecimento aerodinâmico.

$$C = \begin{bmatrix} 0 & \frac{cs}{8} a_W \\ 0 & -\frac{c^2s}{6} b_W \end{bmatrix} \tag{3.18}$$

A Eq. 3.18 representa a matriz de rigidez aerodinâmica.

$$E = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{s^3} & 0 \\ 0 & \frac{GJ}{s} \end{bmatrix} \tag{3.19}$$

Por fim, a matriz E apresentada na Eq. 3.19 representa a rigidez estrutural.

$$\mathbf{A} \ddot{\mathbf{q}} + (\rho V \mathbf{B} + \mathbf{D}) \dot{\mathbf{q}} + (\rho V^2 \mathbf{C} + \mathbf{E}) \mathbf{q} = \mathbf{0} \tag{3.20}$$

Dessa forma, a equação diferencial de segunda ordem para múltiplos GDL é representada pela Eq. 3.20.

Em resumo, as matrizes \mathbf{A} , \mathbf{D} e \mathbf{E} correspondem à inércia, amortecimento e rigidez, respectivamente. Por outro lado, a matriz \mathbf{B} representa o amortecimento aerodinâmico, enquanto a matriz \mathbf{C} representa a rigidez aerodinâmica (WRIGHT; COOPER, 2015). É importante destacar que a matriz de amortecimento \mathbf{D} não foi considerada nessa abordagem, uma vez que a modelagem matemática do amortecimento é complexa, como é apontado por Inman (2014).

3.2 Análise de *Flutter*

Nesta seção, são apresentadas duas principais abordagens para resolver as equações aeroelásticas mencionadas anteriormente. Primeiramente, é abordada a solução clássica por autovalores e autovetores.

Em seguida, são discutidos os métodos de análise de *flutter* derivados da solução por autovalores e autovetores. Esses métodos são conhecidos como métodos k e $p-k$.

No final da seção, é abordada a forma mais comum de representar a velocidade de *flutter* como uma função das frequências naturais e do fator de amortecimento aeroelástico. Essa análise também é conhecida como diagrama V-g-f.

3.2.1 Solução por Autovalores

É definida, inicialmente, a Eq. 3.21, que representa o início da solução por autovalor (WRIGHT; COOPER, 2015).

$$\mathbf{I}\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{I}\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \quad (3.21)$$

Em seguida, a equação matricial 3.20 é reformulada em espaço de estados, assumindo a forma representada pela Eq. 3.22. Em linhas gerais, a utilização da representação em espaço de estados é uma abordagem comum na teoria de controle e sistemas dinâmicos para descrever o comportamento de um sistema ao longo do tempo. Nesse contexto, um sistema é descrito por um conjunto de equações diferenciais de primeira ordem, conhecidas como equações de espaço de estados (OGATA, 2014).

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \ddot{\mathbf{q}} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -(\rho V^2 \mathbf{C} + \mathbf{E}) & -(\rho V \mathbf{B} + \mathbf{D}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (3.22)$$

Ao multiplicar ambos os lados da Eq. 3.22 pela matriz inversa apresentada na Eq. 3.23, é obtida a equação matricial representada pela Eq. 3.24.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

$$\begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \ddot{\mathbf{q}} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{A}^{-1}(\rho V^2 \mathbf{C} + \mathbf{E}) & -\mathbf{A}^{-1}(\rho V \mathbf{B} + \mathbf{D}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \quad (3.24)$$

Dado que a Eq. 3.24 está na forma de primeira ordem $\dot{\mathbf{x}} - \mathbf{Q}\mathbf{x} = \mathbf{0}$, a solução por autovalor assume a forma $(\mathbf{Q} - \mathbf{I}\lambda)\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

A matriz \mathbf{Q} representa a matriz dinâmica do sistema, conforme mostrado na Eq. 3.25. É importante ressaltar que a matriz \mathbf{Q} tem ordem duas vezes maior do que o sistema aeroelástico, o que afeta a dimensão do vetor de autovalores λ .

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{A}^{-1}(\rho V^2 \mathbf{C} + \mathbf{E}) & -\mathbf{A}^{-1}(\rho V \mathbf{B} + \mathbf{D}) \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

Para um sistema oscilatório, como o sistema aeroelástico abordado neste trabalho, os autovalores λ_j da matriz dinâmica \mathbf{Q} ocorrem em pares conjugados complexos (COLLAR, 1987), os quais assumem a forma apresentada na Eq. 3.26.

$$\lambda_j = -g_j \omega_j \pm i \omega_j \sqrt{1 - g_j^2} \quad j = 1, 2, \dots \quad (3.26)$$

Na Eq. 3.26 ω_j e g_j representam a frequência natural e o fator de amortecimento aeroelástico, respectivamente. A frequência natural aeroelástica pode ser obtida utilizando a Eq. 3.27.

$$|\lambda_j| = \sqrt{(-g_j \omega_j)^2 + (\omega_j \sqrt{1 - g_j^2})^2} \quad (3.27)$$

Após manipular a Eq. 3.27, a frequência natural aeroelástica é representada por $|\lambda_j| = \omega_j$.

Por consequência, é possível determinar o fator de amortecimento aeroelástico utilizando a Eq. 3.28.

$$g_j = -\frac{Re(\lambda_j)}{|\lambda_j|} \quad (3.28)$$

O fator de amortecimento pode fornecer informações sobre a estabilidade do sistema aeroelástico. De acordo WRIGHT e COOPER (2015), o sistema se torna instável quando o termo g_j se torna positivo, ou seja, a parte real do autovalor complexo se torna negativa.

3.2.2 Método k

No método k , assume-se o amortecimento estrutural histerético (WRIGHT; COOPER, 2015). O amortecimento histerético ocorre quando energia é dissipada em sistemas

mecânicos devido a deformações elásticas que não se revertam instantaneamente. Assim, devido à histerese material, ocorre a perda de energia ao longo do tempo (INMAN, 2014; MARTINS, 2014).

O amortecimento é escrito como uma relação da matriz de rigidez \mathbf{E} , sendo expresso na Eq. 3.33 (WRIGHT; COOPER, 2015).

$$\mathbf{D} = ig\mathbf{E} \quad (3.29)$$

A solução por autovalor é expressa de uma maneira diferente da apresentada anteriormente, assumindo a forma apresentada na Eq. 3.30.

$$(\mathbf{F} - \lambda_k \mathbf{E})\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (3.30)$$

A matriz \mathbf{F} estabelece uma relação entre as matrizes do sistema aeroelástico e a frequência reduzida k , conforme mostrado na Eq. 3.33.

$$\mathbf{F} = \left[\mathbf{A} - i\rho \left(\frac{c}{2k} \right) \mathbf{B} - \rho \left(\frac{c}{2k} \right)^2 \mathbf{C} \right] \quad (3.31)$$

Os autovalores da Eq. 3.30 assumem a forma representada na Eq. 3.32.

$$\lambda_k = \frac{1 + ig}{\omega^2} \quad (3.32)$$

A frequência natural aeroelástica, o fator de amortecimento g e a frequência reduzida para o método k são representados da seguinte forma:

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{Re(\lambda_k)}} \quad g = \frac{Im(\lambda_k)}{Re(\lambda_k)} \quad V = \frac{\omega c}{2k} \quad (3.33)$$

A solução utilizando a frequência reduzida é realizada para cada velocidade de interesse, seguindo as etapas a seguir:

1. Calcular as matrizes \mathbf{B} e \mathbf{C} correspondentes a frequência reduzida k de interesse;
2. Aplicar a solução por autovalor apresentada na Eq. 3.30;
3. Calcular as frequências e fatores de amortecimento utilizando as Eq. 3.33;
4. Montar o gráfico V-g-f para o intervalo de velocidades de interesse.

Através do diagrama V-g-f, é possível determinar a velocidade crítica de *flutter*, que é a velocidade na qual o fator de amortecimento é nulo (MARTINS, 2014).

3.2.3 Método p - k

O método p - k , em contraste com o método k , determina os limites de estabilidade do sistema para velocidades abaixo da velocidade de *flutter*. Além disso, relaciona essas velocidades a valores de fatores de amortecimento mais realistas, permitindo comparações com experimentos de *flutter* (MARTINS, 2014).

O método p - k é classificado como iterativo (MARTINS, 2014). Para cada modo de vibração de interesse, os seguintes passos devem ser seguidos:

1. Determine uma frequência inicial para o modo de vibração, para que a frequência reduzida seja calculada com base na combinação prévia de velocidade e frequência natural, usando a relação apresentada na Equação 3.33;
2. Monte as matrizes \mathbf{B} e \mathbf{C} com base na frequência reduzida;
3. Como parte do processo iterativo, escolha a frequência natural aeroelástica que melhor se aproxime da frequência inicial;
4. Acompanhe tanto a convergência dos valores das frequências quanto dos valores de fator de amortecimento.

Tais passos devem ser repetidos até que todos os modos de vibração de interesse sejam investigados. Embora o método p - k estime com precisão os valores de amortecimento para modos de vibração levemente amortecidos (WRIGHT; COOPER, 2015), sua desvantagem é a alta demanda computacional (MARTINS, 2014).

3.2.4 Gráficos V-g-f

Independentemente da análise utilizada para determinar a velocidade crítica de *flutter*, os gráficos V-g-f são uma ferramenta fundamental. Após a resolução do problema de *flutter*, é comum gerar os gráficos V-g-f, que mostram a relação entre o amortecimento g e a frequência f para cada valor de velocidade V dentro do intervalo de velocidades de interesse.

Na Fig. 6, é possível observar um gráfico V-g-f para um modelo aeroelástico binário. De acordo com [Wright e Cooper \(2015\)](#), a velocidade na qual o sistema se torna instável, conhecida como velocidade de *flutter*, está associada ao ponto em que o fator de amortecimento se torna nulo.

