

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
INSTITUTO DE FÍSICA

CAIO MARTINS DE CARVALHO

**MODELAGEM, CONSTRUÇÃO E CARACTERIZAÇÃO
FÍSICA DE ESTRUTURAS BASEADAS EM
SUPERFÍCIES MÍNIMAS TRIPLAMENTE PERIÓDICAS**

BRASÍLIA

14 DE DEZEMBRO DE 2023

Caio Martins de Carvalho

**Modelagem, construção e caracterização física de
estruturas baseadas em superfícies mínimas triplamente
periódicas**

Trabalho de conclusão de curso apresentado
ao Instituto de Física da Universidade de
Brasília como parte dos requisitos necessários
à obtenção do título de Bacharel em Física.

Orientador: Luiz Roncaratti

Universidade de Brasília – UnB

Instituto de Física

Brasília

14 DE DEZEMBRO DE 2023

Resumo

Este trabalho teve como foco a caracterização de superfícies mínimas, mais especificamente as TPMS (Superfícies Mínimas Triplamente Periódicas).

A metodologia envolveu a geração de modelos tridimensionais de TPMS usando ferramentas de software, seguida da impressão 3D via impressoras de resina desses modelos. Foram confeccionadas 15 peças cilíndricas de raio $r = 38,1$ mm e altura 101,6 mm a partir de 15 TPMS: G', Schwarz P, D', I-WP, FR-D, Lidinoid, Fisher-Koch C(S), Schwarz D, Fisher-Koch S, Fisher-Koch C(S), Fisher-Koch Y, Gyroid, OCT-O, K e NEOVIUS. Todas as peças possuem porosidade e densidade de área iguais.

Por conseguinte, foram estimadas as permeabilidades das TPMS a partir de um experimento de vazão com água, onde a peça foi inserida no aparato experimental e submetida a uma diferença de pressão de água. O regime estimado para o experimento foi o regime de Forchheimer. Dessa maneira, foi possível estimar também a permeabilidade inercial das TPMS.

Por fim, foi confrontada a conjectura de que as permeabilidade e permeabilidade inercial dependem da TPMS escolhida, além da porosidade e densidade de área. O resultado encontrado foi que as permeabilidades não dependem da TPMS em si, mas de grupos formados pelas mesmas, ou seja, dependem possivelmente de um parâmetro topológico que, para um grupo de TPMS, é idêntico. Os grupos de TPMS que tiveram permeabilidade semelhante foi: G', Schwarz P, D', I-WP, FR-D, Lidinoid, Fisher-Koch C(S), Schwarz D, Fisher-Koch S. Já para a permeabilidade inercial, tivemos 2 grupos com o mesmo valor: (G', D', Schwarz D, I-WP, Lidinoid, Fisher-Koch S) e (FR-D, Fisher-Koch C(S), Schwarz P).

Palavras-chaves: superfícies mínimas, superfícies mínimas triplamente periódicas, permeabilidade, porosidade.

Sumário

1	INTRODUÇÃO	5
1.1	Superfícies mínimas	6
1.2	Periodicidade e TPMS	7
1.3	TPMS e Aplicações	8
1.4	Permeabilidades e regimes	10
1.5	Conjectura e porosidade	11
2	PROBLEMA	13
3	HIPÓTESE	15
4	OBJETIVOS	17
5	METODOLOGIA	19
5.1	Modelagem	19
5.1.1	1º Passo	20
5.1.2	2º passo	20
5.1.3	3º passo	24
5.2	Medições	24
5.3	Processo	25
6	RESULTADOS E DISCUSSÃO	29
6.1	Identificação do regime de escoamento	29
6.2	Permeabilidade e permeabilidade inercial	31
6.3	Grupos de semelhança e conjectura	37
7	CONCLUSÃO	39
	REFERÊNCIAS	41
	APÊNDICES	43
	APÊNDICE A – EQUAÇÃO DAS SUPERFÍCIES MÍNIMAS	45
	ANEXOS	47
	ANEXO A – PEÇAS DO APARATO EXPERIMENTAL	49

1 Introdução

As superfícies mínimas são objetos matemáticos intrigantes que surgem no contexto da teoria variacional voltada para geometria diferencial, e têm aplicações em diversas áreas, desde a física teórica até a biologia. Uma superfície mínima é caracterizada pela propriedade de possuir uma curvatura total nula, devido a soma local das curvaturas principais serem iguais a zero. Estas superfícies representam configurações de menor energia, sendo encontradas naturalmente em fenômenos físicos que buscam minimizar a energia. Um exemplo clássico de uma superfície mínima é o catenoide, uma forma tridimensional que surge como uma solução para a equação das superfícies mínimas. É conhecido por sua estabilidade única e propriedades geométricas intrínsecas. A Figura 1 mostra o catenoide, onde é possível ver que o mesmo é uma superfície de revolução gerada pela catenária [13][8][10].

As aplicações diversas das superfícies mínimas já podem ser observadas no catenoide, uma vez em que desempenha um papel crucial em fenômenos físicos, como em estudos de bolhas de sabão e interfaces de fluidos. Essas propriedades surgem de sua natureza mínima relacionada à capacidade do catenoide de formar uma membrana extremamente fina, buscando um equilíbrio entre a tensão superficial e a pressão interna [6].

Para aferir tais propriedades dessas superfícies, é possível seguir duas abordagens distintas: a experimental e a computacional. A experimental se baseia na confecção de peças a partir das superfícies mínimas, de modo que sejam submetidas a experimentos específicos. Nessa vertente, uma propriedade física de interesse é a permeabilidade, pois ditará quantitativamente o quão resistiva a superfície (em peça) ao regime de pressão de um fluido perpassando pelo seu interior.

Esta seção se concentrará em abordar tópicos importantes para a compreensão da aplicação de TPMS (Superfícies Mínimas Triplamente Periódicas) voltadas para a confecção de peças para estimar-se a permeabilidades das mesmas. A ideia deste trabalho é verificar, como conjectura, se a permeabilidade de peças - quando expostas as mesmas condições e possuindo porosidade e densidade de área iguais - geradas a partir de TPMS dependem da TPMS em si.

As subseções 1.1 1.2 1.3 se concentrarão em compreender as TPMS, bem como suas diversas aplicações. As demais seções irão focar na construção da permeabilidade e como realizar uma boa estimativa da mesma. Também irão introduzir parâmetros importantes para a descrição da permeabilidade.

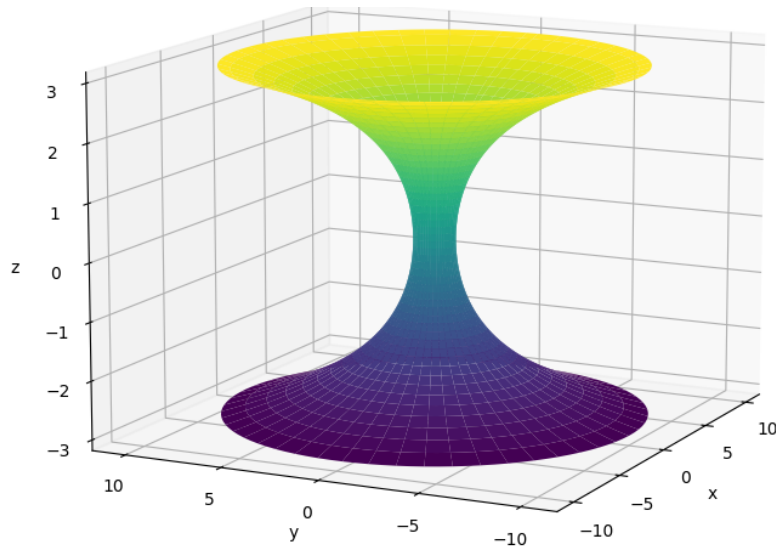


Figura 1 – Imagem computacional do catenoide.

1.1 Superfícies mínimas

Segundo a contribuição de Lagrange, a aplicação do princípio variacional à funcionais permitiu o desenvolvimento de uma abordagem primordial no desenvolvimento do estudo das superfícies mínimas. Sua abordagem matemática permitiu identificar critérios específicos remetentes a geometria de superfícies por meio da construção matemática que gerou a equação de Euler-Lagrange. A demonstração detalhada de como essa construção pode ser feita na prática a fim de obter a equação característica para as superfícies mínimas se encontra no Apêndice A. Abaixo se encontra o resultado:

$$\nabla \cdot \left[\frac{\nabla f}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} \right] = 0 \quad (1.1)$$

A equação acima é a forma diferencial mais compacta da equação das superfícies mínimas. Representa um forte resultado que nos diz se um funcional f pode ser candidato a gerar uma superfície mínima. É válido ressaltar que existem limitações nessa formulação, e que apenas com o reforço de teoremas topológicos específicos podemos formular a teoria completa. Contudo, ao que tange o escopo desse trabalho, não será necessário entrar em tal mérito [13] [12].

Logo após a descoberta dessa equação, o matemático francês Pierre Meusnier apontou duas soluções concretas para a equação, sendo elas o plano e o catenoide. É relativamente fácil enxergar que as equações dessas soluções satisfazem a equação minimizante, contudo, esses exemplos clássicos desempenharam um papel crucial na consolidação da área. A partir deles, Meusnier pode constatar que para compor uma superfície mínima é necessário minimizar localmente sua curvatura ao longo de toda sua extensão [12].

1.2 Periodicidade e TPMS

Outro aspecto fundamental das superfícies é a sua periodicidade, que se resume em apresentar repetições regulares de padrões em várias direções, o que lhes confere uma simetria especial. Lembrando que nem toda superfície mínima apresenta periodicidade, como o catenoide. Continuando, uma das propriedades distintivas das superfícies periódicas é a presença de pontos singulares chamados pontos de ramificação, nos quais a estrutura da superfície se conecta de forma não suave. Esses pontos são fundamentais para a identificação da periodicidade de uma superfície mínima. Indo além, podemos diferenciar a periodicidade de 3 maneiras: a periodicidade nas 3 direções espaciais (TPMS), apenas em duas (DPMS) ou somente em uma (SPMS). Em 1834, o matemático Heinrich Scherk encontrou as primeiras soluções não triviais periódicas para superfícies mínimas, as quais ficaram conhecidas por "Scherk's surfaces", o que configurou grande importância pois constatou a existência de soluções periódicas para a área. A primeira superfície de Scherk foi uma duplamente periódica (DPMS) cuja solução é: [13] [17] [18]

$$f_{(x,y)} = \log\left(\frac{\cos(x)}{\cos(y)}\right) \quad (1.2)$$

Sua dupla periodicidade ao longo do plano \mathbb{R}^2 fica evidente quando olhamos para o domínio dessa função na Figura 2, se assemelhando a um tabuleiro de xadrez.

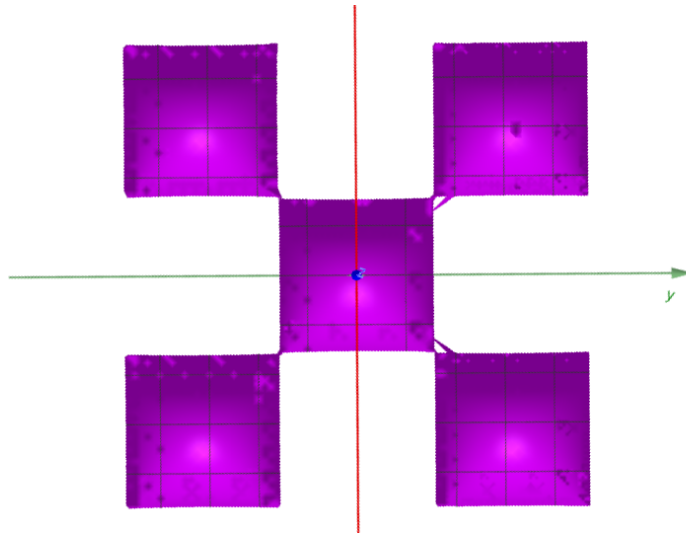


Figura 2 – Domínio da superfície de Scherk ao longo do plano (x, y) para $\{(-\frac{3}{2}\pi \geq x \geq \frac{3}{2}\pi), (\frac{3}{2}\pi \geq y \geq \frac{3}{2}\pi)\}$

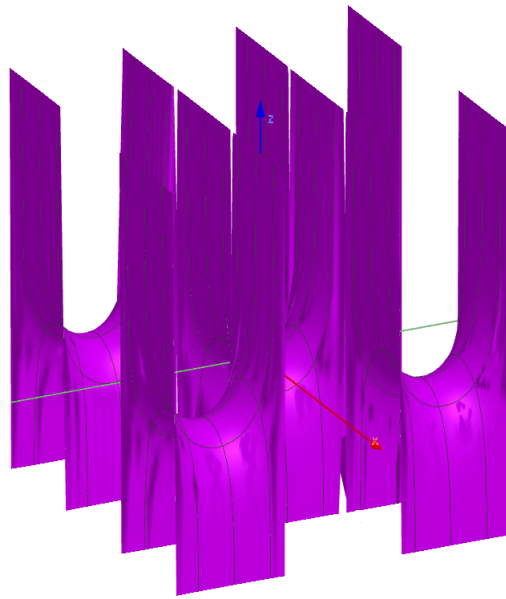


Figura 3 – Superfície de Scherk duplamente periódica.

