

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
INSTITUTO DE FÍSICA

PEDRO HENRIQUE COSTA RIBEIRO

COSMOLOGIA COM SUPERNOVAS DO TIPO IA

BRASÍLIA
21 DE JULHO DE 2023

Pedro Henrique Costa Ribeiro

Cosmologia com Supernovas do tipo Ia

Projeto de trabalho de conclusão de curso apresentado ao Instituto de Física da Universidade de Brasília como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Bacharel em Física.

Orientador: Mariana Penna Lima Vitenti

Universidade de Brasília – UnB

Instituto de Física

Brasília

21 de julho de 2023

Resumo

As supernovas do tipo Ia são uma das explosões mais intensas que já foram detectadas pelo universo. A luminosidade gerada por essa classe de objetos, além de pode ser observada a grandes distâncias, também possui um padrão na sua evolução com o tempo após a explosão. Essas supernovas se encaixam como possíveis velas padronizáveis: objetos cujo brilho pode ser padronizado para um valor modelo, independente da posição e momento em que o objeto se encontra no universo. Por meio da calibração desse brilho com outros observáveis mais comuns - como por exemplo as cefeidas -, podemos utilizar as supernovas para estimar distâncias cosmológicas cada vez maiores. Dessa forma, constrói-se a motivação para estudar como esses dados podem ser utilizados para obter informações sobre a evolução e composição do universo.

Desenvolvendo os principais conceitos do Modelo Padrão da Cosmologia, como a homogeneidade e isotropia do universo em largas escalas e a equação de Friedmann, demonstramos como as funções de distância dependem dos principais parâmetros da cosmologia. Também foram produzidos gráficos para mostrar o efeito que uma variação nas densidade, ou na constante de Hubble, produzem na distância comóvel e no módulo de distância para valores maiores de *redshift*. Além disso, para conectar a construção do modelo padrão com os dados da sonda cosmológica, elaboramos um estudo estatístico, de forma a revisar os principais conceitos e ferramentas que seriam utilizadas no ajuste e no cálculo da região de confiança.

Por fim, utilizando a biblioteca de programação *NumCosmo* (Dias Pinto Vitenti; Penna-Lima, 2014) e os catálogos da *Supernova Legacy Survey* e do *Union2.1*, foi possível obter uma restrição para os principais parâmetros do modelo cosmológico. Em adição, foram gerados os gráficos da região de confiança de 1σ (68,27%) no espaço paramétrico de duas dimensões. Os resultados obtidos com o catálogo mais avançado (*Union2.1*) foram: para um universo plano, $\Omega_c = 0.2375 \pm 0.0745$ e $W = -1.009 \pm 0.202$; para um universo com curvatura, $\Omega_\kappa = 0,1365 \pm 0,8279$, $\Omega_c = 0,2325 \pm 0,0973$ e $W = -1,183 \pm 1,245$; e por fim para um universo com constante cosmológica ($W = -1$), $\Omega_\Lambda = 0,7250 \pm 0,1171$ e $\Omega_c = 0,2358 \pm 0,07013$. Comparando com resultados mais recentes - como a análise do *pantheon+* (Brout et al., 2022) -, pudemos verificar que nossos valores estão dentro do esperado e são consistentes com um universo plano, com a energia escura modelada como constante cosmológica.

Palavras-chaves: Cosmologia. Supernova. Restrição de parâmetros. Perfil de *likelihood*. Numcosmo. Legacy. Union2.1.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Mapa da temperatura da Radiação Cósmica de Fundo em Microondas (CMBR). O valor médio da temperatura é aproximadamente 2,7 Kelvin. Os <i>pixels</i> em amarelo e azul representam uma variação da ordem de 10^{-5} Kelvin, o que mostra o alto grau de isotropia dessa radiação. Figura retirada de ESA (2013).	19
Figura 2 – Geometria do universo para diferentes valores de curvatura. O valor de $\Omega_0 > 1$ significa um universo com curvatura positiva $\kappa = 1$; $\Omega_0 < 1$ equivale à $\kappa = -1$ e $\Omega_0 = 1$ equivale a $\kappa = 0$. Figura retirada de WMAP (2001).	22
Figura 3 – Caixa contendo diversas partículas. A densidade irá diminuir conforme as dimensões expandem.	26
Figura 4 – Caixa contendo diversos fótons. A densidade deles irá diminuir, assim como a energia que eles carregam, quando houver expansão.	27
Figura 5 – Caixa contendo componentes da energia escura. Conforme a caixa se expande, novas componentes surgem, o que mantém sua densidade constante com o tempo.	28
Figura 6 – Comparação da distância comóvel com a distância luminosidade, em função do <i>redshift</i>	36
Figura 7 – Distância comóvel em função da constante de Hubble H_0 [km/(s Mpc)].	37
Figura 8 – Distância comóvel em função da matéria escura Ω_Λ	37
Figura 9 – Módulo de distância em função da constante de Hubble H_0 [km/(s Mpc)].	38
Figura 10 – Módulo de distância em função da matéria escura Ω_Λ	38
Figura 11 – Distância comóvel (em unidades de c/H_0) em função do <i>redshift</i> para cinco modelos de composição do universo. Em azul, está representado o modelo padrão da cosmologia (Λ CDM). Os outros modelos são compostos de somente uma densidade energética.	39
Figura 12 – Curva da distribuição amostral do estimador \hat{a} para um determinado valor a do parâmetro. A partir de probabilidades arbitrárias para α e β , calcula-se os valores de $\hat{a}_\alpha(a)$ e $\hat{a}_\beta(a)$ de forma que suas integrais possuam esses respectivos valores de probabilidade. Imagem retirada de (Riley; Hobson; Bence, 2006)	43
Figura 13 – Regiões de confiança gerada a partir de diversos métodos, os pontos em laranja são valores de melhor ajuste para 10 000 execuções. A curva em azul é o perfil de <i>likelihood</i> para a execução 125, com uma confiança de 2σ , ou seja, $1 - p = 95,45\%$. Figura retirada de Penna-Lima, Makler e Wuensche (2014).	46

Figura 14 – Perfil de <i>likelihood</i> com os dados do SNLS. Foi considerado uma confiança de 1σ (68,27%) para o ajuste conjunto de densidade de matéria escura (Ω_c) e da equação de estado da energia escura (w). O parâmetro Ω_κ foi fixado como zero, portanto, o universo é considerado plano.	50
Figura 15 – Perfil de <i>likelihood</i> com os dados do SNLS. Foi considerado uma confiança de 1σ (68,27%) para o ajuste conjunto de densidade de matéria escura (Ω_c) e da equação de estado da energia escura (w). O parâmetro Ω_κ foi deixado livre, portanto, o universo pode ter curvatura.	51
Figura 16 – Perfil de <i>likelihood</i> com os dados do SNLS. Foi considerado uma confiança de 1σ (68,27%) para o ajuste conjunto de densidade de matéria escura (Ω_c) e da densidade de energia escura (Ω_Λ).	52
Figura 17 – Perfil de <i>likelihood</i> com os dados do Union2.1. Foi considerado confiança de 1σ (68,27%), para o ajuste conjunto de densidade de matéria escura (Ω_c) e da equação de estado da energia escura (w). O parâmetro Ω_κ foi fixado como zero, portanto, o universo é considerado plano.	53
Figura 18 – Perfil de <i>likelihood</i> com os dados do Union2.1. Foi considerado uma confiança de 1σ (68,27%), para o ajuste conjunto de densidade de matéria escura (Ω_c) e da equação de estado da energia escura (w). O parâmetro Ω_κ foi deixado livre, portanto, o universo pode ter curvatura.	54
Figura 19 – Perfil de <i>likelihood</i> com os dados do Union2.1. Foi considerado uma confiança de 1σ (68,27%) para o ajuste conjunto de densidade de matéria escura (Ω_c) e da densidade de energia escura (Ω_Λ).	54
Figura 20 – Perfil de <i>likelihood</i> para os dados do Legacy (em vermelho) e do Union2.1 (em azul). As duas regiões são calculadas para a mesma confiança de 1σ . Ajuste em conjunto dos parâmetros Ω_c e w	55
Figura 21 – Perfil de <i>likelihood</i> para os dados do Legacy (em vermelho) e do Union2.1 (em azul). As duas regiões são calculadas para a mesma confiança de 1σ . Ajuste em conjunto dos parâmetros Ω_c , Ω_κ e w	55
Figura 22 – Perfil de <i>likelihood</i> para os dados do Legacy (em vermelho) e do Union2.1 (em azul). As duas regiões são calculadas para a mesma confiança de 1σ . Ajuste em conjunto dos parâmetros Ω_c e Ω_Λ	56

Lista de tabelas

Tabela 1 – Massas do progenitor e pico de Luminosidade entre os diferentes tipos de supernovas. Tabela retirada de (Brookhaven National Laboratory, 2017).	13
Tabela 2 – Valores iniciais da biblioteca NumCosmo.	36

Sumário

	Introdução	9
1	SUPERNOVAS	11
1.1	Tipo Ia	13
2	COSMOLOGIA	17
2.1	Métrica	17
2.2	Relatividade Geral	17
2.3	Homogeneidade, isotropia e métrica FLRW	18
2.4	Equação de Friedmann	23
2.5	Distância Própria	28
2.6	Vela Padrão	31
2.7	Distância Luminosidade e módulo de distância no modelo Λ CDM	33
3	CÁLCULO NUMÉRICO DE DISTÂNCIAS COSMOLÓGICAS	35
4	CONCEITOS DE PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA	41
4.1	Método da Máxima Verossimilhança	43
4.1.1	Teste de Razão da Máxima Verossimilhança	45
5	ANÁLISE ESTATÍSTICA E RESULTADOS	49
5.1	Conjunto de dados Supernova Legacy Survey (SNLS)	49
5.2	Conjunto de dados Union2.1	51
5.3	Comparação entre os catálogos	54
	Conclusão	57
	REFERÊNCIAS	59

Introdução

Com o rápido desenvolvimento tecnológico presenciado nas últimas décadas, as novas pesquisas e observações do cosmo estão localizando mais objetos astronômicos com distâncias cada vez maiores da Terra. Um dos objetos de maior relevância para a cosmologia é a supernova do tipo Ia, uma explosão de fim estelar altamente energética, capaz de brilhar mais intensamente do que a própria galáxia em que ela reside (Oliveira Filho; Saraiva, 2004; BRITANNICA, 2022). Essa classe de supernovas possui a importante característica da sua curva de luz poder ser padronizada, independente da distância em que se encontram, o que a assemelha com uma vela padrão ideal.

A partir das medições da supernova do tipo Ia, é possível obter algumas quantidades como o *redshift* e o módulo de distância. Essas quantidades também podem ser obtidas teoricamente pelo estudo da cosmologia do universo. Dessa forma, ao relacionar os dois valores obtidos, podemos restringir alguns parâmetros cosmológicos, como a densidade de matéria Ω_m ou até mesmo a constante de Hubble H_0 . Em particular, os dados de supernova do tipo Ia foram os primeiros que indicaram que o universo está expandindo aceleradamente, o que levou a descoberta da energia escura como uma nova densidade energética do universo (Wright; Li, 2018; Howell, 2011).

Novas pesquisas, como a de (Brout et al., 2022), buscam reunir dados de décadas de observação de supernovas do tipo Ia para limitar a incerteza sistemática nos resultados. Além disso, ao combinar as medições de supernovas com as restrições de outros observáveis, como a radiação cósmica de fundo (CMB) e as oscilações acústicas de Bárions (BAO), obtém-se valores mais precisos para a evolução da energia escura no Modelo Padrão da Cosmologia.

1 Supernovas

Supernova é o nome dado a uma grande explosão que marca o fim do ciclo de vida de uma estrela. É um dos eventos mais energéticos do universo, sendo capaz de liberar cerca de 10^{44} Joules de energia e produzir uma luminosidade de 10^9 a $10^{10} L_{\odot}$ ¹ (Oliveira Filho; Saraiva, 2004; Ryden, 2006). Este brilho intenso dura o intervalo de alguns dias, até que começa a diminuir sua intensidade lentamente nos meses seguintes.

Uma explosão de supernova é um dos poucos fenômenos da astronomia possíveis de ser observado a olho nu da Terra. Existem diversos relatos históricos que referenciam um brilho intenso no céu noturno que surgiram de repente; a maioria deles foram descritos com detalhes por astrônomos chineses e do mundo árabe durante a Idade Média. É estimado que um desses objetos, que apareceu no ano de 1006, tenha atingido uma magnitude aparente de -7.5, significando que seu brilho foi mais de 100 vezes o da estrela Sirius A, a estrela mais brilhante atualmente (Stephenson; Green, 2003).

Uma das observações mais famosas foi realizada por Tycho Brahe em 1572; ao observar uma dessas explosões, ele escreveu um trabalho no qual chamava o objeto de *Nova Stella*² (Nova Estrela em latim) (Ryden, 2006). A partir de então, o termo “nova” foi utilizado por séculos pela comunidade astronômica para qualquer aumento de brilho inesperado no céu. Contudo, no início do século XX percebeu-se que os objetos englobados nesta nomenclatura possuíam um brilho de várias ordens de magnitude de diferença. Os pesquisadores Zwicky e Baade cunharam o termo “supernova” para esses objetos de luminosidade muito maior que as novas (Ryden, 2006; Murdin, 2003).

Posteriormente, descobriu-se que as novas são explosões que ocorrem em sistemas binários, compostos por uma anã branca com uma estrela maior e mais fria. O gás da segunda estrela é atraído para a anã branca e forma um disco de acreção. Porém, devido ao aumento de temperatura e pressão quando o gás encontra com a superfície da estrela, o gás começa uma reação de fusão de hidrogênio que leva à uma explosão termonuclear (Murdin, 2003). Essa explosão espalha toda a camada de Hidrogênio na superfície, sem danificar a anã branca, portanto o evento volta a se repetir a cada centenas de anos.

Em contrapartida, a explosão de uma supernova envolve o colapso da própria estrela, destruindo boa parte de sua estrutura e espalhando seu conteúdo pelo meio interestelar. As supernovas são responsáveis pelos elementos químicos mais pesados encontrados pelo universo, com muitos deles sendo produzidos durante a própria explosão (Murdin, 2003). Com o aumento de observações e com uma análise mais precisa do espectro da

¹ L_{\odot} é a luminosidade do Sol.

² Atualmente, o remanescente da supernova observada por Tycho é conhecida como SN 1572, ou B Cassiopeiae.

radiação, algumas diferenças entre as supernovas se tornaram mais claras.

Em 1941, o físico Rudolph Minkowski estabeleceu uma classificação para diferenciar os 14 eventos catalogados que eram o objeto de seu estudo. A separação foi realizada entre as supernovas que não apresentavam linhas de Hidrogênio em seu espectro (denominada como tipo I) e as que apresentavam Hidrogênio (tipo II) (Howell, 2011; Turatto, 2003; Gal-Yam, 2017). Essa é a primeira e principal classificação, que continua sendo utilizada.

Décadas depois, subclassificações da supernova do tipo I foram elaboradas a partir de novas descobertas no espectro da radiação. Uma grande parte delas apresentavam forte presença de Si II³ e ficaram conhecidas como tipo Ia. As supernovas do tipo I que não possuíam linhas características do silício foram subdivididas em mais dois grupos: as que apresentavam linhas de He I (tipo Ib) e as que não apresentavam (tipo Ic) (Gal-Yam, 2017; Murdin, 2003).

Contudo, a classificação que continua sendo utilizada - por motivos históricos - para a supernova do tipo II não segue como base as propriedades do espectro do objeto. Ao invés disso, a nomenclatura surgiu como uma referência às classificações do tipo I; como a do tipo IIb, que se assemelham ao espectro das supernovas Ib; ou com relação a características da curva de luz. Dentre essas últimas, as principais divisões são o tipo II-L, que apresentam um trecho de queda linear da sua curva de luz; tipo II-P, cuja curva de luz apresenta um pequeno platô; e as do tipo II-n, que possuem linhas de hidrogênio bem estreitas no seu espectro (Gal-Yam, 2017; Turatto, 2003).

O estudo da evolução dos progenitores⁴ sugere que há duas principais origens para a explosão de supernovas observadas: uma explosão de uma estrela anã branca (semelhante ao evento das novas) ou de uma estrela “jovem” super massiva. Porém, o modelo da explosão de uma anã branca dá origem exclusivamente à supernovas do tipo Ia, enquanto outras do tipo I e do tipo II marcariam o fim de uma estrela massiva (Gal-Yam, 2017). Na tabela 1 estão apresentadas as massas das estrelas progenitoras e o pico de luminosidade da explosão para cada tipo de supernova.

Uma das evidências é que as supernovas do tipo Ia são avistadas em várias regiões de todos tipos de galáxia, inclusive em galáxias elípticas que não possuem formação recente de estrelas; isso indica que são objetos mais antigos (Turatto, 2003; Murdin, 2003). Já outros tipos de supernova aparecem, em sua grande maioria, nos braços de galáxias espirais, de onde se conclui que são estrelas jovens, e para que elas consumam seu combustível e explodam em um tempo curto, devem ser estrelas gigantes com muita massa (Murdin, 2003). Inclusive, devido a origem em comum das supernovas do tipo Ib/c e tipo II, acredita-se que todas sejam provenientes de estrelas semelhantes com uma certa varia-

³ Segundo espectro do elemento Silício.

⁴ Termo usado para a estrela que gera a explosão de supernova

tipo SN	Massa (M_{\odot})	Magnitude Abs. (Pico)
Ia	1.38	-19
Ib	> 40	-17
Ic	> 40	-16 a -22
II-b	25-40	-17
II-L	25-40	-17
II-P	8-10	-14
II-P	10-40	-16
II-n	?	-22

Tabela 1 – Massas do progenitor e pico de Luminosidade entre os diferentes tipos de supernovas. Tabela retirada de (Brookhaven National Laboratory, 2017).

ção na massa total (Nomoto; Iwamoto; Suzuki, 1995) - o que causa as subdivisões - e que as progenitoras do tipo Ib/c perderam sua camada externa de Hidrogênio, possivelmente por um grande vento solar (Ryden, 2006; Turatto, 2003).

1.1 Tipo Ia

O progenitor da supernova Ia ainda não foi observado. Atualmente utiliza-se um modelo de explosão de uma estrela anã branca, devido à padronização da luminosidade produzida nas explosões desse tipo. No modelo, a estrela anã branca acreta massa de sua companheira massiva até alcançar um limite conhecido como “massa de Chandrasekhar”. Ao passar por esse valor (aproximadamente $1,4M_{\odot}$ ⁵), a estrela começa a colapsar sobre si mesma, aumentando sua densidade e gerando um processo de fusão nuclear (que produz, entre outros elementos, o níquel-56). Por fim, a estrela explode em uma supernova sem deixar nenhum remanescente; ao contrário de outros tipos de supernova que podem gerar buracos negros e estrelas de nêutrons (Ryden, 2016).