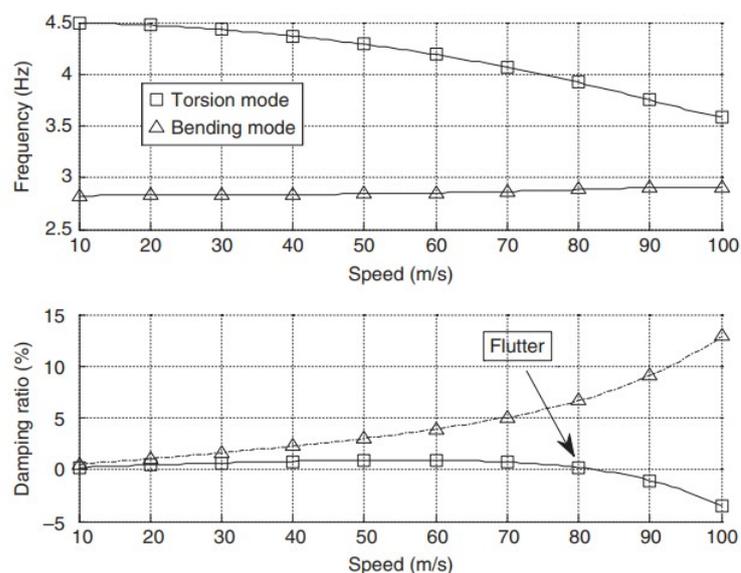


Figura 6 – Gráfico V-g-f para um sistema aeroelástico binário ([WRIGHT; COOPER, 2015](#)).

4 Equacionamento Geral do Problema de Otimização

Neste capítulo, com base na teoria de vibrações mecânicas apresentada e no equacionamento desenvolvido para o fenômeno aeroelástico de *flutter*, será exposto o equacionamento analítico para a otimização. Por fim, o modelo matemático de otimização será implementado no *software* MATLAB[®]. Logo após isso, será detalhada toda a teoria relacionada à implementação, incluindo a aplicação das restrições de projeto.

4.1 Definição da função objetivo

A formulação analítica do problema de otimização transformará não apenas a Eq. 3.15, mas também a solução do problema aeroelástico de *flutter* em uma função das variáveis de projeto.

$$\mathbf{A}(\alpha)\ddot{\mathbf{q}} + (\rho V\mathbf{B}(\alpha) + \mathbf{D}(\alpha))\dot{\mathbf{q}} + (\rho V^2\mathbf{C}(\alpha) + \mathbf{E}(\alpha))\mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (4.1)$$

Considerando um sistema com dois graus de liberdade (GDL), a formulação do problema é expressa pela Eq. 4.1. Nesse contexto, as variáveis de projeto são agrupadas em um vetor, simbolizado pelo termo grego α . Posto isso, $\alpha = [c, s, AR, E, G, \rho]$, sendo as variáveis de projeto a corda c , a envergadura s , a razão de aspecto AR , os módulos de elasticidade E e cisalhamento G , além da densidade ρ do aparato aeroelástico.

Assumindo que a análise de *flutter* será feita utilizando a solução por autovalor, a matriz dinâmica \mathbf{Q} do sistema passa a ser uma função das variáveis de projeto, como é mostrado na Eq. 4.2. O raciocínio é aplicável de forma semelhante à análise de *flutter* quando se utiliza os métodos k e $p-k$, pois ambos empregam a solução por autovalores no desenvolvimento matemático. No entanto, eles se distinguem pela consideração das matrizes aeroelásticas e pela manipulação matemática envolvida.

$$\mathbf{Q}(\alpha) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{A}^{-1}(\alpha)(\rho V^2\mathbf{C}(\alpha) + \mathbf{E}(\alpha)) & -\mathbf{A}^{-1}(\alpha)(\rho V\mathbf{B}(\alpha) + \mathbf{D}(\alpha)) \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

Assim como mencionado anteriormente, os autovalores da matriz \mathbf{Q} serão expressos como funções de s e c , de forma análoga ao que é representado na Eq. 4.3.

$$\lambda_j(\alpha) = -g_j(\alpha)\omega_j(\alpha) \pm i\omega_j(\alpha)\sqrt{1 - g_j^2(\alpha)} \quad (4.3)$$

De acordo com o conteúdo discutido na subseção 3.2.1 deste trabalho, o vetor de autovalores assume a forma apresentada na Eq. 4.4.

$$\lambda = \begin{bmatrix} -g_1\omega_1 - i\omega_1\sqrt{1-g_1^2} \\ -g_1\omega_1 + i\omega_1\sqrt{1-g_1^2} \\ -g_2\omega_2 - i\omega_2\sqrt{1-g_2^2} \\ -g_2\omega_2 + i\omega_2\sqrt{1-g_2^2} \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

Dado que os autovalores ocorrem em pares complexos conjugados, os módulos dos dois primeiros autovalores são idênticos, assim como os módulos dos dois últimos. A representação matemática desse conceito é expresso na Eq. 4.5.

$$|\lambda_{1,1}| = |\lambda_{2,1}| \quad |\lambda_{3,1}| = |\lambda_{4,1}| \quad (4.5)$$

Com relação ao fenômeno de *flutter*, a condição mais comum para que ele ocorra é o acoplamento desfavorável dos modos de vibração devido à excitação causada pelo fluxo de ar ao redor do corpo (WRIGHT; COOPER, 2015; BISPLINGHOFF; ASHLEY; HALFMAN, 2013). Além disso, sabe-se que os módulos dos autovalores da matriz dinâmica \mathbf{Q} representam as frequências naturais aeroelásticas (WRIGHT; COOPER, 2015). Com base nessa premissa principal, a função objetivo a ser modelada neste trabalho será formulada.

Na formulação da função objetivo, pressupõe-se a acoplagem das vibrações dos modos de flexão e torção de uma asa retangular, engastada na raiz, quando suas frequências naturais aeroelásticas estão próximas ou iguais. Assim, denotando a frequência natural aeroelástica do modo de flexão como $|\lambda_1|$ e a do modo de torção como $|\lambda_3|$, busca-se minimizar a diferença absoluta entre essas duas frequências, conforme expresso na Eq.4.6.

$$f_{objetivo}(\alpha) = |\omega_1(\alpha) - \omega_3(\alpha)| \quad (4.6)$$

Os valores ótimos da envergadura s e da corda c da asa estão associados ao valor mínimo da Eq. 4.6. A determinação do valor ótimo da função levará em consideração as restrições impostas pelo modelo de otimização abordado neste trabalho, domínio da função objetivo e a razão de aspecto da asa. A próxima seção deste capítulo abordará a modelagem matemática das restrições de otimização.

4.2 Definição das funções de restrição

No problema de otimização proposto neste trabalho, são estabelecidas restrições ao domínio da função objetivo. As variáveis de projeto incluem a corda c , a envergadura s , a razão de aspecto AR , os módulos de elasticidade E e cisalhamento G , além da densidade ρ . É crucial destacar que as variáveis de projeto não podem assumir valores negativos, pois representam dimensões e propriedades do material do aparato aeroelástico. Além disso, as variáveis de projeto relacionadas a dimensões devem obedecer às dimensões máximas permitidas pela seção de teste do túnel de vento. Portanto, os valores possíveis para as variáveis de projeto são determinados de acordo com os critérios estabelecidos para o estudo.

Na prática, as dimensões máximas são estabelecidas com base em valores seguros para garantir que, quando a estrutura vibrar devido ao fluxo de ar, ela não colidirá com as paredes do túnel de vento, mesmo atingindo amplitudes máximas ao vibrar. Outra restrição do problema de otimização está relacionada ao intervalo de valores que as propriedades do material, como o módulo de elasticidade E e cisalhamento G , além da densidade ρ , do aparato aeroelástico podem assumir.

Além disso, sabe-se que a razão de aspecto AR de uma asa é definida como a razão entre o quadrado da envergadura s^2 pela área da asa S .

$$AR = \frac{s^2}{S} \quad (4.7)$$

Posto isso, a Eq. 4.7 é obtida. Ainda mais, para uma asa retangular, a área S é dada pelo produto da semi-envergadura s pela corda c .

$$AR = \frac{s^2}{S} = \frac{s^2}{s \cdot c} = \frac{s}{c} \quad (4.8)$$

Portanto, a razão de aspecto passa a ser representada pela Eq. 4.8. Outra relação importante entre as variáveis de projeto é a relação entre o módulo de elasticidade E e o módulo de cisalhamento G . Considerando que o material do aparato aeroelástico é isotrópico, é possível estabelecer a seguinte relação entre essas grandezas.

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (4.9)$$

Na Eq. 4.9, o símbolo grego ν denota o coeficiente de Poisson. Esse coeficiente expressa a relação entre a variação dimensional de um material submetido a uma carga mecânica uniaxial, como tração ou compressão em um eixo específico, e a contração ao longo do eixo oposto (DANIEL; ISHAI, 2006).

Dessa forma, a função objetivo, que inicialmente possuía 6 variáveis de projeto $\alpha = [c, s, AR, E, G, \rho]$, agora é reduzida para apenas 4 $\alpha = [c, AR, E, \rho]$. Os intervalos de valores de interesse para essas variáveis de projeto são apresentados ao longo do Capítulo 5, Resultados.

4.3 Algoritmo de Otimização

Neste capítulo, será apresentada a implementação do modelo de otimização no software MATLAB®. A solução do fenômeno de *flutter* será feito utilizando o método *k*. Será detalhado também o uso da função **fmincon** do software para determinar os valores mínimos da função objetivo. A função utiliza o método do gradiente, que é um método de otimização determinístico.

O algoritmo de otimização é dividido em três módulos que representam as propriedades mecânicas e geométricas da asa retangular fixada na raiz, as equações aeroelásticas do fenômeno de *flutter* e o processamento dos resultados. A Fig. 7 representa não só a divisão do algoritmo, mas também as ações realizadas em cada módulo.

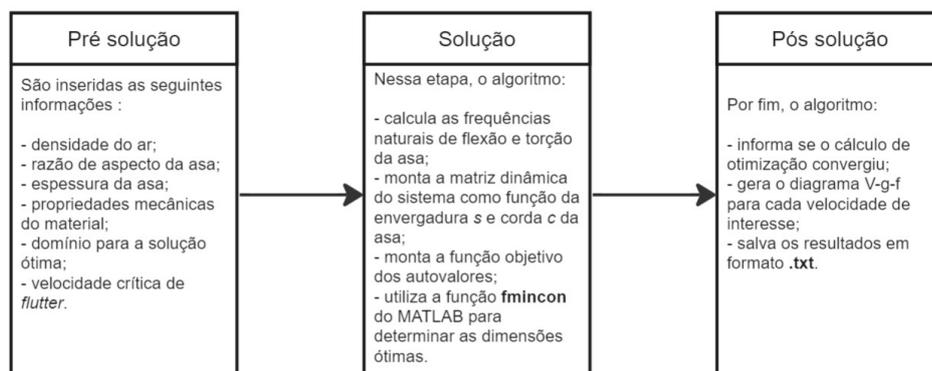


Figura 7 – Diagrama representativo do funcionamento do algoritmo de otimização.