1.3 TPMS e Aplicações

As TPMS são, como definido anteriormente, superfícies mínimas que possuem comportamento periódico nas 3 direções espaciais e que preenchem o espaço sem deixar lacunas. Esse comportamento permite enxergar a superfície como se fosse uma célula unitária delimitada por faces de um cubo fictício. A primeira TPMS encontrada foi a superfície de Schwarz P., Figura 4. Fica mais claro constatar sua periodicidade quando alocamos algumas células unitárias uma do lado da outra, e, além disso sua fórmula geradora é composta por uma soma de funções periódicas [11] [17] [18].

Exemplos de TPMSs como a Schwarz P. abriram portas para a caracterização de superfícies em diversas áreas, uma vez em que são observadas propriedades únicas. Na cristalografia, por exemplo, é estudada a estrutura cristalina de materiais, onde essa estrutura é caracterizada por uma repetição periódica de células unitárias, que, em alguns casos, coincidem em serem superfícies mínimas também, como é o caso das superfícies de Wulff. Tais superfícies minimizam a energia de uma partícula cristalina, sujeita a certas restrições geométricas, e também minimizam a área [15] [14].

Outro exemplo é a aplicação das TPMS no estudo da estrutura e função das membranas biológicas, como as membranas celulares e organelas, por exemplo. Ao aplicar os princípios das TPMS, é possível verificar as propriedades físicas e a geometria dessas membranas, visto que as mesmas se assemelham aos modelos matemáticos descritos pelas TPMS. Assim, é possível estimar a integridade e limites das mesmas [8].

Além da Biologia, as TPMS também estão presentes na arquitetura. O foco é na forma e na geometria das estruturas como aspectos essenciais a serem considerados

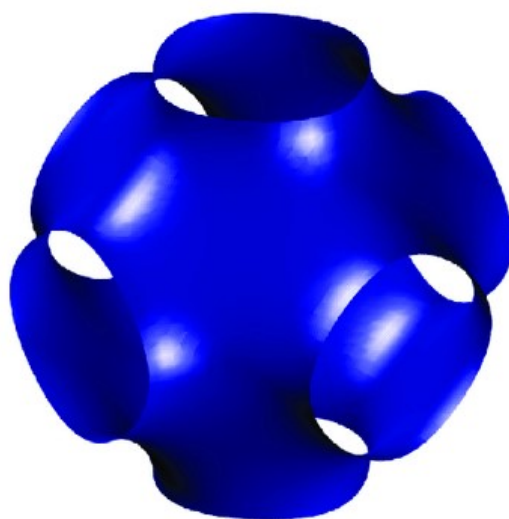


Figura 4 – Célula unitária da Superfície de Schwarz.

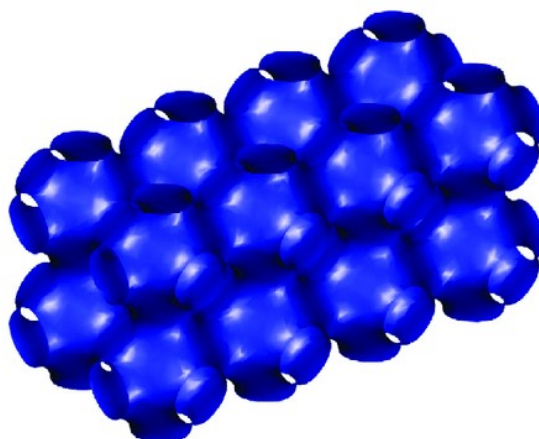


Figura 5 – Modelo conjunto de células unitárias da Superfície de Schwarz.

durante o processo de um projeto arquitetônico, TPMS oferecem, em sua abordagem matemática, a facilidade para a criação de formas esteticamente agradáveis e estruturalmente eficientes, além de reduzir seu tempo gasto em processos criativos e proporcionar construções com menor uso de material [5].

Já na engenharia, as TPMS podem ser usadas para modelar a estrutura e as propriedades de materiais como esponjas, membranas e catalisadores. Tais estruturas podem ser projetadas para ter propriedades específicas, como alta área superficial, alta permeabilidade ou alta seletividade. A compreensão das TPMS permite a criação de materiais com estruturas mais eficientes e funcionalidades específicas. Essa aplicação será bastante explorada ao longo desse trabalho [10] [7].

1.4 Permeabilidades e regimes

A permeabilidade é uma propriedade física que mensura quantitativamente a capacidade de uma estrutura ou meio poroso conduzir o fluxo de fluido, dependendo da combinação de porosidade, tortuosidade, tamanho dos poros e interconectividade. [19]

Uma aproximação comum para estimar quantitativamente a permeabilidade é usar a Lei de Darcy:

$$-\frac{dP}{dx} = \frac{\mu \cdot v}{k} \quad (1.3)$$

Onde k é a permeabilidade, dP/dx o gradiente de pressão, μ a viscosidade do fluido e v a velocidade global do fluido. Ao ser integrada dos dois lados e feita a substituição $v = Q/A$, em que Q é a vazão, e A a área da secção transversal a peça, tem-se:

$$Q = -\frac{k \cdot A \cdot \Delta P}{\mu \cdot L} \quad (1.4)$$

Essa equação diz que aplicada uma diferença de pressão nas extremidades de uma peça porosa de comprimento L , a mesma irá apresentar resistência para a passagem do fluido. Contudo, essa relação linear entre permeabilidade e vazão é vista como uma aproximação de primeira ordem. Estudos apontam que a lei de Darcy não é suficiente para determinar a permeabilidade pois seu cálculo compreende apenas forças de viscosidade, ou seja, propriedades intrínsecas do fluido. Outra maneira de entender a aproximação é pensar que ela abrange apenas uma visão local do problema. [1]

Tendo em vista a limitação da lei de Darcy, é necessário entender até que ponto essa limitação impacta significativamente no cálculo da permeabilidade. Entende-se que sua limitação está ligada ao regime sobre o qual o fluido está submetido. Tal regime pode ser identificado pelo cálculo do número de Reynolds (Re):

$$Re = \frac{\text{Forças inerciais}}{\text{Forças de viscosidade}} = \frac{\rho \cdot \nu \cdot D}{\mu} \quad (1.5)$$

Em que, ρ ν são a densidade e viscosidade cinemática do fluido, respectivamente, e D é o tamanho de poro médio do meio poroso. O número de Reynolds representa a razão entre forças intrínsecas (viscosidade) do fluido e forças relacionadas ao caminho e tortuosidade do meio (forças inerciais). O limite Darcyniano é compreendido para $Re < 1$, ou seja, para forças de viscosidade dominantes. O aumento desse número significa que o caminho poroso está interferindo na permeabilidade. [16]

Para regimes de $Re > 1$, é realizada uma aproximação de segunda ordem para a lei de Darcy, conhecida como aproximação de Forchheimer:

$$-\frac{dP}{dx} = \frac{\mu \cdot v}{k} + \rho \cdot \beta \cdot v^2 \quad (1.6)$$

Em que ρ é a densidade do fluido, v^2 velocidade de escoamento, e β o coeficiente de Forchheimer. Tal coeficiente tem correlação direta com o coeficiente de arrasto dentro da equação da força de arrasto. Quanto maior o coeficiente de Forchheimer, maior é o coeficiente de arrasto proporcionado pelo meio poroso. [16]

A aproximação de Forchheimer se relaciona da seguinte maneira com Re : para $Re > 1$, o termo quadrático ganha força, demonstrando que propriedades morfológicas do meio poroso estão afetando a permeabilidade do meio, assim quebrando a linearidade entre vazão e permeabilidade proposta pela lei de Darcy.

Em exemplos, para números de $1 < Re < 10$, a aproximação de Forchheimer é amplamente utilizada, especialmente em hidrologia, petróleo e engenharia química. [16]

1.5 Conjectura e porosidade

A porosidade é uma propriedade morfológica do meio muito importante para entender como o meio irá se comportar, e tem relação direta com a permeabilidade. Mais especificamente falando, a porosidade ϕ significa a razão entre o volume vazio V_T e o volume ocupado V de um objeto no espaço: [7]

$$\phi = \frac{V_T - V}{V_T} \quad (1.7)$$

Pensando em um meio poroso submetido ao regime de Forchheimer, pode-se entender que a permeabilidade passa a ser função também da porosidade, pois nesse o meio impacta a permeabilidade.[16] Dessa maneira:

$$k = k(\phi) \quad (1.8)$$

Mas caso esse meio poroso seja composto por uma TPMS, e cada TPMS tenha um parâmetro α intrínseco e único, então a permeabilidade seria uma função também desse parâmetro quando submetida ao regime de Forchheimer $k = k(\phi, \alpha)$? Essa será a conjectura a ser verificada nesse trabalho.

2 Problema

De forma geral, os principais problemas envolvidos neste trabalho são os seguintes:

- Gerar as diferentes células unitárias das TPMS descritas na literatura;
- Caracterizar essas células unitárias;
- Modelar peças estruturados baseados nessas células unitárias;
- Construir essas peças;
- Encontrar as permeabilidades de cada uma;
- Verificar se as permeabilidades são funções somente da porosidade e densidade de área.

3 Hipótese

A principal hipótese desse trabalho é que as propriedades físicas (permeabilidade) de peças estruturadas baseados em TPMS dependem da TPMS utilizada.

4 Objetivos

O principal objetivo desse trabalho é obter experimentalmente o valor das permeabilidades associadas com 15 TPMS descritas na Figura 10 [9], para então verificar a conjectura de que tais permeabilidades são dependentes não somente de propriedades intrínsecas a montagem (porosidade e densidade de área), como também da topologia da TPMS escolhida. Para que isso seja possível, são colocados os seguintes objetivos secundários:

- Criar os modelos tridimensionais de cada TPMS;
- Imprimir em uma impressora 3D cada modelo;
- Projetar e construir um aparato experimental para medir a vazão da água através de cada modelo;
- Usar as vazões obtidas para calcular a permeabilidade de cada modelo a partir de modelo teórico.

5 Metodologia

Foram criadas no total 15 peças em formato cilíndrico, Figura 6, cada qual gerada a partir de uma célula unitária proveniente de cada TPMS escolhida. As células unitárias das TPMS escolhidas estão contidas da Figura 10.