O limite de Chandrasekhar foi desenvolvido na década de 1930, pelo físico indiano Subrahmanyan Chandrasekhar. O limite é um valor calculado especificamente para uma estrela anã branca; nesse tipo de estrela, a pressão produzida pelo processo de fusão é um termo de ordem menor, pois o principal mecanismo que sustenta a gravidade de uma anã branca é a pressão de degenerescência dos elétrons, o que envolve princípios da mecânica quântica (Ryden, 2006; Murdin, 2003).

A pressão de degenerescência é calculada a partir do modelo de um gás de elétrons livres. Assume-se que eles estão confinados em uma região com volume V cercada por paredes impenetráveis, portanto haverá um número discreto de estados estacionários. Como elétrons são férmions, eles obedecem ao Princípio de Exclusão de Pauli, o qual afirma que somente dois férmions podem ocupar cada estado quântico (um com spin positivo e outro negativo). A energia total de todos estados preenchidos por elétrons é

⁵ M_{\odot} é a Massa do Sol.

dada por:

$$E_T = \frac{\hbar^2(3\pi^2 Nd)^{5/3}}{10\pi^2 m} V^{-2/3}, \quad (1.1)$$

onde ‘N’ é o número de átomos da amostra, ‘d’ é a quantidade de elétrons que cada átomo contribui e ‘m’ é a massa do elétron (Griffiths; Schroeter, 2020).

É possível associar essa energia dos estados quânticos com a energia interna de um gás comum. Caso o volume considerado sofra uma expansão dV , então a variação na energia total será:

$$dE_T = \frac{\hbar^2(3\pi^2 Nd)^{5/3}}{10\pi^2 m} d(V^{-2/3}) = \frac{\hbar^2(3\pi^2 Nd)^{5/3}}{10\pi^2 m} \left(-\frac{2}{3}\right) V^{-5/3} dV = -\frac{2}{3} \frac{E_T}{V} dV. \quad (1.2)$$

Fazendo uma associação dessa vez com o trabalho realizado por um gás:

$$dW = -PdV, \quad (1.3)$$

podemos encontrar uma “pressão quântica”, que advém da exclusão entre férmions. Essa pressão é a chamada de pressão de degenerescência, que será:

$$P = \frac{2}{3} \frac{E_T}{V} = \frac{(3\pi^2)^{2/3} \hbar^2}{5m} \left(\frac{Nd}{V}\right)^{5/3}. \quad (1.4)$$

Conforme a estrela anã branca acreta massa de sua companheira, a energia do sistema aumenta até chegar em um estado ultra-relativístico no qual a energia de repouso do elétron pode ser ignorada e podemos aproximar $E \approx p^2 c^2$. Nesse regime, a energia total dos estados quânticos será dada por:

$$E_T = \frac{\hbar c}{4\pi^2} (3\pi^2 Nd)^{4/3} V^{-1/3}, \quad (1.5)$$

e a pressão associada para o caso ultra-relativístico será:

$$P = \frac{1}{3} \frac{E_T}{V} \propto \left(\frac{Nd}{V}\right)^{4/3}. \quad (1.6)$$

Para mais detalhes no desenvolvimento da energia para um gás de elétrons livres, veja Griffiths e Schroeter (2020). Por fim, a “massa de Chandrasekhar” é encontrada ao calcular o equilíbrio hidrodinâmico com a pressão provocada pela gravidade da estrela.

Como a teoria da evolução da anã branca envolve um limite específico de massa para explosão ocorrer, o processo que leva à fusão do níquel deve ser semelhante independente da onde o sistema binário esteja no universo. Contudo, ainda é debatido se características da galáxia que hospeda a estrela anã branca podem afetar aspectos da explosão. Condições diferentes, como a presença de elementos mais pesados em galáxias mais velhas pode gerar alterações na supernova e na sua curva de luz. Essas correlações continuam sendo estudadas para minimizar o erro na calibração das explosões (Reis; Siffert, 2022).

O níquel-56 é o responsável por produzir a alta luminosidade da supernova, por meio da radiação gama liberada em seu decaimento. Essa radiação irá interagir com o material quente ejetado pela estrela produzindo fótons com frequências menores, como ultravioleta, luz visível e infravermelho (UVOIR). Conforme o material ejetado se dissipa, ele se tornará cada vez mais transparente, permitindo essa radiação viajar pelo espaço (Wright; Li, 2018; Murdin, 2003).

Contudo, as supernovas do tipo Ia não têm um valor constante de luminosidade. No início da década de 1990 foi descoberto que elas possuíam variações consideráveis no valor da magnitude máxima, o que podia provocar grandes desvios no valor estimado das distâncias. Porém, nessa mesma época foi observado que essas variações na magnitude têm uma forte correlação com taxa de declínio após a magnitude máxima e também com o índice de cor⁶ da supernova (Reis; Siffert, 2022; Phillips, 1993). Essa relação empírica ficou conhecida como WLR (do inglês *Width-Luminosity Relation*) e ela é muito importante na padronização dessas explosões.

A curva de luz de uma supernova é um gráfico que apresenta a variação da luminosidade recebida pelo tempo. As supernovas do tipo Ia possuem um formato característico de sua curva, que pode também ser corrigida para a magnitude do objeto, a qual independe da distância. Por meio da relação WLR, ainda é possível ajustar as curvas com relação às diferenças intrínsecas de magnitude, de forma a padronizar todas as curvas de luz. Combinado ao fato que as supernovas são fenômenos muito luminosos, elas se tornam perfeitas candidatas para serem caracterizadas como uma Vela Padronizável (ver seção 2.6) (Reis; Siffert, 2022).

⁶ A cor da supernova é um valor que está relacionado à diferença de magnitude entre o filtro B e o filtro V.

2 Cosmologia

2.1 Métrica

Pode-se definir a métrica de um espaço como a forma que é calculada a distância entre dois pontos, utilizando quaisquer sistema de coordenadas (Ryden, 2016; Dodelson, 2003). No espaço euclidiano com três dimensões, o quadrado da distância entre dois pontos - em coordenadas cartesianas - é bem conhecida como sendo

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2. \quad (2.1)$$

A métrica também pode ser pensada como um tensor de ordem (0,2) que irá definir o produto interno entre dois vetores no espaço como: (Schutz, 2009)

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \sum_{\alpha} \sum_{\beta} A^{\alpha} B^{\beta} \eta_{\alpha\beta} = A^{\alpha} B^{\beta} \eta_{\alpha\beta}, \quad (2.2)$$

onde os índices foram posicionados em cima para representar as componentes de um vetor, e a última equação utiliza da notação de Einstein para suprimir os somatórios. Essa forma de tensor pode ser representada como uma matriz NxN, sendo N a dimensão do espaço. No caso euclidiano acima, teríamos:

$$\eta_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

2.2 Relatividade Geral

A partir dos postulados da relatividade restrita de Einstein, percebe-se que os conceitos de tempo e espaço não podem mais ser pensados separadamente. Pois, dois observadores em referenciais inerciais diferentes não concordarão com relação à distância ou a simultaneidade de dois eventos¹. A quantidade que será igual, independente do referencial inercial, é a separação espaço-temporal desses dois eventos (Ryden, 2016). O espaço-tempo, portanto, é quadridimensional (três dimensões espaciais e uma temporal).

Dessa forma, Hermann Minkowski - um matemático alemão - estabeleceu a métrica

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2, \quad (2.4)$$

¹ Um evento é um acontecimento instantâneo que possui um ponto definido no espaço-tempo, ou seja, ele carrega a informação da localização espacial e do momento em que ele ocorreu (Wikipedia contributors, 2022).

ou, na forma matricial,

$$\eta_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

que ficou conhecida posteriormente como métrica de Minkowski. Essa métrica já utiliza a separação espaço-temporal mencionada, porém, ela só é válida para um universo plano e estático; sem considerar os efeitos da gravidade (Dodelson, 2003; Piattella, 2018).

No estudo da relatividade geral, Albert Einstein chega a conclusão que a gravidade é uma curvatura no espaço-tempo causada pela presença de matéria ou energia. Logo, não há uma força atuando a distância em outros corpos; a matéria e os fótons irão simplesmente seguir uma geodésica no espaço-tempo curvo (Ryden, 2016).

Diante disso, Einstein desenvolveu uma equação de campo que relacionava a métrica do universo ($g_{\mu\nu}$) com a matéria e energia presente no espaço ($T_{\mu\nu}$) (Lima, 2023). Essa equação é da seguinte forma:

$$R_{\mu\nu} - \frac{Rg_{\mu\nu}}{2} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}, \quad (2.6)$$

onde R e $R_{\mu\nu}$ são respectivamente o escalar de Ricci e o tensor de Ricci.

2.3 Homogeneidade, isotropia e métrica FLRW

Grande parte dos estudos na área de cosmologia partem de algumas considerações importantes a respeito do universo, como por exemplo: homogeneidade e isotropia. Um universo espacialmente homogêneo significa que, em um dado instante de tempo, a distribuição das componentes do universo será estatisticamente homogênea, ou seja, a média e variância dessa densidade serão constantes por todo o espaço. Contudo, uma média estatística envolve uma noção de escala, pois se utilizarmos o sistema solar como exemplo, é evidente que a distribuição de matéria não é homogênea dentro dele. Conforme aumentamos nossa escala, a distribuição observada torna-se cada vez mais homogênea. O estudo de Yadav et al. (2005) mostrou que a partir de 100 Megaparsecs ($\approx 10^{28}$ metros), a distribuição de galáxias pode ser considerada estatisticamente homogênea.

Um universo isotrópico é um universo para o qual não há direções privilegiadas, ou seja, as observações e medidas devem ser as mesmas na média para qualquer direção. No caso do sistema solar, na direção do Sol observaremos uma concentração maior de massa e mediremos mais radiação do que em outras direções. Da mesma forma, no interior de um capacitor podemos estar em um ambiente com distribuição homogênea de partículas, mas que não será isotrópico, pois a direção do campo elétrico pode ser diferenciada de outras direções por meio de uma medição. Contudo, o universo também apresenta indícios

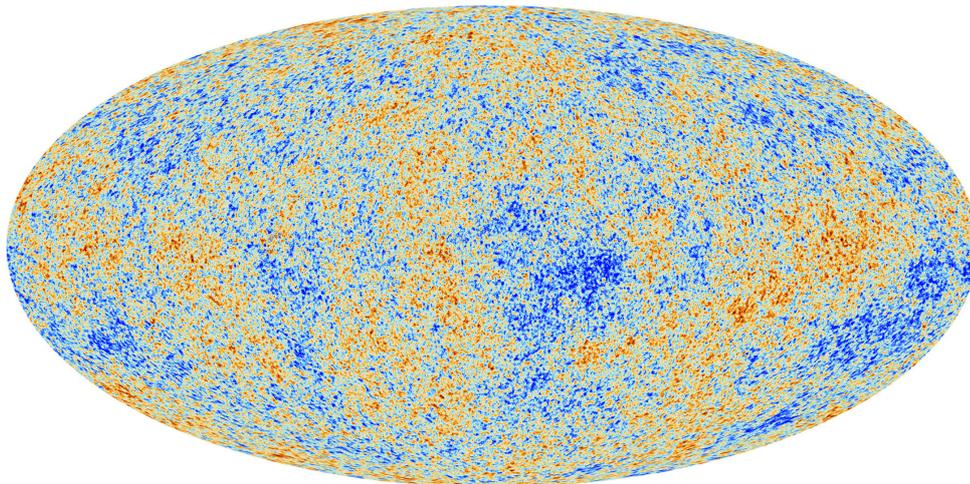


Figura 1 – Mapa da temperatura da Radiação Cósmica de Fundo em Microondas (CMBR). O valor médio da temperatura é aproximadamente 2,7 Kelvin. Os *pixels* em amarelo e azul representam uma variação da ordem de 10^{-5} Kelvin, o que mostra o alto grau de isotropia dessa radiação. Figura retirada de [ESA \(2013\)](#).

de isotropia em largas escalas. Por exemplo, a radiação cósmica de fundo - uma das principais informações do universo primordial - já foi estudada em diversas pesquisas, como em [Bennett et al. \(2013\)](#) (com os dados da sonda WMAP) e em [Aghanim et al. \(2020\)](#) (utilizando a sonda espacial Planck). Essa radiação apresenta uma grande isotropia como pode ser visto na figura 1.

Pela Relatividade Geral (equação 2.6), sabemos que a composição de matéria e energia do universo irá ditar o formato de sua métrica. Portanto, baseado no Princípio Cosmológico, ou seja, que a parte espacial do universo é homogênea e isotrópica em largas escalas, devemos também ter uma métrica homogênea e isotrópica espacialmente para as grandes escalas do universo. É importante notar a diferença nas definições desses dois conceitos para a composição do universo e para sua métrica. Quando é dito que a distribuição de matéria e energia é homogênea e isotrópica, nos referimos a uma média estatística com um certo nível de precisão. Para a métrica espacial do universo, esses conceitos estarão conectados com as isometrias possíveis nesse espaço, como veremos a seguir.

A homogeneidade na métrica do espaço-tempo pode ser dita formalmente como: para um certo instante de tempo t , existirá uma hipersuperfície de 3 dimensões espaciais em que, dado dois pontos quaisquer nessa hipersuperfície, existirá uma isometria que conecta um ponto ao outro. Ou seja, existirá uma transformação que vincula dois pontos do espaço de forma que não modifica a métrica; portanto, a métrica será invariante por translações ([Wald, 2010](#); [D’Inverno](#); [Vickers, 2022](#)).

Com relação à isotropia da métrica do espaço-tempo, devemos considerar que nessa mesma hipersuperfície espacial, dado um ponto p , haverá dois vetores \vec{u} e \vec{v} tangentes à

hipersuperfície de forma que será possível aplicar uma isometria que mantenha o ponto p fixo, mas que rotacione o vetor \vec{u} no \vec{v} . Dessa forma, não haverá uma direção especial para a métrica e ela será invariante por rotações (Wald, 2010).

Considerando a métrica do espaço-tempo como homogênea e isotrópica espacialmente, então ela também será maximalmente simétrica espacialmente. Isso significa que a métrica possuirá o mesmo número de simetrias que um espaço euclidiano de mesma dimensão; nesse caso, R^3 (Carroll, 2019). Um espaço maximalmente simétrico curvo deverá ter uma curvatura constante em todos os pontos do espaço, devido a sua simetria.

Com a possibilidade de se curvar o espaço, ele poderia possuir uma curvatura positiva, ou até mesmo negativa. A métrica, então, precisou ser atualizada para incluir um termo com a curvatura do universo. O primeiro a desenvolver esse cálculo foi Friedmann², seguido por Lemaître (Piattella, 2018).

Nessa mesma época, o astrônomo Edwin Hubble estudava a distância de galáxias quando descobriu que galáxias mais distantes apresentavam um *redshift* maior³ (Hubble, 1929). Isso indica que o universo está em expansão e, portanto, as distâncias não são fixas como era assumido na métrica de Minkowski (Ryden, 2016).

Posteriormente, Howard Robertson e Arthur Walker produziram uma métrica para o universo curvo, tomando como base o Princípio Cosmológico, e adicionando um “fator de escala” multiplicativo à parte espacial que representava a possibilidade de expansão ou contração do universo. Essa métrica é conhecida atualmente como métrica FLRW⁴ (Piattella, 2018; Ryden, 2016).

A métrica é escrita de forma compacta utilizando coordenadas polares:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a(t)^2 \left\{ \frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2(\theta)d\phi^2) \right\}, \quad (2.7)$$

ou na forma matricial,

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a(t)^2}{1-Kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a(t)^2 r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a(t)^2 r^2 \text{sen}^2(\theta) \end{pmatrix}. \quad (2.8)$$

O termo K , que tem dimensão de inverso do comprimento ao quadrado $[L]^{-2}$, é o termo relativo à curvatura do universo. Ele pode assumir qualquer tipo de valor real, mas com uma simples transformação da coordenada radial ($\tilde{r} = \sqrt{|K|}r$) é possível normalizar essa constante (Schutz, 2009). Dessa forma, consideraremos que K pode assumir três

² *On the curvature of Space, 1922.*

³ O *redshift* equivale ao desvio para o vermelho na luz observada, ou seja, a fonte de luz se afasta do observador. Para mais detalhes, veja a Sec.2.5.

⁴ Em homenagem aos quatro cientistas: Friedmann, Lemaître, Robertson e Walker.

valores: -1, 0 ou 1. Um universo com curvatura negativa é chamado de um universo hiperbólico; se a curvatura for zero é o caso de um universo plano, e se for positiva o universo é chamado de esférico. Outra forma de escrever esse termo, que utilizaremos adiante, é $K = \kappa/R_0^2$. Assim, o parâmetro κ é adimensional e a constante R_0 que o acompanha é o raio de curvatura.

Uma configuração que é muito comum da métrica FLRW é pela definição de uma nova coordenada radial χ :

$$d\chi^2 = \frac{dr^2}{1 - \frac{\kappa r^2}{R_0^2}}. \quad (2.9)$$

Aplicando a raiz quadrada e integrando a equação 2.9, encontramos: (Piattella, 2018)

$$\chi = \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{\kappa r^2}{R_0^2}}} = \begin{cases} R_0 \operatorname{arcsinh}(\frac{r}{R_0}), & \text{se } \kappa = -1 \\ r, & \text{se } \kappa = 0 \\ R_0 \operatorname{arcsin}(\frac{r}{R_0}), & \text{se } \kappa = 1 \end{cases}, \quad (2.10)$$

Dessa forma, a métrica FLRW será reescrita como:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a(t)^2 \{d\chi^2 + S_\kappa(\chi)^2 (d\theta^2 + \sin^2(\theta) d\phi^2)\}. \quad (2.11)$$

O termo que carrega a informação sobre a curvatura do universo (S_κ) multiplica somente a parte angular da equação (Ryden, 2016). S_κ pode assumir basicamente três valores:

$$S_\kappa(\chi) = \begin{cases} R_0 \sinh(\frac{\chi}{R_0}), & \text{se } \kappa = -1 \\ \chi, & \text{se } \kappa = 0 \\ R_0 \sin(\frac{\chi}{R_0}), & \text{se } \kappa = 1 \end{cases}, \quad (2.12)$$

que são respectivamente um universo curvado negativamente, um universo plano e um universo curvado positivamente. Na figura 2, temos uma visualização de como a curvatura afetaria a geometria do espaço-tempo.

As coordenadas espaciais utilizadas na equação 2.11 são coordenadas comóveis, ou seja que acompanham a expansão do universo, se mantendo constantes. Isso equivale a dizer que a “régua” do universo cresce junto com ele, de forma que a medida da distância entre dois objetos continua a mesma em um tempo anterior ou posterior. O fator de escala é essencial para transformar a distância comóvel na “distância própria”, que representa a real distância de um objeto em um dado tempo (Ryden, 2016; Dodelson, 2003).

