

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
INSTITUTO DE FÍSICA

ISRAEL DA SILVA OLIVEIRA

**DINÂMICA TEMPORAL E ESTABILIDADE DE UM
MODELO DE MERCADO BASEADO EM AGENTES**

BRASÍLIA

10 DE FEVEREIRO DE 2023

Israel da Silva Oliveira

DINÂMICA TEMPORAL E ESTABILIDADE DE UM MODELO DE MERCADO BASEADO EM AGENTES

Monografia apresentada ao Instituto de Física da Universidade de Brasília como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Bacharel em Física.

Orientador: Bernardo de Assunção Mello

Universidade de Brasília – UnB

Instituto de Física

Brasília

10 de fevereiro de 2023

Israel da Silva Oliveira

DINÂMICA TEMPORAL E ESTABILIDADE DE UM MODELO DE MERCADO BASEADO EM AGENTES/ Israel da Silva Oliveira. – Brasília, 10 de fevereiro de 2023–

Orientador: Bernardo de Assunção Mello

Monografia – Universidade de Brasília – UnB
Instituto de Física, 10 de fevereiro de 2023.

1. Microeconomia. 2. Modelo baseado em agentes. 3. Física Estatística.

CDU 02:141:005.7

Israel da Silva Oliveira

DINÂMICA TEMPORAL E ESTABILIDADE DE UM MODELO DE MERCADO BASEADO EM AGENTES

Monografia apresentada ao Instituto de Física da Universidade de Brasília como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Bacharel em Física.

Trabalho aprovado. Brasília, 10 de fevereiro de 2023:

Bernardo de Assunção Mello

Bernardo de Assunção Mello
Orientador

Annibal Dias de Figueiredo Neto

Professor
Convidado 1

Daniel Oliveira Cajueiro

Professor
Convidado 2

Brasília

10 de fevereiro de 2023

*Este trabalho é dedicado ao movimento estudantil que,
sem suas lutas, não teria garantido acesso e permanência na Universidade.*

Agradecimentos

Os agradecimentos principais são direcionados ao Bernardo Mello, que me orientou para além do âmbito da pesquisa acadêmica. Bem como, manteve-se sempre interessado em meu trabalho e fez questão de que meu aprendizado no processo fosse significativo.

Agradecimentos especiais são direcionados aos meus companheiros André Batista, Gabriel Fiuza e Marcos de Paula que me proporcionaram uma formação completa, acadêmica e pessoal. Por fim, e mais importante, a minha companheira de vida Laura Sousa, a qual serei eternamente grato pelo afeto e dedicação.

Resumo

A Teoria Microeconômica se baseia em princípios como o equilíbrio da oferta com a demanda entre os agentes econômicos que participam do processo: compradores e vendedores. Neste trabalho, apontamos um modelo “atomístico” para os agentes econômicos do mercado de forma semelhante à descrição da Física Estatística de um gás, a partir das propriedades de suas partículas. Os compradores são descritos em termos dos seus orçamentos e preferência, e os vendedores em função do seu estoque, custo de produção e preço de venda. O objetivo é determinar as relações entre as propriedades dos indivíduos e o comportamento do mercado, tais como elasticidade, equilíbrio e as flutuações.

Palavras-chave: Microeconomia. Modelo baseado em agentes. Física Estatística.

Lista de ilustrações

Figura 1 – (a) A curva de demanda de um bem. O eixo vertical mede o preço de mercado e o eixo horizontal, a quantidade do bem vendida a cada preço; (b) Curva de demanda de um bem com muitos demandantes. Devido ao grande número de demandantes, os saltos entre os preços serão pequenos e a curva de demanda possuirá o convencional formato suave.	24
Figura 2 – Curva de oferta de curto prazo. A oferta do bem é fixa no curto prazo.	26
Figura 3 – (a) O equilíbrio no mercado do bem. O preço de equilíbrio, p^* , é dado pela interseção das curvas de oferta e demanda; (b) O aumento da oferta de um bem. À medida que a oferta do bem aumenta, o preço de equilíbrio diminui; (c) Efeitos da venda de um bem. Se a demanda e a oferta se deslocarem para a esquerda na mesma grandeza, o preço de equilíbrio permanece inalterado. Entende-se por 1 as quantidades precedentes, e por 2 às novas.	27
Figura 4 – Esquema ilustrativo da interação entre $N_C = 5$ compradores e $N_V = 6$ vendedores. À esquerda, na primeira iteração, o comprador escolhe $N'_V = 3$ vendedores dentre os demais, começa suas compras do menor ao maior preço. À direita, na segunda iteração, o processo se repete para o segundo comprador.	38
Figura 5 – Esquema ilustrativo de um modelo contínuo da interação entre compradores e vendedores. O resultado da interação entre os agentes é interpretado como fluxos de demanda e oferta.	40
Figura 6 – Gráfico da evolução temporal da percentagem do estoque individual. Simulação referente aos conjuntos de parâmetros presentes: (a) P_1 ; (b) P_2 ; presentes na Tabela 2. Cada curva é referente a um vendedor. A cor da curva expressa seu preço, baixo para curvas azuis e alto para curvas violetas, de forma contínua.	46
Figura 7 – Histograma da receita por produto em função do preço de venda (preço médio $p_1^m = 1.0$). Simulação produzida com o conjunto de parâmetros: (a) P_1 ; (b) P_2 ; (c) e P_3 ; presentes na Tabela 2.	47
Figura 8 – Gráfico do preço em função do tempo. Simulação referente aos conjuntos de parâmetros: (a) P_1 ; (b) P_2 ; presentes na Tabela 2.	48
Figura 9 – Gráfico do preço em função do tempo referente aos parâmetros presentes na Tabela 4.	50
Figura 10 – Gráfico do preço em função do tempo, para $d_a = 6$ dias e demais parâmetros da Tabela 5.	51

Figura 11 – Transformada Rápida de Fourier para tempos maiores que 1000 dias das curvas: (a) Figura 9, para o parâmetro $d_a = 9$ dias. Os três picos de menor frequência ocorrem para os valores 0.021, 0.074 e 0.129 (1/dia), que correspondem aos períodos 48, 14 e 8 dias; (b) Figura 10, para o parâmetro $d_a = 6$ dias. Os três picos de menor frequência ocorrem para os valores 0.025, 0.110 e 0.195 (1/dia), que correspondem aos períodos 40, 9 e 5 dias. 52

Figura 12 – (a) Evolução temporal da oferta, demanda e preço praticado; (b) Ampliação do gráfico na região do amortecimento; (c) Ampliação do gráfico no regime de equilíbrio. O preço praticado tem unidade de preço (ordenada esquerda), enquanto as curvas de oferta e demanda tem unidade quantidade de bens comercializados (ordenada direita). Curvas geradas com as variáveis da Tabela 4. 53

Figura 13 – (a) Evolução temporal da oferta, demanda e preço praticado. O preço praticado tem unidade de preço (ordenada esquerda), enquanto as curvas de oferta e demanda tem unidade quantidade de bens comercializados (ordenada direita). Curvas geradas com as variáveis da Tabela 5; (b) FFT da curva do preço praticado encontrado no gráfico (a): os dois picos de menor frequência ocorrem para os valores 0.001 e 0.025 (1/dia), que correspondem aos períodos 1000 e 40 dias. 54

Figura 14 – (a) Gráfico da oferta e demanda de diferentes mercados em equilíbrio de fluxos. A curva da demanda é referente à abscissa superior, enquanto a oferta é referente a abscissa inferior; (b) Gráfico da oferta (definida unicamente pelo o que é produzido no dia) e demanda de diferentes mercados em equilíbrio de fluxos. Apesar dos gráficos (a) e (b) terem sido gerados com os mesmos parâmetros, são de simulações diferentes e, por isso, possuem valores diferentes. 55

Figura 15 – (a) Evolução temporal da oferta, demanda e preço praticado, para especificadamente $d_a = 1$ dia; (b) Evolução temporal da oferta (definida unicamente pelo o que é produzido por dia), demanda e preço praticado. O preço praticado tem unidade de preço (ordenada esquerda), enquanto as curvas de oferta e demanda tem unidade quantidade de bens comercializados (ordenada direita). Curvas geradas com as variáveis da Tabela 4. 55

Lista de tabelas

Tabela 1 – Conjunto de parâmetros comuns nas simulações do modelo sem reposição de estoque.	45
Tabela 2 – Conjuntos de parâmetros utilizados em cada simulação. Sendo que P se refere ao conjunto utilizado na simulação indicada. Demais parâmetros utilizados estão presentes na Tabela 1.	45
Tabela 3 – Parâmetros fixos que serão utilizados nas simulações seguintes. Casos omissos explicitarão quaisquer mudanças.	49
Tabela 4 – Valores de cada coeficiente utilizados na simulação que reproduziu os resultados presentes na Figura 9. Demais parâmetros utilizados constam na Tabela 3.	50
Tabela 5 – Valores de cada coeficiente utilizados na simulação que reproduziu os resultados presentes na Figura 13. Demais parâmetros utilizados constam na Tabela 3.	53

Lista de símbolos

x_η	quantidade do bem η
$p_\eta^{(i)}$	preço do bem η ofertado pelo vendedor i
$m^{(j)}$	orçamento do comprador j
c_j	preferência do comprador j
n, N_C	número total de compradores
N, N_V	número total de vendedores
N'_V	número de vendedores que cada comprador pode visitar
s_m	valor médio da oferta (por vendedor)
E_i	oferta do vendedor i
O_r	oferta relativa (percentagem da demanda que é ofertado)
C_p	custo de produção
τ	período (em dias)
τ_c	período (por número de compradores)
T	tempo total da simulação (em dias)
$T_S^{(i)}$	taxa de estoque do vendedor i
d_a	dias de estoque acumulado (para cada vendedor)
γ	percentagem do estoque em que o vendedor decide alterar o preço
σ	percentagem do preço em que o vendedor altera o preço

Sumário

	Introdução	19
I	CONCEPÇÕES MICROECONÔMICAS	21
1	CONSTRUÇÃO DO MODELO DE MERCADO	23
1.1	Otimização e equilíbrio	23
1.2	A curva de demanda	23
1.2.1	Formulação Matemática Análoga	24
1.3	A curva de oferta	25
1.4	Equilíbrio de mercado	26
1.5	Estática comparativa	27
2	DECISÕES INDIVÍDUAIS	29
2.1	Preferência	29
2.2	Decisão de compra	30
2.3	Compra em múltiplos vendedores	31
2.4	Variáveis globais	32
II	MODELAGEM MATEMÁTICA-COMPUTACIONAL	33
3	MODELAGEM BASEADA EM AGENTES	35
4	ESTRUTURA DO MODELO COMPUTACIONAL	37
4.1	Dinâmica de mercado	37
4.2	Mercado sem reposição de estoque	37
4.2.1	Distribuições dos parâmetros dos compradores e vendedores	39
4.3	Modelo com reposição de estoque	40
4.3.1	Variação do preço do bem por parte dos vendedores	40
4.3.1.1	Custo de produção	41
4.3.2	Fluxo de orçamento	41
III	RESULTADOS DAS SIMULAÇÕES	43
5	RESULTADOS DO MODELO SEM REPOSIÇÃO DE ESTOQUE .	45
5.1	Variação da preferência	45

5.2	Varição da oferta relativa	46
5.3	Varição do preço	47
6	RESULTADOS DO MODELO COM REPOSIÇÃO DE ESTOQUE .	49
6.1	Varição do preço de produção em regime de equilíbrio	49
6.2	Reação da oferta e demanda a mudança de preços	51
6.3	Estudo da convergência ou não das séries temporais	52
6.4	Equilíbrio de mercado	53
	Conclusão	57
	REFERÊNCIAS	59

Introdução

Microeconomia é a teoria que visa o estudo das decisões individuais e suas implicações no mercado. A economia avança com base no desenvolvimento de modelos de fenômenos sociais (VARIAN, 1992). Desta forma, o presente trabalho busca encontrar os elementos mínimos que devem estar presentes em um modelo para ser possível obter as curvas de demandas utilizadas na microeconomia. Ainda que a interpretação dessas propriedades pertençam ao campo da Economia, sua formalização e caracterização se inserem na abordagem interdisciplinar a partir de conceitos da Física.