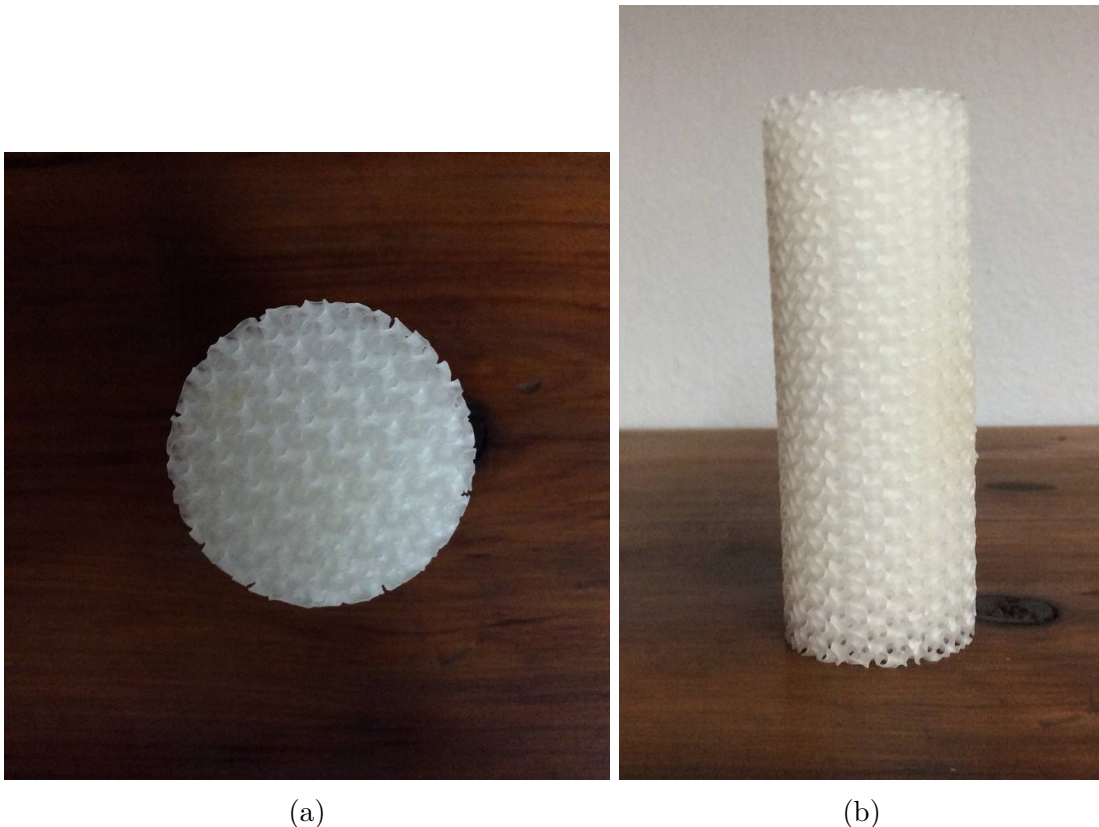


Figura 6 – Fotos de uma das peças cilíndrica impressa com raio $r = 38,1$ mm e altura $L = 101,6$ mm.

5.1 Modelagem

A modelagem das 15 peças se deu por meio de 3 passos:

- Gerar as células unitárias de cada TPMS no software Minisurf.
- Criar o molde das peças a partir das células unitárias no software de modelagem 3D.
- Finalizar o molde da peça no software do fatiador para realizar a impressão 3D da peça.

5.1.1 1º Passo

As células unitárias foram geradas dentro do software Minisurf [9]. O programa compõe um conjunto de pacotes que são executados no Matlab Runtime. Quando executado, possui um display amigável disposto na Figura 7. Nele, é possível gerar TPMSs de duas formas: escolhendo alguma das 19 já armazenadas no programa, ou adicionando a função geradora da TPMS no formato $f(x, y, z) = 0$. O método de geração das superfícies é baseado em sucessivas aproximações, de maneira discreta, da função geradora. Cada aproximação local gera uma fatia triangular, onde no final todas são somadas para formar a TPMS.

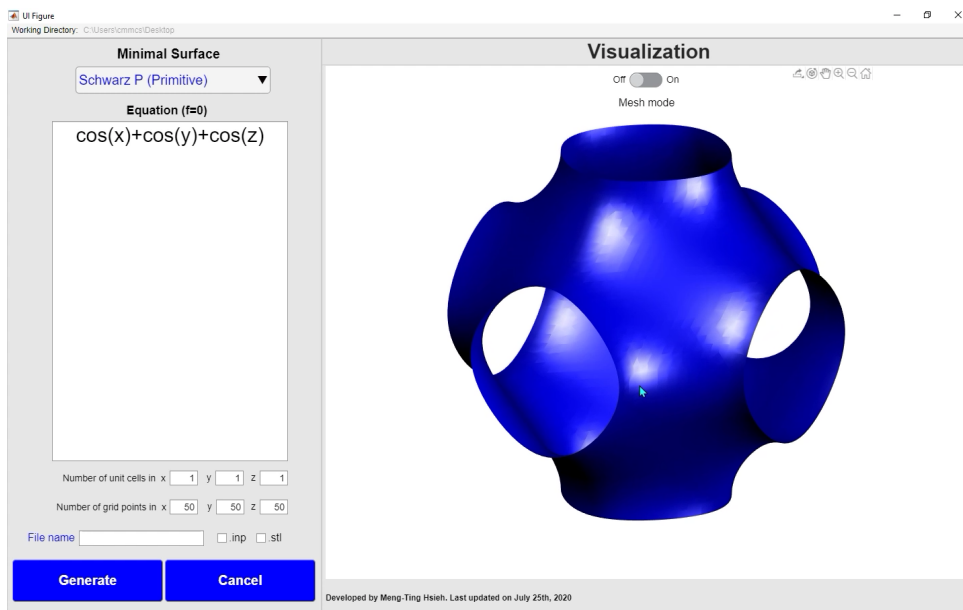


Figura 7 – Display do software Minisurf.

5.1.2 2º passo

Cada célula unitária gerada pelo Minisurf foi inserida dentro do software de modelagem 3D Blender. Dentro desse espaço, é possível construir formas geométricas a partir de blocos específicos, que no caso são as células unitárias. [4]

O objetivo foi modelar peças cilíndricas, e para tanto, é necessário introduzir e entender os parâmetros envolvidos nessa confecção. Imagine que cada célula unitária esteja compreendida dentro de um cubo imaginário de aresta D , vide Figura 8a. Podemos, então, escrever a área dessa superfície como função do tamanho D do cubo virtual:

$$A_c(\alpha) = \alpha D \quad (5.1)$$

A constante α é um parâmetro característico de cada TPMS. Dessa maneira, cada valor de área tem sua assinatura específica ditada pelo α .

Como a célula unitária exportada pelo Minisurf não possui volume, apenas área, o próximo passo é utilizar o processo de extrusão, ou seja, dar uma espessura d para a superfície. A Figura 8a representa um caminho específico de superfície pós extrusão. Com isso, podemos definir o volume característico de cada célula:

$$V(\alpha) = A_c(\alpha)d = \alpha D^2 d \quad (5.2)$$

De posse desse volume característico, podemos construir outro importante dessa célula: sua porosidade. A porosidade mede a fração de vazio que existe dentro da célula, e portanto, dentro do cubo virtual:

$$\phi(\alpha) = \frac{V_T - V}{V_T} = \frac{D^3 - \alpha D^2 d}{D^3} = 1 - \alpha \frac{d}{D}. \quad (5.3)$$

Essa relação estabelece o vínculo construtivo entre os parâmetros D , d , α e ϕ para o design dos modelos.

Como neste trabalho queremos trabalhar com peças de porosidade ϕ e espessura fixas d , podemos enxergar a eq (5.3) da seguinte maneira:

$$d = (1 - \phi(\alpha)) \frac{D}{\alpha} \quad (5.4)$$

Que implica em:

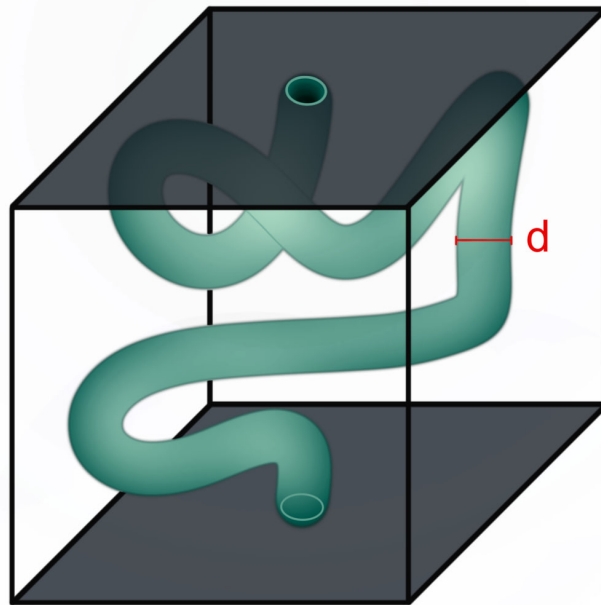
$$\frac{D}{\alpha} = cte = c_1 \quad (5.5)$$

Essa importante implicação nos diz que ao fixarmos os valores de ϕ e d , os valores de D irão variar para cada α , ou seja, para cada peça teremos tamanhos de células unitárias diferentes.

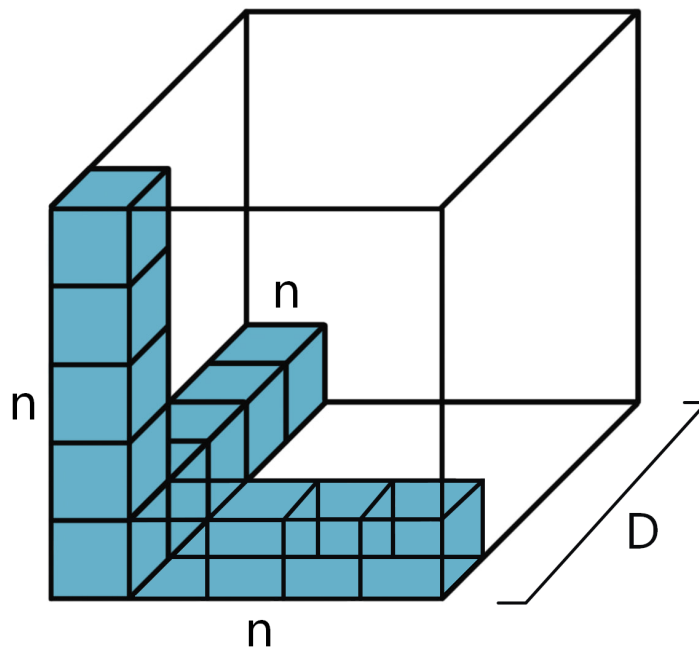
Agora, ainda não é claro o que significa essa razão D/α . Para dar significado a ela, temos que olhar para a Figura 8b. O próximo passo é construir a peça a partir de múltiplas células unitárias. O que a Figura 8b mostra é um exemplo de construção de peça cúbica a partir de células unitárias. Ligado a isso, um aspecto importante na montagem é a densidade de área da peça $\rho(\alpha)$, ditada pela razão entre a área total (A_T) e o volume total da peça (V_T). Supondo que essa peça cúbica tenha n células em cada aresta, podemos montar sua área total e volume total:

$$A_T = n^3 A_c = n^3 \alpha D \quad (5.6)$$

$$V_T = (nD)^3 \quad (5.7)$$



(a)



(b)

Figura 8 – Esquemas ilustrativos. Em a) temos um caminho aleatório simulando o corte de uma curva de uma TPMS com espessura d compondo uma célula unitária. Em b) temos a adição de $n \times n \times n$ células unitárias dentro de uma peça cúbica

Com isso, podemos determinar a densidade de área para a peça:

$$\rho(\alpha) = \frac{A_T}{V_T} = \frac{n^3 A_c}{(nD)^3} = \frac{\alpha}{D} \quad (5.8)$$

Surpreendentemente, ao compararmos a o resultado acima 5.8 com a eq 5.5, entendemos que a constante c_1 nada mais é que o inverso da densidade de área:

$$\rho(\alpha) = \frac{\alpha}{D} = \frac{1}{c_1} \quad (5.9)$$

Agora a interpretação da constante está completa, ou seja, fixar a porosidade ϕ e espessura d significa manter a densidade de área da peça constante. Dessa maneira, para cada peça gerada por um α diferente, o tamanho da célula unitária D terá que variar para que a homogeneidade da área no espaço seja mantida.

Nesse trabalho, para a porosidade de $\phi = 0.85$ e espessura de $d = 0.25$ mm, temos uma densidade de área de $\rho = 1.6 \text{ m}^{-1}$.

Retomando a ideia da modelagem da peça, após o processo de extrusão, foi feito um corte cilíndrico em cima da peça cúbica ilustrada na Figura 8b. Assim, no final obtém-se uma peça cilíndrica de raio $r = 38,1$ mm e altura $L = 101,6$ mm.

Por fim, utilizamos o Blender também para estimar os α das TPMSs a partir da eq 5.6, contidos na Tabela 1.

TPMS	α
Schwarz P	2.35
Gyroid	3.09
Neovius	3.52
I-WP	3.55
OCT-O	3.73
Schwarz D	3.84
K	3.95
Fischer-Koch C(Y)	4.50
F-RD	4.86
Fischer-Koch Y	5.13
Fischer-Koch S	5.44
G'	5.53
Lidinoid	6.25
D'	6.26
Fischer-Koch C(S)	8.03

Tabela 1 – Tabela com os valores aproximados dos parâmetros característicos α para cada TPMS.