A distância própria é calculada pela fórmula:

$$D_p(t) = a(t)\chi, \quad (2.13)$$

onde χ é a distância comóvel e $a(t)$ é o fator de escala. Na literatura, é muito comum autores utilizarem a normalização do fator de escala para o instante atual do universo

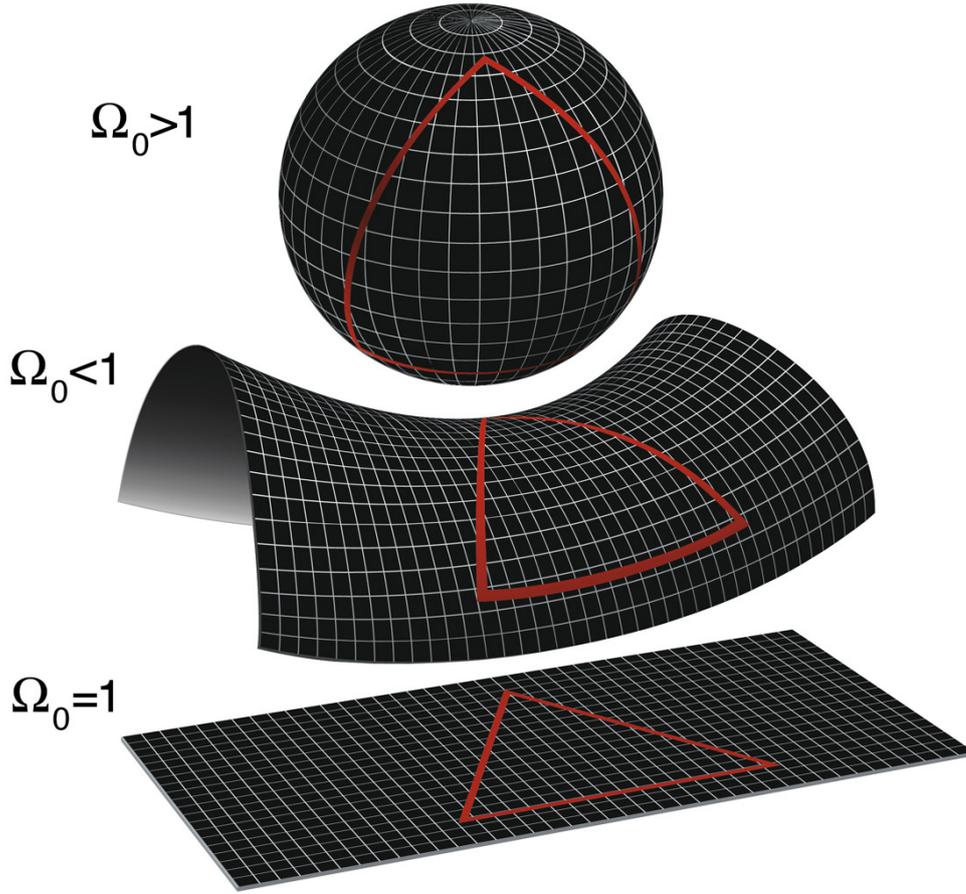


Figura 2 – Geometria do universo para diferentes valores de curvatura. O valor de $\Omega_0 > 1$ significa um universo com curvatura positiva $\kappa = 1$; $\Omega_0 < 1$ equivale à $\kappa = -1$ e $\Omega_0 = 1$ equivale a $\kappa = 0$. Figura retirada de [WMAP \(2001\)](#).

$a(t_0) = 1$, de forma que para $t \rightarrow 0$, $a(t) \rightarrow 0$. Contudo, isso não é necessário nas equações e um resultado mais geral pode ser obtido ao manter a constante $a(t_0)$.

Derivando a equação 2.13 com relação ao tempo, encontra-se a velocidade que um determinado ponto do universo se afasta do observador devido à expansão do universo; ela é conhecida como “velocidade de recessão”. Essa velocidade irá depender da atual distância por meio da equação :

$$V_r(t) = \dot{D}_p(t) = \dot{a}(t)\chi, \quad (2.14)$$

igual o que foi observado por Hubble ([Ryden, 2016](#)). Substituindo χ da equação 2.13 na última, obtemos

$$V_r(t) = H(t)D_p(t), \quad (2.15)$$

onde a função

$$H(t) \equiv \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \quad (2.16)$$

é conhecida como a função de Hubble, que mede a velocidade de variação do fator de escala ([Piattella, 2018](#)). O valor de $H(t_0)$ é conhecido como constante de Hubble e o seu

valor é (Brout et al., 2022):

$$H_0 = 73,4 \pm 1,1 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}. \quad (2.17)$$

2.4 Equação de Friedmann

Para aplicar uma métrica homogênea e isotrópica - que também permite expansão e contração do espaço - na equação de Einstein (2.6), primeiro é necessário calcular os símbolos de Christoffel. Esses símbolos são calculados pela seguinte equação: (Schutz, 2009)

$$\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} = \frac{g^{\sigma\alpha}}{2} \left(\frac{\partial g_{\gamma\sigma}}{\partial x^{\beta}} + \frac{\partial g_{\sigma\beta}}{\partial x^{\gamma}} - \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^{\sigma}} \right), \quad (2.18)$$

com α, β, γ e σ podendo variar de 0 a 3, de forma que:

$$(x^0, x^1, x^2, x^3) \equiv (t, r, \theta, \phi). \quad (2.19)$$

Substituindo na equação acima a métrica FLRW (equação 2.8), podemos encontrar todos os 64 símbolos. Contudo, somente 19 deles serão não nulos:

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^0 &= \frac{1}{c^2} \left(\frac{a\dot{a}}{1-Kr^2} \right); & \Gamma_{22}^0 &= \frac{a\dot{a}r^2}{c^2}; & \Gamma_{33}^0 &= \frac{a\dot{a}r^2 \text{sen}^2(\theta)}{c^2}; \\ \Gamma_{01}^1 &= \Gamma_{10}^1 = \Gamma_{02}^2 = \frac{\dot{a}}{a}; & \Gamma_{20}^2 &= \Gamma_{03}^3 = \Gamma_{30}^3 = \frac{\dot{a}}{a}; & \Gamma_{11}^1 &= \frac{Kr}{1-Kr^2}; \\ \Gamma_{22}^1 &= Kr^3 - r; & \Gamma_{33}^1 &= (Kr^3 - r)\text{sen}^2(\theta); & \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{r}; \\ \Gamma_{13}^3 &= \Gamma_{31}^3 = \frac{1}{r}; & \Gamma_{33}^2 &= -\text{sen}(\theta)\cos(\theta); & \Gamma_{23}^3 &= \Gamma_{32}^3 = \cot(\theta); \end{aligned}$$

Os símbolos de Christoffel são utilizados para encontrar o tensor de Ricci, por meio da seguinte fórmula:

$$R_{\alpha\beta} = \frac{\partial \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial \Gamma_{\alpha\mu}^{\beta}}{\partial x^{\beta}} + \Gamma_{\rho\mu}^{\mu} \Gamma_{\alpha\beta}^{\rho} - \Gamma_{\rho\beta}^{\mu} \Gamma_{\alpha\mu}^{\rho}. \quad (2.20)$$

Contudo, os únicos termos não nulos são os da diagonal principal:

$$\begin{aligned} R_{00} &= -3\frac{\ddot{a}}{a}; & R_{11} &= \frac{a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2Kc^2}{c^2(1-Kr^2)}; \\ R_{22} &= r^2c^{-2}(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2Kc^2); & R_{33} &= r^2\text{sen}^2(\theta)c^{-2}(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2Kc^2); \end{aligned}$$

Por fim, o escalar de Ricci é definido como a contração do tensor de Ricci com a métrica inversa. Para a métrica FLRW, será: (Mueller; Grave, 2014)

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = \frac{6}{c^2 a^2} (a\ddot{a} + \dot{a}^2 + Kc^2) \quad (2.21)$$

Agora, retornando para o termo a direita da equação 2.6, a distribuição de energia e matéria pelo universo deve ser estatisticamente homogênea em largas escalas, o que é

sustentado pelas observações e pelos motivos que nos levaram a construir uma métrica homogênea e isotrópica. Além disso, por se tratar de regiões grandes do universo, o importante será as propriedades médias dos constituintes. Segundo [D’Inverno e Vickers \(2022\)](#), o postulado de Weyl é importante para o modelo padrão do universo, pois ele indica que cada partícula do substrato possui sua própria geodésica⁵, que não intercepta a de outras partículas, e portanto cada ponto do trajeto estará relacionado a uma velocidade específica. Dessa forma, podemos considerar essas componentes energéticas como um fluido perfeito, que seguem a equação:

$$T_{\mu\nu} = (\varepsilon + P)U_\mu U_\nu + P g_{\mu\nu}, \quad (2.22)$$

onde ε é densidade de energia, P é a pressão e U é a quadrivelocidade:

$$\vec{U} = (c, 0, 0, 0). \quad (2.23)$$

Dessa forma, substituindo a métrica da equação 2.22 pela métrica de FLRW, o tensor energia-momento ($T_{\mu\nu}$) será diagonal com as seguintes componentes:

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} c^2\varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a(t)^2}{1-Kr^2}P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a(t)^2r^2P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a(t)^2r^2\text{sen}^2(\theta)P \end{pmatrix} \quad (2.24)$$

Com todos os termos necessários calculados, podemos substituí-los na equação de Einstein 2.6 e obter as equações que relacionam o fator de escala e suas derivadas com as componentes energéticas do universo. Para $\mu = \nu = i$, $i = 1, 2, 3$; teremos:

$$R_{ii} - \frac{Rg_{ii}}{2} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{ii} \quad \rightarrow \quad R_{ii} - \frac{3}{c^2a^2}(a\ddot{a} + \dot{a}^2 + Kc^2)g_{ii} = \frac{8\pi G}{3c^4}Pg_{ii} \quad (2.25)$$

Substituindo os termos restantes e reorganizando, obtemos a equação de aceleração:

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{Kc^2}{a^2} = -\frac{8\pi G}{c^2}P. \quad (2.26)$$

Calculando agora a equação de Einstein para $\mu = \nu = 0$:

$$R_{00} - \frac{Rg_{00}}{2} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{00} \quad \rightarrow \quad -3\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{3}{a^2}(a\ddot{a} + \dot{a}^2 + Kc^2) = \frac{8\pi G}{3c^2}\varepsilon \quad (2.27)$$

Rearranjando os termos, obtemos a Equação de Friedmann: ([Ryden, 2016](#))

$$\left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}\right)^2 = H^2(t) = \frac{8\pi G}{3c^2} \sum_i^n \varepsilon_i(t) - \frac{\kappa c^2}{R_0^2 a^2(t)} \quad (2.28)$$

⁵ A geodésica é o caminho que uma partícula livre percorre quando não está sobre ação de forças externas.

O termo ε foi substituído pela soma das densidades de cada componente energética do universo, ou seja, fótons, matéria bariônica, matéria escura, energia escura, etc (Lima, 2023; Dodelson, 2003). O termo K foi substituído pelo parâmetro adimensional κ acompanhado do raio de curvatura.

Dependendo da quantidade de cada uma dessas densidades energéticas, o universo pode possuir diferentes valores de curvatura κ . Aplicando na equação 2.28 o caso de um universo plano ($\kappa = 0$), ela ficará na forma

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \sum_i^n \varepsilon_i(t), \quad (2.29)$$

o termo da curvatura se tornará zero e sobrarão a parte da energia e a função de Hubble. Isolando a densidade de energia, pode-se definir a densidade crítica de energia (Ryden, 2016; Carroll, 2019; Lima, 2023):

$$\varepsilon_c(t) = \frac{3c^2 H^2}{8\pi G}. \quad (2.30)$$

A densidade crítica é importante pois é o valor de densidade para o qual o universo é plano. Com ela, é possível definir os parâmetros de densidade

$$\Omega_i(t) \equiv \frac{\varepsilon_i(t)}{\varepsilon_{c,0}}, \quad (2.31)$$

os quais são valores adimensionais que representam a quantidade percentual de uma densidade energética ε_i com relação à densidade crítica no momento atual $\varepsilon_{c,0}$ (Carroll, 2019; Ryden, 2016). Por exemplo, se a matéria escura tem uma densidade igual à metade da densidade crítica, seu parâmetro de densidade será $\Omega_{DM} = 0,5$.

Dividindo a equação de Friedmann (2.28) pela função de Hubble ao quadrado:

$$1 = \frac{8\pi G}{3c^2 H^2(t)} \sum_i^n \varepsilon_i(t) - \frac{\kappa c^2}{R_0^2 a^2(t) H^2(t)}, \quad (2.32)$$

com isso, é possível reescrever a equação em termos dos parâmetros de densidade:

$$1 = \sum_i^n \Omega_i - \frac{\kappa c^2}{R_0^2 a^2(t) H^2}. \quad (2.33)$$

Definindo o termo a direita como um parâmetro de curvatura $\Omega_\kappa(t)$, encontra-se uma equação mais simplificada (Carroll, 2019; Lima, 2023)

$$\sum_i^n \Omega_i + \Omega_\kappa = 1. \quad (2.34)$$

Uma parte importante de ser analisada é como os parâmetros de densidade evoluem com o tempo. Cada tipo de energia terá uma forma funcional diferente devido à expansão

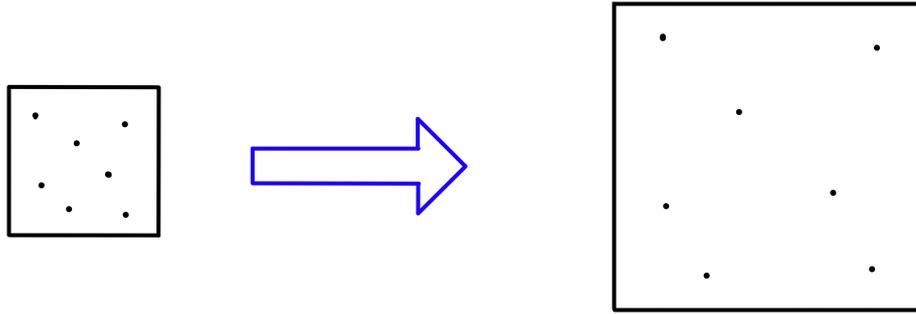


Figura 3 – Caixa contendo diversas partículas. A densidade irá diminuir conforme as dimensões expandem.

do universo. A variação da densidade de matéria⁶ é simples de deduzir. Dado uma caixa cúbica com diversas partículas dentro, é possível calcular a densidade no interior como o número de partículas dividido pelo volume da caixa N/L^3 . Caso as dimensões da caixa estejam em expansão, podemos estabelecer o valor L como o comprimento comóvel e encontrar a fórmula do comprimento em função do tempo. Ela será dada pela razão dos fatores de escala, no tempo atual ($t = t_0$) e em um tempo qualquer t , multiplicada pelo comprimento comóvel:

$$L(t) = \frac{a(t_0)}{a(t)} L. \quad (2.35)$$

Como estamos trabalhando com o princípios de isotropia do universo, a expansão deverá ser a mesma em todas as direções. A energia contida na matéria só depende de sua massa, portanto, a densidade energética de matéria evolui com o inverso do fator de escala elevado ao cubo:

$$\Omega_m(t) = \Omega_{m,0} \left[\frac{a(t_0)}{a(t)} \right]^3. \quad (2.36)$$

Na figura 3, essa evolução da densidade de matéria está representada em duas dimensões.

Para fótons e partículas relativísticas, o raciocínio começa da mesma forma que o anterior; se há fótons em uma caixa e ela aumenta de tamanho por um fator $a(t_0)/a(t)$ em todas direções, a nova densidade será inversamente proporcional ao cubo do fato de escala. Contudo, partículas relativísticas e radiação em geral transportam uma energia que possui dependência na frequência da sua função de onda:

$$E = hf. \quad (2.37)$$

Uma onda, ao viajar por um espaço em expansão uniforme, terá seu comprimento de onda expandido pelo mesmo fator $a(t_0)/a(t)$. Porém a frequência de uma onda é inversamente proporcional ao comprimento de onda. Portanto, quando o comprimento expande por um certo fator, a frequência diminuirá pelo mesmo fator e, por conseguinte, a energia também.

⁶ O que inclui tanto matéria bariônica quanto matéria escura.

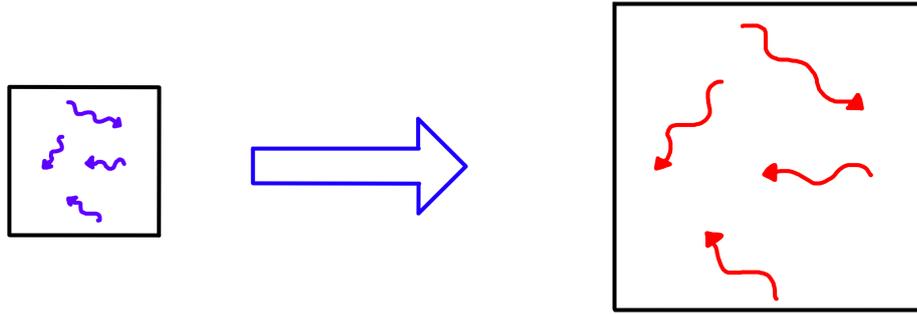


Figura 4 – Caixa contendo diversos fótons. A densidade deles irá diminuir, assim como a energia que eles carregam, quando houver expansão.

Assim, a densidade energética de radiação,

$$\Omega_r(t) = \frac{Nhf(t)}{L(t)^3}, \quad (2.38)$$

evoluirá com o tempo da seguinte forma:

$$\Omega_r(t) = \left[\frac{1}{L} \frac{a(t_0)}{a(t)} \right]^3 Nhf \frac{a(t_0)}{a(t)} = \Omega_{r,0} \left[\frac{a(t_0)}{a(t)} \right]^4, \quad (2.39)$$

sendo que $a(t)^{-3}$ é devido a expansão do espaço ao redor e $a(t)^{-1}$ devido à expansão do comprimento de onda (Ryden, 2016; Lima, 2023). Na figura 4, a ilustração mostra a densidade de fótons diminuindo e sua frequência diminuindo do violeta (mais energético) para o vermelho (menos energético).

