



**Universidade de Brasília
Departamento de Estatística**

Investigação de padrões log-periódicos: o caso da quebra da Americanas S.A.

Antonio Caio Cavalcante Teodoro

Projeto apresentado para o Departamento de Estatística da Universidade de Brasília como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de Bacharel em Estatística.

**Brasília
2023**

Antonio Caio Cavalcante Teodoro

Investigação de padrões log-periódicos: o caso da quebra da Americanas S.A.

Orientador(a): Professor Dr. Raul Yukihiro Matsushita

Projeto apresentado para o Departamento de Estatística da Universidade de Brasília como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de Bacharel em Estatística.

**Brasília
2023**

Resumo

Este estudo explora a dinâmica dos preços das ações da Americanas antes e depois do *crash* registrado em janeiro de 2023, após a descoberta de um rombo bilionário em seu balanço contábil. Por meio de uma abordagem analítica para a detecção de padrões intrigantes e eventos marcantes em sua série histórica, antes da quebra identifica-se uma tendência ascendente nas ações, alimentando expectativas positivas. Contudo, uma reviravolta surpreendente interrompeu esse crescimento, o que leva à seguinte pergunta: havia sinais de uma quebra iminente? Para responder a essa questão, a análise da série histórica não descarta a possibilidade de existência de um padrão log-periódicos na período da bolha, seguido de uma queda exponencial nos preços na fase anti-bolha. Embora a aplicação de modelos log-periódicos para essa finalidade seja controversa, por causa de padrões espúrios e problemas na replicabilidade do fenômeno, este estudo mostra que — pelo menos hipoteticamente — seria possível alertar os investidores sobre a quebra iminente da Americanas. A aplicação desse modelo representa uma oportunidade para compreender melhor e antecipar movimentos não aleatórios do mercado, oferecendo insights cruciais para tomadas de decisões. Este estudo contribui para documentar a evolução da análise de séries temporais financeiras, em especial, destacando a relevância da LPPL na análise de comportamentos complexos em séries de tempo.

Palavras-chave: padrões log-periódicos, mercados financeiros, bolhas e anti-bolhas, gestão de riscos, quebra financeira.

Lista de Figuras

2.1.1	LPPL adaptada ao Hang Seng em 1989	15
2.2.1	Nikkei Collapses	16
2.5.1	Simulação do m	23
2.5.2	Simulação do ω	23
2.5.3	Simulação do t_c	23
2.5.4	Simulação do ϕ	24
2.5.5	Simulação do parâmetro A	24
2.5.6	Simulação do parâmetro B	24
2.5.7	Simulação do parâmetro C	25
2.6.1	Comparação entre Regressão Linear e Não Linear	27
4.1	Série temporal da AMER3 2005-2023	29
4.2	Volume de transações da AMER3 2005-2023	30
4.3	Série Temporal AMER3 com médias móveis	30
4.4	Série Temporal AMER3 2018-2023	31
4.5	Volume de transações da AMER3 2018-2023	31
4.6	Correlação entre preço de fechamento e volume	32
4.7	LPPL aplicada em diferentes momentos iniciais para captação de bubble ...	34
4.8	LPPL aplicada em diferentes momentos finais para captação de anti-bubble	35

Sumário

1	Introdução	8
2	Referencial Teórico	12
2.1	Bolhas	12
2.2	Anti-bolhas	15
2.3	Séries Temporais	17
2.4	Médias Móveis	18
2.5	LPPL(<i>Log-Periodic Power Law</i>)	20
2.6	Regressão Não Linear	25
3	Metodologia	28
3.1	Conjunto de dados	28
4	Resultados	29
5	Conclusão	37
	Referências	38

1 Introdução

O surgimento de crises financeiras e as bolhas associadas tem sido objeto de significativo interesse na pesquisa acadêmica, refletindo a necessidade premente de compreensão desse fenômeno complexo. A intrínseca interligação entre eventos que desencadeiam instabilidades econômicas e as repercussões dessas crises despertam um interesse considerável não apenas nos círculos acadêmicos, mas também em setores diversos da sociedade.

No âmbito deste trabalho, a motivação para investigar a natureza e os fatores desencadeantes de crises financeiras é impulsionada pela urgência de decifrar os padrões e comportamentos que permeiam esses eventos cruciais. A busca por uma compreensão mais aprofundada não apenas se fundamenta na análise retrospectiva desses episódios, mas também visa fornecer insights valiosos para a formulação de estratégias preventivas e mitigadoras.

Ao explorar esse intrincado cenário financeiro, almeja-se não apenas delinear as causas subjacentes, mas também identificar padrões recorrentes que possam antecipar ou caracterizar o surgimento dessas crises. Dessa forma, o presente trabalho busca contribuir para o avanço do conhecimento nesta área crítica, consolidando um arcabouço teórico robusto que sirva como base para análises futuras e, esperançosamente, para a promoção de uma maior estabilidade nos mercados financeiros.

Este estudo não se restringe apenas à investigação de crises financeiras em si, mas também se estende ao exame das bolhas associadas, cuja compreensão se mostra igualmente crucial para uma visão holística e abrangente. À medida que nos aprofundamos nesse tema, a importância de desvelar os fatores que contribuem para o surgimento de bolhas torna-se evidente, constituindo-se em um aspecto central da presente pesquisa.

Assim, é com a convicção de que a análise aprofundada desses fenômenos não apenas enriquece o entendimento estatístico, mas também fornece subsídios fundamentais para o desenvolvimento de metodologias robustas de previsão e gestão de riscos.

A abordagem alternativa adotada para o estudo se destaca pelo uso da *Log-Periodic Power Law* (LPPL) para modelar bolhas financeiras prévias a crashes. A LPPL é reconhecida empiricamente por sua atratividade, pois demonstra habilidade em prever tanto a continuação quanto o término de bolhas, conferindo assim uma vantagem comparativa em relação a outros métodos de avaliação de risco financeiro.

Atualmente, a questão sobre a presença de bolhas na formação de preços dos

ativos é objeto de intensa controvérsia na teoria financeira contemporânea. Uma bolha de preços ocorre quando os valores elevados são mantidos principalmente pelo entusiasmo exagerado dos investidores, não sendo sustentados por uma avaliação consistente do valor real (Shiller, 2000).

Fatores como ambição, excesso de confiança e flutuações sistêmicas têm desempenhado papéis determinantes em episódios históricos de bolhas financeiras. Exemplos emblemáticos incluem as bolhas das Tulipas na Holanda em 1637, dos Mares do Sul na Inglaterra em 1720, além dos *booms* observados nas décadas de 1920 e 1980 no mercado de ações norte-americano, culminando nos grandes *crashes* de 1929 e 1987. Esses eventos representam apenas alguns dos inúmeros exemplos ao longo da história (Sornette, 2009).

A dramática reviravolta na situação financeira da Americanas, uma respeitada empresa do varejo brasileiro, que recentemente enfrentou uma crise sem precedentes, levando-a a solicitar recuperação judicial. O ponto de inflexão ocorreu em 11 de janeiro, quando o ex-CEO, Sergio Rial, renunciou ao cargo, revelando um rombo contábil surpreendente de R\$20 bilhões, estimado atualmente em mais de R\$40 bilhões. Este escândalo resultou em uma drástica desvalorização das ações da empresa, exacerbada pela suspeita de que executivos realizaram vendas significativas de ações no segundo semestre de 2022, possuindo informações privilegiadas sobre a iminente crise (Bolzani, 2023).

O surgimento de crises financeiras e bolhas associadas tem sido objeto de um interesse significativo na pesquisa acadêmica, refletindo a necessidade premente de compreensão desse fenômeno complexo. A intrínseca interligação entre eventos desencadeadores de instabilidades econômicas e as repercussões dessas crises despertam interesse não apenas nos círculos acadêmicos, mas também em setores diversos da sociedade.

No âmbito deste trabalho, a motivação é impulsionada pela urgência de decifrar os padrões e comportamentos que permeiam esses eventos cruciais. A busca por uma compreensão mais aprofundada fundamenta-se não apenas na análise retrospectiva desses episódios, mas também na aplicação de técnicas analíticas avançadas.

A análise inicial do banco de dados prevê a utilização de técnicas gráficas, medidas descritivas e modelos de séries temporais. No entanto, o cerne da abordagem analítica repousa na aplicação de modelos log-periódicos (LPPL). Estes modelos, reconhecidos por sua capacidade de identificar padrões logperiódicos em séries temporais financeiras, desempenharão um papel fundamental na investigação dos movimentos de preços que antecedem crises financeiras.

Ao explorar esse intrincado cenário financeiro, almeja-se não apenas delinear as

causas subjacentes, mas também identificar padrões recorrentes que possam antecipar ou caracterizar o surgimento dessas crises. Dessa forma, o presente trabalho busca contribuir para o avanço do conhecimento nesta área crítica, consolidando um arcabouço teórico robusto que sirva como base para análises futuras.

Esta abordagem analítica não apenas enriquecerá o entendimento estatístico, mas também fornecerá subsídios fundamentais para o desenvolvimento de metodologias de gestão de riscos. Assim, ao direcionar nossa atenção para a análise específica de padrões log-periódicos, este trabalho visa oferecer uma contribuição tangível para a compreensão mais profunda dos fenômenos financeiros complexos e para o aprimoramento das estratégias de mitigação de riscos.