5.1.3 3º passo

De posse das peças modeladas no Blender, as mesmas foram trabalhadas no software do fatiador Chitubox, para serem impressas na impressora 3D de resina, modelo LD-006 da Creality. Cada peça teve suas dimensões conferidas com um paquímetro e sua porosidade conferida com balança.

5.2 Medições

O objetivo aqui foi obter pares vazão e pressão para então montar um gráfico dessas grandezas, e por fim ajusta-lo com a aproximação de Forchheimer 1.6.

A metodologia abordada para encontrar as vazões foi esguichar água com diferentes pressões sobre as peças, e cronometrar o tempo que levava para a água pós peça encher um certo volume dentro de uma proveta, e então estimar vazões com as razões entre volume enchido de água e tempo cronometrado. Para tanto, foi construído o aparato descrito pelas figuras 9a 9b. Sua construção levou em conta os seguintes itens:

- Barras de alumínio.
- Chapa de madeira.
- Caixas de plástico
- Canos PVC.
- Torneira
- Mangueira plástica transparente
- Conexões de PVC.
- Chapas de acrílico.
- Bomba de água submersível
- Fonte e cabos elétricos.
- Proveta milimetrada.

O aparato pode ser dividido em 4 partes: o reservatório, a tubulação, o suporte para a peça e a proveta. O reservatório foi composto pelas duas caixas de plástico, bomba de água, fonte e bancada. Seu papel foi manter o sistema alimentado por água e manter a pressão constante durante as medições, e para tanto, o mesmo foi posto em cima do nível da proveta sob a bancada. Para manter seu nível de água constante, a bomba de água

devolvia água proveniente de um segundo reservatório na mesma velocidade com que a água escoava de si para a tubulação e para o segundo reservatório. Da tubulação, a água ia de encontro com a peça dentro do suporte cilíndrico, pelo qual a água passava e escoava para a proveta. Mais detalhes do aparato podem ser encontradas no Anexo [A](#).

5.3 Processo

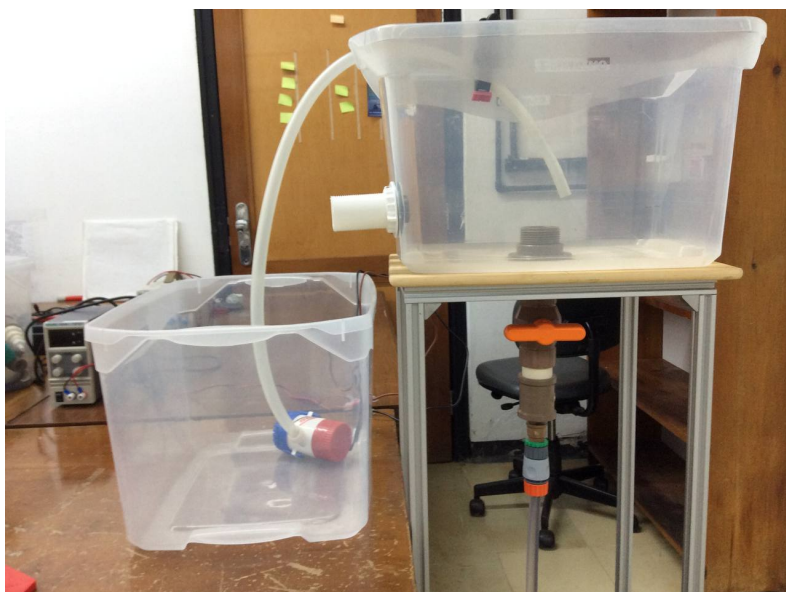
O processo de medição se deu por meio de 4 etapas:

1ª etapa: era realizada uma lavagem nos dois reservatórios e também nas tubulações. Em seguida, os reservatórios enchedos e esvaziados em torno de 2 vezes para eliminar sujeiras dentro da tubulação.

2ª etapa: feita a lavagem, o reservatório era posto de volta sob a bancada, onde era enchido com água e ligada a bomba de água. Depois de visto que o nível de água permanecia constante, ou seja, atingido o equilíbrio entre a água devolvida pela bomba e a escoada para o segundo reservatório, era aberta a torneira logo abaixo do reservatório sob a bancada.

3ª etapa: a peça a ser medida era submersa na água do segundo reservatório a fim de tirar possíveis bolhas de ar presas dentro. Então, a peça era posta dentro do suporte. Em seguida o suporte junto com a peça era ligado a proveta e a mesma posicionada em uma das alturas. As alturas foram medidas relativas entre si, ou seja, a mais baixa foi tida como referencial 0, a segunda subia 28mm, a terceira de 36mm, e a quarta em 44mm. Depois de escolhida a altura, foram feitas 18 medições de tempo para cada 50 ml de água dentro da proveta, sob o limite de 1000 ml. Todas as 15 TPMSs foram medidas

4ª etapa: Por fim, a peça era retirada do suporte e deixada para secar. O sistema era desligado e esvaziado.



(a)



(b)

Figura 9 – Fotos tiradas do aparato experimental. Em b) é possível ver todas as 4 partes do aparato: reservatório, tubulação, suporte para peça e proveta.

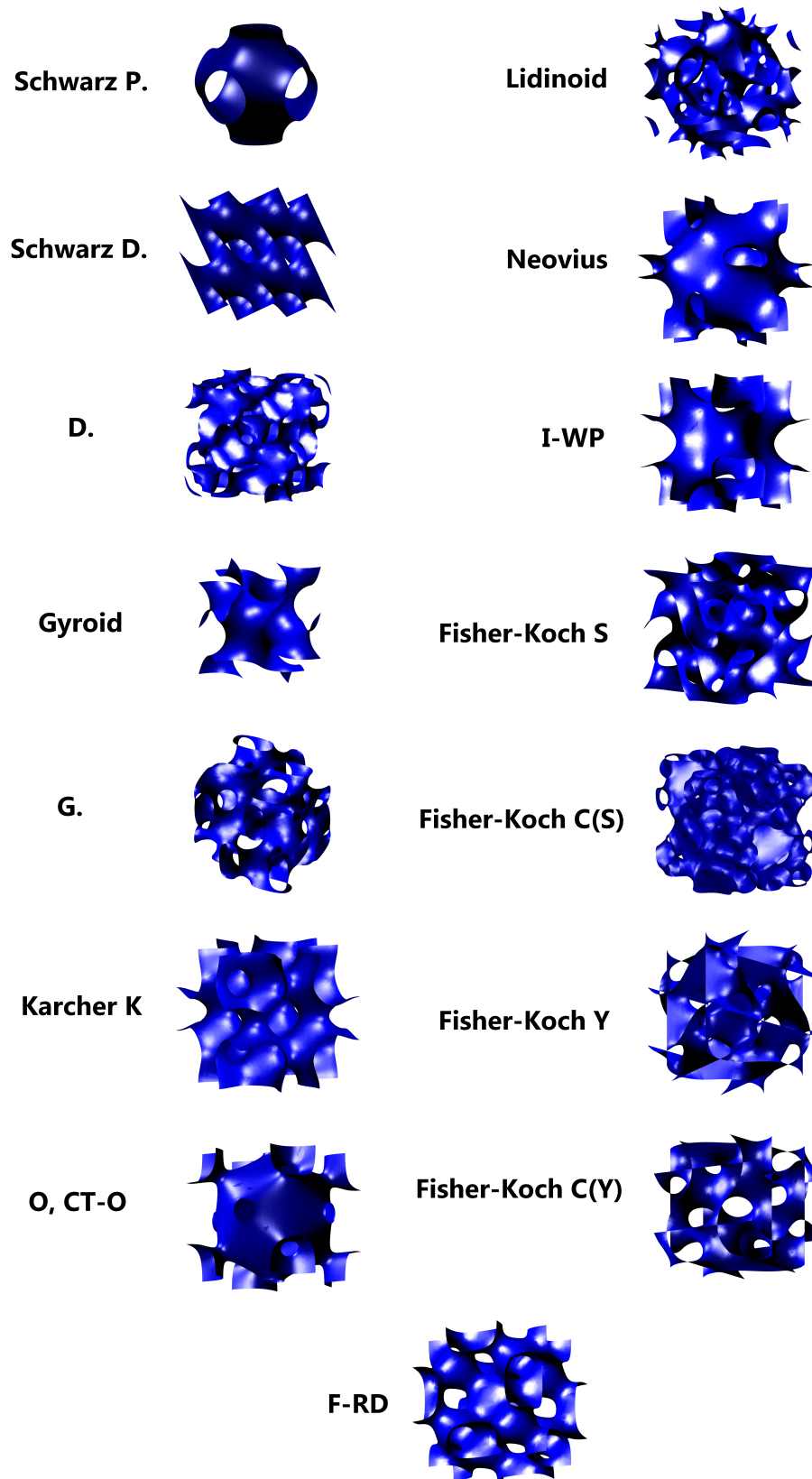


Figura 10 – Tabela contendo as células unitárias utilizadas geradas pelo Minisurf.

6 Resultados e discussão

6.1 Identificação do regime de escoamento

O primeiro desafio é saber em qual regime de escoamento as peças estão submetidas, pois isso ditará qual aproximação será usada, dentre as: Darcyniana e de Forchheimer. Para tanto, usamos duas formas de identificar: a primeira foi calcular o Re teórico utilizando a vazão média mínima Q (m^3/s) e o tamanho médio de poro característico L (m), ou seja, o diâmetro do poro. A fim de determinar L realizou-se uma aproximação visual do poro da Schwarz P, Figura 11b. Como as densidades de área ρ m^{-1} foram mantidas constantes, então esse diâmetro médio de poro L pode ser estendido para as demais TPMS.

De posse do L , podemos inseri-lo na eq 1.5 juntamente com a vazão mínima obtida nesse trabalho, para então obter o menor número de Reynolds possível:

$$Re = \frac{\rho \cdot Q \cdot L}{A \cdot \mu} \approx 10 \quad (6.1)$$

Como o resultado encontrado é entorno de 10 vezes maior que o limite do regime Darcyniano $Re < 1$, então nos encontramos fora do mesmo. O regime intermediário entre Darcy e Forchheimer, conhecido por regime de inércia fraca, seria compreendido entre $1 < Re < 10$, portanto, o mais correto seria usar a equação de Forchheimer. (1.6).

A segunda forma estudada para validar o regime foi uma simples visualização dos dados contidos nas Figuras 12 13 14 15, onde é clara a relação não linear entre as diferentes pressões, denotadas pelas alturas $h(m)$ e as vazões $Q(m^3s^{-1})$.