A forma mais eficiente de implementar modelos de tal complexidade é pela automatização do processo através da criação de modelos computacionais. A modelagem baseada em agentes é um método conveniente para estudos econômicos. Isso porque as decisões tomadas pelos agentes são escolhas independentes baseadas nas condições que caracterizam o indivíduo e o meio. Temos ainda que, segundo Fagiolo et al. (2019, p.2), modelar sistemas econômicos complexos usando modelos baseados em agentes (MBAs) é uma abordagem relativamente recente em economia.

É comum ver a aplicação de métodos computacionais na simulação da evolução temporal com intenção de prever o que acontecerá com o mercado econômico. Entretanto, os métodos mais utilizados, apesar de rebuscados, não consideram muitas vezes as relações sociais e tendências dos indivíduos envolvidos, bem como padrões de variação dos mercados. Sendo que, entende-se a importância do comportamento individual das partes envolvidas, e esta não é uma simplificação que poderia ser feita em um modelo de mercado.

Por último, ressalta-se que mesmo o estudo sendo feito sobre as interações entre indivíduos, a interpretação é feita a partir das implicações dessas interações no mercado total. E, para esta análise, o problema será abordado utilizando técnicas da Física, em particular, da dinâmica estocástica, muito utilizada em Física Estatística. Buscamos entender como aspectos macroscópicos do mercado (elasticidade, equilíbrio, volatilidade, etc.) dependem de aspectos microscópicos, tais como preferência e orçamento do consumidor e oferta, custo de produção e preço de oferta do vendedor.

Parte I

Concepções microeconômicas

1 Construção do modelo de mercado

Para a construção de um modelo de mercado, este texto se fundamentou no trabalho de [Varian \(1992\)](#), intitulado *Microeconomic analysis*. Assim sendo, buscamos saber o que determina o preço de um bem, de modo que se tenha a descrição sintetizada de tal mercado. Em um modelo, podem ser considerados os bens A e B. Enquanto o bem A será o objeto de interesse do estudo, o bem B é uma variável de controle. Por isso, entende-se que as mudanças nos preços do bem A variam por causas descritas pelo modelo (variável exógena), enquanto as do bem B não (variável endógena).

1.1 Otimização e equilíbrio

O princípio da otimização: as pessoas tentam escolher o melhor padrão de consumo ao seu alcance.

O princípio do equilíbrio: os preços ajustam-se até que o total que as pessoas demandam seja igual ao total ofertado.

Em suma, o primeiro princípio diz que, se as pessoas são livres para escolherem suas ações, elas o farão da forma que desejam. Enquanto o segundo refere-se que em algum momento, a oferta não será compatível com as demandas das pessoas, implicando em uma mudança no comportamento do mercado.

1.2 A curva de demanda

Preço de reserva é o valor máximo que o indivíduo está disposto a pagar por um bem e, ainda assim, comprá-lo. Ou seja, se o bem tiver esse preço, é indiferente para a pessoa comprar ou não.

Se uma pessoa possui um preço de reserva p , isso significa que ela é exatamente indiferente entre obter o bem A e pagar um preço p , ou obter o bem B. Assim, o número de bens a serem vendidos a um dado preço p^* será exatamente igual ao número de pessoas cujo preço de reserva seja igual ou maior que p^* . Isso porque, se o preço de mercado for p^* , todos aqueles dispostos a pagar ao menos p^* pelo bem A irão adquiri-lo, e todos os que não estiverem dispostos a pagar p^* preferirão comprar o bem B.

A Figura 1.a representa a relação entre o número de pessoas que gostariam de comprar o bem A por um preço qualquer, sendo um exemplo de curva de demanda. A curva de demanda descreve a quantidade do bem demandada a cada preço possível. Se houver muitas pessoas e seus preços de reserva diferem pouco, a curva se tornará contínua,

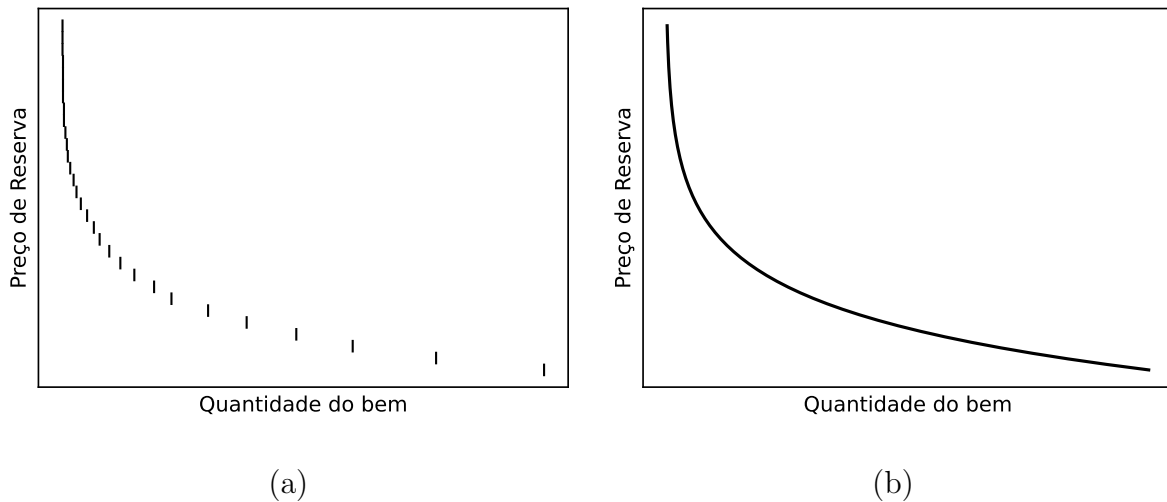


Figura 1 – (a) A curva de demanda de um bem. O eixo vertical mede o preço de mercado e o eixo horizontal, a quantidade do bem vendida a cada preço; (b) Curva de demanda de um bem com muitos demandantes. Devido ao grande número de demandantes, os saltos entre os preços serão pequenos e a curva de demanda possuirá o convencional formato suave.

Figura 1.b. Em síntese, “*demanda ou procura* pode ser definida como a quantidade de um determinado bem ou serviço que os consumidores desejam adquirir” (VASCONCELLOS; GARCIA, 2002, p.37).

1.2.1 Formulação Matemática Análoga

Dada uma distribuição aleatória e contínua para o preço de reserva normalizado de cada indivíduo, a probabilidade do valor de reserva ser p_r é descrita pela função de probabilidade $D(p_r)$. $F(p_r)$ é a probabilidade de que uma pessoa (ou fração do total de pessoas) tenha um preço de reserva maior que p_r , satisfazendo

$$F(p_r) = \int_{p_r}^{\infty} P(p'_r) dp'_r, \quad (1.1)$$

e $P(p'_r)$ é a densidade de probabilidade da variável aleatória p'_r .

Sabendo que, a soma de todas as probabilidades de se obter um valor p_r deve ser igual a 1, pois o preço de reserva está normalizado, então

$$\begin{aligned} 1 &= \int_0^{\infty} P(p'_r) dp'_r, \\ &= \int_0^{p_r} P(p'_r) dp'_r + \int_{p_r}^{\infty} P(p'_r) dp'_r. \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \\ \int_{p_r}^{\infty} P(p'_r) dp'_r &= 1 - \int_0^{p_r} P(p'_r) dp'_r. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Substituindo a expressão (1.3) na equação (1.1), achamos

$$F(p_r) = 1 - \int_0^{p_r} P(p'_r) dp'_r. \quad (1.4)$$

A função (1.4) possui comportamento expresso por

$$F(p_r) = \begin{cases} 0, & p_r < 0; \\ 0 \leq F \leq 1, & 0 \leq p_r \leq b; \\ 0, & p_r > p^{\max}. \end{cases} \quad (1.5)$$

Neste caso, p^{\max} é um valor limite, de modo que, para valores de $p_r > p^{\max} \Rightarrow F \rightarrow 0$. Logo, nenhum indivíduo comprará o bem por um preço superior a p^{\max} .

Para tornar $F(p_r)$ a função da curva de demanda, é necessário multiplicá-la pelo número n de consumidores interessados em comprar o bem, ou seja, justamente a quantidade do bem demandado, então, a função de demanda $D(p_r)$ é tal que

$$D(p_r) = n \left(1 - \int_0^{p_r} P(p'_r) dp'_r \right). \quad (1.6)$$

A Figura 1.b representa exatamente a curva de demanda dada pela relação $D(p_r)$ para o caso particular de uma função exponencial. Em que se plota a função inversa $p_r(D)$, já que $D(p_r)$ representa o número produtos exigidos para compra, pois, geralmente, a curva de demanda é traçada utilizando-se a função (1.5), com o preço no eixo vertical e o valor da função, $D(p_r)$, no eixo horizontal.

1.3 A curva de oferta

Supondo que se cobre pelo bem A um preço alto, p_a , e um baixo, p_b . As pessoas dispostas a comprar o bem A por um preço alto podem procurar um vendedor que cobre menos e oferecer-se para pagar um valor entre p_a e p_b . Tal transação favorece tanto o vendedor quanto o comprador. Como todas as partes procuram defender seus próprios interesses e conhecem os preços alternativos cobrados, uma situação de cobrança de preços diferentes pelo mesmo bem não pode persistir em equilíbrio.

O novo preço de equilíbrio depende da quantidade de tempo durante a qual o mercado está sendo examinado. Se é considerado um período de vários anos, em que a oferta de A mude significativamente, o número de bens do tipo A certamente dependerá do preço cobrado. Porém, a curto prazo, a oferta será aproximadamente constante em algum nível predeterminado, Figura 2.

A curva de oferta constante pode ser definida matematicamente como

$$S(p) = \text{constante}, \quad p \geq 0, \quad (1.7)$$

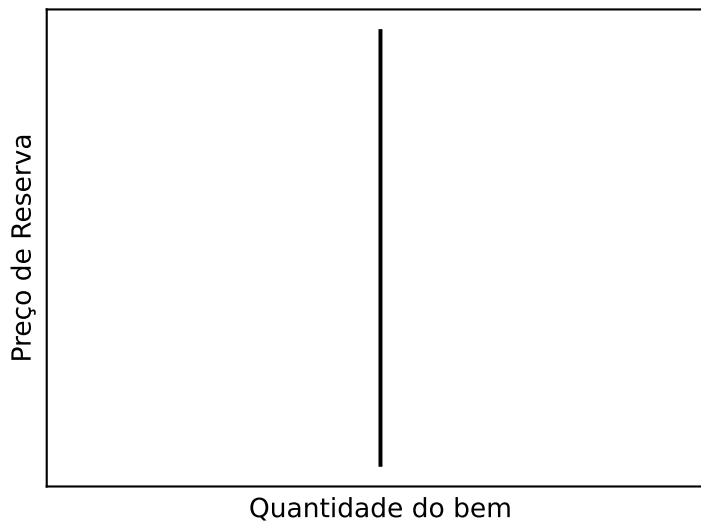


Figura 2 – Curva de oferta de curto prazo. A oferta do bem é fixa no curto prazo.

em que, p é qualquer preço de reserva e $S(p)$ a função que devolve a quantidade do bem ofertada. Com isso, temos que “a oferta representa a produção total de mercadorias para o estoque” (WHELAN; MSEFER; CHUNG, 2001, p.16).

1.4 Equilíbrio de mercado

Na Figura 3.a os gráficos de oferta e demanda foram sobrepostos, utilizando p^* para representar o preço onde a quantidade do bem demandado iguala-se à quantidade ofertada. Esse é o preço de equilíbrio do bem A. A esse preço, todo consumidor disposto a pagar ao menos p^* poderá comprá-lo, e todos os vendedores conseguirão vender seu bem ao preço corrente de mercado. Nem os compradores, nem os vendedores têm motivo para mudar seu comportamento. É por isso que se refere a essa situação como um equilíbrio: não há mudança no comportamento observada.

Seja um preço $p < p^*$ em que a demanda é maior que a oferta. A esse preço, haverá mais pessoas dispostas a pagar o preço p do que produtos disponíveis. Do mesmo modo, suponhamos que o preço do bem A seja algum $p > p^*$. Então, haverá menos pessoas dispostas a pagar p do que produtos disponíveis.

No equilíbrio de mercado, todos os que estiverem dispostos a pagar p^* ou mais comprarão o bem A, e todos os que estiverem dispostos a pagar menos que p^* comprarão o bem B. Quem possuir um preço de reserva p^* será indiferente entre comprar qualquer um dos bens.