4.3.1 Pré solução

Na etapa de pré solução, devem ser definidas as seguintes propriedades.

- densidade do ar;
- razão de aspecto da asa;
- propriedades mecânicas do material;
- limite de valores para as variáveis de projeto em análise;
- velocidade crítica de *flutter* desejada.

Assim, é possível construir as equações aeroelásticas, a função objetivo e as restrições.

4.3.2 Solução

Nesta etapa, o algoritmo monta as equações aeroelásticas com base nos valores definidos inicialmente no módulo de pré-solução. A função objetivo é construída, juntamente com as restrições impostas ao problema de otimização. Assim, a função objetivo é minimizada utilizando a função **fmincon** do software MATLAB®.

A função **fmincon** é um recurso de otimização utilizado para minimizar uma função sujeita a restrições. Utiliza o método determinístico de otimização, o método do gradiente, para resolver problemas nos quais as funções objetivo e de restrição são contínuas e têm derivadas de primeira ordem contínuas. Essa função é empregada na resolução de problemas de otimização nos quais a função objetivo não é linear. Através do **fmincon**, é possível determinar os valores mínimos da função objetivo dentro das restrições especificadas (MESSAC, 2015).

Dentro do software MATLAB®, a função **fmincon** é definida da seguinte maneira:

$$\mathbf{v_otim} = \text{fmincon}(\text{fun_obj}, \mathbf{x}_0, \mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{Aeq}, \mathbf{beq}, \mathbf{fi}, \mathbf{fs})$$

Em que:

- **v_otim**: vetor com os valores ótimos das variáveis de projeto;
- **fun_obj**: função objetivo;
- **x₀**: vetor com os pontos no qual a função deve começar a busca pela solução;
- **A**: matriz com os coeficientes das restrições de desigualdade;
- **b**: vetor com os valores a direita da desigualdade;
- **Aeq**: matriz com os coeficientes das restrições de igualdade;
- **beq**: vetor com os valores a direita da igualdade;
- **fi**: vetor com os valores que delimitam a fronteira inferior do domínio escolhido para a função objetivo;
- **fs**: vetor com os valores que delimitam a fronteira superior do domínio escolhido para a função objetivo.

4.3.3 Pós solução

Nesta etapa, os resultados dos valores ótimos para os parâmetros de espessura e razão de aspecto são salvos em formato de texto (.txt). Esse processo pode ser repetido para diferentes configurações de entrada do algoritmo, e todos os resultados são armazenados.

Isso permite fácil acesso ao conjunto de resultados para a velocidade crítica de *flutter* de interesse. A partir desses resultados, é possível criar as tabelas e gráficos que serão apresentados no próximo capítulo deste trabalho.

5 Resultados

Neste capítulo, apresentam-se os resultados obtidos por meio da aplicação do algoritmo de otimização. Os resultados referem-se a uma asa retangular fixada na raiz com espessura de 0,7 mm. A escolha desse valor foi fundamentada em experimentos preliminares, nos quais a ocorrência do fenômeno de *flutter* foi observada para valores de espessura próximos a esse. Os experimentos foram conduzidos em túnel de vento, o qual é apresentado a seguir.

Adicionalmente, neste capítulo, serão exploradas análises que consideram as propriedades do material da placa como variáveis de projeto. Desta forma, serão obtidos valores ótimos para o módulo de elasticidade e densidade do material, considerando uma velocidade crítica específica.

O intervalo de velocidades de interesse foi definido entre 5 m/s e 12 m/s, levando em consideração a hipótese de que o modelo aerodinâmico utilizado neste trabalho é conservador. Isso significa que as velocidades experimentais podem ser maiores do que as velocidades selecionadas. Com essa escolha, espera-se que as velocidades experimentais permaneçam dentro da velocidade máxima de 20 m/s do túnel de vento da Universidade de Brasília.

5.1 Comparação do método k e do método $p-k$

Neste estudo, uma das variáveis de entrada no problema de otimização aeroelástica é a velocidade crítica de *flutter* desejada. Para cada velocidade crítica desejada, busca-se obter um conjunto de valores ótimos. A natureza desse conjunto de valores ótimos depende do tipo de análise que está sendo realizada, seja otimização das dimensões ou do material do aparato aeroelástico.

No que diz respeito à velocidade crítica desejada, é crucial observar que ela não necessariamente corresponderá à velocidade crítica de *flutter* quando o aparato aeroelástico for submetido aos experimentos em túnel de vento. A velocidade crítica de *flutter* pode ser determinada teoricamente por meio da análise utilizando métodos de solução de *flutter*. Vale ressaltar que a fidelidade dos resultados teóricos em relação aos experimentais é influenciada pelos modelos estruturais e aerodinâmicos utilizados no equacionamento aeroelástico. Dessa forma, para determinar a velocidade crítica de *flutter* para cada conjunto de valores ótimos apresentados neste capítulo, foram empregados dois métodos de solução de *flutter*: k e $p-k$.

É comum apresentar os resultados obtidos pelos métodos k e $p-k$ graficamente, co-

nhecido também na literatura como diagrama $V-g-f$. Este diagrama relaciona as frequências naturais f e os fatores de amortecimento g aeroelásticos com diferentes velocidades V . Assume-se como velocidade crítica de flutter aquela correspondente ao ponto em que o fator de amortecimento aeroelástico se torna nulo (WRIGHT; COOPER, 2015). Ressalta-se aqui que a literatura indica o método $p-k$ como a abordagem preferencial para fazer comparações com os resultados experimentais.

A seguir, na Fig. 8, é apresentado o diagrama $V-g-f$ para uma configuração de dimensões ótimas obtidas utilizando o algoritmo de otimização aeroelástico. É possível observar que as curvas assumem comportamentos semelhantes, no que se refere a frequência aeroelástica. Faz-se interessante notar que ambas as curvas dos fatores de amortecimento aeroelástico, tanto pelo método k pelo $p-k$, passam pelo zero no eixo horizontal para a mesma velocidade, a qual é chamada de velocidade de *flutter*.

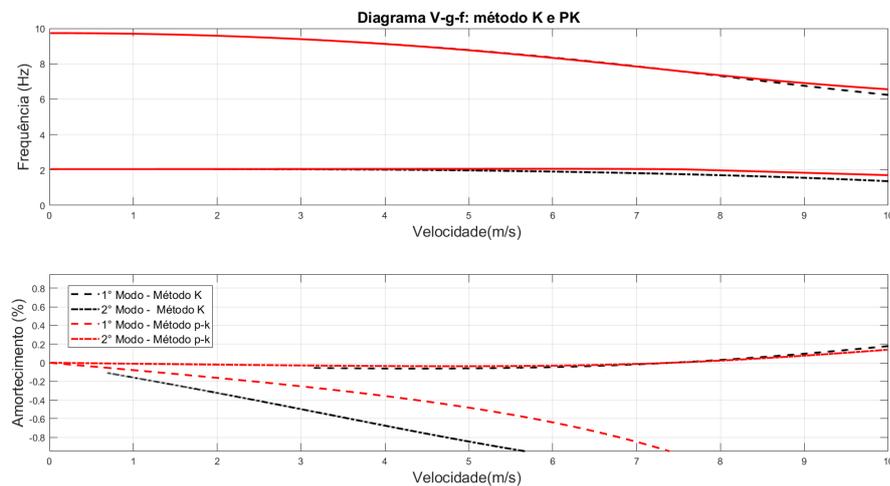


Figura 8 – Diagrama $V-g-f$ e comparação entre os métodos k e $p-k$.

Para o gráfico apresentado na Fig. 8, o aparato aeroelástico possui a velocidade crítica de *flutter* próxima de $7 \frac{m}{s}$. As curvas obtidas utilizando o método $p-k$ serão utilizadas para determinar as velocidades críticas de *flutter* apresentadas nas seções a seguir.

5.2 Resultados do modelo analítico de otimização

Nesta seção, serão apresentados os resultados ótimos obtidos por meio do modelo matemático de otimização aeroelástica. São explorados conjuntos de valores ótimos considerando a corda da asa, razão de aspecto, módulo de elasticidade e densidade como variáveis de projeto. Os resultados são determinados para quatro casos distintos de otimização. A Tab. 3 apresenta de maneira geral quais variáveis de projeto foram otimizadas, juntamente com as restrições impostas no modelo matemático.

Tabela 3 – Casos de otimização abordados.

Casos	Variáveis otimizadas	Restrições
Caso 1	c	$0,2 \leq c \leq 0,25$
Caso 2	c e E	$0,2 \leq c \leq 0,25$ $70 \cdot 10^9 \leq E \leq 71,5 \cdot 10^9$
Caso 3	c , E e AR	$0,2 \leq c \leq 0,25$ $70 \cdot 10^9 \leq E \leq 71,5 \cdot 10^9$ $2,3 \leq AR \leq 2,6$
Caso 4	c , E , AR e ρ	$0,2 \leq c \leq 0,25$ $70 \cdot 10^9 \leq E \leq 71,5 \cdot 10^9$ $2,3 \leq AR \leq 2,6$ $2600 \leq \rho \leq 2900$

As restrições de domínio da função objetivo, conforme apresentadas anteriormente na seção 4.2 - Definição das funções de restrição e detalhadas na Tab.3, estão relacionadas às dimensões da seção de teste do túnel de vento. Essas dimensões foram inspiradas nas medidas da seção de teste do túnel de vento da Universidade de Brasília (UnB), conforme ilustrado na Fig. 9.



Figura 9 – Túnel de vento do Laboratório de Energia e Ambiente da Universidade de Brasília (MENDES, 2020).

