UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

INSTITUTO DE FÍSICA

LUCCA LOPES DIAS SANTOS

APROXIMANDO A GRAVITAÇÃO AO ELETROMAGNETISMO: GRAVITOMAGNETISMO E ELETRODINÂMICA NÃO LINEAR

BRASÍLIA

FEVEREIRO DE 2022

Lucca Lopes Dias Santos

Aproximando a Gravitação ao Eletromagnetismo: Gravitomagnetismo e Eletrodinâmica não Linear

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Instituto de Física da Universidade de Brasília como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Bacharel em Física.

Orientador: Vanessa Carvalho de Andrade

Universidade de Brasília – UnB

Instituto de Física

Brasília

Fevereiro de 2022

Resumo

São investigadas, por intermédio de revisão bibliográfica, diferentes abordagens para a aproximação entre as descrições das interações gravitacional e eletromagnética, no escopo do gravitomagnetismo. Investigam-se, também, alguns modelos de eletrodinâmica não linear, uma vez que tal abordagem coloca-se como candidata ao estabelecimento de analogias entre eletromagnetismo de gravitação. No que diz respeito ao gravitomagnetismo, colocam-se como objetos de estudo duas formas de tratá-lo no âmbito da Relatividade Geral - via aproximação linear e via tensor de Weyl -, bem como uma redefinição da teoria no contexto do Teleparalelismo Relativístico; para tal, é feita uma revisão dos conceitos fundamentais a respeito da Relatividade Geral e da construção do formalismo teleparalelo. Já no âmbito da eletrodinâmica não linear, são discutidos, também por intermédio de uma revisão bibliográfica, modelos constantes na literatura, sendo investigados suas motivações e seu funcionamento. Realiza-se uma discussão sobre as perspectivas de como uma generalização conveniente poderia levar a uma aproximação do Eletromagnetismo à Gravitação.

Palavras-chaves: Gravitação, Relatividade Geral, Teleparalelismo, Gravitomagnetismo, Eletrodinâmica não linear.

Lista de abreviaturas e siglas

RG	Relatividade Geral
ETRG	Equivalente Teleparalelo da Relatividade Geral (Teleparalelismo Relativístico)
GEM	Gravitoeletromagnetismo
GE	Gravitoelétrico
GM	Gravitomagnético

Lista de símbolos

$g_{\mu\nu}$	Tensor métrico
η_{ab}	Métrica do espaço de Minkowski
ds^2	Elemento de linha
$\mathring{\Gamma}^{\sigma}{}_{\mu\nu}$	Conexão de Levi-Civita
∇_{μ}	Derivada covariante
$\mathring{R}^{\rho}{}_{\sigma\mu\nu}$	Tensor de Curvatura / Riemann
$\mathring{R}_{\mu\nu}$	Tensor de Ricci
$\mathring{R}$	Escalar de Ricci
$C_{\rho\sigma\mu\nu}$	Tensor de Weyl
$\mathring{G}_{\mu\nu}$	Tensor de Einstein
$\Theta^{\mu\nu}$	Tensor energia-momento
$\mathring{L}$	Lagrangina de Einstein-Hilbert
$h^{a}{}_{\mu}$	Tetradas
$\{a, b, c, ... = 0, 1, 2, 3\}$	Índices internos / algébricos
$\{\mu, \nu, \rho = 0, 1, 2, 3\}$	Índices externos
$\varepsilon \equiv \varepsilon(x^{\mu})$	Parâmetro das translações infinitesimais
P_a	Gerador das translações infinitesimais
$A_{\mu} = A^{a}{}_{\mu} P_a$	Potencial de Gauge teleparalelo
$F^{a}{}_{\mu\nu}$	Tensor intensidade de campo
$\overset{\bullet}{T}{}^{a}{}_{\mu\nu}$	Torção
$\overset{\bullet}{\Gamma}{}^{\rho}{}_{\mu\nu}$	Conexão de Levi-Civita
$\overset{\bullet}{A}{}^{a}{}_{b\mu}$	Conexão de spin
$\overset{\bullet}{K}{}^{\rho}{}_{\mu\nu}$	Tensor de contorção

$\overset{\bullet}{L}$	Lagrangiana teleparalela
$\overset{\bullet}{S}_a{}^{\rho\sigma}$	Superpotencial
$\overset{\bullet}{J}_a{}^{\rho}$	Corrente de Gauge
$F_{\mu\nu}$	Tensor intensidade de campo eletromagnético
$\mathscr{F}$	Argumento da lagrangiana eletromagnética (no que diz respeito aos campos)
$\mathbf{D}$	Campo de deslocamento elétrico
$\mathbf{H}$	Campo auxiliar (magnético)

