

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
INSTITUTO DE FÍSICA

FERNANDO CARDOSO GUIMARÃES

**ESTUDO DAS TEORIAS DE CALIBRE E RECENTES
PERSPECTIVAS**

BRASÍLIA
14 DE DEZEMBRO DE 2023

Fernando Cardoso Guimarães

Estudo das Teorias de Calibre e Recentes Perspectivas

Monografia apresentada ao Instituto de Física da Universidade de Brasília como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Bacharel em Física.

Orientador: Marco Cezar Barbosa Fernandes

Universidade de Brasília – UnB

Instituto de Física

Brasília

14 de dezembro de 2023

Fernando Cardoso Guimarães

Estudo das Teorias de Calibre e Recentes Perspectivas/ Fernando Cardoso
Guimarães. – Brasília, 14 de dezembro de 2023-

118 p. : il. (algumas color.) ; 30 cm.

Orientador: Marco Cezar Barbosa Fernandes

Monografia – Universidade de Brasília – UnB
Instituto de Física, 14 de dezembro de 2023.

1. Teorias de calibre. 2. Grupoides. I. Orientador. II. Universidade de Brasília.
III. Instituto de Física. IV. Título

CDU 02:141:005.7

Fernando Cardoso Guimarães

Estudo das Teorias de Calibre e Recentes Perspectivas

Monografia apresentada ao Instituto de Física da Universidade de Brasília como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Bacharel em Física.

Trabalho aprovado. Brasília, 14 de dezembro de 2023:

Marco Cezar Barbosa Fernandes
Orientador

Arsen Melikyan
Convidado 1

Mariana Penna Lima Vitenti
Convidado 2

Brasília
14 de dezembro de 2023

*Dedico este trabalho a todo estudante que sonha em alcançar as fronteiras da ciência
para ajudar a ampliar os horizontes do conhecimento humano.*

Agradecimentos

Agradeço em primeiro lugar à minha família, especialmente meus pais, Joel e Suely, além das minhas irmãs, Bárbara e Stephanie. Agradeço especialmente pela paciência e compreensão de todos, pois tenho priorizado a busca pelo conhecimento, muitas vezes às custas da realização de atividades melhor remuneradas – que poderiam propiciar a todos um maior conforto material – e às quais eu teria acesso, naturalmente, em vista da formação acadêmica que já possuo. Todavia, o desejo de conhecer me é irresistível, sobretudo no que tange às leis mais fundamentais que regem a natureza. Como poderia eu ficar inerte, sem saber ainda como as estruturas fundamentais do universo se comportam, como seus constituintes interagem entre si, de que maneira tudo parece se encadear nesse todo harmonioso? O prazer de aprender, de ter a sensação de que se entendeu determinado conceito ou fenômeno, dificilmente pode ser substituído por aquele proporcionado por meros bens materiais.

Dando continuidade aos agradecimentos, devo mencionar a professora Letícia Gonçalves Nunes Coelho, atual coordenadora do bacharelado em física, pelo apoio no processo de dispensa de certas disciplinas, as quais me parecia desnecessário cursar, devido à minha formação acadêmica e experiência profissional como engenheiro de controle e automação. Desse modo, devo estender os agradecimentos aos funcionários do instituto de física e da Universidade de Brasília que também me auxiliaram nesse sentido. Devo também agradecer ao meu colega João Saboya. Como entrei como portador de diploma no meio do curso, sobrevivendo o período de pandemia e estudos remotos, tipo pouco contato com os demais estudantes. Felizmente, fiz várias matérias com o Saboya, o qual me auxiliou com dúvidas relacionadas às regras do curso, além de ter me falado das linhas de pesquisa do professor Marco Cezar, com quem ele já vinha fazendo suas atividades de iniciação científica e trabalho de conclusão de curso.

Por fim, agradeço ao meu orientador, o professor Marco Cezar Barbosa Fernandes, não só pela orientação e aconselhamento na realização deste trabalho, mas sobretudo por compartilhar sua visão pessoal acerca dos problemas atuais da física, além do seu entusiasmo em relação às novas áreas de pesquisa que surgem. No início do curso, honestamente não me preocupava com notas, trabalhos, nem mesmo com o título acadêmico em si. Meu principal objetivo era mergulhar no universo da pesquisa em física, porquanto só conhecia o da engenharia, ver de mais perto os artigos, a formulação matemática das teorias mais fundamentais, saber até onde eu poderia chegar e quais os caminhos eu deveria seguir no que tange àquele objetivo maior de busca pelo conhecimento. Agradeço, pois, ao professor Marco Cezar por ter me auxiliado nesse sentido, por ter compartilhado suas experiências e apontado linhas de pesquisa, autores e ideias.

Ao longo do ano, pude acumular uma extensa lista de referências bibliográficas valiosíssimas, das quais nunca tinha ouvido falar; aprendi uma série de conceitos profundos e abstratos, aprimorei minhas próprias ideias, visando as pesquisas do futuro. A jornada valeu a pena, agradeço, pois, a todos os que me ajudaram na caminhada.

*“I want to know His thoughts [...];
the rest are details.
(Albert Einstein)”*

Resumo

Esse trabalho contém um estudo geral das teorias de calibre, no qual procuramos apresentar de forma breve, porém completa, os conceitos matemáticos que fundamentam as formulações modernas dessas teorias, como variedades diferenciáveis, formas diferenciais, grupos e fibrados. Mostramos como o formalismo adequado fornece uma visão unificada das descrições das interações fundamentais da natureza, a qual se revela eminentemente geométrica. No final do texto, introduzimos o conceito de grupoides e algebroides de Lie, uma abordagem relativamente nova que permite generalizações adicionais para os conceitos que são fundamentais para as teorias de calibre modernas, como os grupos e fibrados.

Palavras-chaves: variedades diferenciáveis, formas diferenciais, grupos de Lie, álgebra de Lie, fibrados, grupoides de Lie, algebroides de Lie.

Abstract

This work contains an overall study about gauge theories in which we sought to present briefly, although in a sufficiently complete fashion, the mathematical concepts that provide the foundations for the modern formulations of these theories. Such concepts include differentiable manifolds, differential forms, groups and bundles. We show how the appropriate formalism provides an unified view of the descriptions of nature's fundamental interactions, which reveals itself as eminently geometric. In the end of the manuscript, we present the Lie groupoids and Lie algebroids, a relatively new approach that allows further generalizations for the mathematical concepts that are fundamental to the modern gauge theories, such as groups and bundles.

Key-words: differentiable manifolds, differential forms, Lie groups, Lie algebra, bundles, Lie grupoids, Lie algebroids.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Campos \mathbf{E} e \mathbf{B} em diferentes sistemas de referência.	26
Figura 2 – Ilustração do conceito de mapas e aplicações de transição para um espaço topológico X	38
Figura 3 – Exemplo de como cobrir completamente a esfera S^2 com dois mapas.	39
Figura 4 – Ilustração das definições dadas de espaço tangente.	43
Figura 5 – Ilustração do conceito de orientação.	45
Figura 6 – Exemplo de vetores paralelos sobre a esfera S^2 mergulhada em E^3	66
Figura 7 – Exemplo de transporte paralelo de um vetor sobre a esfera S^2 mergulhada em E^3	66
Figura 8 – Visualização da simetria associada ao grupo diedral D_2	75
Figura 9 – Ilustração de $SO(2)$ como uma variedade diferenciável ligada a S^1	79
Figura 10 – Ilustração de $SO(3)$ como uma variedade diferenciável ligada a S^3	79
Figura 11 – Exemplos de órbitas de $SO(2)$ (esquerda) e $SO(3)$ (direita).	81
Figura 12 – Exemplos de fibrados: o cilindro e a faixa de Möbius	86
Figura 13 – Representação de um fibrado por meio do espaço base X e das fibras F_x	88
Figura 14 – Estrutura de ladrilhos dotada de simetria local e global.	108
Figura 15 – Estrutura de ladrilhos dotada apenas de simetria local.	108
Figura 16 – Correspondência entre pontos de estrutura de ladrilhos.	108
Figura 17 – Representação gráfica do elemento g de um grupoide G	109
Figura 18 – Representação gráfica da composição de dois elementos $g, h \in G$	109
Figura 19 – Representação gráfica do elemento inverso g^{-1} e da identidade ε	111
Figura 20 – Representação gráfica dos conjuntos G_x (esq.), G^y (centro) e G_x^x (dir.).	111
Figura 21 – Relação entre fibras via grupoide de ação.	113
Figura 22 – Ilustração do processo infinitesimal de construção de um algebroide de Lie.	113

Lista de tabelas

Tabela 1 – Tabela de multiplicação do grupo $G_3 = \{e, a, b\}$	74
Tabela 2 – Tabela de multiplicação do grupo diedral $D_2 = \{e, v, h, r\}$	74

Lista de abreviaturas e siglas

RE Teoria da Relatividade Especial

SR Sistema de Referência

SRI Sistema de Referência Inercial

RG Teoria da Relatividade Geral

Lista de símbolos

$T_p M$	espaço tangente de uma variedade diferenciável
$T_p^* M$	espaço cotangente de uma variedade diferenciável
e_a	elemento de uma base do espaço tangente de uma variedade diferenciável
e^a	elemento de uma base do espaço cotangente de uma variedade diferenciável
$\mathcal{T}_q^p(M)$	espaço dos tensores do tipo $\binom{p}{q}$ em uma variedade M
\otimes	produto tensorial
\wedge	produto exterior
d	derivada exterior
\lrcorner	produto interior
$*$	operador <i>Hodge</i>
$\Lambda^p(M)$	espaço das p -formas em uma variedade M
Γ_{bc}^a	conexão afim
∇_V	derivada covariante na direção do vetor V
R_{bcd}^a	tensor de curvatura
R_{ab}	tensor de Ricci
R	escalar de curvatura
ω	forma-conexão
Ω	forma-curvatura
$\pi : E \rightarrow X$	função de projeção de um fibrado
S	funcional de ação

Sumário

	Introdução	25
0.1	Uma questão de perspectiva	25
0.2	Princípios fundamentais	27
0.3	Em busca das conexões profundas	28
0.4	Uma possível abordagem	32
0.5	Organização do trabalho	33
I	VARIEDADES DIFERENCIÁVEIS, GRUPOS DE LIE E FIBRADOS	35
1	VARIEDADES E GEOMETRIA DIFERENCIAL	37
1.1	Variedades diferenciáveis	37
1.2	Álgebras tensorial e exterior	49
1.3	Geometria diferencial com formas diferenciais	62
2	GRUPOS E FIBRADOS	73
2.1	Grupos e suas representações	73
2.2	Grupos de Lie	78
2.3	Álgebra de Lie de um grupo de Lie	81
2.4	Fibrados	84
II	TEORIAS DE CALIBRE	89
3	O TEOREMA DE NOETHER E SIMETRIAS NA NATUREZA	91
3.1	O princípio da mínima ação	91
3.2	Simetrias e grandezas conservadas	93
4	TEORIAS DE CALIBRE EM FIBRADOS	97
4.1	Forma conexão A e forma intensidade de campo F	97
4.2	Transformações de calibre	99
4.3	Campos como objetos geométricos	100
III	RECENTES PERSPECTIVAS E CONCLUSÕES	105
5	GRUPOIDES	107

5.1	Grupoides de Lie	107
5.2	Ação do grupoide sobre um conjunto	112
5.3	Algebroides de Lie	112
6	CONCLUSÃO	115
	REFERÊNCIAS	117

Introdução

Nesta introdução estabelecemos um panorama por todas as ideias que serão abordadas ao longo do trabalho, apresentando a motivação e o contexto que permitem seu encadeamento. Procuramos abordar os conceitos de forma principalmente qualitativa neste primeiro capítulo, esperando que a pouca terminologia matemática que aqui aparece seja clara em si mesma, de sorte a não requerer maiores explicações, porquanto reservamos os detalhes e definições mais rigorosos para os capítulos subsequentes. Que o leitor descanse os pés na areia macia, antes de subir a encosta escarpada.

0.1 Uma questão de perspectiva

A Teoria da Relatividade Especial (RE), publicada por Albert Einstein (1879-1955) em 1905 inaugurou na física o processo de unificação de grandezas de natureza aparentemente distintas. Por exemplo, a partir da RE verificou-se que as medidas do campo elétrico \mathbf{E}^1 e magnético \mathbf{B} dependem do sistema de referência (SR) adotado ², sendo meras expressões particulares de uma mesma entidade, o quadrivetor A^μ – com $\mu = 0, 1, \dots, 3$ – que se mantém independente do referencial³. Assim, dois observadores podem discordar quanto às medidas feitas sobre tais campos individualmente, todavia, eles concordariam quanto a A^μ . A unicidade dos campos elétrico e magnético é, em alguns aspectos, ainda mais notável que a traduzida pelas coordenadas x^μ do espaço-tempo ou pelo quadrivetor momento p^μ , pois sua observação pode ser feita no dia-a-dia, por meio das mais banais tecnologias eletromecânicas (ver tópico 13-6 em (FEYNMAN; LEIGHTON; SANDS, 1964)). Com efeito, o exemplo da Figura 1 mostra como, por um simples experimento mental, podemos inferir a relação íntima entre \mathbf{E} e \mathbf{B} , bem como a necessidade da aplicação da RE para solucionar os paradoxos que surgem naturalmente quando consideramos observações desses campos em SRs distintos.

Com as equações de Maxwell os campos elétrico e magnético puderam ser vistos como intimamente relacionados, sendo, porém, ainda distintos. Com a RE a distinção desaparece: ambos são facetas de uma mesma entidade, o campo A^μ , tendo sido necessário, para tanto, a ampliação de nossas perspectivas quanto à noção de sistema de referência inercial (SRI), abolindo a ideia de referenciais absolutos ou privilegiados. Portanto, es-

¹ Usaremos a notação convencional em que vetores de \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3 são escritos em negrito. Vetores de maior dimensão, tensores ou matrizes serão designados por letras com formatação padrão.

² Na RE os sistemas de referência são sempre inerciais, ou seja, supõe-se estarem em repouso ou em movimento retilíneo uniforme

³ Por independência do SR queremos dizer que A^μ se transforma do mesmo modo que as coordenadas x^μ do espaço-tempo quando mudamos de um SR para outro, a saber, via transformações de Lorentz.

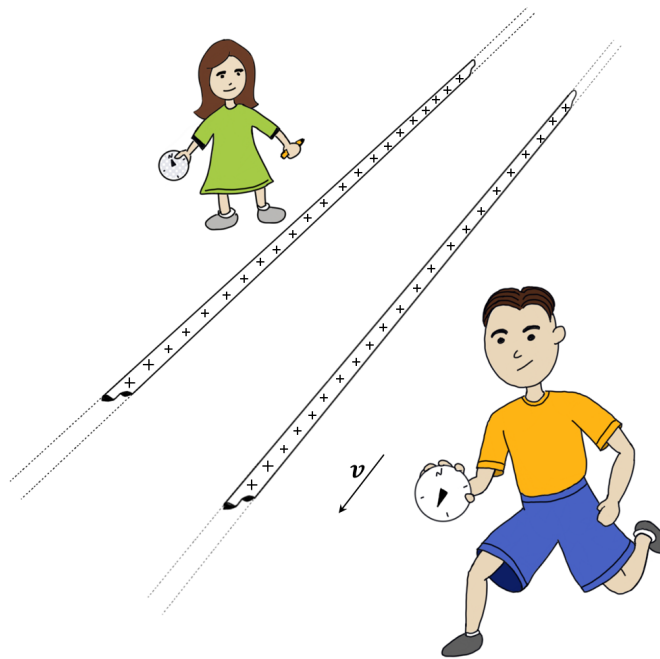


Figura 1 – A figura mostra dois observadores, Alice e Bob, próximos a dois bastões não condutores, paralelos, de comprimento infinito e com distribuição de cargas idêntica e homogênea. Alice está parada em relação aos bastões e vê apenas os campos elétricos produzidos por ambos, que os levam a se repelirem. Bob se move paralelamente aos bastões com velocidade v , vendo, além dos campos elétricos, campos magnéticos cujas forças de Lorentz associadas - dependentes de v - levam os bastões a se atraírem. Para qual magnitude de v Bob vê as forças de Lorentz anularem as eletrostáticas? Nesse caso, Bob veria os bastões parados enquanto Alice os veria se afastarem? A resposta à primeira pergunta é $v = c$, sendo c a velocidade da luz e, portanto, a resposta à segunda é negativa, pois esse resultado sugere que devemos aplicar a RE. Usando a dilatação do tempo, a contração dos comprimentos e a correção da massa da RE, concluímos que Alice e Bob veem os mesmos eventos em seus respectivos SRs.

ses fenômenos elétricos e magnéticos, que por séculos foram vistos como completamente não relacionados, uniram-se num só; sua distinção era apenas aparente, uma simples consequência do nosso entranhado hábito de tratarmos a realidade que nos cerca mais de perto - isto é, o SR local em que nos situamos - de forma privilegiada. A partir desse exemplo, temos a seguinte questão: será que a distinção entre o campo eletromagnético e as outras interações fundamentais da natureza não são apenas aparentes? Que outras amarras de pensamento deveríamos desatar, ou perspectivas mais amplas poderíamos adotar, para enfim descobrir que todos esses fenômenos são um só - se é que o são? Alcançar tal unicidade tem sido o grande objetivo da física desde o início do século XX, mas esse propósito de unificação não se traduz apenas em unir campos, outrossim, em colocar todas as teorias que os descrevem sob o mesmo paradigma conceitual e formalismo matemático. Nas próximas seções discutiremos esses dois últimos elementos.

0.2 Princípios fundamentais

A Teoria da Relatividade Especial foi construída sobre dois postulados simples, propostos por Einstein:

1. As leis da física são as mesmas em qualquer sistema de referência inercial.
2. A velocidade da luz no vácuo é a mesma para qual observador inercial, sendo independente do movimento da fonte.

O primeiro postulado é o que se denomina princípio da relatividade. Alguns autores diriam que o segundo é redundante, sendo consequência do primeiro (ver discussão em (GRIFFITHS, 2021), p. 506). De fato, se as leis da física são as mesmas em qualquer SRI, dois observadores em movimento uniforme entre si usariam as mesmas equações de Maxwell para deduzir um mesmo valor para a velocidade da luz: $c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$. Entretanto, um segundo postulado ainda seria necessário nesse exemplo simples, pois, se as leis da física são as mesmas, as propriedades do meio, representadas por ϵ_0 e μ_0 ⁴, poderiam ser diferentes.

De qualquer modo, o segundo postulado, por sua maior especificidade, poderia ser traduzido de diferentes formas, desde que raciocinásemos em termos de equações. O primeiro postulado, porém, é de tal simplicidade, que não se faz preciso entrar nos domínios da matemática, pois ele se estabelece num ponto anterior à qualquer tentativa de equacionamento. Poderíamos dizer que ele é evidente por si mesmo, talvez óbvio⁵, pois supor o contrário seria simplesmente absurdo. Essa característica do primeiro postulado de Einstein é o que motiva o título desta seção: por princípios fundamentais nos referimos a esses conceitos que estão no cerne das leis da física, que não podem ser demonstrados matematicamente, mas apenas postulados; eles devem ser o ponto de partida de qualquer raciocínio que vise um conhecimento mais profundo das leis da natureza. Portanto, a unificação dos fenômenos físicos deve também significar a colocação de todos eles sobre as mesmas bases, isto é, sob os mesmos princípios fundamentais.

Se há um princípio unificador de todos os fenômenos físicos, esse seria o princípio variacional da mínima ação. Com efeito, aparentemente todas as teorias físicas consideradas fundamentais requerem uma formulação em termos do funcional de ação S (LE MOS, 2018), desde as que tratam dos fenômenos quânticos até as que lidam com problemas cosmológicos. Partindo desse aparato matemático, Amalie Emmy Noether (1882-1935) demonstrou seu famoso teorema, que estabelece uma relação direta entre as simetrias observadas na natureza e determinadas grandezas conservadas. Em linhas gerais, dados

⁴ Os parâmetros ϵ_0 e μ_0 designam a permissividade elétrica e a permeabilidade magnética do vácuo, respectivamente, no sistema internacional (SI).

⁵ Os cientistas do século XIX, incluindo o próprio Maxwell, certamente não diriam isso.

um conjunto de coordenadas e campos (x^μ, ϕ^ν) que se transformam de acordo com alguma operação de simetria, de sorte que a transformação $(x^\mu, \phi^\nu) \mapsto (x'^\mu, \phi'^\nu)$ implica em $S[x'^\mu, \phi'^\nu] - S[x^\mu, \phi^\nu] \rightarrow 0$, com $(x'^\mu, \phi'^\nu) \rightarrow (x^\mu, \phi^\nu)$ ⁶, então, obtém-se uma grandeza conservada.

Ora, se observarmos atentamente o primeiro postulado de Einstein da RE, veremos que ele nada mais faz que reconhecer algumas simetrias na natureza. Podemos, assim, associá-lo aos seguintes postulados:

- a.** O espaço é homogêneo. Não há posição principal no espaço e as leis da física devem ser invariantes por translações.
- b.** O tempo é homogêneo. Não há instante privilegiado e as leis da física devem ser invariantes por deslocamentos temporais.
- c.** O espaço é isotrópico. Não há direção preferencial no espaço e as leis da física devem ser invariantes por rotações.

Por invariantes queremos dizer que a diferença entre os funcionais de ação se anula, no sentido dos limites descritos anteriormente. Destarte, as transformações de simetria a que nos referimos dizem respeito às operações que deixam S - e, conseqüentemente, as equações de movimento - invariante.

A aplicação do teorema de Noether aos postulados **a**, **b** e **c**, levam à dedução da conservação do momento linear, da energia e do momento angular, respectivamente. Tais leis de conservação são anteriores ao teorema e foram concebidas a partir de considerações acerca das forças e campos envolvidos em fenômenos particulares. Todavia, a observação da conservação dessas grandezas nos mais diversos experimentos levou à concepção de que se tratavam de princípios fundamentais. O que o teorema de Noether nos mostra, porém, é que eles são consequência de outros princípios, esses sim fundamentais, quais sejam, a existência de simetrias na natureza, descritas nos postulados **a**, **b** e **c**. Tal mudança de paradigma é significativa, pois esses princípios baseados em simetrias são simples e intuitivos, evidentes por si mesmos⁷, por assim dizer, do mesmo modo que o primeiro postulado de Einstein da RE o é. Quais outros princípios podemos encontrar procurando por simetrias na natureza? Eis o assunto da próxima seção.

0.3 Em busca das conexões profundas

As simetrias descritas na seção anterior, associadas aos postulados **a**, **b** e **c**, são denominadas externas, pois se referem a esse palco no qual os fenômenos físicos ocorrem,

⁶ Há uma sutileza no modo de tomar esses limites, pois não estamos lidando aqui com o cálculo diferencial, mas com o cálculo variacional. Contudo, deixaremos esses detalhes para mais tarde.

⁷ Parece-nos significativo que os postulados da mecânica quântica careçam de tais características.

o qual, a partir da RE, passou a ser visto como um *continuum*, denominado espaço-tempo. Com os desdobramentos da mecânica quântica, porém, foram descobertos outros tipos de simetrias, intrínsecas às partículas e campos, as quais podem ser ditas como internas.

Assim, seja $\phi(x)$ um campo complexo, função das coordenadas x^μ do espaço-tempo, onde adotamos a simplificação $(x) = (x^0, x^1, \dots, x^3)$. Podemos conceber um tipo de simetria associada a uma mudança de fase do campo, ou seja, desejamos que o funcional de ação que leva às equações de movimento de $\phi(x)$ seja invariante por uma transformação do tipo $\phi(x) \mapsto e^{-i\alpha}\phi(x)$, onde α é uma constante. Tal definição é motivada pelas propriedades da função de onda na mecânica quântica, contudo, deixaremos os detalhes para os próximos capítulos. De forma consistente com o esperado, verifica-se que a lagrangeana de $\phi(x)$ é, de fato, invariante por esse tipo de transformação, denominada global, uma vez que a fase α é a mesma para cada ponto x . Contudo, se avaliamos o efeito de uma transformação local $\phi(x) \mapsto e^{-i\alpha(x)}\phi(x)$, verificamos que a invariância é perdida. Para resgatá-la, introduzimos na lagrangeana um novo campo A^μ , o qual não só a mantém invariante para transformações de fase de $\phi(x)$, como também para transformações de si mesmo do tipo $A^\mu \mapsto A^\mu + \partial_\mu\alpha(x)$ ⁸.

Sim, o campo A^μ introduzido na lagrangeana no parágrafo anterior é o mesmo quadrivetor descrito na seção 0.1, a partir do qual podem ser obtidos os campos **E** e **B** em qualquer SRI. Eis a conclusão a que chegamos: apenas exigindo-se que certo tipo de simetria fosse satisfeita, nesse caso, uma simetria interna ao sistema, simplesmente deduzimos a existência do campo eletromagnético. Além disso, a aplicação do teorema de Noether à nova lagrangeana implica também na obtenção de uma grandeza conservada, a qual é, nada mais, nada menos, que a própria carga elétrica. Esse resultado surpreendente sugere que as simetrias, internas ou externas, estão no cerne de todos os fenômenos naturais, constituindo os princípios fundamentais a partir dos quais se podem deduzir as equações matemáticas que governam qualquer sistema.

A teoria de grupos fornece o arcabouço natural para se lidar com simetrias. De fato, se $s_1 \in S$ corresponde a uma operação de simetria do tipo S a ser aplicada ao sistema X , de sorte que $s_1X \sim X$ – em que o símbolo ‘ \sim ’ denota uma relação de equivalência associada à invariância de X – temos que a aplicação consecutiva de uma operação $s_2 \in S$, porém distinta, deve levar ao mesmo resultado, isto é, $s_2s_1X \sim X$. Tendo em vista a relação anterior, é natural esperar que haja $s_3 \in S$ tal que $s_3X \equiv s_2s_1X$, de modo que $s_3 = s_2s_1$. Também é natural darmos um nome à operação – ou ausência dela – que deixa X inalterado, donde temos a identidade única e definida por $eX = X$. Ademais, se $X = sY$, então $esY = sY$, ou seja, $es = s$. Ainda, se $sX = Y \sim X$, podemos imaginar que haja \tilde{s} tal que $\tilde{s}Y = X$, isto é, $\tilde{s}Y = \tilde{s}sX = X$, portanto, temos $\tilde{s}s = e$, e normalmente usamos a notação $s^{-1} := \tilde{s}$. Ora, temos as propriedades: (i) $s_2s_1 \in S$, se $s_1, s_2 \in S$; (ii) $\exists e$

⁸ Como de praxe, definimos $\partial^\mu := \partial/\partial x_\mu$ e $\partial_\mu := \partial/\partial x^\mu$.

tal que $es = s$, $\forall s \in S$; (iii) $\forall s \in S$, $\exists s^{-1}$, onde $s^{-1}s = e$; elas correspondem a alguns dos axiomas básicos que definem um grupo, o qual, nesse exemplo, seria o conjunto S^9 . Dessa forma, a transformação de fase aplicada a $\phi(x)$ é uma operação de simetria associada ao grupo das transformações unitárias unidimensionais $U(1)$, do qual o conjunto dos números complexos da forma $e^{-i\alpha}$ constituem uma representação unidimensional complexa. Além disso, convém mencionar que o grupo $U(1)$, assim como vários outros, é um grupo de Lie, isto é, ele possui também características de variedade diferenciável. Veremos tais conceitos com mais detalhes no capítulo 2.

Sabia-se desde antes do resultado descrito dois parágrafos acima que a formulação das leis do eletromagnetismo em termos de A^μ implicava em uma liberdade de escolha de suas componentes. Com efeito, dados dois quadrivetores A^μ e A'^μ , os campos elétrico e magnético obtidos a partir deles podem ser idênticos em qualquer ponto x^ν , desde que eles estejam relacionados por $A'^\mu = A^\mu + \partial^\mu\alpha(x)$. A fixação das componentes de A^μ é denominada uma escolha de calibre, e a transformação entre A^μ e A'^μ é dita uma transformação de calibre. Ainda, como tal transformação corresponde a uma simetria representada por um grupo, fala-se em calibração do grupo, de modo que há uma relação estreita entre transformações de calibre, grupos e simetrias. Por fim, designa-se por teoria de calibre aquela que se funda na relação entre esses três conceitos.

O eletromagnetismo não é a única teoria de calibre bem-sucedida. Retomando a associação entre grupos e simetrias, a homogeneidade do espaço-tempo corresponde ao grupo das translações em quatro dimensões $T(4)$, enquanto a isotropia do espaço corresponde ao grupo de rotações $SO(3)$. Outra simetria importante na RE diz respeito à mudança de um SRI para outro que se move com velocidade constante – e com os eixos correspondentes alinhados – em relação ao primeiro¹⁰, a qual, juntamente com uma rotação, constitui uma transformação de Lorentz. Ainda, a operação de translação por $T(4)$ juntamente com uma transformação de Lorentz constitui uma transformação de Poincaré, donde obtemos os grupos de Lorentz e Poincaré. O grupo de Poincaré – um grupo externo, pois está associado a uma simetria externa – forma a base para o modelo padrão da física de partículas. Ademais, a calibração dos grupos internos $SU(3)$ e $SU(2)$ modela a interação forte e a interação fraca, respectivamente, na teoria de Yang-Mills (HEHL, 2017).

Tivemos ao longo do desenvolvimento da física no século XX, portanto, a convergência das descrições de quase todas as partículas e interações conhecidas como teorias de calibre, às quais se baseiam no princípio fundamental da preservação de simetrias. A gravidade, porém, descrita pela teoria da relatividade geral (RG) de Einstein, vem resistindo há cerca de cem anos aos esforços de unificação às demais forças fundamentais

⁹ É possível provar, isto é, não é preciso impor, que a partir dos três axiomas dados também valem $se = s$ e $ss^{-1} = e$.

¹⁰ Em inglês, tal mudança de SRI é denominada *boost*.

da natureza. Ora, como essas últimas são descritas por teorias de calibre, baseadas em princípios fundamentais, não teríamos nessa característica uma pista para a união com a gravidade, isto é, não seria possível descrevê-la por uma teoria de calibre?

Em (HEHL, 2017) encontramos uma discussão geral acerca da possibilidade de se descrever a gravidade por meio de teorias de calibre. Começando com a menção ao trabalho de Utyama (UTIYAMA, 1956), que procurou deduzir as equações de campo para a gravidade a partir da calibração do grupo de Lorentz $SO(1,3)$, aquele autor discute a generalização de tal ideia considerando a calibração do grupo de Poincaré. O resultado a que se chega é interessante: obtém-se o campo gravitacional, mas a geometria que emerge dessa abordagem não é a da RG de Einstein, mas uma variante, proposta por Élie Cartan (1869-1951), em que o espaço-tempo passa a ter uma torção não nula. No prefácio de (BLAGOJEVIC; HEHL, 2012), onde encontramos também uma lista mais detalhada de teorias de calibre para a gravidade, T. W. B. Kibble, quem primeiro fez a calibração do grupo de Poincaré (KIBBLE, 1961), observa que na RG, a curvatura é originada pela energia e o momento, ao passo que na teoria de calibre de Poincaré, tem-se também a torção, provida pelo *spin*.

Uma das consequências notáveis de tais desenvolvimentos é a primazia que as conexões afins¹¹ possuem em detrimento da métrica riemanniana ou mesmo da curvatura, a despeito do fato de que são essas últimas que aparecem explicitamente nas equações de Einstein do campo gravitacional. De fato, em (SCHRÖDINGER, 1985), Erwin Schrödinger (1887-1961) aponta que parece mais natural e simples colocar as conexões em primeiro plano, sendo elas seu ponto de partida na dedução das equações de campo da RG. Logo, como ele mesmo observa, o desenvolvimento que ele apresenta em seu trabalho segue uma sequência diferente da histórica, porquanto o conceito de conexão afim e transporte paralelo eram desconhecidos de Einstein e dos demais físicos na época em que sua teoria da gravidade foi publicada, em 1915. Todavia, a importância dessas ideias foi logo percebida por Arthur Eddington (1882-1944) e Hermann Weyl (1885-1955), além do próprio Einstein, para quem a métrica deveria ser vista como de secundária importância – apud (HEHL, 2017). Também é interessante que no mesmo trabalho citado acima, Schrödinger mencione as tentativas de Eddington e Einstein em encontrar uma formulação da gravidade puramente em termos das conexões afins e que, na opinião dele, a falha de ambos em consegui-lo se deve ao fato de terem considerado as conexões como simétricas desde o início, ou seja, um modelo com torção nula, o que nos remete à discussão do parágrafo anterior (trataremos de conexões afins e torção na seção 1.3).

Para finalizar essas observações, citamos a seção 10.20 de (NASH; SEN, 1988),

¹¹ Como veremos nos capítulos seguintes, a conexão afim é um conceito muito bem-definido na geometria diferencial. O termo "conexões", no título desta seção, porém, tem um caráter muito mais geral, naturalmente. Entretanto, embora não tenha sido intencional, essa coincidência de vocábulos não é de todo inapropriada.

na qual os autores enfatizam a relevância física da conexão em relação à curvatura apresentando o efeito Bohm-Aharanov, que consiste em mudanças observáveis no padrão de difração de elétrons numa região não simplesmente conectada, mas em que a curvatura é nula¹².

0.4 Uma possível abordagem

O desenvolvimento e amadurecimento de determinados conceitos matemáticos foi essencial para a elaboração das teorias físicas modernas. Vejamos, por exemplo, a RG. A partir das ideias de Einstein, vimos que a concepção do espaço e do tempo como euclidianos não representaria necessariamente a realidade, passando-se a considerar ambos como amalgamados em um espaço-tempo dotado de propriedades próprias e passíveis de alteração; essa mudança de paradigma, porém, só foi possível graças à formalização das variedades diferenciáveis e das ditas geometrias não euclidianas. Outra formulação física teórica importante foi possibilitada pela teoria de grupos, graças à qual a mecânica quântica pôde ser formulada em bases sólidas, além de permitir os desdobramentos posteriores como a teoria quântica de campos, culminando com o modelo padrão da física de partículas. Também veremos, nos capítulos 2 e 4, como as ferramentas disponibilizadas pela teoria de fibrados tornou possível a aproximação de todos os modelos de interações fundamentais, incluindo a gravidade, sob um mesmo formalismo. Que outros desenvolvimentos matemáticos, ou extensão de conceitos já consolidados, poderíamos adotar visando encontrar uma compreensão mais completa das leis da natureza? Nosso objetivo nesta seção consiste em apresentar uma perspectiva particular que aponta nesse sentido.