No intuito de alcançar os objetivos deste trabalho, a seção subsequente, intitulada Referencial Teórico, conduzirá uma análise aprofundada sobre os movimentos financeiros conhecidos como bolhas e anti-bolhas. Exploraremos os conceitos fundamentais desses fenômenos, considerando suas características, implicações e os modelos teóricos estabelecidos para compreendê-los.

Além disso, a utilização da regressão não linear, notadamente através dos modelos log-periódicos (LPPL), desempenha um papel crucial na análise dos movimentos financeiros. Enquanto as técnicas gráficas oferecem uma representação visual dos dados e as medidas descritivas fornecem resumos estatísticos, a regressão não linear vai além ao modelar relações complexas que podem existir nos movimentos financeiros.

A escolha dos modelos log-periódicos (LPPL) é fundamentada na capacidade desses modelos em identificar padrões críticos em séries temporais. Estes modelos são particularmente eficazes na detecção de comportamentos não lineares e variações periódicas que podem escapar à detecção por métodos mais simples. Destacamos, assim, a importância da regressão não linear, e mais especificamente dos modelos LPPL, como uma ferramenta essencial para revelar nuances e padrões críticos nos dados financeiros em análise.

Na condução deste estudo, a atenção se volta para um caso específico, o da Americanas, com o intuito de explorar a influência da recente crise e a notável desvalorização das ações dessa empresa. Este contexto oferece uma oportunidade única para analisar os impactos adversos de eventos econômicos significativos sobre o desempenho financeiro de uma organização.

Os objetivos desta pesquisa foram delineados de maneira a abordar os desafios apresentados pelo caso da Americanas. Inicialmente, buscou-se desenvolver um script em R para realizar a coleta de dados por meio de web scraping, visando obter informações

cruciais para a análise. Em seguida, uma análise exploratória minuciosa foi conduzida para compreender a natureza dos dados e identificar possíveis padrões ou tendências emergentes.

2 Referencial Teórico

2.1 Bolhas

Teoria Econômica e Comportamento dos Investidores

A teoria econômica tradicional fundamenta-se na premissa de que os agentes econômicos operam sob princípios de racionalidade, baseando suas decisões na maximização do valor. No entanto, questiona-se a adequação desse pressuposto quando se trata do comportamento dos investidores. A visão frequente de agentes econômicos como indivíduos racionais é desafiada pela ocorrência de bolhas especulativas nos mercados financeiros. Bolhas especulativas representam movimentos significativos e artificiais nos preços dos ativos, desconectados de uma avaliação razoável de seu valor justo (Caselani, 2003).

Finanças Comportamentais e Modelos de Feedback

A teoria de finanças comportamentais, oferece uma base crucial para a compreensão das bolhas de preços, ao considerar as falhas cognitivas dos agentes de mercado. Essas falhas são determinantes na formação de expectativas irracionais, que muitas vezes superam o valor fundamental dos ativos. O papel do modelo de feedback na existência de bolhas de preços. Esse modelo descreve um ciclo no qual a alta especulativa de preços atrai a atenção do mercado, gerando entusiasmo e aumentando a demanda por ativos em alta. Esse processo, se não contido, resulta em um aumento descontrolado da bolha, levando eventualmente ao seu estouro (Shiller, 2000).

Ciclos de Bolhas Financeiras segundo Sornette

Sornette (2009) argumenta que a história das bolhas financeiras e *crashes* revela uma notável repetição de padrões ao longo dos séculos. Ele identifica cinco estágios que caracterizam o ciclo de uma bolha, desde o início suave até o estouro:

- Início suave com aumento da produção e otimismo do mercado.
- Atração de investimentos internacionais, inflacionando os preços.
- Atração de investidores menos sofisticados, diminuição das margens de ganho e aumento da demanda por ações.
- Distanciamento do comportamento do mercado da realidade econômica.

- Diminuição do número de novos investidores, mercado mergulhando em nervosismo até o colapso.

Esses estágios se aplicam a diversas quebras de mercado, incluindo eventos históricos como o *crash* de 1929 nos Estados Unidos e bolhas contemporâneas como a da Internet e a Imobiliária nos Estados Unidos (Sornette, 2009).

Exemplos de Bolhas:

Tulipas Holandesas: Durante o século XVII, a Holanda estava experimentando um período de grande prosperidade econômica, impulsionado pelo aumento do comércio, especialmente com a América recém-descoberta. Amsterdam, em particular, tornou-se um centro vital para o comércio no noroeste da Europa.

Nesse contexto de riqueza crescente, as tulipas, que foram introduzidas na Holanda vindo da Turquia, tornaram-se objetos de desejo e símbolos de status entre a elite social. A beleza exótica e as cores vibrantes das tulipas contribuíram para a sua popularidade, e elas se tornaram um item de prestígio para as famílias mais abastadas.

A febre especulativa das tulipas atingiu seu auge por volta de 1636-1637. Durante esse período, o mercado de tulipas experimentou uma demanda frenética, levando a preços exorbitantes para as bulbos de tulipas. O comércio de tulipas se tornou um fenômeno especulativo, com investidores comprando e vendendo contratos futuros de tulipas, mesmo antes de as flores florescerem.

O ápice dessa especulação ocorreu em fevereiro de 1637, quando os preços atingiram níveis estratosféricos. No entanto, a bolha especulativa eventualmente estourou. Os preços das tulipas despencaram drasticamente, deixando muitos investidores arruinados financeiramente. Este colapso abrupto ficou conhecido como Crise das Tulipas e é considerado um dos primeiros exemplos documentados de uma bolha econômica.

A história das tulipas na Holanda serve como um alerta sobre os perigos da especulação desenfreada e fornece lições valiosas sobre as dinâmicas do mercado financeiro e a natureza cíclica das bolhas especulativas. O termo tulipomania é frequentemente usado para descrever episódios similares de especulação irracional nos mercados (Sornette, 2003).

South Sea (Mares do Sul): A Bolha da South Sea refere-se ao entusiasmo e especulação intensos que ocorreram em meados do século XVIII e culminaram no primeiro *crash* do mercado financeiro na Inglaterra. Essa história envolve uma mistura de histeria coletiva, corrupção política e agitação pública. O termo ano de bolhas foi cunhado devido à ocorrência de várias bolhas nesse mesmo período, incluindo a Bolha do Mississippi.

O episódio destaca-se como um exemplo histórico dos perigos associados à especulação desenfreada e à falta de regulamentação nos mercados financeiros (Sornette, 2003).

Bolha de Mississippi: Na mesma época em que a Inglaterra vivenciava a Bolha da *South Sea*, a França também experimentava uma bolha financeira em meados do século XVIII. Esses eventos estavam vagamente conectados por meio de um jogador escocês chamado John Law. No entanto, a diferença entre as duas bolhas foi significativa. A bolha inglesa envolveu fraudes em um plano específico, enquanto a bolha francesa foi em uma escala maior e mais politicamente complicada. A história dessas bolhas ressalta a complexidade e os desafios associados às especulações financeiras descontroladas naquela época (Vogel, 2018).

Crash de 1929: A década de 1920, conhecida como *Roaring Twenties*, foi marcada por um otimismo desenfreado nos Estados Unidos, impulsionado por avanços tecnológicos e crescimento econômico. Contudo, o auge desse período culminou no *crash* da bolsa de valores em 1929, desencadeando a Grande Depressão. O colapso resultou na perda generalizada de riqueza, falências de instituições financeiras e desemprego em massa. A economia global foi profundamente afetada, e as lições desse período moldaram as políticas econômicas e financeiras subsequentes, destacando os perigos da especulação exagerada e a necessidade de regulamentação (Vogel, 2018).

Hang Seng: A análise do comportamento do índice *Hang Seng*, notadamente durante o período que antecedeu a queda de 1989, é conduzida sob a lente do modelo LPPL (*Log-Periodic Power Law*). Este modelo, desenvolvido por Sornette e Johansen (2001), visa capturar padrões complexos nos movimentos de preços dos ativos financeiros, especialmente aqueles associados a bolhas especulativas (Sornette; Johansen, 2001).

Exemplo Gráfico:

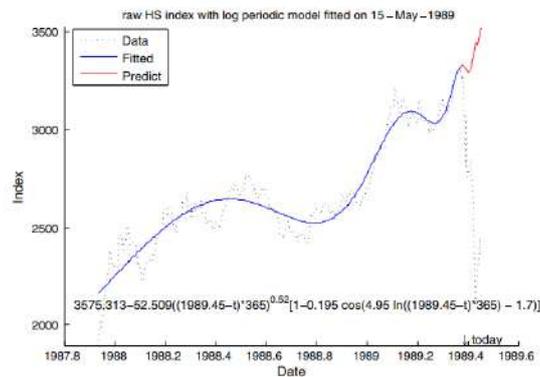


Figura 2.1.1: LPPL adaptada ao Hang Seng em 1989.

Fonte: Brée; Joseph, 2010.

A Figura (2.1.1) apresenta o resultado do ajuste do modelo LPPL à bolha financeira que antecedeu o *crash* de 1989 no índice Hang Seng. Destaca visualmente como o modelo LPPL se alinha com a evolução dos preços no período que antecede a quebra de 1989. A interpretação dos resultados do modelo pode fornecer insights valiosos para entender os padrões de comportamento do mercado financeiro e a possibilidade de eventos extremos (Brée; Joseph, 2010).

2.2 Anti-bolhas

Uma anti-bolha refere-se a um fenômeno em que os preços de ativos financeiros experimentam desvalorizações lentas e prolongadas após atingirem níveis muito altos, em vez de uma rápida queda associada a uma bolha especulativa tradicional. Em uma bolha convencional, os preços de ativos aumentam de forma exagerada devido à especulação excessiva e otimismo irracional dos investidores, seguidos por uma rápida queda quando a realidade econômica se impõe (Sornette; Johansen, 1999).