A estrutura, ao vibrar devido ao fluxo de ar, não deve colidir com as paredes do túnel de vento, mesmo ao atingir amplitudes máximas. A seção de testes do túnel de vento da UnB possui dimensões de $1,2m \times 1,2m \times 2m$ (MENDES, 2020). Com base nessas dimensões, são estabelecidas as dimensões máximas para a corda c e a razão de aspecto AR da asa. Além disso, nos casos em que são determinadas propriedades ótimas do material, são definidos intervalos de interesse para esses valores.

5.2.1 Otimização do modelo de placa considerando a variável c

Para o primeiro caso de otimização, são obtidos valores ótimos para a corda c e a semi-envergadura s da asa. Os parâmetros de entrada no algoritmo matemático de otimização aeroelástico incluem as propriedades do escoamento, do material, a razão de aspecto AR , e a espessura t . Sabe-se que a razão de aspecto AR é a razão entre o semi-span s e a corda c , logo o primeiro conjunto de variáveis de projeto possui apenas a corda c da asa.

Com relação as restrições matemáticas da função objetivo, foi considerado os valores mínimo e máximo da corda c da asa, os quais podem ver vistos na Tab. 4.

Tabela 4 – Valores mínimo e máximo para c , bem como o valor da AR inserido no algoritmo de otimização.

Dimensões		
$c_{mín}$ [m]	$c_{máx}$ [m]	AR []
0,2	0,25	2,5

É considerado que a asa retangular é feita de alumínio, as propriedades mecânicas do material e densidade são mostrado na Tab. 5. Na tabela, as seguintes notações são utilizadas: E para o módulo de elasticidade do material, G para o módulo de cisalhamento e ρ para a densidade.

Tabela 5 – Propriedades do alumínio inseridas no algoritmo de otimização.

Propriedades do material		
E [GPa]	G [GPa]	ρ $\left[\frac{kg}{m^3}\right]$
71	26,69	2770

Assim, para os parâmetros de entrada, levando em consideração as restrições matemáticas, são obtidos os valores ótimos para a corda c em diferentes velocidades críticas de interesse, como pode ser visto na Fig. 10.

Com base no gráfico, é possível observar que os valores de c tendem a diminuir à medida que a velocidade crítica desejada aumenta. Lembrando que o fenômeno de *flutter* é caracterizado como uma interação entre as forças aerodinâmicas, elásticas e inerciais (BISPLINGHOFF; ASHLEY; HALFMAN, 2013), tem-se que, à medida que aumenta a velocidade crítica, consequentemente o carregamento aerodinâmico também aumenta, resultando em um aparato aeroelástico com menor inércia, uma vez que suas dimensões diminuem. Assim, evidencia-se que quanto maior for o carregamento aerodinâmico, menores serão as dimensões necessárias do aparato aeroelástico para que este entre em *flutter*.

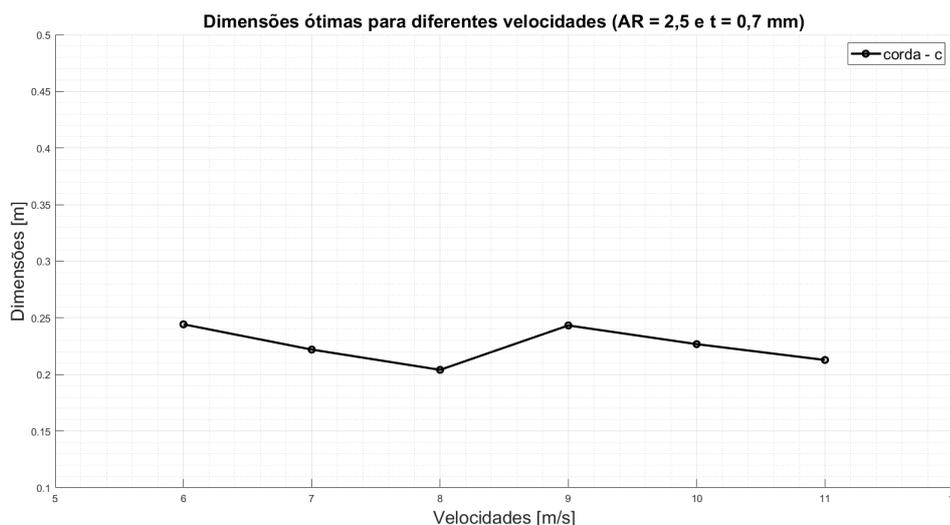


Figura 10 – Relação entre as velocidades críticas desejadas e as dimensões ótimas para a espessura de 0,7 mm e razão de aspecto igual a 2,5.

5.2.2 Otimização do modelo de placa considerando as variáveis c e E

Para o segundo caso de otimização, são obtidos valores ótimos para a corda c e módulo de elasticidade E da asa. Sabe-se que é possível relacionar o módulo de elasticidade de materiais isotrópicos e elásticos lineares com o seu módulo de cisalhamento utilizando o coeficiente de Poisson (TIMOSHENKO, 1951).

Assim, torna-se necessária a escolha de um coeficiente de Poisson de interesse como entrada do algoritmo de otimização. O coeficiente de Poisson fornece informações sobre a resposta do material à deformação sob carga uniaxial. Ele é particularmente relevante em materiais elásticos, onde descreve a relação entre a deformação axial e a deformação lateral (DANIEL; ISHAI, 2006).

Posto isso, as dimensões que foram utilizadas como restrições na função objetivo podem ser vistas na Tab. 4, a qual foi apresentada anteriormente.

Na Tab. 6, são apresentados os valores que restringem o módulo de elasticidade. A escolha desses valores foi determinada por meio de uma investigação prévia utilizando o algoritmo matemático de otimização. Para valores fora deste intervalo, eram obtidas poucas correspondências de valores ótimos para as velocidades críticas desejadas, dado o intervalo de velocidades de interesse.

Tabela 6 – Valores mínimo e máximo para E , bem como o valor da densidade e coeficiente de Poisson, os quais foram inseridos no algoritmo de otimização.

Propriedades do material			
$E_{mín}$ [GPa]	$E_{máx}$ [GPa]	ρ $\left[\frac{kg}{m^3}\right]$	ν []
70	71,5	2700	0,33

Dessa maneira, para os parâmetros de entrada, considerando as restrições matemáticas, são obtidos os valores ótimos para a corda c para diferentes valores de velocidades críticas de interesse, os quais podem ser vistos na Fig. 11.

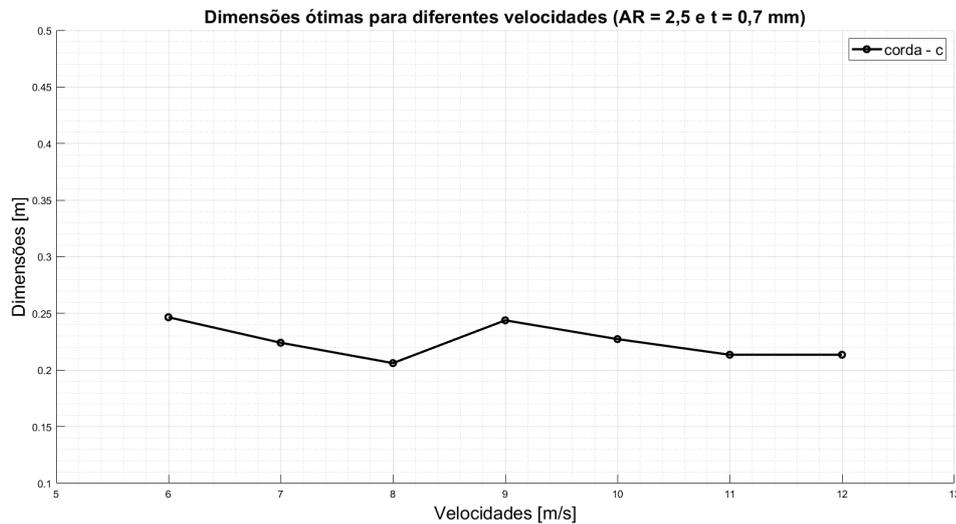


Figura 11 – Relação entre as velocidades críticas desejadas e as dimensões ótimas para a espessura de 0,7 mm e razão de aspecto igual a 2,5.

O comportamento dos valores de c assume um padrão semelhante ao que foi observado na Fig. 10, apresentada na subseção anterior. As dimensões tendem a diminuir à medida que a velocidade aumenta.

Por sua vez, a Fig. 12 apresenta o comportamento do módulo de elasticidade para os diferentes valores de velocidades críticas de interesse. Devido ao intervalo curto de valores que o módulo de elasticidade podia assumir, observou-se um comportamento quase constante das propriedades mecânicas.

É interessante notar que os resultados obtidos são próximos a valores do módulo de elasticidade de diferentes ligas de alumínio. A título de comparação, há resultados próximos à liga 7075 (71 GPa), assim como à liga 6061 (69 GPa) (ASM, 1990).

5.2.3 Otimização do modelo de placa considerando as variáveis c , AR e E

Considerando o terceiro caso de otimização, são obtidos valores ótimos para a corda c , razão de aspecto AR e módulo de elasticidade E . Nesta análise, a razão de aspecto AR , que é a relação entre o semi-span s e a corda c da asa, é considerada como uma variável de projeto.

Com relação à restrição imposta às dimensões, os valores estão apresentados na Tab. 7. Observa-se que, como a razão de aspecto agora é uma variável de projeto AR , ela recebe um intervalo de interesse.