Vimos brevemente como os grupos desempenham um papel essencial para as teorias de calibre. E se fosse possível estender ou generalizar o conceito de grupo? Essa é uma possibilidade factível, e os denominados grupoides são candidatos a semelhante intento, bem como os algebroides a eles associados. Historicamente, podemos associar esses conceitos ao das álgebras suaves (SOHNIUS, 1983) – em que as constantes de estrutura da álgebra passam a ser funções dependentes do ponto do espaço-tempo e do campo de calibre – e ao das chamadas teorias de calibre não lineares (SCHOUTENS; SEVRIN; NIEUWENHUIZEN, 1991). Em (BOJOWALD; KOTOV; STROBL, 2005) é sugerida a extensão do arcabouço matemático das teorias de Yang-Mills pela substituição do grupo de Lie por um grupoide de Lie; os autores, entre outras coisas, também investigam a correspondência entre as teorias de calibre de Chern-Simons em três dimensões com o modelo sigma de Poisson (PSM, do inglês *Poisson sigma model*) possibilitada pelos algebroides. Em (STROBL, 2004) o autor também argumenta em favor da utilização de algebroides ao

¹² A curvatura nesse exemplo não é a do espaço-tempo, como poderíamos presumir ao pensar na RG. Nos próximos capítulos veremos que, além da gravidade, também existem interpretações geométricas para o eletromagnetismo e outras interações fundamentais.

apresentá-los como uma possibilidade de se desenvolver novos tipos de teorias de calibre, sugerindo que eles poderiam unir diferentes teorias de Yang-Mills em uma ampliação das ideias de simetria a elas associadas. Ainda, em (BLOHMANN; FERNANDES; WEINSTEIN, 2013), ao investigar as restrições impostas à métrica riemanniana e a um campo 2-tensorial covariante para que possam ser admitidos como condições iniciais nas equações de Einstein, os autores descobriram que a estruturas de simetria dessas restrições e seus correspondentes parênteses de Poisson obedecem não à uma álgebra de Lie, mas a um algebroide de Lie advindo de um grupoide de difeomorfismos entre hipersuperfícies do tipo espaço em variedades de Lorentz.

Uma vez que os grupoides e algebroides de Lie generalizam os conceitos de grupo e álgebra de Lie, temos a possibilidade de estender as teorias atuais, em especial as de calibre, e os trabalhos citados apontam nessa direção. Feitas essas observações preliminares, introduziremos as ideias básicas por trás desses conceitos na última parte deste trabalho.

0.5 Organização do trabalho

Esta monografia foi organizada em três partes, cada qual com seu conjunto de capítulos. Na primeira parte, voltada para as bases matemáticas do trabalho, apresentamos: as variedades diferenciáveis, a álgebra exterior das formas diferenciáveis e a geometria diferencial que emerge da junção de ambas no capítulo 1; o conceito de grupos e álgebras de Lie, suas representações, a noção de ação de um grupo, a definição de fibrados, bem como os conceitos de transporte paralelo e conexões nesses objetos no capítulo 2. Na segunda parte adentramos mais intensamente no âmbito da física, onde nos valem dos conceitos da primeira parte para realizar estudos sobre as teorias de calibre. Assim, nessa parte, temos: o princípio da mínima ação, as simetrias e grandezas conservadas no capítulo 3, dedicado ao teorema de Noether; a formulação das teorias de calibre em fibrados e suas interpretações geométricas aplicadas à física no capítulo 4. Na última parte, apresentamos as novas possibilidades que se descortinam com os grupoides, especialmente os de Lie, no capítulo 5; as conclusões são feitas no capítulo 6.

Parte I

Variedades diferenciáveis, Grupos de Lie e Fibrados

1 Variedades e geometria diferencial

O conceito de variedade diferenciável é fundamental para qualquer área da física teórica, basta notar que o espaço-tempo é modelado como uma variedade diferenciável de quatro dimensões. Neste capítulo apresentamos os fundamentos desse conceito e alguns resultados importantes que a ele dizem respeito e que encontram aplicações nas teorias de calibre e na teoria da relatividade. A matemática deste e dos capítulos subsequentes é padrão, de modo que não explicitaremos as referências bibliográficas em cada etapa apresentada, porém, indicaremos as principais fontes que utilizamos para que o leitor possa buscar os detalhes que omitimos devido à exiguidade do tempo e do espaço.

1.1 Variedades diferenciáveis

Mapas e atlas

Para tratarmos prontamente o assunto que nos interessa vamos nos valer do conceito de espaço topológico, o qual não explicaremos aqui, mas que o leitor – que tem em mente aplicações na física – poderá encontrar em (EPSTEIN, 2010), (NASH; SEN, 1988), (FECKO, 2006), entre outras referências. As definições a seguir acerca de variedades diferenciáveis também podem ser encontradas nas referidas fontes, bem como na obra (JÄNICH; KAY, 2001).

Assim, seja X um espaço topológico dotado de duas propriedades: (i) ele é *Hausdorff*, ou seja, para quaisquer dois pontos distintos de X podemos encontrar vizinhanças de ambos que sejam disjuntas entre si; (ii) ele satisfaz o segundo axioma da enumerabilidade, isto é, possui uma base enumerável¹ para cada conjunto aberto $U \subset X$. Logo, temos:

DEFINIÇÃO. Definimos um *mapa* n -dimensional em X como o par (U, φ) tal que a aplicação $\varphi : U \rightarrow V$ é um homeomorfismo², onde os conjuntos $U \subset X$ e $V \subset \mathbb{R}^n$ são abertos. Dados dois mapas $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ e (U_β, φ_β) tais que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, então a função $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$, denominada aplicação de transição, constitui um homeomorfismo entre os conjuntos abertos $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ e $\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ de \mathbb{R}^n .

A Figura 2 ilustra essa definição.

DEFINIÇÃO. Denominamos como um *atlas* em X um conjunto $\mathcal{U} := \{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$ de mapas que cobre X , isto é, $\bigcup_\alpha U_\alpha = X$, com os U_α não necessariamente disjuntos entre si.

¹ Um conjunto é dito enumerável se houver uma correspondência biunívoca entre seus elementos e os do conjunto dos números naturais $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$.

² Uma aplicação contínua bijetiva é dita um *homeomorfismo* se sua inversa for também contínua.

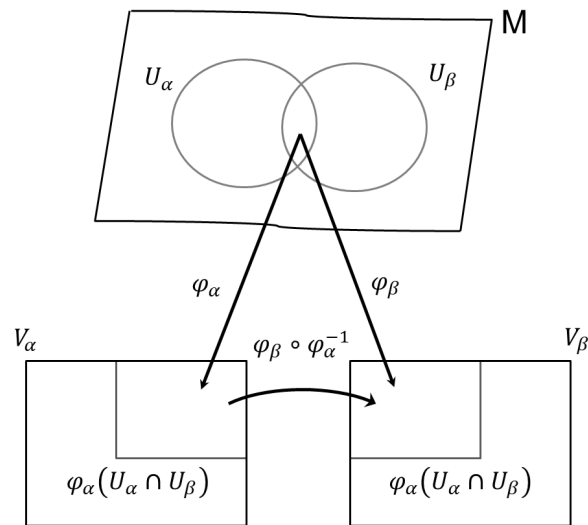


Figura 2 – Ilustração do conceito de mapas e aplicações de transição para um espaço topológico X .

A Figura 3 fornece um exemplo concreto de mapas e um atlas para o caso da esfera bidimensional unitária $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. A referida figura exemplifica como é possível cobrir S^2 com apenas dois (apenas um não é suficiente!) mapas (U_1, φ_1) e (U_2, φ_2) , os quais constituem um atlas para a mesma, onde

$$\begin{aligned} \varphi_1^{-1}(\phi, \theta) &= (\cos \phi \operatorname{sen} \theta, \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta, \cos \theta), \\ \varphi_1(U_1) &= \{(\phi, \theta) \in \mathbb{R}^2 : 0 < \phi < 2\pi; 0 < \theta < \pi\}; \end{aligned} \quad (1.1)$$

e

$$\begin{aligned} \varphi_2^{-1}(\phi, \theta) &= (\cos \phi \operatorname{sen} \theta, \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta, \cos \theta), \\ \varphi_2(U_2) &= \{(\phi, \theta) \in \mathbb{R}^2 : \pi/2 < \phi < 3\pi/2; \pi/2 < \theta < 5\pi/2\}. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Tomando um atlas \mathcal{U} em X , se para quaisquer mapas $(U_\alpha, \varphi_\alpha), (U_\beta, \varphi_\beta) \in \mathcal{U}$ a aplicação de transição $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ for um difeomorfismo³, então, diz-se que o atlas \mathcal{U} é diferenciável. Normalmente, desejamos que a diferenciabilidade seja de classe C^∞ , isto é, que a aplicação possua derivadas contínuas de todas as ordens. Sempre que o termo ‘diferenciável’ aparecer neste trabalho, deve-se entendê-lo por diferenciável de classe C^∞ .

O atlas de um espaço X não é único, podendo haver vários. Dados os atlas diferenciáveis \mathcal{U} e \mathcal{V} em X , podemos construir um novo atlas em X fazendo $\mathcal{U} \cup \mathcal{V}$ desde que eles sejam compatíveis, ou seja, que todas as aplicações de transição dos seus mapas sejam difeomorfismos. Unindo novos atlas compatíveis, terminamos por construir um atlas máximo, isto é, que contém todos os atlas compatíveis entre si possíveis. Um atlas diferenciável máximo em X define uma estrutura diferenciável nesse espaço.

³ Uma aplicação diferenciável bijetiva é dita um difeomorfismo se sua inversa também for diferenciável.

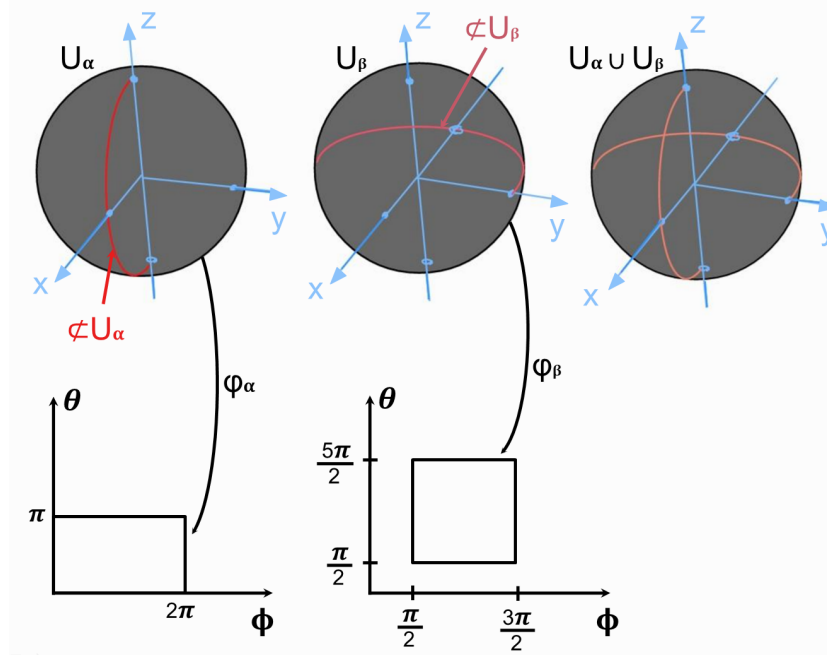


Figura 3 – Exemplo de como cobrir completamente a esfera S^2 com dois mapas. À esquerda, o mapa $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ cobre a esfera quase inteira, um meridiano (no plano xz) fica excluído porque U_α precisa ser aberto. No centro, o mapa (U_β, φ_β) exclui apenas outro meridiano (no plano xy). À direita, temos a cobertura completa: $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ cobre o meridiano excluído por (U_β, φ_β) e vice-versa.

DEFINIÇÃO. Uma variedade diferenciável n -dimensional de classe C^∞ é um par (X, \mathcal{U}) , onde \mathcal{U} é um atlas máximo diferenciável de mesma classe.

Sumarizando as definições dadas, o conceito de mapa permite usarmos as ferramentas de cálculo para investigar as propriedades de uma variedade (X, \mathcal{U}) , ainda que o espaço X seja abstrato, de modo que um mapa também é denominado *sistema de coordenadas locais*. O estudo de uma variedade não pode depender da escolha dos mapas ou dos atlas, daí a necessidade de se estabelecer as aplicações de transição como difeomorfismos e tomarmos um atlas máximo na definição; as aplicações de transição também são chamadas de mudança ou transformação de coordenadas locais. Por fim, a partir de agora, vamos nos referir a uma variedade diferenciável apenas por uma letra maiúscula, como M , estando claro que ela compreende um espaço topológico dotado de uma estrutura diferenciável.

Espaço tangente

Uma maneira de se estudar as propriedades locais de uma variedade M consiste em utilizar uma aproximação linear para a mesma em algum de seus pontos. Pensando na esfera S^2 , podemos usar um plano tangente a ela num ponto $p \in S^2$ para realizar tal estudo. Contudo, quando discutirmos mais adiante as imersões e mergulhos, veremos que não precisamos conceber uma variedade M como estando ‘inserida’ num espaço de maior

dimensão, conquanto seja dessa forma que usualmente pensamos numa esfera bidimensional, como um objeto dentro do espaço tridimensional \mathbb{R}^3 . Além disso, não precisamos limitar o número de dimensões a três, apesar de não sermos capazes de visualizar os objetos para um número maior delas. Desse modo, precisamos definir algo análogo ao plano tangente, mas sem semelhantes limitações; eis o conceito de espaço tangente T_pM em uma variedade M no ponto $p \in M$, entendendo-se que M é sempre n -dimensional.

Não há uma maneira única de definir espaço tangente, aqui seguiremos principalmente a exposição de (JÄNICH; KAY, 2001). Lembrando que a derivada em um ponto de uma curva sobre uma superfície bidimensional em \mathbb{R}^3 corresponde a um vetor tangente à mesma naquele ponto, podemos nos valer dessa intuição geométrica para definir o espaço tangente. Antes, porém, temos as seguintes definições:

DEFINIÇÃO. Designamos por $\mathcal{K}_p(M)$ o conjunto de curvas diferenciáveis α sobre uma variedade diferenciável n -dimensional M e que passam pelo ponto $p \in M$, ou seja,

$$\mathcal{K}_p(M) := \{\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \subset \mathbb{R} \rightarrow M : \varepsilon > 0, \alpha(0) = p\}. \quad (1.3)$$

Tomemos um mapa (U, φ) contendo o ponto p e uma curva $\alpha \in \mathcal{K}_p(M)$. A aplicação $\varphi \circ \alpha$ é uma curva de \mathbb{R}^n definida numa pequena vizinhança de \mathbb{R} e sua derivada $(\varphi \circ \alpha)'(\varepsilon_0)$ é o vetor tangente a ela no ponto $(\varphi \circ \alpha)(\varepsilon_0)$. Portanto:

DEFINIÇÃO. Dado um mapa (U, φ) com $p \in U$, duas curvas $\alpha, \beta \in \mathcal{K}_p(M)$ são ditas *tangencialmente equivalentes* – e escrevemos $\alpha \sim \beta$ – se os respectivos vetores tangentes às curvas $\varphi \circ \alpha$ e $\varphi \circ \beta$ de \mathbb{R}^n no ponto $0 = \alpha^{-1}(p) = \beta^{-1}(p)$ ⁴ são iguais, isto é, se

$$(\varphi \circ \alpha)'(0) = (\varphi \circ \beta)'(0). \quad (1.4)$$

DEFINIÇÃO. Um vetor tangente à variedade M no ponto $p \in M$ é definido como uma classe de equivalência particular $[\alpha]$ de curvas $\alpha \in \mathcal{K}_p(M)$ tangencialmente equivalentes.

A definição de vetor tangente como uma classe de curvas tangencialmente equivalentes é elegante, pois ela não pode depender das curvas escolhidas. A partir das definições acima, temos, finalmente:

DEFINIÇÃO. Designamos por $\mathcal{K}_p(M)/\sim$ o conjunto dos vetores tangentes $[\alpha]$ à variedade diferenciável M no ponto $p \in M$. Desse modo, definimos o espaço tangente a M em p , T_pM como

$$T_pM := \mathcal{K}_p(M)/\sim, \quad (1.5)$$

sendo possível mostrar que T_pM é um espaço vetorial isomorfo a \mathbb{R}^n : $T_pM \cong \mathbb{R}^n$.

Ainda seguindo (JÄNICH; KAY, 2001), apresentaremos outra definição de espaço tangente e que talvez pareça mais familiar aos físicos. Primeiro, dado um ponto p

⁴ Se o intervalo $(-\varepsilon, \varepsilon)$ for suficientemente pequeno, pelo teorema da função inversa, as aplicações α e β são inversíveis.

da variedade M , tomamos todos os mapas (U, φ) que o contém e formamos o conjunto $\mathcal{U}_p(M) := \{(U, \varphi) \in \mathcal{U} : p \in U\}$, onde \mathcal{U} é a estrutura diferenciável de M . Logo, estabelecemos:

DEFINIÇÃO. Definimos o vetor tangente v à variedade n -dimensional M no ponto $p \in M$ como a aplicação $v : \mathcal{U}_p(M) \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que, dados dois mapas $(U_\alpha, \varphi_\alpha), (U_\beta, \varphi_\beta) \in \mathcal{U}_p(M)$, ela satisfaz

$$v(U_\beta, \varphi_\beta) = d\varphi_{\beta,\alpha} \cdot v(U_\alpha, \varphi_\alpha), \quad (1.6)$$

onde $\varphi_{\beta,\alpha} = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ é a aplicação de transição – isto é, a mudança de coordenadas – tal que $\varphi_{\beta,\alpha} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$, e $d\varphi_{\beta,\alpha}$ é a sua diferencial. Trataremos do conceito de diferencial na próxima seção, o que importa saber agora é que se trata de uma aplicação linear que leva um vetor (ponto da aplicação v) de \mathbb{R}^n a outro vetor (ponto de v) de \mathbb{R}^n . De forma análoga à definição de vetor tangente em termos da classe de equivalência $[\alpha]$, notamos que essa última, em termos de uma aplicação vetorial, não depende das coordenadas locais utilizadas, o que é fundamental para tratarmos diretamente da variedade M enquanto entidade abstrata.

A última definição de vetor tangente a uma variedade pode ainda não parecer muito familiar. Para que os interessados em física a reconheçam, basta esclarecermos que a aplicação linear $d\varphi_{\beta,\alpha}$ nada mais é que a matriz jacobiana J da transformação $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \mapsto \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$. Ainda, como $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ e $\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ são subconjuntos de \mathbb{R}^n , vamos denotar seus pontos por meio das coordenadas (x^1, x^2, \dots, x^n) e $(\tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \dots, \tilde{x}^n)$, respectivamente (reveja a notação para os quadrivetores no primeiro parágrafo da *Introdução*). Também adotaremos a notação $v(U_\alpha, \varphi_\alpha) = (v^1, v^2, \dots, v^n)$ e $v(U_\beta, \varphi_\beta) = (\tilde{v}^1, \tilde{v}^2, \dots, \tilde{v}^n)$. Portanto, podemos reescrever a Eq. 1.6 como uma equação para as componentes dos vetores:

$$\tilde{v}^a = \sum_{b=1}^n \frac{\partial \tilde{x}^a}{\partial x^b} \cdot v^b, \quad (1.7)$$

sendo claro que $(\tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \dots, \tilde{x}^n) = \varphi_{\beta,\alpha}(x^1, x^2, \dots, x^n)$ e que as derivadas parciais acima são os elementos J_{ab} de J : $J_{ab} = \partial \tilde{x}^a / \partial x^b$.

Na literatura de física, os vetores que se transformam de acordo com a Eq. 1.7 são denominados *contravariantes*. Portanto, os vetores contravariantes tão conhecidos pelos físicos nada mais são que elementos do espaço tangente $T_p M$ de alguma variedade M , à qual comumente pode ser o espaço euclidiano tridimensional E^3 ou o espaço pseudo-euclidiano quadridimensional $E^{1,3}$ de Minkowski, ainda que muitas vezes esse fato passe despercebido no terra a terra dos problemas concretos de física.

Para deixar essa definição ainda mais familiar aos físicos, reescrevemos a Eq. 1.7 de acordo com a convenção de Einstein para somatórios⁵, prática comum no cálculo de

⁵ Tal convenção estabelece que sempre que um índice se repetir no mesmo lado de uma equação, deve-se subentender que há uma soma feita sobre ele.

Ricci, na Eq. 1.8:

$$\tilde{v}^a = \frac{\partial \tilde{x}^a}{\partial x^b} \cdot v^b. \quad (1.8)$$

Para concluir, mencionamos que em (JÄNICH; KAY, 2001) demonstra-se como as definições apresentadas – ilustradas pela Figura 4 – são equivalentes. Porém, ainda apresentaremos, em linhas gerais, mais uma definição de vetor tangente a uma variedade que pode ser útil para cálculos, seguindo de forma aproximada a seção 5.10 de (CARMO, 2010) e a 2.2 de (FECKO, 2006), mas nos remetendo à primeira definição de (JÄNICH; KAY, 2001).

Seja $v := [\alpha] \in T_p M$ um vetor tangente a uma variedade n -dimensional M no ponto $p \in M$ e $\alpha \in \mathcal{K}_p(M)$ uma curva representativa da classe $[\alpha]$. Tomando um mapa (U, φ) e uma função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, temos que $(f \circ \varphi \circ \alpha)$ é uma função de $(-\varepsilon, \varepsilon) \subset \mathbb{R}$ em \mathbb{R} . Logo, podemos calcular sua derivada em $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ no ponto $t = 0$:

$$\left. \frac{d}{dt}(f \circ \varphi \circ \alpha)(t) \right|_{t=0} = \frac{df}{d(\varphi \circ \alpha)} \cdot (\varphi \circ \alpha)'(0). \quad (1.9)$$

Tendo em vista a definição de equivalência tangencial, a derivada acima não depende da curva, mas da classe $[\alpha]$, isto é, do vetor $v \in T_p M$. Além disso, a função f é irrelevante, pois queremos estabelecer o isomorfismo entre a derivada da Eq. 1.9 e o vetor $v \equiv [\alpha]$. Desse modo, reescrevemos a última equação como

$$\left. \frac{d}{dt}(f \circ \varphi \circ \alpha)(t) \right|_{t=0} = \left\{ (\varphi \circ \alpha)'(0) \cdot \frac{d}{d(\varphi \circ \alpha)} \right\} f, \quad (1.10)$$

e fazemos a associação

$$v \in T_p M \leftrightarrow \left\{ (\varphi \circ \alpha)'(0) \cdot \frac{d}{d(\varphi \circ \alpha)} \right\}.$$

Agora, suponhamos que a curva $(\varphi \circ \alpha)$ de \mathbb{R}^n seja expressa em coordenadas locais cartesianas como $(\varphi \circ \alpha)(t) = (x^1(t), x^2(t), \dots, x^n(t))$. Calculando novamente a derivada de $(f \circ \varphi \circ \alpha)$, temos

$$\left. \frac{d}{dt}(f \circ \varphi \circ \alpha)(t) \right|_{t=0} = \frac{df}{d(\varphi \circ \alpha)} \cdot (\varphi \circ \alpha)'(0) = \frac{\partial f}{\partial x^b} \cdot x^{b'}(0) = \left\{ x^{b'}(0) \cdot \frac{\partial}{\partial x^b} \right\} f, \quad (1.11)$$

onde o somatório está implícito na última equação à direita pela convenção de Einstein. A partir desse resultado, fazemos a associação

$$v \in T_p M \leftrightarrow \left\{ x^{b'}(0) \cdot \frac{\partial}{\partial x^b} \right\}.$$

Portanto, definindo $x^{b'}(0) = a^b$, a partir da associação acima, temos:

DEFINIÇÃO. Definimos o vetor tangente $v \in T_p M$ em coordenadas locais $\varphi : U \subset M \rightarrow \mathbb{R}^n$ como

$$v := a^b \cdot \frac{\partial}{\partial x^b}. \quad (1.12)$$

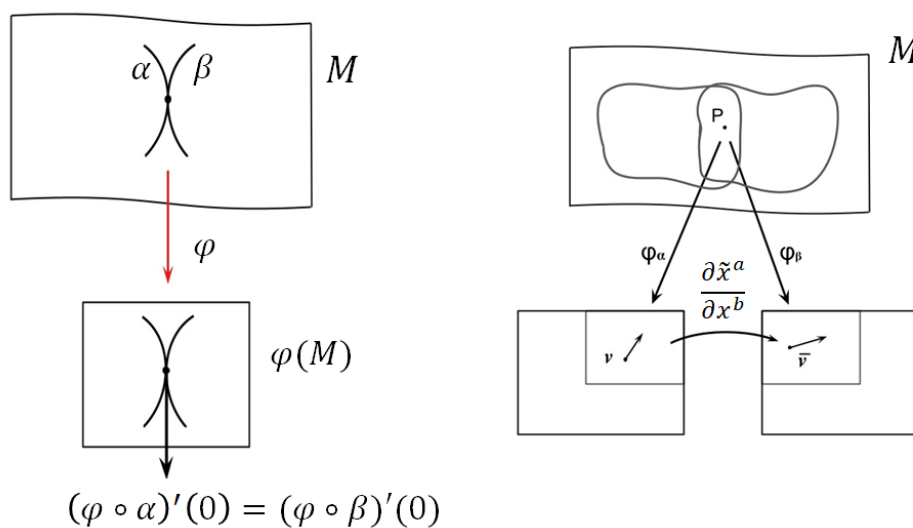


Figura 4 – Ilustração das definições dadas de espaço tangente.

Desse modo, podemos interpretar os a^b como as componentes de v na base $\{\partial/\partial x^b\}$. Daí, usando a notação $\partial_a = \partial/\partial x^a$, definimos a base coordenada $\{e_a\}$ ⁶ de $T_p M$ em coordenadas locais como

$$e_a := \partial_a, e_a \in T_p M. \quad (1.13)$$

Há uma sutileza – que os mais rigorosos talvez tenham notado – na correspondência dada pela Eq. 1.13. A definição das coordenadas locais dependem da escolha de um mapa (U, α) . Ora, $\varphi(M) \subset \mathbb{R}^n$ é uma variedade diferenciável à qual possui seu espaço tangente no ponto $\varphi(p)$, com $p \in U \subset M$. Assim, quando dissemos que $\{\partial_b\}$ constitui uma base de $T_p M$ em coordenadas locais, o que queríamos dizer, a rigor, é que ela é uma base de $T_{\varphi(p)}\varphi(M)$. Portanto, seria conveniente reservar o símbolo $\{e_a\}$ para designar um vetor da base do espaço ‘abstrato’ $T_p M$, deixando a notação ∂_a para representar o vetor da base do espaço ‘concreto’ $T_{\varphi(p)}\varphi(M)$. Problema semelhante ocorre para funções definidas sobre M , como $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, e sua representação \hat{f} em coordenadas locais, $\hat{f} = f \circ \varphi^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Entretanto, por uma questão de conveniência, a partir de agora não faremos essas distinções, que apenas sobrecarregam a notação, empregando os símbolos e_a ou ∂_a indistintamente, o mesmo valendo para f e $f \circ \varphi^{-1}$, uma vez que sabemos o que significam de fato. A utilização recorrente da expressão ‘em coordenadas locais’ deverá ser, para nós, um lembrete dessas diferenças que o rigor estabelece e exige, mas que o pragmatismo omite.

⁶ É importante notar que os índices nesse caso identificam os vetores completos e_a e não suas componentes, ao contrário da Eq. 1.7. Há também uma convenção que determina a posição (superior ou inferior) dos índices, a qual dá consistência à omissão dos somatórios na convenção de Einstein, e sobre a qual falaremos quando tratarmos de covetores.

Orientação

Retomando a última definição de espaço tangente dada na subseção anterior, podemos calcular o determinante da matriz jacobiana J da mudança de coordenadas, havendo apenas duas possibilidades: $\det(J) > 0$ ou $\det(J) < 0$ (obviamente, como a mudança de coordenadas deve ser um homeomorfismo, $\det(J) \neq 0$). Esse fato está intimamente relacionado ao conceito de orientação. De fato, dizemos que duas bases $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ e $\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ de um espaço vetorial V possuem a mesma orientação se o determinante da transformação que leva de uma à outra é positivo.

Podemos associar a orientação à ordem com que escrevemos as coordenadas de um vetor. Em \mathbb{R}^3 , por exemplo, em coordenadas cartesianas, escrevemos as coordenadas de um ponto como (x, y, z) , denominando essa orientação como dextrogira, ao passo que em uma orientação levogira⁷ poderíamos escrever (x, z, y) . É interessante observar que a transformação $(x, y, z) \mapsto (x, z, y)$, cujo determinante é igual a -1 (ver o exemplo da seção 2.2.3 de (GUIMARÃES, 2018)), corresponde a uma permutação ímpar⁸ das coordenadas e que uma permutação par, como $(x, y, z) \mapsto (z, x, y)$, preserva a orientação original dos eixos.

Podemos atribuir uma orientação a uma variedade diferenciável n -dimensional M uma vez que o espaço tangente $T_p M$ é um espaço vetorial. Para tanto, ainda nos remetendo à última definição de vetor tangente da subseção anterior, podemos assumir que a escolha das componentes $v(U_\alpha, \varphi_\alpha) = (v^1, v^2, \dots, v^n)$ estabelece uma orientação a $T_p M$, tendo em vista o isomorfismo $T_p M \cong \mathbb{R}^n$ que se traduz por $(v^1, v^2, \dots, v^n) \mapsto (x^1, x^2, \dots, x^n)$, isto é, consideramos que $v(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ possui a orientação usual de \mathbb{R}^n . Todavia, para que de fato tenhamos uma orientação no espaço tangente, é preciso que haja compatibilidade entre as orientações definidas em quaisquer dois mapas $(U_\alpha, \varphi_\alpha), (U_\beta, \varphi_\beta) \in \mathcal{U}_p$, o que requer apenas que o determinante de $d\varphi_{\beta,\alpha}$ seja positivo. Assim, temos que a orientação associada a um mapa se estende naturalmente a todos os seus pontos, bem como a outros mapas, tendo em vista os pontos que são comuns a ambos.

Compatibilizando as orientações dos diversos mapas de uma variedade, tal como descrito no parágrafo anterior, podemos obter uma orientação para a variedade como um todo. Porém, há casos em que isso não é possível. Desse modo, dizemos que uma variedade n -dimensional M é orientável se for possível atribuir um conjunto de orientações compatíveis a todos os mapas de sua estrutura diferenciável.

Uma maneira simples de visualizar o conceito de orientação consiste em tentar-

⁷ Em inglês escrevemos *right-handed* e *left-handed*. Para a primeira orientação, esse termo remete ao modo como dispomos graficamente os eixos x , y e z num sistema cartesiano: alinhamos os dedos da mão direita espalmada com o eixo x , girando-os em direção ao eixo y ; nesse processo, o polegar aponta na direção do eixo z .

⁸ Uma permutação ímpar (respectivamente par) significa trocar de lugar um número ímpar (resp. par) de vezes as posições de objetos aos pares.

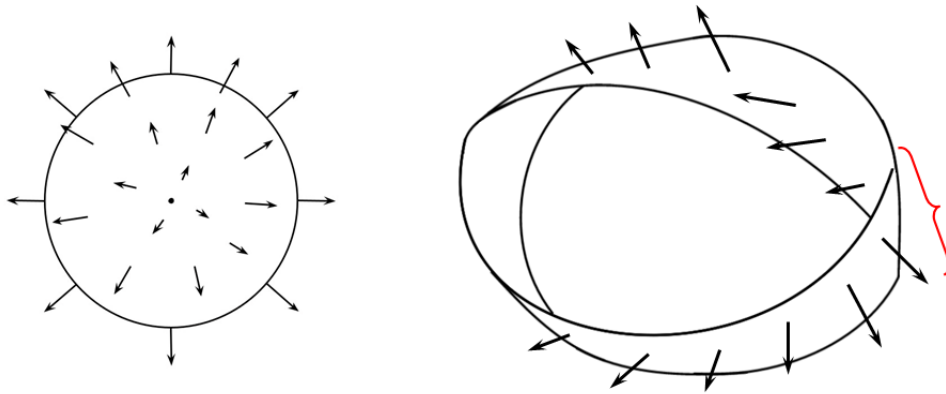


Figura 5 – Ilustração do conceito de orientação. À esquerda, a esfera bidimensional (orientável). À direita, a faixa de Möbius (não orientável), onde está destacada uma região em que o campo de vetores normais sofreria uma mudança abrupta de sentido.

se estabelecer um campo diferenciável de vetores normais unitários sobre uma superfície bidimensional mergulhada⁹ no espaço euclidiano tridimensional E^3 (ver a seção 2.6 de (CARMO, 2010)). Com efeito, uma tal superfície é orientável se for possível construir esse campo por toda a sua extensão. A Figura 5 ilustra como uma esfera é orientável, ao passo que a faixa de Möbius não o é, porquanto, em alguma parte da faixa, o campo de vetores deveria inverter de sentido abruptamente, não sendo, assim, diferenciável.

Métrica

Uma variedade diferenciável n -dimensional M dotada de um produto escalar $\langle \bullet | \bullet \rangle_p$ em T_pM para cada ponto p de M constitui uma *variedade riemanniana*. Naturalmente, como esperado de um produto escalar, ele deve ser bilinear e, sendo definido em uma variedade diferenciável, deve variar suavemente com p . Usando a designação $g := \langle \bullet | \bullet \rangle_p$, onde $g : T_pM \times T_pM \rightarrow \mathbb{R}$, é necessário ainda que esse produto satisfaça as seguintes propriedades:

- i) ser simétrico, isto é, $g(v, w) = g(w, v)$, para quaisquer $v, w \in T_pM$ e $p \in M$;
- ii) ser não degenerado, ou seja, se $g(w, v) = 0$, então, $v = 0$ ou $w = 0$, com $v, w \in T_pM$ e $p \in M$.