Por outro lado, em uma anti-bolha, os preços podem permanecer elevados por um período prolongado antes de começarem a cair, e essa queda é geralmente mais gradual do que abrupta. A ideia por trás da anti-bolha é que, após atingir um pico, o mercado experimenta uma desconfiança gradual e uma desvalorização lenta, muitas vezes associada a fatores fundamentais e econômicos. A proposta do modelo inclui a possibilidade de o comportamento de manada dos traders não apenas levar a bolhas especulativas, mas também a anti-bolhas, onde ocorrem desvalorizações de mercado desaceleradas após alcançarem máximas históricas. Essa ideia está relacionada à dinâmica de mercado proposta no modelo, em que a demanda diminui lentamente devido a barreiras que se dissipam

progressivamente, resultando em uma decaída gradual dos preços do mercado (Sornette; Johansen, 1999).

Nikkei Collapses: O comportamento coletivo dos operadores de mercado não apenas resulta na criação de bolhas especulativas, com valorizações intensas e potencialmente seguidas por quedas abruptas nos mercados financeiros, mas também provoca o surgimento de anti-bolhas, caracterizadas por desvalorizações mais graduais após atingirem níveis históricos máximos. Para analisar esse fenômeno, propomos um modelo simples de dinâmica de mercado no qual a demanda diminui gradualmente, encontrando barreiras que se dissipam progressivamente. Isso resulta em uma decaída de lei de potência nos preços de mercado, marcada por oscilações log-periódicas desaceleradas.

Esta proposta teórica é fundamentada na observação do índice de ações japonês Nikkei desde 1990 até o presente, bem como nos preços futuros do ouro após 1980, ambos após atingirem seus picos históricos. Nossa análise combina abordagens paramétricas e não paramétricas de maneira simultânea, garantindo uma consistência total entre os métodos. Este estudo visa documentar e compreender a dinâmica complexa do comportamento de mercado, oferecendo insights valiosos sobre os padrões de formação e dissolução de bolhas financeiras, bem como o surgimento das mencionadas anti-bolhas (Sornette; Johansen, 1999).

Exemplo gráfico:

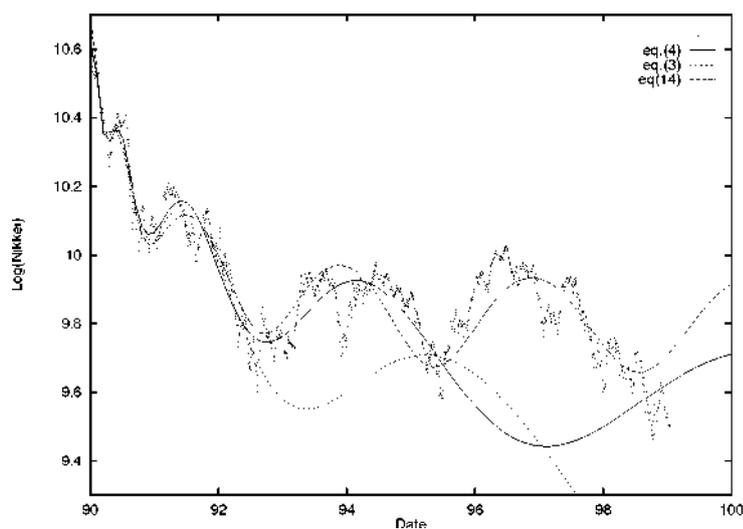


Figura 2.2.1: *Nikkei Collapses*
Fonte: Johansen; Sornette, 2010.

A Figura (2.2.1) descreve uma análise do comportamento do índice do mercado de ações Nikkei após o início de sua queda em 1º de janeiro de 1990 até 31 de dezembro de 1998, utilizando equações matemáticas específicas para modelar esse comportamento.

O último ajuste prevê um aumento do Nikkei à medida que o ano 2000 se aproxima, indicando uma projeção otimista para o mercado de ações nesse período (Johansen; Sornette, 2010).

2.3 Séries Temporais

Uma série temporal é uma sequência de dados observados ao longo do tempo, onde as observações são registradas em intervalos regulares. Esses dados podem representar medidas de uma determinada variável, como temperatura, preço de ações, consumo de energia, número de vendas, entre outros, coletados em diferentes momentos (Ehlers, 2009).

Abordagens

- Técnicas Descritivas: Incluem técnicas gráficas, identificação de padrões, entre outros métodos para descrever as propriedades da série.
- Modelos Probabilísticos: Envolvem seleção, comparação e ajuste de modelos, estimação de parâmetros, previsão, sendo a função de autocorrelação uma ferramenta básica. Também podem incluir análise espectral.
- Métodos não paramétricos (alisamento ou suavização): São técnicas que não assumem uma forma paramétrica específica para o modelo, sendo úteis para reduzir ruídos e destacar padrões em uma série temporal.
- Outras Abordagens: Incluem modelos de espaço de estados, modelos não lineares, análise de séries multivariadas, estudos longitudinais, processos de longa dependência, modelos de volatilidade, entre outros.

Estacionariedade

Definição 1: Uma série temporal é considerada fortemente ou estritamente estacionária quando as propriedades estatísticas da série não mudam ao longo do tempo, ou seja:

$$P(X_{t_1} \leq x_1, X_{t_2} \leq x_2, \dots, X_{t_n} \leq x_n) = P(X_{t_1+\tau} \leq x_1, X_{t_2+\tau} \leq x_2, \dots, X_{t_n+\tau} \leq x_n) \quad (2.3.1)$$

Definição 2: Uma série temporal é dita ser estacionária de segunda ordem ou fracamente estacionária se a sua função média é constante e sua função de autocovariância depende apenas da defasagem, ou seja:

$$E[X(t)] = \mu \quad \text{e} \quad \text{Cov}[X(t), X(t + \tau)] = \gamma(\tau)$$

Nessa definição, μ representa a média da série temporal e $\gamma(\tau)$ é a função de autocovariância, que depende apenas da diferença temporal τ (Ehlers, 2009).

Essas propriedades da estacionariedade fraca permitem simplificar a análise e a modelagem de séries temporais, pois assumem que as propriedades estatísticas básicas da série não mudam ao longo do tempo, facilitando a aplicação de métodos estatísticos para previsões e inferências. A estacionariedade é uma condição crucial para muitas técnicas de análise de séries temporais, proporcionando uma base sólida para a modelagem e interpretação dos dados ao longo do tempo (Ehlers, 2009).

2.4 Médias Móveis

Média Móvel Simples

Em uma série temporal, a média móvel é calculada considerando a média de um conjunto de pontos consecutivos da série. Esse conjunto de dados é selecionado para suavizar variações sazonais e irregulares. A Equação (2.4.1) apresenta o método para calcular a média móvel simples (Ballou, 2009).

$$F_t = \left(\frac{1}{N}\right) \sum_{i=t-N}^{t-1} D_i = \left(\frac{1}{N}\right) (D_{t-1} + D_{t-2} + \dots + D_{t-n}), \quad (2.4.1)$$

em que:

F_t = Previsão para o período t

D_i = Demanda ocorrida no período i

N = Número de períodos

i = Índice do período ($i = 1, 2, 3, \dots$)

Para uma nova previsão, precisa-se apenas calcular a diferença entre a demanda mais recente e a demanda de N períodos, a fim de atualizar a previsão. Conforme essa

afirmação, a Equação (2.4.2) pode ser descrita (Ballou, 2009).

$$F_t = \frac{1}{N} (D_t + (N - 1)F_{t-1}), \quad (2.4.2)$$

em que:

D_t = Demanda ocorrida no período t

t = Período

Nota: Embora o conceito de estacionariedade seja crucial, é importante observar que em médias móveis, o processo pode não ser globalmente estacionário, mas deve ser localmente estacionário.

Média Móvel Ponderada

Este método representa uma adaptação da média móvel simples, sendo aplicado a demandas que não apresentam evidências de tendências ou sazonalidades. Recomenda-se que, para facilitar os cálculos e a obtenção de previsões, a soma dos pesos seja mantida como igual a um, conforme expresso na Equação (2.4.3).

$$P_j = (D_1 \times PE_1) + (D_2 \times PE_2) + (D_3 \times PE_3) + \dots + (D_n \times PE_n) \quad (2.4.3)$$

Sendo: $PE_1 + PE_2 + PE_3 + \dots + PE_n = 1$

Dados que:

D_n = Demanda no período n

D_i = Demanda no período i

PE = Peso das demandas em cada período

Média Móvel Exponencial

Na média móvel exponencial, a influência de cada observação diminui gradualmente ao longo do tempo, seguindo um decaimento exponencial (Tubino, 2000) . A

Equação (2.4.4) apresenta essa situação e a Equação (2.4.5) expõe a equação para a obtenção de α .

$$F_{t+1} = \alpha A_t + (1 - \alpha)F_t \quad (2.4.4)$$

$$\alpha = \frac{2}{N + 1} \quad (2.4.5)$$

,

em que:

t = Período do tempo atual

α = Constante de ponderação exponencial

A_t = Demanda no período t

F_t = Previsão para o período t

N = Número de períodos de horizonte

Médias Móveis: Ferramentas para Estimação de Tendências Locais

Em uma série temporal, que representa observações coletadas sequencialmente ao longo do tempo, as médias móveis são uma abordagem comum para estimar tendências locais. Uma série temporal é uma coleção ordenada de dados, geralmente amostrados em intervalos regulares, e pode ser encontrada em diversos contextos, como finanças, economia, meteorologia e muitos outros.