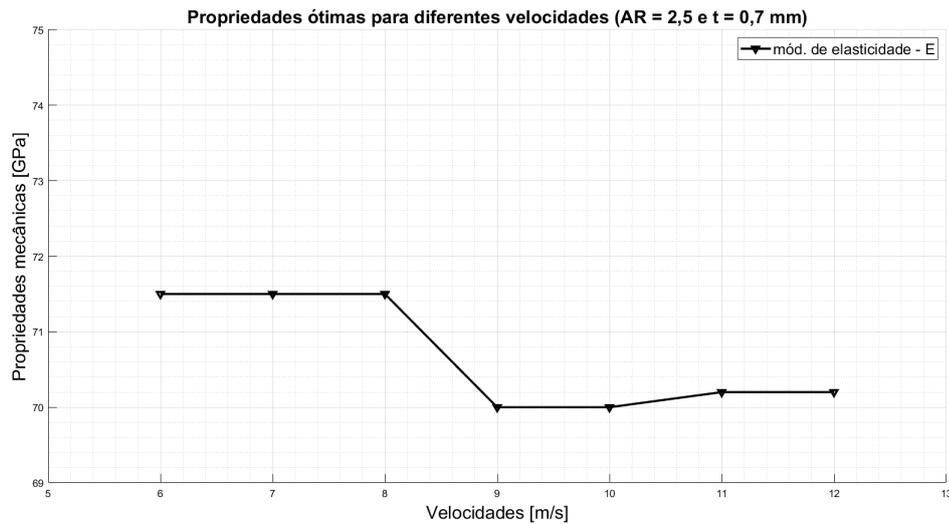


Figura 12 – Relação entre as velocidades críticas desejadas e as propriedades mecânicas ótimas para a espessura de 0,7 mm e razão de aspecto igual a 2,5.

Tabela 7 – Valores mínimo e máximo para c , bem como o valor da AR , inserido no algoritmo de otimização.

Dimensões			
$c_{mín}$ [m]	$c_{máx}$ [m]	$AR_{mín}$ []	$AR_{máx}$ []
0,2	0,25	2,3	2,6

A Tab. 8, por sua vez, apresenta os valores que restringem o módulo de elasticidade, de maneira igual ao que foi previamente apresentado na subseção anterior.

Tabela 8 – Valores mínimo e máximo para E , bem como o valor da densidade e coeficiente de Poisson, os quais foram inseridos no algoritmo de otimização.

Propriedades do material			
$E_{mín}$ [GPa]	$E_{máx}$ [GPa]	ρ $\left[\frac{kg}{m^3}\right]$	ν []
70	71,5	2700	0,33

A Fig. 13 exibe como a dimensão c , assim como a razão de aspecto AR , se comportam para diferentes valores de velocidades. É possível notar que a curva que representa a razão de aspecto AR possui um comportamento decrescente, semelhante ao comportamento das dimensões. É interessante observar que a variação dos valores da corda c tem ordem de grandeza de décimos para valores de velocidade acima de 10 m/s . Ressalta-se também que, para as restrições matemáticas impostas, não foi determinado um conjunto de valores ótimos para a velocidade de 6 m/s .

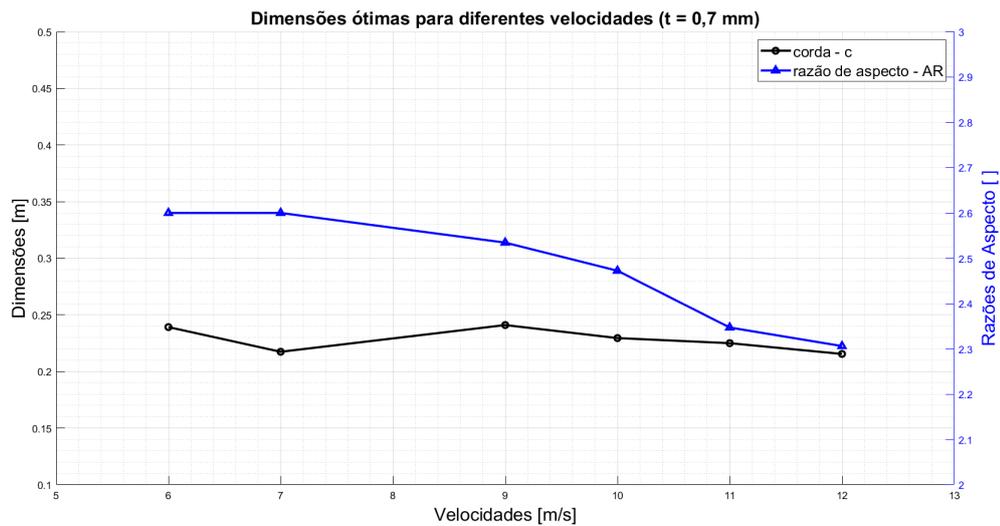


Figura 13 – Relação entre as velocidades críticas desejadas e as dimensões ótimas para a espessura de 0,7 mm.

A Fig. 14 apresenta o comportamento do módulo de elasticidade para os diferentes valores de velocidades críticas de interesse.

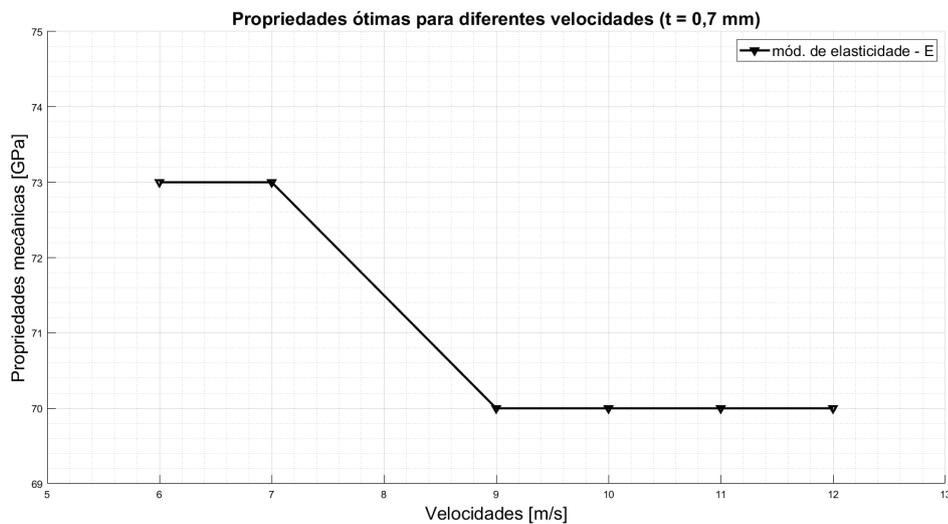


Figura 14 – Relação entre as velocidades críticas desejadas e as propriedades mecânicas ótimas para a espessura de 0,7 mm.

Foi observado que os valores do módulo de elasticidade, a partir de 9 m/s, se mostraram constantes. Em verdade, esses valores se diferem nas casas decimais, porém, dada a ordem de grandeza dessas propriedades, a diferença não exerce influência na sua representação gráfica.

5.2.4 Otimização do modelo de placa considerando as variáveis c , AR , E e ρ

Para o quarto caso de otimização, são obtidos valores ótimos para a corda c , razão de aspecto AR e módulo de elasticidade E da asa. Nesta análise, a razão de aspecto AR , que é a relação entre o semi-span s e a corda c da asa, é considerada como uma variável de projeto. Além disso, a densidade do material também é considerada como variável de projeto. De maneira literal, esta parte do trabalho considera 4 variáveis de projeto de maneira direta, uma vez que as variáveis s , semi-span, e G , módulo de cisalhamento, são relações diretas de outras variáveis de projeto.

Semelhante ao que foi apresentado na subseção anterior, a corda c e razão de aspecto AR recebem restrições relacionadas aos seus valores, como é apresentado na Tab. 9.

Tabela 9 – Valores mínimo e máximo para c , bem como o valor da AR , inserido no algoritmo de otimização.

Dimensões			
$c_{mín}$ [m]	$c_{máx}$ [m]	$AR_{mín}$ []	$AR_{máx}$ []
0,2	0,25	2,3	2,6

De igual maneira, são apresentados os valores que restringem o módulo de elasticidade E . Além disso, na análise atual, a densidade ρ recebe restrições relacionadas aos valores máximo e mínimo que ela pode assumir. Tais valores podem ser vistos na Tab. 10.

Tabela 10 – Valores mínimo e máximo para E , bem como os valores mínimo e máximo para a densidade ρ , além do coeficiente de Poisson, os quais foram inseridos no algoritmo de otimização.

Propriedades do material				
$E_{mín}$ [GPa]	$E_{máx}$ [GPa]	$\rho_{mín}$ $\left[\frac{kg}{m^3}\right]$	$\rho_{máx}$ $\left[\frac{kg}{m^3}\right]$	ν []
70	71,5	2600	2900	0,33

A Fig. 15 mostra o comportamento da dimensão c para diferentes valores de velocidades. É possível notar que a curva que representa a razão de aspecto AR possui um comportamento decrescente, semelhante ao comportamento das dimensões. Observa-se, também, que não há um conjunto de valores ótimos correspondente à velocidade de 10 m/s .

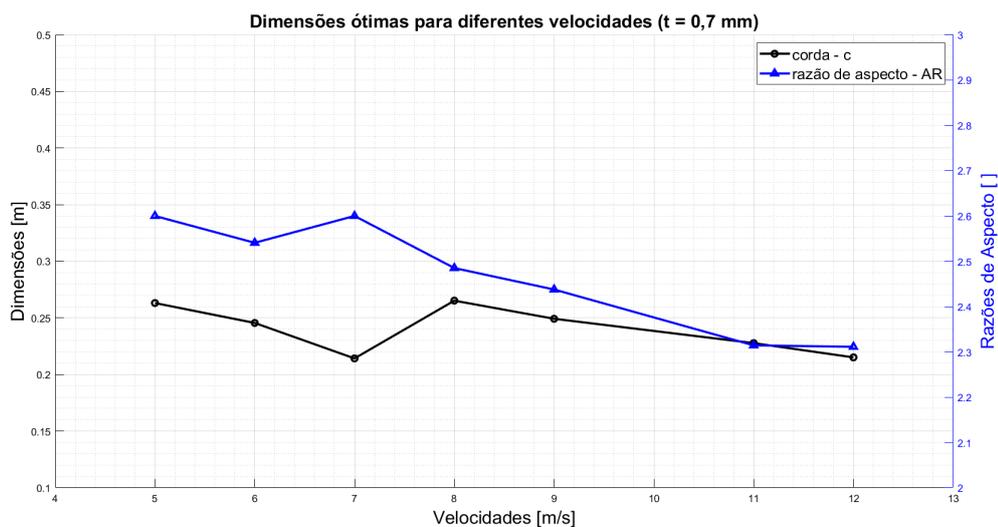


Figura 15 – Relação entre as velocidades críticas desejadas e as dimensões ótimas para a espessura de 0,7 mm.