Sumário

Introdução

Sabe-se que, dentre os muitos desafios da física contemporânea, encontra-se a busca pela compatibilização das teorias utilizadas na descrição das diferentes interações (ou "forças") fundamentais da natureza, dadas pelas forças fraca e forte, pelo eletromagnetismo e pela gravitação[1], de forma que uma grande miríade de teorias e formalismos foram desenvolvidos ao longo do último século com pretensões de concretizar esse objetivo. Dentre estes, encontram-se aqueles cujas intenções firmam-se em tentar aproximar, em especial, a gravitação e o eletromagnetismo.

Tal tentativa de aproximação entre a descrição de fenômenos gravitacionais e eletromagnéticos remonta, levando em conta ainda o panorama da Mecânica Newtoniana, ao século XVIII, partindo de uma analogia entre a lei da Gravitação de Newton e a lei de Coulomb - movimento cuja formalização levaria, posteriormente, ao surgimento do Gravitoeletromagnetismo (GEM) (SANTOS, 2021). Por outro lado, tentativas de estabelecer uma teoria capaz de fornecer, no eletromagnetismo, equações de campo mais gerais, como proposto por Born e Infeld, em (BORN; INFELD, 1934), mostram-se, também, como uma alternativa para tentar aproximar Gravitação e Eletromagnetismo.

Nesse contexto, propomo-nos, no presente trabalho, a analisar dois movimentos possíveis na tentativa de aproximar a descrição das interações gravitacional e eletromagnética: um partindo da gravitação em direção ao eletromagnetismo, considerando uma formalização da analogia anteriormente citada entre cada teoria - o gravitoeletromagnetismo; o outro, supondo a possibilidade de partir do eletromagnetismo em direção à gravitação, por intermédio de uma tentativa de generalização das equações de Maxwell - caso da eletrodinâmica não-linear.

O primeiro desses cenários considera a possibilidade de que corpos massivos e correntes de matéria possam gerar campos gravitoelétricos e gravitomagnéticos (daí o nome gravitoeletromagnetismo) (PASCUAL-SANCHEZ et al., 2001; SANTOS, 2021). Há, sob tais circunstâncias, duas principais abordagens que se propõem a realizar esse movimento de unificação ainda no escopo da Relatividade Geral (RG) (MASHHOON, 2003): uma delas consiste em linearizar as equações de campo de Einstein (MALEKOLKALAMI; FARHOUDI, 2009); a outra, atua estabelecendo uma relação entre objetos advindos da decomposição do Tensor[2] de Weyl e o que seriam, então, campos gravitoelétricos e gravitomagnéticos (MAARTENS, 2008).

---

[1] Uma discussão detalhada a respeito das interações fundamentais, com maior foco nas interações fraca e forte - as quais fogem, a princípio, ao escopo do presente trabalho - pode ser encontrada em (SOARES; JR; NETO, 2008).

[2] O conceito de tensor será abordado, em linhas gerais, no Capítulo 1, no qual são tratados conceitos fundamentais à compreensão do texto.

Há, apesar dos caminhos tradicionalmente discutidos na literatura, outra possível abordagem na tentativa de estabelecimento de uma teoria gravitoeletromagnética consistente: trata-se da utilização do Equivalente Teleparalelo da Relatividade Geral, ou Teleparalelismo Relativístico (ETRG), o qual descreve a gravitação por intermédio de uma teoria de calibre (ANDRADE; GUILLEN; PEREIRA, 2000; ANDRADE; PEREIRA, 1997a; ALDROVANDI; PEREIRA, 2012; ALDROVANDI; PEREIRA, 2016). Obtém-se, dessa forma, um novo panorama para as possíveis analogias com o Eletromagnetismo - uma vez que este também é, tradicionalmente, expresso como uma teoria de calibre (GRIFFITHS, 2013) - na medida em que se estabelece um campo GEM no escopo do ETRG (SPANIOL, 2011a; SPANIOL; ANDRADE, 2010; SPANIOL; BELO; ANDRADE, 2014; SPANIOL et al., 2013; SPANIOL et al., 2011).