Por fim, devemos considerar a densidade de energia escura. Pelo fato de diversas evidências observacionais - como dados de supernovas, CMB, entre outros - apontarem para uma expansão acelerada do universo, é adicionada uma nova componente energética do universo, responsável pela aceleração. Essa componente foi apelidada de “energia escura” (do inglês, *Dark Energy*), pois nenhuma observação direta dela foi obtida até hoje e não se sabe do que é composta. A evolução dessa componente irá depender da sua equação de estado w , pela seguinte fórmula:

$$\Omega_{DE}(t) = \Omega_{DE,0}(1+z)^{3(1+w)}. \quad (2.40)$$

Os modelos mais comuns que consideram a energia escura propõem que ela se comporta como uma “constante cosmológica” Λ (ou seja, $w = -1$), o que significa que ela seria uma componente energética do universo cuja densidade de energia não variaria com o tempo (Ryden, 2016). Em um universo em expansão, isso significa que a energia aumenta na mesma taxa que o espaço expande e, portanto, sua densidade permanece constante. Logo, a fórmula para seu parâmetro de densidade será:

$$\Omega_{DE}(t) = \Omega_{\Lambda,0}. \quad (2.41)$$

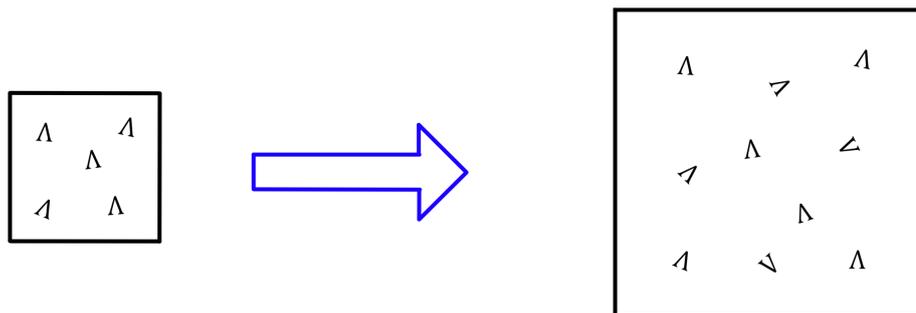


Figura 5 – Caixa contendo componentes da energia escura. Conforme a caixa se expande, novas componentes surgem, o que mantém sua densidade constante com o tempo.

Na figura 5, novas componentes da energia escura aparecem quando o espaço se expande. No fim, a densidade final será a mesma que a inicial, portanto a densidade energética da energia escura é uma constante.

Retornando mais uma vez para a equação de Friedmann (2.28), é possível reformular a equação utilizando as equações de evolução dos parâmetros de densidade. Dividindo a equação 2.28 pelo quadrado da constante de Hubble, obtêm-se:

$$\frac{H^2(t)}{H_0^2} = \frac{1}{\varepsilon_{c,0}} \sum_i^n \varepsilon_i(t) - \frac{\kappa c^2}{R_0^2 H_0^2 a^2(t)}. \quad (2.42)$$

Utilizando a definição de parâmetro de densidade (2.31) e estabelecendo o parâmetro de curvatura no tempo $t = t_0$ como $\Omega_{\kappa,0} = -\kappa c^2 / R_0^2 H_0^2 a(t_0)^2$, a equação se torna

$$\frac{H^2(t)}{H_0^2} = \Omega_m(t) + \Omega_r(t) + \Omega_{DE}(t) + \Omega_{\kappa,0} \left(\frac{a(t_0)}{a(t)} \right)^2. \quad (2.43)$$

Finalmente, substituindo as equações para a evolução temporal de cada parâmetro de densidade (2.36 - 2.41), chega-se a

$$\frac{H^2(t)}{H_0^2} = \Omega_{m,0} \left(\frac{a(t_0)}{a(t)} \right)^3 + \Omega_{r,0} \left(\frac{a(t_0)}{a(t)} \right)^4 + \Omega_{DE,0} \left(\frac{a(t_0)}{a(t)} \right)^{3(1+w)} + \Omega_{\kappa,0} \left(\frac{a(t_0)}{a(t)} \right)^2, \quad (2.44)$$

que é a equação de Friedmann para o modelo Λ CDM⁷ (Ryden, 2016; Lima, 2023; Piattella, 2018).

2.5 Distância Própria

Na equação 2.13, foi mostrada a relação da distância própria com a distância comóvel, que evolui junto ao fator de escala. Outra forma de calcular-la pode ser feita

⁷ Λ CDM é um modelo para o universo que considera a existência de uma constante cosmológica Λ e que a matéria escura é do tipo “fria”. Uma explicação para a matéria escura “fria” e “quente” pode ser encontrada em (Ryden, 2006).

ao imaginar o caminho que o fóton de uma estrela percorre até chegar na Terra. Com isso, deduziremos que o caminho do fóton irá depender de como é distribuída a densidade energética do universo, modelada na equação 2.44.

Fótons percorrem o que é chamado de geodésica nula, na qual a separação angular ($d\theta^2$ e $d\phi^2$) é zero e a separação espaço-temporal (ds^2) também é zero (Ryden, 2016; Carroll, 2019). Substituindo essas condições na equação da métrica (2.11), a geodésica nula fica:

$$a(t)d\chi = cdt, \quad (2.45)$$

onde já foi removido o quadrado de todos os termos. Ao passar o fator de escala para o lado direito e integrar os dois lados da equação, obtêm-se:

$$\chi = \int_{t_e}^{t_0} \frac{cdt}{a(t)}, \quad (2.46)$$

com t_e sendo o momento em que o fóton foi emitido e t_0 quando ele foi observado na Terra. Com a fórmula para encontrar a distância comóvel, é possível obter a distância própria para a estrela no momento de observação por meio da equação 2.13. Ao realizar a substituição, no tempo $t = t_0$, encontra-se:

$$D_p(t_0) = a(t_0)\chi = a(t_0)c \int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)}. \quad (2.47)$$

Ao invés de integrar no tempo, que é um processo muito mais complicado pela complexidade da forma funcional do fator de escala e por não sabermos precisar os valores de t_e e t_0 , é possível realizar uma troca de variável de integração. A nova variável nesse caso se tornaria próprio fator de escala, já que

$$\dot{a}(t) = \frac{da}{dt} \quad \implies \quad dt = \frac{da}{\dot{a}(t)}. \quad (2.48)$$

Os limites de integração se transformarão para o fator de escala quando o fóton foi emitido ($a(t_e)$) e quando foi observado ($a(t_0)$). Dessa forma, a equação se torna:

$$D_p(t_0) = a(t_0)c \int_{a(t_e)}^{a(t_0)} \frac{da}{\dot{a}(t)a(t)} = a(t_0)c \int_{a(t_e)}^{a(t_0)} \frac{da}{H(a)a^2}, \quad (2.49)$$

onde também foi utilizada a equação 2.16, que define a função de Hubble.

Outra troca de variável que pode ser realizada é do fator de escala para *redshift*. Essa transformação é muito útil para aplicação desta teoria, pois o *redshift* é uma quantidade observável, ou seja, uma informação que é obtida diretamente a partir da luz que chega na Terra. O *redshift*, que traduz literalmente para “desvio para o vermelho”, aparece como a variação que o comprimento de luz teve devido à expansão do universo. Também é possível que parte do efeito do *redshift* seja devido à uma velocidade peculiar do objeto com relação à Terra; porém, ele será considerado como puramente consequência da

expansão. O seu valor é definido pela fórmula:

$$1 + z_e \equiv \frac{\lambda_{ob}}{\lambda_{em}} \quad (2.50)$$

onde λ_{ob} e λ_{em} são o comprimentos de onda que foi observado na Terra e o comprimento de onda que foi emitido pelo objeto, respectivamente (Dodelson, 2003; Ryden, 2016). Na equação, foi adicionado um subscrito no *redshift* para explicitar a dependência que ele possui com o momento em que o fóton foi emitido.

Essa variação no comprimento de onda da luz, porém, pode ser descrito em termos da variação do fator de escala. Dessa forma, o comprimento de onda observado será:

$$\lambda_{ob} = \lambda_{em} \frac{a(t_0)}{a(t_e)} \quad (2.51)$$

Substituindo o comprimento de onda observado na equação 2.50, encontra-se:

$$\frac{\lambda_{ob}}{\lambda_{em}} = \frac{\lambda_{em} a(t_0)}{\lambda_{em} a(t_e)} = \frac{a(t_0)}{a(t_e)} = 1 + z_e, \quad (2.52)$$

que relaciona o *redshift* com o fator de escala, permitindo a troca de variável. Até agora estávamos utilizando um tempo específico da emissão do fóton, que vai afetar o valor do *redshift*. Porém, se generalizarmos essa emissão para um tempo qualquer no passado ($a(t_e) \rightarrow a(t)$), será possível eliminar o subscrito de z , deixando-o como uma função do tempo:

$$\frac{a(t_0)}{a(t)} = 1 + z. \quad (2.53)$$

Diferenciando os dois lados dessa relação, obtemos:

$$\frac{-a(t_0)da}{a^2(t)} = dz. \quad (2.54)$$

Com isso, podemos fazer a trocar da variável de integração na equação 2.49, com uma transformação dos limites para o intervalo feita de z até 0. A fórmula da distância ficará da seguinte forma:

$$D_p(z) = \frac{-a(t_0)c}{a(t_0)} \int_z^0 \frac{a^2 dz}{H(z)a^2} = c \int_0^z \frac{dz}{H(z)}. \quad (2.55)$$

Por fim, uma última alteração na equação da distância própria pode ser feita ao substituir a função de Hubble no denominador pela equação de Friedmann (2.44). Dessa forma, a distância própria dependerá da constituição energética do universo e como ele evoluiu desde que o fóton foi emitido.

Primeiro será necessário alterar o fator de escala, presente na equação 2.44, para *redshift*. Porém, essa relação já foi construída na equação 2.53; portanto, a equação de Friedmann em termos do *redshift* torna-se:

$$\frac{H^2(z)}{H_0^2} = (1+z)^3 \Omega_{m,0} + (1+z)^4 \Omega_{r,0} + \Omega_{DE,0} (1+z)^{3(1+w)} + (1+z)^2 \Omega_{\kappa,0}. \quad (2.56)$$

Dessa forma, a equação da distância própria para o modelo Λ CDM, que considera $w = -1$ para a densidade de energia escura, é:

$$D_p(z) = \frac{c}{H_0} \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1+z)^3 \Omega_{m,0} + (1+z)^4 \Omega_{r,0} + \Omega_{\Lambda,0} + (1+z)^2 \Omega_{\kappa,0}}}. \quad (2.57)$$

2.6 Vela Padrão

O desenvolvimento da distância própria que levou até a equação 2.57 parte das teorias de modelagem do universo. O que conectará ela com as observações astronômicas e permitirá o ajuste dos parâmetros de densidade energéticas é o conceito de vela padrão, que abrange diversos objetos, incluindo as supernovas do tipo Ia.

Uma vela padrão é um objeto astronômico ideal que possui uma luminosidade bem conhecida e constante em todo o universo. Um objeto que possui esse padrão deve produzir a mesma luminosidade independente da distância em que se encontra, e portanto ele também deve ser invariante no tempo. Caso ocorra uma considerável evolução temporal do seu brilho, o objeto em questão não pode ser padronizado (Wright; Li, 2018).

Essa classe de objetos são importantes no estudo da astronomia e cosmologia, pois sabendo o valor da luminosidade da vela padrão é possível calcular a distância que ela se encontra da Terra pelo fluxo (Ryden, 2016). Por meio das diferenças observadas entre o fluxo recebido e o valor esperado, é possível obter informações sobre a métrica do universo e entender as partes que o compõem.

Existem alguns fenômenos e corpos celestes que se aproximam da definição de vela padrão e podem ser utilizados para realizar essas pesquisas. Porém, a luminosidade que esses objetos produzem não é conhecida a partir de primeiros princípios; a principal informação que temos deles é o fluxo recebido na Terra. Os objetos ditos padronizáveis necessitam de uma calibração prévia para poderem ser utilizados efetivamente como instrumentos de medição de distância.

Para realizar essa calibração, é necessário construir uma “escada de distâncias cósmicas”, sendo que os “degraus” dessa escada são diferentes métodos para calcular distância. Para objetos próximos da Terra, os métodos possuem uma grande precisão e são mais confiáveis, pois se baseiam em conceitos físicos e matemáticos mais gerais. Por exemplo, as distâncias para objetos dentro do sistema solar são medidas com sinal de radares, que viajam na velocidade da luz e refletem no alvo (Klesman, 2019; LABS, 2008).

Outro método muito importante que fornece diretamente o valor de distância é a paralaxe. A paralaxe é uma diferença percebida na posição aparente de algum objeto com relação a outros objetos de fundo, no geral decorrente do movimento do observador e a mudança de sua linha de visão. Essa diferença na posição é inversamente proporcional

a distância do alvo, portanto objetos mais distantes possuem uma menor paralaxe. Ao observar uma mesma estrela próxima com um intervalo de seis meses de diferença, ela apresentará um pequeno desvio angular. Como a distância entre as duas observações é conhecida⁸, é possível calcular a distância até a estrela com cálculos básicos de trigonometria.

Por meio da paralaxe, pode-se determinar a distância de uma grande parte dos corpos celestes da Via Láctea e, dessa forma, calibrar os próximos objetos na escada de distância cósmica: estrelas com brilho variável, como por exemplo as Cefeidas. Essas estrelas não possuem um valor específico de luminosidade, mas por meio da relação empírica entre o período do seu pulso e sua magnitude absoluta, elas podem ser trabalhadas como uma vela padronizável (Altavilla et al., 2004; Burns et al., 2018).

As supernovas do tipo Ia são eventos muito raros e já não ocorrem na Via Láctea a alguns séculos. Portanto, é necessário utilizar outros métodos para calibrar as supernovas indiretamente, como por exemplo as Cefeidas ou gigantes vermelhas⁹. As estrelas gigantes vermelhas são outro tipo de vela padronizável muito utilizada, pois suas estimativas para a constante de Hubble (H_0) estão próximas dos resultados obtidos com a radiação cósmica de fundo; um valor próximo de 69 km/s.MPc. Por outro lado, a calibração de supernovas do tipo Ia pelas Cefeidas produz uma estimativa para H_0 por volta de 73 km/s.MPc (Dhawan et al., 2022; Freedman, 2021). Essa diferença obtida pelo dois métodos é considerável e tornou-se um tema de extrema importância para a cosmologia, sendo chamado de “Tensão de Hubble”.

Para a calibração das supernovas do tipo Ia, é preciso coletar dados de diversas supernovas que ocorreram em galáxias próximas onde há outras velas padronizáveis. Com isso, utiliza-se o método de cálculo de distância do “degrau” anterior da escada para determinar um valor de magnitude para a supernova e utilizar essas explosões estelares para calcular distâncias ainda maiores. Por isso, é importante notar que as medidas obtidas com supernovas do tipo Ia dependem da correta calibração dos métodos anteriores.

Os dados das velas padronizáveis que são coletados na Terra são relativos ao fluxo luminoso (F), dado pela equação:

$$F = \frac{L}{4\pi d^2}, \quad (2.58)$$

onde L representa a luminosidade da vela padrão, que está sendo dividida pela área de uma esfera (de raio d) centrada no objeto, pois os fótons liberados pela vela padrão viajam em todas direções igualmente (Dodelson, 2003). Ao isolar o valor d na equação 2.58,

⁸ Será o diâmetro da órbita da Terra, ou seja, duas Unidades Astronômicas (1 UA é aproximadamente 150 milhões de quilômetros).

⁹ Tip of the Red Giant Branch (TRGB)

encontra-se a definição de uma quantidade conhecida como “distância luminosidade”,

$$D_L \equiv \sqrt{\frac{L}{4\pi F}}. \quad (2.59)$$

A distância luminosidade é um valor de distância calculada em termos da luminosidade de um objeto, contudo, é importante notar que a equação 2.59 só equivale à distância real entre a Terra e a vela padrão caso o universo seja estático e com espaço Euclidiano (Ryden, 2016). No entanto, como vimos na seção 2.2, o universo não necessariamente cumpre essas condições e - portanto - a distância real de um objeto astronômico será diferente de sua distância luminosidade.

2.7 Distância Luminosidade e módulo de distância no modelo Λ CDM

Diante do estudo da evolução do universo, é interessante analisar como a equação da distância luminosidade (2.59) altera-se diante do modelo Λ CDM e, também, como ela se relaciona com a distância própria.

A primeira diferença a ser notada é que, considerando um universo estático, o fóton liberado pela vela padrão viaja até seu destino sem perder energia. Contudo, isso não é verdade no universo em expansão, pois o comprimento de onda do fóton irá aumentar conforme ele viaja até a Terra, chegando no destino com uma energia menor (Piattella, 2018; Ryden, 2016). Como a energia transportada depende da frequência (equação 2.37), ela será proporcional ao inverso do comprimento de onda da luz. A equação do *redshift* (2.50) implica que a energia carregada pelo fóton, ao chegar na Terra, será menor por um fator $(1 + z)$.

Outra diferença a ser notada é que o intervalo de tempo entre dois fótons consecutivos será maior do que quando foram emitidos. O espaço entre eles irá dilatar durante todo o percurso e, no final, será maior por um fator de $(1 + z)$. Essa separação levemente maior entre fótons irá reduzir a taxa com que eles chegam na Terra, também diminuindo o fluxo por consequência.

O fluxo em um universo em expansão será menor por um fator de $(1 + z)^2$ do que o fluxo em um universo estático. Dividindo a fórmula do fluxo luminoso (equação 2.58) por esse termo, e substituindo d pela distância própria - que é a verdadeira distância até o objeto -, encontramos a fórmula para o fluxo no universo em expansão:

$$F = \frac{F'}{(1 + z)^2} = \frac{1}{(1 + z)^2} \frac{L}{4\pi D_p^2}. \quad (2.60)$$

Porém, comparando com a equação 2.58, podemos escrever a distância própria em termos da distância luminosidade, definida na equação 2.59. Reorganizando os termos, a equação fica:

$$(1 + z)^2 D_p^2 = \frac{L}{4\pi F} = D_L^2. \quad (2.61)$$

Com isso, encontra-se:

$$D_L = (1 + z)D_p, \quad (2.62)$$

que é a relação entre a distância luminosidade e a distância própria (Piattella, 2018; Ryden, 2016).

Outra importante quantidade relacionada à distância luminosidade é o “módulo de distância”, que é definido por meio das magnitudes (aparente e absoluta) de um objeto. A magnitude aparente (m) surgiu a centenas de anos, como uma forma de classificar os astros pelo brilho que possuíam a olho nu (Ryden, 2016). Com o avanço das observações, uma definição mais rigorosa foi montada com a seguinte fórmula matemática:

$$m = -\frac{5}{2} \log_{10} \left(\frac{F}{F_0} \right), \quad (2.63)$$

onde F é o fluxo luminoso observado e F_0 é um valor de referência, determinado como $2,53 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2$. O sinal negativo dá a estrelas mais brilhantes um valor menor de magnitude, e esse valor vai aumentando para brilhos cada vez mais fracos.

Já a magnitude absoluta (M) é definida como o valor que a estrela possuiria de magnitude aparente se ela estivesse em uma distância de, exatos, 10 parsecs¹⁰. Dessa forma, a equação da magnitude absoluta pode ser escrita como:

$$M = -\frac{5}{2} \log_{10} \left(\frac{F}{F_0} \left(\frac{D_L}{10pc} \right)^2 \right) \quad (2.64)$$

$$M = -\frac{5}{2} \log_{10} \left(\frac{L}{L_0} \right), \quad (2.65)$$

com $L_0 = 78,7 L_{\odot}$ sendo a luminosidade que um fluxo $F = F_0$ produz à uma distância de 10 pc.