Além da oferta com quantidade fixa e o preço de equilíbrio determinado pela demanda, têm-se o caso em que há a oferta de quaisquer quantidade de bens a um preço constante. Neste caso, o preço de equilíbrio é determinado pelas condições de oferta, e a

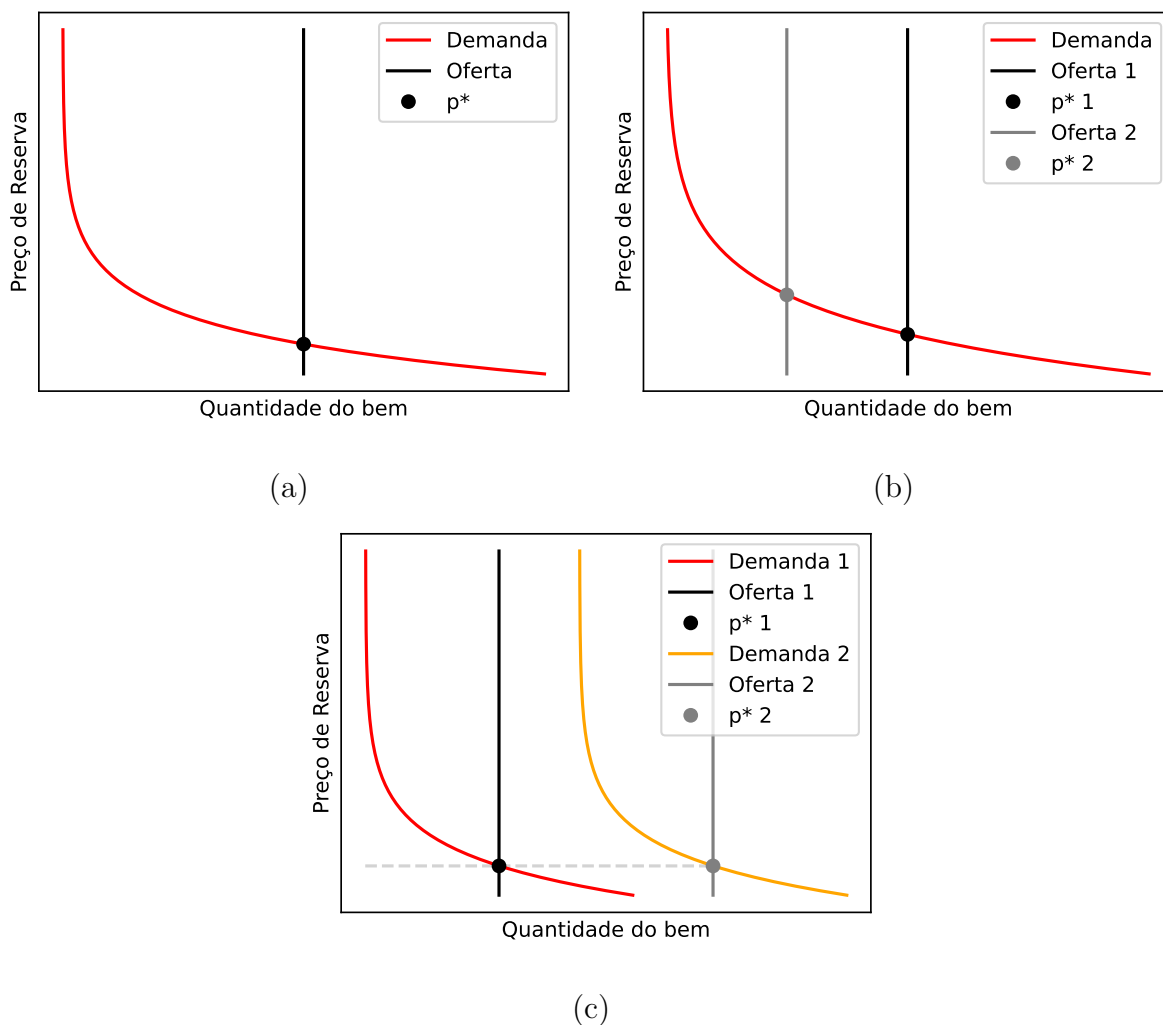


Figura 3 – (a) O equilíbrio no mercado do bem. O preço de equilíbrio, p^* , é dado pela interseção das curvas de oferta e demanda; (b) O aumento da oferta de um bem. À medida que a oferta do bem aumenta, o preço de equilíbrio diminui; (c) Efeitos da venda de um bem. Se a demanda e a oferta se deslocarem para a esquerda na mesma grandeza, o preço de equilíbrio permanece inalterado. Entende-se por 1 as quantidades precedentes, e por 2 às novas.

quantidade de equilíbrio determinada pela demanda.

1.5 Estática comparativa

A análise da mudança do preço dos bens conforme a variação dos aspectos do mercado é uma estática comparativa, pois compara dois equilíbrios “estáticos” sem considerar como o mercado se move de um equilíbrio para outro.

O aumento ou diminuição da oferta do bem A, por exemplo, faz com que o preço de equilíbrio caia ou aumente, respectivamente, como consta na Figura 3.b. Agora, caso haja uma queda na oferta, consequência da venda para alguns compradores, então, o preço

de equilíbrio se manterá, pois, a oferta e a demanda irão diminuir igualmente. Exemplo representado na Figura 3.c.

2 Decisões individuais

2.1 Preferência

Para desenvolver a teoria e determinar os elementos mínimos das interações entre compradores e vendedores, delimitam-se axiomas sobre as preferências do tomador de decisão. E, com isso, observam-se as consequências dessas preferências. Desta forma, pode-se primeiro definir uma cesta de bens (x_1, x_2) , que indicam as quantidades dos bens 1 e 2 demandadas por um indivíduo, além de referenciar os preços de aquisição de cada bem como (p_1, p_2) . Com isso, impõe-se a restrição orçamentária de um consumidor de orçamento m como

$$x_1 p_1 + x_2 p_2 = m. \quad (2.1)$$

O interesse está no estudo da demanda, isso significa a análise de x_1 e x_2 . Portanto, faz-se

$$x_2 = \frac{m}{p_2} - \frac{p_1}{p_2} x_1. \quad (2.2)$$

Rotulando o conjunto descrito (x_1, x_2) por \mathbf{X} e, supondo que exista outro conjunto de bens \mathbf{Y} , denotam-se as preferências dos consumidores, ou ordenamento parcial das cestas (GALE, 1989, p.43), sobre os conjuntos de bens por: estrita $(x_1, x_2) \succ (y_1, y_2)$; indiferente $(x_1, x_2) \sim (y_1, y_2)$; ou fraca $(x_1, x_2) \succeq (y_1, y_2)$.

Sabendo isso, enunciam-se as propriedades fundamentais do espaço das cestas de bens que o torna racional

- Completude: qualquer conjunto pode ser comparado. Isto é, para quaisquer conjuntos \mathbf{X} e \mathbf{Y} , pode-se escrever que $\mathbf{X} \succeq \mathbf{Y}$, $\mathbf{X} \preceq \mathbf{Y}$ ou $\mathbf{X} \sim \mathbf{Y}$;
- Reflexividade: qualquer conjunto é no mínimo tão preferível quanto ele próprio, $\mathbf{X} \succeq \mathbf{X}$;
- Transitividade: se $\mathbf{X} \succeq \mathbf{Y}$, e $\mathbf{Y} \succeq \mathbf{Z}$, então $\mathbf{X} \succeq \mathbf{Z}$.

Com um conjunto $\mathbf{X} = (x_1, x_2)$, podem ser geradas curvas de indiferença, as quais representam a indiferença do consumidor entre comprar determinadas quantidades do bem 1 e do 2. As curvas de indiferença são curvas de nível, e não se pode passar de um nível ao outro, pois os níveis são dados por diferentes rendas, como visto na restrição orçamentária (2.1).

Uma maneira de assimilar a preferência de um bem a outro, é utilizando funções de utilidade que, matematicamente, pode ser qualquer função que faça transformações

monotônicas, preservando o ordenamento das preferências. Sendo assim, para uma determinada preferência $\mathbf{X} \succeq \mathbf{Y}$, têm-se que $u(x_1, x_2) > u(y_1, y_2)$, em que u é a função utilidade.

No presente trabalho, optou-se por utilizar a função de Cobb-Douglas, dada por

$$u(x_1, x_2) = x_1^c x_2^d, \quad (2.3)$$

em que c e d são coeficientes positivos que descrevem a preferência dos consumidores em comprar os respectivos bens 1 e 2.

O conceito de utilidade pode ser criticado de diversas formas, inclusive no significado do seu valor numérico. Esse valor numérico não é necessário para modelar a decisão de compra, basta que se estabeleça uma ordem de preferência.

2.2 Decisão de compra

Analisa-se como se varia a utilidade, dada uma variação infinitesimal nas quantidades de um dos bens, em outros termos, a derivada parcial de $u(x_1, x_2)$, logo

$$U_m^{(1)} = \frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_1}. \quad (2.4)$$

A equação (2.4) é a definição de utilidade marginal, que mensura a variação da utilidade conforme se variam os bens. Que leva naturalmente a definição de taxa marginal de substituição,

$$du(x_1, x_2) = U_m^{(1)} dx_1 + U_m^{(2)} dx_2, \quad (2.5)$$

impõe-se que a variação de u seja nula, pois, implica na maximização da utilidade. Resolvendo e escrevendo a variação para a função de Cobb-Douglas, encontra-se a dependência das quantidades de bens a serem comprados conforme a preferência do consumidor:

$$x_1 = \frac{c}{c+d} \frac{m}{p_1}, \quad (2.6)$$

$$x_2 = \frac{d}{c+d} \frac{m}{p_2}. \quad (2.7)$$

As quais agora dependem explicitamente das preferências dos consumidores de adquirirem as quantidades x_1 e x_2 dos bens. Deve-se ressaltar ainda que, as equações (2.6) e (2.7) são, de fato, as demandas individuais dos bens 1 e 2. Introduzimos ainda um vínculo entre c e d tal que $c + d = 1$, de modo que cada coeficiente seja a porcentagem da preferência do consumidor pelo bem em questão.

Enfim, deduz-se que o orçamento e o coeficiente c da função utilidade de Cobb-Douglas são as características fundamentais de cada comprador em um modelo simplista.

Estes dois números são os elementos mínimos de um indivíduo para descrever sua demanda. Já para um vendedor, o preço cobrado pelo bem 1 e seu estoque que serão as variáveis bases para descrever a oferta.

2.3 Compra em múltiplos vendedores

No nosso modelo, o comprador poderá visitar até N'_V vendedores e comprar produtos consecutivamente, para o caso de apenas um vendedor não ter em seu estoque a quantidade desejada, até que sua demanda esteja satisfeita. Dessa forma, generalizamos a equação (2.1)

$$x_1^{(1)}p_1^{(1)} + x_1^{(2)}p_1^{(2)} + \dots + x_1^{(\eta)}p_1^{(\eta)} + x_2p_2 \leq m, \quad (2.8)$$

em que η é o número de vezes que o mesmo indivíduo comprou x_1 por $p_1^{(i)}$.

Resolvendo para x_2

$$x_2 = \frac{m}{p_2} - \frac{\sum_i^\eta p_1^{(i)} x_1^{(i)}}{p_2}. \quad (2.9)$$

Para resolvermos para x_1 , começamos para o caso particular de duas compras consecutivas, ou seja, $x_1 = x_1^{(1)} + x_1^{(2)}$, em que $x_1^{(1)}$ é a primeira quantidade adquirida, e $x_1^{(2)}$ a segunda. Na restrição orçamentária teremos

$$x_2 = \frac{m}{p_2} - \frac{p_1^{(1)}x_1^{(1)} + p_1^{(2)}x_1^{(2)}}{p_2} \quad (2.10)$$

Calculando novamente a variação da utilidade, equação (2.3), em termos da segunda compra de maneira que esta seja a melhor cesta de bens possível ($\partial u = 0$), leva-nos a

$$x_1^{(2)} = \frac{c}{c+1} \frac{m}{p_1^{(2)}} - \frac{c}{c+1} \left(p_1^{(1)} + \frac{p_1^{(2)}}{c} \right) \frac{x_1^{(1)}}{p_1^{(2)}}. \quad (2.11)$$

Podemos interpretar da demanda individual do bem 1, na segunda compra, que o primeiro termo à direita é exatamente o que esperaríamos caso fosse a primeira vez que o comprador estivesse adquirindo o bem, Eq. 2.6. Mas como não é o caso, o segundo termo à direita subtrai uma quantidade proporcional ao que já foi adquirido, a preferência pelo bem e os valores de cada compra. Para mais de duas compras consecutivas, conseguimos iterar o resultado obtido.