Os resultados ótimos para o módulo de elasticidade E , assim como da densidade ρ , são exibidos na Fig. 16. Constata-se, com base no gráfico, que a propriedade mecânica E permanece constante. Na prática, os valores ótimos para essas grandezas diferem nas casas decimais, o que não exerce influência na representação gráfica, dada a ordem de grandeza de E .

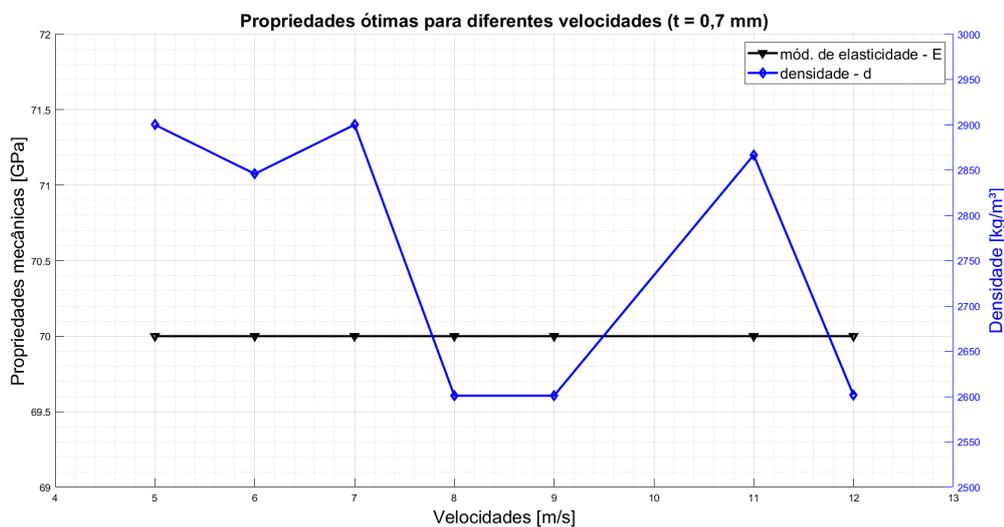


Figura 16 – Relação entre as velocidades críticas desejadas e as propriedades mecânicas ótimas para a espessura de 0,7 mm.

A curva que representa a densidade para diferentes valores de velocidade assume um comportamento diferente das demais curvas apresentadas neste trabalho. Entende-se que alterar a densidade do material implica diretamente nas forças inerciais, uma vez que a massa está sendo alterada indiretamente. Assim, permitir que a densidade assumira diferentes valores, dado um intervalo de interesse, faz com que a inércia do aparato

aeroelástico assume uma configuração de dimensão, rigidez e massa propícia para que ocorra o fenômeno aeroelástico de *flutter*.

5.2.4.1 Dimensões ótimas para diferentes valores do módulo de elasticidade e densidade

Com o objetivo de propor um conjunto adicional de materiais para a construção do aparato aeroelástico, nesta parte do trabalho é investigada a influência da variação do módulo de elasticidade e da densidade do material que compõe a placa.

Steinbrecher e Leubner-Metzger (2016) apresenta um gráfico, representado pela Fig. 17, que classifica os materiais em conjuntos distintos, estabelecendo uma relação entre a densidade e o módulo de elasticidade. Com base no intervalo de valores tanto para o módulo de elasticidade quanto para a densidade, o algoritmo de otimização matemática foi empregado para determinar as dimensões ótimas da envergadura s e da corda c da asa.

Ao variar os valores do módulo de elasticidade e densidade, o algoritmo de otimização convergiu apenas para valores de módulo de elasticidade com ordens de grandeza próximas a 100 GPa. Assim, foi possível definir uma região que contém os valores ótimos para diferentes densidades. A região retangular em vermelho, apresentada na Fig. 17, representa a região na qual existem soluções ótimas, dadas as restrições dimensionais apresentadas no início desse capítulo.

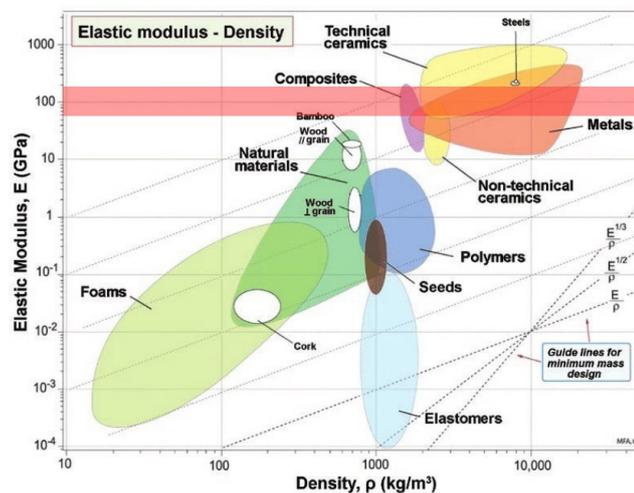


Figura 17 – Relação entre o módulo de elasticidade E e a densidade ρ para diferentes tipos de materiais. A região retangular em vermelho representa a região que contém soluções ótimas. Adaptado de (STEINBRECHER; LEUBNER-METZGER, 2016).

A partir da região destacada, observa-se que o uso de materiais compósitos, cerâmicas técnicas (cerâmicas de alta tecnologia) ou alguns metais possibilitam soluções ótimas. Isso implica que ao usar esses materiais para construir o aparato aeroelástico, seria pos-

sível evidenciar o fenômeno de *flutter* para valores de velocidades dentro do intervalo de interesse deste trabalho, ou seja, entre 5 a 12 m/s .

Dada a região delimitada, é interessante ressaltar a madeira balsa, como é conhecida popularmente. Trata-se de um compósito de fibras de madeira balsa que, dependendo da orientação das fibras, pode fornecer um módulo de elasticidade que permite a confecção de aparatos aeroelásticos capazes de evidenciar o fenômeno de *flutter* dentro do intervalo de velocidade de interesse. A teoria a respeito de materiais compósitos é melhor abordada em *Engineering Mechanics of Composite Materials*, escrito por Daniel e Ishai (2006).

5.2.4.2 Estudo sobre a utilização de madeira balsa como material para o aparato aeroelástico

Semelhante ao que foi abordado na subseção do caso 1 de otimização, o aparato aeroelástico foi considerado utilizando a madeira balsa como material. Dessa forma, uma análise foi conduzida para abranger todo o intervalo de velocidades críticas de interesse, a fim de determinar o valor ótimo para a dimensão da corda c de modo que seja evidenciado o fenômeno de *flutter*.

Considerou-se, nesse contexto, que a madeira possui densidade $\rho = 160 \text{ kg/m}^3$, módulo de elasticidade $E = 1,52 \text{ GPa}$ e coeficiente de Poisson $\nu = 0,35$ (BODIG; JAYNE, 1993). Além disso, as restrições geométricas relacionadas à corda c foram $0,06 < c < 0,09$ metros e razão de aspecto $AR = 9,5$. Assim, dada a alta razão de aspecto, esperava-se obter tantas correspondências de valores ótimos para c assim como foram determinados considerando que o aparato aeroelástico é composto por alumínio.

Otimizando apenas a variável de projeto c , obteve-se apenas um valor ótimo, considerando o intervalo de velocidade de interesse estabelecido neste trabalho. A Tab. 11 exhibe os valores ótimos para a corda c , semi-span s do aparato aeroelástico, além de parâmetros relevantes para a análise aeroelástica.

Tabela 11 – Resultado obtido considerando a madeira balsa como material do aparato aeroelástico.

s [m]	c [m]	m [kg/m^2]	EI	EJ	$V_{flutter}$ [m/s]
0,7282	0,0766	0,32	0,0778	42,2790	4

Para outros valores de velocidade crítica de *flutter* de interesse, não houve correspondência de ótimos. Ressalta-se que a obtenção de valores ótimos está intrinsecamente atrelado à forma como o problema de otimização é escrito, sendo possível que para outros conjuntos de restrições haja maior correspondência de valores ótimos.

5.2.5 Relação entre as velocidade críticas desejadas com as velocidades críticas obtidas utilizando o método $p-k$

Para as quatro configurações de conjuntos de valores ótimos apresentadas anteriormente, é possível determinar a velocidade crítica de *flutter* para uma velocidade crítica de interesse. Para isso, foi criado o gráfico apresentado na Fig. 18.

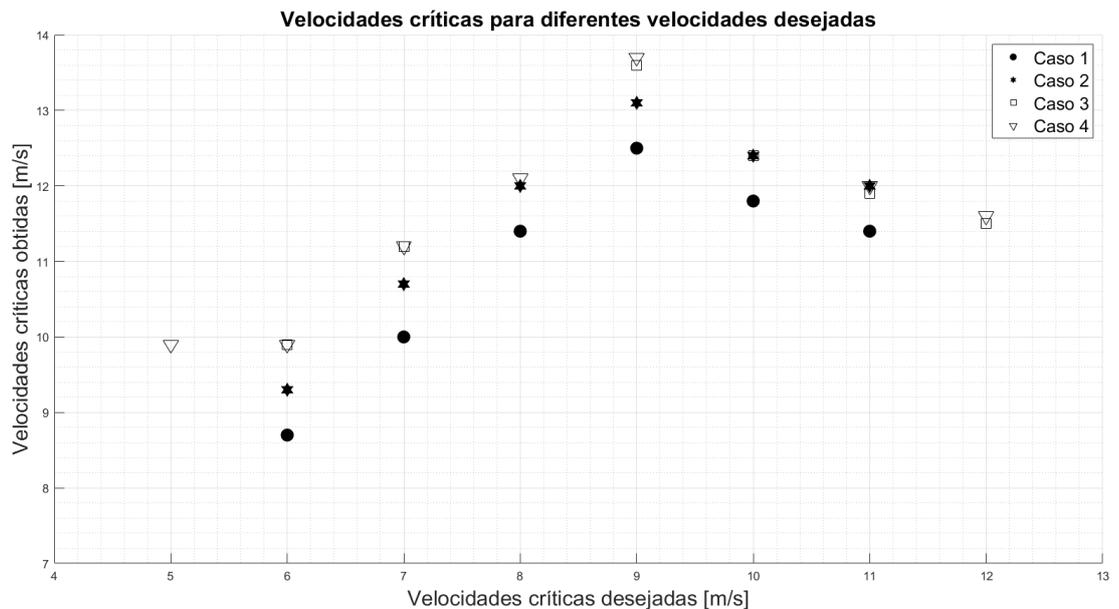


Figura 18 – Relação entre as velocidades críticas desejadas e as velocidades críticas obtidas utilizando o método $p-k$, empregado na solução do problema aeroelástico de *flutter*.