Devido à bilinearidade de g , se a definirmos para uma base de T_pM , então, tê-la-emos definido para quaisquer pares de vetores desse espaço. De fato, seja $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ uma base de T_pM , se definimos $g_{ab} := g(u_a, u_b)$, então

$$g(v, w) = g_{ab}v^a w^b, \quad (1.14)$$

⁹ Falaremos brevemente sobre mergulhos e imersões no fim deste capítulo.

onde v^a e w^b designam as componentes dos vetores $v, w \in T_p M$ em coordenadas locais na referida base, ou seja, $v = v^a u_a$ e $w = w^b u_b$. Se tomarmos os g_{ab} como elementos de uma matriz, concluiremos que as propriedades i) e ii) implicam que ela é simétrica e que seu determinante é não nulo.

A função g definida acima é denominada a métrica da variedade. A rigor, como apontado em (GÖCKELER; SCHÜCKER, 1989), se for possível que $g(v, v) \leq 0$, então temos uma pseudométrica; apenas se $g(v, v) > 0$ é que teríamos uma métrica e uma variedade riemanniana. No primeiro caso, falamos em variedades pseudoriemannianas. De todo modo, não faremos tal distinção, deixando de utilizar o prefixo *pseudo-* por simplicidade.

A métrica, assim como a orientação, é uma estrutura adicional incorporada à variedade, porém, ela é fundamental para a construção de modelos físicos. De fato, usando a métrica podemos definir distâncias, magnitudes de vetores, ângulos, etc. Por exemplo, usando coordenadas cartesianas, tomemos o vetor deslocamento $\Delta \mathbf{r} = (\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ entre dois pontos do espaço euclidiano E^3 , definimos sua norma $|\Delta \mathbf{r}|$ – que interpretamos como o ‘tamanho’ do vetor – por meio da Eq. 1.15:

$$|\Delta \mathbf{r}| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}. \quad (1.15)$$

Comparando a Eq. 1.15 com a Eq. 1.14, se adotarmos a convenção $x^1 = x$, $x^2 = y$ e $x^3 = z$, reescrevemos a primeira como $|\Delta \mathbf{r}| = \sqrt{g_{ij} \Delta x^i \Delta x^j}$, onde $g_{ij} = \delta_{ij}$, sendo δ_{ij} o delta de Kronecker, ou seja, a matriz correspondente a g é igual à identidade de ordem 3. Tomemos agora o espaço-tempo de Minkowski. Convencionando que $x^0 = ct$, onde t é a coordenada temporal, calculamos a norma de um intervalo $\Delta s = (\Delta x^0, \Delta x^1, \Delta x^2, \Delta x^3)$ nessa variedade como

$$|\Delta s| = \sqrt{-(\Delta x^0)^2 + (\Delta x^1)^2 + (\Delta x^2)^2 + (\Delta x^3)^2}. \quad (1.16)$$

Nesse caso, a matriz da métrica é diagonal do tipo $g = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ ¹⁰. É importante ressaltar que para os exemplos dados, a métrica é a mesma para todos os pontos da variedade, característica dos espaços planos, o que de modo geral não é verdade. Com efeito, a variação da métrica de um ponto a outro dá origem a propriedades como a curvatura, como veremos na última seção deste capítulo, e lembramos que a métrica do espaço-tempo parece como variável nas equações de campo de Einstein da RG, sendo dependente da distribuição local de matéria e energia. Por exemplo, a métrica de Schwarzschild $g_{\mu\nu}$ ($\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$) para o espaço-tempo vazio fora de um corpo esférico e estático de massa m , em coordenadas esféricas (t, r, θ, ϕ) , é dada pelas Eqs. 1.17 (ver capítulo 9 de (HOBSON; EFSTATHIOU; LASENBY, 2006)):

$$g_{00} = c^2 \left(1 - \frac{2Gm}{c^2 r}\right), \quad g_{11} = -\left(1 - \frac{2Gm}{c^2 r}\right)^{-1}, \quad g_{22} = -r^2, \quad g_{33} = -r^2 \sin^2 \theta, \quad (1.17)$$

¹⁰ Aqui cometeremos o abuso de designar a aplicação g e a matriz cujos elementos são g_{ab} pela mesma letra.

donde

$$ds^2 = c^2 \left(1 - \frac{2Gm}{c^2 r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2Gm}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (1.18)$$

onde ds^2 é o quadrado de um intervalo infinitesimal no espaço-tempo e sendo nulos os demais termos $g_{\mu\nu}$.

Ainda que a métrica varie com o ponto da variedade, fixando-se um ponto p , é sempre possível defini-la como uma matriz diagonal para uma certa base¹¹. Em particular, dizemos que a base $\{u_a\}$ do espaço tangente $T_p M$ de uma variedade n -dimensional M num ponto $p \in M$ é ortonormal se

$$g(u_a, u_b) = \eta_{ab}, \quad (1.19)$$

sendo

$$\eta := \text{diag}(\underbrace{-1, \dots, -1}_s, \underbrace{1, \dots, 1}_r), \quad (1.20)$$

onde os números de -1 e $+1$, s e r ($r + s = n$), representam uma propriedade da métrica. De fato, diz-se que o número $r - s$ é a assinatura da mesma; também podemos defini-la como $(1, 3)$, por isso, anteriormente, designamos por $E^{1,3}$ o espaço de Minkowski¹², seguindo a notação de (FECKO, 2006).

Imersões e mergulhos

Esta subseção poderia ser omitida neste trabalho, todavia, visando o objetivo de desatar algumas ‘amarras do pensamento’ – considerando o que dissemos na seção 0.1 – trataremos brevemente dos conceitos de *imersão* e *mergulho* aqui.

Tendemos a pensar em superfícies bidimensionais como subconjuntos de E^3 , pois, nos sentindo habitantes desse espaço, sua visualização é fácil para nós. Por essa razão, quando concebemos o espaço-tempo quadridimensional como sendo uma estrutura dotada de curvatura não nula, podemos ser induzidos a imaginá-lo como estando inserido no interior de um espaço euclidiano de dimensão maior, E^5 , por exemplo. Contudo, o que Gauss percebeu já no século XIX, é que podemos investigar todas as propriedades de uma superfície, inclusive sua curvatura, analisando-se apenas sua geometria intrínseca, sem precisarmos imaginá-la como um subconjunto de E^3 . Assim, seres bidimensionais vivendo sobre certa superfície poderiam analisar sua geometria sem precisar recorrer a um espaço tridimensional, o qual seria desconhecido para eles. De forma análoga, podemos estudar

¹¹ Naturalmente, se o espaço não for plano, a métrica perderia essas características na vizinhança de p .

¹² Uma variedade n -dimensional cuja métrica possui assinatura (s, r) , com $s \neq 0$, em todos os seus pontos, é dita espaço pseudoeuclidiano. Se $s = 0$ para todos os pontos, temos um espaço euclidiano $E^n := E^{0,r}$, com $r = n$.

a geometria de uma variedade n -dimensional, incluindo o espaço-tempo, sem precisar imaginá-la como ‘inserida’ num espaço de maior dimensão¹³.

Os conceitos de imersão e mergulho formalizam a ideia intuitiva de ‘inserir’ uma variedade n -dimensional M em um certo espaço de maior dimensão N ¹⁴. Como o nosso interesse é entender de forma intuitiva a existência de espaços abstratos independentemente dos espaços euclidianos aos quais estamos habituados, nos restringiremos a esses últimos considerando $N = E^m$, seguindo de forma aproximada as definições de (CARMO, 2010). Logo:

DEFINIÇÃO. Seja M uma variedade n -dimensional e tomemos o espaço euclidiano E^m , com $m > n$. Definimos uma *imersão* de M em E^m como a aplicação diferenciável $\phi : M \rightarrow E^m$ cuja diferencial no ponto $p \in M$, $d\phi_p : T_p M \rightarrow T_{\phi(p)} E^m$ é injetiva. Em particular, se M é uma variedade riemanniana e $\langle d\phi_p(v) | d\phi_p(w) \rangle_{\phi(p)} = \langle v | w \rangle_p$, com $v, w \in T_p M$, então a imersão é isométrica (distâncias e ângulos são preservados).

Devemos notar que nem sempre é possível encontrar uma tal imersão, e a possibilidade de fazê-lo suscita diversos problemas em matemática. A definição acima, que exige a injetividade de $d\phi_p$, significa apenas que as propriedades geométricas locais de M serão preservadas quando ela for expressa como um subconjunto de E^m por meio de ϕ . Também é interessante notar que a aplicação φ de um mapa (U, φ) da estrutura diferenciável de uma variedade é um tipo de imersão em que $m = n$.

A imersão não impede que $\phi(M)$ possua autointerseções. Daí, temos a definição de mergulho, um caso mais restrito de imersão:

DEFINIÇÃO. Seja M uma variedade n -dimensional. Uma aplicação diferenciável $\phi : M \rightarrow E^m$ é um mergulho se ela é uma imersão e um homeomorfismo em relação à sua imagem $\phi(M)$.

Sendo ϕ um homeomorfismo, $\phi(M) \subset E^m$ não possuirá interseções. Nesse caso, podemos dizer que o mergulho preserva, além das propriedades locais, as propriedades globais da variedade. Logo, quando definimos de forma abstrata uma variedade bidimensional M e a imaginamos como parte de E^3 , o que estamos fazendo é concebendo um mergulho de M em E^3 . Naturalmente, nem sempre é possível fazê-lo. Por exemplo, se tomamos a esfera $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ e identificamos seus pontos diametralmente opostos como se fossem apenas um, obtemos um conjunto de pontos que é uma variedade diferenciável de duas dimensões, denominado *plano projetivo real* de ordem 2, RP^2 . O que é fascinante nesse exemplo é que mesmo RP^2 sendo uma variedade bidimensional, não podemos mergulhá-lo no espaço tridimensional E^3 , isto é, não podemos representá-lo gra-

¹³ Não queremos aqui negar a possibilidade de o universo ser constituído de um número maior de dimensões, mas apenas que o conceito de um espaço-tempo curvo não exige, necessariamente, tal concepção.

¹⁴ Na verdade, os conceitos de imersão e mergulho podem ser generalizados, substituindo-se o espaço E^m por outra variedade m -dimensional.

ficamente de forma apropriada usando os eixos cartesianos x , y e z . A garrafa de Klein, K , é outro exemplo de variedade bidimensional que não pode ser mergulhada em E^3 , contudo, tanto ela como RP^2 podem ser mergulhadas em E^4 , ou seja, se fôssemos habitantes de E^4 seríamos capazes de visualizar corretamente essas variedades. Para maiores detalhes, o leitor poderá consultar a seção 5.10 de (CARMO, 2010).

Os conceitos de imersão e mergulho, bem como os exemplos dados no parágrafo anterior, demonstram como nossa limitada capacidade de visualizar determinadas entidades não pode impedir-nos de estudá-las, tampouco de utilizá-las em nossas tentativas de modelar a realidade que nos cerca. Afinal, porque a natureza se limitaria ao que nossos cérebros consideram habitual ou concreto?

1.2 Álgebras tensorial e exterior

Podemos dizer que os tensores generalizam o conceito de vetor, revelando-se necessário para a descrição de diversos fenômenos físicos. Contudo, nosso objetivo nesta seção é apresentá-los no contexto das variedades diferenciáveis, dando continuidade ao que vimos anteriormente. A álgebra exterior, por sua vez, lida com um conjunto específico de tensores, as formas diferenciais, revelando-se útil para o estudo das propriedades das variedades diferenciáveis. De fato, definindo-se operações apropriadas dentro dessa teoria, podemos obter diversos resultados importantes, mesmo permanecendo no domínio abstrato das variedades, ou seja, sem ‘descermos’ para o terreno concreto das coordenadas locais. Como consequência, somos capazes de obter expressões extraordinariamente compactas e elegantes (ver o início da introdução de (FECKO, 2006)) para esses resultados.

Vetores e covetores

Começamos tomando um espaço linear n -dimensional L qualquer. Seja $v \in L$ e $\alpha : L \rightarrow \mathbb{R}$, $v \mapsto \alpha(v)$, uma aplicação linear. Ora, o conjunto de tais aplicações formam um outro espaço linear, denominado espaço dual L^* , tendo em vista a definição $(\alpha_1 + \lambda\alpha_2)(v) := \alpha_1(v) + \lambda\alpha_2(v)$, com $\lambda \in \mathbb{R}$. O espaço L^* é isomorfo a L , pois, para cada vetor $v \in L$ podemos associar um elemento correspondente, dito covetor, em L^* . De fato, seja $\{e_i\}$ uma base de L , então podemos escrever $v = e_i v^i$, onde $v^i \in \mathbb{R}$ são as componentes de v nessa base. Logo, definimos um covetor da base $\{e^i\}$ de L^* como a aplicação linear $e^i : L \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$e^i(v) = e^i(e_j v^j) = v^i, \quad (1.21)$$

sendo possível mostrar que, de fato, os e^i constituem uma base para L^* , isto é, qualquer $\alpha \in L^*$ pode ser escrito como $\alpha = \alpha_j e^j$, onde os α_j são as componentes do covetor α na base $\{e^j\}$. Com efeito, sendo L^* um espaço linear, vale a especificação $(\alpha_j e^j)(v) = \alpha_j e^j(v) = \alpha_j v^j$. Além disso, podemos interpretar um vetor v como uma aplicação $v :$

$L^* \rightarrow \mathbb{R}$, com $\alpha \mapsto \alpha(v)$; em particular, $e_i : L^* \rightarrow \mathbb{R} : (\alpha_j e^j) \mapsto \alpha_i$. Outra forma de definir a base de L^* , dual de L , é pela relação $e^i(e_j) = \delta_j^i$, onde δ_j^i é o delta de Kronecker.

Agora, em vez de um espaço linear qualquer, tomaremos o espaço tangente $T_p M$ de uma variedade n -dimensional M . Assim, temos também o espaço dual de $T_p M$, designado por $T_p^* M$, dito espaço cotangente da variedade M no ponto p e cujos elementos, já referidos como covetores, também podem ser denominados vetores cotangentes de M . Em coordenadas locais, se $v = v^b \partial_b \in T_p M$, então definimos o covetor correspondente a ∂_b como um elemento da base coordenada de $T_p^* M$, o qual é a aplicação $dx^a : T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$dx^a(v) = dx^a(v^b \partial_b) = v^a. \quad (1.22)$$

Portanto, todo covetor α de $T_p^* M$ pode ser escrito como $\alpha = \alpha_b dx^b$ em coordenadas locais. Também usaremos a notação $e^a := dx^a$ ¹⁵.

Seja $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função definida sobre M . Definimos a diferencial df de f como a aplicação $df : T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ dada – em coordenadas locais – por

$$df(v) := \frac{\partial f}{\partial x^b} v^b = \partial_b f v^b. \quad (1.23)$$

É interessante notar que $df(v) = \{v^b \partial_b\} f = v f$.

Ora, df é um covetor de $T_p^* M$, donde podemos escrever $df = \partial_b f dx^b$, uma vez que $(\partial_b f dx^b)(v) := \partial_b f dx^b(v)$. O que é mais relevante nesse exemplo é lembrar que em uma mudança de coordenadas $(x^1, x^2, \dots, x^n) \mapsto (\tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \dots, \tilde{x}^n)$, a transformação das componentes de df , $(\partial_1 f, \partial_2 f, \dots, \partial_n f) \mapsto (\tilde{\partial}_1 f, \tilde{\partial}_2 f, \dots, \tilde{\partial}_n f)$, se dá como na Eq. 1.24:

$$\tilde{\partial}_a f = \frac{\partial x^b}{\partial \tilde{x}^a} \partial_b f. \quad (1.24)$$

Como pode ser visto no capítulo 4 de (ARFKEN; WEBER; HARRIS, 2011), os vetores cujas componentes se transformam de acordo com a Eq. 1.24 são denominados covariantes. Portanto, tais vetores nada mais são que covetores do espaço cotangente de alguma variedade M .

É importante notar a convenção aqui adotada. A indexação de vetores (contravariantes) de $T_p M$ se dá como subscrita, porém os índices de suas componentes são sobrescritos. Isso dá consistência à convenção de Einstein, pois os índices mudos do somatório aparecem aos pares como subíndice e sobreíndice, como no caso $v = v^j \partial_j$. O inverso ocorre com os covetores (covariantes): eles são identificados por índices sobrescritos e suas componentes são subscritas, como no exemplo $\alpha = \alpha_j dx^j$.

¹⁵ A rigor, assim como ocorreu para o espaço tangente, a identificação $e^a := dx^a$, com $e^a \in T_p^* M$, significa que $dx^a \in T_{\varphi(p)}^* \varphi(M)$ para algum mapa (U, φ) , com $p \in U \subset M$. Da mesma forma, usaremos os símbolos e^a e dx^a indistintamente, tendo em vista a identificação $T_p^* M \cong T_{\varphi(p)}^* \varphi(M)$.

Por fim, precisamos ressaltar que em todos os casos acima, os vetores e covetores são definidos em apenas um ponto fixo $p \in M$ – ou $\varphi(p)$, em coordenadas locais – o qual foi omitido na notação para não sobrecarregá-la.

Campos tensoriais em variedades diferenciáveis

Como dissemos, as entidades apresentadas na subseção anterior eram sempre definidas em um ponto fixo p – ou $\varphi(p)$. Variando-se o ponto da variedade, temos campos diferenciáveis de vetores ou covetores se suas componentes forem funções diferenciáveis de p . Agora, estenderemos essas ideias para definir campos de tensores sobre variedades.

DEFINIÇÃO. Um tensor t do tipo $\binom{p}{q}$, definido em um ponto p de uma variedade n -dimensional M , é uma aplicação

$$t : \underbrace{T_p M \times \dots \times T_p M}_q \times \underbrace{T_p^* M \times \dots \times T_p^* M}_p \rightarrow \mathbb{R}, \quad (1.25)$$

que tem como argumentos q vetores e p covetores, sendo linear em cada um deles (multilinear).

De forma análoga ao que fizemos para os vetores e covetores, podemos definir as componentes de t em alguma base. Escolhendo as bases coordenadas $\{e_a\}$ e $\{e^c\}$ de $T_p M$ e $T_p^* M$, respectivamente, definimos

$$t_{a\dots b}^{c\dots d} = t(e_a, \dots, e_b; e^c, \dots, e^d), \quad (1.26)$$

onde usamos o ponto-e-vírgula para separar os vetores dos covetores (observe a consistência na posição dos índices). Logo, temos q subíndices e p sobreíndices, daí a utilidade da notação $\binom{p}{q}$, a qual retiramos de (FECKO, 2006). Portanto, a dimensão do espaço de tensores do tipo $\binom{p}{q}$ em M , o qual designamos por $\mathcal{T}_q^p(M)$, é $\dim \mathcal{T}_q^p(M) = n^{p+q}$, sendo n a quantidade de valores que cada índice pode assumir. Uma vez definido um tensor num ponto $p \in M$, um campo tensorial da forma $\binom{p}{q}$ em M associa a cada ponto da variedade um tensor do referido tipo, sendo cada componente do tensor uma função diferenciável de p .

Como a Eq. 1.26 deixa claro, as componentes de um tensor são definidas para certa base de $T_p M$ e de $T_p^* M$, naquele caso, as coordenadas. Desse modo, mudanças nas mesmas – dadas por transformações lineares, naturalmente – induzem uma mudança nas componentes do tensor. Logo, tomemos a mudança de base $\{e_a\} \mapsto \{\tilde{e}_a\}$ definida por $\tilde{e}_a = C_a^b e_b$, a qual implica¹⁶ em $\tilde{e}^a = (C^{-1})_b^a e^b$ ¹⁷. Dessa maneira, as componentes do tensor

¹⁶ Uma mudança na base de $T_p M$ implica em uma mudança na base de $T_p^* M$, e vice-versa, pois $e^a(e_b) = \delta_b^a$.

¹⁷ C pode ser pensada como uma matriz real $n \times n$ em que C_a^b é o elemento da b -ésima linha e a -ésima coluna.

na nova base serão alteradas de acordo com as Eqs. 1.27.

$$\begin{aligned}\tilde{t}_{a\dots b}^{c\dots d} &:= t(\tilde{e}_a, \dots, \tilde{e}_b; \tilde{e}^c, \dots, \tilde{e}^d), \\ \tilde{t}_{a\dots b}^{c\dots d} &= (C^{-1})_k^c \dots (C^{-1})_l^d C_a^r \dots C_b^s t_{r\dots s}^{k\dots l}.\end{aligned}\tag{1.27}$$

É importante assinalar que a mudança de base não implica em uma mudança no tensor, o qual é função apenas dos pontos de M , mas tão somente em suas componentes, por isso mantivemos a letra t na primeira das Eqs. 1.27.

Dados os tensores $t \in \mathcal{T}_{q_1}^{p_1}(M)$ e $s \in \mathcal{T}_{q_2}^{p_2}(M)$, é possível formar um terceiro do tipo $(\mathcal{T}_{q_1+q_2}^{p_1+p_2})$ usando o produto tensorial, simbolizado por \otimes . Desse modo, temos:

$$\begin{aligned}(t \otimes s)(v_1, v_2, \dots, v_{q_1}, w_1, w_2, \dots, w_{q_2}; \alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^{p_1}, \beta^1, \beta^2, \dots, \beta^{p_2}) = \\ t(v_1, v_2, \dots, v_{q_1}; \alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^{p_1}) \cdot s(w_1, w_2, \dots, w_{q_2}; \beta^1, \beta^2, \dots, \beta^{p_2}).\end{aligned}\tag{1.28}$$

Deve-se notar pela posição dos índices que os elementos que aparecem nos argumentos dos tensores na Eq. 1.28 correspondem a vetores (v_i e w_j) e covetores (α^k e β^l) completos, não suas componentes. O produto tensorial é associativo, bilinear e não comutativo. Em termos de componentes, também podemos escrever:

$$(t \otimes s)_{a\dots b e\dots f}^{c\dots d g\dots h} = t_{a\dots b}^{c\dots d} \cdot s_{e\dots f}^{g\dots h}.\tag{1.29}$$

Usando o produto tensorial entre os elementos das bases coordenadas $\{e_a\}$ e $\{e^c\}$, é possível definir qualquer tensor $t \in \mathcal{T}_q^p(M)$ como

$$t(v_1, v_2, \dots, v_{q_1}; \alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^{p_1}) = t_{a\dots b}^{c\dots d} e^a \otimes \dots \otimes e^b \otimes e_c \otimes \dots \otimes e_d,\tag{1.30}$$

cuja expressão no lado direito, não devemos esquecer, é um somatório, em que e^a recebe como argumento v_1 , e^b recebe como argumento v_{q_1} , etc. Usando a notação para vetores e covetores canônicos de variedades em coordenadas locais, reescrevemos a Eq. 1.30 na forma – um tanto esteticamente assimétrica – da Eq. 1.31.

$$t(v_1, v_2, \dots, v_{q_1}; \alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^{p_1}) = t_{a\dots b}^{c\dots d} dx^a \otimes \dots \otimes dx^b \otimes \partial_c \otimes \dots \otimes \partial_d.\tag{1.31}$$

Também é possível obter um tensor de tipo diferente aplicando-se parcialmente vetores ou covetores aos seus argumentos. Por exemplo, seja $t \in \mathcal{T}_2^2(M)$, $v, w \in T_p M$ e $\alpha, \beta \in T_p^* M$. Então, $(v, w, \alpha, \beta) \mapsto t(v, w, \alpha, \beta) \in \mathbb{R}$, contudo, aplicando-se um w e β fixos, $t(\bullet, w, \bullet, \beta) = s(\bullet, \bullet) \in \mathcal{T}_1^1(M)$. Na prática do cálculo de Ricci, essas operações são feitas de forma natural pela convenção de Einstein dos índices repetidos, assim, se $w = w^b \partial_b$ e $\beta = \beta_d dx^d$, então

$$s_a^c = t_{ab}^{cd} w^b \beta_d.\tag{1.32}$$

Uma forma semelhante de obtenção de um novo tensor é a contração, em que a soma é feita sobre os índices de um mesmo tensor, o que equivale a aplicar um vetor da base

coordenada e o covetor correspondente como argumentos. Assim, se $t \in \mathcal{T}_q^p(M)$, então, $t(\dots, e_a, \dots; \dots, e^a, \dots) \in \mathcal{T}_{q-1}^{p-1}$ ou, em termos de componentes, $t_{\dots a \dots}^{\dots a \dots}$. A posição em que o vetor e covetor canônicos são aplicados depende da contração que se deseja fazer. Por exemplo, como veremos na seção 1.3, o tensor de curvatura R_{abc}^d ¹⁸ de uma variedade n -dimensional quando contraído dá origem ao tensor de Ricci R_{ab} , representado normalmente pela mesma letra, de modo que $R_{ab} = R_{abc}^c$.

O tensor métrico

Vimos na seção 1.1 que uma variedade riemanniana é uma variedade com uma estrutura adicional, a métrica g , a qual permite definir grandezas importantes em modelos físicos, como magnitudes de vetores. O que não dissemos então, é que a métrica representa um campo tensorial definido sobre M , onde $g \in \mathcal{T}_2^0(M)$, o que pode ser visto por sua definição $g : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$. Desse modo, se $g_{ab} = g(e_a, e_b)$, então $g = g_{ab} e^a \otimes e^b$.

Sabemos que $T_p^* M$ é isomórfico a $T_p M$ (de modo geral, $L^* \cong L$). Entretanto, esse isomorfismo não se estabelece de forma única. De fato, a prescrição $e^a(e_b) = \delta_b^a$ por si só não basta, pois ela implica apenas que $\alpha(v) = \alpha_b v^b$, onde $v = v^a e_a \in T_p M$ e $\alpha = \alpha_b e^b \in T_p^* M$. Como v e α são arbitrários, não há forma única de estabelecer uma relação entre eles, mesmo se fixarmos o valor de $\alpha_b v^b \in \mathbb{R}$. O tensor métrico, por outro lado, permite especificar esse isomorfismo, isto é, para cada $v \in T_p M$, ele permite associar um único $\hat{v} \in T_p^* M$. Logo, definimos o covetor \hat{v} associado ao vetor v como

$$\hat{v} = g(v, \bullet) : T_p M \rightarrow \mathbb{R}. \quad (1.33)$$

Em termos de componentes, sendo $v = v^c e_c$, podemos escrever:

$$g(v, \bullet) = (g_{ab} e^a \otimes e^b)(v^c e_c, \bullet) = g_{ab} \underbrace{e^a(v^c e_c)}_{\in \mathbb{R}} e^b = g_{ab} v^c \delta_c^a e^b = g_{ab} v^a e^b. \quad (1.34)$$

Ora, como $\hat{v} = \hat{v}_b e^b$, temos que $\hat{v}_b = g_{ab} v^a$. Porém, para simplificar a notação, definimos $v_b := g_{ab} v^a$, de modo que $\hat{v} = v_b e^b$. Por essa razão, essa operação é referida como ‘descer’ o índice. Na literatura de física, os v^b são denominados de componentes contravariantes do vetor v e v_b suas componentes covariantes. O que muitas vezes passa despercebido é o fato de que a relação entre ambas exige a definição de um tensor métrico. Ademais, ressaltamos que, de modo geral, essas componentes serão números reais distintos, isto é, $v_b \neq v^b$, a não ser que $g_{ab} = \delta_{ab}$, como ocorre, por exemplo, em qualquer espaço euclidiano E^n . Também é interessante observar que a operação também funciona com os vetores da base, pois a aplicação $g(e_a, \bullet)$ faz a correspondência $e_a \mapsto g_{ab} e^b = g(e_a, \bullet)$.

¹⁸ Uma prática comum no cálculo de Ricci consiste em se referir a um tensor t por meio de suas componentes $t_{a \dots b}^c \dots^d$, como numa espécie de metonímia, a despeito de elas dependerem da base.

Podemos definir a operação inversa, ‘subir’ o índice. Para tanto, definimos como g^{ab} os elementos da matriz inversa de g , isto é,

$$g^{ab}g_{bc} = \delta_c^a. \quad (1.35)$$

Logo, temos a aplicação $g^{-1} = g^{ab}e_a \otimes e_b : T_p^*M \times T_p^*M \rightarrow \mathbb{R}$. Portanto, se $\hat{v} = v_c e^c$, a operação de subir o índice é definida por $g^{-1}(\hat{v}, \bullet) = g^{ab}v_a e_b = v^b e_b$, onde $v^b := g^{ab}v_a$. Como é fácil ver, o procedimento também funciona para vetores da base: $e^a \mapsto g^{ab}e_b = g^{-1}(e^a, \bullet)$.

Na formulação lagrangiana do movimento de uma partícula, valemo-nos da energia cinética T para a construção do funcional de ação S (rever a seção 0.2 ou adiantar para a 3.1). Além disso, as coordenadas generalizadas $\{q^1, q^2, \dots, q^n\}$ da teoria nada mais são que coordenadas locais de uma variedade diferenciável n -dimensional Q , ao passo que a trajetória da partícula é uma curva nessa variedade. Assim, recordando a definição de produto escalar, dada na seção 1.1, a energia cinética T , a menos de fatores de proporcionalidade relacionados às unidades envolvidas, é definida como

$$T = \frac{1}{2} \langle v | v \rangle_q = \frac{1}{2} g(v, v) = \frac{1}{2} g_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j \quad (1.36)$$

onde g_{ij} designa o tensor métrico de Q num ponto $q \in Q$, $g_{ij} = g(\partial_i, \partial_j)$ e os $\dot{q}^i = dq^i/dt$ são as componentes do vetor velocidade $v \in T_q Q$ na base coordenada $\{\partial_i\}$, ou seja, $v = \dot{q}^i \partial_i$. Temos, desse modo, um exemplo prático da necessidade de se definir uma estrutura adicional sobre a variedade diferenciável; nesse exemplo, o tensor métrico g . Ademais, nesse modelo usam-se como variáveis independentes as componentes de $v \in T_q Q$, além das próprias coordenadas generalizadas, por isso dizemos que a formulação lagrangiana é feita no espaço tangente $T_q Q$.

Prosseguindo, na formulação hamiltoniana do movimento da partícula, usamos as componentes p_i do momento canônico associadas a \dot{q}_i , as quais são definidas segundo as Eqs. 1.37:

$$p_i := \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} = g_{ij} \dot{q}^j. \quad (1.37)$$

A expressão no membro mais à direita das Eqs. 1.37 nada mais é do que uma operação de ‘descer’ o índice. Consequentemente, as componentes p_i são as versões covariantes das componentes de v . De fato, é natural fazer o somatório $g_{ij} \dot{q}^j dx^i$, donde

$$g_{ij} \dot{q}^j dx^i = g(\dot{q}^j \partial_j, \bullet) : T_q M \rightarrow \mathbb{R}, \quad (1.38)$$

ou seja, definimos o momento canônico como $p := g(\dot{q}^j \partial_j, \bullet) = p_i dx^i$, o qual nada mais é que um covetor $p \in T_q^* Q$. Por essa razão, dizemos que a formulação hamiltoniana é feita no espaço cotangente $T_q^* Q$. Como os espaços $T_q Q$ e $T_q^* Q$ são independentes, as formulações lagrangiana e hamiltoniana também o são; é o tensor métrico g que permite estabelecer uma relação entre as duas. Para rever esses exemplos de forma mais detalhada, ver a seção 5.5 de (SCHECK, 2010).

Formas diferenciais: p -formas

Como dissemos no início desta seção, as formas diferenciais, também denominadas p -formas, constituem um subconjunto específico de tensores. Do mesmo modo que fizemos para esses últimos, estamos interessados nos estudos dessas entidades no âmbito das variedades diferenciáveis. Destarte, temos:

DEFINIÇÃO. Uma p -forma definida sobre uma variedade n -dimensional M num ponto $p \in M$ ¹⁹ é um tensor $\alpha \in \mathcal{T}_p^0(M)$ totalmente antissimétrico, ou seja, aquele em que uma permutação de dois de seus argumentos ocasiona a inversão de seu sinal:

$$\alpha(\dots, v, \dots, w, \dots) = -\alpha(\dots, w, \dots, v, \dots). \quad (1.39)$$

Em termos de suas componentes tensoriais, a Eq. 1.39 fica

$$\alpha_{..a...b.} = -\alpha_{..b...a.}. \quad (1.40)$$

A propriedade de antissimetria acima só faz sentido se a forma tiver pelo menos dois argumentos. No entanto, é comum incluir os covetores, para os quais $p = 1$, entre o conjunto das formas diferenciais, constituindo eles as 1-formas.

O conjunto das p -formas em M será denominado $\Lambda^p(M)$, de modo que $\Lambda^p(M) \subset \mathcal{T}_p^0(M)$. Também sabemos que $\dim \mathcal{T}_p^0(M) = n^p$, pois temos n possíveis valores de índices para ocuparem p posições. E quanto a $\Lambda^p(M)$? A propriedade de antissimetria implica que componentes com índices repetidos são nulas, pois, pela Eq. 1.40, $\alpha_{..a...a.} = -\alpha_{..a...a.} \rightarrow \alpha_{..a...a.} = 0$. Além disso, como a permutação dos índices apenas ocasiona uma mudança no sinal da componente, a posição de cada um é irrelevante. Portanto, temos n valores possíveis de índices para ocuparem p posições, sem repetição e em qualquer ordem, ou seja, $\dim \Lambda^p(M) = C_{n,p}$, onde $C_{n,p} = n!/[p!(n-p)!]$ é a combinação de n elementos tomados p a p . Convém lembrar que $C_{n,p} = C_{n,n-p}$, fato que terá relevância mais tarde.