Ao se pensar no mercado total, será relevante saber quanto cada indivíduo pagou pela unidade do bem. Considerar múltiplas compras faz com que um comprador possa ter mais de um preço pago pelo bem. Com o intuito de simplificar essa informação, podemos calcular apenas o preço médio da compra. Este definimos como a média dos valores pagos ponderados pela quantidade de bens adquiridas por cada valor.

2.4 Variáveis globais

Após definir as características de cada agente, utilizando-se da teoria microeconômica, podemos definir variáveis globais a partir de tais quantidades, que nos será úteis para analisar o mercado total. Para generalizá-la ao mercado, que considera um conjunto de indivíduos, definimos a demanda de mercado total

$$X^1(p_1, p_2, m_1, \dots, m_i) = \sum_i^n x_i^1(p_1, p_2, m_i). \quad (2.12)$$

Definimos ainda a expectativa de demanda em função do preço médio do produto e da preferência e orçamento do comprador

$$\bar{X}^1 = \frac{1}{N} \sum_i^n \frac{c_i}{c_i + 1} \frac{m_1^{(i)}}{p_1^m}, \quad (2.13)$$

para n e N sendo o número total de compradores e vendedores, respectivamente, e p_1^m o preço médio do mercado. Os vendedores podem usar essa estimativa como base no controle da oferta do mercado simulado. Esta nos diz quanto cada vendedor deve ofertar, de maneira que a soma das ofertas individuais seja, na média, o que a população total de compradores demanda.

Para a oferta média de mercado, fazemos

$$s_m \equiv O_r \bar{X}^1 = \frac{O_r}{N_V} \sum_i^{N_C} \frac{c_i}{c_i + 1} \frac{m_1^i}{p_1^m}, \quad (2.14)$$

estabelecendo o parâmetro O_r como a oferta relativa e p_1^m o preço médio do bem 1. Com isso, para a oferta relativa $O_r = 1.0$, o produto da oferta média pelo número de vendedores será justamente a demanda de mercado. Ou seja, a oferta relativa determina escassez ou abundância do bem 1. Em outras palavras, a oferta relativa torna a oferta média proporcional à expectativa de demanda, pois, é estimado quanto os compradores estão dispostos a comprar e ajustamos a oferta com base nessa quantidade.

Quanto ao p_1^m , calculamo-lo da mesma maneira que para um único comprador, mas agora considerando toda a população: o preço que cada comprador pagou, ponderado pela quantidade de bens.

Parte II

Modelagem matemática-computacional

3 Modelagem baseada em agentes

Embora não haja um acordo universal sobre a exata definição do termo “agente”, no contexto da modelagem computacional, as definições tendem a concordar mais pontos do que a discordar (MACAL; NORTH, 2005). Desta forma, MACAL e NORTH propõem as seguintes propriedades que um modelo deve ter para ser considerado baseado em agentes:

- Um agente é identificável, um indivíduo discreto com um conjunto de características e regras que regem o seu comportamento e capacidade de tomada de decisão;
- Um agente está situado, vivendo em um ambiente no qual interage com outros agentes. Agentes possuem protocolos para interação com outros agentes, como protocolos de comunicação e a capacidade de resposta ao ambiente;
- Um agente tem objetivos a serem alcançados;
- Um agente pode funcionar independentemente em seu ambiente e nas suas relações com outros agentes, pelo menos em uma gama limitada de situações;
- Um agente é flexível e pode aprender e adaptar seus comportamentos ao longo do tempo com base em experiências.

Neste trabalho, determina-se que os agentes serão, de fato, os compradores e vendedores, que se situam em um mercado. Sendo que, os objetivos de cada um será vender ou comprar determinado bem. Suas regras serão descritas e bem determinadas pela teoria de mercado da microeconomia.

Compreende-se que a capacidade de aprender dos agentes envolvidos, está relacionada ao fato do comprador diferenciar o que é ou não uma compra favorável. Bem como, realizar mais de uma compra para obter a quantidade desejada do bem, em função do preço.

4 Estrutura do modelo computacional

O projeto se desenvolveu a partir da criação de um modelo computacional escrito na linguagem *Python*. Dito isso, a implementação da modelagem baseada em agentes, neste projeto, se deu pela utilização de listas que, em computação, dizem respeito a uma coleção de dados que representam, neste contexto, os agentes envolvidos: compradores e vendedores.

Como detalhado no Capítulo 2, cada classe de agente, comprador ou vendedor, possui informações fundamentais que os caracterizam. A geração dessas informações deve ser dada de forma aleatória, para se ter uma descrição estatística, na intenção de se observar ou não a convergência do comportamento dos agentes.

Para a geração aleatória de tais valores, foi utilizada a biblioteca *NumPy*, que dentre sua galeria de funções matemáticas para *Python*, possui geradores de números aleatórios, para diferentes distribuições de probabilidade. A fim de se ter uma descrição próxima ao comportamento observado nas interações microeconômicas, discutiremos adiante com quais distribuições de probabilidade serão geradas cada informação das populações, tanto dos vendedores, como dos compradores. Isto é, por exemplo, entender como a renda de uma dada população se distribui entre os diferentes indivíduos que a constitui.

4.1 Dinâmica de mercado

Os indivíduos têm interesse em comprar cestas de bens do tipo (x_1, x_2) , sendo que o bem 1 será o objeto de estudo, enquanto o bem 2 é o conjunto de outros bens nos quais pode alocar seus recursos. À vista disso, haverá N_V vendedores que oferecem apenas o bem 1. Para o estoque e preço deste bem, terão distribuições de probabilidade, de tal sorte que cada vendedor possuirá um estoque E_i , e venderá o bem por determinado valor $p_1^{(i)}$, em que o índice i diz respeito ao vendedor, variando de $i = 1$ até $i = N_V$.

Com relação aos compradores, cada um terá um orçamento m_j , e uma preferência c_j , aqui c é exatamente o coeficiente presente na equação (2.3). Análogo aos vendedores, o índice j refere-se ao comprador, variando de $j = 1$ até $j = N_C$, em que N_C é o número total de compradores.

4.2 Mercado sem reposição de estoque

Quanto à interação inicial entre compradores e vendedores, deseja-se a mais simples. Isto posto, há uma rotina que varia os compradores de forma que estes interajam

com os vendedores. Entretanto, se os compradores visitassem todos os vendedores, tornase claro que o de menor preço venderia todo seu estoque, em seguida o de segundo menor preço e assim em diante.

Conseqüentemente, impomos que os compradores não visitem todos os vendedores. Aqui se faz uma sub-rotina que, para cada comprador, é variado um número específico de vendedores escolhidos. De modo que, todo comprador sorteará um número N'_V dentre a população de vendedores, e visitará apenas estes escolhidos, segundo o esquema da Figura 4.

Para adquirir o bem 1, os compradores ordenarão os vendedores escolhidos do menor para o maior preço $p_1^{(k)}$, onde k refere-se apenas aos vendedores escolhidos, variando de $k = 1$ até $k = N'_V$, e comprará a quantidade $x_1^{(1)}$, conforme a relação (2.6).

Caso o vendedor de menor preço $p_1^{(1)}$ não possua a quantidade demandada em seu estoque, o comprador obterá o estoque total e visitará o vendedor com segundo menor preço $p_1^{(2)}$ para comprar uma quantidade $x_1^{(2)}$, dada pela equação (2.11).

Na Figura 4, pode-se interpretar o modo como ocorrem as interações. Para um número fixo de vendedores escolhidos, $N'_V = 3$, temos que os compradores chegam ordenadamente aos vendedores, e então decidem em quais três irão verificar o preço do bem 1. Na primeira iteração, vemos que o comprador 1 decide ir aos vendedores 2, 4 e 6. Já na segunda iteração, após o comprador 1 realizar sua compra, o comprador 2 visita os vendedores 1, 4 e 5.

Nota-se que, desta forma, alguns dos vendedores poderão não realizar vendas, e os compradores nem sempre terão a possibilidade de comprar do vendedor de menor preço.

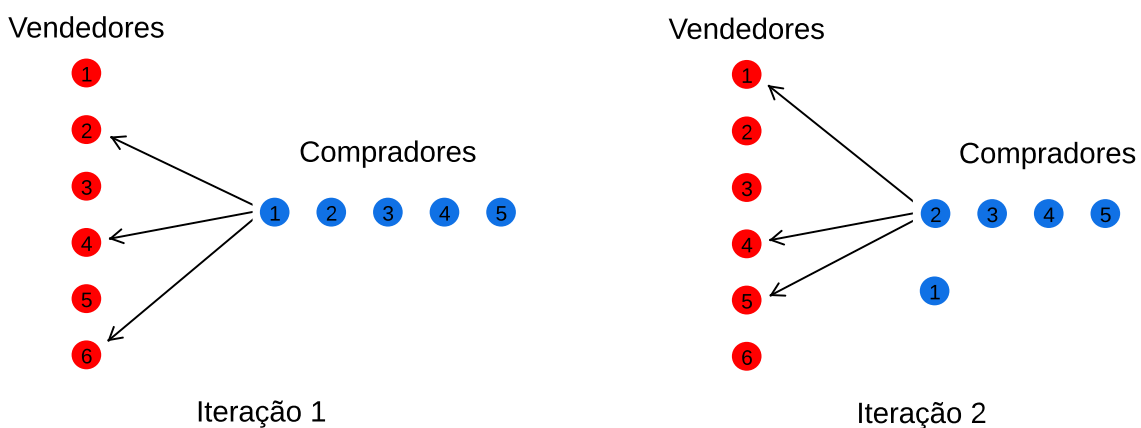


Figura 4 – Esquema ilustrativo da interação entre $N_C = 5$ compradores e $N_V = 6$ vendedores. À esquerda, na primeira iteração, o comprador escolhe $N'_V = 3$ vendedores dentre os demais, começa suas compras do menor ao maior preço. À direita, na segunda iteração, o processo se repete para o segundo comprador.

Com o que foi exemplificado, entende-se que o tempo passa de forma discreta e limitada. Ou seja, é considerado apenas um intervalo temporal dado por uma rotina que varia os compradores, em que no início, os vendedores possuem um estoque inicial e nenhuma venda. Após a iteração de toda a população de compradores, ou melhor, ao final da rotina que os variam, encerra-se a dinâmica. Por fim, deve-se analisar quais vendedores realizaram vendas, quais obtiveram maior percentual de receita e demais estudos.

4.2.1 Distribuições dos parâmetros dos compradores e vendedores

Com a construção de um modelo inicial do mercado sem reposição de estoque, como descrito anteriormente, queremos notar comportamentos esperados pela descrição teórica. Primeiro deve ser discutido as distribuições de probabilidade que regem as quantidades definidoras dos agentes.

Utilizando-se da relação (1.1), podemos obter expressões probabilísticas para as quantidades desejadas. Portanto, assumindo a distribuição de probabilidade para o orçamento individual, tomamos $F_m(m_j)$ como função exponencial tal que

$$F_m(m_j) = \frac{\mu}{\beta} e^{-\frac{m_j}{\beta}}, \quad (4.1)$$

sendo μ e β parâmetros livres. Foi escolhida uma função exponencial, pois, a renda se distribuirá de forma que a maioria dos indivíduos terá baixo orçamento, enquanto a probabilidade de terem orçamento alto cairá exponencialmente.

Para o coeficiente de preferência c_j , assumiu-se uma distribuição uniforme, variando em torno de um valor médio c_m

$$F_c(c_j) = \begin{cases} \frac{c_j}{2c_m}, & 0 \leq c_j \leq 2c_m, \\ 0, & 0 \geq c_j \geq 2c_m. \end{cases} \quad (4.2)$$

Analogamente, para o preço do bem, com preço de mercado $p_1 = (p_1^{\min}, p_1^{\max})$, para que o menor preço não seja nulo,

$$F_{p_1}(p_1^{(i)}) = \begin{cases} \frac{p_1^{(i)}}{2p_1^{\min}}, & p_1^{\min} \leq p_1^{(i)} \leq p_1^{\max}, \\ 0, & p_1^{\min} \geq p_1^{(i)} \geq p_1^{\max}. \end{cases} \quad (4.3)$$

Já para estoque individual E_i , considerou-se que

$$F_s(E_i) = \begin{cases} \frac{E_i}{2s_m}, & 0 \leq E_i \leq 2s_m, \\ 0, & 0 \geq E_i \geq 2s_m, \end{cases} \quad (4.4)$$

em que o valor médio do estoque s_m é calculado em função da demanda de mercado média \bar{X}^1 , de acordo com (2.14).