No gráfico, é possível observar que as diferentes configurações apresentam comportamento semelhante. Há um crescimento nos valores das velocidades críticas de *flutter* à medida que os valores da velocidade desejada aumentam, alcançando um pico quando a velocidade desejada é de 9 m/s , e, após esse ponto, os valores decrescem. Quanto à existência dos conjuntos ótimos - soluções possíveis obtidas pelo algoritmo matemático de otimização aeroelástico, observa-se que apenas a 4ª configuração de variáveis de projeto obteve resultado para a velocidade de 5 m/s . Além disso, é válido notar que existem pontos no gráfico em que as velocidades críticas de *flutter*, para a mesma velocidade crítica desejada, se sobrepõem. Assim, é possível supor que, para alguns casos analisados, seria obtida a mesma velocidade crítica de *flutter*, mesmo utilizando conjuntos diferentes de variáveis de projeto.

6 Conclusão

Neste trabalho, desenvolveu-se um algoritmo de otimização que alcançou o objetivo geral proposto. Utilizando o algoritmo, foi possível determinar as dimensões ótimas para a envergadura e corda de uma asa retangular fixada na raiz para que ocorra o fenômeno de *flutter* em um túnel de vento específico. Para certas configurações de variáveis de projeto, determinou-se também os valores ótimos para a razão de aspecto, módulo de elasticidade e cisalhamento, assim como para a densidade.

Ainda com relação ao objetivo geral deste trabalho, o algoritmo matemático de otimização aeroelástica é capaz de gerar estimativas iniciais para que ensaios sejam realizados em túnel de vento. Além disso, a escolha de diferentes configurações de variáveis de projeto possibilita que a análise prévia para a realização de experimentos em túneis de vento seja guiada com base em uma diversidade de resultados. Isso oferece a oportunidade de investigar qual material se adequa melhor à seção de teste do túnel de vento e à faixa de velocidades críticas de interesse, a fim de evidenciar o fenômeno aeroelástico de *flutter*.

Por sua vez, o modelo matemático de otimização desenvolvido possibilita realizar alterações na função objetivo, a fim de incorporar o amortecimento aeroelástico como restrição matemática do problema em estudo. Dessa forma, como abordagem alternativa, o amortecimento aeroelástico passaria a ser uma restrição do problema de otimização. Além disso, dependendo das características da seção de testes do túnel de vento e da geometria do aparato aeroelástico, é possível inserir restrições matemáticas relacionadas à influência do escoamento na análise experimental, como camada limite e razão de bloqueio.

Destaca-se que a complexidade matemática inerente à análise de *flutter*, mesmo ao empregar um modelo clássico com simplificações, apresentou desafios durante a implementação das equações aeroelásticas no software MATLAB®. A implementação de modelos matemáticos no software exige um conhecimento sólido da linguagem de programação, bem como habilidades avançadas em manipulação e visualização de dados. Em resumo, torna-se imperativo o emprego de boas práticas de programação, as quais englobam a aplicação de técnicas e abordagens que visam aprimorar a legibilidade, manutenção e eficiência do código.

Posto isso, os resultados obtidos neste trabalho fornece dados teóricos de referência, os quais podem ser aplicados em abordagens experimentais no estudo do fenômeno aeroelástico de *flutter*. Nesse contexto, diante do panorama apresentado pelos resultados, é possível afirmar que todos os objetivos estabelecidos para este trabalho foram alcançados.

6.1 Sugestões para trabalhos futuros

Se faz interessante, em futuras abordagens, estabelecer uma análise de otimização matemática considerando outras propriedades do equacionamento aeroelástico como variáveis de projeto, tais como a posição do centro de massa, o eixo de flexão e espessura do aparato aeroelástico.

No contexto do problema matemático de otimização aeroelástica, é relevante explorar a questão por meio de diferentes metodologias de otimização. A análise do impacto do emprego de abordagens alternativas, como métodos de otimização heurística, assume importância significativa para compreender a influência dessas escolhas nos resultados obtidos.

De igual maneira, sugere-se estender a análise analítica para a numérica, considerando a modelagem via método de elementos finitos (MEF). Dessa forma, aparatos com maior complexidade podem ser abordados e estudados.

Por fim, recomenda-se realizar uma investigação numérica para entender como a utilização de diferentes materiais na fabricação de aparatos aeroelásticos afeta a velocidade crítica de flutter.

Referências

- AGÊNCIA NACIONAL DE AVIAÇÃO CIVIL. *Instrução Suplementar n. 21-001: Orientações sobre certificação de tipo*. Brasília, 2021. Citado na página 14.
- ANAC. Cartilha com orientação para certificação de projeto de tipo. AGÊNCIA NACIONAL DE AVIAÇÃO CIVIL, 2019. Citado na página 14.
- ANDERSON, J. *Fundamentals of Aerodynamics*. McGraw-Hill Education, 2010. ISBN 9780073398105. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=xwY8PgAACAAJ>>. Citado 3 vezes nas páginas 7, 21 e 22.
- ASM. *Properties and Selection: Nonferrous Alloys and Pure Metals*. 2nd edition. ed. United States of America: ASM International, 1990. Citado na página 49.
- BERTSEKAS D. P., N. A.; OZDAGLAR, A. E. *Convex Analysis and Optimization*. [S.l.]: Athena Scientific, 2003. ISBN 1886529450. Citado 2 vezes nas páginas 25 e 28.
- BIDINOTTO, J. *Proposta Conceitual de excitador de "flutter" alternativo para ensaios em vôo*. 111 f. Dissertação (Dissertação de Mestrado) — Universidade de São Paulo, São Carlos., 2007. Citado na página 14.
- BISPLINGHOFF, R. L.; ASHLEY, H.; HALFMAN, R. L. *Aeroelasticity*. [S.l.]: Courier Corporation, 2013. Citado 5 vezes nas páginas 18, 20, 23, 39 e 47.
- BODIG, J.; JAYNE, B. A. *Mechanics of wood and wood composites*. 2nd edition. ed. Malabar: Krieger Publishing Company, 1993. Citado na página 55.
- BREDA, G. R.; MESTRIA, M. Métodos heurísticos para otimização de redes de distribuição de energia elétrica. *Revista Científica Eletrônica de Engenharia de Produção*, Associação Brasileira de Engenharia de Produção, v. 20, n. 4, 2020. Citado 2 vezes nas páginas 25 e 26.
- COELHO, R. M.; MARTINS, P. Ases - aeroservoelastic solutions. *Congresso Nacional de Estudantes de Engenharia Mecânica*, 2022. Citado 4 vezes nas páginas 7, 14, 19 e 20.
- COLLAR, A. R. The first fifty years of aeroelasticity. *Royal Aeronautical Society Historical Group*, p. 12–20, 1978. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 19.
- COLLAR, A. S. A. *Matrices and Engineering Dynamics*. [S.l.]: Ellis Horwood, 1987. Citado na página 34.
- DANIEL, I. M.; ISHAI, O. *Engineering Mechanics of Composite Materials*. 2nd edition. ed. New York: OXFORD UNIVERSITY PRESS, 2006. Citado 3 vezes nas páginas 40, 48 e 55.
- DOWELL, E. H. et al. *A modern course in aeroelasticity*. [S.l.]: Springer, 1995. v. 120. Citado na página 20.
- FAA. Advisory circular: Aeroelastic stability substantiation of transport category airplanes. Federal Aviation Administration, 2014. Citado na página 14.

- FAA. The faa and industry guide to product certification. Federal Aviation Administration, 2017. Citado na página 14.
- FERNANDEZ, P. J. *Introdução aos processos estocásticos*. Monografia (Especialização) — Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, RJ, 2014. Citado na página 28.
- FUNG, Y. C. *An introduction to the theory of aeroelasticity*. [S.l.]: Courier Dover Publications, 1993. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 23.
- HODGES, D. H.; PIERCE, G. A. *Introduction to Structural Dynamics and Aeroelasticity*. 2nd edition. ed. New York: Cambridge University Press, 2011. Citado na página 20.
- HOLTZ, G. C. da C. *Traçado automático de envoltórias de esforços em estruturas planas utilizando um algoritmo evolucionário*. Dissertação (Mestrado) — Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Brasil, 2005. Citado 3 vezes nas páginas 26, 27 e 28.
- INMAN, D. J. *Engineering Vibration*. [S.l.]: Pearson, 2014. Citado 4 vezes nas páginas 23, 24, 33 e 35.
- LANDAU, E. M. L. L. D. *Mechanics*. [S.l.]: Butterworth-Heinemann, 1976. Citado na página 30.
- LUBER, W. G. Structural dynamic and flutter testing. *NATO Science and Technology Organization, Munich*, 2015. Citado na página 14.
- MARQUI, C. d. *Estudo Teórico e Experimental de um Controlador para Supressão de ‘Flutter’*. Tese (Doutorado) — Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, Brasil, 2004. Citado na página 19.
- MARTINS, P. C. O. *Estudo da influência do amortecimento viscoelástico no fenômeno aeroelástico de flutter*. 148 f. Dissertação (Master’s Thesis) — Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, MG - Brasil., 2014. Citado 2 vezes nas páginas 35 e 36.
- MARTINS P.C.O., G. T. P. D. M. F. R. D. Numerical and experimental investigation of aeroviscoelastic systems. *Mechanical Systems and Signal Processing*, Science Direct, v. 85, p. 680–697, 2017. Citado na página 18.
- MEIROVITCH, L. *Fundamentals of Vibrations*. Singapore: MC Graw Hill, 2001. Citado na página 24.
- MENDES, R. C. F. *Interação entre esteiras aerodinâmicas de turbinas de eixo horizontal em arranjos*. Tese (Doutorado) — Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de Brasília, Brasília, Brasil, 2020. Citado 2 vezes nas páginas 7 e 46.
- MESSAC, A. *Optimization in Practice with MATLAB® for Engineering Students and Professionals*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2015. ISBN 9781107109186. Citado 2 vezes nas páginas 25 e 42.
- MILNE-THOMSON, L. M. *Theoretical aerodynamics*. [S.l.]: Courier Corporation, 1973. Citado na página 22.