Embora as médias móveis sejam consideradas uma técnica mais antiga, elas mantêm sua relevância, especialmente na análise técnica em finanças. Na análise técnica, os dados de preços de ativos financeiros, como ações, são frequentemente tratados como séries temporais. Aqui, as médias móveis são empregadas como uma ferramenta para suavizar flutuações de curto prazo, destacando padrões de tendência mais significativos.

2.5 LPPL(*Log-Periodic Power Law*)

O instrumento de pesquisa adotado neste estudo fundamenta-se em uma teoria abrangente sobre *crashes* financeiros e instabilidades no mercado de ações, previamente desenvolvida em diversos trabalhos. Essa teoria destaca a presença de feedbacks positivos tanto nos mercados de ações quanto na economia em geral. O feedback positivo, dife-

rentemente de uma simples tendência, implica em uma amplificação transitória de uma tendência existente, como exemplificado pelos retornos crescentes.

Estes feedbacks positivos, segundo Zhou e Sornette (2006), desempenham um papel crucial no surgimento de bolhas especulativas. A noção de cooperatividade, que envolve a interação e imitação entre investidores, contribui para um comportamento coletivo assemelhado a um fenômeno de multidão. Esse fenômeno é formalmente expresso pela equação LPPL (*Log Periodic Power Law*), desenvolvida pelos mesmos autores em trabalhos anteriores.

A abordagem log-periódica, conforme introduzida por Zhou e Sornette (2006), é relativamente recente, começando a ser aplicada a dados reais em 1991. Essa metodologia foi escolhida para o estudo devido à sua novidade e confiabilidade como método de previsão. Inicialmente utilizada na previsão de falhas em tanques de pressão, foguetes e satélites, essa abordagem foi posteriormente estendida a terremotos e, crucialmente para este estudo, a grandes *crashes* financeiros.

Sornette (2009) destaca a similaridade entre comportamentos extremos em diferentes contextos, como tanques de alta pressão, falhas sísmicas e mercados turbulentos, todos apresentando potencial para rupturas, tremores e colapsos. A analogia entre terremotos e pontos críticos no mercado de ações é mencionada, destacando a ideia de que o mercado pode atingir pontos críticos onde um comportamento normal explode para níveis extremos.

O modelo LPPL, proposto por Sornette e Johansen (2001), incorpora a presença de dois tipos de agentes de mercado: aqueles com expectativas racionais e os chamados *noise traders*, que agem de maneira irracional e contribuem para o desenvolvimento de bolhas financeiras. O modelo destaca a organização desses agentes em redes, onde suas decisões de compra ou venda dependem das ações de outros negociantes e influências externas, introduzindo assim a noção de feedbacks positivos.

Essencialmente, o LPPL é um modelo que visa definir e mensurar bolhas especulativas, demonstrando eficácia na monitorização dessas bolhas e na previsão de *crashes* em ativos (Bocart; Bastiaensen; Cauwels, 2011). A variável crucial para modelar o comportamento dos preços antes de um *crash* é a taxa $h(t)$, que representa a probabilidade por unidade de tempo de ocorrência de um *crash*, dada a sua não ocorrência até o momento. Essa taxa quantifica a probabilidade de uma proporção significativa de agentes assumir uma posição de venda simultaneamente, o que o mercado não conseguirá satisfazer a menos que os preços caiam substancialmente (Geraskin; Fantazzini, 2020).

$$y_t = A + B(t_c - t)^\beta \{1 + C \cos(\omega \log(t_c - t) + \phi)\} \quad (2.5.1)$$

em que:

$y_t > 0$ é o preço(índice), no momento t ;

$A > 0$ é o valor que y_t teria se a bolha durasse até o momento crítico t_c ;

$B < 0$ é a diminuição em y_t antes da ocorrência de C ;

C é a magnitude das flutuações em torno do crescimento exponencial;

$t_c > 0$ é o tempo crítico;

$t < t_c$ é qualquer momento na bolha, anterior a t_c ;

β é o expoente da lei de potência de crescimento;

ω é a frequência das flutuações durante o período de bolha;

$0 \leq \phi \leq 2\pi$ é um parâmetro de deslocação.

É um modelo utilizado para descrever a dinâmica de bolhas especulativas nos mercados financeiros. Essa abordagem assume que os preços dos ativos financeiros durante uma bolha especulativa exibem padrões log-periódicos, ou seja, flutuações que se repetem em intervalos de tempo cada vez menores à medida que a bolha se aproxima do colapso (Brée; Joseph, 2013).

Essa análise log-periódica oferece uma ferramenta valiosa para a caracterização e detecção de bolhas financeiras, como sugerido por Sornette e Johansen (2001). Os parâmetros do modelo são interpretados em termos de seu impacto na dinâmica do mercado, proporcionando insights sobre a natureza das bolhas e possíveis *crashes*.

Para ilustrar a aplicação prática do modelo LPPL em eventos históricos, apresentamos a seguir gráficos que destacam sua relevância na detecção de *crashes*.

Gráficos de simulação:

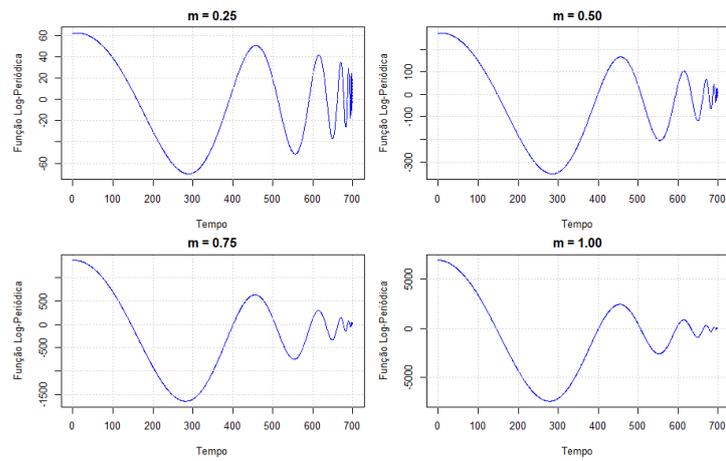


Figura 2.5.1: Simulação do m

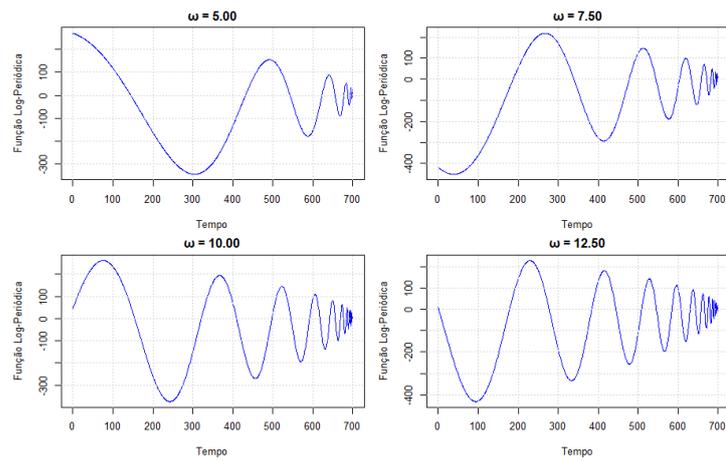


Figura 2.5.2: Simulação do ω

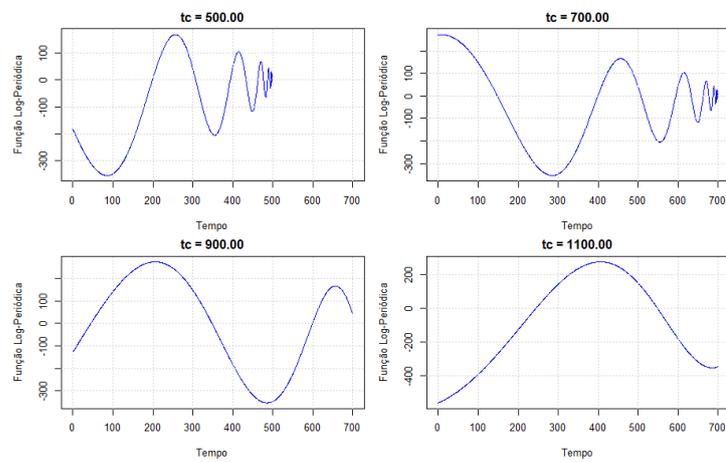


Figura 2.5.3: Simulação do t_c

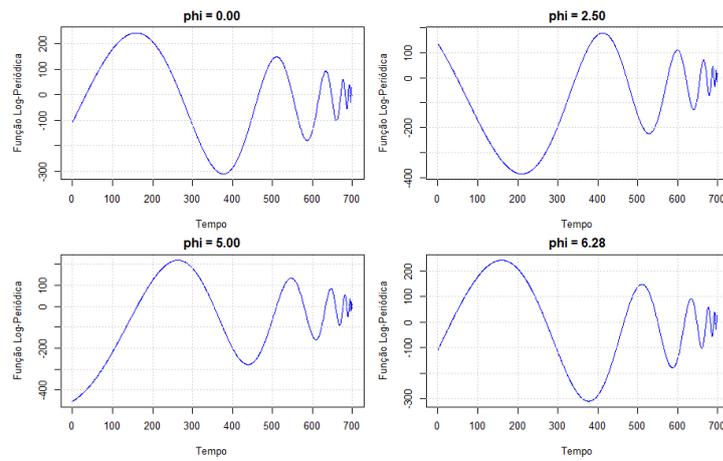


Figura 2.5.4: Simulação do ϕ

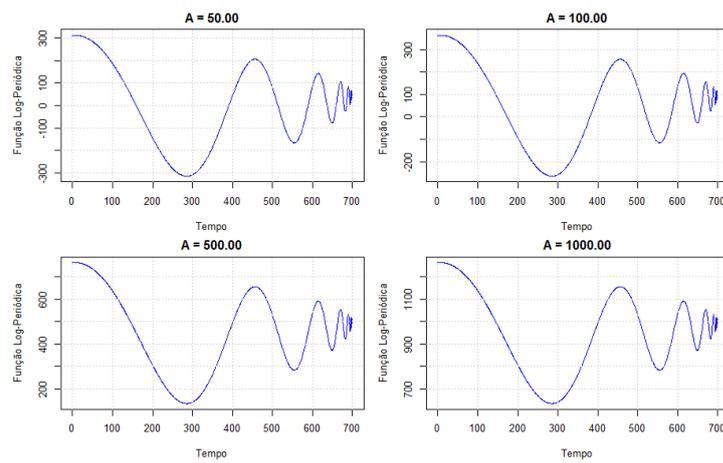


Figura 2.5.5: Simulação do parâmetro A

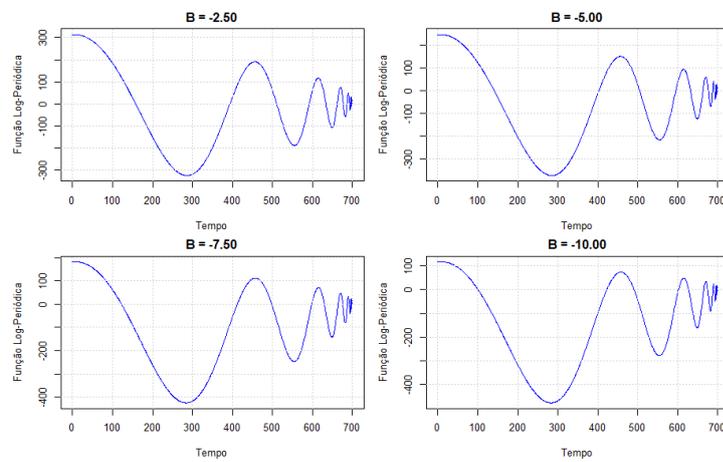


Figura 2.5.6: Simulação do parâmetro B

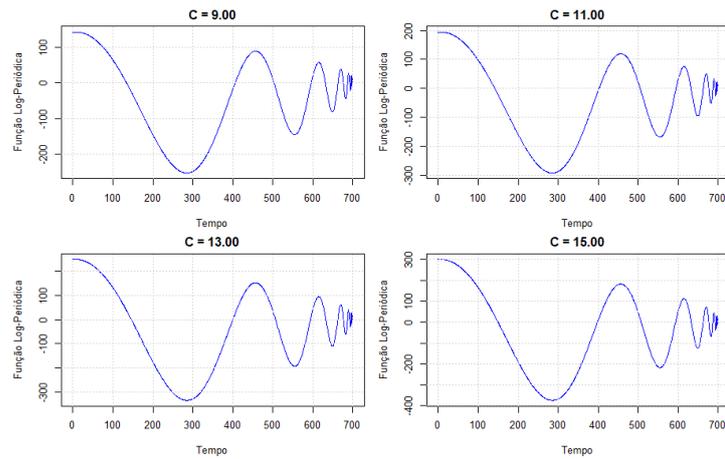


Figura 2.5.7: Simulação do parâmetro C

Os parâmetros utilizados foram $m = 0.5$, $\omega = 6$, $\phi = 1.5$, $A = 11$, $B = -4$, $C = 14$, e $t_c = 700$. Ao variar o parâmetro m , é possível observar uma mudança na forma da onda, afetando tanto a amplitude quanto a frequência das oscilações. Isso ocorre porque m está diretamente relacionado ao fator multiplicativo do cosseno na equação e também atua como o expoente de um fator não oscilatório.

O parâmetro ω influencia a frequência das oscilações na forma de onda, onde valores mais altos resultam em mais oscilações durante o período amostrado. Por outro lado, o parâmetro t_c determina o ponto de término do cálculo da forma de onda. Um t_c maior implica em uma observação mais longa na análise, sendo crucial calibrar esse valor corretamente para garantir que a expressão da onda represente adequadamente uma bolha.

O parâmetro ϕ controla o deslocamento ao redor do eixo inferior, ajustando o início e o término da forma de onda. Este parâmetro assume valores entre 0 e 2π , representando uma completa inversão de fase na onda.

Os parâmetros A , B , e C desempenham papéis específicos na função. O A define o valor da função ao término da simulação, B controla a força do fator exponencial e C é a amplitude das oscilações senoidais. Alterações nesses parâmetros afetam diretamente a amplitude, frequência e forma geral da onda.

2.6 Regressão Não Linear

A regressão não linear é uma extensão da regressão linear, que assume uma relação linear entre a variável independente e a variável dependente. Em muitos casos, os fenômenos do mundo real não podem ser adequadamente descritos por modelos lineares.

Portanto, a regressão não linear é utilizada quando a relação entre as variáveis é melhor representada por uma função não linear (Bates; Watts, 1988).

O modelo de regressão não linear é geralmente expresso por uma função matemática que inclui parâmetros a serem estimados. A forma específica da função dependerá da natureza dos dados e do problema em estudo. A equação típica de um modelo de regressão não linear é:

$$y = f(x, \beta) + \varepsilon \quad (2.6.1)$$

em que:

- y é a variável dependente,
- x é a variável independente,
- β representa os parâmetros do modelo,
- $f(\cdot)$ é a função não linear que descreve a relação entre x e y ,
- ε é o termo de erro que captura a variação não explicada.

Estimação de Parâmetros

A estimação dos parâmetros do modelo é geralmente realizada por métodos de otimização. O objetivo é encontrar os valores dos parâmetros que minimizam a diferença entre os valores observados e os valores previstos pela função $f(\cdot)$. Métodos comuns incluem o método dos mínimos quadrados não lineares e algoritmos de otimização numérica (Gallant, 2009).

Exemplos de Funções Não Lineares

1. Modelo Exponencial:

$$y = \beta_0 e^{\beta_1 x} + \varepsilon$$

2. Modelo Logístico:

$$y = \frac{1}{1 + e^{-(\beta_0 + \beta_1 x)}} + \varepsilon$$

3. Modelo Quadrático:

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \varepsilon$$

Diagnósticos e Avaliação do Modelo

Assim como na regressão linear, é importante realizar diagnósticos e avaliações do modelo não linear. Isso inclui verificar a normalidade dos resíduos, a homocedasticidade e a adequação do modelo aos dados (Cook; Tsai, 1985).

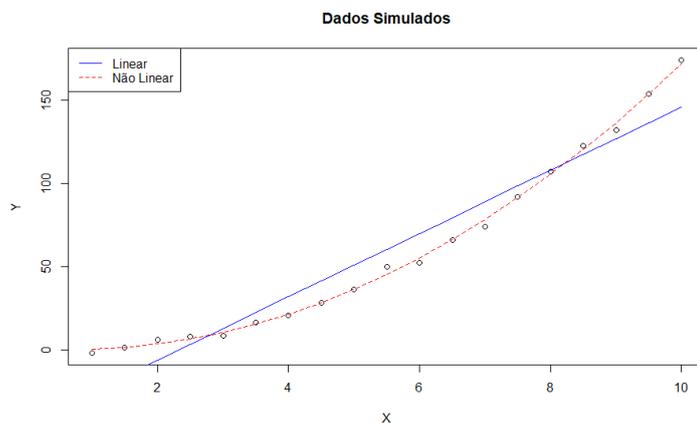


Figura 2.6.1: Comparação entre Regressão Linear e Não Linear

A Figura (2.6.1) é uma representação visual da comparação entre modelos linear e não linear para os dados simulados, ilustrando como cada modelo se ajusta aos padrões subjacentes nos dados. O modelo não linear quadrático parece capturar de maneira mais precisa a relação não linear presente nos dados simulados.

3 Metodologia

A análise inicial do banco de dados prevê o uso de técnicas gráficas, medidas descritivas, modelos de séries temporais e como objetivo principal a aplicação de modelos log-periódicos.

3.1 Conjunto de dados

Os dados a serem utilizados para este estudo foram obtidos por um processo de web scraping realizado no site Yahoo Finanças. Logo, será feita a análise log-periódica antes da ocorrência do crash e após nas ações AMER3.

Os bancos de dados armazenam informações sobre ações e têm as seguintes variáveis:

- Data: Representa a data em que a ação foi negociada.
- Abertura: Preço pelo qual as ações começaram a ser negociadas no início do período.
- Mínimo: Preço mais baixo atingido pela ação durante o período de negociação.
- Máximo: Preço mais alto atingido pela ação durante o período de negociação.
- Fechamento: Preço pelo qual as ações foram encerradas no final do período de negociação.
- Fechamento ajustado: Preço de fechamento da ação após a aplicação de ajustes específicos, como dividendos ou eventos corporativos.
- Volume: Quantidade de ações que foram compradas e vendidas durante o período de negociação.