4.3 Modelo com reposição de estoque

O equilíbrio entre oferta e demanda só é possível se existir reposição do estoque, caso contrário, o esgotamento dos recursos finitos leva a um aumento ilimitado dos preços, sem que o equilíbrio seja atingido. Ou seja, agentes compradores devem chegar continuamente ao mercado, havendo um fluxo constante de recursos financeiros por parte dos compradores, e reposição do estoque dos vendedores, Figura 5.

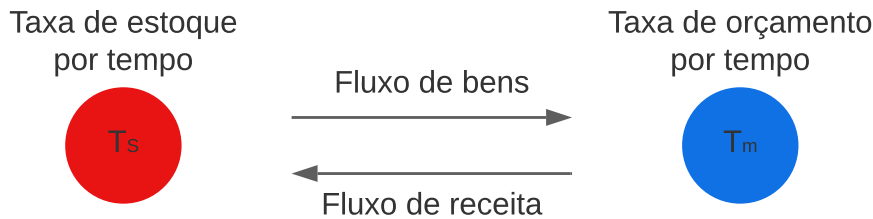


Figura 5 – Esquema ilustrativo de um modelo contínuo da interação entre compradores e vendedores. O resultado da interação entre os agentes é interpretado como fluxos de demanda e oferta.

Desta forma, se a taxa de reposição de estoque for maior que a saída do produto – a taxa de compra – então o estoque começará a acumular e, caso contrário, haverá falta de bens. Espera-se que os preços se conformem até que a demanda total e a oferta de mercado se estabilizem. Sendo assim, é de interesse observar a que preço e quantidade ofertada do bem o mercado se estabiliza, e quais condições o fazem variar. A taxa de reposição dos estoques pode ser interpretada alternativamente como a taxa na qual o vendedor produz seu bem.

4.3.1 Variação do preço do bem por parte dos vendedores

Considerando que agora os vendedores podem ter acúmulo ou falta de estoque, faz sentido acrescentar regras de mudança da precificação. Logo, caso o estoque esteja acumulando, então o vendedor poderá abaixar o preço, com intenção de aumentar suas vendas. Vice-versa, poderá aumentar o preço para obter mais lucro.

Os parâmetros que devem ser acrescentados são: a que porcentagem do estoque o vendedor deve alterar o preço do bem, e em que quantidade o valor deve ser acrescido ou diminuído. Isto é, ao passar determinado período τ , em dias, toda a população de vendedores receberá uma nova remessa de produtos $S^{(i)}$, de modo que a taxa de reposição de estoque seja dada por $T_S^{(i)} = S^{(i)}/\tau$. Optamos por utilizar o período $\tau = 1$ dia.

Ao final de cada período, cada vendedor deve analisar seu estoque atual $E_t^{(i)}$ ¹. Caso $E_t^{(i)} > \gamma_1 d_a T_S^{(i)}$, o vendedor decide abaixar o preço do bem por uma porcentagem

¹ Note que, o índice i é referente ao vendedor, em que $1 \leq i \leq N_v$, enquanto t é relativo ao período iterado (em dias), em que $1 \leq t \leq T$, em que T é o tempo total da simulação.

σ_1 . Onde γ_1 é a porcentagem do estoque que o vendedor decide diminuir seu preço, e d_a é o número de dias que o vendedor deseja ter de estoque acumulado². Para o acréscimo no valor do bem por uma porcentagem σ_2 , basta ser verdade que $E_t^{(i)} < \gamma_2 d_a T_S^{(i)}$. Inference-se que $\gamma_1 > 1$, $\gamma_2 < 1$, $\sigma_1 < 1$ e $\sigma_2 > 1$.

4.3.1.1 Custo de produção

Caso o vendedor abaixe seu preço e continue sem vender, este continuaria produzindo sua mercadoria. Manter a produção de um produto que não é vendido – ou é vendido mais barato que produzido – causaria prejuízos para o vendedor, já que este deve pagar pela produção do bem. Para amenizar o prejuízo, o vendedor deve optar por não produzir o bem, e continuar abaixando seu preço de venda. Desse jeito, poderá conseguir algum retorno financeiro do que já foi produzido e, mesmo que saia no prejuízo, não há outra possibilidade acessível. Para que o vendedor volte a produzir, é necessário que o valor de venda seja superior ao custo de produção, visando seu lucro.

Novamente, por simplicidade, optamos por determinar o custo de produção C_p por uma distribuição de probabilidade uniforme, para $C_p^{\min} < C_p < C_p^{\max}$. Além de que o vendedor pode optar apenas por produzir ou não, e não reduzir sua produção. Temos também que a taxa de reposição do estoque ($T_S^{(i)}$) é exatamente a quantidade de produção a cada período, no caso, de 1 dia.

4.3.2 Fluxo de orçamento

Para empregar o modelo sem reposição de estoque, e não ser necessário criar regras para a taxa de renda, bastamos definir que, cada período é dado em função do número de compradores. Em outras palavras, ao ocorrerem τ_c visitas (assumindo visitas em todos os vendedores), consideramos que se passou um período e que, no segundo período, a nova população de compradores será, na média, a mesma que a primeira, com seus orçamentos renovados. Isto significa que, temos o período definido em termos de dias, $\tau = 1$ dia, e o período definido em termos dos compradores, τ_c que, por conveniência, será $\tau_c = 1000$ compradores.

² A princípio, não há como saber quanto de estoque equivale à venda de um dia, até porque esse número não é fixo. Então, como este é apenas um parâmetro de ajuste, tomaremos como o estoque de um dia sendo exatamente a capacidade de produção (quantidade de bens que os vendedores produzem a cada dia) de cada vendedor.

Parte III

Resultados das simulações

5 Resultados do modelo sem reposição de estoque

As funções computacionais referentes a densidade de probabilidade, pertencentes a biblioteca *NumPy*, recebem exatamente os valores trabalhados em cada caso. De forma que, para distribuição normal, temos os valores de máximo e mínimo do preço de mercado, os parâmetros médios da preferência e do estoque, e os coeficientes μ e β para a distribuição exponencial.

Para as simulações seguintes, do modelo sem reposição de estoque, os parâmetros presentes na Tabela 1 serão comuns. Pois, estes dizem respeito as quantidades que, o efeito de suas variações, não serão estudadas. Ou seja, apenas serão mostradas as implicações da variação da preferência dos consumidores e a oferta por parte dos vendedores.

μ	β	p_1^{\min}	p_1^{\max}	p_2	N_C	N_V	N'_V
1.0	1.0	0.5	1.5	1.0	500	50	10

Tabela 1 – Conjunto de parâmetros comuns nas simulações do modelo sem reposição de estoque.

5.1 Variação da preferência

Para estudarmos a variação do estoque de cada vendedor resultante do aumento ou diminuição da preferência de uma população de compradores, tomamos o conjunto de parâmetros P_1 presentes na Tabela 2. Gerou-se então a Figura 6.a. Quanto mais violeta a curva, ou seja, quanto maior o preço, mais lento é o decaimento do estoque. De fato, apesar de ser um resultado que pareça trivial, deve ser ressaltado que o processo é estatístico. Isto é, os compradores não escolhem o vendedor de menor preço, e sim o de menor preço disponível para ele.

	c_m	O_r
P_1	0.5	0.5
P_2	0.2	0.5
P_3	0.2	1.0

Tabela 2 – Conjuntos de parâmetros utilizados em cada simulação. Sendo que P se refere ao conjunto utilizado na simulação indicada. Demais parâmetros utilizados estão presentes na Tabela 1.

Ao se diminuir o coeficiente de preferência médio, é esperado que haja uma diminuição nas vendas por indivíduo. Pois, podemos entender a preferência como o interesse

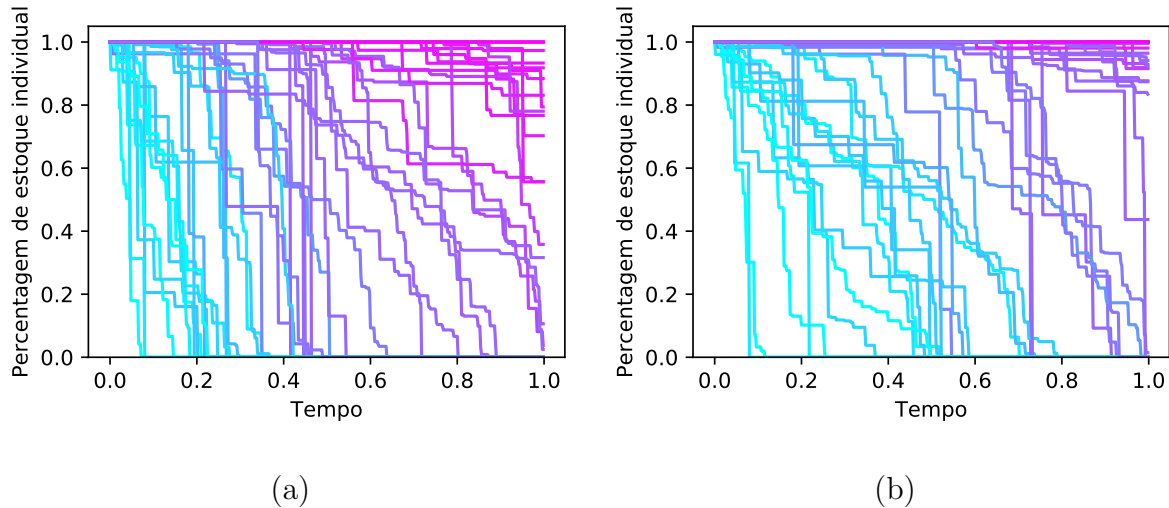


Figura 6 – Gráfico da evolução temporal da percentagem do estoque individual. Simulação referente aos conjuntos de parâmetros presentes: (a) P_1 ; (b) P_2 ; presentes na Tabela 2. Cada curva é referente a um vendedor. A cor da curva expressa seu preço, baixo para curvas azuis e alto para curvas violetas, de forma contínua.

intrínseco do indivíduo em adquirir o bem, seja por necessidade ou benefício próprio. Então, abaixar a preferência de toda uma população de compradores faz com que o interesse individual pelo bem caia. Utilizando um novo valor de c_m , menor que o gerador da simulação da Figura 6.a, (conjunto de parâmetros P_2 , Tabela 2), nota-se imediatamente a reação dos agentes, comparando as Figuras 6.

Neste segundo caso, a população de compradores está menos interessada em comprar o bem, devido à diminuição da preferência, significando que seu preço de reserva diminuiu, em referência ao caso anterior.

5.2 Variação da oferta relativa

Variando agora a oferta relativa, podemos estudar a receita individual produzida pelo bem em função do preço. Desta forma, considerando o conjunto de parâmetros P_1 (Tabela 2), é produzida a Figura 7.a. Como a oferta relativa diz respeito a percentagem da demanda que está sendo ofertada, percebe-se que para $O_r = 0.5$, o bem em questão está sendo ofertado em menor quantidade que demandado. Como não há reposição dos estoques dos vendedores, o bem apenas se esgota rapidamente, fazendo com que os compradores acabem pagando por um preço maior que o preço médio de mercado. Portanto, vemos no histograma que, vendedores com preço de oferta acima do valor médio, $p_1^m = 1.0$, conseguem comercializar seus produtos e ter uma receita mais elevada.