A partir dessas magnitudes, surge a definição do módulo de distância como sendo a diferença entre o valor da magnitude aparente e da absoluta (Dodelson, 2003; Piattella, 2018). Esta quantia irá se relacionar com a distância luminosidade por meio da fórmula:

$$\mu \equiv m - M = 5 \log_{10} \left(\frac{D_L}{10pc} \right). \quad (2.66)$$

O módulo de distância é uma quantia importante, pois ele também pode ser obtido por dados observáveis. No caso de medições de uma supernova do tipo Ia, a partir da amplitude da curva de luz (x_0), do fator de padronização (x_1) e da cor (c) encontra-se a relação:

$$\mu = -2,5 \log_{10}(x_0) + \alpha x_1 - \beta c - M_0, \quad (2.67)$$

onde M_0 é o valor da magnitude de uma supernova com $x_1 = c = 0$. Os termos α e β são parâmetros de ajuste (Brout et al., 2022).

¹⁰ 1 parsec equivale à aproximadamente $3 \cdot 10^{16}$ metros (Ryden, 2016).

3 Cálculo numérico de distâncias cosmológicas

As equações para distância comóvel e módulo de distância, já desenvolvidas na seção 2, incluem diversos parâmetros com uma forma um pouco obscura para a compreensão. Verificar como essas distâncias dependem de alguns desses parâmetros, como por exemplo a constante de Hubble e a densidade de energia escura, pode facilitar o entendimento e também servirá como uma iniciação para a parte computacional que será necessária ao trabalhar com dados reais. Para estudar a dependência desses fatores, foi elaborado um programa no aplicativo *Jupyter Notebook* utilizando a linguagem de programação *Python*. O código desenvolvido para o produzir os gráficos está disponível em <<https://github.com/Arara09/TCC>>.

Um *Notebook* é uma forma de programação em blocos, onde pode se alternar uma parte do código com parágrafos de texto sem perder as informações programadas em blocos anteriores. Isso torna um programa extenso em algo mais inteligível e apresentável para outras pessoas. O Projeto Jupyter é um *software* aberto que permite a programação em *notebooks*, com suporte para diversas linguagens de programação (Kluyver et al., 2016).

Além disso, para auxiliar no cálculo com as equações de distância, utilizamos também da biblioteca *NumCosmo*. A *Numerical Cosmology Library* é uma biblioteca programada na linguagem C, mas que é capaz de ser utilizada em várias linguagens diferentes. Ela possui diversas funções importantes para a cosmologia implementadas, o que facilita o trabalho de construir gráficos com valores de distância (Dias Pinto Vitenti; Penna-Lima, 2014).

A biblioteca *NumCosmo* também possui diversas classes de objetos para diferentes modelos cosmológicos. O modelo utilizado neste programa é chamado de “HICosmo-DEXcdm”, pois ele considera um universo homogêneo e isotrópico em largas escalas (HI), com presença de energia escura (DE) que possui uma equação de estado constante (X)¹ e, por fim, é composto de matéria escura do tipo “fria” (cdm).

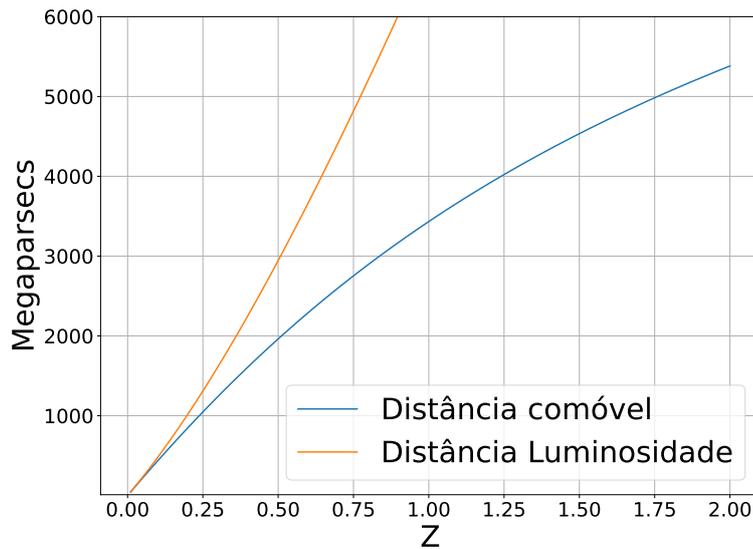
Ao iniciar esse modelo no programa, os principais parâmetros já possuem um valor equivalente ao do modelo de Benchmark² (Ryden, 2016). Esses valores estão apresentados na tabela 2, onde H_0 é a constante de Hubble; Ω_b , Ω_c e Ω_Λ são os parâmetro de densidade da matéria bariônica, matéria escura e energia escura, e w é o valor da equação de estado

¹ A equação de estado (w) está relacionada a como uma densidade de energia varia no tempo. Existem alguns modelos que consideram “ w ” da energia escura como uma função do *redshift*, mas consideraremos este valor como uma constante.

² O modelo mais aceito da cosmologia, cujas quantidades concordam com as observações realizadas.

Parâmetro	Valor
H_0	67.36 (km/s.Mpc)
Ω_b	0.0432
Ω_c	0.2568
Ω_Λ	0.7
w	-1

Tabela 2 – Valores iniciais da biblioteca NumCosmo.

Figura 6 – Comparação da distância comóvel com a distância luminosidade, em função do *redshift*.

da energia escura.

Para montar o gráfico, utilizamos valores arbitrários no entorno das medidas apresentados na tabela 2. Dessa forma, as curvas produzidas mostravam qualitativamente a dependência da distância comóvel e do módulo de distância com relação a esses parâmetros.

O primeiro gráfico interessante de ser analisado está presente na figura 6, onde temos a curva da distância luminosidade e da distância comóvel. Como explicado na seção 2.6, a distância luminosidade seria equivalente à distância em um universo estático. Porém, ela difere com um fator de $1 + z$ com relação à distância real no universo em expansão, o que pode ser visto claramente na figura 6. Enquanto, na realidade, o fluxo luminoso é menor devido à expansão do universo; no caso estático, um fluxo pequeno só seria explicado por um objeto muito mais longe.

Ainda a respeito da curva de distância comóvel, na figura 7 vemos que ela possui uma grande variação com o valor de H_0 . Para a figura 8, variou-se o parâmetro de densidade de energia escura. Para valores maiores de energia escura, a expansão acelerada

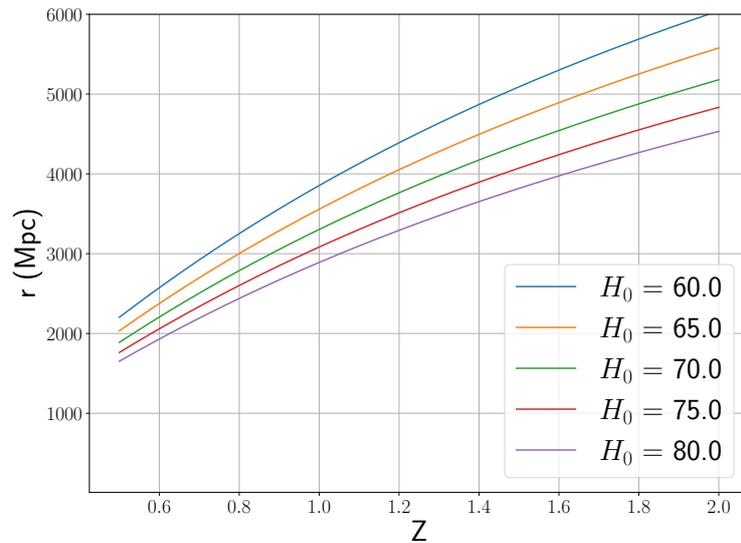


Figura 7 – Distância comóvel em função da constante de Hubble H_0 [km/(s Mpc)].

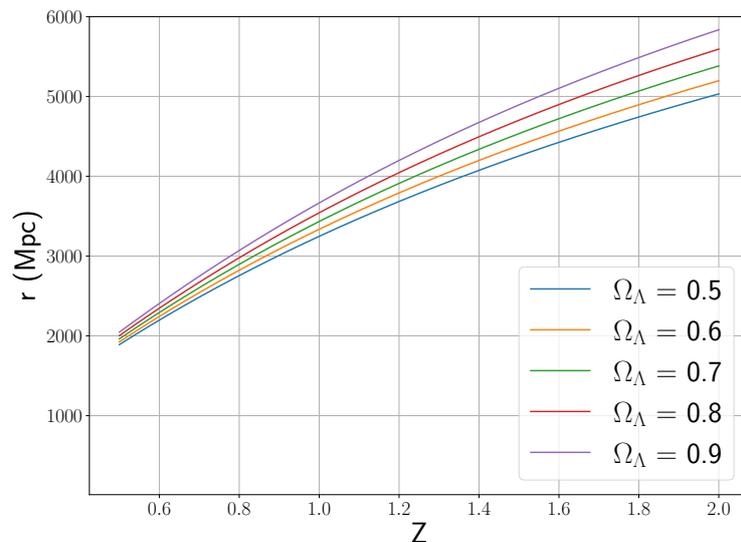


Figura 8 – Distância comóvel em função da matéria escura Ω_Λ .

do universo teria começado muito tempo antes; por consequência, a distância dos objetos seria maior do que é observado atualmente. Pelo raciocínio inverso, um valor menor de energia escura significaria que os objetos estariam mais próximos.

Para o módulo de distância, também foi gerado um gráfico em função da constante de Hubble, presente na figura 9. Contudo, a utilização de supernovas do tipo Ia para restringir o valor da constante de Hubble limita-se a um *redshift* $z < 0.01$ (Brout et al., 2022; Brownsberger et al., 2021). Também produzimos um gráfico em função do parâmetro de densidade de energia escura, na figura 10. O parâmetro w , assim como Ω_Λ ,

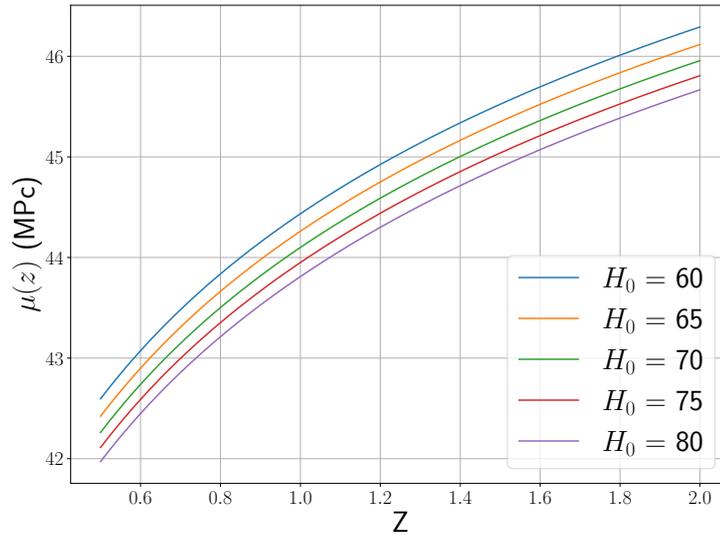


Figura 9 – Módulo de distância em função da constante de Hubble H_0 [km/(s Mpc)].

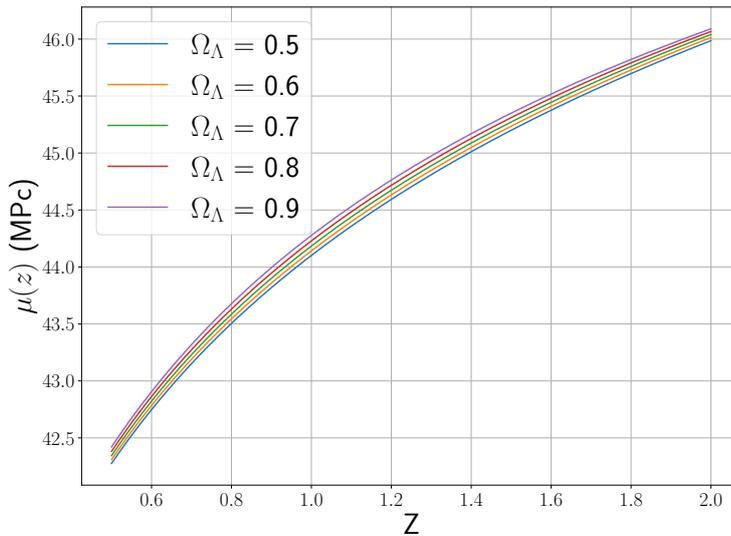


Figura 10 – Módulo de distância em função da matéria escura Ω_Λ .

são os principais ajustados pelos dados de supernova tipo Ia, o que também motiva a busca por mais supernovas com *redshift* $z > 1$ (Brout et al., 2022).

Por fim, a figura 11 mostra a evolução da distância comóvel para diferentes modelos de composição do universo. Podemos perceber que para valores menores de *redshift*, a relação com a distância comóvel é linear, como esperado devido às observações de Hubble (Hubble, 1929). Contudo, o único modelo que mantém a linearidade é um universo composto somente de energia escura, na forma de constante cosmológica.

Um universo composto por radiação rapidamente estabiliza para uma distância de

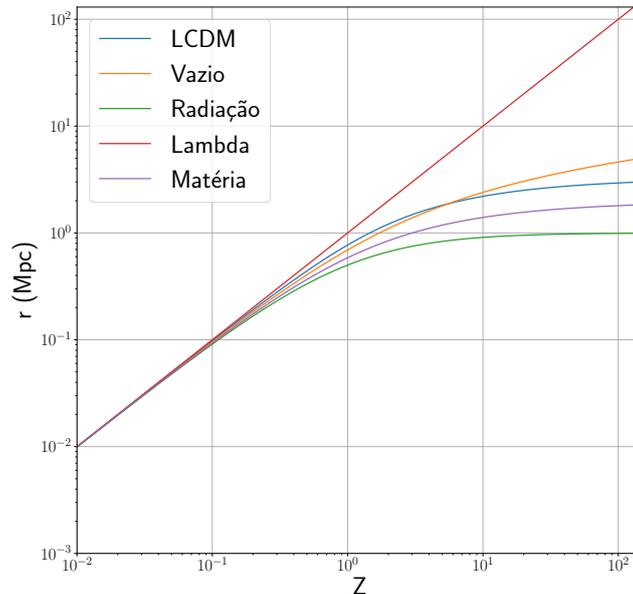


Figura 11 – Distância comóvel (em unidades de c/H_0) em função do *redshift* para cinco modelos de composição do universo. Em azul, está representado o modelo padrão da cosmologia (Λ CDM). Os outros modelos são compostos de somente uma densidade energética.

um comprimento de Hubble (c/H_0), enquanto o universo de matéria possui uma assíntota em $2c/H_0$ (Ryden, 2016). Para o universo vazio, o crescimento continua indefinidamente em uma relação logarítmica; contudo o comportamento do modelo padrão é mais complexo. Podemos relacionar a evolução com a densidade energética dominante em cada momento.

No momentos iniciais do universo, a densidade energética de radiação predominava, seguida depois pela de matéria; o que combina com o valor mais estável do modelo para valores altos de *redshift*. Contudo, mais recentemente (no tempo de vida do universo) houve a transição de matéria para energia escura, o que podemos relacionar com a aproximação mais rápida da curva azul com a curva vermelha. Portanto, esse gráfico ajuda a compreender como os dados de distância podem ser úteis para comprovar a existência de energia escura no universo.

4 Conceitos de Probabilidade e Estatística

Após uma coleta de dados de diversas supernovas do tipo Ia, queremos utilizar estas medidas para obter características da origem desta informação. Sendo que a origem não se limita só à supernova que produziu a radiação observada, mas também a todo o processo que impactou a informação até ela ser captada na Terra.

Desse modo, torna-se necessário uma análise estatística para que seja possível extrair informações do conjunto de dados coletados; informações estas que têm como base um modelo físico que é capaz de explicar os valores medidos no experimento.

Partindo de uma amostra, é possível calcular diversas estatísticas com relação a ela, como a média aritmética dos dados, variância e desvio padrão. Porém, o objetivo final da análise é determinar um valor para os estimadores da população. Cada população possui um conjunto de parâmetros (a_i), que definem sua forma funcional e, portanto, a probabilidade de um certo valor ser medido quando um experimento é realizado; os estimadores são funções dos elementos (x_i) da amostra coletada que buscam estimar o valor desses parâmetros (Riley; Hobson; Bence, 2006).

Como os elementos de uma coleta de dados possuem uma certa aleatoriedade, cada amostra será diferente uma da outra, logo o estimador calculado também apresentará uma certa variação, que segue sua distribuição amostral $P(\hat{a}|\mathbf{a})$: (Riley; Hobson; Bence, 2006)

$$P(\hat{a}|\mathbf{a})d\hat{a} = P(\mathbf{x}|\mathbf{a})d^N\mathbf{x}, \quad (4.1)$$

onde $P(\mathbf{x}|\mathbf{a})$ representa a população e os termos $d\hat{a}$ e $d^N\mathbf{x}$ são elementos de volume no espaço amostral. As variáveis \mathbf{x} e \mathbf{a} estão em negrito para representar o conjunto x_1, \dots, x_N dos elementos da amostra e o conjunto a_1, \dots, a_N dos parâmetros da população, respectivamente.

Caso os elementos x_i sejam obtidos de uma população que possui média $\mu = 1$, então um estimador para esse parâmetro (por exemplo, a média aritmética dos elementos) não necessariamente será igual a 1, mas algum valor próximo do real. Isso irá depender principalmente das medidas presentes na amostra e do tamanho da amostra (quantidade N de medições).

Os estimadores geralmente são classificados por três critérios: a consistência, seu viés e sua eficiência. A consistência de um estimador significa que ele tende para o valor real do parâmetro conforme o número de elementos da amostra aumenta. O viés significa a diferença entre o valor esperado de um estimador com o valor real do parâmetro. Já a eficiência está relacionada à variância do valor do estimador, logo um estimador eficiente é o que possui uma menor variância.

O valor esperado de uma variável contínua, ou seu valor médio, é definido pela integral da variável multiplicada pela sua função de distribuição de probabilidades (PDF):

$$E[x] = \int_a^b x f(x) dx, \quad (4.2)$$

neste caso, a variável x está definida no intervalo $[a, b]$. Logo, para um estimador, o valor esperado será obtido pela integral:

$$E[a] = \int \hat{a} P(\hat{a}|a) d\hat{a}, \quad (4.3)$$

com a PDF sendo sua distribuição amostral (Riley; Hobson; Bence, 2006).