A operação de antissimetrização aplicada às componentes $t_{a...b...}$ de um tensor $t \in \mathcal{T}_p^0(M)$ produz uma p -forma como resultado. Com efeito, representemos simbolicamente por $\sigma(a...b...)$ uma permutação dos índices das componentes de t e por $(-1)^\sigma$ – com algum abuso de notação – o sinal associado à paridade de σ , ou seja, $(-1)^\sigma = -1$, se a paridade de σ for ímpar, ou $(-1)^\sigma = 1$, se ela for par. Desse modo, a antissimetrização aplicada às componentes de t é definida como

$$t_{[a...b...]} := \frac{1}{p!} \sum_{\sigma} (-1)^\sigma t_{\sigma(a...b...)}. \quad (1.41)$$

Como se pode observar, a notação $[a...b...]$ representa o processo de antissimetrização associado à permutação dos índices – sempre acompanhada do sinal correspondente à

¹⁹ Assim como fizemos para os vetores, covetores e tensores em geral, as formas diferenciais serão sempre especificadas em um ponto $p \in M$ fixo, o qual será omitido para simplificar a notação.

paridade da mesma – e normalizado pelo número de permutações $p!$. Por exemplo, se $s \in \mathcal{T}_2^0(M)$ e $t \in \mathcal{T}_3^0(M)$, é fácil ver pelas Eqs. 1.42 e 1.43 que a antissimetrização definida na Eq. 1.41 satisfazem a condição da Eq. 1.40.

$$s_{[ab]} = \frac{1}{2!}(s_{ab} - s_{ba}), \quad (1.42)$$

$$t_{[abc]} = \frac{1}{3!}(t_{abc} + t_{cab} + t_{bca} - t_{acb} - t_{bac} - t_{cba}). \quad (1.43)$$

Vimos que a operação produto tensorial permitiu a construção de tensores de tipo $\binom{p_1+p_2}{q_1+q_2}$ a partir de outros de ordem $\binom{p_1}{q_1}$ e $\binom{p_2}{q_2}$. Enquanto tensores, poderíamos aplicar essa mesma operação às p -formas. O problema, no entanto, é que, em geral, o resultado será um tensor, mas não uma p -forma. Logo, precisamos definir uma operação que preserve a antissimetria das formas diferenciais. Assim:

DEFINIÇÃO. Definimos o produto exterior entre duas formas $\alpha \in \Lambda^p(M)$ e $\beta \in \Lambda^q(M)$, simbolizado por $\alpha \wedge \beta$, como a operação bilinear e associativa que satisfaz a condição de comutatividade

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{pq} \beta \wedge \alpha, \quad (1.44)$$

e que resulta numa forma de ordem superior: $\alpha \wedge \beta \in \Lambda^{p+q}(M)$.

Como os covetores $\{e^a\}$ – ou $\{dx^a\}$ – da base coordenada de T_p^*M em coordenadas locais são 1-formas, podemos escrever qualquer $\alpha \in \Lambda^p(M)$ em termos do produto exterior dos mesmos. Antes de mostrar como fazê-lo porém, notamos que pela propriedade dada pela Eq. 1.44, temos que $e^a \wedge e^a = (-1)^{1 \cdot 1} e^a \wedge e^a \rightarrow e^a \wedge e^a = 0$. Isso reflete o fato de que as componentes de uma p -forma não podem ter índices repetidos (ou consideramo-los nulos). Destarte, estabelecemos primeiro a definição da Eq. 1.45:

$$\underbrace{e^{[a} \otimes e^b \otimes \dots \otimes e^{c]}}_{p \text{ termos}} := \frac{1}{p!} \sum_{\sigma} (-1)^{\sigma} \sigma(e^a \otimes e^b \otimes \dots \otimes e^c), \quad (1.45)$$

onde os índices do lado esquerdo são escritos em ordem crescente, $a < b < \dots < c$, ao passo que os do lado direito mudam conforme as permutações. Em seguida, definimos um elemento da base de $\Lambda^p(M)$ como

$$e^a \wedge e^b \wedge \dots \wedge e^c = p! e^{[a} \otimes e^b \otimes \dots \otimes e^{c]} = \sum_{\sigma} (-1)^{\sigma} \sigma(e^a \otimes e^b \otimes \dots \otimes e^c), \quad (1.46)$$

onde, novamente, $a < b < \dots < c$ nos dois membros à esquerda nas Eqs. 1.46. É importante observar que os índices que aparecem no lado esquerdo da Eq. 1.46 não correspondem à totalidade dos n índices disponíveis, mas apenas a p deles. Assim, fica claro que o número de elementos da base é $C_{n,n-p}$. Portanto, se $\alpha \in \Lambda^p(M)$, então ela pode ser escrita unicamente como

$$\alpha = \frac{1}{p!} \alpha_{ab\dots c} e^a \wedge e^b \wedge \dots \wedge e^c, \quad (1.47)$$

onde os $\alpha_{ab\dots c}$ são as componentes da p -forma na base coordenada $\{e^a\}$ e que coincidem com suas componentes tensoriais que devem satisfazer a condição de antissimetria dada pela Eq. 1.40. Também ressaltamos que os índices na Eq. 1.47 podem variar e permutar suas posições uma vez que utilizamos a convenção do somatório, daí a necessidade do fator $1/p!$. Se quisermos evitar a redundância que corresponde aos elementos $e^a \wedge e^b \wedge \dots \wedge e^c$ com covetores permutados, já que são os mesmos no fundo, reescrevemos a Eq. 1.47 como

$$\alpha = \sum_{a < b < \dots < c} \alpha_{ab\dots c} e^a \wedge e^b \wedge \dots \wedge e^c. \quad (1.48)$$

Consideremos o exemplo de uma variedade M tal que $\dim M = 3$. Então, escrevemos uma 2-forma em M como

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{2!} \alpha_{ab} dx^a \wedge dx^b \\ &= \frac{1}{2!} (\alpha_{12} dx^1 \wedge dx^2 + \alpha_{21} dx^2 \wedge dx^1 + \alpha_{13} dx^1 \wedge dx^3 + \alpha_{31} dx^3 \wedge dx^1 \\ &\quad + \alpha_{23} dx^2 \wedge dx^3 + \alpha_{32} dx^3 \wedge dx^2) \\ &= \frac{1}{2!} [(\alpha_{12} - \alpha_{21}) dx^1 \wedge dx^2 + (\alpha_{13} - \alpha_{31}) dx^1 \wedge dx^3 + (\alpha_{23} - \alpha_{32}) dx^2 \wedge dx^3] \quad (1.49) \\ &= \frac{1}{2!} (2\alpha_{12} dx^1 \wedge dx^2 + 2\alpha_{13} dx^1 \wedge dx^3 + 2\alpha_{23} dx^2 \wedge dx^3) \\ &= \alpha_{12} dx^1 \wedge dx^2 + \alpha_{13} dx^1 \wedge dx^3 + \alpha_{23} dx^2 \wedge dx^3 \\ &= \sum_{a < b} \alpha_{ab} dx^a \wedge dx^b, \end{aligned}$$

em que usamos o fato de que $\alpha_{ab} = -\alpha_{ba}$. Vamos supor agora que $\alpha_{12} = 3$, $\alpha_{13} = 0$ e $\alpha_{23} = -1$, e seja $\beta = 2dx^1 + dx^3 \in \Lambda^1(M)$. Então, usando as propriedades do produto exterior (bilinearidade, associatividade e anticomutatividade), obtemos

$$\begin{aligned} \alpha \wedge \beta &= (3 dx^1 \wedge dx^2 - 1 dx^2 \wedge dx^3) \wedge (2 dx^1 + dx^3) \\ &= 6 \underbrace{dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^1}_0 + 3 dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 - 2 dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^1 - \underbrace{dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^3}_0 \\ &= 3 dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 - 2 dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \\ &= dx^1 dx^2 dx^3, \end{aligned} \quad (1.50)$$

onde foi feita uma permutação par no último passo: $dx^2 \wedge dx^3 \wedge dx^1 = dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$. É interessante observar que o resultado só poderia ter um termo de qualquer maneira, pois ele pertence a $\Lambda^3(M)$, cuja dimensão é $C_{3,3-3} = C_{3,0} = 1$.

Novas operações sobre p -formas

Neste tópico trataremos brevemente de três operações sobre as p -formas: o produto interior, a derivada exterior e o operador dualidade ou *Hodge*.

DEFINIÇÃO. Consideremos $v \in T_q M$ e $\alpha \in \Lambda^p(M)$, onde $q \in M$ e $\dim M = n$. Como sabemos, a referida p -forma é uma aplicação $\alpha : (T_q M)^p \rightarrow \mathbb{R}$. Assim, define-se o produto interior entre v e α , simbolizado por $v \lrcorner \alpha$, como a forma diferencial resultante da aplicação de v no primeiro argumento de α , isto é,

$$v \lrcorner \alpha := \alpha(v, \bullet, \dots, \bullet) \in \Lambda^{p-1}(M). \quad (1.51)$$

Se definirmos as funções $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ aplicadas no ponto q como 0-formas, então, se α for uma 1-forma, teremos que $v \lrcorner \alpha = f(q)$ para alguma f . Por outro lado, se α for uma 0-forma, convencionamos que $v \lrcorner \alpha \equiv 0$.

Uma aplicação interessante do produto interior e que ilustra a elegância proporcionada pelo uso das formas diferenciais pode ser encontrada na formulação hamiltoniana das leis da mecânica. Assim, seja Q a variedade diferenciável n -dimensional de onde retiramos as coordenadas generalizadas do sistema em análise, denominada *espaço de configuração*. Se tomarmos a união de todos os espaços cotangentes $T_q^* Q$ de Q , com $q \in Q$, obtemos uma nova variedade $2n$ -dimensional²⁰ $T^* Q$, denominada *espaço de fase*, cujos pontos são (q, p) , lembrando que os covetores p , os momentos generalizados, são elementos definidos sobre $T_q^* Q$. Assim, seja x um vetor tangente de $T^* Q$ cujas componentes em coordenadas locais $(q^1, q^2, \dots, q^n, p_1, p_2, \dots, p_n)$ sejam $(\dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n, \dot{p}_1, \dots, \dot{p}_n)$. As equações de Hamilton, que nada mais são que as equações de movimento do sistema, permitem a obtenção de uma solução para o problema, isto é, na obtenção dos pontos (q, p) como função do tempo t , $(q, p) = (q(t), p(t))$, desde que se especifique uma função $H(q, p)$, dita hamiltoniana do sistema. Desse modo, as equações de Hamilton em coordenadas locais são dadas por

$$\frac{dq^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q^i}. \quad (1.52)$$

Ora, o espaço de fase $T^* Q$ possui uma 2-forma canônica ω associada à sua geometria particular, denominada 2-forma canônica simplética (ver seção 5.5 de (SCHECK, 2010)). Então, é possível mostrar – ver a seção 7.7 de (NASH; SEN, 1988) – que as equações de Hamilton podem ser escritas como na Eq. 1.53:

$$x \lrcorner \omega = -dH, \quad (1.53)$$

onde dH é a diferencial de H que, como vimos, é um vetor cotangente de $T^* Q$, isto é, uma 1-forma. Desse modo, vemos a consistência da Eq. 1.53, uma vez que $1 = \dim dH = \dim \omega - \dim x = 2 - 1$.

O que é notável na Eq. 1.53, além da sua compacidade, é o fato de que ela não requer a definição de coordenadas locais²¹, permanecendo no âmbito ‘abstrato’ da

²⁰ Essa variedade corresponde à uma entidade denominada fibrado cotangente de Q , o qual apresentaremos em maiores detalhes no capítulo 2.

²¹ Essa afirmação pode parecer estranha à primeira vista, uma vez que nós usamos coordenadas locais para definir o vetor x . Entretanto, x pode ser visto apenas como um certo campo vetorial sobre $T^* Q$, especificado pela Eq. 1.53. A interpretação de suas componentes em coordenadas locais como as derivadas das coordenadas e campos seria feita, então, *a posteriori*.

variedade em questão, o que foi possibilitado pelo formalismo das formas diferenciais; eis um exemplo da elegância a que nos referimos.

Prosseguindo com as definições, tratemos da derivada exterior.

DEFINIÇÃO. Seja α uma p -forma definida em uma variedade n -dimensional e cuja expressão em coordenadas locais seja dada pela Eq. 1.47. A derivada exterior de α , designada por $d\alpha$, é a operação unária e linear que em coordenadas locais é definida por

$$d\alpha = \frac{1}{p!} d\alpha_{ab\dots c} \wedge dx^a \wedge dx^b \wedge \dots \wedge dx^c, \quad (1.54)$$

onde $d\alpha_{ab\dots c}$ é a diferencial de $\alpha_{ab\dots c}$ enquanto função definida sobre M . Assim, como havíamos interpretado tais funções como 0-formas e já tínhamos visto que a diferencial delas é uma 1-forma, podemos definir a derivada exterior de uma 0-forma como sua diferencial, não sendo necessário usar outro símbolo para a derivada exterior. Por essa razão, e como mostra a Eq. 1.54, $d\alpha$ é uma $(p+1)$ -forma.

Podemos ser mais explícitos na definição da derivada exterior, pois sabemos que

$$d\alpha_{ab\dots c} = \frac{\partial \alpha_{ab\dots c}}{\partial x^k} dx^k. \quad (1.55)$$

Desse modo, reescrevemos a Eq. 1.54 como

$$d\alpha = \frac{1}{p!} \frac{\partial \alpha_{ab\dots c}}{\partial x^k} dx^k \wedge dx^a \wedge dx^b \wedge \dots \wedge dx^c. \quad (1.56)$$

Vemos na Eq. 1.56 que alguns dos termos no lado direito serão nulos, sempre que o índice k coincidir com um dos outros a, b, \dots, c . Além disso, reordenamentos e somas de componentes podem ser necessários para a obtenção de uma expressão final enxuta para $d\alpha$. Outra observação suscitada pela Eq. 1.56 diz respeito à derivada exterior de uma n -forma. Nesse caso, o índice k sempre será idêntico a um dos outros, resultando em $d\alpha \equiv 0$, o que é certamente consistente, pois não seria admissível a definição de uma $(n+1)$ -forma em uma variedade n -dimensional.

Antes de apresentar um exemplo concreto, assinalamos que a derivada exterior satisfaz as propriedades abaixo:

- i) nilpotência, isto é, $d(d\alpha) = d^2\alpha \equiv 0$;
- ii) regra de Leibniz graduada: $d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge d\beta$, com $\alpha \in \Lambda^p(M)$ e $\beta \in \Lambda^q(M)$.

Consideremos o exemplo $\alpha = xydx + x^2zdy - 3yzdx$ em coordenadas cartesianas

locais. Assim:

$$\begin{aligned}
d\alpha &= \left[\frac{\partial(xy)}{\partial x} dx + \frac{\partial(xy)}{\partial y} dy + \frac{\partial(xy)}{\partial z} dz \right] \wedge dx \\
&+ \left[\frac{\partial(x^2z)}{\partial x} dx + \frac{\partial(x^2z)}{\partial y} dy + \frac{\partial(x^2z)}{\partial z} dz \right] \wedge dy \\
&+ \left[\frac{\partial(-3yz)}{\partial x} dx + \frac{\partial(-3yz)}{\partial y} dy + \frac{\partial(-3yz)}{\partial z} dz \right] \wedge dz \\
&= (y \cdot 0 + x dy \wedge dx + 0 dz \wedge dx) \\
&+ (2xz dx \wedge dy + 0 \cdot 0 + x^2 dz \wedge dy) \\
&+ (0 dx \wedge dz - 3z dy \wedge dz - 3y \cdot 0) \\
&= (2xz - x) dx \wedge dy - (x^2 + 3z) dy \wedge dz.
\end{aligned} \tag{1.57}$$

Finalizamos esta seção com o operador *Hodge*. Para tanto, lembramos que $\dim \Lambda^p(M) = \dim \Lambda^{n-p}(M)$, pois $C_{n,p} = C_{n,n-p}$. Como ambos os espaços são lineares e de mesma dimensão, existe um isomorfismo entre ambos, porém, não há um modo único de estabelecê-lo; uma situação análoga à do isomorfismo entre $T_p M$ e $T_p^* M$. Do mesmo modo que fizemos para esse último caso, usaremos o tensor métrico g definido sobre M para estabelecer de forma única a relação $\Lambda^p(M) \cong \Lambda^{n-p}(M)$. Antes porém, apresentamos o símbolo de Levi-Civita, $\epsilon_{ab\dots c}$, caracterizado pelas seguintes propriedades:

$$\epsilon_{ab\dots c} = \epsilon^{ab\dots c} = \epsilon_{[ab\dots c]}; \quad \epsilon_{12\dots n} = 1. \tag{1.58}$$

Desse modo, o símbolo de Levi-Civita é completamente antissimétrico em seus índices, sendo igual a 1 se os mesmos forem escritos em ordem crescente, e sendo os valores atribuídos a cada índice limitados ao número deles presentes no símbolo. Ademais, a posição superior ou inferior dos índices é irrelevante, ela é normalmente escolhida para compatibilizar os somatórios com a convenção de Einstein. Eis alguns exemplos:

$$\epsilon_{11} = \epsilon_{22}, \quad \epsilon_{12} = -\epsilon_{21} = 1; \tag{1.59}$$

$$\epsilon_{111} = \epsilon_{112} = \epsilon_{232} = \dots = 0, \quad \epsilon_{123} = \epsilon_{312} = -\epsilon_{132} = -\epsilon_{213} = \dots = 1. \tag{1.60}$$

Com isso, podemos definir o operador *Hodge*:

DEFINIÇÃO. Seja $\alpha \in \Lambda^p(M)$ uma p -forma sobre a variedade n -dimensional M cuja expressão em coordenadas locais seja $\alpha = \alpha_{ab\dots c} dx^a \wedge dx^b \dots dx^c$. O operador *Hodge* ou *dualidade* é a aplicação que associa a α uma $(n-p)$ -forma única, simbolizada por $(*\alpha)$, definida como (ver seção 3.3 de (GÖCKELER; SCHÜCKER, 1989)):

$$(*\alpha) = \frac{\sqrt{|g|}}{p!(n-p)!} \alpha_{ab\dots c} g^{ar} g^{bs} \dots g^{ct} \epsilon_{\underbrace{rs\dots tde\dots f}_{n \text{ índices}}} \underbrace{dx^d \wedge dx^e \wedge \dots \wedge dx^f}_{(n-p) \text{ termos}}, \tag{1.61}$$

onde $|g|$ é o módulo do determinante da matriz correspondente a g e g^{ij} os elementos de sua inversa, tal como definido na Eq.1.35. Logo, para obter $*\alpha$, ‘subimos’ os índices das

componentes de α usando a métrica, em seguida, fazemos uma espécie de contração do resultado com o símbolo de Levi-Civita, incluindo os elementos da base de $\Lambda^{n-p}(M)$ no processo.

Tomemos o exemplo já dado de $\alpha \in \Lambda^2(M)$, onde $\dim M = 3$. Se assumirmos que $g^{ab} = \delta^{ab}$, então:

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha_{12}dx^1 \wedge dx^2 + \alpha_{13}dx^1 \wedge dx^3 + \alpha_{23}dx^2 \wedge dx^3 \rightarrow \\ (*\alpha) &= \frac{1}{2!(3-2)!} \left(\alpha_{12}\delta^{11}\delta^{22}\epsilon_{123}dx^3 + \alpha_{13}\delta^{11}\delta^{33}\epsilon_{132}dx^2 + \alpha_{23}\delta^{22}\delta^{33}\epsilon_{231}dx^1 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\alpha_{23}dx^1 - \alpha_{13}dx^2 + \alpha_{12}dx^3 \right) \end{aligned} \quad (1.62)$$

A Eq. 1.61 indica explicitamente como a definição do operador *Hodge* depende da métrica, mas a orientação também é importante, estando implícita na escolha feita para a ordem com que os elementos da base $\{dx^a\}$ são escritos.

As n -formas – com $n = \dim M$ – possuem uma interpretação interessante. Primeiro, observamos que $\dim \Lambda^n(M) = C_{n,n-n} = C_{n,0} = 1$, de modo que qualquer n -forma ω terá apenas uma componente, isto é, em coordenadas locais, $\omega = \lambda dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^n$, sendo λ alguma função diferenciável do ponto da variedade. É possível mostrar que o produto exterior dos covetores dx^1, dx^2, \dots, dx^n se comporta exatamente como o símbolo $dx^1 dx^2 \dots dx^n$ que aparece sob o sinal da integral de volume n -dimensional, de sorte que é natural definir semelhante integral da função λ como

$$\int_D \lambda dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^n = \int_D \omega, \quad (1.63)$$

onde D é algum volume n -dimensional tal que $D \subset M$. O aspecto frugal da Eq. 1.63 é outro exemplo da elegância propiciada pelo formalismo das formas diferenciais. Ainda, é interessante notar que se α e β são p -formas da variedade M , então o produto exterior $\alpha \wedge *\beta$ é necessariamente uma n -forma. Em particular, $\alpha \wedge *\alpha \in \Lambda^n(M)$. Portanto, a expressão

$$\int_D \alpha \wedge *\alpha, \quad (1.64)$$

corresponde à integral de volume de alguma função definida sobre M , a qual é constituída pelas componentes de α . Como exemplo, a Eq. 1.65 mostra o funcional de ação para o eletromagnetismo na ausência de correntes e cargas elétricas,

$$S = \frac{1}{g^2} \int F \wedge *F, \quad (1.65)$$

sendo F uma 2-forma particular associada ao quadrivetor A_μ (ver seção 4.1) e g uma constante, denominada *constante de acoplamento*. Como último exemplo de aplicação do operador *Hodge* em conjunto com o produto exterior, a Eq. 1.66 mostra o funcional de ação de Hilbert para a gravitação no vácuo – formado a partir de uma base $\{e^a\}$ de T_p^*M – a partir do qual se pode obter as equações de campo de Einstein:

$$S = \frac{1}{32\pi G} \int R_{ab} \wedge *(e^a \wedge e^b), \quad (1.66)$$

onde G é constante universal da gravitação e R_{ab} é o tensor de Ricci, já mencionado anteriormente e ao qual retornaremos na próxima seção. Em ambos os exemplos das Eqs. 1.65 e 1.66, a variedade subjacente M é o espaço-tempo, com $\dim M = 4$.

1.3 Geometria diferencial com formas diferenciais

Nesta seção apresentaremos de forma bastante resumida alguns conceitos em geometria diferencial, apresentando alguns métodos propiciados pelo formalismo das formas diferenciais, fruto do trabalho pioneiro de Élie Cartan que, valendo-se do método dos referenciais móveis e da álgebra exterior, pôde exprimir resultados já conhecidos dessa área de forma bastante elegante (o capítulo final de (TENENBLAT, 2008) explicita a beleza desse método quando o confrontamos com os capítulos anteriores da mesma obra, voltada para superfícies mergulhadas em E^3), além de outros novos.

Ainda, vamos admitir que $\{e_a\}$ é alguma base de T_pM , não necessariamente coordenada²², isto é, não teremos obrigatoriamente $\partial_a = e_a$ em algum sistema local de coordenadas. Mudaremos a nomenclatura porque, na teoria geral da relatividade, tradicionalmente, essa simbologia é usada para designar um sistema de referência definido em cada ponto do espaço-tempo, o qual é concebido como uma variedade diferenciável de quatro dimensões – daí o nome *tetradas* dado a essas bases – e que não necessariamente é constituído por bases coordenadas. Esse tributo à RG se deve ao fato de que o conteúdo desta seção contém alguns conceitos fundamentais para essa teoria.

Conexões afins

Seja M uma variedade diferenciável n -dimensional. Tomemos uma base $\{e_a\}$ de T_pM , a qual constitui um campo vetorial sobre M quando variamos o ponto $p \in M$. Assim, usaremos o termo *campo de referenciais* para designá-lo, ou *campo de correferenciais*, em se tratando da base dual $\{e^a\}$. Se derivarmos cada e_a em relação às coordenadas locais (x^1, x^2, \dots, x^n) , obteremos novos vetores, os quais poderão ser expressos como combinação linear dos e_a , já que os mesmos constituem uma base do espaço vetorial T_pM . Logo, temos

$$\frac{\partial e_a}{\partial x^c} = \partial_c e_a = \Gamma_{ac}^b e_b, \quad (1.67)$$

onde as componentes Γ_{ac}^b de $\partial_c e_a$ ²³ são denominadas *conexões afins* ou *símbolos de Christoffel*²⁴ do segundo tipo. Também salientamos que na Eq. 1.67 todos os elementos são

²² É possível definir uma base do espaço tangente que não seja uma base coordenada. Nesse caso, falamos em uma base não holonômica.

²³ Já que não mais consideramos necessariamente a identidade $e_a = \partial_a$, seria talvez recomendável usar um conjunto diferente de símbolos para os índices das coordenadas locais e os dos vetores da base e_a . Entretanto, uma vez esclarecido esse ponto, manteremos a mesma simbologia.

²⁴ Segundo (FECKO, 2006), o termo ‘símbolos de Christoffel’ são usados apenas quando as conexões são definidas em termos das bases coordenadas, ou seja, quando $e_a = \partial_a$. Não faremos essa distinção aqui.

função do ponto da variedade.

Há um problema com a definição da Eq. 1.67, pois é preciso estabelecer em que sentido se toma a derivada de um vetor de T_pM . Imaginemos um campo vetorial $v(t)$ definido sobre uma curva $\gamma(t)$ de E^m . Nesse caso, calcularíamos a derivada de $v(t)$ ao longo de $\gamma(t)$ – ou, equivalentemente, na *direção* $\dot{\gamma}(t)$ – como na Eq. 1.68, onde a notação nos parece suficientemente clara:

$$\frac{d_\gamma v(t)}{dt} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{v(t + \varepsilon) - v(t)}{\varepsilon}. \quad (1.68)$$

Num espaço euclidiano, não há dificuldades em se fazer a subtração no limite da Eq. 1.68, pois $v(t + \varepsilon)$ e $v(t)$ pertencem ao mesmo espaço vetorial. Para uma variedade M qualquer, vetores tangentes a curvas pertencem a espaços distintos, nesse exemplo, $T_{\gamma(t)M}$ e $T_{\gamma(t+\varepsilon)M}$. Como ambos são espaços lineares de mesma dimensão, existe um isomorfismo entre eles, mas não há uma única maneira de estabelecê-lo. Assim, é necessário adicionar uma nova estrutura à variedade, a qual fixa esse isomorfismo para quaisquer curvas de M e pontos da mesma, ou seja, é preciso especificar uma aplicação que determine $T_pM \rightarrow T_qM$ para qualquer curva $\gamma(t)$ em M e pontos $p, q \in M$ tais que $\gamma(t_0) = p$ e $\gamma(t_1) = q$.

Suponhamos que a referida aplicação entre $T_{\gamma(t)M}$ e $T_{\gamma(t+\varepsilon)M}$ esteja definida e seja $v_{\parallel}^\gamma(t + \varepsilon) \in T_{\gamma(t)M}$ o vetor resultante da mesma feita sobre $v(t + \varepsilon)$. Então, definimos a derivada de $v(t)$ ao longo de $\gamma(t)$ como

$$\frac{d_\gamma v(t)}{dt} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{v_{\parallel}^\gamma(t + \varepsilon) - v(t)}{\varepsilon}. \quad (1.69)$$

Em particular, em coordenadas locais, podemos calcular a derivada de $v(t)$ ao longo de uma curva coordenada $\{x^c = x^c(t); x^a = \text{const.}, a \neq c\}$:

$$\frac{\partial v}{\partial x^c} = \partial_c v := \frac{d_{x^c} v(t)}{dt} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{v_{\parallel}^{x^c}(t + \varepsilon) - v(t)}{\varepsilon}. \quad (1.70)$$

É no sentido da Eq. 1.70 que tomamos a derivada de e_a na Eq. 1.68. Portanto, podemos dizer que as conexões afins são consequência da especificação do isomorfismo entre espaços tangentes distintos de M . Por outro lado, podemos inverter o raciocínio e escolher esses coeficientes *a priori*, fixando o isomorfismo entre T_pM e T_qM em seguida, como uma consequência dessa escolha. De todo modo, é preciso adicionar uma dessas estruturas à variedade para que se possa tratar a base $\{e_a\}$ efetivamente como uma tetrada (se $n = 4$) ou um n -edro móvel.

Retomando a Eq. 1.67, as conexões afins não são tensores, conquanto a notação sugira essa possibilidade. De fato, tendo em vista a transformação de coordenadas $(x^1, x^2, \dots, x^n) \mapsto (\tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \dots, \tilde{x}^n)$, as conexões afins se transformam de acordo com a Eq. 1.71:

$$\Gamma_{bc}^a = \frac{\partial \tilde{x}^a}{\partial x^d} \frac{\partial x^f}{\partial \tilde{x}^b} \frac{\partial x^g}{\partial \tilde{x}^c} \Gamma_{fg}^d - \frac{\partial x^d}{\partial \tilde{x}^b} \frac{\partial x^f}{\partial \tilde{x}^c} \frac{\partial^2 \tilde{x}^a}{\partial x^d \partial x^f}, \quad (1.71)$$

cujos termos à esquerda são os responsáveis pelo fato de elas não serem tensores. Apesar disso, podemos formar um tensor usando apenas duas dessas conexões. Portanto, definimos

$$T_{ac}^b := \Gamma_{ac}^b - \Gamma_{ca}^b, \quad (1.72)$$

onde T_{ac}^b é o tensor torção de M .

Retomando a Eq. 1.69, se a derivada de v for nula em cada ponto de γ , dizemos que o vetor foi transportado paralelamente ao longo da curva. Nesse caso, falamos em um campo de vetores *autoparalelo*, constituído de vetores *paralelos* entre si. Se a variedade contar com uma métrica g , podemos nos perguntar o que acontece com a norma $\sqrt{g(v, v)}$ do vetor quando transportado paralelamente. Se a magnitude dos vetores permanecer inalterada por essa operação, dizemos que as conexões afins que as determinam são compatíveis com a métrica e chamamo-las *conexões métricas*.

A compatibilidade das conexões afins com a métrica impõe várias restrições sobre as primeiras. Se além disso, exigirmos que o tensor torção seja identicamente nulo, ou seja, que $\Gamma_{ac}^b = \Gamma_{ca}^b$, teremos uma solução única para as conexões métricas em termos de g ou, reciprocamente, podemos determinar g unicamente a partir das Γ_{ac}^b . De fato, se as conexões Γ_{ac}^b forem métricas e simétricas – isto é, $\Gamma_{ac}^b = \Gamma_{ca}^b$ – então, valem as relações das Eqs. 1.73 e 1.74.

$$\partial_a g_{bc} = \Gamma_{ba}^d g_{dc} + \Gamma_{ca}^d g_{bd} = \Gamma_{cba} + \Gamma_{bca}, \quad (1.73)$$

$$\Gamma_{bc}^a = \frac{1}{2} g^{ad} (\partial_b g_{dc} + \partial_c g_{bd} - \partial_a g_{bc}), \quad (1.74)$$

onde $\Gamma_{cba} := \Gamma_{ba}^d g_{dc}$ são denominados *símbolos de Christoffel* do primeiro tipo. Notamos nas Eqs. 1.73 e 1.74 a simetria em relação aos índices inferiores – não nos esqueçamos que a métrica g_{ab} também possui essa propriedade – advinda da nulidade da torção. Na RG padrão de Einstein, a torção é considerada nula, mas há teorias alternativas, como a de Cartan, a qual já mencionamos na seção 0.3.

Transporte paralelo e geodésicas

Tratemos do transporte paralelo em maiores detalhes. A derivada da Eq. 1.69 é denominada derivada absoluta ou intrínseca do campo vetorial $v(t)$ ao longo da curva $\gamma(t)$, sendo usual representá-la de outra forma, como na Eq. 1.75:

$$\frac{Dv(t)}{Dt} := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{v_{||}^{\gamma}(t + \varepsilon) - v(t)}{\varepsilon}, \quad (1.75)$$

em que o símbolo representativo da curva é omitido. Como dissemos, podemos falar, de forma equivalente, na derivada de $v(t)$ na direção de $\dot{\gamma}(t)$. Assim, seja $w(t)$ um campo vetorial tal que $w(t) = \dot{\gamma}(t)$. Definimos a derivada covariante de $v(t)$ na direção do campo $w(t)$, designada por $\nabla_w v$, como

$$\nabla_w v := \frac{Dv(t)}{Dt}. \quad (1.76)$$

Em particular, reescrevemos a definição da Eq. 1.70, para a derivada ao longo de curva coordenada $\{x^c = x^c(t); x^a = \text{const.}, a \neq c\}$ como

$$\partial_c v = \frac{d_{x^c} v(t)}{dt} = \nabla_c v := \nabla_{\dot{x}^c} v, \quad (1.77)$$

a qual resulta em $\partial_c e_a = \nabla_c e_a$ para um vetor da base, sendo o símbolo ∇_c usado preferencialmente em relação a ∂_c para a derivada covariante ao longo de tais curvas.

É possível definir a derivada covariante antes da absoluta, situação na qual falaríamos apenas no campo vetorial $w(t)$, sem mencionar qualquer curva $\gamma(t)$ (ver seção 15.2 de (FECKO, 2006)). De qualquer maneira, ambas as derivadas expressam o mesmo conceito de transporte de vetores sobre variedades.

A partir da Eq. 1.67, podemos expressar as derivadas covariante e absoluta em coordenadas locais. Logo, se $v = v^a e_a$, temos que

$$\frac{Dv(t)}{Dt} = \nabla_{\dot{\gamma}} v = \left(\frac{dv^a}{dt} + \Gamma_{bc}^a v^b \frac{dx^c}{dt} \right) e_a, \quad (1.78)$$

onde $x^c(t)$ corresponde à c -ésima coordenada de $\gamma(t)$ expressa em coordenadas locais. Portanto, se $v(t)$ for transportado paralelamente ao longo de $\gamma(t)$, temos que

$$\nabla_{\dot{\gamma}} v = 0 \rightarrow \frac{dv^a}{dt} + \Gamma_{bc}^a v^b \frac{dx^c}{dt} = 0. \quad (1.79)$$

A anulação da derivada covariante implica no conjunto de equações diferenciais das Eqs. 1.79, as quais, quando solucionadas, permitem a obtenção de um campo de vetores paralelos ao longo de $\gamma(t)$.

Como já deve ter ficado claro até esse ponto, o conceito de vetores paralelos em uma variedade generaliza o paralelismo entre vetores a que estamos habituados em E^3 . Quando saímos de uma variedade plana porém, o conceito de vetores paralelos pode parecer contraintuitivo. A Figura 6 mostra um conjunto de vetores paralelos sobre a esfera S^2 mergulhada em E^3 , enquanto a Figura 7 exemplifica o conceito de transporte paralelo de um vetor v ao longo de uma curva fechada para a mesma superfície.