4 Resultados

Para a aplicação dos testes, foi utilizado o software RStudio, no qual, inicialmente, foram obtidas as estatísticas descritivas, os gráficos e outras análises. Posteriormente, foram feitos ajustes de curvas (*curve fitting*) e, em seguida, foram realizadas regressões não lineares entre as séries de dados das tendências e a função log-periódica.

Neste estudo, uma análise abrangente dos dados da empresa Americanas foi conduzida, com um foco direcionado na série temporal de preços das ações. Os dados foram meticulosamente coletados e abrangem um período considerável, iniciando em 30 de março de 2005 e se estendendo até 23 de junho de 2023. A Figura (4.1) mostrou o comportamento dos preços das ações durante esse período.

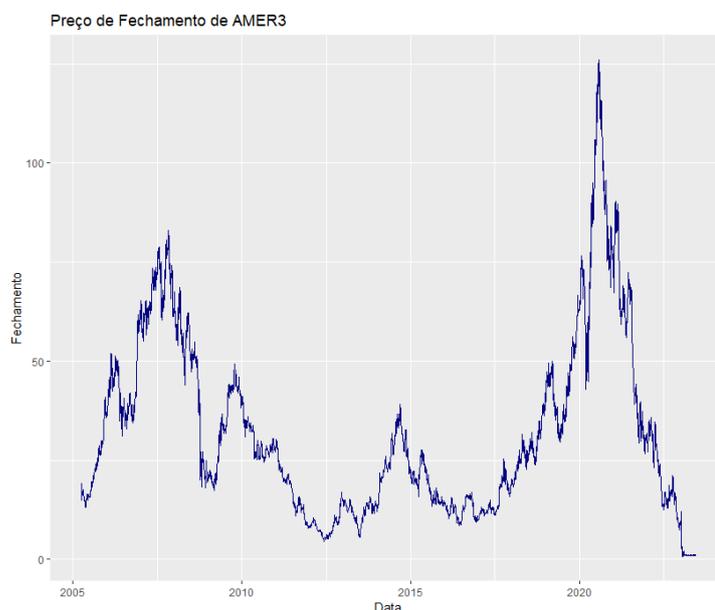


Figura 4.1: Série temporal da AMER3 2005-2023

Os preços mostraram uma tendência geral de aumento ao longo do tempo, com alguns períodos de queda. Após uma análise minuciosa das oscilações dos preços, o foco foi direcionado para a avaliação do volume de transações ao longo do tempo. Observou-se que, em grande parte dos períodos, o volume de transações apresentava uma distribuição relativamente uniforme. No entanto, foram os momentos de acentuada alta e baixa nas ações que impulsionaram significativamente o aumento no número de transações realizadas.

Para uma representação visual dessas observações, foi apresentada a Figura (4.2), que ilustra o volume de transações em relação à data.

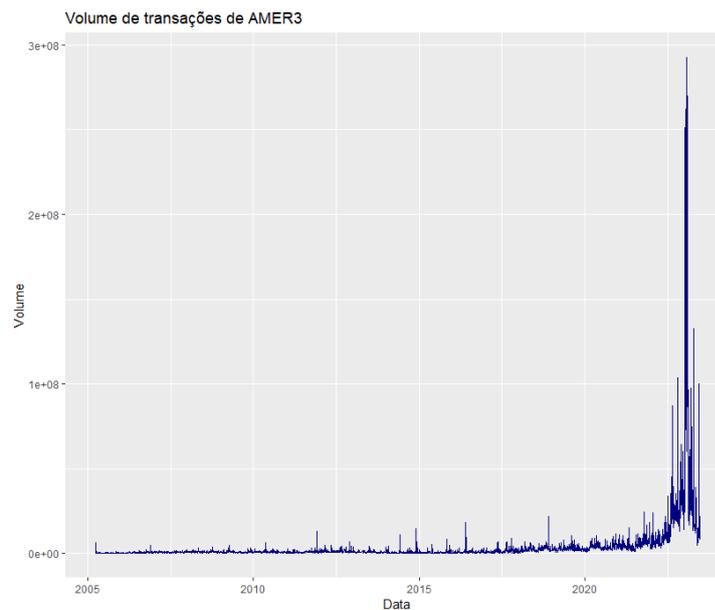


Figura 4.2: Volume de transações da AMER3 2005-2023

Essas oscilações extremas no mercado acionário parecem ter desempenhado um papel crucial na atividade de negociação, atraindo um aumento substancial no volume de transações. Esse padrão de comportamento foi considerado digno de uma análise mais aprofundada, pois sugeria uma conexão notável entre as variações de preços das ações e a atividade de compra e venda no mercado. A compreensão desse fenômeno foi vista como fundamental para investidores e analistas que buscavam tomar decisões informadas e eficazes em relação à empresa Americanas.

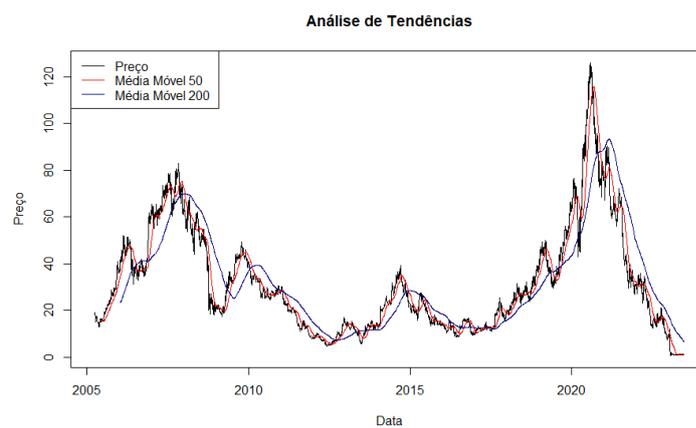


Figura 4.3: Série Temporal AMER3 com médias móveis

A SMA-50 é frequentemente usada para identificar tendências de curto prazo. Sua suavização equitativa ajuda a capturar mudanças recentes nos preços, sendo útil para observar movimentos mais imediatos do mercado.

A SMA-200, por outro lado, é mais voltada para identificar tendências de longo prazo. Ao considerar uma média móvel ao longo de um período mais extenso, ela pode ajudar a filtrar ruídos de curto prazo e fornecer uma visão mais estável da trajetória do ativo.

A utilização de ambas as médias móveis, especialmente o cruzamento entre SMA-50 e SMA-200, é uma estratégia comum. Um cruzamento onde o SMA-50 ultrapassa o SMA-200 pode ser interpretado como um sinal de alta, indicando uma possível inversão da tendência para um viés positivo. Por outro lado, um cruzamento onde o SMA-50 cai abaixo do SMA-200 pode sugerir uma possível inversão para uma tendência de baixa.

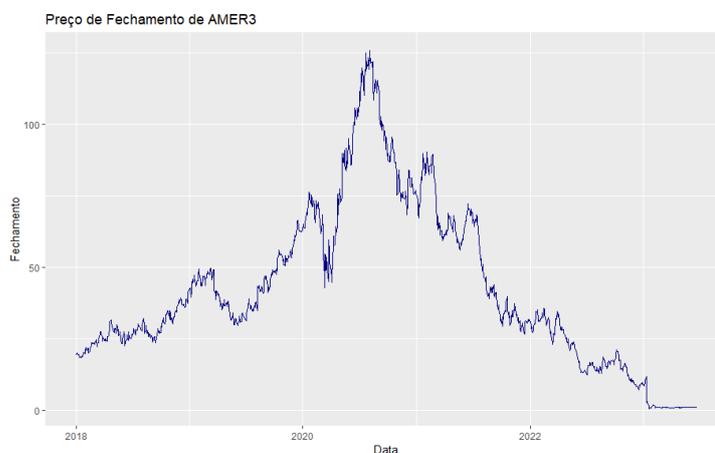


Figura 4.4: Série Temporal AMER3 2018-2023

A série temporal completa de preços foi recortada para o período de 2018 a 2023, uma vez que, durante esse intervalo, observou-se um substancial aumento seguido de uma queda significativa. Essa escolha visou investigar a presença de padrões log-periódicos, uma vez que a dinâmica desse período sugeria similaridades com esse tipo de padrão.

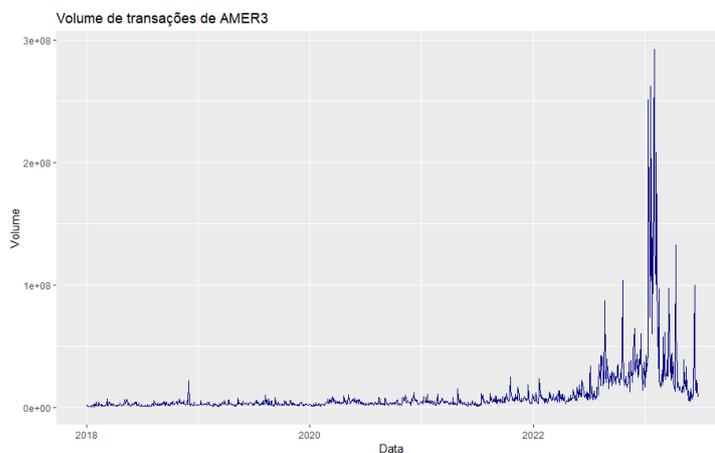


Figura 4.5: Volume de transações da AMER3 2018-2023

Ao realizar o recorte da série em relação ao volume para os anos de 2018 a 2023, foram observadas oscilações no padrão de volume a partir do ano de 2022. Notavelmente, a explosão no número de oscilações ocorreu concomitantemente ao início do declínio nos preços, sugerindo uma possível relação entre as oscilações de volume e a dinâmica de preços.