Aumentar unicamente a oferta relativa, que antes era de $O_r = 0.5$ (conjunto de parâmetros P_2 , Tabela 2) para $O_r = 1.0$ (conjunto de parâmetros P_3 , Tabela 2), faz com que os vendedores com preço de oferta acima da média não consigam vender seus

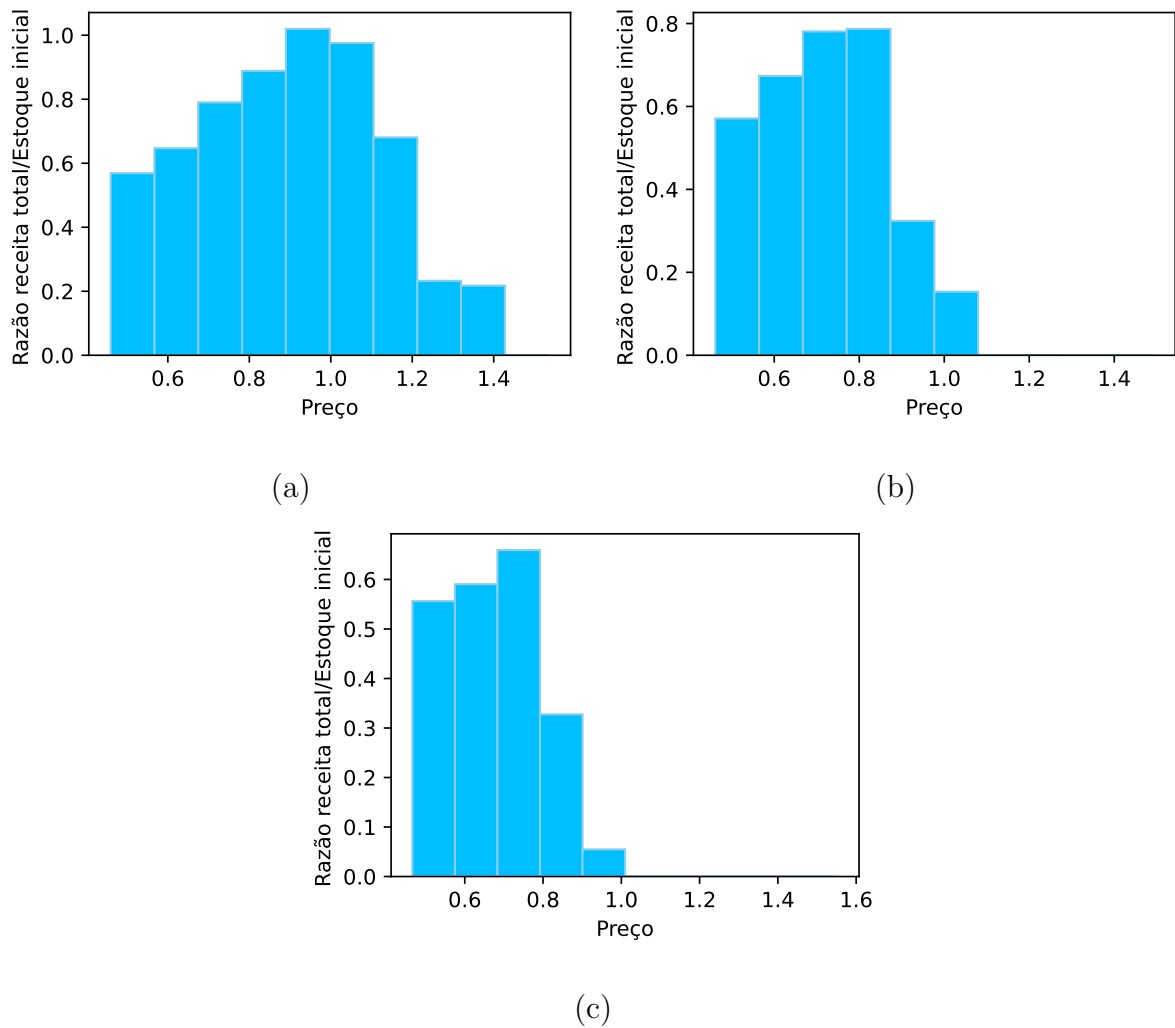


Figura 7 – Histograma da receita por produto em função do preço de venda (preço médio $p_1^m = 1.0$). Simulação produzida com o conjunto de parâmetros: (a) P_1 ; (b) P_2 ; (c) e P_3 ; presentes na Tabela 2.

produtos, resultando na perda de receita para $p_1 > 1.0$, conforme a Figura 7.c.

Em uma última análise, considerando o conjunto de parâmetros P_2 (Tabela 2), é gerado o gráfico presente na Figura 7.b. A semelhança entre as Figuras 7.b e c indicam que a diminuição da preferência do consumidor possui efeito semelhante ao aumento da oferta de mercado, no que se refere a receita do vendedor.

5.3 Variação do preço

Por fim, é possível analisar o comportamento do preço, apontando os valores de mínimo, máximo e praticado a cada instante. Para o conjunto de parâmetros P_1 (Tabela 2), Figura 8.a, onde a oferta relativa é baixa, o preço mínimo do bem salta algumas vezes, ao passar do tempo, para um preço mais elevado. Isso é devido, nesta simulação, ao consumo constante paralelo a não reposição dos estoques, que leva ao esgotamento do

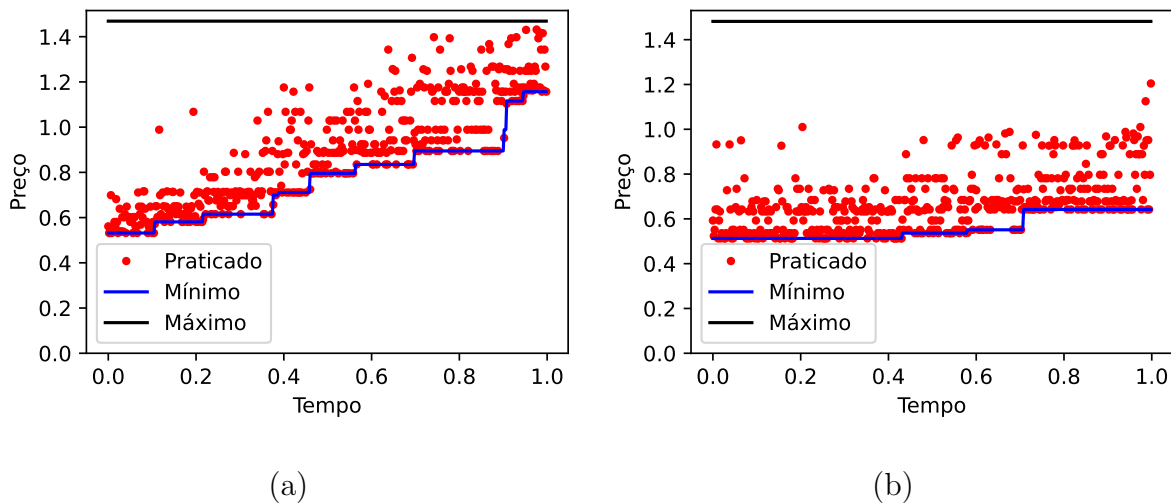


Figura 8 – Gráfico do preço em função do tempo. Simulação referente aos conjuntos de parâmetros: (a) P_1 ; (b) P_2 ; presentes na Tabela 2.

bem para os vendedores de menor preço.

Para o mercado produzido com o conjunto de parâmetros P_3 (Tabela 2), em que o bem é ofertado em maior quantidade que no caso do conjunto de parâmetros P_1 , é visto na Figura 8.b que o preço sobe mais lentamente, pois os estoques duram mais.

Nas Figuras 8, é possível notar que, o preço que um comprador pagou para adquirir o bem (preço praticado) é superior ao preço mínimo de mercado. Reforçando que, cada comprador nem sempre tem acesso aos vendedores de menor preço. O preço máximo pelo qual o bem está sendo ofertado não cai em nenhum instante, pois, apesar do vendedor comercializar o bem algumas vezes, não é o suficiente para esgotar o seu estoque.

6 Resultados do modelo com reposição de estoque

Para começarmos a analisar os resultados seguintes, antes é necessário situar quais serão as variáveis de estudo do novo modelo, agora com reposição de estoque. O número de compradores será importante para dizer quando a dinâmica se encerrará, então este deve ser grande o suficiente para atingirmos o patamar desejado. Os valores de mínimo e máximo do preço do bem ofertado são apenas uma tentativa inicial¹, devido à mecânica descrita na seção 4.3.1, a variável relevante presentemente é o preço de produção C_p . Este, no que lhe concerne, será representado apenas por um multiplicador da distribuição de probabilidade, dado por \bar{C}_p , para a distribuição uniforme variando de $C_p^{\min} = 0.5$ até $C_p^{\max} = 1.5$.

Além disso, temos a taxa de estoque, podendo ser concebida por uma fração da oferta individual inicial (tomamos $T_S^{(i)} = E^{(i)}/4$), já definida (4.4), de forma que, fica outra vez a encargo da oferta relativa (2.14) determinar a oferta de mercado. E ainda, para a distribuição de orçamento, podemos usar $\mu = 1.0$ e $\beta = 1.0$. Por último, os vendedores irão alterar seus preços em 10% do atual ($\sigma_1 = 0.9$ e $\sigma_2 = 1.1$) quando o estoque atual for 30% do esperado ($\gamma_1 = 1.3$ e $\gamma_2 = 0.7$). Nos resta então determinar a variável dias de estoque acumulado, d_a . Em síntese, os parâmetros padrões para as simulações podem ser consultados na Tabela 3.

N_V	N'_V	N_C	μ	β	p_1^{\min}	p_1^{\max}	C_p^{\min}	C_p^{\max}	c_m	τ	τ_c
100	10	2×10^6	1.0	1.0	0.5	1.5	0.5	1.5	0.5	1	1000

Tabela 3 – Parâmetros fixos que serão utilizados nas simulações seguintes. Casos omissos explicitarão quaisquer mudanças.

6.1 Variação do preço de produção em regime de equilíbrio

Em concordância com as variáveis descritas acima, e tomando os valores presentes na Tabela 4, podemos produzir o gráfico da Figura 9. Neste gráfico, temos o preço praticado, definido como a média dos preços pelos quais o bem foi vendido no dia, ponderado pela quantidade de bens comercializados.

É notável que o preço oscila amortecidamente até que, passado o transiente, varia com pequena amplitude em torno de um valor de equilíbrio. Refazendo o mesmo gráfico,

¹ Como o bem 2 continua sendo uma varável de controle, podemos a manter com preço de oferta fixo $p_2 = 1.0$.

\bar{C}_p	O_r	d_a
1.0	1.0	9

Tabela 4 – Valores de cada coeficiente utilizados na simulação que reproduziu os resultados presentes na Figura 9. Demais parâmetros utilizados constam na Tabela 3.

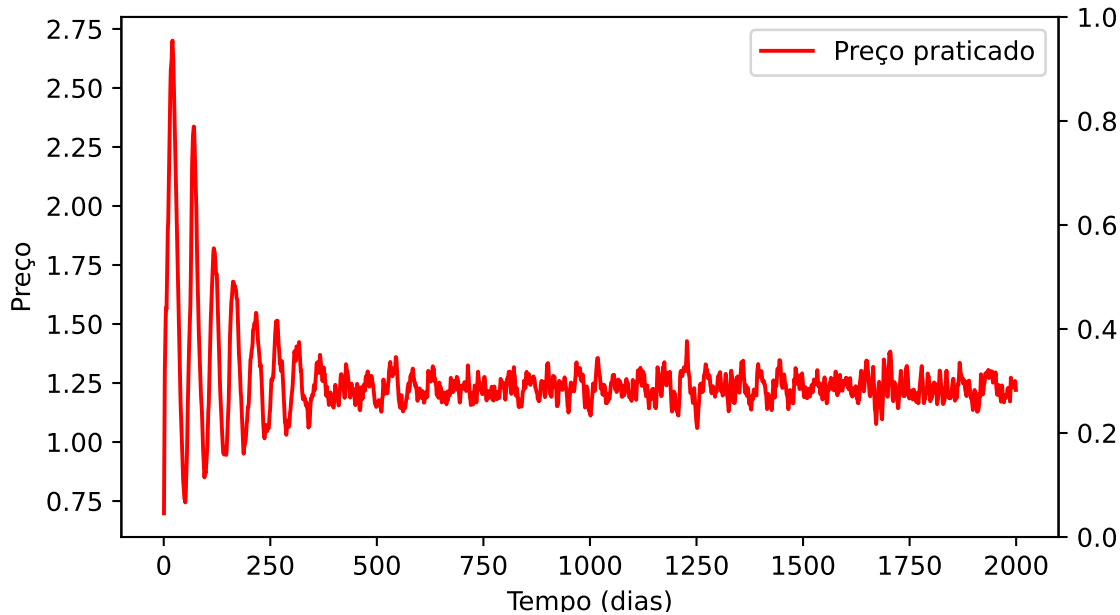


Figura 9 – Gráfico do preço em função do tempo referente aos parâmetros presentes na Tabela 4.

alterando o número de dias de estoque acumulados para $d_a = 6$ dias, faz com que o preço convirja para o equilíbrio mais rapidamente, Figura 10. Isto significa que, aumentar o estoque que os vendedores tem guardado, proporciona em uma maior resistência na alteração do preço, a longo prazo.

Após o transiente inicial, que dura aproximadamente até $t = 500$ dias, o mercado entre em regime estacionário. Esse regime é análogo ao que a teoria microeconômica designa por equilíbrio.