O campo $v(t)$ de vetores paralelos poderia ter como origem alguma curva $\nu(t)$, isto é, $v(t) = \dot{\nu}(t)$. Também poderíamos nos perguntar se a própria $\gamma(t)$ usada na derivada covariante não poderia sê-la. Nesse caso, $\gamma(t)$ não seria definida como parâmetro livre, sendo um tipo de curva específica, característica da variedade. Uma curva $\gamma(t)$ cujos vetores tangentes $\dot{\gamma}(t)$ são paralelos é denominada uma *geodésica da variedade* e podemos usar as Eqs. 1.79 para determiná-la. Logo:

$$\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma}(t) = 0 \rightarrow \frac{d^2 x^a}{dt^2} + \Gamma_{bc}^a \frac{dx^b}{dt} \frac{dx^c}{dt} = 0, \quad (1.80)$$

onde, novamente, os $x^c(t)$ correspondem às coordenadas locais de $\gamma(t)$.

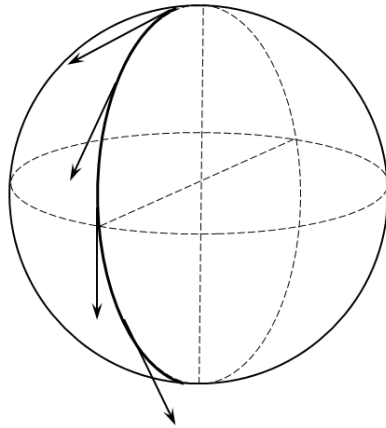


Figura 6 – Exemplo de vetores paralelos sobre a esfera S^2 mergulhada em E^3 .

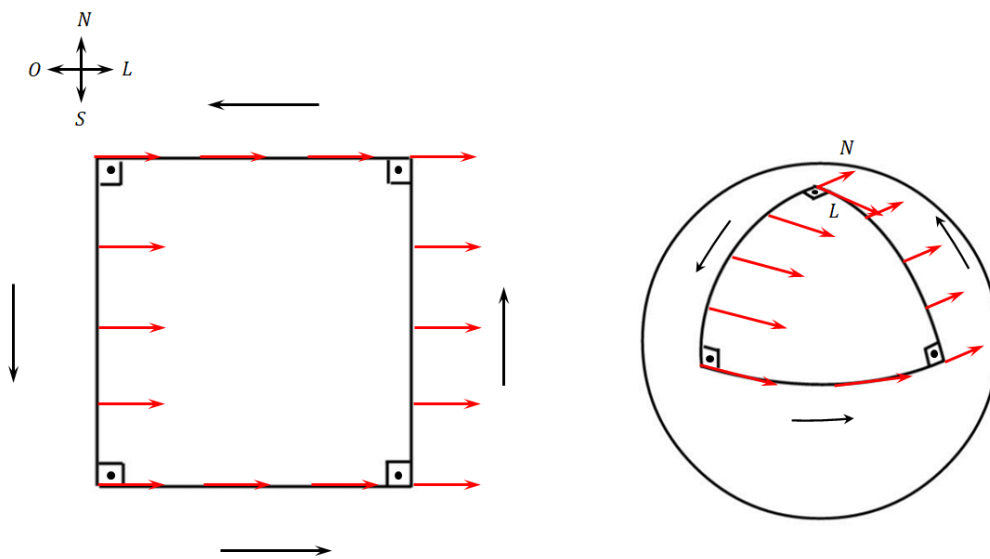


Figura 7 – Um viajante deseja viajar pelo mundo, retornando ao ponto de partida no fim da jornada. Ele imagina que a Terra seja plana e deseja fazer sua viagem percorrendo um quadrado sobre sua superfície (à esquerda) e mantendo seu olhar sempre voltado para a mesma direção. Ele parte do polo norte olhando para o leste e seguindo para o sul (à direita). Ao chegar na linha do equador, ele muda a direção do trajeto em 90° , continuando o trajeto na direção leste até percorrer a mesma distância da primeira etapa, virando novamente por 90° em seguida. Surpreso, ele percebe que ao percorrer a mesma distância da etapa anterior, retorna ao ponto de partida, apesar de ter percorrido apenas três ‘arestas’ da trajetória pretendida, e com o olhar voltado para uma direção distinta da inicial (norte). De início, ele supõe ter percorrido na verdade um triângulo sobre o plano da Terra, mas então percebe que, nessa hipótese, o mesmo deveria ter uma soma de ângulos internos igual a 270° .

Uma geodésica possui propriedades especiais, correspondendo à curva de menor comprimento que se pode definir entre dois pontos da variedade. Não é surpresa, portanto, que elas possam ser obtidas usando o procedimento de Euler-Lagrange para a obtenção das equações de movimento de um sistema partindo do funcional de ação (ver seção 3.19 de (HOBSON; EFSTATHIOU; LASENBY, 2006) ou a 15.4 de (FECKO, 2006)). Para qualquer espaço euclidiano, tais curvas são retas, obviamente; para a esfera S^2 , elas correspondem a circunferências de raio máximo, o que justifica o paralelismo dos vetores nas Figuras 6 e 7.

Há ainda uma interpretação interessante para as geodésicas. Se imaginarmos que $\gamma(t)$ é a trajetória de alguma partícula sobre a variedade M , então podemos interpretar $\dot{\gamma}(t)$ como sua velocidade. Por conseguinte, podemos associar a derivada covariante à sua aceleração, de modo que a anulação da mesma, como ocorre com a geodésica, seria equivalente a uma trajetória livre de forças, isto é, com aceleração nula. Na física newtoniana, partículas que não sofrem a ação de nenhuma força descrevem trajetórias retilíneas, as quais, sabemos agora, são geodésicas no espaço euclidiano E^3 . Portanto, poderíamos dizer, tais retas correspondem ao modo natural de um objeto mover-se nessas condições. Na RG de Einstein, a gravidade deixa de ser uma força, assim, a forma natural de um objeto mover-se livremente continua sendo uma geodésica, mas, como admite-se que o espaço-tempo possa ser curvo, tais trajetórias não nos parecerão retilíneas. A distribuição de matéria continua sendo a causa da ‘sinuosidade’ das trajetórias das partículas, mas agora, ela o faz encurvando o espaço-tempo, o que interpretamos como gravidade.

Curvatura

Não é tarefa trivial saber se uma variedade é plana ou não usando apenas a métrica, pois o fato de $g_{ab} \neq \eta_{ab}$ em alguns de seus pontos não implica que ela seja curva. Com efeito, a métrica depende das coordenadas e da base do espaço tangente escolhidas, de modo que para certa combinação, g_{ab} pode ser diferente de η_{ab} , mesmo o espaço sendo plano. Um exemplo simples consiste em se usar coordenadas polares (ρ, θ) e a base coordenada $\{\partial\rho, \partial\theta\}$ no plano E^2 . Nesse caso, a métrica g – que em coordenadas cartesianas e na respectiva base coordenada seria $g_{ab} = \delta_{ab}$ – se torna $g(\partial\rho, \partial\theta) = d\rho \otimes d\rho + \rho^2 d\theta \otimes d\theta$. Outros exemplos de dificuldade em se definir se certa variedade é plana são dados pelo cone e cilindro mergulhados em E^3 , os quais são planos, mesmo que não pareçam.

A Figura 7 ilustra o caso de um vetor transportado paralelamente ao longo de curva fechada sobre uma variedade, terminando em uma direção diferente da original. Esse fenômeno está diretamente ligado ao fato de que a esfera, exemplificada na referida figura, possui curvatura não nula (ver a seção 4.5 de (CARMO, 2010) sobre o teorema de Gauss-Bonnet). Podemos, assim, usar essa propriedade, e sua análoga para o caso geral, para caracterizar as variedades não planas. Tal análise resulta no tensor de curvatura, embora

sua dedução possa também ser feita de outras maneiras. De todo modo, deixaremos os detalhes para consulta em obras como (HOBSON; EFSTATHIOU; LASENBY, 2006), (FECKO, 2006), (GÖCKELER; SCHÜCKER, 1989), (STERNBERG, 2013), entre outras, apresentando apenas esse tensor em termos de elementos já vistos. Portanto, o *tensor de curvatura* ou *tensor de Riemann*, definido em termos de suas componentes R_{bcd}^a é dado por

$$R_{abc}^d := \partial_b \Gamma_{ac}^d - \partial_c \Gamma_{ab}^d + \Gamma_{ac}^e \Gamma_{eb}^d - \Gamma_{ab}^e \Gamma_{ec}^d. \quad (1.81)$$

Portanto, dizemos que a variedade M é plana numa certa $D \subset M$ se $R_{abc}^d \equiv 0$ na mesma. Por ser um tensor, se essa propriedade for atendida em um sistema de coordenadas, ela o será em qualquer outro. De fato, o primeiro termo no membro direito da Eq. 1.71 indica como um tensor do tipo $\binom{1}{2}$ se transformaria numa mudança de coordenadas; basicamente, são feitas $(1 + 2)$ transformações lineares sucessivamente. Para um tensor como R_{abc}^d o processo seria análogo. Consequentemente, se ele for identicamente nulo num sistema, sê-lo-á em qualquer outro.

Já havíamos mencionado R_{abc}^d na seção 1.2, bem como o tensor de Ricci R_{ab} , reapresentado na Eq. 1.82.

$$R_{ab} := R_{abc}^c. \quad (1.82)$$

Também apresentamos o escalar de curvatura, definindo antes $R_b^a := g^{ac} R_{cb}$, o qual é simétrico, de modo que $R_b^a = R_a^b = g^{bc} R_{ac}$ ²⁵. Portanto, o escalar de curvatura R é tal que

$$R = R_a^a. \quad (1.83)$$

O tensor de Ricci e o escalar de curvatura contêm menos informações que o tensor de curvatura, naturalmente. Entretanto, são eles que comparecem nas equações de campo de Einstein da RG.

Forma-conexão, forma-torção e forma-curvatura

Finalmente, aplicamos o formalismo das formas diferenciais à geometria das variedades diferenciáveis. Para tanto, observamos que $\nabla_v e_a \in T_p M$, onde $v \in T_p M$. Como e_a também pertence ao mesmo espaço vetorial, para cada v deve existir um conjunto de coeficientes que permitem a expressão de $\nabla_v e_a$ em termos dos vetores da base $\{e_b\}$. Logo, escrevemos

$$\nabla_v e_a = \omega_a^b(v) e_b, \quad (1.84)$$

onde cada $\omega_a^b(v)$ é um escalar que corresponde aos referidos coeficientes, isto é, às componentes de $\nabla_v e_a$ na base $\{e_b\}$. Ora, cada ω_a^b é uma aplicação do tipo $\omega_a^b : T_p M \rightarrow \mathbb{R}$,

²⁵ Recordamos que R_{abc}^d e R_{ab} representam componentes de tensores distintos. No entanto, tradicionalmente se usa a mesma letra para designá-las. Do mesmo modo, $g^{ac} R_{cb}$ e $g^{bc} R_{ac}$ são componentes de tensores diferentes. Porém, como ambos são simétricos, vale a identidade $g^{ac} R_{cb} \equiv g^{bc} R_{ac}$, não havendo ambiguidade na notação R_a^b .

portanto, são 1-formas definidas sobre M , denominadas *formas-conexão* em relação a e_a . É importante algum cuidado com a notação aqui: os símbolos ω_a^b designam 1-formas e não componentes de um tensor do tipo $\binom{1}{1}$. Podemos simplificar a notação por meio da noção de p -formas multivaloradas. Com efeito, havíamos definido essas entidades como aplicações de $(T_p M)^p := \underbrace{T_p M \times \dots \times T_p M}_{p \text{ vezes}}$ em \mathbb{R} . Contudo, podemos definir qualquer espaço multidimensional como contradomínio, por exemplo, \mathbb{R}^N ou o espaço das matrizes reais $N \times N$, designado por $\mathbb{R}^{N \times N}$. Nesse caso, sendo $\dim M = n$, podemos definir uma 1-forma multivalorada $\omega : T_p M \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ constituída por n^2 1-formas, a saber, as ω_a^b . Destarte, definimos $\omega(v)$, com $v \in T_p M$, como uma matriz real $n \times n$ em que $\omega_a^b(v)$ corresponde ao elemento da b -ésima linha e a -ésima coluna, o que simbolizamos por $\omega_a^b(v) = [\omega(v)]_{ba}$. De outro modo, sem nos referirmos a v , podemos pensar em ω como uma matriz de 1-formas $n \times n$, cuja aplicação em v resulta numa matriz de valores reais de mesmas dimensões.

Considerando a Eq. 1.67 e a definição de derivada covariante, também podemos escrever

$$\omega_b^a = \Gamma_{bc}^a e^c. \quad (1.85)$$

Também definimos duas 2-formas: a forma-torção T^a , em termos das componentes T_{bc}^a do tensor torção, e a forma-curvatura Ω_b^a , a partir das componentes R_{bcd}^a do tensor de curvatura:

$$T^a = \frac{1}{2} T_{bc}^a e^b \wedge e^c, \quad (1.86)$$

$$\Omega_b^a = \frac{1}{2} R_{bcd}^a e^c \wedge e^d. \quad (1.87)$$

De forma análoga ao caso das formas-conexão, é preciso ter em mente que cada T^a é uma 2-forma, o mesmo valendo para cada Ω_b^a , isto é, dado um par de vetores $(v, w) \in T_p M \times T_p M$, então $T^a(v, w) \in \mathbb{R}$ e $\Omega_b^a(v, w) \in \mathbb{R}$. Assim, podemos definir as 2-formas multivaloradas T e Ω do modo a seguir.

- $T(v, w)$ é um vetor de \mathbb{R}^n cujas componentes são os reais $T^a(v, w)$, isto é, $T(v, w) = (T^1(v, w), \dots, T^n(v, w))$. Também podemos definir $T(v, w)$ como uma matriz-coluna real $T(v, w) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, assim, $T(v, w) = [T^1(v, w) \dots T^n(v, w)]^T$, o que permite o uso do cálculo matricial. Ainda, podemos conceber T como um vetor ou matriz-coluna de 2-formas.
- $\Omega(v, w)$ é uma matriz $n \times n$ em que $\Omega_b^a(v, w)$ é o elemento de sua a -ésima linha e b -ésima coluna, ou seja, $\Omega_b^a(v, w) = [\Omega(v, w)]_{ab}$. O símbolo Ω pode também designar uma matriz de 2-formas $n \times n$.

Tomemos uma mudança de base $\{e_a\} \mapsto \{\tilde{e}_a\}$ definida por $\tilde{e}_a = C_a^b e_b$, onde cada C_a^b é uma função do ponto $p \in M$ e o elemento de uma matriz $n \times n$, ou seja, $C_a^b = C_a^b(p) = [C(p)]_{ba}$.

Então, as formas-conexão se transformam de acordo com a Eq. 1.88.

$$\tilde{\omega}_b^a = (C^{-1})_c^a \omega_d^c C_b^d + (C^{-1})_c^a d(C_b^c). \quad (1.88)$$

É importante ficarmos atentos para não nos perdermos com a notação. No primeiro termo do lado direito da Eq. 1.88, temos uma combinação linear entre as 1-formas ω_d^c , cujos coeficientes são o produto entre os dois números reais $(C^{-1}(p))_c^a$ e $C_b^d(p)$, onde omitimos a aplicação no ponto p . No lado esquerdo, temos uma combinação linear entre as 1-formas $d(C_b^c)$, dadas pela diferencial das funções $C_b^c = C_b^c(p)$, cujos coeficientes são os reais $(C^{-1}(p))_c^a$. Prosseguindo, as formas-torção e formas-curvatura se transformam de acordo com as Eqs. 1.89 e 1.90.

$$\tilde{T}^a = (C^{-1})_b^a T^b, \quad (1.89)$$

$$\tilde{\Omega}_b^a = (C^{-1})_c^a \Omega_d^c C_b^d. \quad (1.90)$$

Novamente, todas elementos nas Eqs. 1.89 e 1.90, inclusive as 2-formas, são funções aplicadas num ponto $p \in M$.

Podemos simplificar as fórmulas de transformação para as três formas diferenciais acima usando o cálculo matricial, uma vez que ω , T e Ω são matrizes. Para isso, precisamos estender o conceito de derivada exterior para p -formas multivaloradas. Logo, seja $A : \underbrace{T_p M \times \dots \times T_p M}_{p \text{ termos}} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ uma p -forma multivalorada como uma matriz real $n \times n$, isto é, $[A]_{ab} = A_b^a$, onde cada A_b^a é uma p -forma. Então, definimos a derivada exterior de A , dA , como

$$dA : \underbrace{T_p M \times \dots \times T_p M}_{(p+1) \text{ termos}} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n} : [dA]_{ab} = d(A_b^a), \quad (1.91)$$

isto é, dA , continua sendo uma matriz $n \times n$, mas cujos elementos são as $(p+1)$ -formas dA_b^a . Por conseguinte, podemos reescrever a Eq. 1.88 como

$$\tilde{\omega} = C^{-1} \omega C + C^{-1} dC. \quad (1.92)$$

É mister que esteja claro que na Eq. 1.88 temos produtos matriciais que resultam na matriz $\tilde{\omega}$ de 1-formas. Reescrevendo as Eqs. 1.89 e 1.90, obtemos

$$\tilde{T} = C^{-1} T, \quad (1.93)$$

$$\tilde{\Omega} = C^{-1} \Omega C. \quad (1.94)$$

Pela definição de ω_b^a – em termos das conexões afins Γ_{bc}^a – de T^a – em função do tensor torção T_{bc}^a – e de Ω_b^a , a partir do tensor de curvatura R_{bcd}^a , é natural que existam relações entre essas três formas diferenciais. De fato, elas existem, e são denominadas *equações de estrutura de Cartan*, dadas pelas Eqs.

$$de^a + \omega_b^a \wedge e^b = T^a, \quad (1.95)$$

$$d\omega_b^a + \omega_c^a \wedge \omega_b^c = \Omega_b^a. \quad (1.96)$$

Como ω , T e Ω são matrizes, podemos reescrever as equações de estrutura de Cartan a partir de operações entre as mesmas e não suas componentes. Para tanto, precisamos definir uma matriz coluna de 1-formas cujos elementos são os covetores e^b , ou seja, definimos e tal que $[e]_{b1} = e^b$. Também é preciso estabelecer como realizar o produto exterior entre matrizes de formas diferenciais. Pelas Eqs 1.95 e 1.96, é fácil chegar a uma definição. Logo, seja A uma matriz $n \times k$ de p -formas e B uma matriz $k \times m$ de q -formas. Então, definimos $C = A \wedge B$ como a matriz $n \times m$ de $(p+q)$ -formas tal que $C_b^a = [C]_{ab} := A_c^a \wedge B_b^c$. Finalmente, escrevemos novamente as equações de estrutura de Cartan:

$$de + \omega \wedge e = T, \quad (1.97)$$

$$d\omega + \omega \wedge \omega = \Omega. \quad (1.98)$$

Logo, de é um vetor de n 2-formas assim como $\omega \wedge e$; enquanto $d\omega$ é uma matriz $n \times n$ de 2-formas, tal qual $\omega \wedge \omega$.

Finalizamos a seção e o capítulo com a expressão final das equações de estrutura na forma das Eqs. 1.97 e 1.98. Elas ilustram o poder de síntese propiciado pelo formalismo das formas diferenciais. Com efeito, vimos que a relação entre as componentes R_{bcd}^a do tensor de curvatura e as conexões afins Γ_{bc}^a é dada pela equação um tanto quanto complexa expressa na Eq. 1.81. Por outro lado, essa mesma relação está codificada na muito mais simples Eq. 1.98. Eis um novo exemplo da elegância e compacidade das quais temos falado.

2 Grupos e fibrados

Neste capítulo trataremos de grupos e fibrados. Na *Introdução* mencionamos como os grupos têm um papel basilar para a física que trata das interações fundamentais na natureza. É realmente surpreendente que uma teoria abstrata da matemática pura possa se manifestar tão explicitamente em situações concretas, relativas ao comportamento das partículas subatômicas. A gravidade ainda é uma exceção porém, pois para ela, o problema de qual o grupo de simetria a ser utilizado ainda não foi resolvido satisfatoriamente, embora haja várias alternativas, algumas das quais já citamos na seção 0.3. Apresentaremos, desse modo, os conceitos fundamentais relacionados a grupos, com destaque para os grupos de Lie. Por fim, também tratamos aqui dos fibrados, cujo poderoso formalismo une variedades e grupos num todo coerente, base das teorias modernas que modelam quase toda a realidade que conhecemos.

2.1 Grupos e suas representações

Definição e exemplos de grupos

Já introduzimos na seção 0.3 alguns dos axiomas que definem um grupo para explicar como os associamos a simetrias. Novamente os apresentamos aqui, a passos mais estreitos. Assim, um grupo G é um conjunto dotado de uma operação produto, simbolizada de forma padrão por ‘ \cdot ’, ou *multiplicação do grupo*, a qual é binária e associa a cada $a, b \in G$, um elemento $a \cdot b \in G$. Temos ainda os seguintes axiomas:

- i) a operação produto é associativa, ou seja, $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$, com $\forall a, b, c \in G$;
- ii) existe um *único* elemento e em G , denominado *identidade*, que satisfaz $a \cdot e = a$, $\forall a \in G$;
- iii) para cada $a \in G$, existe um elemento, simbolizado por a^{-1} e dito *inverso* de a , tal que $a \cdot a^{-1} = e$.

Como já dissemos, é possível mostrar a partir dos axiomas acima que também valem as propriedades: (a) $e \cdot a = a$ e (b) $a^{-1} \cdot a = e$ (ver seção 2.1 de (TUNG, 1985)). Citando alguns exemplos simples, podemos definir o grupo trivial $G_1 = \{e\}$, no qual a é o elemento inverso de si mesmo¹. Temos o grupo $G_2 = \{e, a\}$ tal que $e \cdot a = a \cdot e = a$, $e \cdot e = e$ e $a \cdot a = e$; essas são as únicas possibilidades de produto entre os elementos de G . Ainda, podemos ter $G_3 = \{e, a, b\}$, cujas operações produto são definidas na Tabela 1, em que

¹ Obviamente, de forma axiomática, em qualquer grupo a identidade será o inverso de si mesma.

Tabela 1 – Tabela de multiplicação do grupo
 $G_3 = \{e, a, b\}$.

<i>e</i>	<i>a</i>	<i>b</i>
<i>a</i>	<i>b</i>	<i>e</i>
<i>b</i>	<i>e</i>	<i>a</i>

Tabela 2 – Tabela de multiplicação do grupo
diedral $D_2 = \{e, v, h, r\}$.

<i>e</i>	<i>v</i>	<i>h</i>	<i>r</i>
<i>v</i>	<i>e</i>	<i>r</i>	<i>h</i>
<i>h</i>	<i>r</i>	<i>e</i>	<i>v</i>
<i>r</i>	<i>h</i>	<i>v</i>	<i>e</i>

cada posição consiste no resultado da multiplicação do elemento da linha pelo da coluna, nesta ordem. Na Tabela 1, notamos que $a^{-1} = b$, o que implica que $b^{-1} = a$; também vemos que $g_1 \cdot g_2 = g_2 \cdot g_1$, com $g_1, g_2 \in G_3$, ou seja, o produto nesse grupo é comutativo. Diz-se que um grupo é abeliano se ele obedecer a propriedade da comutatividade, o que de modo geral não ocorre. Ainda, um grupo G pode ser discreto e finito, ou discreto e infinito, se G for enumerável, ou contínuo, se o conjunto G estiver relacionado a \mathbb{R} por alguma função contínua (que pode ter como domínio e contradomínio, eventualmente, conjuntos multidimensionais). O nosso maior interesse, neste trabalho, reside nessa última categoria de grupos. Todavia, ainda citamos dois exemplos dentre os discretos e finitos: o grupo diedral D_2 e o grupo de permutações S_n .

O grupo diedral D_2 é discreto e possui apenas quatro elementos: $D_2 = \{e, v, h, r\}$, a Tabela 2 mostra como o produto é definido nesse grupo, o qual também é abeliano. Omitimos os nomes associados às linhas e colunas por serem redundantes, já que a identidade está na primeira linha e coluna.

Podemos associar os elementos de D_2 a operações de simetria feita sobre um retângulo, isto é, movimentações do mesmo que o deixam exatamente com o mesmo aspecto, como se nada tivesse ocorrido. A Figura 8 ilustra a interpretação, em que v corresponde a uma reflexão do triângulo em torno do eixo vertical AA' , h a uma reflexão em torno do eixo horizontal BB' e r está associado a uma rotação em torno do centro do polígono por um ângulo de 180° ; obviamente, e corresponde à manutenção da figura como está. A multiplicação de grupo nesse exemplo consiste em aplicar sucessivamente duas dessas operações, o que sempre corresponde à realização de uma operação única, como é fácil perceber. A propriedade de simetria é intrínseca ao retângulo e podemos modelá-la matematicamente por D_2 , porque a transformação associada a cada um de seus elementos deixa o polígono inalterado, ou seja, como um retângulo com lado maior na horizontal. Portanto, dizemos que D_2 é o grupo de simetria do retângulo.

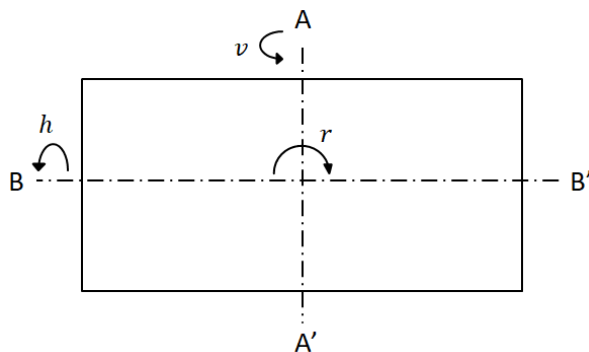


Figura 8 – Visualização da simetria associada ao grupo diedral D_2 .

O último exemplo de grupo discreto do qual trataremos é o de permutações de n elementos, S_n . Dado um conjunto discreto de n elementos, como o dos números naturais $1, 2, \dots, n$, um elemento $\sigma_1 \in S_n$ corresponde a uma operação sobre os mesmos, fixada uma ordem inicial para eles. Por exemplo, $\sigma_1(1, 2, \dots, n) = (2, n, \dots, 1)$. A realização de duas permutações sucessivas constitui um produto natural nesse caso, pois que elas equivaleriam a uma única. Além disso, para n suficientemente grande, S_n não será abeliano. De fato, o grupo abeliano discreto com maior número de elementos possui apenas cinco deles. O grupo S_n é bastante importante entre os discretos finitos, tendo já aparecido neste trabalho de certo modo, quando tratamos da antissimetria das p -formas. Para concluir nossos comentários sobre esse grupo, mencionamos o teorema de Cayley, que mostra que todo grupo discreto e finito G com n elementos é isomorfo a algum subgrupo² de S_n .

Passemos aos grupos contínuos. Seja $r \in E^n$ um vetor em coordenadas locais e $t(r)$ uma translação, ou seja, a transformação que aplicada a $p \in E^n$ retorna $p + r$. O conjunto de todas as translações $t(r)$ forma um grupo contínuo – pois o parâmetro r varia continuamente – o qual denominamos grupo de translações $T(n)$, cujo produto é definido naturalmente como $t(r_1) \cdot t(r_2) = t(r_1 + r_2)$ e o elemento inverso é tal que $t^{-1}(r) = t(-r)$. Um outro exemplo semelhante é o das rotações no plano. Nesse caso, se $R(\phi)$ representa a aplicação que transforma um vetor $r \in E^2$ em um outro $r' \in E^2$ – em coordenadas locais – de mesmo módulo mas rotacionado por um ângulo ϕ em torno da origem, então o conjunto de todas as rotações constitui um grupo com definição de produto e elemento inverso perfeitamente análogos à das translações: (i) $R(\phi_1) \cdot R(\phi_2) = R(\phi_1 + \phi_2)$, e (ii) $R^{-1}(\phi) = R(-\phi)$.

O conjunto das rotações no espaço tridimensional também constitui um grupo contínuo por uma razão óbvia: duas rotações consecutivas equivalem a uma única. Entretanto, a caracterização matemática desse tipo de transformação nesse caso não é tão simples, podendo ser feita por três ângulos (ângulos de Euler), um vetor (eixo de rotação) e um ângulo, quatérnios, etc. No capítulo 2 de (GUIMARÃES, 2018) há uma apresentação de-

² Um subgrupo H de um grupo G consiste num subconjunto de G cujos elementos satisfazem a regra de multiplicação do grupo completo entre si, isto é, $H \subset G$ e $h_1 \cdot h_2 \in H, \forall h_1, h_2 \in H$.

talhada sobre rotações no plano e no espaço tridimensional. Veremos na próxima seção, sobre representação de grupos, que podemos associar a cada rotação em E^2 e E^3 uma matriz quadrada A de ordens 2 e 3, respectivamente, que satisfazem a propriedade de ortogonalidade, $AA^T = I$, onde I é a matriz identidade, bem como $\det(A) = 1$. Logo, os grupos de rotações em E^2 e E^3 são denominados $SO(2)$ e $SO(3)$, tendo em vista os termos em inglês *special* ($\det(A) = 1$) e *orthogonal* ($A^T A = I$). Esses grupos são muito importantes para a física e engenharia. Com efeito, o grupo $SO(3)$ aparece de forma nítida quando definimos os operadores que determinam as propriedades do elétron no átomo, o que é uma consequência direta da simetria de rotação inerente a esse sistema, tendo em vista a isotropia do espaço. Esse mesmo grupo é importante em engenharia para, por exemplo, tratar dos problemas de controle e medição da orientação no espaço³ de aeronaves, satélites e membros robóticos.

Outros grupos importantes para a física são o $U(1)$, o $SU(2)$ e o $SU(3)$, os quais já mencionamos na *Introdução*. Eles pertencem às classes mais amplas dos grupos $U(n)$ e $SU(n)$. O primeiro está associado ao conjunto das matrizes complexas unitárias $n \times n$, ou seja, matrizes $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$ que satisfazem $UU^\dagger = I$. O grupo $SU(n)$, do inglês *special unitary*, por sua vez, está associado às matrizes unitárias cujo determinante é igual a 1. O grupo $SO(n)$ é subgrupo de $SU(n)$, o qual é subgrupo de $U(n)$. Contudo, todos esses grupos correspondem a transformações lineares específicas, sendo, portanto, subgrupos do grupo mais geral formado pelo conjunto de todas as transformações lineares entre espaços vetoriais de dimensão n , designado por $GL(n)$, o qual associamos ao conjunto de todas as matrizes invertíveis $n \times n$. Como já dissemos na *Introdução*, a relevância desses grupos para a física advém do fato de que eles modelam simetrias ditas internas, isto é, intrínsecas, a determinadas interações entre partículas. Assim, $U(1)$ modela a simetria interna do eletromagnetismo, $SU(2)$ a simetria associada à interação da força fraca e $SU(3)$ a interação da força forte. Logo, todo o modelo-padrão da física de partículas é constituído pelo grupo $U(1) \times SU(2) \times SU(3)$ ⁴.

Representação de grupos

Mencionamos no tópico anterior o grupo $GL(n)$ e seus subgrupos estão associados a determinados tipos de matrizes. Essa associação é definida formalmente como *representação do grupo*. De fato, os grupos são definidos de maneira abstrata, sendo necessário apenas a satisfação dos axiomas apresentados no tópico anterior. Além disso, normalmente pensamos no elemento de um grupo como uma transformação aplicada a entidades de algum conjunto. Portanto, precisamos de uma forma mais concreta de lidar com o con-

³ A orientação no espaço de um desses objetos é denominada atitude.

⁴ É possível formar um grupo a partir de outros, o que representamos aqui pelo símbolo de produto cartesiano ‘ \times ’. No caso mencionado, temos um *produto direto* entre os grupos, porém, deixamos os detalhes para obras especializadas em teoria de grupos.

ceito abstrato de grupo para poder definir matematicamente essas transformações, daí a necessidade das representações de um grupo. Desse modo, temos:

DEFINIÇÃO. Dados um grupo G e um espaço vetorial V , definimos uma representação de um grupo G como o *homomorfismo* $U : G \rightarrow \mathcal{T}(V)$, onde $\mathcal{T}(V)$ corresponde ao grupo de operadores (transformações lineares) do espaço vetorial V . A dimensão de V determina a dimensão da representação; dizemos que ela é *fiel* se $\dim G = \dim \mathcal{T}(V)$, ou seja, se o homomorfismo for um isomorfismo (ver seção 3.1 de (TUNG, 1985)).

Não se deve confundir *homomorfismo* com *homeomorfismo*. Na teoria de grupos, um homomorfismo entre dois grupos G e H consiste numa relação $h : G \rightarrow H$ de um-para-um, ou um-para-vários, existente entre seus elementos e que preserva a operação produto, ou seja, se $h(g_1) \cdot h(g_2) = h(g_1 \cdot g_2)$. Portanto, a cada elemento $g \in G$ teremos um – ou mais – elemento $U(g)$ que constitui uma representação sua e que preserva a operação produto de G .

A representação de um grupo é o que nos permite fazer cálculos envolvendo elementos de um grupo. Considerando os grupos contínuos vistos no tópico anterior, se escolhermos $V = \mathbb{R}^n$, podemos representar o grupo das translações por meio de vetores do próprio \mathbb{R}^n , ou seja, $U(t(r)) = r$, donde o produto se traduz por $r_1 = U(t(r_1) \cdot t(r_2)) = U(t(r_1 + r_2)) = r_1 + r_2$, de modo que a operação de soma ‘+’ em \mathbb{R}^n corresponde à operação produto nessa representação do grupo. Para o grupo $\text{SO}(2)$, se escolhermos $V = \mathbb{R}^2$, então podemos representar os elementos desse grupo por matrizes reais 2×2 com o formato dado na Eq. 2.1,

$$\mathbf{R}(\phi) = \begin{pmatrix} \cos \phi & \text{sen } \phi \\ -\text{sen } \phi & \cos \phi \end{pmatrix}, \quad (2.1)$$

onde $\mathbf{R}(\phi)$ para designa a referida matriz, que representa a rotação $R(\phi)$, isto é, $U(R(\phi)) = \mathbf{R}(\phi)$. Nessa representação, a operação de multiplicação entre matrizes permite a realização do produto entre elementos do grupo. Ainda, se escolhermos $V = \mathbb{C}$, então temos um número infinito de representações da forma $U^m(R(\phi)) = e^{im\phi}$, com m inteiro. Nesse caso, o produto entre números complexos permite a realização da multiplicação do grupo. É interessante notar que no último exemplo, temos uma representação fiel apenas se $m = \pm 1$, além disso, essa também é uma representação do grupo $U(1)$, de modo que existe um isomorfismo entre ambos: $U(1) \cong \text{SO}(2)$.