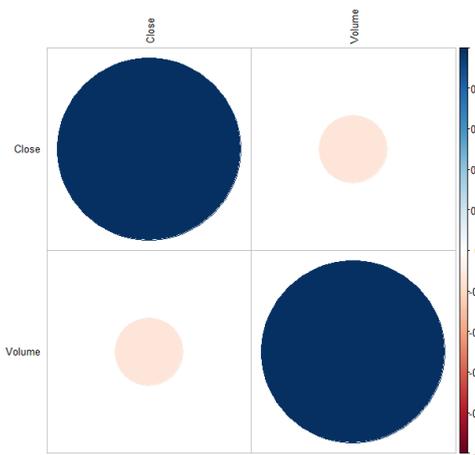


Figura 4.6: Correlação entre preço de fechamento e volume

Foi conduzida uma análise aprofundada da correlação entre as variáveis fechamento e volume, fundamentada na matriz de correlação gerada. A intenção era investigar se havia alguma relação linear significativa entre essas variáveis e, caso existisse, compreender a natureza dessa associação.

Ao examinar a matriz de correlação, foi observado que a diagonal principal estava preenchida com valores 1, o que era esperado, pois representava a correlação de cada variável consigo mesma, sendo sempre perfeita. No entanto, a observação mais intrigante surgiu ao analisar a célula fora da diagonal principal, que exibia um coeficiente de correlação de -0.1394219 .

A presença de um valor não nulo fora da diagonal principal sugeriu uma relação linear entre fechamento e volume. O coeficiente de correlação negativo indicou uma associação inversa entre essas variáveis, sugerindo que, em geral, quando uma variável aumentava, a outra tendia a diminuir.

Entretanto, foi crucial notar que o valor da correlação (-0.1394219) não era muito pronunciado. Isso sugeriu uma correlação fraca entre as variáveis, o que indicou que outros fatores não lineares ou não capturados poderiam estar influenciando a relação entre elas.

Essa observação serviu como ponto de reflexão para futuras investigações e destacou a complexidade subjacente nas interações entre as duas variáveis.

A abordagem adotada para analisar e identificar fenômenos de excesso especulativo e contratempos no contexto financeiro envolveu a aplicação da função LPPL. O objetivo era modelar a complexidade dos preços de ativos durante períodos de flutuações extremas, visando compreender as características temporais associadas a tais fenômenos.

A análise teve início com a determinação dos valores iniciais para os parâmetros da função, selecionados com base em uma avaliação preliminar dos dados. Essa avaliação considerou a possível existência de padrões de crescimento exponencial, oscilações de curto prazo e outros elementos típicos de fenômenos financeiros.

Seguiu-se um processo iterativo de ajuste aos dados observados, utilizando técnicas de otimização para minimizar a discrepância entre os valores reais e as projeções geradas pela função. Essa iteração refinada permitiu adaptar os parâmetros à dinâmica específica dos períodos de interesse.

Para aprimorar a precisão da modelagem, a série temporal foi segmentada em fases distintas, correspondentes aos momentos de excesso especulativo e contratempos. Essa abordagem possibilitou a calibração independente da função em cada fase, reconhecendo as diferentes dinâmicas subjacentes a esses eventos.

Ao buscar a interpretação da presença de movimentos log-periódicos na série temporal, foram realizados recortes seletivos considerando as dificuldades associadas à identificação do momento inicial mais apropriado. A observação de que a forma dos padrões log-periódicos está intrinsecamente ligada ao instante inicial da análise ressaltou a complexidade dessa escolha.

Para mitigar essas complexidades, optou-se por manter o ponto de referência t_c (tempo crítico) em 03 de agosto de 2020, marcado pelo registro do preço de fechamento mais elevado seguido por começo de uma queda. Essa escolha estratégica visou capturar a dinâmica do mercado no ápice da variação de preços, potencialmente caracterizando o início de um movimento log-periódico.

Esse recorte focalizado permitiu uma análise mais aprofundada da dinâmica do mercado ao redor desse ponto temporal crucial, possibilitando uma melhor compreensão dos padrões log-periódicos em contextos específicos. Contudo, foi crucial reconhecer que a interpretação dos resultados continuou sujeita à sensibilidade em relação à escolha do instante inicial, e variações nessa seleção puderam influenciar as conclusões obtidas.

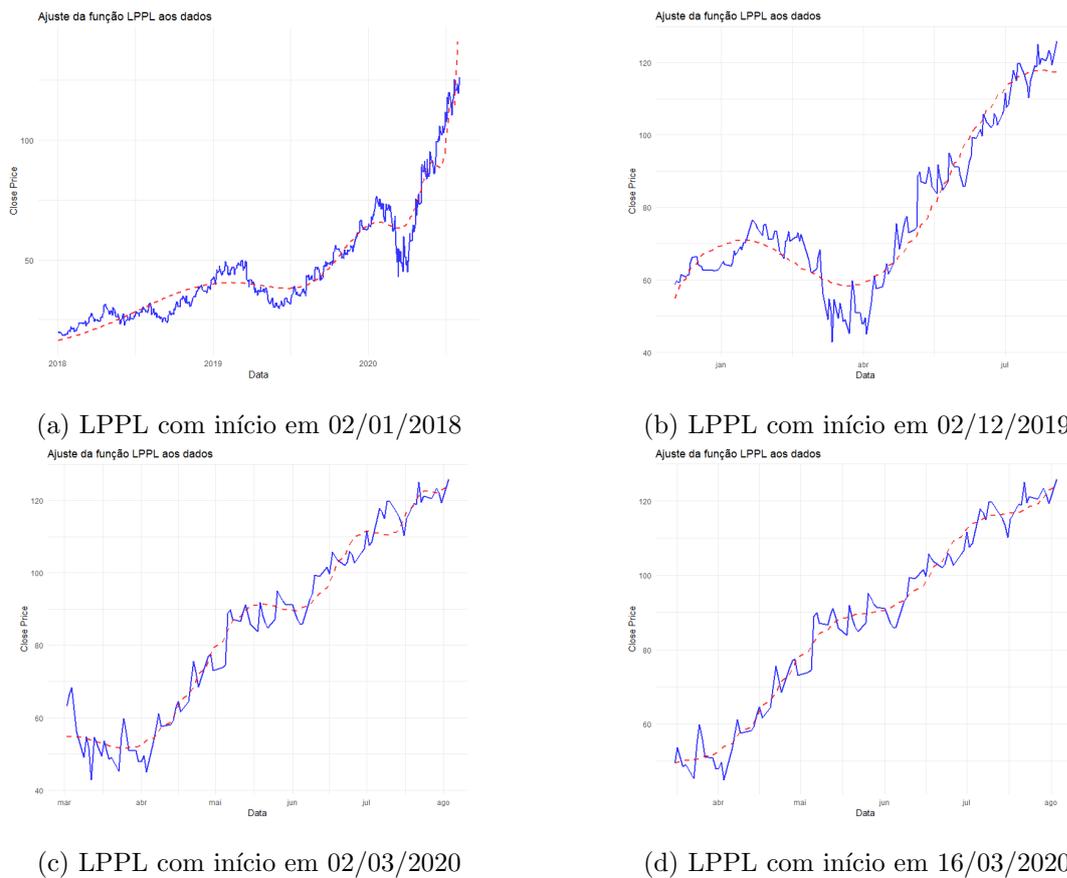


Figura 4.7: LPPL aplicada em diferentes momentos iniciais para captação de bubble

Uma dificuldade notável na análise reside na escolha do momento inicial adequado para identificação dos padrões log-periódicos. A dependência da forma desses padrões em relação ao instante inicial destaca a necessidade de uma abordagem cuidadosa ao selecionar pontos de referência temporais.

As amostras relacionadas às bolhas financeiras revelaram a presença de padrões log-periódicos, indicando oscilações temporais que se ajustam à teoria da Lei de Potência Logarítmica (LPPL). A identificação desses padrões logarítmicos proporcionou insights valiosos sobre a dinâmica dos mercados durante períodos de crescimento excessivo, sugerindo a presença de comportamentos não-lineares característicos de fenômenos de bolha.

No entanto, é crucial mencionar que, devido ao tamanho variado das amostras, a comparação direta entre diferentes bolhas pode ser prejudicada. A variação nos tamanhos amostrais pode ter impacto na robustez das conclusões, destacando a importância de considerar a influência do tamanho da amostra nas análises.

Ao empreender a análise em busca da presença de movimento log-periódico nas séries temporais referentes às antibolhas, deparou-se com a complexidade em determinar um momento final adequado. Diante dessa incerteza, optou-se por manter o tempo crítico

constante em 03/08/2020.

Para contornar a dificuldade em encontrar um momento final preciso, adotou-se a estratégia de variar o tempo final em diferentes intervalos pós 03/08/2020. Esta abordagem visou investigar a possível presença de padrões log-periódicos em diferentes períodos após o ponto crítico, reconhecendo a influência significativa do instante inicial na dinâmica observada.