Para analisar as flutuações do mercado neste regime, aplicamos uma Transformada Rápida de Fourier (abreviado FFT, do inglês) ao gráfico encontrado na Figura 9 para tempos maiores que 1000 dias. O resultado, mostrado na Figura 11.a, evidencia as frequências características do sistema. Um dos picos possui período $\tau \approx 48$ dias, este indica que a flutuação típica do mercado dura cerca de 48 dias.

Comparando-se os gráficos 11.a e b da FFT, percebe-se que o tempo característico da flutuação depende de quantos dias de estoque acumulado cada vendedor possui. Ao se abaixar o valor de d_a , percebemos que o tempo característico é reduzido.

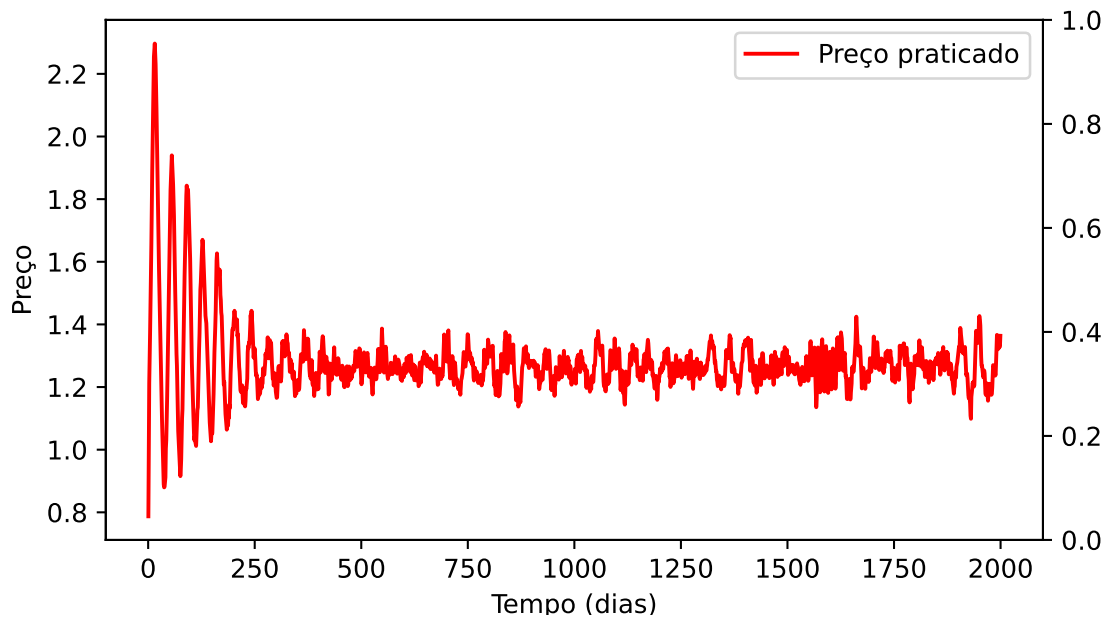


Figura 10 – Gráfico do preço em função do tempo, para $d_a = 6$ dias e demais parâmetros da Tabela 5.

Calculando o desvio padrão na região de equilíbrio ($t > 1000$ dias) do preço médio para cada caso, Figura 9 e 10, obtemos 0.0464 e 0.0476, uma diferença de apenas 2.5%. De qualquer forma, esse resultado reforça a ideia de que, quanto maior o estoque dos vendedores, o mercado se torna mais resistente a mudança de preço.

6.2 Reação da oferta e demanda a mudança de preços

Ao sobrepor a evolução temporal da oferta e demanda com a do preço (Figura 12.a), podemos estudar o vínculo entre estes. O primeiro ponto a se notar é que a demanda e preço estão em anti-fase, nos levando a entender que a mudança de preço tem impacto imediato na demanda do bem. Quando o preço é mínimo (local) a demanda toma seus valores de máximo (local), até que ambos converjam para seus valores de equilíbrio.

Contudo, a fase entre a oferta e preço não é óbvia. Ao ampliar o gráfico com enfoque na região do amortecimento (Figura 12.b), reparamos que o aumento do preço praticado ocorre antes do aumento da oferta. Esse comportamento reflete a relação causal presente no modelo entre preço e a decisão de produzir bens para repor o estoque. Quando o preço praticado começa a cair, a oferta continua aumentando, mostrando haver um retardo entre as curvas, diferentemente da relação do preço com a demanda.

Para entendermos a associação entre oferta e demanda, neste modelo, necessariamente precisamos considerar o preço praticado. Vemos que no início da simulação, o preço está aumentando, enquanto a oferta e demanda estão diminuindo. A oferta aumenta em

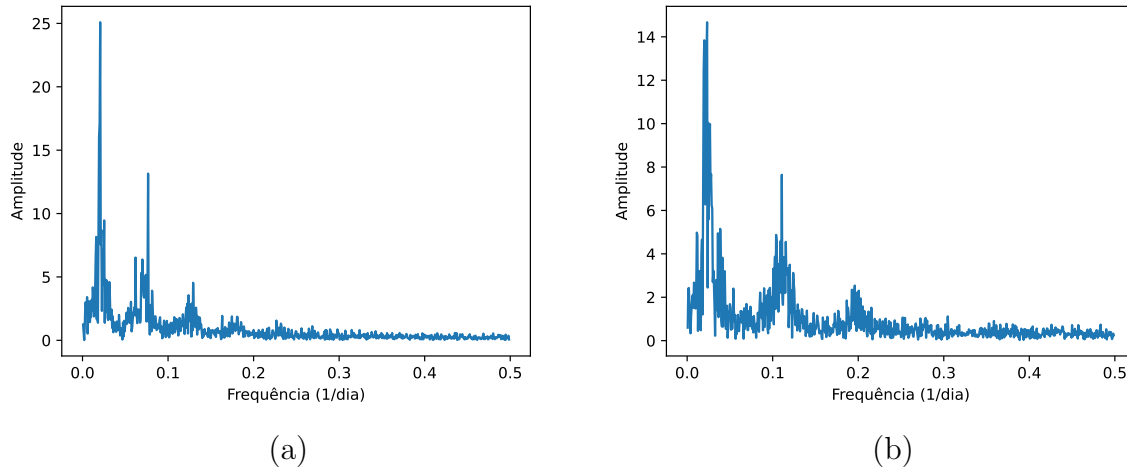


Figura 11 – Transformada Rápida de Fourier para tempos maiores que 1000 dias das curvas: (a) Figura 9, para o parâmetro $d_a = 9$ dias. Os três picos de menor frequência ocorrem para os valores 0.021, 0.074 e 0.129 (1/dia), que correspondem aos períodos 48, 14 e 8 dias; (b) Figura 10, para o parâmetro $d_a = 6$ dias. Os três picos de menor frequência ocorrem para os valores 0.025, 0.110 e 0.195 (1/dia), que correspondem aos períodos 40, 9 e 5 dias.

seguida pelo aumento do preço e, devido ao preço elevado, a demanda continua baixa (ou abaixando). Nas janelas em que o preço praticado cai e a oferta se mantém aumentando (pelo retardo já observado) é a ocasião propícia para que a demanda aumente: o preço está em queda e o mercado saturado do bem.

Para analisar a região de equilíbrio, Figura 12.c, fazemos o seguinte processo: subtraímos o valor médio de cada curva (transladando-as para o eixo x), e ainda as dividimos pelo desvio padrão para reescalá-las, além de deixá-las no mesmo eixo vertical. Dessa forma, conseguimos notar que o comportamento descrito para a região de amortecimento pode ser observado também no intervalo de equilíbrio. Por exemplo, entorno de $t = 1060$ dias, o preço começa a subir e, dado um retardo, a oferta também. A demanda igualmente, pois, ainda conseguimos ver que permanece em anti-fase com o preço.

6.3 Estudo da convergência ou não das séries temporais

Determinadas condições iniciais fazem com que o modelo não convirja para um valor de equilíbrio. Por exemplo, aumentando a oferta relativa e o preço de produção do sistema para $O_r = 1.2$ e $\bar{C}_p = 1.2$ (Tabela 5), observamos tal comportamento na Figura 13.a. Veja que, mesmo aumentando o tempo da simulação para 2500 dias, equivalente a 2.5 milhões de agentes compradores, nenhum comportamento que tenda ao equilíbrio é visto.

É possível ver na FFT do gráfico do preço praticado, Figura 13.b, que há os

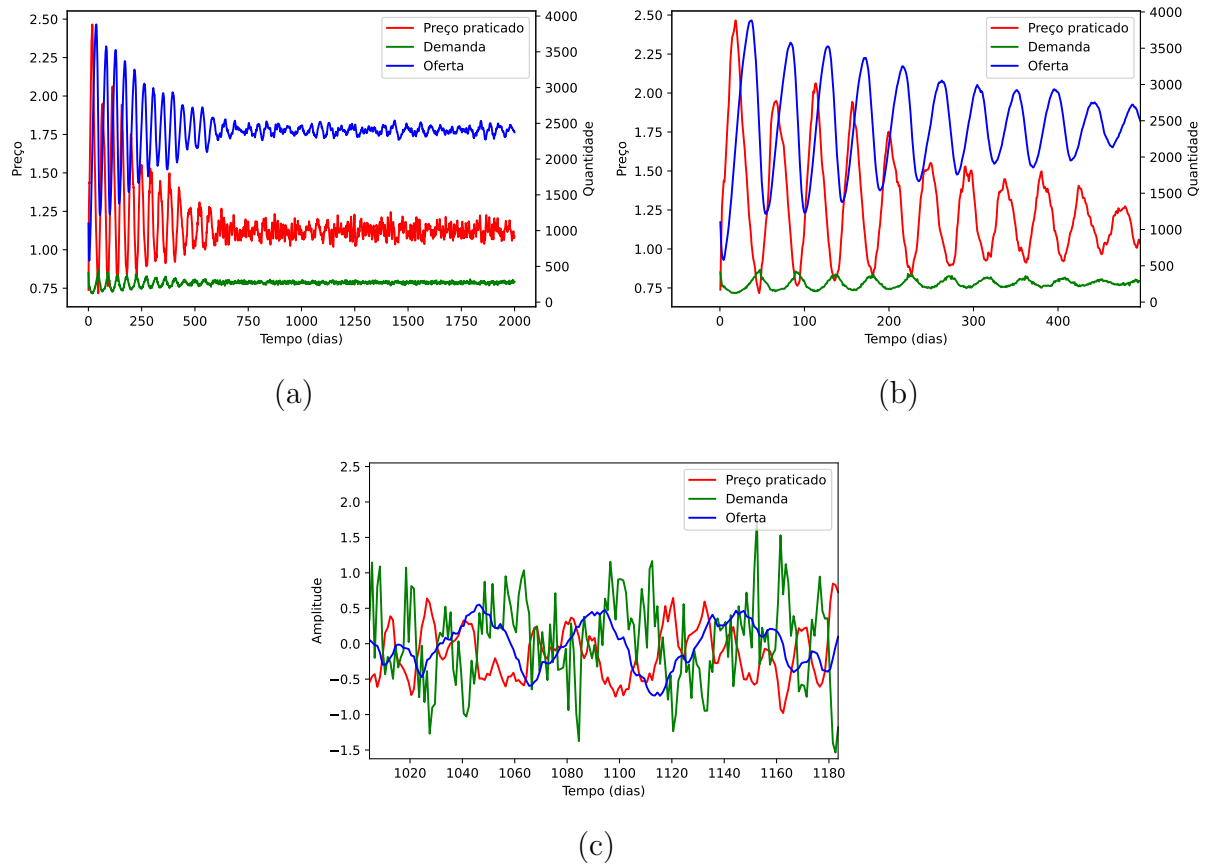


Figura 12 – (a) Evolução temporal da oferta, demanda e preço praticado; (b) Ampliação do gráfico na região do amortecimento; (c) Ampliação do gráfico no regime de equilíbrio. O preço praticado tem unidade de preço (ordenada esquerda), enquanto as curvas de oferta e demanda tem unidade quantidade de bens comercializados (ordenada direita). Curvas geradas com as variáveis da Tabela 4.

$$\frac{\bar{C}_p \quad O_r \quad d_a}{1.2 \quad 1.2 \quad 9}$$

Tabela 5 – Valores de cada coeficiente utilizados na simulação que reproduziu os resultados presentes na Figura 13. Demais parâmetros utilizados constam na Tabela 3.

dois picos: um bem proeminente com período de 40 dias referente a oscilação com maior amplitude; e outro período de 1000 dias relativo à frequência com que surgem os “nós”, que possuem menor amplitude.