A variância, também conhecida como segundo momento central, é calculada pelo valor esperado do quadrado da diferença entre a variável e seu valor médio:

$$V[\hat{a}] = E[(\hat{a} - E[\hat{a}])^2] = \int (\hat{a} - E[\hat{a}])^2 P(\hat{a}|a) d\hat{a}. \quad (4.4)$$

Sempre deverá se escolher entre um estimador com menos viés e mais variância, com um estimador enviesado com pequena variância, portanto normalmente utiliza-se o melhor estimador não-enviesado¹. Além disso, de acordo com a inequação de Fischer, sempre existirá um limite inferior para a variância do estimador, também conhecido como variância mínima, que é dado por (Riley; Hobson; Bence, 2006):

$$V[\hat{a}] < \frac{(1 - \frac{\partial b(a)}{\partial a})^2}{E \left[-\frac{\partial^2 \ln(P(\mathbf{x}|a))}{\partial a^2} \right]} = V_{min}. \quad (4.5)$$

Este erro estatístico no estimador pode ser apresentado por meio de um intervalo de confiança, uma região que possui grande probabilidade de conter o valor real do parâmetro (a). Dado que a forma da distribuição amostral é conhecida e que os outros parâmetros da população estão fixados, então para cada determinado valor do parâmetro a , poderemos definir duas variáveis, $\hat{a}_\alpha(a)$ e $\hat{a}_\beta(a)$, de forma que:

$$Pr(\hat{a} < \hat{a}_\alpha(a)) = \int_{-\infty}^{\hat{a}_\alpha(a)} P(\hat{a}|a) d\hat{a} = \alpha \quad (4.6)$$

$$Pr(\hat{a} > \hat{a}_\beta(a)) = \int_{\hat{a}_\beta(a)}^{\infty} P(\hat{a}|a) d\hat{a} = \beta, \quad (4.7)$$

essas integrais estão representadas na figura 12. A probabilidade de o estimador obtido \hat{a} estar entre os valores $\hat{a}_\alpha(a)$ e $\hat{a}_\beta(a)$ será então $1 - \alpha - \beta$.

Porém, o valor real do parâmetro geralmente é desconhecido e só o que se sabe é o valor \hat{a}_{obs} , que é o estimador obtido da amostra observada. Logo, queremos trocar o intervalo $[\hat{a}_\alpha(a), \hat{a}_\beta(a)]$ no espaço dos estimadores para algum intervalo no espaço dos parâmetros. Para isso, utilizamos a característica monótona crescente das funções $\hat{a}_\alpha(a)$

¹ *Best Unbiased Estimator*, ou BUE

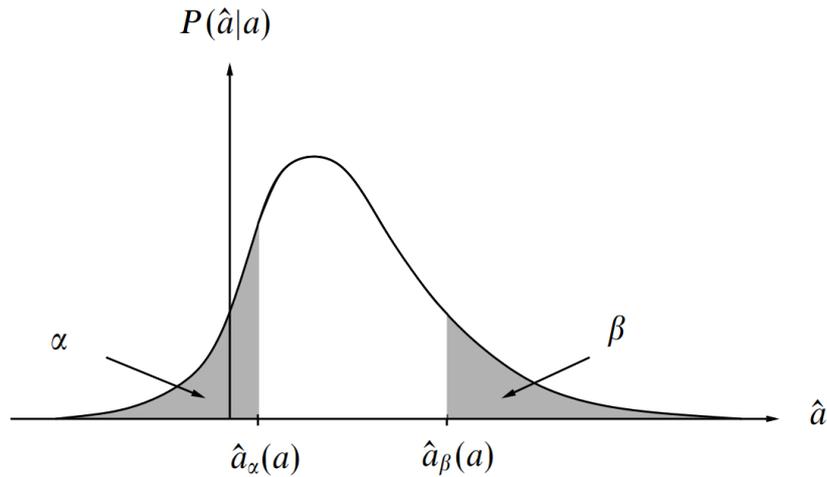


Figura 12 – Curva da distribuição amostral do estimador \hat{a} para um determinado valor a do parâmetro. A partir de probabilidades arbitrárias para α e β , calcula-se os valores de $\hat{a}_\alpha(a)$ e $\hat{a}_\beta(a)$ de forma que suas integrais possuam esses respectivos valores de probabilidade. Imagem retirada de (Riley; Hobson; Bence, 2006)

e $\hat{a}_\beta(a)$ com relação ao parâmetro a , para definir dois novos números (a_+ e a_-) no espaço dos parâmetros da seguinte forma:

$$\hat{a}_\alpha(a_+) = \hat{a}_\beta(a_-) = \hat{a}_{\text{obs}}. \quad (4.8)$$

Assim, substituindo o estimador \hat{a}_{obs} nas equações 4.6 e 4.7 e com base na equação 4.8, obtemos o intervalo de confiança $[a_-, a_+]$ que possui uma probabilidade $1 - \alpha - \beta$ de conter o valor real do parâmetro a (Riley; Hobson; Bence, 2006).

4.1 Método da Máxima Verossimilhança

Para os cálculos envolvendo estimadores, é necessário utilizar a sua distribuição amostral, que está relacionada com a população e os dados obtidos pela equação 4.1. Contudo, a população não é geralmente conhecida pois ela depende de probabilidades que envolvem muitos fatores que não podem ser controlados. Portanto, o que se faz é assumir uma hipótese H , baseada em modelos teóricos e em aproximações, de que a população possui uma forma funcional L :

$$P(\mathbf{x}|\mathbf{a}, H) = L(\mathbf{x}|\mathbf{a}), \quad (4.9)$$

essa forma L , conhecida como *likelihood*², irá depender dos dados do experimento x_i assim como dos parâmetros a_i .

Na fórmula da *likelihood* os dados x_i são valores fixos e conhecidos, logo, a *likelihood* na verdade representa a probabilidade de encontrar estas medições x_i , em função dos

² Sua tradução é seria algo como “verossimilhança”.

parâmetros a_i . Os valores de parâmetros que maximizam essa função são conhecidos como estimadores de Máxima *Likelihood* (ML). Eles são especialmente importantes pois estimadores ML são assintoticamente consistentes e de mínima variância. Ou seja, para um grande número de elementos da amostra, os estimadores tendem para o valor real do parâmetro e para o menor erro possível (Riley; Hobson; Bence, 2006). Essas características são consequências do teorema do limite central.

O teorema do limite central enuncia que, dado N variáveis aleatórias X_i descritas por suas PDF's, com médias μ_i e variâncias σ_i^2 , podemos definir uma nova variável aleatória:

$$Z = \sum_i \frac{X_i}{N}, \quad (4.10)$$

que possui certas propriedades. A primeira propriedade é que seu valor esperado será $E[Z] = \sum_i \mu_i/N$; a segunda diz que a variância de Z é dada por $V[Z] = \sum_i \sigma_i^2/N^2$; e por último, que conforme $N \rightarrow \infty$, a PDF da variável Z tende para uma gaussiana com a mesma média e variância dada pelas propriedades anteriores (Riley; Hobson; Bence, 2006).

Dessa forma, como valores medidos em um experimento se comportam como variáveis aleatórias, temos que para um grande número de medições a média tende para a média real da distribuição dos dados. A distribuição amostral da média se aproximará de uma gaussiana centrada no valor esperado.

Outro método importante para estimar o valor de parâmetros é chamado de método dos mínimos quadrados. Ele surge como um caso especial do método de Máxima *Likelihood*, quando os dados possuem uma distribuição gaussiana centrada no valor teórico. Em sua forma mais geral, a função *Likelihood* deste caso deverá assumir uma forma de uma gaussiana multivariada (equação 4.11), pois as medições podem apresentar alguma correlação.

$$L(\mathbf{x}|\mathbf{a}) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}|N|^{1/2}} \exp\left[-\frac{\chi^2(\mathbf{a})}{2}\right] \quad (4.11)$$

Na equação 4.11, $|N|$ é o determinante da matriz de covariância e o termo $\chi^2(\mathbf{a})$ possui a seguinte forma:

$$\chi^2(\mathbf{a}) = \sum_i \sum_j [x_i - x'(\mathbf{a})_i](N^{-1})_{ij}[x_j - x'(\mathbf{a})_j], \quad (4.12)$$

ou na forma matricial:

$$\chi^2(\mathbf{a}) = [x - x'(\mathbf{a})]^T N^{-1}[x - x'(\mathbf{a})], \quad (4.13)$$

onde $x'(\mathbf{a})$ representa o valor teórico da grandeza medida. Isto posto, o estimador de mínimo quadrado é definido como o que minimiza o termo $\chi^2(\mathbf{a})$:

$$\left. \frac{\partial \chi^2}{\partial a_i} \right|_{\mathbf{a}=\hat{\mathbf{a}}_{LS}} = 0. \quad (4.14)$$

Para o caso da cosmologia utilizando supernovas do tipo Ia, a variável em questão será o módulo de distância, calculado teoricamente por meio da equação 2.66 e obtido observacionalmente por meio da equação 2.67. O termo χ^2 será:

$$\chi^2 = [\mu - \mu_{\text{model}}(z; \mathbf{\Omega}, H_0)]^T C^{-1} [\mu - \mu_{\text{model}}(z; \mathbf{\Omega}, H_0)], \quad (4.15)$$

sendo que nesse caso C^{-1} é a inversa da matriz covariância e modelo para o módulo de distância é uma função do *redshift* e depende dos parâmetros de densidade e da constante de Hubble. Por meio da equação 4.14, será possível obter os estimadores para essas quantidades.

4.1.1 Teste de Razão da Máxima Verossimilhança

O teste de razão de máxima verossimilhança, ou máxima *likelihood*, é um dos possíveis testes que servem para verificar se uma nova hipótese H_1 deve ser aceita em alternativa à nossa hipótese original (ou hipótese nula), H_0 . Essa nova hipótese, por exemplo, pode ser uma restrição nova aos parâmetros a_j da *likelihood*, limitando seus possíveis valores (Riley; Hobson; Bence, 2006).

Dessa forma, é necessário construir a função *likelihood* para cada uma das hipóteses e obter os respectivos estimadores ML. Os demais parâmetros a_i que não estão relacionados com a hipótese H_1 podem continuar livres; contudo, é importante perceber que seus estimadores ML podem ter valores diferentes na condição em que a_j possui uma restrição (Penna-Lima; Makler; Wuensche, 2014).

$$\hat{a}'_i(a_j \text{ livre}) \neq \hat{a}_i(a_j \text{ restrito}) \quad (4.16)$$

O teste é construído pela razão dos valores máximos das funções *likelihood*, que podemos definir como Λ :

$$\Lambda = \frac{L_1(\hat{a}'_i, \{x_j\})}{L_0(\hat{a}_i, \{x_j\})} \quad (4.17)$$

Se o valor de Λ estiver próximo de zero, isso significa que o valor máximo da *likelihood* da hipótese nula é muito maior que para a alternativa. Portanto, a hipótese nula se adequa mais aos dados (x_j) e a alternativa é descartada. Caso o valor esteja próximo de 1, então a alternativa e a hipótese nula descrevem bem a disposição dos dados. Também é possível fazer a análise do teste em alguma função da variável Λ , o que pode ser mais conveniente (Riley; Hobson; Bence, 2006).

Uma função normalmente usada é $s(\Lambda) = -2 \ln(\Lambda)$. Em alguns casos, essa função $s(\Lambda)$ (que também pode ser tratado como uma variável aleatória) possui uma distribuição que se aproxima de uma distribuição χ^2 - de ordem igual ao número n_r de restrições - conforme o número de medições aumenta (Penna-Lima, 2010).

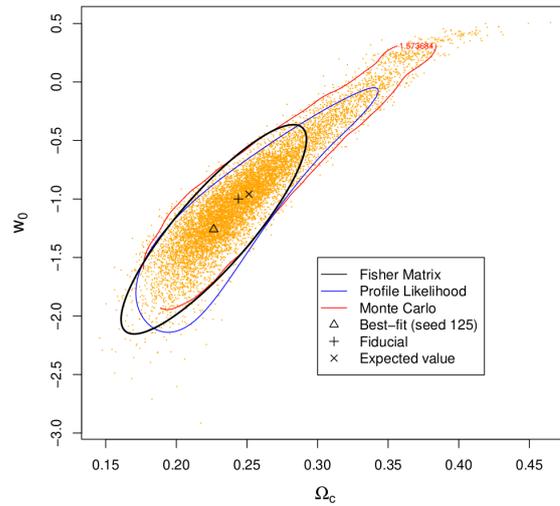


Figura 13 – Regiões de confiança gerada a partir de diversos métodos, os pontos em laranja são valores de melhor ajuste para 10 000 execuções. A curva em azul é o perfil de *likelihood* para a execução 125, com uma confiança de 2σ , ou seja, $1 - p = 95,45\%$. Figura retirada de [Penna-Lima, Makler e Wuensche \(2014\)](#).

$$s(\Lambda) = -2 \ln \left(\frac{L_1(\hat{a}'_i, \{x_j\})}{L_0(\hat{a}_i, \{x_j\})} \right) \quad (4.18)$$

Então, a hipótese alternativa pode ser testada - para um nível de significância p - utilizando a distribuição da variável s . O objetivo é determinar o valor de s_c para que o resultado da integral seja o nível de significância desejado. Após isso, o teste se resume a verificar se o valor de $s(\Lambda)$ obtido da equação 4.18 é menor que s_c , que é considerado um resultado válido, ou se é maior que s_c , o que nos leva a rejeitar a hipótese H_1 .

$$\int_{s_c}^{\infty} \chi^2(s) ds = p \quad (4.19)$$

A outra utilidade deste teste é realizar o processo reverso. Se a hipótese H_1 for fixar o valor dos parâmetros a_j , podemos escolher um valor para p (por exemplo: 0,317) e calcular o valor crítico s_c . Depois disso, utilizaremos o valor s_c na equação 4.18 e dessa vez procuraremos o valor a_j fixado em L_1 para que o lado esquerdo seja igual ao lado direito ([Penna-Lima, 2010](#)).

$$s_c = -2 \ln \left(\frac{L_1(\hat{a}_j = C, \hat{a}'_i, \{x_j\})}{L_0(\hat{a}_i, \{x_j\})} \right) \quad (4.20)$$

Esse método é chamado de Perfil de Verossimilhança³ Ele é utilizado para montar uma região de confiança no espaço dos parâmetros, de forma que a probabilidade de o valor de algum parâmetro a_j estar dentro dela será igual ou maior que $1 - p$. Na figura 13 podemos ver a região de contorno no espaço paramétrico para uma confiança de 2σ .

³ No lingua inglesa, é chamado de *Profile Likelihood*.

Isso significa que os dados x_i utilizados para montar a curva azul nos fornecem uma probabilidade de 95,45% de que o valor real de Ω_c e W está em algum ponto dentro dessa região.

Podemos tratar de um exemplo mais simples, como jogar “cara ou coroa”. Após jogar a moeda 10 vezes, queremos calcular a probabilidade de cair cara. Sabemos os resultados das 10 medições e com isso podemos dizer com 90% de certeza de que a probabilidade de dar cara é algum valor entre 0,4 e 0,6. Se jogássemos a moeda outras 10 vezes, teríamos outra região com 90% de certeza (por exemplo: 0,45 e 0,7), pois o valor do contorno dessa região depende dos dados que foram medidos. Vamos dizer então que nossa moeda era viciada e possui, na verdade, uma probabilidade de 0,8 de cair cara. Isso não é impossível, pois nossos dados só informavam que era improvável ela ter um valor maior que 0,6. Podemos também inverter nosso pensamento: se jogarmos 10 vezes uma moeda viciada, é muito improvável que ela pareça uma moeda normal.

5 Análise Estatística e Resultados

O modelo cosmológico padrão do universo depende de alguns parâmetros fundamentais; como a constante de Hubble (H_0), as densidades energéticas (Ω_i) e de curvatura (Ω_κ). Esses parâmetros estão relacionados pela equação de Friedmann 2.28 e são essenciais para determinar diversas informações sobre o universo. Um exemplo é no cálculo de distâncias, como evidenciado na equação 2.13 e demonstrado nos gráficos da seção 3.

Uma estimativa precisa desses parâmetros é um dos principais objetivos da cosmologia. Diversas pesquisas e levantamentos são constantemente realizados para coletar dados das mais diversas fontes e utilizá-los na restrição do modelo cosmológico. Como apresentado na seção 1, as supernovas do tipo Ia são uma importante sonda cosmológica, pois elas produzem uma luminosidade muito alta - que é possível observar de muito longe - e também pelo seu comportamento padronizável, o que permite ótimas estimativas para a distância em que se encontram.

Com o estudo estatístico da seção 4, vimos como é possível utilizar os dados reais e valores teóricos para restringir os valores possíveis dos parâmetros cosmológicos que buscamos obter. Nessa seção, utilizaremos toda essa base construída e aplicaremos aos dados reais de supernovas, coletados nos levantamentos das últimas décadas. Buscaremos determinar o valor de melhor ajuste (no inglês chamado de *best fit*), o erro associado aquele parâmetro e também estudaremos a região de confiança para entender o comportamento indicado pelos dados.

Para ajustar os dados dos catálogos de supernova, desenvolvemos um novo *Jupyter Notebook* utilizando a biblioteca *NumCosmo* (Dias Pinto Vitenti; Penna-Lima, 2014). Novamente utilizamos o modelo cosmológico da classe “HICosmoDEXcdm”, que considera a equação de estado da energia escura como constante. Em seguida, são selecionados os parâmetros que ficarão livres para o ajuste e adicionamos o catálogo de supernovas que será utilizado no conjunto de dados. Desenvolvemos a *likelihood* dos dados, e por fim, calculamos o melhor ajuste e a região de confiança dos parâmetros. O código desenvolvido para o ajuste dos dados está disponível em <<https://github.com/Arara09/TCC>>.

5.1 Conjunto de dados Supernova Legacy Survey (SNLS)

O catálogo do Supernova Legacy Survey possui um conjunto de 115 supernovas, com informações do módulo de distância, seu erro associado e do valor de *redshift*. Utilizando esse catálogo, produzimos os gráficos das figuras 14 - 16 para o perfil de *likelihood* dos parâmetros.

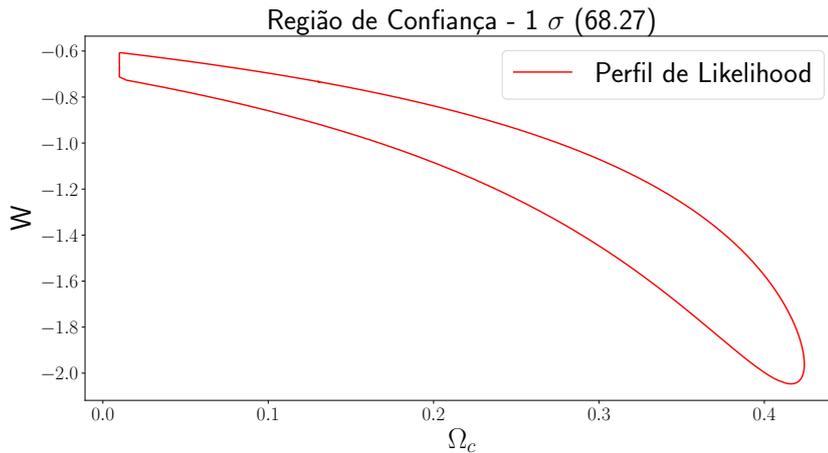


Figura 14 – Perfil de *likelihood* com os dados do SNLS. Foi considerado uma confiança de 1σ (68,27%) para o ajuste conjunto de densidade de matéria escura (Ω_c) e da equação de estado da energia escura (w). O parâmetro Ω_κ foi fixado como zero, portanto, o universo é considerado plano.