- OGATA, K. *Engenharia de Controle Moderno*. [S.l.]: Pearson, 2014. Citado na página 33.
- OLIVEIRA, G. S.; ESPER, M. F. Aparatos aeroelásticos: uma revisão do estado da arte e sua aplicação didática para o estudo de flutter. *Congresso Nacional de Estudantes de Engenharia Mecânica*, Associação Brasileira de Engenharia e Ciências Mecânicas, 2023. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 20.
- OXFORD. *Principles of Flight*. [S.l.]: Jeppesen GmbH, 2001. v. 2. Citado na página 14.
- PERRY, D. J.; AZAR, J. J. *Aircraft Structures*. [S.l.]: McGraw-Hill Book Company, 1982. v. 2. Citado na página 18.
- RAO, S. *Vibrações Mecânicas*. [S.l.]: Pearson, 2009. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 24.
- RAO, S. S. *Engineering Optimization: Theory and Practice*. [S.l.]: JOHN WILEY & SONS, INC, 2009. ISBN 9780470183526. Citado 2 vezes nas páginas 24 e 25.
- RAVINDRAN, A.; RAGSDELL, K. M.; REKLAITIS, G. V. *Engineering Optimization: Methods and Applications*. [S.l.]: JOHN WILEY & SONS, INC, 2006. ISBN 139780471558149. Citado 2 vezes nas páginas 25 e 26.
- SANCHES, P. A. M. *Projeto de Aparato Aeroelástico com Superfície de Controle e Compensador*. Dissertação (Mestrado) — Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, Brasil, 2022. Citado na página 20.
- SARAMAGO, S. P.; STEFFEN, V. Técnicas heurísticas de otimização aplicadas em engenharia. *Horizonte Científico*, Horizonte Científico, v. 3, n. 2, 2009. Citado 2 vezes nas páginas 26 e 27.
- SOUSA, M. A. T. *Modelagem Matemática e Simulação Numérica de um Sistema Rotativo Eixo-Disco-Palhetas*. Dissertação (Mestrado) — Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, Brasil, 2022. Citado na página 24.
- STEINBRECHER, T.; LEUBNER-METZGER, G. The biomechanics of seed germination. *Journal of Experimental Botany*, v. 68, p. 765–783, 2016. Citado 2 vezes nas páginas 7 e 54.
- TIMOSHENKO, J. N. G. S. *Theory of Elasticity*. [S.l.]: McGraw-Hill, 1951. Citado na página 48.
- UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO. *Métodos de Otimização*. Rio de Janeiro, 2015. Citado 3 vezes nas páginas 25, 26 e 27.
- VERGANI, R. D. *Análise conceitual, numérica e experimental utilizando modelo de asa rígida*. Monografia (Especialização) — Universidade de Caxias do Sul, Caxias do Sul, 2017. Citado 2 vezes nas páginas 7 e 19.
- WRIGHT, J. R.; COOPER, J. E. *Introduction to aircraft aeroelasticity and loads*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2015. v. 2. Citado 15 vezes nas páginas 7, 14, 18, 19, 22, 29, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 39 e 45.

APÊNDICE A – Soluções ótimas

A Tab. 12 contém os resultados ótimos obtidos para as quatro configurações de variáveis de projeto.

Tabela 12 – Resultados ótimos para as quatro configurações de variáveis de projeto.

Resultados ótimos								
Otimização do modelo de placa considerando a variável s								
V [m/s]	5	6	7	8	9	10	11	12
s [m]	-	0,6107	0,5549	0,5102	0,6083	0,567	0,5321	-
c [m]	-	0,2443	0,222	0,2041	0,2433	0,2268	0,2128	-
Otimização do modelo de placa considerando as variáveis s e E								
V [m/s]	5	6	7	8	9	10	11	12
s [m]	-	0,6165	0,5603	0,5152	0,6098	0,5684	0,5338	-
c [m]	-	0,2466	0,2241	0,2061	0,2439	0,2273	0,2135	-
E [GPa]	-	71,5	71,5	71,5	70,0	70,0	70,2	-
G [GPa]	-	27,5	27,5	27,5	26,9	26,9	27,0	-
Otimização do modelo de placa considerando as variáveis s , AR e E								
V [m/s]	5	6	7	8	9	10	11	12
s [m]	-	0,6219	0,5653	-	0,6109	0,5675	0,5282	0,4969
c [m]	-	0,2392	0,2174	-	0,241	0,2295	0,225	0,2155
E [GPa]	-	73,0	73,0	-	70,0	70,0	70,0	70,0
G [GPa]	-	28,1	28,1	-	26,9	26,9	26,9	26,9
AR []	-	2,6	2,6	-	2,54	2,47	2,35	2,31
Otimização do modelo de placa considerando as variáveis s , AR , E e ρ								
V [m/s]	5	6	7	8	9	10	11	12
s [m]	0,6841	0,6238	0,5569	0,659	0,6075	-	0,5269	0,4971
c [m]	0,2631	0,2455	0,2142	0,2652	0,2492	-	0,2277	0,2151
E [GPa]	70,0	70,0	70,0	70,0	70,0	-	70,0	70,0
G [GPa]	26,9	26,9	26,9	26,9	26,9	-	26,9	26,9
AR []	2,6	2,5407	2,6	2,485	2,4376	-	2,3143	2,3111
ρ [kg/m ³]	2900,00	2845,84	2900,00	2601,00	2600,99	-	2866,66	2601,72

APÊNDICE B – Parâmetros de entrada para a solução aeroelástica

A Tabela 13 inclui os valores comumente utilizados como parâmetros de entrada para os métodos de solução de *flutter*. Portanto, os resultados obtidos neste trabalho podem ser facilmente incorporados às rotinas de solução de *flutter*.

Tabela 13 – Parâmetros de entrada para os métodos de solução de flutter.

Parâmetros											
Modelo de placa considerando a variável s											
	5	6	7	8	9	10	11	12			
V [m/s]	-	0,6107	0,5549	0,5102	0,6083	0,567	0,5321	-			
s [m]	-	0,2443	0,222	0,2041	0,2433	0,2233	0,2128	-			
c [m]	-	1,89E+00	1,89E+00	1,89E+00	1,89E+00	1,89E+00	1,89E+00	-			
m [kg/m ²]	-	4,96E-01	4,51E-01	4,14E-01	4,94E-01	4,53E-01	4,32E-01	-			
EI [GPa]	-	5,93E+04	4,45E+04	3,46E+04	5,85E+04	4,53E+04	3,92E+04	-			
Modelo de placa considerando as variáveis s e E											
	5	6	7	8	9	10	11	12			
V [m/s]	-	0,6165	0,5603	0,5152	0,6098	0,5684	0,5338	-			
s [m]	-	0,2466	0,2241	0,2061	0,2439	0,2273	0,2135	-			
c [m]	-	1,89E+00	1,89E+00	1,89E+00	1,89E+00	1,89E+00	1,89E+00	-			
m [kg/m ²]	-	5,04E-01	4,58E-01	4,21E-01	4,88E-01	4,55E-01	4,28E-01	-			
EI [GPa]	-	2,41E+04	1,81E+04	1,40E+04	2,28E+04	1,84E+04	1,53E+04	-			
Modelo de placa considerando as variáveis s , AR e E											
	5	6	7	8	9	10	11	12			
V [m/s]	-	0,6219	0,5653	0,6109	0,5675	0,5282	0,4969	-			
s [m]	-	0,2392	0,2174	-	0,241	0,2295	0,225	0,2155			
c [m]	-	1,89E+00	1,89E+00	-	1,89E+00	1,89E+00	1,89E+00	1,89E+00			
m [kg/m ²]	-	4,99E-01	4,54E-01	-	4,82E-01	4,59E-01	4,50E-01	4,31E-01			
EI [GPa]	-	2,24E+04	1,68E+04	-	2,20E+04	1,90E+04	1,79E+04	1,57E+04			
Modelo de placa considerando as variáveis s , AR , E e ρ											
	5	6	7	8	9	10	11	12			
V [m/s]	0,6841	0,6238	0,5569	0,659	0,6075	-	0,5269	0,4971			
s [m]	0,2631	0,2455	0,2142	0,2652	0,2492	-	0,2277	0,2151			
c [m]	2,03E+00	1,99E+00	2,03E+00	1,82E+00	1,82E+00	-	2,01E+00	1,82E+00			
m [kg/m ²]	5,26E-01	4,91E-01	4,29E-01	5,31E-01	4,99E-01	-	4,56E-01	4,30E-01			
EI [GPa]	2,86E+04	2,32E+04	1,54E+04	2,93E+04	2,43E+04	-	1,85E+04	1,56E+04			

APÊNDICE C – Repositório das rotinas do MATLAB

O modelo de otimização matemática foi incorporado no software MATLAB. Para atender aos objetivos amplos deste trabalho, foram desenvolvidas quatro rotinas distintas para a implementação do modelo. Isso se deve às quatro configurações diferentes das variáveis de projeto, que impactam significativamente a representação numérica das equações aeroelásticas. Dessa forma, as rotinas estão disponíveis para acesso por meio deste [link](#).

A rotina denominada *flags* é responsável por determinar qual problema de otimização será executado, bem como quais parâmetros relevantes o usuário deseja visualizar. A execução dessas rotinas é realizada por meio da rotina principal, chamada *main*. Nela, o usuário deve inserir o diretório da pasta em que o conjunto de rotinas está armazenado em seu computador.

Cada conjunto de rotinas é designado para uma pasta específica, e o número no nome das pastas refere-se à configuração do problema de otimização contido nelas. Portanto, a pasta *rotinas1* contém o conjunto de códigos relacionados à otimização de uma variável de projeto, seguindo o mesmo padrão para as demais configurações de variáveis.