A eletrodinâmica não linear, por sua vez, busca a generalização das equações do eletromagnetismo mediante modificações na lagrangiana eletromagnética, proporcionando, assim, o surgimento de equações de campo de ordem superior. Tais modificações podem se dar, por exemplo, com a introdução de novos parâmetros (KRUGLOV, 2015; KRUGLOV, 2017; KRUGLOV, 2015; KRUGLOV, 2016) ou, ainda, com a adição de termos de ordem superior em $\mathscr{F}$ (argumento da lagrangiana eletromagnética) (NOVELLO et al., 2007; NOVELLO; BERGLIAFFA; SALIM, 2004). Desse modo, são obtidas equações de campo mais gerais, as quais recuperam as equações de Maxwell como caso particular e que, caso possam ser acopladas a alguma teoria de gravitação, apresentam potencial para o estabelecimento de novas analogias.

Como delineado anteriormente estabelecemos, então, como objetivo do presente trabalho, o estudo de possíveis métodos para a construção de uma analogia entre o eletromagnetismo e a gravitação, considerando, a princípio, o regime da física clássica. Em linha gerais, visamos a análise de duas abordagens: o GEM, já elaborado com fins de buscar analogias entre os formalismos gravitacional e eletromagnético, e modelos da eletrodinâmica não linear constantes na literatura, cada um com abordagens e finalidades particulares - as quais buscamos revisar a fim de tomar conhecimento de como modificações na lagrangiana eletromagnética podem ser utilizadas em diferentes áreas para, então, compreender como são obtidas equações de ordem superior. Espera-se que, assim, seja possível discutir a possibilidade da aplicação da eletrodinâmica não linear na empreitada de tentar aproximar eletromagnetismo e gravitação em projetos de pesquisa futuros. Para tal, faz-se necessário o estudo da teoria eletromagnética, da elaboração do GEM e da proposta de uma eletrodinâmica não linear.

Atemo-nos, em um primeiro momento, ao regime da Física Clássica na medida em que o processo de analogias proposto pelo gravitomagnetismo o faz, justamente, neste regime. Assim, como perspectiva de pesquisas futuras, questionamo-nos, a princípio, a respeito da possibilidade de usar do eletromagnetismo não linear para trabalhar com generalizações sem entrar no panorama da teoria quântica de campos (assim como outras teorias alternativas que generalizam as equações de campo gravitacional - as chamadas teorias estendidas). Vale notar, também, que a quantização da gravitação constitui campo de pesquisa em aberto na Física, de forma que ainda não foi apresentada nenhuma teoria capaz de satisfatoriamente quantizar a gravitação. Evita-se, assim, neste texto, o aprofundamento no âmbito da teoria quântica de campos. Apesar disso, caso surjam aspectos da bibliografia revisada que tratem de temas que fujam à Física Clássica, tais aspectos serão descritos e pontuados - mas nos absteremos de maiores aprofundamentos, pelos motivos já expostos.

Dessa forma, o presente trabalho organiza-se da seguinte maneira: no Capítulo 1 é realizada a revisão de alguns conceitos fundamentais para a compreensão do arcabouço teórico abordado ao longo do texto; no Capítulo 2 apresenta-se uma breve revisão a respeito da teoria da Relatividade Geral (RG) de Einstein; o Capítulo 3, por sua vez, ocupa-se da exposição da teoria do Teleparaleliso Relativístico, enquanto o Capítulo 4 aborda o gravitomagnetismo no contexto da RG; já no Capítulo 5 discute-se a elaboração de uma teoria gravitomagética no contexto teleparalelo; o capítulo 6 trata de uma revisão de modelos da eletrodinâmica não linear constantes na literatura da área. Em seguida, no Capítulo 7, relata-se o procedimento metodológico utilizado para o processo de revisão realizado na seção anterior; no Capítulo 8, realiza-se uma discussão a respeito das características dos modelos de eletrodinâmica não linear estudados e as perspectivas de uma possível aplicação à busca por analogias com a gravitação; no capítulo 9 são expostas as considerações finais deste trabalho.

Ressaltamos, além disso, como este trabalho se apresenta como uma extensão natural dos trabalhos desenvolvidos até então pela colaboração entre discente e docente. Houve a oportunidade, em projeto de Iniciação Científica previamente executado (edital PIBIC 2019/2020, ProIC/DPG/UnB), de estudar os fundamentos do ETRG, cujo desenvolvimento e resultados encontrados, na ocasião, podem ser encontrados em (SANTOS; ANDRADE, 2022). Em projetos de Inciação Científica posteriores - editais PIBIC 2020/2021 e 2021/2022 - foi possível, respectivamente, estabelecer contato com demais tipos de teorias alternativas ou estendidas (ocasião na qual foi estabelecido contato, também, com o procedimento de obter equações de campo partindo de lagrangianas modificadas) e, em linhas gerais, discutir, justamente, as propostas do GEM e da eletrodinâmica não-linear - o que pode ser considerado como um preâmbulo para a presente proposta.