Como os exemplos dados no tópico anterior já sugeriam, temos representações matriciais para o grupo $\text{GL}(n)$ e seus subgrupos $U(n)$, $\text{SU}(n)$ e $\text{SO}(n)$. Muitas vezes, tais representações matriciais se confundem com o próprio grupo, sendo usadas para defini-los. Essa é uma questão sutil, talvez meramente um problema de terminologia, entretanto, nos parece que o grupo em si é uma entidade distinta de sua representação; sua definição é dada apenas em termos dos axiomas da seção 2.1 e da operação produto, a qual nada mais é que uma aplicação do tipo $G \times G \rightarrow G$, não havendo necessidade conceitual de

outros detalhes, como definição de algoritmos de multiplicação matricial, etc.

2.2 Grupos de Lie

Em termos gerais, os *grupos de Lie* – assim chamados em homenagem ao matemático norueguês Marius Sophus Lie (1842 - 1899) – são os grupos contínuos que também são variedades diferenciáveis. Em particular, todos os grupos contínuos que apresentamos na seção anterior são grupos de Lie e, conseqüentemente, variedades diferenciáveis. Contudo, nos referidos exemplos, e mesmo alguns discretos, como D_2 e S_n , os elementos desses conjuntos foram sempre interpretados como transformações realizadas sobre elementos de outro conjunto. Não por acaso, na teoria de representações, cada elemento do grupo é representado por uma transformação linear aplicada a um vetor de um espaço vetorial. Logo, pode parecer estranho que um conjunto de ‘transformações’ possa ser visto como um ‘objeto’, tal qual uma variedade diferenciável.

Para entendermos como é possível interpretar um grupo contínuo como uma variedade diferenciável, precisamos dar um significado geométrico à transformação associada a cada um de seus elementos. Começemos com $SO(2)$. Vimos que um elemento desse grupo consiste numa rotação no plano por um ângulo ϕ . Podemos traduzir geometricamente essa definição associando-a a um vetor unitário do plano cartesiano inclinado em relação ao eixo Ox por um ângulo ϕ . Assim, quando tomamos o grupo como um todo, o conjunto de vetores forma uma circunferência unitária, a qual é a variedade diferenciável S^1 . Contudo, S^1 não é a única possibilidade, pois uma rotação por um ângulo ϕ equivale a uma outra por um ângulo $(\phi + \pi)$, isso quer dizer que pontos diametralmente opostos correspondem ao mesmo ponto de $SO(2)$, como se eles fossem um só; S^1 tem informações excessivas. Nesse caso, $SO(2)$ poderia corresponder a outra variedade, a chamada *linha projetiva real* RP^1 (rever a definição de plano projetivo real de ordem 2 na seção 1.1). Por correspondência, nos referimos a um difeomorfismo entre o grupo e a variedade, donde vemos que interpretação de um grupo de Lie como semelhantes entidades não é única, depende, pois, da escolha de um ou mais difeomorfismos (talvez locais) que associam os elementos do grupo aos da variedade. A Figura 9 ilustra a interpretação de $SO(2)$ como variedade diferenciável.

A interpretação de $SO(3)$ como uma variedade é similar à de $SO(2)$. Podemos definir qualquer rotação em E^3 por meio de um vetor unitário \mathbf{v} do espaço cartesiano, paralelo ao eixo de rotação e cujo sentido indica o da rotação (via regra da mão direita, por exemplo), e pelo ângulo de rotação ϕ . Se definirmos o ângulo como a norma do vetor, podemos associar cada rotação no espaço a um vetor $\phi \cdot \mathbf{v}$ do mesmo. Se limitarmos o ângulo de rotação ao intervalo $(0, 2\pi]$, quando consideramos o grupo como um todo, o vetor ‘varre’ um conjunto de esferas no espaço tridimensional com raio máximo igual a

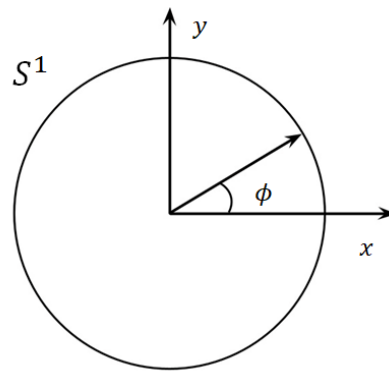


Figura 9 – Ilustração de $SO(2)$ como uma variedade diferenciável ligada a S^1 .

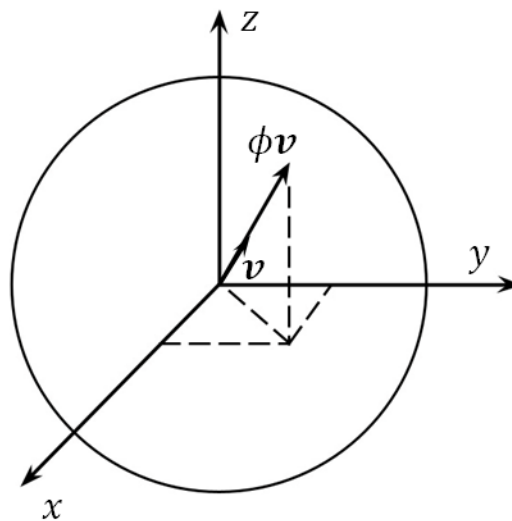


Figura 10 – Ilustração de $SO(3)$ como uma variedade diferenciável ligada a S^3 .

2π . Logo, podemos conceber $SO(3)$ enquanto variedade como sendo difeomorfo à esfera S^3 , a qual pode ser mergulhada em E^4 como uma hipersfera de três dimensões e raio unitário⁵. Porém, uma rotação associada a (\mathbf{v}, ϕ) equivale a outra feita por um vetor diametralmente oposto e ângulo negativo, de modo que podemos imaginar a variedade $SO(3)$ como a hipersfera S^3 , mas com seus pontos antípodas identificados como um só. O resultado é outra variedade diferenciável, o plano projetivo real de ordem 3, RP^3 , o qual é um espaço quociente de S^3 pela relação de equivalência $(\mathbf{v}, \phi) \sim (-\mathbf{v}, -\phi)$. A Figura 10 ilustra a interpretação de $SO(3)$ como variedade diferenciável.

Como último exemplo, o grupo $SU(2)$ é isomorfo à esfera S^3 , eis sua interpretação como variedade. Assim, um reflexo de que RP^3 é um espaço quociente de S^3 é o fato de que $SU(2)$ é um grupo de cobertura para $SO(3)$ ⁶.

⁵ Um sistema de coordenadas adequado para tal hipersfera seria dado pelo conjunto dos quatérnios unitários. Isso justifica o porquê de eles poderem ser utilizados para caracterizar rotações no espaço.

⁶ Em linhas gerais, isso quer dizer que qualquer rotação de $SO(3)$ pode ser representada por um elemento de $SU(2)$, o inverso não sendo verdade porém.

Dissemos que os axiomas dados na seção anterior bastam para definir um grupo. Todavia, os exemplos dos parágrafos anteriores mostram que em se tratando dos grupos de Lie, para a caracterização completa dos mesmos em termos de suas propriedades, esses axiomas não bastam, sendo necessário levar em conta as suas propriedades topológicas enquanto variedades diferenciáveis.

Ação de um grupo de Lie e órbitas

Vimos que cada elemento dos grupos de Lie de maior interesse para a física pode ser visto como uma transformação realizadas sobre um conjunto, a qual se denomina *ação do grupo*. Em se tratando das representações, essa característica é imanente à própria definição. Contudo, convém formalizar essa ideia para o grupo em si, sem nos remetermos às suas possíveis representações. Assim, seguindo principalmente (IBORT; RODRÍGUEZ, 2019), temos:

DEFINIÇÃO. Definimos a *ação de um grupo* G sobre um conjunto X como a aplicação $\Psi : G \times X \rightarrow X$, tal que cada $\Psi_g : X \rightarrow X$ – onde $\Psi_g(x) := \Psi(g, x)$, com $(g, x) \in G \times X$ – é bijetiva e preserva a operação de multiplicação do grupo por meio da composição de funções. Assim, temos as propriedades listadas a seguir:

- i) $\Psi_e(x) = \text{id}_X$, onde e é a identidade do grupo e id_X é a função identidade do conjunto:
 $\text{id}_X(x) = x$, $x \in X$;
- ii) $\Psi_{g \cdot g'} = \Psi_g \circ \Psi_{g'}$, com $g, g' \in G$.

De forma simplificada, representamos a ação do grupo como $gx := \Psi(g, x)$, de modo que as propriedades acima podem ser reescritas como: (i) $ex = x$ e (ii) $(g \cdot g')x = g(g'x)$. O conjunto $\Psi_g(X)$ indica o modo como um elemento do grupo atua no conjunto como um todo. Assim, se $G = \text{SO}(2)$, $g = R(\phi)$, e $X = E^2$, o conjunto $\Psi_g(X)$ corresponde a uma rotação de todo o plano E^2 por um ângulo ϕ .

O conjunto X escolhido pode ser o próprio grupo, de modo que a uma definição natural para a ação seria a própria multiplicação do grupo, isto é, se $X = G$, então podemos definir $\Psi(g, g') = \Psi_g(g') = g \cdot g' = gg'$. Nesse caso, Ψ_g é dita ação do grupo pela esquerda, muitas vezes simbolizada por $L_g := \Psi_g$, $g \in G = X$.

Outro conceito importante relacionado à ação do grupo é o de órbita. Logo:

DEFINIÇÃO. Dado $x \in X$, uma órbita G_x de um grupo é o conjunto $G_x = \{y \in X; y = gx, g \in G\}$.

Portanto, uma órbita G_x é um subconjunto de X formado pelos seus pontos que resultam da ação de todo o grupo G sobre x . A Figura 11 mostra alguns exemplos de órbitas de grupos. À esquerda, temos as órbitas para $G = \text{SO}(2)$ e $X = E^2$, as quais são circunferên-

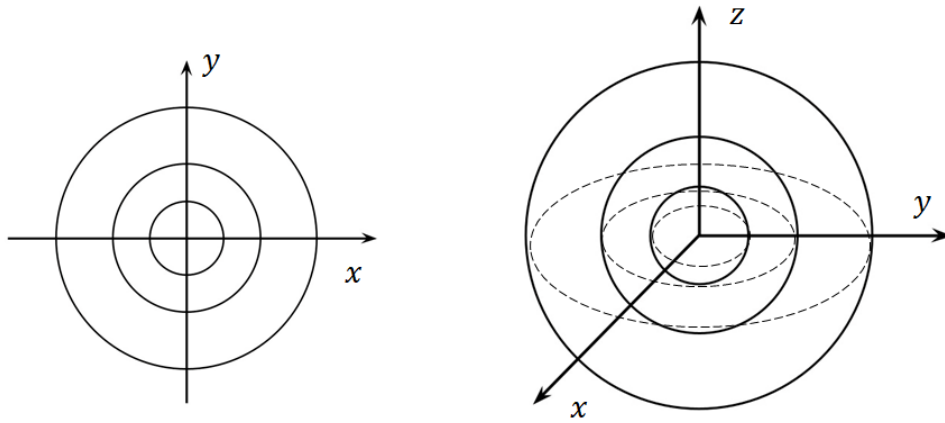


Figura 11 – Exemplos de órbitas de $SO(2)$ (esquerda) e $SO(3)$ (direita).

cias com centro na origem do sistema de coordenadas locais. À direita, temos as órbitas para $SO(3)$ e $X = E^3$, que nada mais são que esferas concêntricas.

Naturalmente, a união das órbitas de um conjunto X é o próprio X . Além disso, duas órbitas distintas não se comunicam entre si, ou seja, $G_x \cap G_y = \emptyset$ se $x \neq y$. Em outras palavras, se $x' \in G_x$ e $y' \in G_y$, então não existe $g \in G$ tal que $y' = gx'$.

Como último exemplo, citamos o caso $G = GL(n)$ e $X = \mathbb{R}^n$. Dados quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^n$ diferentes de 0, existe $A \in GL(n)$ tal que $y = Ax$. Portanto, existem apenas duas órbitas do grupo, uma delas é o único ponto $0 \in \mathbb{R}^n$, a outra é o restante do espaço, isto é, $G_0 = 0$ e $G_x = \mathbb{R}^n - \{0\}$, com $x \neq 0$.

2.3 Álgebra de Lie de um grupo de Lie

Álgebra de Lie

Em linhas gerais, uma álgebra de Lie \mathcal{G} é um espaço vetorial dotado de uma operação binária '+' e outra $[\bullet, \bullet] : \mathcal{G} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$, denominada comutador ou parênteses de Lie, a qual satisfaz as propriedades a seguir (ver seção 1.7 de (HOLM, 2011)):

- i) anticomutatividade: $[X, Y] = -[Y, X]$;
- ii) bilinearidade: $[X + \lambda Z, Y] = [X, Y] + \lambda[Z, Y]$;
- iii) identidade de Jacobi: $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$.

Se a álgebra \mathcal{G} for um espaço vetorial n -dimensional, ela possui uma base $\{\lambda_a\}$ com n -elementos. Assim, outra característica de uma álgebra de Lie é dada pela Eq. 2.2.

$$[\lambda_a, \lambda_b] = f_{ab}^c \lambda_c, \quad (2.2)$$

onde as f_{ab}^c são constantes, denominadas *constantes de estrutura* da álgebra de Lie. Devido às propriedades (ii) e (iii) acima, as constantes de estrutura devem satisfazer as restrições dadas pelas Eqs. 2.3 e 2.4, respectivamente.

$$f_{ab}^c = -f_{ba}^c, \quad (2.3)$$

$$f_{ab}^c f_{ec}^d + f_{ea}^c f_{bc}^d + f_{be}^c f_{ac}^d = 0. \quad (2.4)$$

Álgebra de Lie de um grupo de Lie

A definição de álgebra de Lie é independente da de grupo, como vimos no tópico anterior. Entretanto, para um grupo de Lie G , enquanto variedade diferenciável, é possível mostrar que os elementos de qualquer espaço tangente $T_g G$, com $g \in G$, satisfazem a uma álgebra de Lie, bastando para isso definir um parênteses de Lie de forma apropriada. De fato, formalmente uma álgebra de Lie \mathcal{G} de um grupo G é definida como o conjunto de todos os campos vetoriais invariantes pela esquerda de G , podendo-se demonstrar que tal conjunto é isomorfo a $T_g G$, com $g \in G$ fixo. Em particular, tendo em vista o isomorfismo natural entre espaços tangentes de G induzido pela ação do grupo, normalmente adota-se a identidade e como elemento particular, donde temos o isomorfismo $T_e G \cong \mathcal{G}$. Deixaremos os detalhes para obras especializadas como (EPSTEIN, 2010), (FECKO, 2006), etc., pois o que gostaríamos de enfatizar é que a relação $T_e G \cong \mathcal{G}$ implica que podemos usar a álgebra de Lie para investigar as propriedades do grupo por meio de variações infinitesimais do mesmo próximas à identidade e .

Passemos a alguns exemplos para ilustrar como se dá o isomorfismo $T_e G \cong \mathcal{G}$. Seja $G = \text{SO}(2)$. Do mesmo modo que adotamos representações para G , podemos fazê-lo para \mathcal{G} , assim, vamos supor que tenhamos representações matriciais para ambos. Vimos que a matriz $\mathbf{R}(\phi)$, definida na Eq. 2.1, constitui uma representação matricial para um elemento de $\text{SO}(2)$, sendo a identidade definida por $\phi = 0$, que é representada por $\mathbf{R}(0) = I$. Logo, considerando uma variação infinitesimal $\delta\phi$ de ϕ temos que

$$\mathbf{R}(\delta\phi) = \begin{pmatrix} 1 & \delta\phi \\ -\delta\phi & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.5)$$

onde usamos as aproximações de primeira ordem para as funções trigonométricas: $\cos \delta\phi \approx 1$ e $\sin \delta\phi \approx \delta\phi$. A partir da Eq. 2.5 podemos escrever $\mathbf{R}(\delta\phi) = I + i\delta\phi J$:

$$\mathbf{R}(\delta\phi) = I + i\delta\phi J = \mathbf{R}(0) + i\delta\phi \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.6)$$

onde J é dada pela Eq. 2.7 e corresponde a uma das matrizes de Pauli, designada por σ_2 :

$$J = \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.7)$$

A Eq. 2.6 nos lembra a aproximação de primeira ordem de uma função por sua série de Taylor em torno de $x = 0$, isto é, $f(\delta x) = f(0) + \delta x f'(0)$, em que σ_2 cumpre o papel análogo ao de $f'(0)$. Ora, J constitui uma representação matricial da base da álgebra de Lie de $\text{SO}(2)$ e a analogia com $f'(0)$ é conveniente pois reflete o isomorfismo $T_e G \cong \mathcal{G}$. Prosseguindo, considerando a expansão completa em séries de potência, podemos escrever

$$\mathbf{R}(\phi) = e^{i\phi J}. \quad (2.8)$$

Portanto, a partir de J é possível obter qualquer elemento do grupo $\text{SO}(2)$, por isso os elementos da base da álgebra de Lie do grupo de Lie são denominados geradores do grupo. Ainda, a álgebra de Lie de $\text{SO}(2)$ é unidimensional, de modo que a relação de comutação, definida em termos do produto de matrizes, é tal que $[J, J] = J \cdot J - J \cdot J = 0 \cdot J = 0$. Logo, a única constante de estrutura da álgebra é zero, e $[J, J] = 0$ reflete o fato de que $\text{SO}(2)$ é abeliano.

Tomemos agora o exemplo mais interessante do grupo $\text{SO}(3)$. Vamos utilizar uma representação matricial do grupo parametrizada pelos três ângulos de Euler, que correspondem a rotações em torno dos eixos x , y e z , respectivamente. Logo, temos as matrizes $R_1(\psi)$, $R_2(\psi)$ e $R_3(\psi)$, dadas por

$$R_1(\phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \psi & -\text{sen } \psi \\ 0 & \text{sen } \psi & \cos \psi \end{bmatrix}, \quad R_2(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \psi & 0 & \text{sen } \psi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen } \psi & 0 & \cos \psi \end{bmatrix}, \quad R_3(\psi) = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\text{sen } \psi & 0 \\ \text{sen } \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.9)$$

Assim como fizemos para a matriz $\mathbf{R}(\phi)$, vamos considerar variações infinitesimais de cada uma das matrizes das Eqs. 2.9 em torno da identidade, o que equivale a considerar uma rotação infinitesimal em torno de um eixo cartesiano de cada vez apenas. Destarte, visando sempre obter a forma $(I + i\delta\psi J_a)$, encontramos as matrizes J_1 , J_2 e J_3 , correspondentes a variações infinitesimais das matrizes R_1 , R_2 e R_3 , respectivamente, expressas nas Eqs. 2.10.

$$J_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \\ 0 & -i & 0 \end{bmatrix}, \quad J_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad J_3 = \begin{bmatrix} 0 & i & 0 \\ -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.10)$$

As matrizes J_a constituem uma base para a álgebra de Lie de $\text{SO}(3)$, satisfazendo a relação de comutação

$$J_a J_b - J_b J_a = [J_a, J_b] = i\epsilon_{ab}^c J_c, \quad (2.11)$$

onde ϵ_{ab}^c designa o símbolo de Levi-Civita, já apresentado (rever a seção 1.2). Consequentemente, as constantes de estrutura da álgebra de Lie de $\text{SO}(3)$ são $f_{ab}^c = i\epsilon_{ab}^c$ ⁷. Para ver como as matrizes J_a desempenham o papel de geradores para o grupo, tomamos um vetor

⁷ Alguns autores colocam a unidade imaginária i acompanhando as constantes de estrutura na definição da Eq. 2.2, de modo que, no caso da Eq. 2.11, as constantes de estrutura seriam os próprios símbolos ϵ_{ab}^c

unitário $\mathbf{n} = (n^1, n^2, n^3)$ com componentes expressas na base coordenada (x, y, z) , o qual é paralelo ao eixo de rotação adotado. Dessa maneira, definimos a matriz $J_n = J_a n^a$ e afirmamos, seguindo a seção 7.2 de (TUNG, 1985), que qualquer rotação de $\text{SO}(3)$ pode ser representada pela matriz $R_n(\psi)$, dada por

$$R_n(\psi) = e^{i\psi J_n}, \quad (2.12)$$

em que ψ é o ângulo de rotação em torno de \mathbf{n} . Na mecânica quântica, os geradores de rotações $\{J_a\}$ estão intimamente ligados aos operadores de momento angular, correspondendo a quantidades mensuráveis. Por isso dissemos no início do capítulo que a teoria de grupos aparece explicitamente quando tratamos de partículas subatômicas.

Para finalizar a seção, apresentamos as demais matrizes de Pauli, que constituem a base $\{\sigma_a\}$ da álgebra de Lie de $\text{SU}(3)$:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.13)$$

as quais satisfazem a relação de comutação $[\sigma_a, \sigma_b] = 2i\epsilon_{ab}^c \sigma_c$. Portanto, as constantes de estrutura dessa álgebra são tais que $f_{ab}^c = 2i\epsilon_{ab}^c$, e a similaridade com as constantes da álgebra de $\text{SO}(3)$ advém do homomorfismo que existe entre os dois grupos (ver seção 8.1 de (TUNG, 1985)). Por fim, os geradores da álgebra de Lie de $\text{SU}(3)$ são as oito matrizes de Gell-Mann, importantes na cromodinâmica quântica. Elas podem ser vistas na seção 17.7 de (ARFKEN; WEBER; HARRIS, 2011).

2.4 Fibrados

Definição de fibrados

Os fibrados estabelecem o sólido formalismo matemático das teorias de calibre modernas. Vimos como as variedades diferenciáveis e a teoria de grupos são fundamentais para descrever as interações fundamentais. As primeiras modelam o espaço-tempo, cuja curvatura dá origem à gravidade; a segunda se manifesta de forma nítida em fenômenos quânticos. Os fibrados permitem a união dos dois conceitos, facultando uma interpretação geométrica para os outros campos além da gravidade.

Do ponto de vista local, um fibrado é um produto cartesiano entre dois espaços topológicos, denominados espaço-base X e fibra F . Além disso, a medida que variamos o ponto de X , a fibra se altera de acordo com a ação de um grupo G . Para entender de que modo essa atuação pode dar-se, é útil observarmos que para uma variedade há uma estrutura natural associada ao conjunto de mapas de sua estrutura diferenciável. De fato, tomando três mapas $(U_\alpha, \varphi_\alpha), (U_\beta, \varphi_\beta), (U_\gamma, \varphi_\gamma) \in \mathcal{U}$ tais que $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma \neq \emptyset$, temos o

difeomorfismo dado pela aplicação de transição $\varphi_{\gamma,\alpha} = \varphi_\gamma \circ \varphi_\alpha^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Desse modo, escrevemos

$$\varphi_{\gamma,\alpha} = \varphi_\gamma \circ (\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\beta) \circ \varphi_\alpha^{-1} = (\varphi_\gamma \circ \varphi_\beta^{-1}) \circ (\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}) = \varphi_{\gamma,\beta} \circ \varphi_{\beta,\alpha}. \quad (2.14)$$

Logo, a relação $\varphi_{\gamma,\alpha} = \varphi_{\gamma,\beta} \circ \varphi_{\beta,\alpha}$ define uma multiplicação de grupo, bastando o estabelecimento de um homeomorfismo $\varphi_{\gamma,\alpha} \mapsto g \in G$ para que se tenha a associação de um grupo a uma variedade. Para um fibrado, a ideia é análoga, com a diferença de que as aplicações de transição mapearão o produto cartesiano local do fibrado nele mesmo, ou seja, não nos restringimos ao conjunto \mathbb{R}^n . De qualquer maneira, a definição que daremos a seguir mostrará a proximidade que existe entre a o conceito de fibrado e o de variedade diferenciável. Com efeito, se o espaço-base a fibra são variedades diferenciáveis, o fibrado também o será.

Passemos à definição de fibrado, seguindo principalmente (NASH; SEN, 1988):

DEFINIÇÃO. Um fibrado (E, π, F, G, X) reúne os espaços topológicos E , dito espaço total, X e F , já apresentados; um grupo G de homeomorfismos de F , denominado *grupo de estrutura* do fibrado; e uma aplicação de projeção $\pi : E \rightarrow X$. O espaço-base X também deve ser dotado de um cobertura de abertos $\{U_\alpha\}$, com $\bigcup_\alpha U_\alpha = X$, e um conjunto de homeomorfismos $\phi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \subset E \rightarrow U_\alpha \times F$ tais que

$$\pi(\phi_\alpha^{-1}(x, f)) = x, (x, f) \in U_\alpha \times F. \quad (2.15)$$

Convém apontar que a notação para fibrados varia entre autores. Outras formas comuns e mais simples de se designar um fibrado seriam: $\pi : E \rightarrow X$, ou (E, π, F, X) , com os elementos não necessariamente nessa ordem.

É interessante notar a semelhança que as funções ϕ_α possuem com as φ_α da estrutura diferenciável de uma variedade n -dimensional M . Essas últimas mapeiam M em \mathbb{R}^n , o qual é um produto cartesiano $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k$, com $m + k = n$. Ainda,

O grupo G do fibrado desempenha um papel semelhante ao descrito no começo desta seção para as variedades. De fato, dados dois abertos da cobertura de X tais que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, temos as aplicações de transição $\phi_{\alpha,\beta} = \phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}$. Fixando $x \in U_\alpha \cap U_\beta$, definimos os homeomorfismos da fibra, $g_{\alpha,\beta} : F \rightarrow F$, como $g_{\alpha,\beta}(f) = (\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1})(x, f)$. O conjunto de todas as funções $g_{\alpha,\beta}$, para todos os conjuntos da cobertura $\{U_\alpha\}$, é isomorfo a G . A Figura 12 ilustra os exemplos clássicos do cilindro e da faixa de Möbius, os quais são fibrados que possuem o mesmo espaço-base $X = S^1$ e a mesma fibra $F = L$, onde L é um segmento de reta, mas grupos G distintos.

Para o cilindro, a fibra permanece inalterada à medida que mudamos os pontos de $X = S^1$, isso quer dizer que as funções de transição $g_{\alpha,\beta}$ são a própria identidade do espaço F , ou seja, $g_{\alpha,\beta} = id_F$, donde temos o mapeamento natural $g_{\alpha,\beta} \mapsto e \in G$. Consequentemente, o grupo para esse fibrado é trivial, $G = \{e\}$. Para a faixa de Möbius, há apenas duas

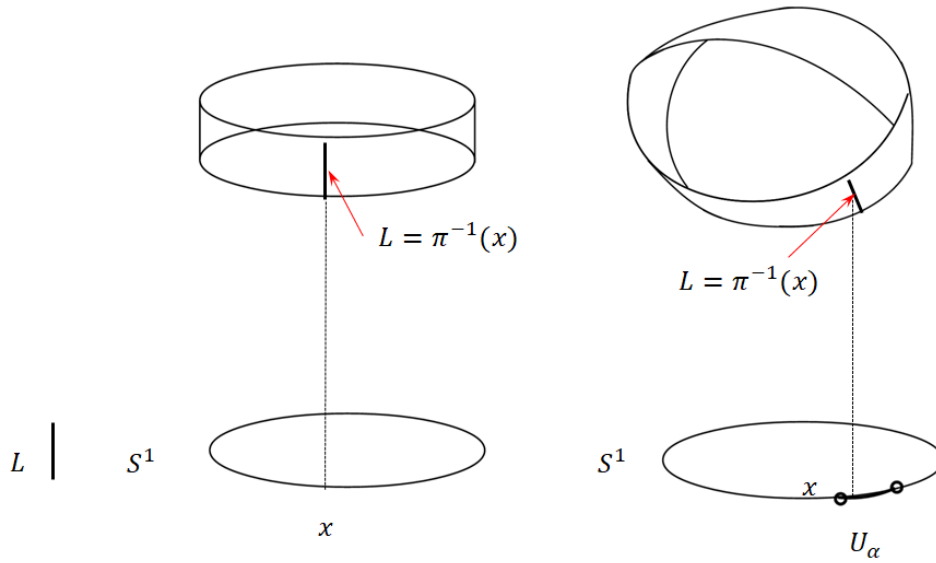


Figura 12 – Exemplos de fibrados com mesmos $X = S^1$ e $F = L$, mas grupo G diferente: o cilindro (à esquerda) e a faixa de Möbius (à direita).

situações: (i) a fibra permanece inalterada ao longo de $X = S^1$; ou, (ii) a fibra sofre uma inversão. Logo, temos o mapeamento $g_{\alpha,\beta} \mapsto g \in \{e, a\}$, em que o fato de G possuir apenas dois elementos reflete a existência das únicas duas possibilidades de alteração da fibra.

Um fibrado representa um produto cartesiano apenas localmente, definido por $U_\alpha \times F$. Globalmente, não é possível estender essa caracterização para o espaço total E . Retomando a analogia com as variedades diferenciáveis, essas, de modo geral, não podem ser mapeadas globalmente em \mathbb{R}^n , apenas localmente, o que é feito pelas funções φ de sua estrutura diferenciável. A esfera S^2 , por exemplo, localmente pode ser vista como um plano, mas não globalmente, sendo necessário no mínimo dois mapas para que tal associação seja possível (rever seção 1.1 e o exemplo da Figura 3). Algo análogo se dá com fibrados. Diz-se que um fibrado é trivial se ele for globalmente um produto cartesiano. No exemplo da Figura 12, o cilindro é um fibrado trivial e podemos defini-lo como $S^1 \times L$. O mesmo não ocorre com a faixa de Möbius porém.

Uma definição importante dentro dessa teoria é a de fibrado principal. Logo, um fibrado (E, π, F, G, X) é dito principal se sua fibra for o próprio grupo de estrutura, isto é, se $F = G$. Por outro lado, se o referido fibrado $\pi : E \rightarrow X$ for tal que $F \neq G$, é possível definir o fibrado principal $P(E)$ associado como $(P(E), \pi, F', G, X)$, o qual difere do original apenas em relação à fibra, a qual deve ser tomada como $F' = G$. Ainda, como dissemos antes, se os espaços X e F de um fibrado forem variedades diferenciáveis, o espaço total E também o será. Consequentemente, se um fibrado $\pi : E \rightarrow X$ tiver como grupo de estrutura um grupo de Lie, seu fibrado principal $P(E)$ será automaticamente uma variedade diferenciável.

Antes de dar alguns exemplos de fibrados, apresentamos a definição de seção s de

um fibrado.

DEFINIÇÃO. Uma seção s de um fibrado $\pi : E \rightarrow X$ é uma aplicação contínua $s : X \rightarrow E$.

Uma seção cumpre o papel inverso da função de projeção π . De fato, ela deve satisfazer $\pi(s(x)) = x$. O requisito de continuidade é fundamental para a definição, nem sempre existindo uma seção global para o fibrado. Por exemplo, se existir uma tal seção para um fibrado principal $P(E)$ de outro E , então, é possível mostrar que ambos são fibrados triviais.

Exemplos de fibrados

No tópico anterior vimos dois exemplos de fibrados. Na verdade, já passamos por outro, na seção 1.2, o fibrado cotangente. Logo, dada uma variedade n -dimensional M , temos dois exemplos importantes de fibrados induzidos naturalmente por ela:

- o fibrado cotangente de M : $T^*M = \bigcup_{p \in M} T_p^*M$;
- o fibrado tangente de M : $TM = \bigcup_{p \in M} T_pM$.

Nesses dois exemplos de fibrados, o espaço-base é a variedade M , ao passo que a fibra em cada ponto $p \in M$ corresponde aos espaços cotangente ou tangente. Logo, o grupo de estrutura em ambos os casos é $GL(n)$, uma vez que a fibra em cada ponto é um espaço vetorial de dimensão n , donde concluímos que os dois fibrados também são variedades diferenciáveis⁸ de dimensão $2n$. Desse modo, em coordenadas locais (x^1, x^2, \dots, x^n) da variedade M , um ponto da variedade TM seria $(x^1, \dots, x^n, \partial_1, \dots, \partial_n)$, enquanto um de T^*M seria $(x^1, \dots, x^n, dx^1, \dots, dx^n)$. Assim, na mecânica analítica, se $M = Q$, onde Q é o espaço de configuração, uma análise em termos da lagrangiana $L(q, \dot{q})$ seria feita no espaço tangente TQ . Por outro lado, uma modelagem pela hamiltoniana $H(q, p)$ teria lugar no espaço cotangente T^*Q , dito espaço de fase, como dissemos no exemplo da seção 1.2.

Um último exemplo de fibrado que daremos, também associado a uma variedade M , é o chamado *fibrado de bases* ou *fibrado de referenciais*⁹. Seja \mathcal{B}_p o conjunto de todas as bases $\{e_a\}$ de T_pM em $p \in M$. O fibrado de bases FM de M é definido como

$$FM = \bigcup_{p \in M} \mathcal{B}_p. \quad (2.16)$$

Fixada uma base $\{e_a\} \in \mathcal{B}_p$ de T_pM , dada outra $\{e'_a\} \in \mathcal{B}_p$, existe uma transformação $T \in GL(n)$ que faz o mapeamento $\{e_a\} \mapsto \{e'_a\}$. Por conseguinte, para cada elemento de \mathcal{B}_p existe um correspondente de $GL(n)$ – sendo o contrário também verdade pela transformação inversa T^{-1} – donde temos o isomorfismo $\mathcal{B}_p \cong GL(n)$. Como esse também

⁸ $GL(n)$ é um grupo de Lie

⁹ Em inglês, *frame bundle*.

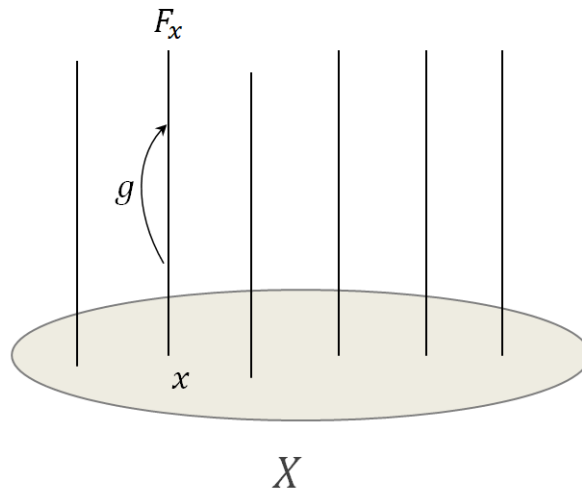


Figura 13 – Representação de um fibrado por meio do espaço base X e das fibras F_x .