O primeiro ajuste foi com os parâmetros da densidade de matéria escura (Ω_c) e da equação de estado da energia escura (w). Na figura 14, o parâmetro de curvatura foi definido como zero, para um universo plano ($\Omega_\kappa = 0$). Pela região de confiança calculada, podemos perceber que valores menores para a densidade Ω_c estão relacionados com valores maiores de w . O melhor ajuste obtido para esses parâmetros foi: $\Omega_c = 0,2488 \pm 0,1763$ e $w = -1,0810 \pm 0,5093$. Somando a densidade de matéria escura com a densidade de matéria bariônica, que foi mantida fixa ($\Omega_b = 0,0432$), temos uma densidade total de matéria $\Omega_m = 0,2920 \pm 0,1763$.

Compararemos também nosso resultado com o de Sullivan et al. (2011), que utilizou os dados do SNLS combinados com outros catálogos de supernova e outros observáveis. No artigo, os ajustes obtiveram uma estimativa de $\Omega_m = 0,276^{+0,016}_{-0,013}$ e $w = -1,043^{+0,054}_{-0,055}$ para um universo plano; com somente os erros estatísticos. Portanto, nossas estimativas - embora estejam menos precisas por usarmos um conjunto menor de dados - concordam com esses valores e estão dentro do que é esperado, considerando a margem de erro.

O gráfico 15 foi produzido considerando os parâmetros Ω_c , Ω_κ e w livres para o ajuste. É interessante notar como a forma da região de confiança muda drasticamente quando outro parâmetro é ajustado em conjunto. Também é importante mencionar que na parte esquerda dessas figuras há uma região praticamente reta, quebrando a suavidade da curva. Esse efeito provavelmente surge para impedir que a densidade de matéria (uma quantidade estritamente positiva) assumam valores negativos. O melhor ajuste obtido foi: $\Omega_\kappa = -0,4995 \pm 1,93$, $w = -0,7344 \pm 0,9039$ e $\Omega_c = 0,2138 \pm 0,489$ ($\Omega_m = 0,257 \pm 0,489$). Com esse ajuste, podemos perceber que os dados de supernova por si só não são suficientes para obter um bom ajuste da curvatura do universo, pois o erro é muitas vezes maior que medida estimada.

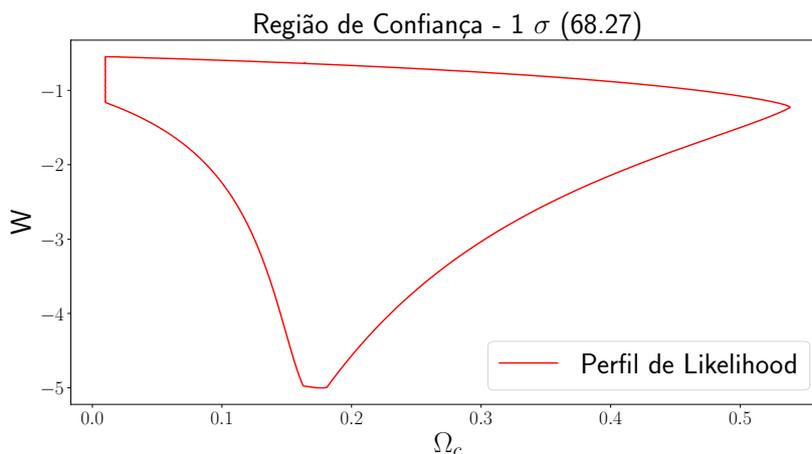


Figura 15 – Perfil de *likelihood* com os dados do SNLS. Foi considerado uma confiança de 1σ (68,27%) para o ajuste conjunto de densidade de matéria escura (Ω_c) e da equação de estado da energia escura (w). O parâmetro Ω_κ foi deixado livre, portanto, o universo pode ter curvatura.

Ainda comparando com [Sullivan et al. \(2011\)](#), o artigo realiza uma outra análise permitindo que o universo tenha curvatura e ajustando esses três parâmetros. A estimativa obtida foi: $\Omega_m = 0,259^{+0,050}_{-0,049}$, $\Omega_\kappa = 0,001 \pm 0,015$ e $w = -1,018^{+0,113}_{-0,110}$, usando somente os dados da SNLS e o espectro de potência do WMAP7; esses erros já estão combinados com os sistemáticos. Nossos valores ajustados ainda concordam com os dados do artigo; contudo, é importante ressaltar como o melhor ajuste da densidade de curvatura deles se aproxima bem mais de um universo plano. Isso pode ser explicado pela grande diferença entre as bases de dados utilizadas.

Por fim, na figura 16 ajustamos os parâmetros Ω_c e Ω_Λ . É importante ressaltar que mesmo não colocando para ajustar o parâmetro Ω_κ , ele também não está fixo em zero. A partir do ajuste dos outros parâmetros de densidade, a curvatura é univocamente definida pela equação 2.34. O melhor ajuste encontrado foi: $\Omega_\Lambda = 0,8051 \pm 0,3036$ e $\Omega_c = 0,2650 \pm 0,2084$ ($\Omega_m = 0,3082 \pm 0,2084$). Em [Sullivan et al. \(2011\)](#), o valor estimado das densidades foi $\Omega_m = 0,273^{+0,015}_{-0,014}$ e $\Omega_\Lambda = 0,729 \pm 0,014$; somente erros estatísticos. Nesse caso, podemos ver que o nosso melhor valor está distante do resultado do artigo para energia escura, embora o erro contemple a estimativa do artigo.

5.2 Conjunto de dados Union2.1

O catálogo do Union2.1 possui um conjunto de 580 supernovas, com as mesmas informações do SNLS. Esse catálogo é uma compilação de diversos outros dados de supernova que foram publicados até 2011, como o Supernova Legacy Survey (SNLS), Sloan Digital Sky Survey (SDSS), Hubble Space Telescope Cluster Supernova Survey, entre outros. Utilizando esse catálogo, produzimos os gráficos das figuras 17 - 19 para o perfil de

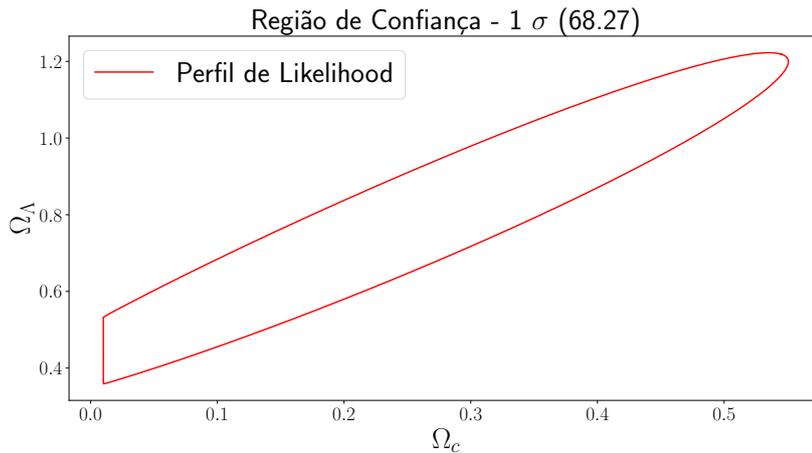


Figura 16 – Perfil de *likelihood* com os dados do SNLS. Foi considerado uma confiança de 1σ (68,27%) para o ajuste conjunto de densidade de matéria escura (Ω_c) e da densidade de energia escura (Ω_Λ).

likelihood dos parâmetros.

O primeiro ajuste foi novamente com os parâmetros Ω_c e w , definindo $\Omega_\kappa = 0$. Podemos já perceber como a quantidade de dados fez diminuir bastante a região de confiança, o que significa uma maior acurácia na estimativa. Os valores de melhor ajuste foram: $\Omega_c = 0,2375 \pm 0,0745$ ($\Omega_m = 0,2807 \pm 0,0745$) e $w = -1,009 \pm 0,202$.

No trabalho de [Amanullah et al. \(2010\)](#) (que utiliza o catálogo Union2, anterior ao Union2.1), ao combinar os dados de supernova com os dados de CMB, o melhor ajuste para esses parâmetros considerando um universo plano foi: $\Omega_m = 0,268_{-0,017}^{+0,019}$ e $w = -0,997_{-0,055}^{+0,050}$, com erros estatísticos. Já em [Suzuki et al. \(2012\)](#) (que utiliza o Union2.1), o melhor ajuste usando somente dados de supernova foi: $\Omega_m = 0,281_{-0,092}^{+0,067}$ e $w = -1,011_{-0,231}^{+0,208}$.

Comparando os resultados com os dois artigos, vemos que os valores concordam com os de [Amanullah et al. \(2010\)](#), considerando os erros. Porém, nossos resultados estão extremamente próximos do trabalho de [Suzuki et al. \(2012\)](#), tanto no melhor ajuste quanto no valor dos erros. Como esse segundo trabalho divulgou uma análise com somente os dados de supernova, podemos afirmar que os ajustes com programa elaborado estão com uma ótima precisão.

No gráfico da figura 18, adicionamos Ω_κ como um dos parâmetros ajustáveis. Para os três parâmetros, o ajuste encontrado foi: $\Omega_\kappa = 0,1365 \pm 0,8279$, $\Omega_c = 0,2325 \pm 0,0973$ ($\Omega_m = 0,2757 \pm 0,0973$) e $w = -1,183 \pm 1,245$. Dessa vez, o valor ajustado de curvatura foi mais próximo de um universo plano, contudo o erro continua proporcionalmente muito alto; o que não nos permite afirmar muito sobre esse parâmetro.

Na análise de [Amanullah et al. \(2010\)](#) para esses três parâmetros, foram utilizados

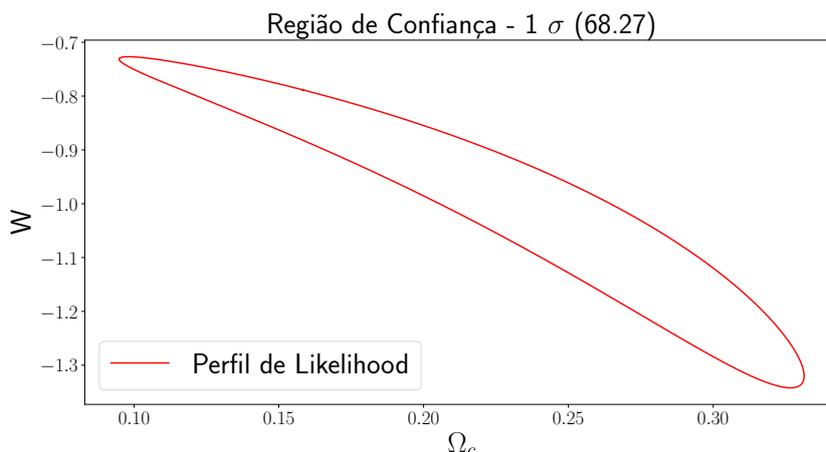


Figura 17 – Perfil de *likelihood* com os dados do Union2.1. Foi considerado confiança de 1σ (68,27%), para o ajuste conjunto de densidade de matéria escura (Ω_c) e da equação de estado da energia escura (w). O parâmetro Ω_κ foi fixado como zero, portanto, o universo é considerado plano.

dados de supernova combinados com BAO¹ e de CMB. Considerando somente erros estatísticos, o melhor ajuste dos três parâmetros foi: $\Omega_\kappa = -0,005 \pm 0,007$, $\Omega_m = 0,281^{+0,016}_{-0,015}$ e $w = -1,026^{+0,056}_{-0,059}$. Importante notar novamente como a adição de outros observáveis contribui muito para obter um valor de curvatura mais próximo de zero e mais precisa, com um erro muito menor do que nosso ajuste.

No artigo de Suzuki et al. (2012), o ajuste mais simples para esses três parâmetros (apelidado no texto de modelo *ow*CDM) foi feito combinando as supernovas do Union2.1 com dados de CMB. O melhor valor, sem considerar erros sistemáticos, estimado para os parâmetros foi: $\Omega_\kappa = -0,003^{+0,034}_{-0,027}$, $\Omega_m = 0,281^{+0,069}_{-0,087}$ e $w = -1,007^{+0,179}_{-0,194}$. Mesmo com os erros proporcionalmente muito altos em nossa análise, a melhor estimativa dos parâmetros obtida pelos dois artigos continua próxima do valor que encontramos.

Para a figura 19, foi repetido o ajuste conjunto de Ω_c e Ω_Λ . Dessa vez, o gráfico apresentou uma curva suave, sem esbarrar no limite positivo da densidade, como ocorreu na figura 16. O melhor ajuste desses dois parâmetros com os dados do Union2.1 foi: $\Omega_\Lambda = 0,7250 \pm 0,1171$ e $\Omega_c = 0,2358 \pm 0,07013$ ($\Omega_m = 0,2790 \pm 0,07013$). Um avanço que podemos notar é que os valores, encontrados com este catálogo, estão mais próximos do modelo Λ CDM, comparado com o resultado obtido pelo catálogo SNLS. Inclusive, calculando o parâmetro de curvatura para essas estimativas de densidade, obtemos $\Omega_\kappa = -0,004$, um valor muito próximo de um universo plano.

Retornando aos valores da literatura, o artigo de Amanullah et al. (2010) não realiza o ajuste desses parâmetros e não apresenta nenhuma estimativa para a densidade de energia escura. No artigo de Suzuki et al. (2012) é realizado um ajuste para energia

¹ Baryon Acoustic Oscillations. Em português, Oscilações Acústicas de Bárions

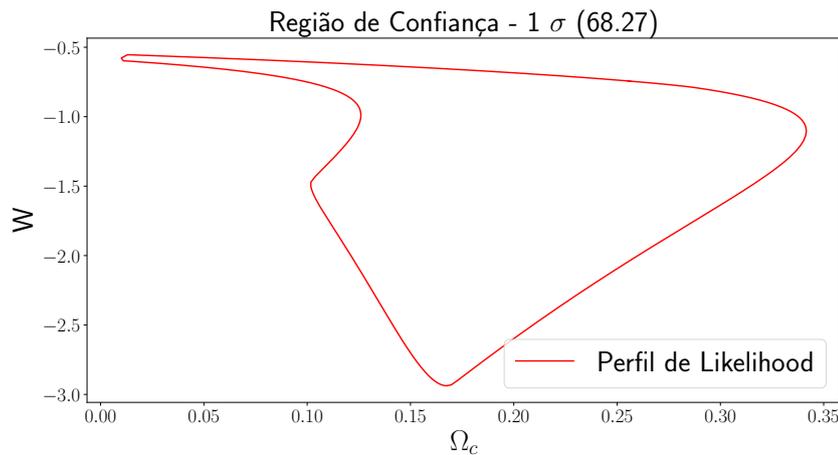


Figura 18 – Perfil de *likelihood* com os dados do Union2.1. Foi considerado uma confiança de 1σ (68,27%), para o ajuste conjunto de densidade de matéria escura (Ω_c) e da equação de estado da energia escura (w). O parâmetro Ω_κ foi deixado livre, portanto, o universo pode ter curvatura.

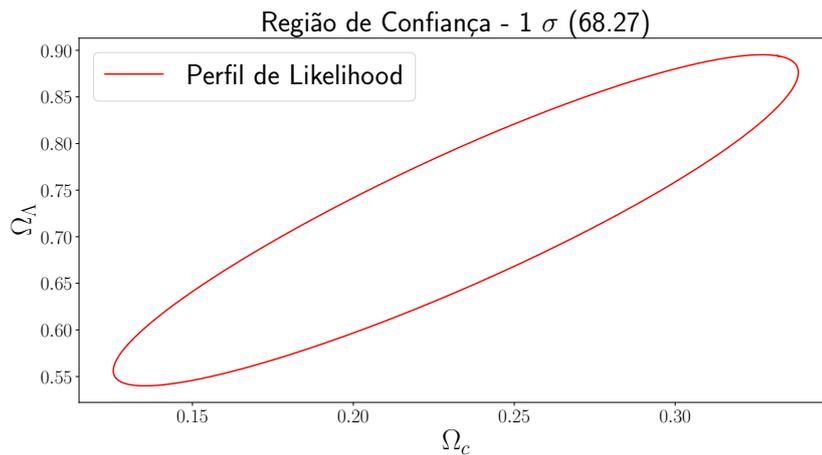


Figura 19 – Perfil de *likelihood* com os dados do Union2.1. Foi considerado uma confiança de 1σ (68,27%) para o ajuste conjunto de densidade de matéria escura (Ω_c) e da densidade de energia escura (Ω_Λ).

escura, que obtém: $\Omega_\Lambda = 0,705^{+0,040}_{-0,043}$. Contudo, essa análise é feito em um modelo Λ CDM considerando o universo plano; o que é diferente do ajuste que realizamos.

5.3 Comparação entre os catálogos

Para finalizar, foram elaborados novos gráficos que unem na mesma figura as regiões de confiança calculadas para cada catálogo de supernovas. Com isso, é possível observar a evolução no valor esperado para os parâmetros, assim como a importância da soma de diferentes dados para obter um resultado mais preciso.

Na figura 20 temos o ajuste dos parâmetros Ω_c e w para o catálogo do Legacy,

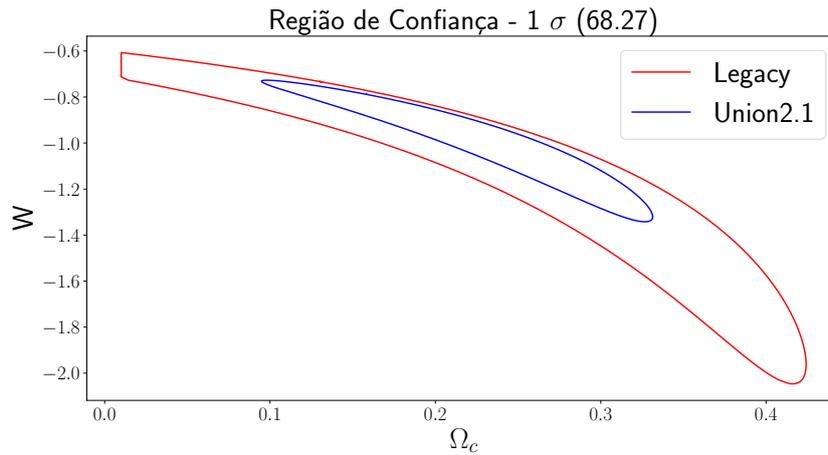


Figura 20 – Perfil de *likelihood* para os dados do Legacy (em vermelho) e do Union2.1 (em azul). As duas regiões são calculadas para a mesma confiança de 1σ . Ajuste em conjunto dos parâmetros Ω_c e w .