1 Alguns Conceitos Fundamentais

O processo de revisão bibliográfica preliminar realizado até então inclui uma série de tópicos relativos à teorias da gravitação e ao eletromagnetismo. Para a compreensão destes, faz-se necessário o conhecimento de uma série de conceitos matemáticos e físicos a respeito de sua construção. A fim de melhor delinear, então, alguns desses conceitos, discorreremos, na presente seção, sobre tópicos relevantes na construção da Relatividade Geral, da teoria Teleparalela, do Gravitomagnetismo e da Eletrodinâmica não Linear.

1.1 Tensor Métrico

Trata-se de um objeto fundamentalmente importante pois é a partir dele que são definidas as noções de distância e comprimento. Ou seja, no arcabouço geométrico proposto, podemos falar do comprimento de um vetor e da distância que isso representa, por exemplo, devido à métrica (D'INVERNO, 1992).

É a partir da métrica, portanto, que se define o chamado "intervalo espaço-temporal", pois é ela quem rege a combinação dos elementos infinitesimais de espaço e de tempo. Isto é, considerando uma pequena distância infinitesimal no espaço-tempo (uma distância que não diz respeito somente à localização espacial), a forma como as componentes infinitesimais se relacionam depende da métrica, por intermédio de uma relação da seguinte forma[1]:

$$\text{(Intervalo espaço-temporal)} \quad = \quad \text{(Métrica)} \cdot \text{(Elementos infinitesimais)}. \tag{1.1}$$

Matematicamente, essa relação pode ser formalizada por intermédio da equação

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \tag{1.2}$$

na qual ds^2 indica o intervalo (distância) espaço-temporal e $dx^\mu dx^\nu$ representa os elementos infinitesimais. Ou seja, $g_{\mu\nu}$ é o objeto que diz como os elementos infinitesimais de cada coordenada que descreve o espaço-tempo se "misturam"no estabelecimento da distância entre dois pontos do espaço-tempo. A grandeza x^μ em dx^μ, dotada do índice μ, indica as coordenadas espaço-temporais - ou seja, diz respeito não somente ao espaço, mas tam-

[1] A rigor, o intervalo espaço-temporal é dado a partir da noção de um-formas, como explicita Carroll, em (CARROLL, 2004). Todavia, como tal conceito é elaborado a partir de um ferramental matemático que foge ao escopo do presente trabalho, adotamos o ponto de vista exposto por D'Inverno, em (D'INVERNO, 1992), que se utiliza da noção mais intuitiva de intervalo espaço-temporal como sendo uma combinação de distâncias infinitesimais.

bém ao tempo. O índice μ é tal que $\mu \in (0,1,2,3)$[2], e cada x^μ diz repeito a uma das coordenadas. Por convenção, adota-se a seguinte denominação para as coordenadas de x^μ: $(x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, x, y, z)$[3]. O intervalo ds^2 aparece ao quadrado pois se trata de uma generalização da relação de distância tradicionalmente utilizada para espaços n-dimensionais, a exemplo de um plano Euclideano bidimensional, como veremos no exemplo adiante.

Um exemplo bastante particular, no qual somente componentes espaciais são consideradas, é o de um espaço cartesiano bidimensional, no qual a equação (3.1) reduz-se ao teorema de Pitágoras. Isto é, considerando um plano cujos eixos são definidos pelo par ordenado (x, y), a distância entre dois pontos, de coordenadas (x_1, y_1) e (x_2, y_2), indicada por z, é dada a partir da expressão

$$z^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2. \tag{1.3}$$

Considerando que a distância entre os pontos é infinitesimal, podemos definir $(x_1 - x2) \equiv dx$ e $(y_1 - y_2) \equiv dy$, chegando, assim, à expressão

$$dz^2 = dx^2 + dy^2, \tag{1.4}$$

que equivale ao Teorema de Pitágoras e é um caso particular da equação (1.2). Neste caso particular, a distância espaço-temporal ds^2 é dada pela distância dz entre os pontos do plano cartesiano, enquanto o segundo membro da igualdade, $dx^2 + dy^2$, equivale à porção indicada por $g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ na equação (1.2).