é o grupo de estrutura de FM e \mathcal{B}_p é a fibra no ponto p , concluímos que o fibrado de bases é um fibrado principal.

Os exemplos anteriores sugerem uma outra forma de definir um fibrado associado a uma variedade diferenciável M (ver a seção 17.2 de (FECKO, 2006)). De fato, tomando uma variedade F_p em cada ponto $p \in M$, denominada fibra no ponto p , as quais são difeomórficas à fibra F da definição inicial, podemos definir o fibrado $\pi : E \rightarrow M$ como

$$E = \bigcup_{p \in M} F_p. \quad (2.17)$$

A partir da definição da Eq.2.17, podemos ilustrar um fibrado como na Figura 13, em cuja parte inferior tem-se uma representação do espaço base X , a partir do qual partem as fibras F_x em um ponto $x \in X$. É interessante notar que a fibra F_x é formada pela ação do grupo sobre cada $f \in F_x$ por meio das aplicações $g_{\alpha,\beta}(x) \mapsto g \in G$.

Parte II

Teorias de Calibre

3 O teorema de Noether e simetrias na natureza

Trataremos neste capítulo do teorema de Noether e do modo pelo qual ele estabelece matematicamente a relação entre as simetrias que presumimos existir na natureza e certas grandezas, as quais, desde os tempos de Galileu e Newton, sabemos serem conservadas a despeito das alterações pelas quais determinado sistema passe.

3.1 O princípio da mínima ação

O princípio da mínima ação remonta ao princípio de Fermat do tempo mínimo, aplicado a um raio de luz que se propagam em um meio com um certo índice de refração. Após Fermat, Pierre Maupertuis (1698-1759) formulou o conceito de forma mais próxima à moderna, embora de forma obscura (ver seção 7.7 de (LE MOS, 2018)). A ideia foi melhor formulada matematicamente por meio do cálculo variacional por Euler e Lagrange e, mais tarde, por Hamilton. De fato, o princípio da mínima ação em sua formulação matemática atual é denominado por grande parte dos autores de princípio de Hamilton. Como dissemos na *Introdução*, tal princípio possui um caráter universal, sendo a base de todas as teorias modernas e fundamentais, desde a mecânica quântica até a gravitação.

Tratemos da aplicação matemática desse princípio. Iniciando com o exemplo de um sistema não relativístico, tomamos um conjunto $\{q^1(t), q^2(t), \dots, q^n(t)\}$ de coordenadas generalizadas, independentes entre si, as quais consistem em coordenadas locais da variedade Q , o espaço de configuração. Em seguida, definimos o funcional de ação $S[q]$ - onde adotamos a simplificação $[q] = [q^1, q^2, \dots, q^n]$ - como

$$S[q] = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt, \quad (3.1)$$

onde a lagrangiana $L(q, \dot{q}, t)$ é uma função que possui uma dependência explícita das coordenadas (q), de suas derivadas temporais (\dot{q}) e do tempo. As funções $q^i(t)$ expressam uma curva em coordenadas locais de Q . Logo, de todas as curvas possíveis, mas com extremos em t_1 e t_2 fixos¹, desejamos encontrar aquelas que minimizam S . Supondo que elas sejam denotadas por $q(t)$, tomamos uma função $\eta^i(t)$ qualquer e um parâmetro infinitesimal ϵ , de modo que outras coordenadas não minimizantes $\tilde{q}(t)$ sejam dadas por

$$\tilde{q}^i(t) = q^i(t) + \epsilon \eta^i(t). \quad (3.2)$$

¹ Diz-se que tais curvas, que coincidem em seus extremos, são homotópicas. A homotopia é uma classe de equivalência que surge dessa relação (ver seções 5.6 de (CARMO, 2010) e 1.3 de (NASH; SEN, 1988)).

Por conseguinte, o funcional $S[\tilde{q}]$ será uma função Ξ de ϵ , isto é, $\Xi(\epsilon) = S[\tilde{q}]$. Daí, para obtermos $q(t)$, a aplicação do princípio da mínima ação impõe que

$$\left. \frac{d\Xi(\epsilon)}{dt} \right|_{\epsilon=0} = \Xi'(0) = 0. \quad (3.3)$$

Aplicamos a derivada em $\epsilon = 0$ porque, nesse ponto, $\tilde{q} = q$. Ainda, definindo $\delta S := \epsilon\Xi'(0)$ e $\delta q^i = \epsilon\eta^i$, obtemos a Eq. 3.4, a partir da qual deduzimos a Eq. 3.5 usando integração por partes e observando que $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$.

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q^i} \delta q^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \delta \dot{q}^i \right) dt, \quad (3.4)$$

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left[\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) \right] \delta q^i dt. \quad (3.5)$$

Tendo em vista a imposição $\delta S = 0$, a independência entre as coordenadas q^i e o lema fundamental do cálculo variacional implicam que a expressão dentro do colchetes no somatório deve ser nula para cada i . Desse modo, obtemos n equações, denominadas equações de Euler-Lagrange, que permitem a obtenção de todas as $q^i(t)$, ou seja, elas correspondem às equações de movimento do sistema. Todas as equações que regem todos os fenômenos físicos fundamentais² podem ser deduzidas por esse método, feitas as devidas adaptações, naturalmente.

Em se tratando de determinado campo, se desejamos usar o princípio da mínima ação para obter suas equações, não podemos ignorar a RE. Assim, tomamos as coordenadas x^μ e fazemos uma integração não no tempo, mas no elemento de volume $dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 := d^4x$ em uma região Ω do espaço-tempo. Ademais, em vez de uma lagrangiana L , usamos uma densidade de lagrangiana \mathcal{L} , à qual consideramos função explícita de n campos escalares $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ e suas derivadas primeiras $\partial_\mu \phi_i$. Adotando a simplificação $(x) = (x^0, x^1, \dots, x^3)$, $(\phi(x)) = (\phi_1(x), \phi_2(x), \dots, \phi_n(x))$ e $(\partial\phi(x)) = (\partial_0\phi_0(x), \dots, \partial_3\phi_0(x), \dots, \partial_3\phi_n(x))$ para o argumento das funções, escrevemos o funcional de ação como

$$S = \int_{\Omega} d^4x \mathcal{L}(\phi(x), \partial\phi(x)). \quad (3.6)$$

O método de obtenção das equações de campo é análogo ao apresentado anteriormente: impomos $\delta S = 0$, exigindo, além disso, que as variações $\delta\phi_i$ sejam diferenciáveis e se anulem na fronteira de Ω . O resultado consiste nas equações de Euler-Lagrange para os campos, dadas pela Eq. 3.7.

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} = 0. \quad (3.7)$$

² Referimo-nos a fenômenos fundamentais porque em aplicações de engenharia e física experimental tal método pode ter limitações. Todavia, elas poderiam ser atribuídas a dificuldades em se modelar adequadamente o sistema, ou seja, em se obter uma lagrangiana adequada para o mesmo.

3.2 Simetrias e grandezas conservadas

Na *Introdução* tratamos do teorema de Noether, o qual estabelece uma relação direta entre as simetrias existentes na natureza e a conservação de certas grandezas. Formulando o problema de forma geral, dadas as coordenadas x^μ e campos $\phi_i(x)$, admitimos transformações de simetria tais que $(x^\mu, \phi_i(x)) \mapsto (\tilde{x}^\mu, \tilde{\phi}_i(\tilde{x}))$, às quais são definidas por funções X^μ e Φ_i a um parâmetro³ ϵ , como descrito nas Eqs. 3.8 e 3.9.

$$\tilde{x}^\mu = X^\mu(x, \epsilon), \quad (3.8)$$

$$\tilde{\phi}_i(\tilde{x}) = \Phi_i(\phi(x), x, \epsilon). \quad (3.9)$$

Para aplicar o teorema de Noether, consideramos ϵ um parâmetro infinitesimal, assim, expandimos as funções X^μ e Φ_i em série de Taylor em torno de $\epsilon = 0$ e ignoramos os termos de segunda ordem em diante, de modo que obtemos

$$\tilde{x}^\mu = X^\mu(x, 0) + \epsilon \frac{\partial X^\mu(x, 0)}{\partial \epsilon}, \quad (3.10)$$

$$\tilde{\Phi}_i(\tilde{x}) = \Phi_i(\phi(x), x, 0) + \epsilon \frac{\partial \Phi_i(\phi(x), x, 0)}{\partial \epsilon}. \quad (3.11)$$

É natural admitir que $X^\mu(x, 0) = x^\mu$ e $\Phi_i(\phi(x), x, 0) = \phi_i(x)$. Ademais, definimos

$$\tau^\mu(x) := \frac{\partial X^\mu(x, 0)}{\partial \epsilon}, \quad \xi_i(\phi(x), x) := \frac{\partial \Phi_i(\phi(x), x, 0)}{\partial \epsilon}, \quad (3.12)$$

os quais são denominados geradores das transformações, permitindo-nos reescrever as Eqs. 3.10 e 3.11 como

$$\tilde{x}^\mu = x^\mu + \epsilon \tau^\mu(x), \quad (3.13)$$

$$\tilde{\Phi}_i(\tilde{x}) = \phi_i(x) + \epsilon \xi_i(\phi(x), x). \quad (3.14)$$

Considerando uma lagrangiana⁴ que também depende explicitamente das coordenadas x^μ , a partir das transformações acima obtemos uma nova função

$$\tilde{\mathcal{L}} = \tilde{\mathcal{L}}\left(\tilde{\phi}(\tilde{x}), \frac{\partial \tilde{\phi}(\tilde{x})}{\partial \tilde{x}}, \tilde{x}\right). \quad (3.15)$$

Para aplicar o princípio da mínima ação, consideramos a anulação da variação $\tilde{S} - S$, isto é, fazemos

$$\tilde{S} - S = \int_{\Omega} d^4 \tilde{x} \tilde{\mathcal{L}}\left(\tilde{\phi}(\tilde{x}), \frac{\partial \tilde{\phi}(\tilde{x})}{\partial \tilde{x}}, \tilde{x}\right) - \int_{\Omega} d^4 x \mathcal{L}(\phi(x), \partial \phi(x)) = 0. \quad (3.16)$$

³ Poderíamos considerar um caso mais geral e definir as transformações de coordenadas e de campos como dependentes de um número arbitrário de parâmetros infinitesimais. Todavia, a diferença principal consistiria em termos de adicionar mais índices às equações, sobrecarregando a notação. Ademais, a simplificação considerada serve bem aos nossos propósitos.

⁴ Para simplificar a terminologia, usaremos o termo lagrangiana em vez de densidade de lagrangiana.

Se a Eq. 3.16 for satisfeita, dizemos que o sistema é invariante pelas transformações de simetria dadas pelas Eqs. 3.8 e 3.9. Desprezando derivadas em ϵ de ordem superior a um e potências de ϵ de grau dois ou superior, vemos que o jacobiano da transformação de coordenadas é simplesmente $(1 + \epsilon\tau^\mu)$, logo, $d^4\tilde{x} = (1 + \epsilon\tau^\mu)d^4x$. Além disso, enquanto grandezas escalares, os campos $\phi_i(x)$ são invariantes pela transformação das coordenadas x^μ . Portanto, a partir da Eq. 3.16, concluímos que a Eq. 3.17 precisa ser satisfeita.

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_i}\xi_i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)}\partial_\mu\xi_i + (\partial_\mu\mathcal{L})\tau^\mu + \left[\delta_\nu^\mu\mathcal{L} - \partial_\mu\phi_i\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\phi_i)}\right]\partial_\nu\tau^\mu = 0. \quad (3.17)$$

Reiteramos que na Eq. 3.17 vale a convenção do somatório sobre índices repetidos, tanto para os latinos ($i = 1, 2, \dots, n$) quanto para os gregos ($\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$).

Usando a regra do produto de Leibniz, fazemos $fg' = (fg)' - f'g$, eliminando as derivadas de ξ_i e τ^μ . Após algumas manipulações, chega-se ao resultado da Eq. 3.18.

$$(\partial_\mu\phi_i\tau^\mu - \xi_i) \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_i} - \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)} \right] = \partial_\mu \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)}\xi_i - \left(\partial_\nu\phi_i\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)} - \delta_\nu^\mu\mathcal{L} \right) \tau^\nu \right]. \quad (3.18)$$

A expressão entre colchetes no lado esquerdo da Eq. 3.18 é a mesma da Eq. 3.7, ou seja, se as equações de Euler-Lagrange são satisfeitas pelos campos, o divergente do lado direito da Eq. 3.18 é nulo. O termo entre colchetes sobre o qual se aplica o divergente é denominado corrente de Noether, em analogia com a equação de continuidade de correntes elétricas, que apenas reflete a conservação da carga elétrica. Portanto, se j^μ é a corrente de Noether, temos

$$j^\mu = \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)}\xi_i - \left(\partial_\nu\phi_i\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)} - \delta_\nu^\mu\mathcal{L} \right) \tau^\nu \right]. \quad (3.19)$$

Se separarmos as componentes espaciais da temporal no operador ∂_μ de $\partial_\mu j^\mu = 0$, deduzimos que a derivada temporal $\partial_0 j^0$ se iguala ao negativo do divergente espacial $\nabla \cdot \mathbf{j}$, onde $\mathbf{j} = (j^1, j^2, j^3)$. Denominando V a região do espaço correspondente a Ω , podemos integrar ambos os termos em d^3x sobre V , para, em seguida, aplicar o teorema do divergente. Assim, a integral de volume é substituída por uma de superfície e, se admitirmos que os campos se anulam suficientemente rápido na fronteira de V , o qual se supõe ser todo o espaço, obtemos a anulação da referida integral. A conclusão a que se chega é que a integral de volume de $\partial_0 j^0$ é nula ou, equivalentemente, que a derivada temporal ∂_0 da integral de volume de j^0 é zero, isto é, temos uma grandeza Q que se conserva no tempo, denominada carga de Noether. Logo:

$$Q = \int_V d^3x j^0. \quad (3.20)$$

É interessante expressar a corrente de Noether em termos de algumas grandezas cujas definições são naturalmente suscitadas dentro da teoria, são elas o momento canônico $\pi^{\mu;i}$ dos campos e o tensor de energia-momento T_μ^ν , dados pelas Eqs. 3.21 e 3.22, respectivamente.

$$\pi^{\mu;i} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_i)}, \quad (3.21)$$

$$T_{\mu}^{\nu} = \partial_{\mu}\phi_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\nu}\phi_i)} - \delta_{\mu}^{\nu} \mathcal{L} = (\partial_{\mu}\phi_i)\pi^{\nu;i} - \delta_{\mu}^{\nu} \mathcal{L}. \quad (3.22)$$

Na notação para o momento canônico, usamos o ponto-e-vírgula para separar os índices, enfatizando que eles possuem natureza distinta. Tendo em vista essas definições, reescrevemos a corrente de Noether como

$$j^{\mu} = \pi^{\mu;i}\xi_i - T_{\nu}^{\mu}\tau^{\nu}. \quad (3.23)$$

A aplicação do teorema de Noether ao postulado da homogeneidade do espaço leva à dedução da conservação do momento linear; se consideramos a isotropia do espaço, obtemos a conservação do momento angular e, se aplicarmos o teorema ao princípio de que o tempo é homogêneo, chegamos à conservação da energia. De fato, considerando apenas translações temporais e espaciais, fazemos $\mu = 0$ e $\xi_i \equiv 0$ na Eq. 3.23; em seguida, como os τ^{ν} são mutuamente independentes, desejamos avaliar o efeito da translação em cada componente, separadamente. Para tanto, escolhemos $\tau^{\nu} = \delta_{\rho}^{\nu}$, para um dado $\rho = 0, 1, 2, 3$, de modo que a carga de Noether correspondente passa a ser indexada por ρ . Obtemos, assim, uma carga Q_{ρ} igual à integral de volume de $-T_{\rho}^0$. Não só isso, as componentes Q_{ρ} constituem um quadrivetor, o qual nada mais é que o próprio quadrimomento do sistema. Dessa maneira, deduzimos a conservação da energia ($\rho = 0$) e do momento linear ($\rho = 1, 2, 3$).

4 Teorias de calibre em fibrados

Neste capítulo correamos esse modesto estudo das teorias de calibre. Aqui mostramos como os conceitos matemáticos apresentados anteriormente – variedades diferenciáveis e formas diferenciais, grupos e fibrados – se integram para formar as bases matemáticas das teorias de calibre, permitindo uma interpretação geométrica para os campos de todas as interações fundamentais, incluindo a gravidade, colocando-as no bojo do mesmo formalismo.

4.1 Forma conexão A e forma intensidade de campo F

Começamos tratando o problema da invariância de um campo escalar complexo $\phi(x^\mu)$, o qual já delineamos na *Introdução* e agora tratamos em maiores detalhes usando as ferramentas matemáticas já vistas. Consideramos inicialmente uma transformação do tipo $\phi(x^\mu) \mapsto e^{-i\alpha}\phi(x^\mu)$, onde α é uma constante. A escolha dessa transformação tem como motivação o fato de que a probabilidade da medição de certo estado $|\psi\rangle$ de um sistema quântico depender de $|\psi|^2 = \langle\psi|\psi\rangle$, que é invariante por transformações de fase. De fato, se $|\psi'\rangle = e^{-i\alpha}|\psi\rangle$, então

$$|\psi'|^2 = \langle\psi'|\psi'\rangle = \langle\psi|(e^{-i\alpha})^*e^{-i\alpha}|\psi\rangle = \langle\psi|e^{i\alpha}e^{-i\alpha}|\psi\rangle = \langle\psi|\psi\rangle = |\psi|^2. \quad (4.1)$$

A lagrangiana \mathcal{L} dada pela Eq. 4.2 é uma das variações da equação de Klein-Gordon – proposta com o objetivo de aplicar a RE à mecânica quântica – na qual o campo ϕ cumpre papel análogo ao da função de onda ψ .

$$\mathcal{L}(\phi, \phi^*, \partial\phi, \partial\phi^*) = \partial_\mu\phi^*\partial^\mu\phi - m^2\phi^*\phi. \quad (4.2)$$

De forma consistente com o esperado, tendo em vista a Eq. 4.1, verifica-se que a lagrangiana da Eq. 4.2 é, de fato, invariante por esse tipo de transformação de fase, denominada global, uma vez que α é o mesmo para cada ponto x^μ . Com efeito, se

$$\phi' = e^{-i\alpha}\phi, \quad \phi^{*'} = e^{i\alpha}\phi^*; \quad (4.3)$$

então

$$\partial^\mu\phi' = e^{-i\alpha}\partial^\mu\phi, \quad \partial_\mu\phi^{*'} = e^{i\alpha}\partial_\mu\phi^*. \quad (4.4)$$

Por conseguinte, é óbvio que $\mathcal{L}'(\phi', \phi^{*'}, \partial\phi', \partial\phi^{*'}) \equiv \mathcal{L}(\phi, \phi^*, \partial\phi, \partial\phi^*)$.

Contudo, se avaliamos o efeito de uma transformação local, $\phi(x^\mu) \mapsto e^{-i\alpha(x^\mu)}\phi(x^\mu)$ e $\phi^*(x^\mu) \mapsto e^{i\alpha(x^\mu)}\phi^*(x^\mu)$, verificamos que a invariância é perdida. Com efeito, nesse caso os termos de fase seriam afetados pelos operadores de derivação, donde teríamos

$$\mathcal{L}' = [(\partial_\mu + i\partial_\mu\alpha)\phi^*][(\partial^\mu - i\partial^\mu\alpha)\phi] - m^2\phi^*\phi, \quad (4.5)$$

onde cada termo entre parênteses deve ser visto como um operador atuando sobre o campo à direita. Se definíssemos operadores $\tilde{\partial}_\mu = (\partial_\mu + i\partial_\mu\alpha)$ e $\tilde{\partial}^\mu = (\partial^\mu - i\partial^\mu\alpha)$, \mathcal{L}' teria uma forma similar à original, embora a invariância permanecesse. Contudo, tal observação sugere que uma alteração em \mathcal{L} via operadores de derivação poderia levar à desejada invariância. De fato, definindo as derivadas covariantes D_μ e D^μ como

$$D_\mu = \partial_\mu - iA_\mu, \quad D^\mu = \partial^\mu + iA^\mu, \quad (4.6)$$

onde A^μ é um campo quadrivetorial, escrevemos a lagrangiana como na Eq.4.7.

$$\mathcal{L} = D_\mu\phi^*D^\mu\phi - m^2\phi^*\phi. \quad (4.7)$$

Uma vez que o termo $m^2\phi^*\phi$ é invariante por uma transformação de fase local, analisemos apenas aquele sujeito à nova derivada. Nesse caso, a transformação de fase local induz a mudança $D \mapsto D'$, onde $D'_\mu = \partial_\mu - iA'_\mu$ e $D'^\mu = \partial^\mu + iA'^\mu$. Desse modo, temos que

$$\begin{aligned} D'_\mu\phi^*D'^\mu\phi &= [(\partial_\mu - iA'_\mu)e^{i\alpha}][(\partial^\mu + iA'^\mu)e^{-i\alpha}] \\ &= e^{i\alpha}(i\partial_\mu\alpha\phi^* + \partial_\mu\phi^* - iA'_\mu\phi^*)e^{-i\alpha}(-i\partial^\mu\alpha\phi + \partial^\mu\phi + iA'^\mu\phi). \end{aligned} \quad (4.8)$$

Para obter a invariância, determinamos que o novo campo se transforme de acordo com

$$A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu\alpha, \quad A'^\mu = A^\mu + \partial^\mu\alpha, \quad (4.9)$$

o que faz com que as derivadas de α desapareçam no último membro da Eq. 4.8. Finalmente,

$$D'_\mu\phi^*D'^\mu\phi = [(\partial_\mu - iA_\mu)\phi^*][(\partial^\mu + iA^\mu)\phi] = D_\mu\phi^*D^\mu\phi. \quad (4.10)$$

Consequentemente, temos que $\mathcal{L}' = \mathcal{L}$.

Como havíamos antecipado no primeiro capítulo deste trabalho, o campo A^μ introduzido na lagrangiana da Eq. 4.7 é o mesmo quadrivetor descrito no primeiro parágrafo da *Introdução*, a partir do qual podem ser obtidos os campos \mathbf{E} e \mathbf{B} em qualquer SRI. De fato, tendo em vista a formulação variacional do eletromagnetismo, adicionaríamos à lagrangiana da Eq. 4.7 o termo $-\partial_{[\mu}A_{\nu]}\partial^{[\mu}A^{\nu]}$, o qual, de forma surpreendente, também é invariante pelas transformações dadas pelas Eqs. 4.9. Portanto, associamos a existência do campo eletromagnético à uma simetria da natureza: a invariância por transformação de fase local.

As p -formas permitem descrever os resultados dos últimos parágrafos de uma forma não só elegante, mas que adiante descortinará possibilidades de interpretação geométrica para A_μ e outros elementos. Assim, definimos a 1-forma A como

$$A = A_\mu dx^\mu. \quad (4.11)$$

Nesse caso, a transformação dada pelas Eqs. 4.9 pode ser escrita simplesmente como $A' = A + d\alpha$, onde notamos que $d\alpha = \partial_\mu\alpha dx^\mu$. Ainda, se definirmos $B(x) = e^{i\alpha(x)}$,

observamos que $dB = e^{i\alpha(x)}d\alpha = Bd\alpha$. Portanto, podemos escrever a lei de transformação de A como

$$A' = A + B^{-1}dB. \quad (4.12)$$

Já vimos uma lei de transformação semelhante à da Eq. 4.12, mas não anteciparemos os resultados. Prosseguindo, também é interessante definir o tensor do campo eletromagnético $F_{\mu\nu}$ em termos de p -formas diferenciais. Em primeiro lugar, recordamos que

$$F_{\mu\nu} = 2\partial_{[\mu}A_{\nu]} = \partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu}. \quad (4.13)$$

Notando a permutação antissimétrica dos índices na definição de $F_{\mu\nu}$, somos compelidos a procurar uma relação entre esse tensor e alguma operação associada à 1-forma A . De fato, definimos uma 2-forma F de acordo com

$$F := dA = \partial_{[\mu}A_{\nu]}dx^{\mu} \wedge dx^{\nu} = \frac{1}{2}F_{\mu\nu}dx^{\mu} \wedge dx^{\nu}, \quad (4.14)$$

onde a equação simples $F = dA$ proporciona mais uma ilustração da elegância propiciada pela álgebra exterior das formas diferenciais.

4.2 Transformações de calibre

Em nos remontando à Eq. 4.12, observamos que $B \in U(1)$ – na verdade, B pertence a uma representação de $U(1)$, como vimos no capítulo 2. Logo, para generalizar os conceitos apresentados e a referida equação, deixemos um pouco o grupo $U(1)$ e, consequentemente, o campo eletromagnético para tomar um grupo G , mas não um qualquer, um grupo de Lie. Assim, seja B uma representação de G , uma matricial, por exemplo, e seja \mathcal{A} uma 1-forma – talvez multivalorada – que toma seus valores na álgebra de Lie \mathcal{G} de G . Esse novo elemento \mathcal{A} generaliza a 1-forma A definida pela Eq. 4.11, cumprindo ainda o mesmo papel: o de garantir a invariância da lagrangiana de determinado sistema. De forma semelhante, dado um campo ϕ , mas não necessariamente escalar, a introdução de \mathcal{A} na lagrangiana garante a invariância do sistema sob a transformação $\phi \mapsto B^{-1}\phi$, com $B \in G$, desde que se substitua a derivação convencional d pela covariante $D\phi = d\phi + \mathcal{A}\phi$. Além disso, a nova 1-forma deve obedecer a lei de transformação

$$\mathcal{A}' = B^{-1}\mathcal{A}B + B^{-1}dB, \quad (4.15)$$

a qual se torna idêntica àquela dada pela Eq. 4.12 para o caso $G = U(1)$. A Eq. 4.15 é denominada lei de transformação de calibre e \mathcal{A} é dito potencial de calibre.

Podemos generalizar também a forma F definida pela Eq. 4.14 como uma 2-forma \mathcal{F} tal que

$$\mathcal{F} = d\mathcal{A} + \mathcal{A} \wedge \mathcal{A}, \quad (4.16)$$

e cuja lei de transformação é simplesmente

$$\mathcal{F}' = B^{-1}\mathcal{F}B. \quad (4.17)$$

Novamente, observamos que se $G = U(1)$, então $\mathcal{F}' = \mathcal{F}$ e $\mathcal{F} = d\mathcal{A}$, pois para uma 1-forma univalorada como $A = A_\mu dx^\mu$, temos $A \wedge A = 0$. Retomaríamos, assim, a definição da Eq. 4.14.

4.3 Campos como objetos geométricos

A teoria de fibrados possibilita, de forma notável, interpretações geométricas para as p -formas \mathcal{A} e \mathcal{F} , bem como para as suas respectivas leis de transformação. Para mostrar como, seguiremos principalmente as exposições de (NASH; SEN, 1988) e (FECKO, 2006). Assim, tomemos inicialmente um fibrado principal P que possui como espaço base uma variedade diferenciável M e como fibra um grupo de Lie G . Como vimos no capítulo 2, esse tipo de fibrado é uma variedade diferenciável. Assim, definimos uma 1-forma ω no fibrado cotangente de P , $\omega \in T^*P$, em termos de \mathcal{A} como

$$\omega = g^{-1}\mathcal{A}g + g^{-1}dg, \quad (4.18)$$

onde consideramos as coordenadas locais de P como $(x, g) \in M \times G$. A utilidade de ω ficará mais clara adiante, por hora, consideremos apenas o impacto que uma mudança de coordenadas apenas na fibra poderia ter sobre essa 1-forma. Nessa situação, a partir da mudança $(x, g) \mapsto (x, g')$, onde $g' = hg$, com $h \in G$, obtemos uma 1-forma ω' a qual deve satisfazer, naturalmente

$$\omega' = g'^{-1}\mathcal{A}'g' + g'^{-1}dg'. \quad (4.19)$$

Portanto, temos:

$$\begin{aligned} \omega' &= g'^{-1}\mathcal{A}'g' + g'^{-1}dg' = g^{-1}h^{-1}\mathcal{A}'hg + g^{-1}h^{-1}(dhg + hdg) \\ &= g^{-1}(h^{-1}\mathcal{A}'h + h^{-1}dh)g + g^{-1}dg = g^{-1}\mathcal{A}g + g^{-1}dg = \omega. \end{aligned} \quad (4.20)$$

A partir da penúltima igualdade, concluímos que

$$\mathcal{A} = h^{-1}\mathcal{A}'h + h^{-1}dh. \quad (4.21)$$

Como $h^{-1}dh = -hdh^{-1}$, isolamos $h^{-1}\mathcal{A}'h$ na Eq. 4.21 e escrevemos em seguida

$$\mathcal{A}' = h\mathcal{A}h^{-1} + hdh^{-1}. \quad (4.22)$$

O resultado da Eq. 4.22 é a mesma lei da Eq. 4.15, com $h = B^{-1}$. Chegamos, desse modo, a uma conclusão surpreendente: uma transformação de calibre pode ser vista apenas como uma mudança de coordenadas na fibra de um fibrado principal P .

Podemos ir ainda mais longe nas interpretações geométricas das transformações de calibre, bem como das p -formas \mathcal{A} e \mathcal{F} . Para tanto, imaginemos uma variedade diferenciável n -dimensional N . Lembramos que sua geometria pode ser codificada como as p -formas ω , Ω e T , isto é, a forma-conexão, forma-curvatura e forma-torção, respectivamente. A repetição do uso do símbolo ω , que agora é associado a N , será justificada em breve. Por enquanto, lembramos que essas p -formas são multivaloradas, satisfazem as equação de estrutura de Cartan e se transformam de forma específica com uma mudança de base $\{e_a\} \mapsto \{\tilde{e}_a\}$ definida por $\tilde{e}_a = C_a^b e_b$. Assim, repetimos a equação de estrutura que relaciona ω e Ω , bem como as leis de transformação de ambas, em vista da mudança de coordenadas, nas Eqs. 4.23 a 4.25.

$$d\omega + \omega \wedge \omega = \Omega \quad (4.23)$$

$$\tilde{\omega} = C^{-1}\omega C + C^{-1}dC. \quad (4.24)$$

$$\tilde{\Omega} = C^{-1}\Omega C. \quad (4.25)$$

As leis de transformações das p -formas ω e Ω são perfeitamente análogas às de \mathcal{A} e \mathcal{F} definidas pelas Eqs. 4.15 e 4.17. Logo veremos que isso não é coincidência, antes, porém, vejamos o papel que ω desempenha para o transporte paralelo (rever o conceito na seção 1.3) da variedade N , imaginando agora que ela seja o fibrado principal P que tem como fibra o grupo de Lie G e espaço-base M . Nesse caso, a forma-conexão ω de $P = N$ já teve sua forma antecipada pela Eq. 4.18, mas agora precisamos enfatizar que a 1-forma \mathcal{A} que entra em sua constituição toma seus valores na álgebra de Lie \mathcal{G} de G , podendo ser expressa em coordenadas locais como

$$\mathcal{A} = A_\mu^a(x)\lambda_a dx^\mu, \quad (4.26)$$

onde λ_a são elementos da base de \mathcal{G} , que naturalmente satisfazem

$$[\lambda_a, \lambda_b] = f_{ab}^c \lambda_c, \quad (4.27)$$

sendo f_{ab}^c as constantes de estrutura da álgebra \mathcal{G} .

Agora, consideremos um ponto $u \in P$ e o espaço tangente $T_u P$. Podemos decompor esse último em dois subespaços $V_u P$ e $H_u P$ de modo que $T_u P = V_u P \oplus H_u P$. O subespaço dito vertical, $V_u P$, é constituído daqueles vetores unicamente tangentes à fibra G passando por u , portanto, se $Y \in V_u P$, então, em coordenadas locais, podemos escrever

$$Y = \alpha_{ij} \frac{\partial}{\partial g_{ij}}, \quad (4.28)$$

onde g_{ij} são elementos de alguma representação matricial de $g \in G$ e α_{ij} são as componentes de Y . Ainda, seja $\pi : P \rightarrow M$ a função de projeção do fibrado e $p, p' \in M$ tais que $\pi^{-1}(p) = u$ e $\pi^{-1}(p') = u' \in P$. Tomando uma curva γ qualquer de M que passe

pelos pontos p e p' , desejamos encontrar a curva $\bar{\gamma} = \pi^{-1}(\gamma)$ de P tal que, em qualquer ponto entre seus extremos u e u' , seu vetor tangente pertença ao subespaço $H_u P$, dito horizontal. Fixados os pontos u e u' , existe apenas uma curva $\bar{\gamma}$ com essa propriedade; ela é denominada levantamento horizontal da curva γ . Satisfeitas essas condições, fala-se em transporte paralelo da fibra $\pi^{-1}(p)$ ao longo da curva γ do espaço base.

Finalmente, para definir se um vetor $X \in T_u P$ de fato é horizontal, usaremos o requisito $\omega(X) = 0$, a partir do qual se deduz sua forma geral, dada por

$$X = \beta^\mu \left(\partial_\mu - A_\mu^a \lambda_a g \frac{\partial}{\partial g} \right), \quad (4.29)$$

onde β_μ representam as ‘componentes’ genéricas do vetor.

De certo modo, a derivada covariante D_μ mede a taxa de variação do vetor velocidade de alguma curva ao longo do levantamento horizontal $\bar{\gamma}$, ou seja, ela é definida como

$$D_\mu = \partial_\mu - A_\mu^a \lambda_a g \frac{\partial}{\partial g}. \quad (4.30)$$

É interessante observar que a definição dada pela Eq. 4.30 é mais geral que a da Eq. 4.6. Agora, vemos que um vetor qualquer $W \in T_u P$ tem a forma

$$W = Y + X = \alpha \frac{\partial}{\partial g} + \beta^\mu D_\mu. \quad (4.31)$$

Denominamos $A_\mu^a(x)$ de conexão associada ao subespaço horizontal. Notamos acima sua relevância para o transporte paralelo, o qual permite a comparação entre vetores pertencentes a espaços tangentes distintos $T_u P$ e $T_{u'} P$ de uma maneira bem-definida, papel que foi desempenhado pelas conexões afins Γ_{bc}^a quando estudamos esse conceito no contexto de variedades.