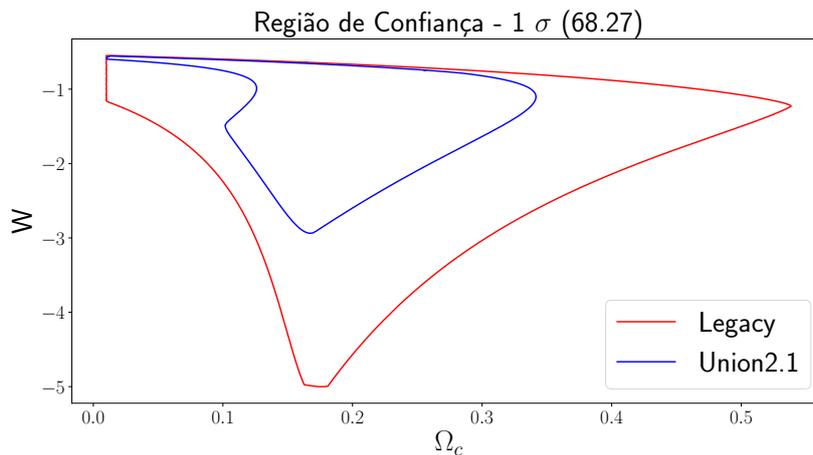


Figura 21 – Perfil de *likelihood* para os dados do Legacy (em vermelho) e do Union2.1 (em azul). As duas regiões são calculadas para a mesma confiança de 1σ . Ajuste em conjunto dos parâmetros Ω_c , Ω_κ e w .

em vermelho, e para o catálogo do Union2.1, em azul. Podemos perceber que o ajuste do Union2.1 nos fornece uma restrição muito maior para os parâmetros, considerando a mesma probabilidade de 68,27% do valor dos parâmetros estarem dentro dessa região. Em específico, o valor da equação de estado w está limitado para um intervalo muito menor, o que é esperado para dados de supernova. Esse resultado é consistente com o modelo Λ CDM, que considera $w = -1$.

Na figura 21, temos as regiões de confiança para o ajuste com os parâmetros Ω_c , Ω_κ e w . A região formada com os dados do Union2.1 continuou com um formato similar ao do Legacy, mas foi possível limitar o parâmetro w para valores maiores que -3 e o Ω_c para valores menores que 0,4. Embora o resultado tenha melhorado a precisão, para considerar o parâmetro de curvatura no ajuste é importante unir o conjunto de dados com outros

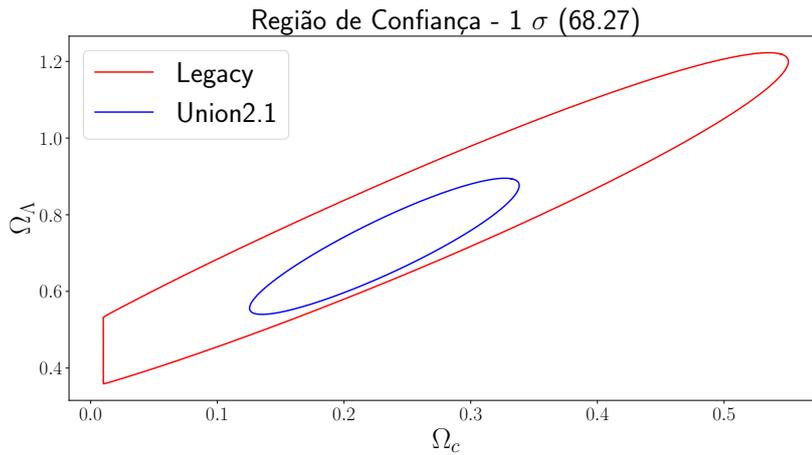


Figura 22 – Perfil de *likelihood* para os dados do Legacy (em vermelho) e do Union2.1 (em azul). As duas regiões são calculadas para a mesma confiança de 1 σ . Ajuste em conjunto dos parâmetros Ω_c e Ω_Λ .

observáveis.

Por último, temos a figura 22 para o ajuste de Ω_c e Ω_Λ . Essa evolução da região de confiança é a melhor na comparação das áreas de um catálogo para o outro. Importante notar que a região delimitada pelo Union2.1 continua abrangendo a possibilidade de um universo plano ($\Omega_m + \Omega_\Lambda = 1$), o que também está de acordo com resultados mais recentes, como o de Brout et al. (2022).

Conclusão

A partir do estudo realizado sobre supernovas e especificamente sobre as do tipo Ia, exploramos a natureza e a origem das diversas explosões estelares e desenvolvemos a importância desses objetos para a cosmologia. Também foi construído uma base teórica a respeito de vela padrão e como é feita a calibração desses observáveis.

Combinando conceitos fundamentais como métrica, homogeneidade e isotropia; e unindo-os com a Teoria da Relatividade Geral, conseguimos desenvolver a equação de Friedmann. Essa equação é fundamental para relacionar a evolução do universo com sua composição e curvatura. Utilizamos todo este desenvolvimento matemático para construir as equações de distância, em função de diversos parâmetros da cosmologia.

Com a função módulo de distância, conectamos a construção teórica com os dados que são observados na prática, trazendo a motivação para a coleta e análise dos dados de supernovas do tipo Ia. Também foi estudado o conceitos e testes estatísticos, que seriam necessários para o ajuste e o cálculo da região de confiança.

Utilizando a biblioteca *NumCosmo* e a linguagem de programação *Python*, foram desenvolvidos dois *notebooks* de programação. O primeiro foi usado para criar diferentes modelos cosmológicos e observar a dependência das funções de distância com relação aos parâmetros do modelo. No segundo *notebook*, utilizamos as funções estatísticas da biblioteca para analisar dois catálogos de supernovas (Supernova Legacy Survey e Union2.1) e obter a restrição de alguns parâmetros.

Os resultados mais precisos foram obtidos com o Union2.1, que possuía um catálogo com mais supernovas. Para um universo plano, encontramos como melhor ajuste: $\Omega_c = 0.2375 \pm 0.0745$ e $W = -1.009 \pm 0.202$. Para um universo com curvatura, a estimativa para os parâmetros foi: $\Omega_k = 0,1365 \pm 0,8279$, $\Omega_c = 0,2325 \pm 0,0973$ e $W = -1,183 \pm 1,245$. Considerando um modelo de energia escura como constante cosmológica ($W = -1$), o resultado obtido para os parâmetros de densidade foi: $\Omega_\Lambda = 0,7250 \pm 0,1171$ e $\Omega_c = 0,2358 \pm 0,07013$; que também é próximo do caso de universo plano ($\Omega_m + \Omega_\Lambda = 1$). Todos os valores estavam dentro do esperado e são consistentes com os resultados mais recentes (Brout et al., 2022).

Por fim, também foi calculado o perfil de *likelihood* em duas dimensões para os diversos ajustes. Com os gráficos gerados, foi possível verificar a importância dos dados de supernova para restringir parâmetros de energia escura (W e Ω_Λ), assim como a evolução na região de confiança entre os dois catálogos. Também percebemos, com base em alguns artigos, que os dados de supernova por si só não são suficientes para obter um bom ajuste da curvatura. Para uma análise mais precisa dela, é necessário combinar os catálogos

com as informações de outros observáveis, como as Oscilações Acústicas de Bárions ou a Radiação Cósmica de Fundo.

Referências

- Aghanim, N. et al. Planck 2018 results - I. Overview and the cosmological legacy of planck. *Astronomy & Astrophysics*, EDP sciences, v. 641, p. A1, 2020. Disponível em: <<https://doi.org/10.1051/0004-6361/201833880>>. Citado na página 19.
- Altavilla, G. et al. Cepheid calibration of Type Ia supernovae and the Hubble constant. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, v. 349, n. 4, p. 1344–1352, abr. 2004. Disponível em: <<https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2004.07616.x>>. Citado na página 32.
- Amanullah, R. et al. Spectra and hubble space telescope light curves of six type ia supernovae at $0.511 < z < 1.12$ and the union2 compilation. *The Astrophysical Journal*, IOP Publishing, v. 716, n. 1, p. 712, 2010. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.1088/0004-637X/716/1/712>>. Citado 2 vezes nas páginas 52 e 53.
- Bennett, C. L. et al. Nine-year wilkinson microwave anisotropy probe (WMAP) observations: final maps and results. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, IOP Publishing, v. 208, n. 2, p. 20, 2013. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.1088/0067-0049/208/2/20>>. Citado na página 19.
- BRITANNICA, T. E. of E. *Supernova*. Encyclopædia Britannica, inc., 2022. [Online; accessed 10-May-2022]. Disponível em: <<https://www.britannica.com/science/supernova>>. Citado na página 9.
- Brookhaven National Laboratory. *Supernova Tutorial*. 2017. [Online; accessed 19-May-2022]. Disponível em: <https://wiki.bnl.gov/astro/images/b/be/Supernova_Tutorial.pdf>. Citado 2 vezes nas páginas 5 e 13.
- Brout, D. et al. The Pantheon+ Analysis: Cosmological Constraints. *arXiv e-prints*, p. arXiv:2202.04077, fev. 2022. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.3847/1538-4357/ac8e04>>. Citado 8 vezes nas páginas 2, 9, 23, 34, 37, 38, 56 e 57.
- Brownsberger, S. et al. The Pantheon+ Analysis: Dependence of Cosmological Constraints on Photometric-Zeropoint Uncertainties of Supernova Surveys. *arXiv e-prints*, p. arXiv:2110.03486, out. 2021. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.3847/1538-4357/ac8e04>>. Citado na página 37.
- Burns, C. R. et al. The Carnegie Supernova Project: Absolute Calibration and the Hubble Constant. *The Astrophysical Journal*, v. 869, n. 1, p. 56, dez. 2018. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.3847/1538-4357/aae51c>>. Citado na página 32.
- Carroll, S. M. *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*. San Francisco: Addison Wesley, 2019. Citado 3 vezes nas páginas 20, 25 e 29.
- Dhawan, S. et al. A Uniform Type Ia Supernova Distance Ladder with the Zwicky Transient Facility: Absolute Calibration Based on the Tip of the Red Giant Branch Method. *The Astrophysical Journal*, v. 934, n. 2, p. 185, ago. 2022. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.3847/1538-4357/ac7ceb>>. Citado na página 32.

- Dias Pinto Vitenti, S.; Penna-Lima, M. *NumCosmo: Numerical Cosmology*. 2014. ascl:1408.013 p. Astrophysics Source Code Library, record ascl:1408.013. Disponível em: <<https://ascl.net/1408.013>>. Citado 3 vezes nas páginas 2, 35 e 49.
- Dodelson, S. *Modern Cosmology*. London: Academic Press, 2003. Citado 7 vezes nas páginas 17, 18, 21, 25, 30, 32 e 34.
- D’Inverno, R.; Vickers, J. *Introducing einstein’s relativity: A deeper understanding*. Oxford, United Kingdom: Oxford University Press, 2022. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 24.
- ESA. *Planck reveals an almost perfect universe*. 2013. Disponível em: <https://www.esa.int/Science_Exploration/Space_Science/Planck/Planck_reveals_an_almost_perfect_Universe>. Citado 2 vezes nas páginas 3 e 19.
- Freedman, W. L. Measurements of the Hubble Constant: Tensions in Perspective. *The Astrophysical Journal*, v. 919, n. 1, p. 16, set. 2021. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.3847/1538-4357/ac0e95>>. Citado na página 32.
- Gal-Yam, A. Observational and Physical Classification of Supernovae. In: Alsabti, A. W.; Murdin, P. (Ed.). *Handbook of Supernovae*. London: Springer International Publishing, 2017. p. 195–237. Disponível em: <https://doi.org/10.1007%2F978-3-319-21846-5_35>. Citado na página 12.
- Griffiths, D. J.; Schroeter, D. F. The free electron gas. In: _____. *Introduction to quantum mechanics*. 3. ed. Cambridge, Cambridgeshire: Cambridge University Press, 2020. cap. 5, p. 216–228. Citado na página 14.
- Howell, D. A. Type Ia supernovae as stellar endpoints and cosmological tools. *Nature Communications*, v. 2, p. 350, jun. 2011. Disponível em: <<https://doi.org/10.1038/ncomms1344>>. Citado 2 vezes nas páginas 9 e 12.
- Hubble, E. A relation between distance and radial velocity among extra-galactic nebulae. *Proceedings of the national academy of sciences*, National Acad Sciences, v. 15, n. 3, p. 168–173, 1929. Disponível em: <<https://doi.org/10.1073/pnas.15.3.168>>. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 38.
- Klesman, A. *The Cosmic Distance Ladder: How We Measure An Infinite Universe*. Kalmbach Media, 2019. Disponível em: <<https://astronomy.com/news/2019/07/the-cosmic-distance-ladder>>. Citado na página 31.
- Kluyver, T. et al. Jupyter notebooks - a publishing format for reproducible computational workflows. In: Loizides, F.; Schmidt, B. (Ed.). *Positioning and Power in Academic Publishing: Players, Agents and Agendas*. IOS Press, 2016. p. 87–90. Disponível em: <<https://eprints.soton.ac.uk/403913/>>. Citado na página 35.
- LABS, N. *Radar ranging*. Astronomy Education at the University of Nebraska-Lincoln, 2008. Disponível em: <<https://astro.unl.edu/naap/distance/radar.html>>. Citado na página 31.
- Lima, V. P. G. d. Lenteamento gravitacional fraco e perfis de densidade de matéria de aglomerados de galáxias. *Biblioteca Digital da Produção Intelectual Discente*, Jun 2023. Disponível em: <<https://bdm.unb.br/handle/10483/35131>>. Citado 4 vezes nas páginas 18, 25, 27 e 28.

- Mueller, T.; Grave, F. *Catalogue of Spacetimes*. Universität Stuttgart, 2014. Disponível em: <<https://www.visus.uni-stuttgart.de/publikationen/catalogue-of-spacetimes>>. Citado na página 23.
- Murdin, P. *Encyclopedia of Astronomy and Astrophysics*. London: Nature Publishing, 2003. Citado 4 vezes nas páginas 11, 12, 13 e 15.
- Nomoto, K. I.; Iwamoto, K.; Suzuki, T. The evolution and explosion of massive binary stars and Type Ib-Ic-IIb-III supernovae. , v. 256, n. 1, p. 173–191, maio 1995. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/037015739400107E>>. Citado na página 13.
- Oliveira Filho, K. d. S.; Saraiva, M. d. F. O. *Astronomia e Astrofísica*. Rio Grande do Sul: Livraria da Física, 2004. Citado 2 vezes nas páginas 9 e 11.
- Penna-Lima, M. *Abundância de Aglomerados de Galáxias como Observável Cosmológico: Aplicações aos Levantamentos Fotométricos DES e SDSS*. Tese (Doutorado) — Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, Oct 2010. Disponível em: <<https://cbpfindex.cbpf.br/index.php?module=main&moduleFile=pubDetails&pubId=3534&typeId=9>>. Citado 2 vezes nas páginas 45 e 46.
- Penna-Lima, M.; Makler, M.; Wuensche, C. A. Biases on cosmological parameter estimators from galaxy cluster number counts. , v. 2014, n. 5, p. 039, maio 2014. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.1088/1475-7516/2014/05/039>>. Citado 3 vezes nas páginas 3, 45 e 46.
- Phillips, M. M. The Absolute Magnitudes of Type Ia Supernovae. , v. 413, p. L105, ago. 1993. Disponível em: <<https://adsabs.harvard.edu/full/1993ApJ...413L.105P>>. Citado na página 15.
- Piattella, O. *Lecture Notes in Cosmology*. Cham, Switzerland: Springer International Publishing, 2018. Citado 7 vezes nas páginas 18, 20, 21, 22, 28, 33 e 34.
- Reis, R. R. R.; Siffert, B. B. Supernovas do tipo Ia e a expansão do universo. *Cadernos de Astronomia*, v. 3, n. 1, p. 21, fev. 2022. Disponível em: <<https://periodicos.ufes.br/astrofisia/article/view/37130>>. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 15.
- Riley, K. F.; Hobson, M. P.; Bence, S. J. *Mathematical methods for physics and engineering*. 3. ed. New York: Cambridge University Press, 2006. Citado 6 vezes nas páginas 3, 41, 42, 43, 44 e 45.
- Ryden, B. *Chapter 5 (Stellar Remnants)*. 2006. Disponível em: <https://www.astronomy.ohio-state.edu/ryden.1/ast292/Chapter_5.pdf>. Citado 3 vezes nas páginas 11, 13 e 28.
- Ryden, B. *Introduction to Cosmology*. New York: Cambridge university press, 2016. Citado 17 vezes nas páginas 13, 17, 18, 20, 21, 22, 24, 25, 27, 28, 29, 30, 31, 33, 34, 35 e 39.
- Schutz, B. *A First Course in General Relativity*. New York: Cambridge university press, 2009. Citado 3 vezes nas páginas 17, 20 e 23.

Stephenson, F. R.; Green, D. A. Was the supernova of AD 1054 reported in European history? *Journal of Astronomical History and Heritage*, v. 6, n. 1, p. 46–52, jun. 2003. Disponível em: <<https://adsabs.harvard.edu/full/2003JAHH...6...46S>>. Citado na página 11.

Sullivan, M. et al. SNLS3: constraints on dark energy combining the supernova legacy survey three-year data with other probes. *The Astrophysical Journal*, IOP Publishing, v. 737, n. 2, p. 102, 2011. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.1088/0004-637X/737/2/102>>. Citado 2 vezes nas páginas 50 e 51.

Suzuki, N. et al. The hubble space telescope cluster supernova survey. V. improving the dark-energy constraints above $z > 1$ and building an early-type-hosted supernova sample. *The Astrophysical Journal*, IOP Publishing, v. 746, n. 1, p. 85, 2012. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.1088/0004-637X/746/1/85>>. Citado 2 vezes nas páginas 52 e 53.

Turatto, M. Classification of Supernovae. In: Weiler, K. (Ed.). *Supernovae and Gamma-Ray Bursters*. London: Springer International Publishing, 2003. v. 598, p. 21–36. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 13.

Wald, R. M. *General relativity*. Chicago: University of Chicago press, 2010. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 20.

Wikipedia contributors. *Event (relativity)* — *Wikipedia, The Free Encyclopedia*. 2022. [Online; accessed 8-June-2022]. Disponível em: <[https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Event_\(relativity\)&oldid=1086992478](https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Event_(relativity)&oldid=1086992478)>. Citado na página 17.

WMAP. *Geometry of the Universe*. National Aeronautics and Space Administration, 2001. Disponível em: <<https://imagine.gsfc.nasa.gov/observatories/satellite/wmap/shape.html>>. Citado 2 vezes nas páginas 3 e 22.

Wright, B. S.; Li, B. Type Ia supernovae, standardizable candles, and gravity. *Physical Review D*, v. 97, n. 8, p. 083505, abr. 2018. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.97.083505>>. Citado 3 vezes nas páginas 9, 15 e 31.

Yadav, J. et al. Testing homogeneity on large scales in the Sloan Digital Sky Survey Data Release One. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, v. 364, n. 2, p. 601–606, 12 2005. ISSN 0035-8711. Disponível em: <<https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2005.09578.x>>. Citado na página 18.