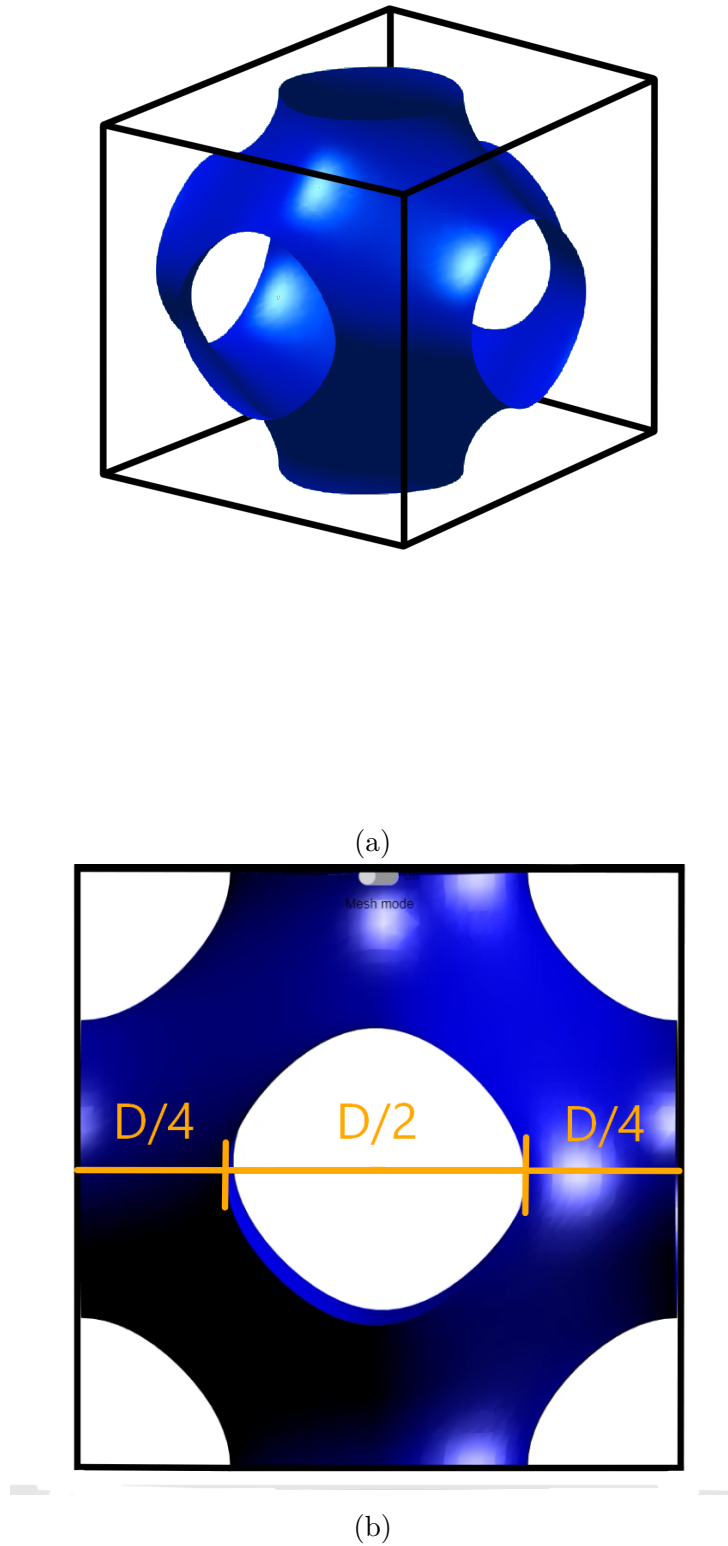


Figura 11 – Esquemas ilustrativos de uma célula unitária de Schwarz P. Em b) tem-se o frontal de comprimento de célula $D \approx 4$ mm. Assim, a aproximação visual compreende que o diâmetro do poro é $L \approx 2$ mm.

6.2 Permeabilidade e permeabilidade inercial

Visto os regimes não lineares para as relações de pressão e vazão de cada peça, os mesmos foram ajustados a partir da equação (1.6), representando as Figuras 12 13 14 15. Os valores da permeabilidade k (m^2) e permeabilidade inercial γ (m) obtidos a partir dos ajustes para cada peça se encontram na Figura 16.

É possível ver que a escolha da aproximação de Forchheimer para os ajustes foi satisfatória. As regiões de confiança em vermelho, as quais indicam que há 95% de certeza que a medida está compreendida dentro da mesma, são relativamente estreitas, sustentando, assim, a boa escolha de ajuste.

Mais especificamente, a região de confiança para a I-WP (12d) é a maior em comparação com as demais. Tal fato se deve, provavelmente, a ausência de um dos pontos do gráfico proveniente da exclusão de uma das medições de vazão. De resto, todas as outras peças possuem 4 medidas de vazão.

Outro ponto relevante a ser discutido são as barras de erro não padronizadas em relação as medidas de vazão das peças. Esse padrão de barras de erro crescentes ao longo do eixo das vazões reflete a metodologia aplicada para medir o tempo de enchimento de água dentro da proveta. Conforme a vazão aumentava, a cronometragem do tempo ficava mais imprecisa devida a rápida ascensão da água dentro da proveta, assim impactando mais na incerteza de vazões maiores.

Em relação aos valores das permeabilidades γ e k obtidas, tem-se observações importantes a serem feitas. As peças de maior e menor permeabilidade k foram Fisher-Koch C(S) e OCT-0, e curiosamente, suas permeabilidades inerciais γ não seguem o mesmo padrão de serem extremos quando comparadas as demais. Isso leva a crer que outro parâmetro da topologia está influenciando essas propriedades físicas.

A termos comparativos, a literatura respalda os valores de k e γ aqui encontrados. Para a permeabilidade, temos uma ordem de grandeza $10^{-10} - 10^{-9} m^2$, e para a permeabilidade inercial $10^{-6} - 10^{-5} m$. Tal respaldo é interessante, mas é válido ressaltar que é difícil a comparação com outros experimentos visto que nossa densidade de área ρ pode ser diferente.

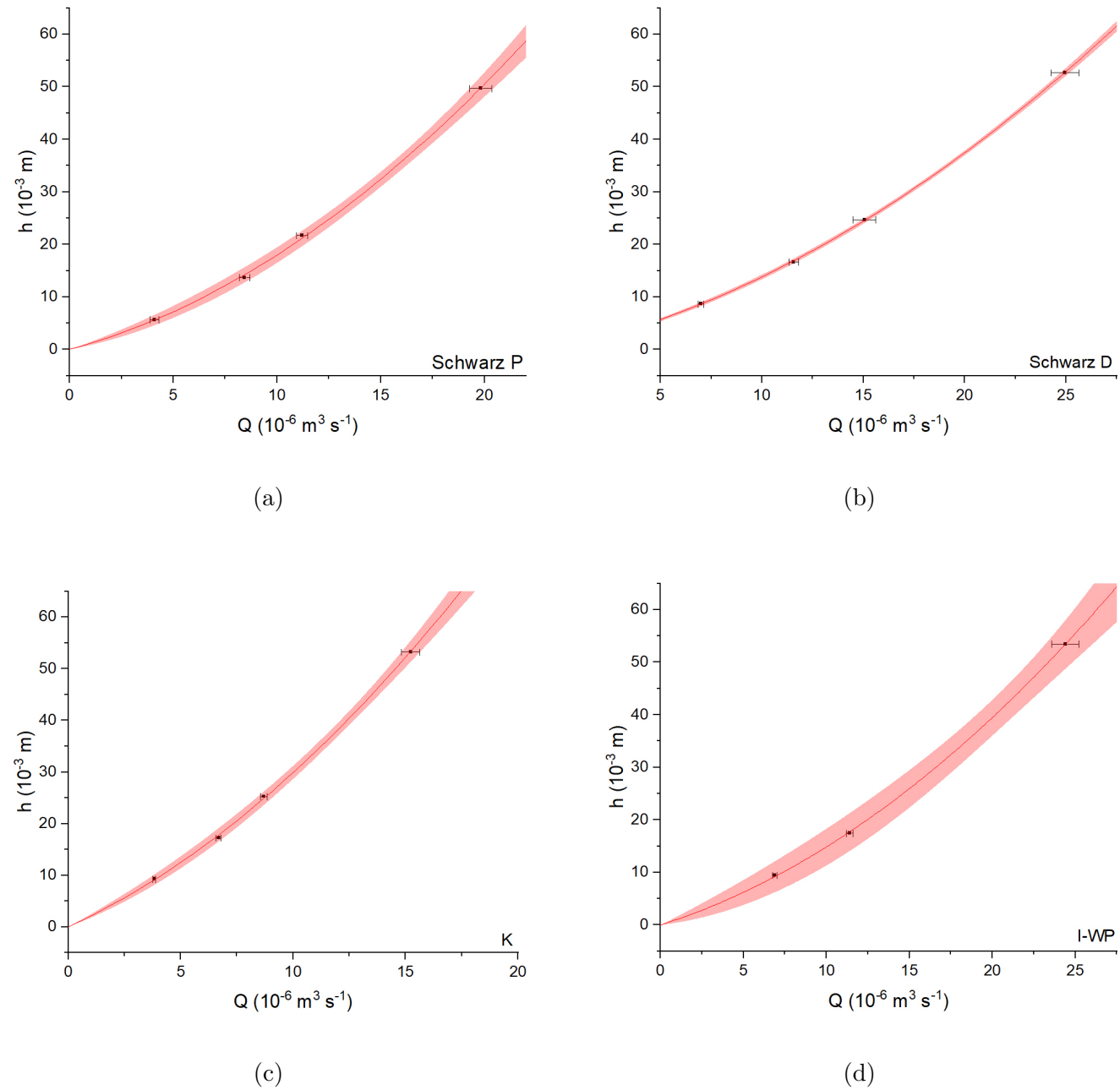
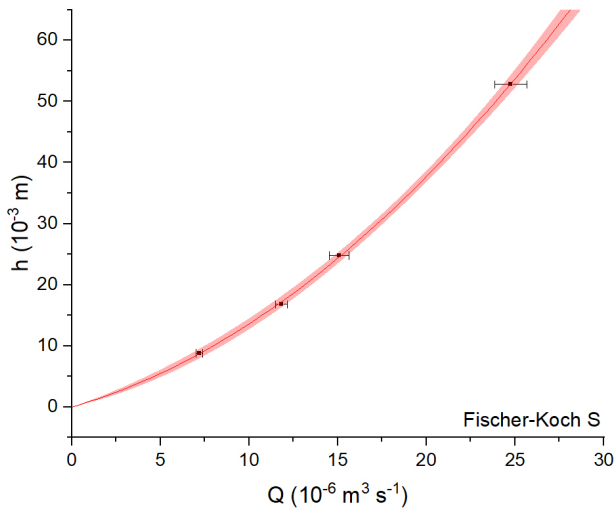
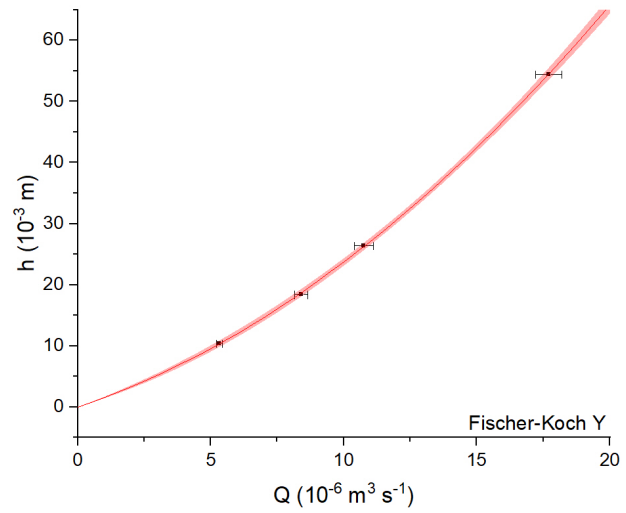


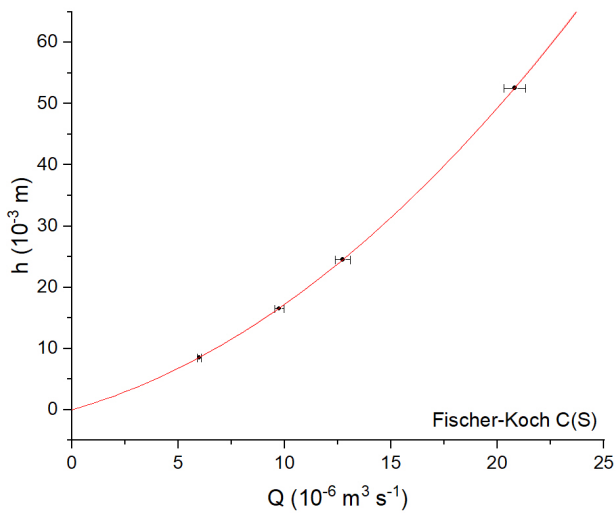
Figura 12 – Conjunto de TPMSs considerando o regime de Forchheimer. Gráficos da pressão, denotada pelas alturas $h(m)$, em função das respectivas vazões $Q(m^3 s^{-1})$. As curvas em vermelho denotam os ajustes provenientes da equação (1.6).



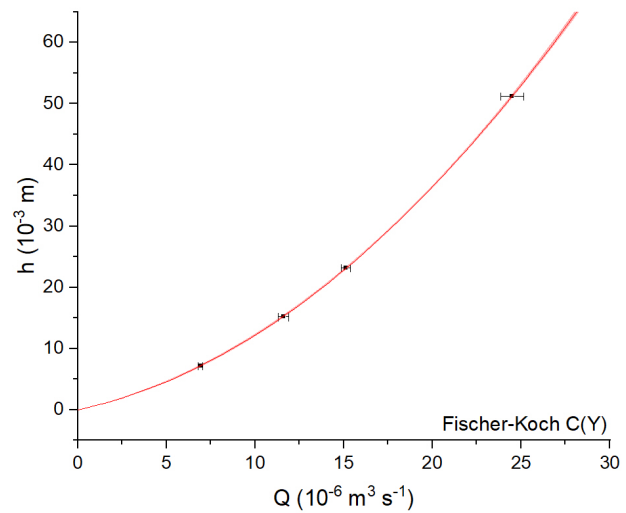
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 13 – Conjunto de TPMSs considerando o regime de Forchheimer. Gráficos da pressão, denotada pelas alturas $h(m)$, em função das respectivas vazões $Q(m^3 s^{-1})$. As curvas em vermelho denotam os ajustes provenientes da equação (1.6).