6.4 Equilíbrio de mercado

Distintivamente da definição econômica de mercado, na qual indica que o bem está sendo demandado em mesma escala que ofertado, retomamos a ideia do equilíbrio físico

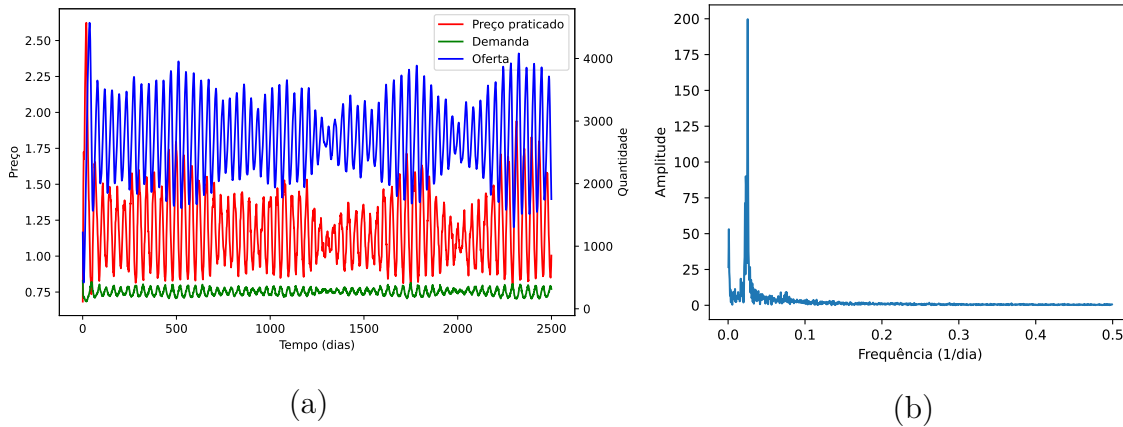


Figura 13 – (a) Evolução temporal da oferta, demanda e preço praticado. O preço praticado tem unidade de preço (ordenada esquerda), enquanto as curvas de oferta e demanda tem unidade quantidade de bens comercializados (ordenada direita). Curvas geradas com as variáveis da Tabela 5; (b) FFT da curva do preço praticado encontrado no gráfico (a): os dois picos de menor frequência ocorrem para os valores 0.001 e 0.025 (1/dia), que correspondem aos períodos 1000 e 40 dias.

dos fluxos de estoque e orçamento. Vemos na Figura 12.a que a demanda e a oferta se mantém em torno de um valor de equilíbrio, mesmo com os fluxos que cada uma recebe.

Consideramos então que, a partir do momento em que estas quantidades se estabilizam, o mercado está em equilíbrio físico: a taxa na qual o bem entra no mercado é a mesma em que é comprado. Além de que o mercado não terá mais motivo para alterar suas quantidades ofertadas e demandas.

Em cada simulação, para diferentes valores iniciais – seja do preço de produção ou da oferta relativa – o mercado terá quantidades médias ofertadas e demandadas para um valor de preço praticado médio, como observado na Figura 12.a. Posto isto, conseguimos criar um gráfico de preço em função da oferta e demanda, variando, por exemplo, o multiplicador \bar{C}_p de $\bar{C}_p = 0.1$ até $\bar{C}_p = 2.0$, com passo de 0.1, mantendo fixos os parâmetros $O_r = 1.0$ e $d_a = 9$ (Figura 14.a).

Para essa formulação de equilíbrio, o mercado nunca chegaria ao equilíbrio econômico, já que as curvas estão fora de escala e não tendem se cruzar. Contudo, o excesso de mercadorias é justificado pelo parâmetro d_a , fazendo com que cada vendedor tenha sempre mercadorias estocadas. Para o caso de $d_a = 1$ dia, vemos, na Figura 15.a, que a demanda e oferta ficam em mesma escala. No entanto, as flutuações predominam o sistema.

Com essa modelagem, necessariamente o mercado precisa ter bens estocados para diminuir as flutuações na oferta, demanda e no preço. Caso seja de interesse termos no nosso modelo a definição de equilíbrio econômico tradicional, é suficiente alterarmos a

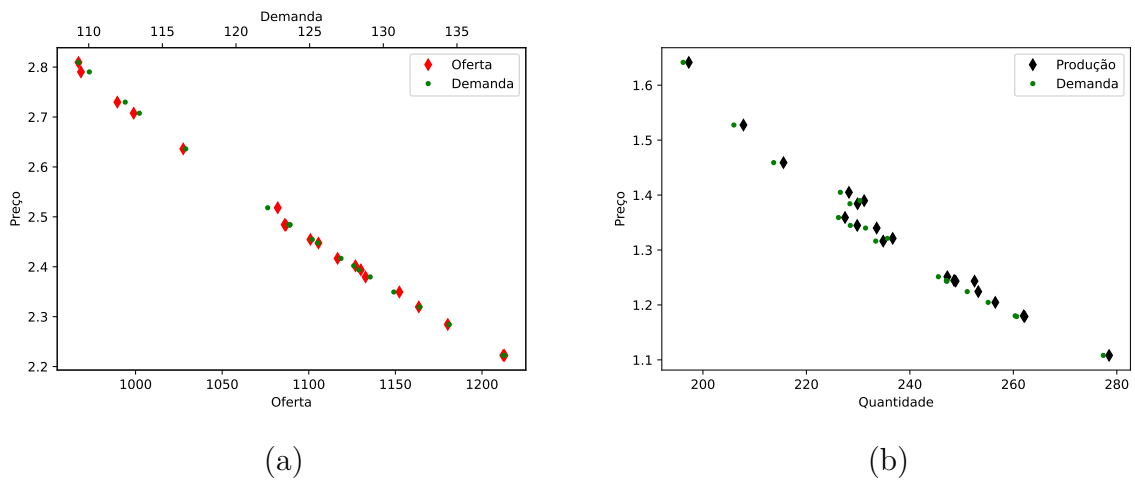


Figura 14 – (a) Gráfico da oferta e demanda de diferentes mercados em equilíbrio de fluxos. A curva da demanda é referente à abscissa superior, enquanto a oferta é referente a abscissa inferior; (b) Gráfico da oferta (definida unicamente pelo o que é produzido no dia) e demanda de diferentes mercados em equilíbrio de fluxos. Apesar dos gráficos (a) e (b) terem sido gerados com os mesmos parâmetros, são de simulações diferentes e, por isso, possuem valores diferentes.

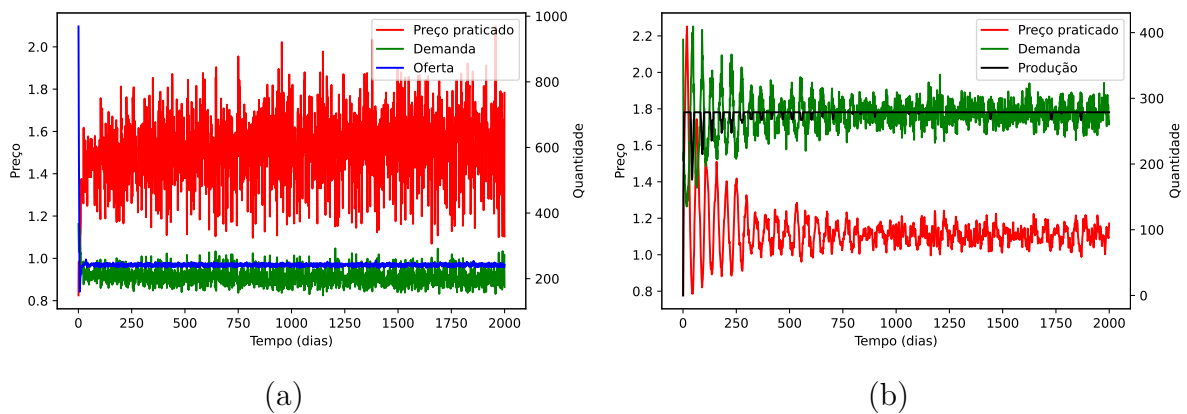


Figura 15 – (a) Evolução temporal da oferta, demanda e preço praticado, para especificadamente $d_a = 1$ dia; (b) Evolução temporal da oferta (definida unicamente pelo o que é produzido por dia), demanda e preço praticado. O preço praticado tem unidade de preço (ordenada esquerda), enquanto as curvas de oferta e demanda tem unidade quantidade de bens comercializados (ordenada direita). Curvas geradas com as variáveis da Tabela 4.

definição de oferta trazida anteriormente, para que esta seja apenas o bem produzido, e não mais o produzido somado ao acumulado. Com isso, observamos na Figura 15.b que o gráfico da demanda parece se ajustar a oferta. Cada vendedor pode apenas escolher entre produzir ou não produzir, gerando o comportamento observado.

Ao se refazer o gráfico proposto na Figura 14.a, obtemos a Figura 14.b. O qual é bastante parecido com a última, exceto pela distinção de estarem em mesma escala, como proposto pelo equilíbrio (econômico) de mercado.

Concluindo, percebemos a importância de considerar na dinâmica do mercado a reposição dos estoques. Isto é, ao se pensar em um mercado estático, conforme o convencional na economia, não se sabe seu comportamento num instante seguinte. Ou seja, o equilíbrio entre a oferta e a demanda não pode ser alcançado instantaneamente. No presente modelo de compradores e vendedores, o equilíbrio se estabelece nos estoques, de acordo com:

$$\frac{dE}{dt} = p(t) - c(t),$$

onde $p(t)$ é a produção e $c(t)$ é o consumo. Um trabalho pode ser desenvolvido para escrever essas duas equações como funções das características globais do mercado (preço médio, estoque total) e ainda escrever equações de dinâmica para a generalização do conceito de equilíbrio da microeconomia.

Conclusão

Conforme a Parte I, infere-se que as relações microeconômicas podem ser descritas por quantidades mínimas, como a preferência do tomador de decisão, e o preço do bem de interesse ofertado. O que viabiliza a construção de um modelo “atomístico” para os agentes econômicos do mercado.

Com isso, é possível descrever relações microeconômicas por meio de um modelo matemático-computacional semelhante à descrição da Física Estática de um gás ideal, como apontam os resultados do modelo sem reposição de estoque. Nos levando a inferência de que é viável utilizar das quantidades definidoras dos compradores e vendedores para verificar as previsões teóricas. Permitindo entender como as alterações das variáveis globais do mercado influenciam nas tomadas de decisões individuais.

Quanto ao modelo com reposição de estoque, pudemos entender que o equilíbrio entre a oferta e a demanda não pode ser atingido instantaneamente, como é interpretado tradicionalmente. Ou seja, para se chegar ao equilíbrio de um mercado, seja de fluxos ou econômico, é necessário considerar a evolução temporal do estoque, da demanda e da precificação do bem.

Para o modelo proposto, nem sempre atingir o equilíbrio é viável. Vimos que para determinadas condições iniciais, o mercado mantém suas oscilações. Para sabermos exatamente quais alterações, e em que parâmetros, fazem com que o mercado não convirja, é necessário escrever as equações da dinâmica para cada quantidade (oferta, demanda e preço praticado). De qualquer forma, mesmo que se consiga o equilíbrio, este não é trivial: o preço, oferta e demanda de equilíbrio possuem flutuações em torno de seus valores médios.

Referências

- FAGIOLO, G. et al. Validation of agent-based models in economics and finance. In: *Computer simulation validation*. [S.l.]: Springer, 2019. p. 763–787. Citado na página 19.
- GALE, D. *The theory of linear economic models*. [S.l.]: University of Chicago press, 1989. Citado na página 29.
- MACAL, C. M.; NORTH, M. J. Tutorial on agent-based modeling and simulation. In: IEEE. *Proceedings of the Winter Simulation Conference, 2005*. [S.l.], 2005. p. 14–pp. Citado na página 35.
- VARIAN, H. R. *Microeconomic analysis*. [S.l.]: Norton New York, 1992. v. 3. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 23.
- VASCONCELLOS, M. A. S. de; GARCIA, M. E. *Fundamentos de economia*. [S.l.]: Saraiva Educação SA, 2002. Citado na página 24.
- WHELAN, J.; MSEFER, K.; CHUNG, C. V. *Economic supply & demand*. [S.l.]: MIT, 2001. v. 520. Citado na página 26.