Qual a relação entre a forma \mathcal{A} generalizada, apresentada no âmbito da invariância de uma lagrangiana, e a definida pela Eq. 4.26? Ora, são exatamente a mesma, o que muda é o grupo particular G que deverá ser considerado quando da formulação variacional do problema. Destarte, as conexões $A_\mu^a(x)$ são entes nitidamente geométricos mas que possuem um significado físico real nas teorias de calibre. Com efeito, se $G = U(1)$, o sobre-índice a associado à respectiva álgebra desse grupo pode ser omitido, porquanto ele é unidimensional, daí obtemos $A_\mu^a = A_\mu$, o próprio campo eletromagnético. Ainda não satisfeitos, simplesmente mudamos G para $G = O(n)$ ou $G = O(n - p, p)$, e concluímos que as conexões A_μ^a originam as próprias conexões afins Γ_{bc}^a da geometria riemanniana, de extrema relevância para a gravitação na RG; se fazemos G igual a algum grupo não abeliano, como $SU(2)$ ou $SU(3)$, obtemos as geometrias de Yang-Mills, que modelam as interações fraca e forte. Dessa maneira, conseguimos colocar as teorias de calibre e a gravidade sob um mesmo arcabouço matemático, tal como dissemos ser possível no início deste capítulo.

A interpretação geométrica fascinante feita no parágrafo anterior ainda não se esgotou, a teoria de fibrados nos permite ir além. De fato, resta estabelecer a prometida relação entre ω , Ω , \mathcal{A} e \mathcal{F} . Com esse fim, repetimos abaixo as leis de transformação para esses elementos:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}' &= B^{-1}\mathcal{A}B + B^{-1}dB; \\ \mathcal{F}' &= B^{-1}\mathcal{F}B; \\ \omega' &= C^{-1}\omega C + C^{-1}dC; \\ \Omega' &= C^{-1}\Omega C.\end{aligned}\tag{4.32}$$

Também relembramos que

$$\begin{aligned}\mathcal{F} &= d\mathcal{A} + \mathcal{A} \wedge \mathcal{A}; \\ \Omega &= d\omega + \omega \wedge \omega.\end{aligned}\tag{4.33}$$

Como havíamos dito, as semelhanças entre as equações acima não são coincidência. Com efeito, notemos que \mathcal{A} e \mathcal{F} pertencem a $\Lambda^1(M)$ – ou, equivalentemente, T^*M – e $\Lambda^2(M)$, respectivamente; ao passo que ω e Ω são elementos de $\Lambda^1(P)$ (ou T^*P) e $\Lambda^2(P)$, respectivamente, com P visto como uma variedade diferenciável. Consequentemente, definindo uma seção local $s : U \subset M \rightarrow P$, onde U é uma vizinhança coordenada de M , estabelecemos a relação entre as diversas formas pelo recuo¹ s^* , de sorte que

$$s^*\omega = \mathcal{A},\tag{4.34}$$

$$s^*\Omega = \mathcal{F}.\tag{4.35}$$

Ainda, considerando uma outra seção local s' definida em outra vizinhança $V \subset M$ tal que $U \cap V \neq \emptyset$, temos que existe um $h \in G$ sob o qual $s' = hs$ ². Como resultado, as formas \mathcal{A} e \mathcal{F} sofrerão transformações de calibre $\mathcal{A} \mapsto \mathcal{A}'$ e $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}'$ – onde $\mathcal{A}' = s'^*\omega$ e $\mathcal{F}' = s'^*\Omega$ – as quais são dadas pelas Eqs. 4.32, com $B^{-1} = h$. Portanto, concluímos que as transformações de calibre podem ser vistas como mudanças de seções locais em P . Assim, coroamos a interpretação geométrica das teorias de calibre possibilitada pelos fibrados: temos uma entidade absoluta, imutável, P , cujas propriedades geométricas ω e Ω se projetam sobre a variedade base M – a qual é, usualmente, do ponto de vista local, o espaço-tempo de Minkowski – mas não de forma única. Destarte, os fenômenos físicos observáveis em M podem ser vistos como simples projeções particulares desse ente abstrato e geral P sobre a nossa realidade local M .

¹ Tradução livre do termo em inglês *pull-back*.

² O produto hs deve ser entendido no sentido de uma ação do grupo pela esquerda, isto é, pela aplicação $\Psi_h : P \rightarrow P$ tal que $hs := \Psi_h \circ s := \Psi_h(s)$.

Parte III

Recentes perspectivas e conclusões

5 Grupos

Neste capítulo apresentamos o conceito de grupos, com ênfase nos grupos de Lie. Ao final também apresentamos os álgebras de Lie associadas. Como discutimos na *Introdução*, o desenvolvimento de determinados conceitos matemáticos foi fundamental para o avanço da nossa compreensão sobre as leis naturais. Por exemplo, a geometria riemanniana permitiu a formulação matemática da RG a partir da noção intuitiva de Einstein acerca do princípio da equivalência. A teoria de grupos possibilitou o avanço da mecânica quântica, mostrando, por exemplo, que as formulações de Heisenberg e Schrödinger eram equivalentes. Ainda, como vimos no capítulo 4, a teoria de fibrados fornece as bases para que todas as teorias de calibre possam ser descritas de forma unificada, sob um mesmo formalismo, podendo mesmo incluir a gravidade. Portanto, é natural esperarmos que o desenvolvimento de novas ferramentas matemáticas apontem novos caminhos para a solução dos problemas atuais da física, sobretudo se elas generalizam conceitos já consolidados e de comprovada aplicação. Esse é o caso dos grupos de Lie, que generalizam o conceito de grupo, possuindo, ainda, uma estrutura mais rica que a de fibrado, como procuraremos descrever a seguir.

5.1 Grupos de Lie

Motivação: simetrias locais

Começaremos o assunto apresentando alguns exemplos, seguindo principalmente (WEINSTEIN, 1996), que motivam a generalização do conceito de grupo em direção a uma estrutura mais ampla, nesse caso, o grupoide. A Figura 14 mostra uma estrutura de retângulos, que denominaremos de ladrilhos, a qual possui uma simetria nítida. De fato, podemos associá-la a diversos grupos de simetria, como reflexões horizontais e verticais, rotações por 180° , etc.

A Figura 15, por sua vez, mostra outra estrutura de ladrilhos, à qual não podemos associar nenhum grupo de simetria dentre os mencionados anteriormente.

Mesmo não podendo associar grupos de simetria à estrutura da Figura 15, conseguimos perceber que ela possui algum tipo de simetria. De fato, se associarmos pontos correspondentes, por exemplo, os dos vértices de cada retângulo, os internos aos retângulos, etc., conseguimos formalizar a noção de simetria para essa estrutura, uma ligada às características locais da mesma. A Figura 16 mostra como pode ser feita a correspondência entre os pontos da estrutura de ladrilhos anterior.

Como demonstrado em (WEINSTEIN, 1996) e (IBORT; RODRÍGUEZ, 2019),

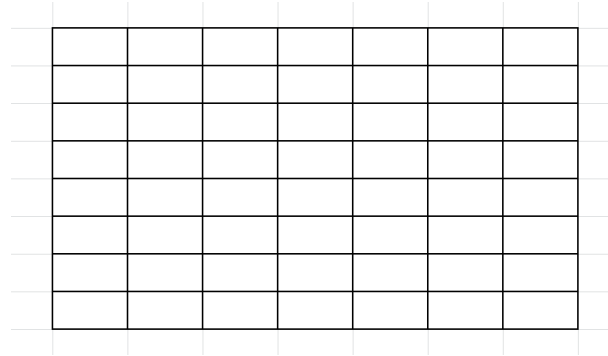


Figura 14 – Estrutura de ladrilhos dotada de simetria local e global.

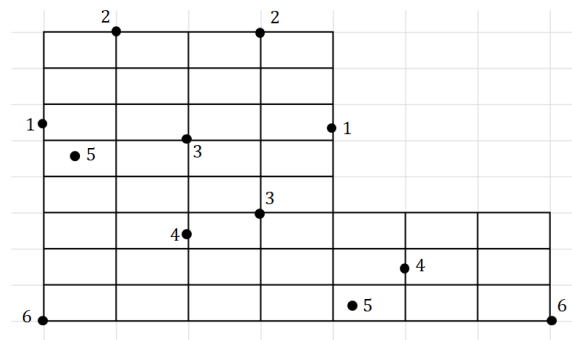


Figura 15 – Estrutura de ladrilhos dotada apenas de simetria local.

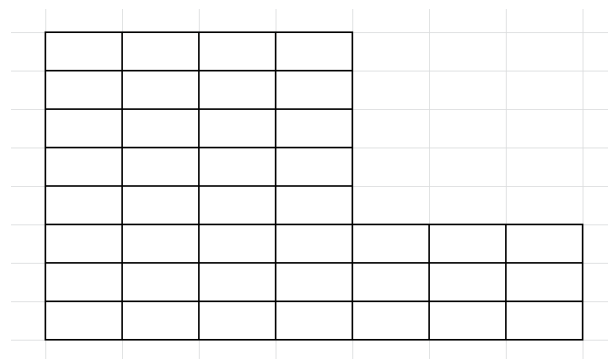


Figura 16 – Correspondência entre pontos da estrutura de ladrilhos que permite a identificação da sua simetria local.

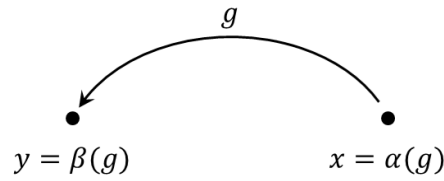


Figura 17 – Representação gráfica do elemento g de um grupoide G .

mesmo não sendo possível atribuir um grupo de simetria à estrutura da Figura 15, a partir da correspondência feita na Figura 16, obtém-se uma estrutura de grupoide, que irá capturar a simetria local dos ladrilhos.

Definição de grupoide

Agora, vamos dar a definição formal de grupoide. Seguindo principalmente as exposições de (SILVA; WEINSTEIN, 1999) e (WILLIAMS, 2016), definimos um grupoide G – identificado como espaço total – sobre um conjunto X (espaço-base) como um conjunto dotado de aplicações $\alpha : G \rightarrow X$ e $\beta : G \rightarrow X$ denominadas fonte e alvo, respectivamente. Usamos a notação abaixo para designar o grupoide.

$$\begin{array}{c} G \\ \alpha \downarrow \downarrow \beta \\ X \end{array}$$

Usando as aplicações α e β , podemos conceber um elemento $g \in G$ como uma seta partindo de α e chegando em β . Na Figura 17 temos a referida representação gráfica, com $x, y \in X$.

Podemos compor dois elementos do grupoide desde que o alvo de um seja a fonte do outro. Assim, dados $g, h \in G$, podemos compô-los de modo a formar o elemento ‘ gh ’ se $\beta(h) = \alpha(g)$. A Figura 18 ilustra essa operação.

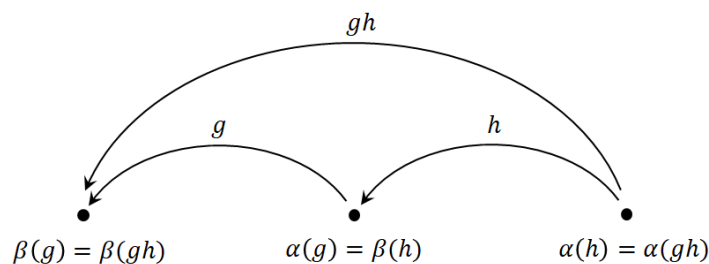


Figura 18 – Representação gráfica da composição de dois elementos $g, h \in G$.

Tendo em vista a composição, é natural definirmos a operação de produto $m : G^{(2)} \rightarrow G$, onde $G^{(2)}$ é o conjunto de pares (g, h) que podem ser compostos, isto é,

$G^{(2)} = \{(g, h) \in G \times G \mid \alpha(g) = \beta(h)\}$. Logo, temos a definição formal $gh := m(g, h)$. Vemos, portanto, uma diferença importante de um grupoide em relação a um grupo, pois, no primeiro caso, ao contrário do segundo, a operação de produto é parcial, isto é, ela não está definida para todos os pares possíveis de seus elementos. Ainda, m satisfaz as seguintes propriedades, as quais se tornam evidentes se usarmos a representação gráfica:

- compatibilidade: $\alpha(gh) = \alpha(h)$, $\beta(gh) = \beta(g)$;
- associatividade: $(gh)k = g(hk)$.

Dizemos que um grupoide é transitivo se todos os pares de ponto do espaço base X são conectados por pelo menos uma seta, o que implica que de cada ponto pode chegar-se a outro por meio de algum elemento do grupoide. Ainda, se G e X são variedades diferenciáveis, então temos um grupoide de Lie. É importante observar que nas representações gráficas dos elementos do grupoide de Lie, uma vez que X é uma variedade diferenciável, entre dois de seus pontos há uma infinidade de outros; além disso, como G também é uma variedade diferenciável, entre dois pontos quaisquer de X há infinitas setas de G .

Um exemplo interessante de grupoide, dado em (EPSTEIN, 2010), é aquele associado aos espaços tangentes de uma variedade diferenciável M . Assim, dados dois pontos $p, q \in M$, o conjunto de todas as transformações não singulares entre os espaços tangentes T_pM e T_qM constitui um grupoide, denominado *grupoide tangente* de M .

A não obrigatoriedade de transitividade para a definição de grupoide mostra a flexibilidade do conceito e as possibilidades de generalização que ele enseja. De fato, na seção 8.2 de (EPSTEIN, 2010) encontramos alguns exemplos aplicados à engenharia de materiais. No primeiro, duas peças de madeira distintas postas justas podem ser associadas a um grupoide não transitivo e que também não seria um grupoide de Lie. Por outro lado, um corpo de material não uniforme também seria dotado de uma estrutura de grupoide não transitivo, porém, poderia ainda ser um grupoide de Lie. Como se pode presumir, um material homogêneo, por sua vez, corresponderia a um grupoide de Lie transitivo.

Prosseguindo com as definições, temos que para cada $g \in G$ existe um elemento inverso g^{-1} . Espera-se que g^{-1} esteja relacionado a um elemento identidade e , de fato, assim é, porém, há uma diferença crucial em relação aos grupos. Com efeito, supondo que exista gh , então $ghh^{-1} = g$ e $g^{-1}gh = h$. Ora, como as fontes e alvos de h e g jazem em pontos distintos de X , por uma questão de compatibilidade, devemos ter $g^{-1}g \neq hh^{-1}$. Desse modo, para os grupoides, temos um elemento identidade para cada ponto do espaço base X . Assim, definimos a identidade como uma imersão $\varepsilon : X \rightarrow G$, dita seção identidade, tal que $\varepsilon(\alpha(g))g = g = g\varepsilon(\beta(g))$. Naturalmente, $\alpha \circ \varepsilon = \beta \circ \varepsilon$ é a aplicação identidade em X .

Uma vez definida a identidade, podemos formalizar o elemento inverso como uma aplicação $\iota : G \rightarrow G$ tal que

$$\iota(g)g = \varepsilon(\alpha(g)), \quad (5.1)$$

$$g\iota(g) = \varepsilon(\beta(g)). \quad (5.2)$$

É claro que $g^{-1} := \iota(g)$. A Figura 19 ilustra os conceitos de elemento inverso g^{-1} , o qual pode ser visto como uma seta na direção contrária da de g , e de identidade, que pode ser interpretada como um laço em volta de um ponto.

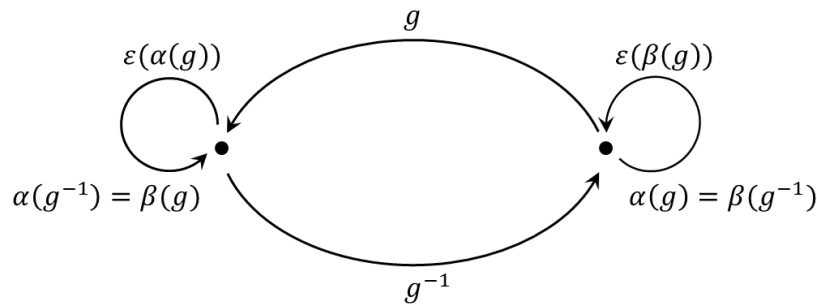


Figura 19 – Representação gráfica do elemento inverso g^{-1} e da identidade ε .

Dando continuidade, definimos a fibra- α sobre $x \in X$ como o conjunto G_x de todas as setas que partem de x , isto é, $G_x = \alpha^{-1}(x) = \{g \in G \mid \alpha(g) = x\}$. Analogamente, definimos a fibra- β sobre $y \in X$ como o conjunto G^y de todas as setas que chegam em y , ou seja, $G^y = \beta^{-1}(y) = \{g \in G \mid \beta(g) = y\}$. O conjunto $G_x^y := G_x \cap G^y$ é constituído por todas as setas que começam em x e terminam em y . O grupo G_x^x é um caso particular importante, sendo denominado grupo isotropia ou vértice. Ele contém todas as setas que partem de x e chegam em x ; graficamente pode ser representado por diversos laços ligados ao ponto x . A Figura 20 contém representações gráficas desses três conjuntos.

O grupo vértice é, de fato, um grupo. Como vimos, a identidade $\varepsilon(x)$ pode ser vista como um laço em x ; ora, ela é apenas um dos que formam o grupo vértice, sendo,

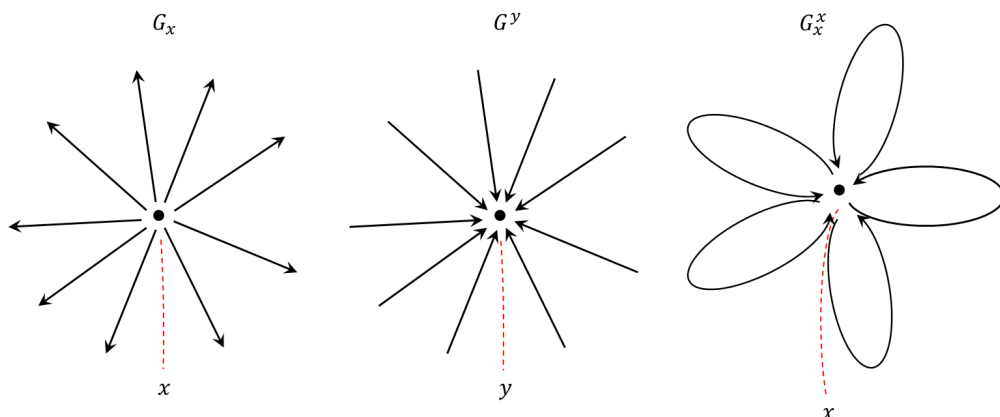


Figura 20 – Representação gráfica dos conjuntos G_x (esq.), G^y (centro) e G_x^x (dir.).

portanto, o elemento identidade único desse grupo. Concluimos assim, que um grupo pode ser entendido como um grupoide definido sobre um único ponto; ou ainda, fixado $x_0 \in X$, o grupoide passa a ser isomórfico a um grupo, $G_{x_0}^{x_0}$. Reciprocamente, dado um conjunto de pontos, uma coleção de grupos sobre os mesmos constitui um grupoide. É nesse sentido que dizemos que o conceito de grupoide generaliza, ou estende o de grupo, fornecendo uma liberdade adicional que pode ser útil em aplicações teóricas, sobretudo nas teorias de calibre ao substituir, por exemplo, o grupo de simetria.

5.2 Ação do grupoide sobre um conjunto

Seguindo a apresentação de (IBORT; RODRÍGUEZ, 2019), nesta seção tratamos do conceito de ação do grupoide. Partindo da ação de um grupo H sobre um conjunto X , temos a indução de um grupoide, denominado $G(H, X)$, cujos morfismos são formados pelo terno $(y, g, x) \in X \times H \times X$, sendo y o resultado da ação do grupo H sobre x , isto é, $y = gx = \Psi_g(x)$. As aplicações fonte e alvo, $\alpha, \beta : G(H, X) \rightarrow X$, são tais que $\alpha(y, g, x) = x$ e $\beta(y, g, x) = y$. O grupoide

$$\begin{array}{c} G(H, X) \\ \alpha \downarrow \downarrow \beta \\ X \end{array}$$

é denominado grupoide de ação associado à ação do grupo H sobre X .

Vimos na definição de fibrados da Eq. 2.17 da seção 2.4, que ao se fixar um ponto x do espaço-base, a atuação do grupo sobre um elemento $f \in F$ da fibra levava à constituição de uma fibra F_x completa, difeomorfa a F , sendo o fibrado formado da união de todas as fibras F_x . As fibras assim formadas são independentes entre si, não havendo relação direta entre elas a não ser pelo espaço-base. Com o grupoide de ação, a relação entre as fibras se dá de modo natural, tendo em vista o morfismo entre os pontos x, y do espaço base. A Figura 21 ilustra esse recurso propiciado pelo grupoide de ação $G(H, X)$.

5.3 Algebroides de Lie

Como mostramos no capítulo 2, a álgebra de Lie de um grupo de Lie H pode ser entendida como uma versão infinitesimal desse último, sendo isomórfica ao plano tangente $T_e G$ em e , a identidade de H . Um algebroide de Lie \mathcal{G} tem papel análogo em relação ao grupoide de Lie G correspondente, porém, como não temos uma identidade única em G , mas um campo de identidades, os deslocamentos infinitesimais que dão origem a \mathcal{G} não constituem um vetor – como ocorre numa álgebra de Lie – mas um campo vetorial. Se no grupo H a obtenção de um vetor tangente se dá por pequenos deslocamentos de um

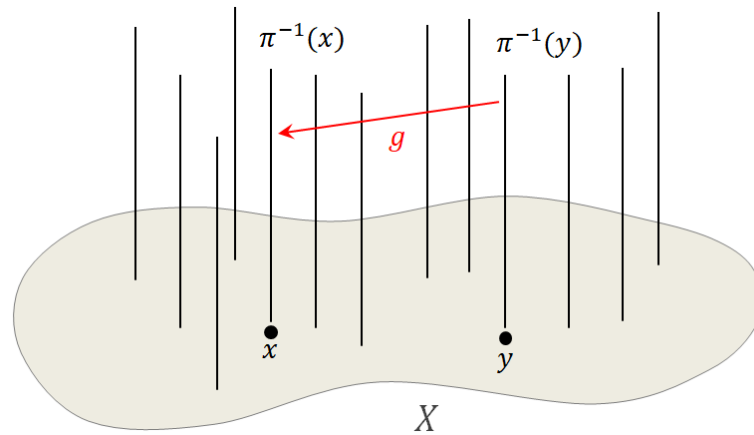


Figura 21 – Representação gráfica da relação natural entre as fibras de um fibrado proporcionada pelo grupoide de ação.

laço, que representa a identidade, num grupoide G temos a liberdade adicional de sair do laço em direção a outro ponto do espaço tangente do espaço base. A Figura 22 ilustra esquematicamente esse processo.

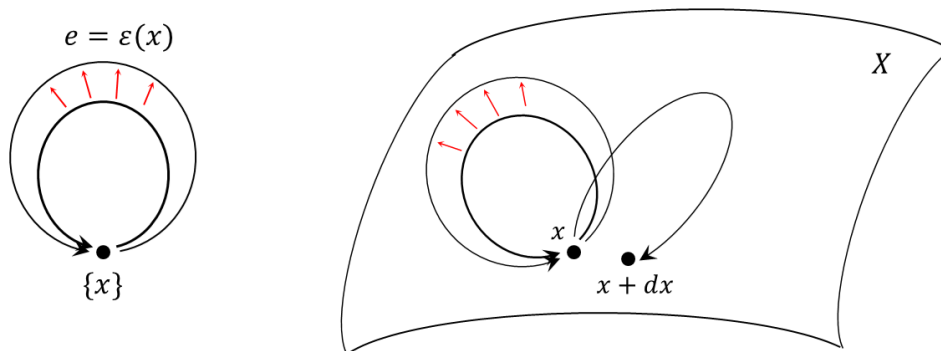


Figura 22 – Ilustração do processo infinitesimal de construção de um algebroide de Lie.

Tendo em vista a liberdade de deslocamento sobre o espaço tangente do espaço base, naturalmente temos um mapeamento entre o algebroide de Lie \mathcal{G} e o fibrado tangente do espaço base. Desse modo, formalmente o algebroide de Lie \mathcal{G} pode ser definido como um fibrado vetorial $\pi : \mathcal{G} \rightarrow M$ sobre uma variedade diferenciável M que atua como espaço base. Além disso, denominamos $\Gamma(\mathcal{G})$ o espaço das seções globais $s : M \rightarrow \mathcal{G}$.

Como havíamos dito, há uma aplicação natural ρ entre \mathcal{G} e TM , onde $\rho : \mathcal{G} \rightarrow TM$; denominamo-la âncora do algebroide de Lie. Finalmente, a estrutura do algebroide de Lie sobre o fibrado vetorial é estabelecida de forma análoga à da álgebra de Lie, mas sendo dotada de uma maior generalidade. Portanto, a estrutura do algebroide de Lie é definida por meio uma aplicação bilinear, o comutador ou parênteses de Lie $[\cdot, \cdot]$ em $\Gamma(\mathcal{G}) \times \Gamma(\mathcal{G})$ que – para $X, Y \in \Gamma(\mathcal{G})$ e uma função f de classe C^∞ sobre M , $f \in C^\infty(M)$ – satisfaça

a regra de Leibniz,

$$[X, fY] = f[X, Y] + \rho(X)(f)Y, \quad (5.3)$$

bem como a condição de consistência

$$\rho([X, Y]) = [\rho(X), \rho(Y)]. \quad (5.4)$$

Assim como para uma álgebra de Lie, o comutador do algebroide também deve ser antissimétrico, $[X, Y] = -[Y, X]$, e satisfazer a identidade de Jacobi:

$$[X, [Y, Z]] + [Z, [X, Y]] + [Y, [Z, X]] = 0, \quad \forall X, Y, Z \in \Gamma(\mathcal{G}). \quad (5.5)$$

As definições apresentadas mostram como os conceitos de grupoide e algebroide de Lie não só generalizam os de grupo e álgebra, mas também o do próprio fibrado. De fato, na seção 8.3 de (EPSTEIN, 2010), mostra-se como é possível alcançar uma estrutura de grupoide a partir de um fibrado principal e vice-versa. Contudo, na relação do grupoide para o fibrado, é preciso fixar um ponto do espaço-base para se obter esse último, de modo que para cada ponto do espaço-base poderíamos definir um fibrado principal distinto. Isso demonstra que o grupoide possui uma estrutura mais rica e geral, o que é consequência direta do fato de que no fibrado principal o grupo se ‘estende’ obrigatoriamente por todo o fibrado ao atuar globalmente sobre a fibra, ao passo que no grupoide a atuação de certo grupo se dá localmente, o que permitiria unir as ações de grupos distintos numa só estrutura, ainda que talvez ela não seja transitiva. Com efeito, para obter-se um fibrado principal a partir de um grupoide, é preciso que o mesmo seja transitivo. Portanto, os grupoides e a não transitividade permitem modelar um conjunto mais amplo de problemas, para os quais a definição de um fibrado sequer seria possível.

6 Conclusão

Apresentamos neste trabalho um conjunto relativamente amplo de conceitos matemáticos visando assentar em bases sólidas o formalismo necessário para dar uma introdução às teorias de calibre. Nosso objetivo era mostrar como as ferramentas matemáticas modernas permitem uma visão unificada dos fenômenos naturais, em particular, das interações fundamentais, objeto de estudo das teorias de calibre. Mesmo a gravidade está incluída nessa visão única, ainda que haja questões em aberto, como o problema do grupo de simetria a ser adotado. É verdade que não apresentamos os fenômenos sob a perspectiva da mecânica quântica, em particular, da teoria quântica de campos, a qual descreve, de fato, as forças fundamentais da natureza – com exceção da gravidade. Tal abordagem deve ser objeto de estudos futuros. De qualquer modo, muitos dos conceitos necessários à compreensão dessas forças sob o ponto da referida teoria foram apresentados. Gostaríamos de destacar, ainda, a interpretação geométrica una, dada em termos de conexões, possibilitada pelos fibrados. Pensamos que o estudo dos pontos de divergência entre a gravidade e as demais forças que surgem a partir da formulação única em termos da conexão e do grupo poderia levar a pesquisas futuras interessantes, que estariam no cerne de alguns dos principais problemas ainda não resolvidos da física contemporânea. Por fim, apresentamos a perspectiva relativamente nova dos grupoides e algebroides de Lie, cuja maior generalidade em relação aos grupos e álgebras de Lie, além dos fibrados, pode fornecer as ferramentas necessárias para a realização de novas contribuições em física fundamental.

Referências

- ARFKEN, G. B.; WEBER, H. J.; HARRIS, F. E. *Mathematical methods for physicists: a comprehensive guide*. [S.l.]: Academic press, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 50 e 84.
- BLAGOJEVIC, M.; HEHL, F. W. Gauge theories of gravitation. *arXiv preprint arXiv:1210.3775*, 2012. Citado na página 31.
- BLOHMANN, C.; FERNANDES, M. C. B.; WEINSTEIN, A. Groupoid symmetry and constraints in general relativity. *Communications in Contemporary Mathematics*, World Scientific, v. 15, n. 01, p. 1250061, 2013. Citado na página 33.
- BOJOWALD, M.; KOTOV, A.; STROBL, T. Lie algebroid morphisms, poisson sigma models, and off-shell closed gauge symmetries. *Journal of Geometry and Physics*, Elsevier, v. 54, n. 4, p. 400–426, 2005. Citado na página 32.
- CARMO, M. P. D. *Geometria diferencial de curvas e superfícies*. [S.l.]: Sociedade Brasileira de Matemática, 2010. Citado 6 vezes nas páginas 42, 45, 48, 49, 67 e 91.
- EPSTEIN, M. *The geometrical language of continuum mechanics*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2010. Citado 4 vezes nas páginas 37, 82, 110 e 114.
- FECKO, M. *Differential geometry and Lie groups for physicists*. [S.l.]: Cambridge university press, 2006. Citado 12 vezes nas páginas 37, 42, 47, 49, 51, 62, 65, 67, 68, 82, 88 e 100.
- FEYNMAN, R. P.; LEIGHTON, R. B.; SANDS, M. *The Feynman lectures on physics, vol. 2*. [S.l.: s.n.], 1964. v. 1. Citado na página 25.
- GÖCKELER, M.; SCHÜCKER, T. *Differential geometry, gauge theories, and gravity*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1989. Citado 3 vezes nas páginas 46, 60 e 68.
- GRIFFITHS, D. J. *INTRODUCTION TO ELECTRODYNAMICS Fourth Edition*. [S.l.: s.n.], 2021. Citado na página 27.
- GUIMARÃES, F. C. *Implementation of Attitude Determination Techniques for a Small Satellite Three-axis Simulator*. Dissertação (Mestrado) — Universidade de Brasília, Brasília, Julho 2018. Citado 2 vezes nas páginas 44 e 75.
- HEHL, F. W. Gauge theory of gravity and spacetime. *Towards a Theory of Spacetime Theories*, Springer, p. 145–169, 2017. Citado 2 vezes nas páginas 30 e 31.
- HOBSON, M. P.; EFSTATHIOU, G. P.; LASENBY, A. N. *General relativity: an introduction for physicists*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2006. Citado 3 vezes nas páginas 46, 67 e 68.
- HOLM, D. D. *Geometric mechanics-Part I: Dynamics and symmetry*. [S.l.]: World Scientific Publishing Company, 2011. Citado na página 81.
- IBORT, A.; RODRÍGUEZ, M. A. *An introduction to groups, groupoids and their representations*. [S.l.]: CRC Press, 2019. Citado 3 vezes nas páginas 80, 107 e 112.

- JÄNICH, K.; KAY, L. *Vector analysis*. [S.l.]: Springer, 2001. v. 5. Citado 3 vezes nas páginas 37, 40 e 42.
- KIBBLE, T. W. Lorentz invariance and the gravitational field. *Journal of mathematical physics*, American Institute of Physics, v. 2, n. 2, p. 212–221, 1961. Citado na página 31.
- LE MOS, N. A. *Analytical mechanics*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2018. Citado 2 vezes nas páginas 27 e 91.
- NASH, C.; SEN, S. *Topology and geometry for physicists*. [S.l.]: Elsevier, 1988. Citado 6 vezes nas páginas 31, 37, 58, 85, 91 e 100.
- SCHECK, F. *Mechanics: from Newton's laws to deterministic chaos*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2010. Citado 2 vezes nas páginas 54 e 58.
- SCHOUTENS, K.; SEVRIN, A.; NIEUWENHUIZEN, P. V. Nonlinear yang-mills theories. *Physics Letters B*, Elsevier, v. 255, n. 4, p. 549–553, 1991. Citado na página 32.
- SCHRÖDINGER, E. *Space-time structure*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1985. Citado na página 31.
- SILVA, A. C. D.; WEINSTEIN, A. *Geometric models for noncommutative algebras*. [S.l.]: American Mathematical Soc., 1999. v. 10. Citado na página 109.
- SOHNIUS, M. F. Soft gauge algebras. *Zeitschrift für Physik C Particles and Fields*, Springer, v. 18, p. 229–237, 1983. Citado na página 32.
- STERNBERG, S. *Curvature in mathematics and physics*. [S.l.]: Courier Corporation, 2013. Citado na página 68.
- STROBL, T. Algebroid yang-mills theories. *Physical review letters*, APS, v. 93, n. 21, p. 211601, 2004. Citado na página 32.
- TENENBLAT, K. *Introdução à geometria diferencial*. [S.l.]: Editora Blucher, 2008. Citado na página 62.
- TUNG, W.-K. *Group theory in physics*. [S.l.]: World Scientific, 1985. v. 1. Citado 3 vezes nas páginas 73, 77 e 84.
- UTIYAMA, R. Invariant theoretical interpretation of interaction. *Physical Review*, APS, v. 101, n. 5, p. 1597, 1956. Citado na página 31.
- WEINSTEIN, A. Groupoids: unifying internal and external symmetry. *Notices of the AMS*, v. 43, n. 7, p. 744–752, 1996. Citado na página 107.
- WILLIAMS, M. B. *Introduction to groupoids*. 2016. Citado na página 109.