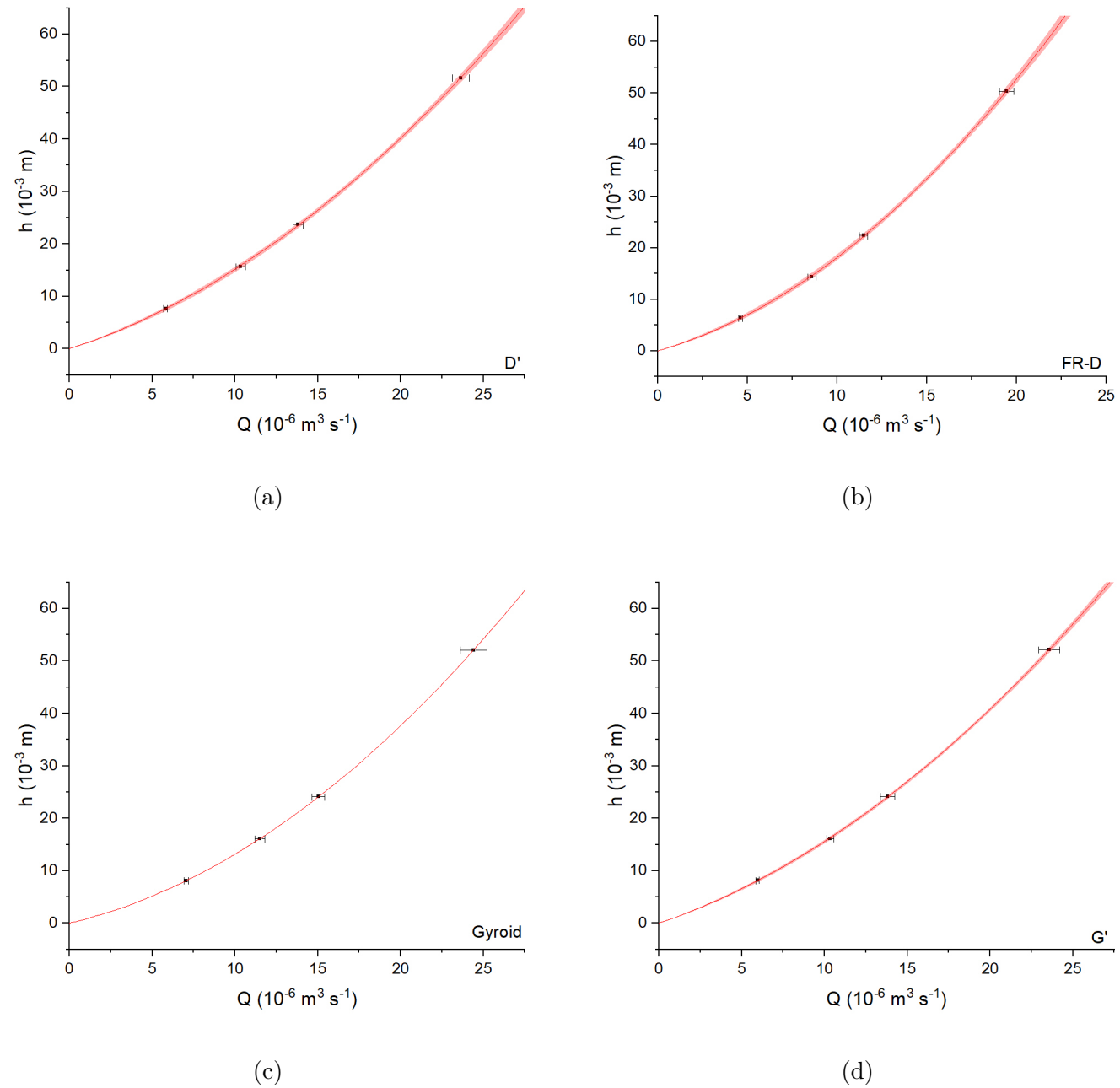


Figura 14 – Conjunto de TPMSs considerando o regime de Forchheimer. Gráficos da pressão, denotada pelas alturas $h(m)$, em função das respectivas vazões $Q(\text{m}^3 \text{s}^{-1})$. As curvas em vermelho denotam os ajustes provenientes da equação (1.6).

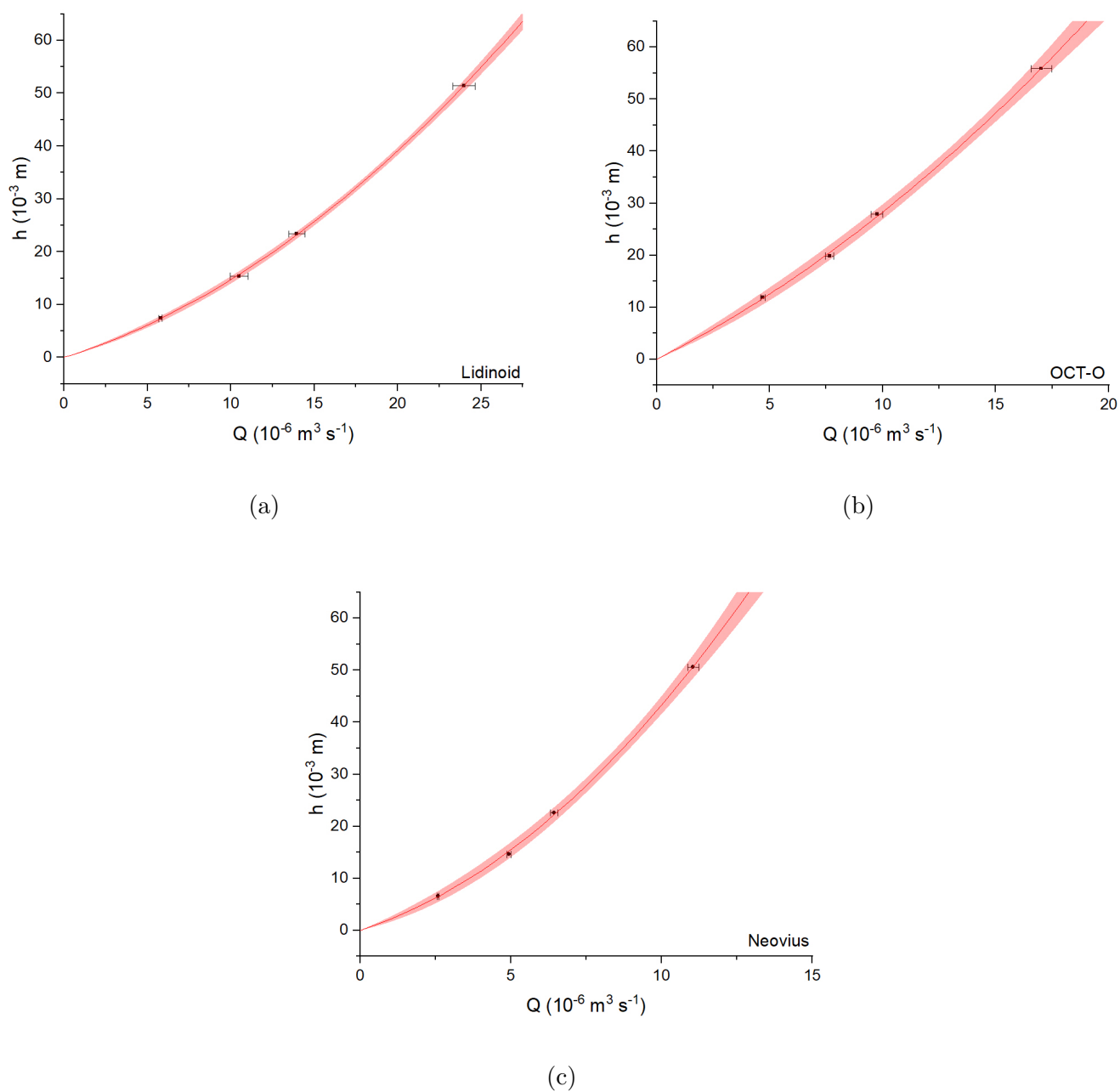
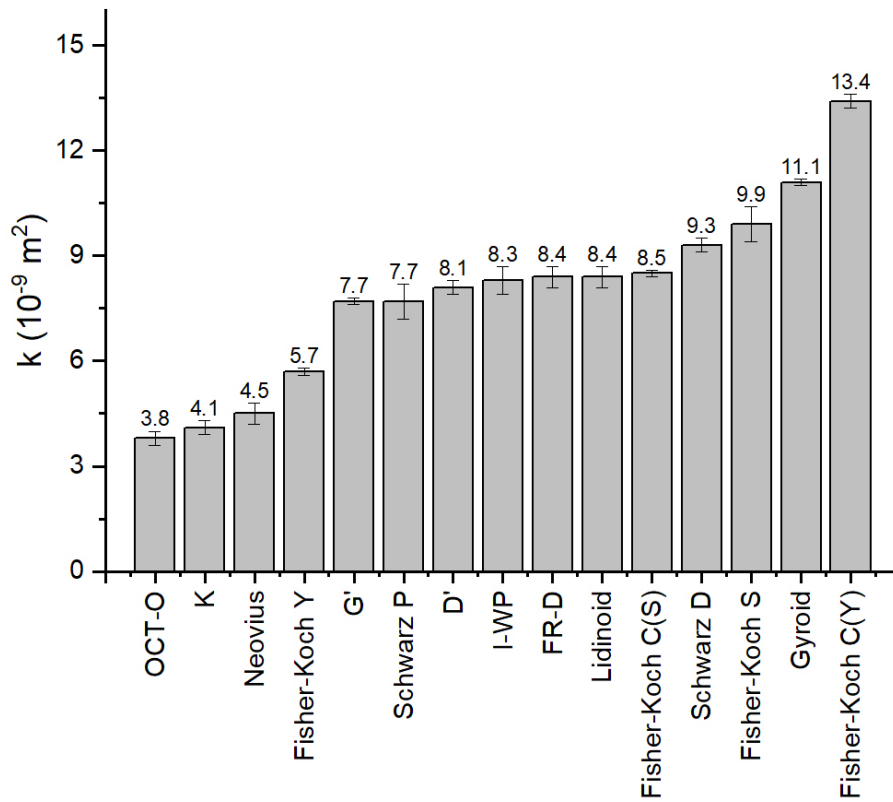
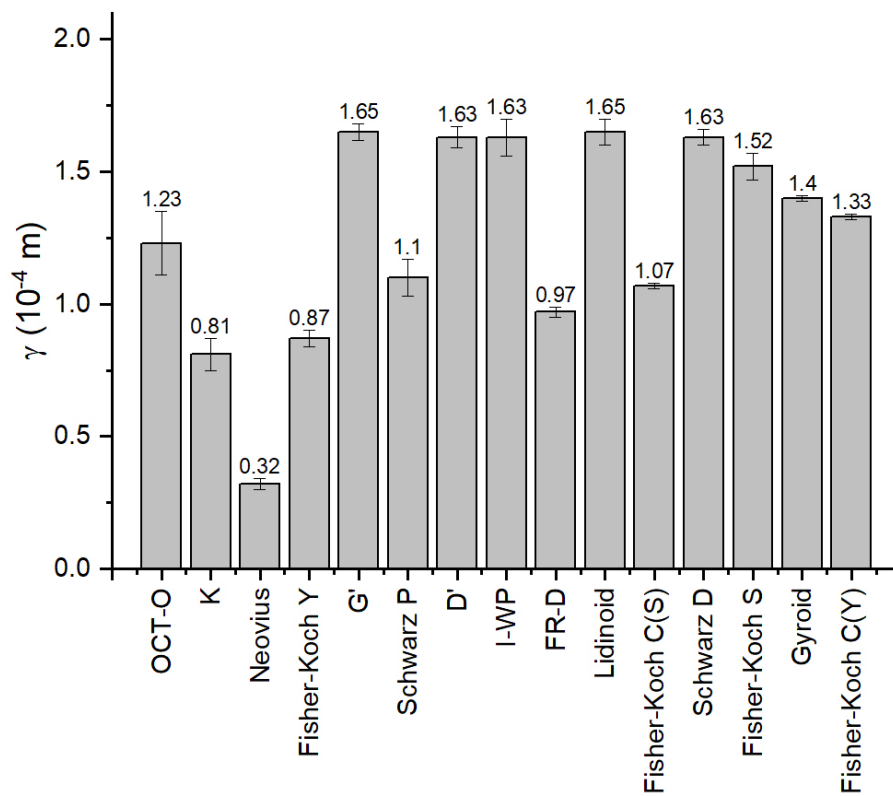


Figura 15 – Conjunto de TPMSs considerando o regime de Forchheimer. Gráficos da pressão, denotada pelas alturas $h(m)$, em função das respectivas vazões $Q(m^3 s^{-1})$. As curvas em vermelho denotam os ajustes provenientes da equação (1.6).