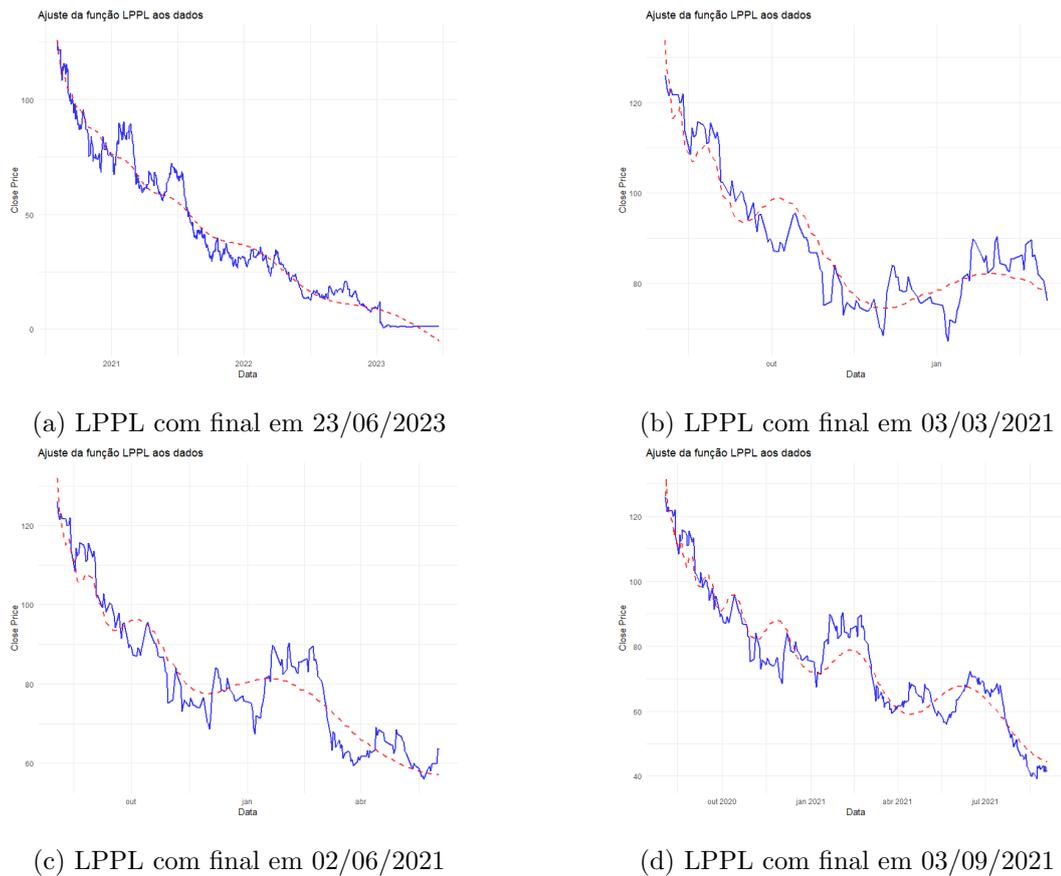


Figura 4.8: LPPL aplicada em diferentes momentos finais para captação de anti-bubble

Uma consideração substancial na análise reside na escolha criteriosa do momento final para a identificação de padrões log-periódicos. A sensibilidade da forma desses padrões em relação ao instante final enfatiza a necessidade de uma abordagem cuidadosa na seleção dos pontos temporais de referência.

As amostras relacionadas às antibolhas financeiras revelaram indícios notáveis de padrões log-periódicos, sugerindo oscilações temporais. A detecção desses padrões logarítmicos ofereceu perspectivas valiosas sobre a dinâmica dos mercados durante períodos de declínio acentuado, indicando comportamentos não-lineares distintivos associados a fenômenos de antibolha.

É crucial observar que, devido à variabilidade nos tamanhos das amostras, a comparação direta entre diferentes antibolhas pode ser prejudicada. As disparidades nos tamanhos amostrais podem influenciar a robustez das conclusões, sublinhando a importância de levar em consideração a influência do tamanho da amostra nas análises.

Ao conduzir a análise para detectar movimento log-periódico nas séries temporais relacionadas às antibolhas, foi enfrentada a complexidade de determinar um momento final apropriado. Diante dessa incerteza, adotou-se a estratégia de manter o tempo crítico constante em 03/08/2020.

Para superar a dificuldade em especificar um momento final preciso, optou-se por variar o tempo final em diferentes intervalos pós 03/08/2020. Essa abordagem teve como objetivo explorar a possível presença de padrões log-periódicos em distintos períodos após o ponto crítico, reconhecendo a influência significativa do instante inicial na dinâmica observada. Esses achados sugerem uma potencial característica de antibolha nas séries temporais analisadas, indicando uma fase de declínio associada a comportamentos não-lineares identificados pela teoria LPPL.

5 Conclusão

Este estudo investigou a evolução da série temporal das ações da Americanas, visando detectar possíveis padrões não aleatórios às vésperas da sua quebra registrada em 20 de Janeiro de 2023. Esse *crash* interrompeu uma trajetória ascendente consistente de preços que alimentava otimismo e expectativas positivas em relação ao desempenho futuro das suas ações. Para o mercado em geral essa trajetória de crescimento foi interrompida por uma reviravolta imprevista e surpreendente, motivada pela descoberta de inconsistências da ordem de bilhões em seu balanço contábil. Como consequência dessa crise, a trajetória foi revertida para um movimento de queda abrupta que se contrapôs às previsões anteriores, sublinhando a ideia de imprevisibilidade intrínseca ao mercado financeiro. Esse fenômeno inesperado destaca a complexidade e a natureza volátil do ambiente financeiro, reforçando a necessidade de estratégias analíticas avançadas para decifrar seus mecanismos intrincados.

Ao explorar o número de transações na tentativa de encontrar correlações explicativas para essa mudança nos preços, foi encontrada uma correlação fraca e negativa. Esse resultado sugere a presença de variáveis ainda não totalmente compreendidas ou a influência de fatores externos imprevisíveis, ressaltando a complexidade dos eventos que moldaram a trajetória das ações. A análise da série histórica não descarta a possibilidade de existência de um padrão log-periódicos na período da bolha, seguido de uma queda exponencial nos preços na fase anti-bolha.

De fato, a aplicação de modelos log-periódicos é controversa, uma vez há possibilidade de se encontrar padrões espúrios e problemas na replicabilidade do fenômeno. No entanto, este estudo mostrou que é possível alertar os investidores sobre um *crash* iminente, como o da Americanas, em coerência com outros estudos sobre esse mesmo tema. A aplicação desse modelo nessa situação particular representa uma oportunidade para compreender melhor e antecipar movimentos não aleatórios do mercado, oferecendo insights cruciais para tomadas de decisões. Por isso, este estudo contribui para documentar a evolução da análise de séries temporais financeiras, em especial, destacando a relevância da LPPL na análise de comportamentos complexos em séries de tempo.

Referências

- BALLOU, R. H. *Gerenciamento da Cadeia de Suprimentos-: Logística Empresarial*. [S.l.]: Bookman editora, 2009.
- BATES, D. M.; WATTS, D. G. Nonlinear regression: iterative estimation and linear approximations. *Nonlinear regression analysis and its applications*, Wiley Hoboken, NJ, p. 32–66, 1988.
- BOCART, F.; BASTIAENSEN, K.; CAUWELS, P. The 1980s price bubble on (post) impressionism. *The Association for Cultural Economics International Working Paper Series. AWP-03-2011. pdf (culturaleconomics.org)*, Citeseer, 2011.
- BOLZANI, I. "Americanas: relatório aponta mais de R40bilhões".2023.*Disponível em : jö*. Acessado em: 13 de junho de 2023.
- BRÉE, D. S.; JOSEPH, N. L. Testing for financial crashes using the log periodic power law model. *International review of financial analysis*, Elsevier, v. 30, p. 287–297, 2013.
- CASELANI, C. N. A irracionalidade das bolhas. RAE Publicações, 2003.
- COOK, R. D.; TSAI, C.-L. Residuals in nonlinear regression. *Biometrika*, Oxford University Press, v. 72, n. 1, p. 23–29, 1985.
- EHLERS, R. S. Análise de séries temporais. 2009. *Departamento de Estatística, Universidade Federal do Paraná*, 2009.
- GALLANT, A. R. *Nonlinear statistical models*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2009.
- GERASKIN, P.; FANTAZZINI, D. Everything you always wanted to know about log-periodic power laws for bubble modeling but were afraid to ask. *New Facets of Economic Complexity in Modern Financial Markets*, Routledge, p. 30–55, 2020.
- JOHANSEN, A.; SORNETTE, D. Financial"anti-bubbles": Log-periodicity in gold and nikkei collapses. *International Journal of Modern Physics C*, World Scientific, v. 10, n. 04, p. 563–575, 1999.
- SHILLER. *Exuberância irracional*. [S.l.]: Editora Makron Books, 2000.
- SORNETTE, D. Critical market crashes. *Physics reports*, Elsevier, v. 378, n. 1, p. 1–98, 2003.
- SORNETTE, D. *Why stock markets crash: critical events in complex financial systems*. [S.l.]: Princeton university press, 2009.

SORNETTE, D.; JOHANSEN, A. Significance of log-periodic precursors to financial crashes. *Quantitative Finance*, IOP Publishing, v. 1, n. 4, p. 452, 2001.

TUBINO, D. F. *Planejamento e controle da produção: teoria e prática* . [S.l.]: Editora Atlas SA, 2000.

VOGEL, H. L. *Financial market bubbles and crashes: features, causes, and effects*. [S.l.]: Springer, 2018.

ZHOU, W.-X.; SORNETTE, D. Is there a real-estate bubble in the us? *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Elsevier, v. 361, n. 1, p. 297–308, 2006.