(a)



(b)

Figura 16 – Gráficos das permeabilidade k e permeabilidade inercial γ , em a) e b), respectivamente para cada peça. No eixo horizontal, a ordem de peças é o mesmo.

6.3 Grupos de semelhança e conjectura

O maior diferencial desse trabalho foi trabalhar com peças de porosidade e densidade de área fixas. Nossa aposta foi na conjectura de que as propriedades físicas (permeabilidade e permeabilidade inercial) dependeriam também do parâmetro característico α . Ou seja, com ϕ e ρ constantes, essas propriedades variariam em torno de α .

$$k = k(\phi, \rho, \alpha) \quad (6.2)$$

$$\gamma = \gamma(\phi, \rho, \alpha) \quad (6.3)$$

Para checar tal conjectura, a ideia foi estudar as permeabilidades em grupos. Olhando para as Figuras 16a 16b, conseguimos enxergar que existem valores semelhantes para grupos de TPMS. Os grupos k e γ semelhantes formados estão dispostos na Figura 25. É possível ver que grande parte das TPMS possuem valores similares para k , e por isso formam o primeiro grupo. Desse grupo, é possível que todos os seus integrantes são divididos em três outros grupos de valores similares para γ . Isso mostra que as peças geradas pelas TPMS: G', D', Schwarz D, Lidinoid, I-WP, e Fisher-Koch S, possuem as mesmas propriedades físicas entre si de permeabilidade e permeabilidade inercial. Já outro grupo que partilha da mesma condição é formado por: FR-D, Fisher-Koch C(S), Schwarz P. Por fim, o terceiro grupo é exclusivo da Fisher-Koch Y.

Esses grupos de semelhança revelam resultados muito importantes e impactantes, pois os mesmos formam a maioria das peças aqui estudadas. A própria existência desses grupos anula a conjectura pensada para esse trabalho, pois peças de α diferentes geraram resultados similares para as permeabilidades. Dessa maneira, a melhor forma de entender essas propriedades é dizer que elas dependem somente de ϕ e ρ :

$$k = k(\phi, \rho) \quad (6.4)$$

$$\gamma = \gamma(\phi, \rho) \quad (6.5)$$

Contudo, esse não parece ser o caminho mais seguro a se pensar, pois peças como: Fisher-Koch C(S), Gyroid, OCT-O, K, Neovius, fogem totalmente desse caminho, ou seja, ainda não é suficiente dizer que podemos descrever completamente essas permeabilidades com apenas a porosidade e densidade de área. Por tanto, é seguro pensar que a conjectura mais certa seja esta:

$$k = k(\phi, \rho, \lambda) \quad (6.6)$$

$$\gamma = \gamma(\phi, \rho, \lambda) \quad (6.7)$$

Em que o parâmetro λ representa algum fenômeno na topologia das TPMS de tal maneira que não seja exclusivo de cada superfície, como é para o caso de α . Assim, entendemos que os grupos de semelhança partilham de mesmos λ .

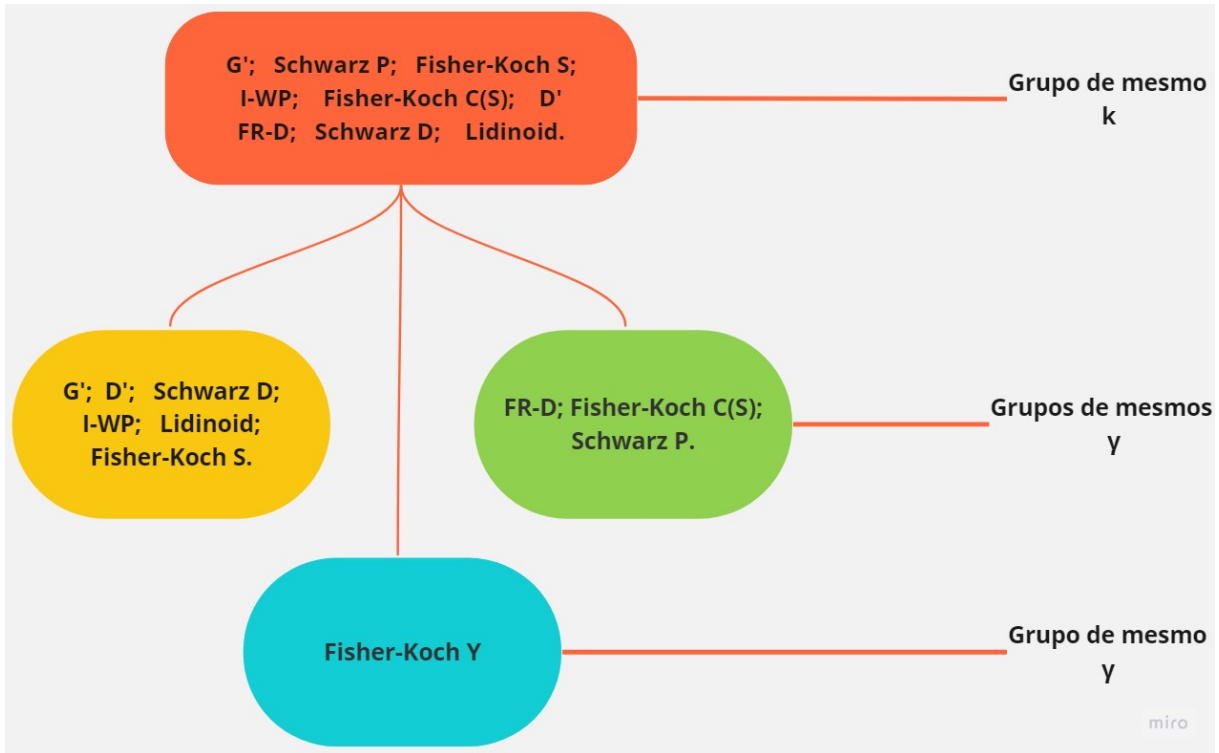


Figura 17 – Grupos de semelhança das TPMS baseados em valores similares de k e γ . Em laranja se encontram as TPMS de valores similares para k . Em azul, verde e amarelo, são agrupadas por valores similares de γ . As demais não abordadas possuem valores consideravelmente destoantes desses grupos.

7 Conclusão

Esse trabalho se concentrou em estimar permeabilidades e permeabilidades inerciais a partir de peças modeladas e criadas por TPMS, e, por conseguinte, discutir sobre a conjectura de que tais propriedades físicas são dependentes das TPMS. As peças constituídas de porosidade $\phi = 0.85$ e densidade de área de $\rho = 1.6 \text{ m}^{-1}$ geraram permeabilidades de ordem de grandeza $10^{-10} - 10^{-9} \text{ m}^2$ para k , e $10^{-4} - 10^{-3} \text{ m}$ para γ , o que está dentro do esperado pela literatura. Tais permeabilidades foram encontradas utilizando a aproximação de Forchheimer para um número de Reynolds $Re \approx 10$.

Por fim, a conjectura de que as permeabilidades dependiam dos *alpha* de cada TPMS foi confrontada, levando a crer que não é suficiente dizer que tais propriedades físicas dependem somente da porosidade e densidade de área, mas sim de outro parâmetro λ provavelmente ligado a alguma característica topológica comum entre alguns grupos de TPMS: $k = k(\phi, \rho, \lambda)$; $\gamma = \gamma(\phi, \rho, \lambda)$.

Referências

- [1] J. S. Andrade, U. M. S. Costa, M. P. Almeida, H. A. Makse, and H. E. Stanley. Inertial effects on fluid flow through disordered porous media. *Phys. Rev. Lett.*, 82:5249–5252, Jun 1999. Citado na página 10.
- [2] DANNY CALEGARI. Minimal surfaces. 2019. Citado na página 45.
- [3] Tobias H Colding and William P Minicozzi. *A course in minimal surfaces*, volume 121. American Mathematical Soc., 2011. Citado na página 45.
- [4] Blender Online Community. *Blender - a 3D modelling and rendering package*. Blender Foundation, Stichting Blender Foundation, Amsterdam, 2018. Citado na página 20.
- [5] Michele Emmer. Minimal surfaces and architecture: New forms. *Nexus Network Journal*, 15(2):227, 2013. Citado na página 9.
- [6] Michael A. Erle, R.D. Gillette, and D.C. Dyson. Stability of interfaces of revolution with constant surface tension—the case of the catenoid. *The Chemical Engineering Journal*, 1(2):97–109, 1970. Citado na página 5.
- [7] Christopher Hall and William D Hoff. *Water transport in brick, stone and concrete*. CRC Press, 2021. Citado 2 vezes nas páginas 9 e 11.
- [8] Lu Han and Shunai Che. An overview of materials with triply periodic minimal surfaces and related geometry: from biological structures to self-assembled systems. *Advanced Materials*, 30(17):1705708, 2018. Citado 2 vezes nas páginas 5 e 8.
- [9] Meng-Ting Hsieh and Lorenzo Valdevit. Minisurf—a minimal surface generator for finite element modeling and additive manufacturing. *Software Impacts*, 6:100026, 2020. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 20.
- [10] Sebastian C. Kapfer, Stephen T. Hyde, Klaus Mecke, Christoph H. Arns, and Gerd E. Schröder-Turk. Minimal surface scaffold designs for tissue engineering. *Biomaterials*, 32(29):6875–6882, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 5 e 9.
- [11] Hermann Karcher. The triply periodic minimal surfaces of alan schoen and their constant mean curvature companions. *Manuscripta mathematica*, 64(3):291–357, 1989. Citado na página 8.
- [12] William Meeks III and Joaquín Pérez. The classical theory of minimal surfaces. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 48(3):325–407, 2011. Citado na página 6.

-
- [13] William H Meeks III. The theory of triply periodic minimal surfaces. *Indiana University Mathematics Journal*, pages 877–936, 1990. Citado 3 vezes nas páginas 5, 6 e 7.
- [14] William W Mullins. Proof that the two-dimensional shape of minimum surface free energy is convex. *Journal of Mathematical Physics*, 3(4):754–759, 1962. Citado na página 8.
- [15] J-F Sadoc and J Charvolin. Infinite periodic minimal surfaces and their crystallography in the hyperbolic plane. *Acta Crystallographica Section A: Foundations of Crystallography*, 45(1):10–20, 1989. Citado na página 8.
- [16] Jorge Santos, Tiago Pires, Bárbara P. Gouveia, André P.G. Castro, and Paulo R. Fernandes. On the permeability of tpms scaffolds. *Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials*, 110:103932, 2020. Citado 2 vezes nas páginas 10 e 11.
- [17] Alan H Schoen. Infinite periodic minimal surfaces without self-intersections. Technical report, 1970. Citado 2 vezes nas páginas 7 e 8.
- [18] Alan H Schoen. Reflections concerning triply-periodic minimal surfaces. *Interface focus*, 2(5):658–668, 2012. Citado 2 vezes nas páginas 7 e 8.
- [19] Vinícius Guardiano Souza et al. Introdução às superfícies mínimas. 2022. Citado 2 vezes nas páginas 10 e 45.
- [20] Robert Weinstock. *Calculus of variations: with applications to physics and engineering*. Courier Corporation, 1974. Citado na página 45.

Apêndices

APÊNDICE A – Equação das superfícies mínimas

Neste anexo será utilizada uma abordagem matemática clássica envolvendo o princípio de minimização de funcionais para se deduzir a equação característica das superfícies mínimas. [2] [3] [19] [20]

Considere um funcional que seja uma função com as seguintes características:

$$f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \Omega \subset \mathbb{R}^2. \quad (\text{A.1})$$

Ou seja, cujo domínio seja o plano real \mathbb{R}^2 e que criem uma correspondência com o conjunto dos reais \mathbb{R} . Além disso, esses funcionais f precisam ser de classe C^2 .

Uma vez formalizadas as definições, é possível, em linguagem mais prática, resumir essas informações no gráfico G_f de f ,

$$G_f = \{(x, y, f(x, y)) / (x, y \in \Omega)\}, \quad (\text{A.2})$$

onde Ω representa a superfície contida no \mathbb{R}^2 .

A área da figura G_f pode ser definida como

$$A_{G_f} = \int_{\Omega} |\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y|, \quad (\text{A.3})$$

onde \mathbf{r}_x e \mathbf{r}_y são as derivadas parciais do vetor posição \mathbf{r} em relação a x e y , respectivamente. Uma vez em que $\mathbf{r} = (x, y, f(x, y))$, podemos reescrever a (A.3) em uma forma mais compacta, abrindo as derivadas de \mathbf{r} , tal que,

$$A_{G_f} = \int_{\Omega} |(1, 0, f_x) \times (0, 1, f_y)|, \quad (\text{A.4})$$

ou seja,

$$A_{G_f} = \int_{\Omega} \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} = \int_{\Omega} \sqrt{1 + |\nabla f|^2}. \quad (\text{A.5})$$

Agora, o conceito chave da dedução é introduzido: o princípio variacional. Supondo que f seja o funcional minimizante que gera um gráfico de uma superfície mínima, podemos criar outro funcional f_t tal que

$$f_t = f + \mu t, \quad (\text{A.6})$$

onde μt representa um termo perturbativo. É necessário impor também que nos extremos, ou seja, nas bordas da superfície $\partial\Omega$, $\mu = 0$. Dessa maneira, $f_t = f$ sobre $\partial\Omega$. Por consequência, para que f_t seja minimizante sempre é necessário que

$$\frac{d}{dt}_{t=0} (f_t) = 0. \quad (\text{A.7})$$

Substituindo f_t em (A.5) e aplicando a ideia de (A.7) temos que

$$\frac{d}{dt}_{t=0} (A_{G_{f_t}}) = \frac{d}{dt}_{t=0} \left(\int_{\Omega} \sqrt{1 + |\nabla(f + \mu t)|^2} \right) = 0. \quad (\text{A.8})$$

Após algumas manipulações e aplicações de propriedades dos operadores diferenciais, se obtém a seguinte igualdade:

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \left[\frac{\mu \nabla f}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} \right] = \int_{\Omega} \mu \nabla \cdot \left[\frac{\nabla f}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} \right] + \int_{\Omega} \frac{\nabla f \cdot \nabla \mu}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} \quad (\text{A.9})$$

De maneira analítica, a (A.10) nos apresenta uma relação entre as divergências dos campos vetoriais gerados a partir dos funcionais. O último termo da igualdade é nulo por meio da (A.8). Já o significado do termo da esquerda é fornecido pelo teorema da divergência:

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \left[\frac{\mu \nabla f}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} \right] = \int_{\partial\Omega} \left[\frac{\mu \nabla f}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} \right] \cdot \hat{\mathbf{s}}. \quad (\text{A.10})$$

O teorema nos diz que podemos igualar a integral da divergência do campo com a integral de linha sobre a borda da superfície $\partial\Omega$. E, recapitulando a imposição feita de $\mu = 0$ na borda, temos que essa integral de linha é nula. Portanto, a integral a esquerda é nula também. Com isso, retomando a (A.10), obtemos finalmente que

$$\int_{\Omega} \mu \nabla \cdot \left[\frac{\nabla f}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} \right] = 0 \rightarrow \nabla \cdot \left[\frac{\nabla f}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} \right] = 0. \quad (\text{A.11})$$

A equação acima representa uma condição para o funcional de duas variáveis independentes gerar uma superfície minimizante. Em outras palavras, a curvatura é minimizada localmente para toda a superfície.

Anexos

ANEXO A – Peças do aparato experimental



Figura 18 – Suportes de vidro e acrílico usados para elevar a altura da proveta.



Figura 19 – Suporte da peça

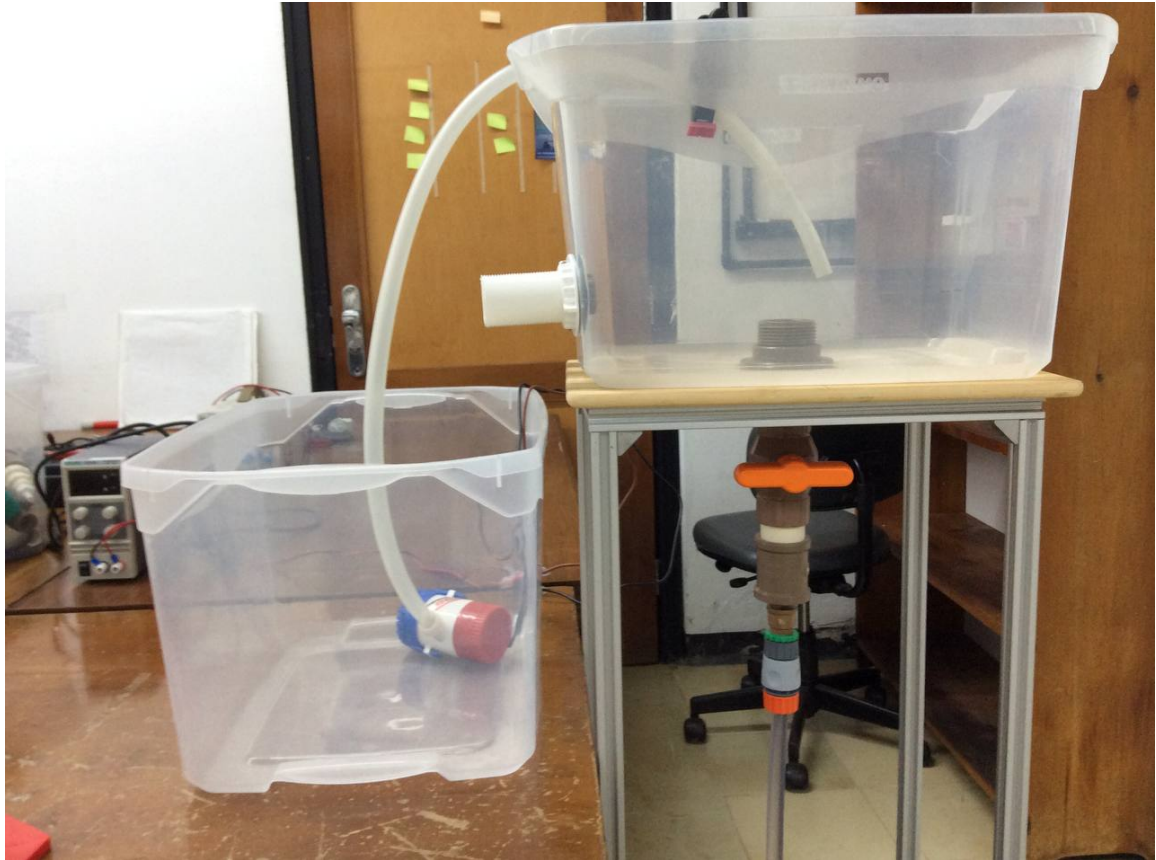


Figura 20 – Reservatórios.



Figura 21

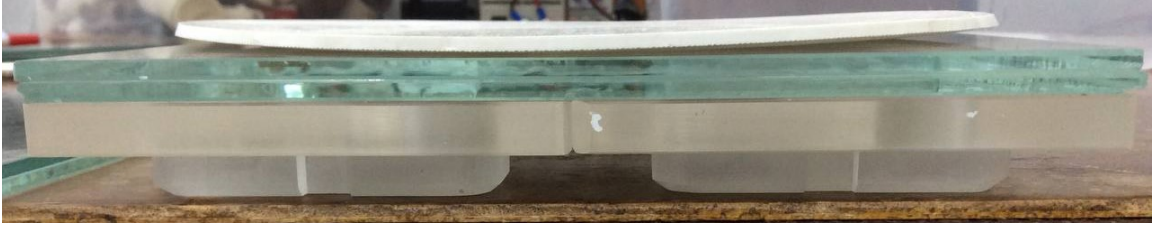


Figura 22



Figura 23



Figura 24 – Proveta com o suporte para peça.

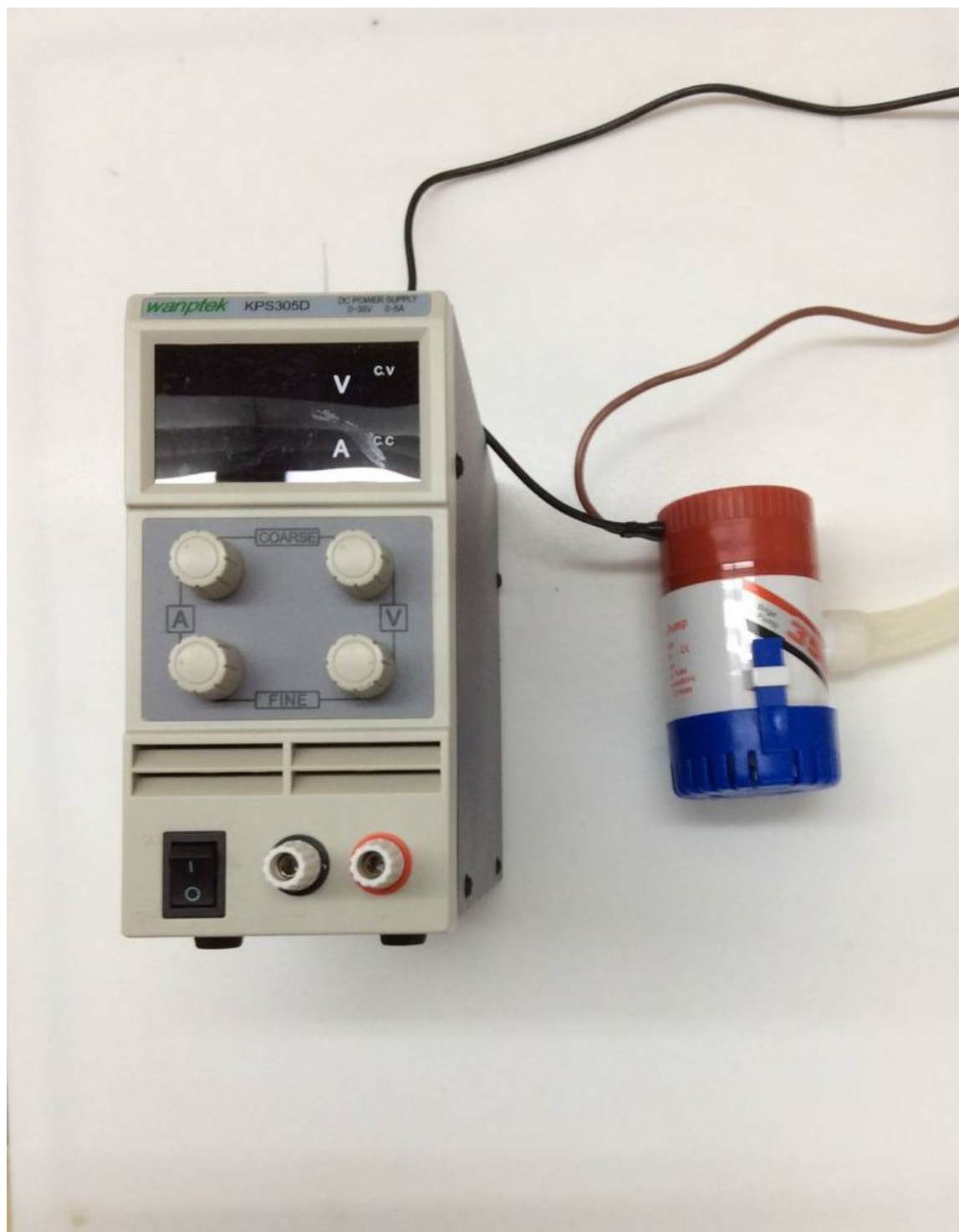


Figura 25 – Fonte elétrica e bomba de sucção de água.