A métrica é, justamente, a responsável por indicar como as distâncias infinitesimais dx e dy se relacionam e pode, a partir de uma inspeção da equação (1.4), ser representada pela matriz

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \tag{1.5}$$

enquanto a equação (1.4), em si, assume a seguinte forma matricial:

$$dz^2 = \begin{pmatrix} dx & dy \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}. \tag{1.6}$$

Nesse contexto, pode-se dizer, heuristicamente, que a métrica, no que diz respeito ao estabelecimento de distâncias atua, com a equação (1.2), como uma generalização da relação na equação (1.4) para espaços curvos com maior número de dimensões. Além disso,

[2] μ pode assumir tais valores pois, na RG, trabalha-se com um espaço com quatro dimensões; caso o espaço considerado tenha mais dimensões, μ pode assumir mais valores.

[3] Considerando $c = 1$.

como é o tensor métrico o responsável por reger a relação entre as distâncias infinitesimais, a ele também cabe o papel de indicar como o espaço-tempo, em si, se comporta, uma vez que, para espaços curvos (e com mais dimensões), $g_{\mu\nu}$ assume expressões mais gerais que a identidade, como no exemplo exposto.

Por outro lado, um caso particular de grande relevância da métrica $g_{\mu\nu}$ é a chamada métrica de Minkowski, $\eta_{\mu\nu}$, para a qual $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$. Trata-se da métrica que descreve o espaço utilizado para o estudo de fenômenos físicos no âmbito da Relatividade Restrita - os quais não levam em consideração efeitos gravitacionais. Neste espaço, denominado "Espaço de Minkowski- daí a denominação de $\eta_{\mu\nu}$ -, o elemento de linha ds^2 assume a forma

$$ds^2 = -c^2dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2, \tag{1.7}$$

implicando, consequentemente, a seguinte forma matricial para $\eta_{\mu\nu}$:

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.8}$$

Trata-se de uma generalização da métrica que descreve um espaço Euclideano tridimensional, cuja métrica é dada por uma matriz bidimensional 3×3 - a qual pode ser encontrada de maneira análoga à forma como foi deduzida a métrica na equação (1.5). A informação a mais contida em $\eta_{\mu\nu}$ é a adição de uma componente correspondente à coordenada temporal, a qual aparece na métrica com sinal contrário à componentes ligadas às coordenadas espaciais.

1.2 Tensores e Contrações Tensoriais

Tensores são objetos matemáticos que podem ser definidos, a princípio, de duas maneiras: a partir de suas propriedades de transformação - o que equivale a dizer que tensores são objetos que se transformam de uma maneira específica - ou, ainda, a partir de como atuam - situação na qual são definidos como mapas que levam de uma coleção de vetores e de vetores duais ao espaço dos reais (CARROLL, 2004).

Heuristicamente, porém, tensores podem ser encarados como generalizações da noção de tensor. Isto é, são, na prática, objetos utilizados para descrever grandezas físicas que requerem, de alguma maneira, mais graus de liberdade em sua descrição que aqueles cujos vetores são capazes de fornecer. Nesse contexto, a série de índices que esses objetos matemáticos apresentam é, de certa forma, uma manifestação da capacidade que possuem em representar grandezas físicas com as características citadas.

Dessa forma, o processo de contração ocorre quando, usando a convenção de soma de Einstein, há soma com respeito a um índice contravariante e um índice covariante. A fim de ilustrar tal propriedade, podemos utilizar o exemplo exposto em (CARROLL, 2004): consideremos um tensor qualquer, $T^{\mu\nu\rho}{}_{\sigma\nu}$. Realizando a soma implícita no índice ν (ou seja, realizando a contração), obtém-se um novo tensor, o qual podemos definir como

$$S^{\mu\rho}{}_{\sigma} = T^{\mu\nu\rho}{}_{\sigma\nu}. \tag{1.9}$$

Em geral, obtém-se resultados diferentes (ou seja, tensores diferentes) ao serem feitas contrações entre pares distintos de índices,

$$T^{\mu\nu\rho}{}_{\sigma\nu} \neq T^{\mu\rho\nu}{}_{\sigma\nu}. \tag{1.10}$$

Uma propriedade relevante a respeito de tensores é que este podem ser representados matricialmente - como vimos no exemplo a respeito do tensor métrico na seção anterior, em que $g_{\mu\nu}$ foi identificado como uma matriz 2×2. Um tensor com um único índice indica uma matriz com uma dimensão, como uma matriz linha ou uma matriz coluna, a qual pode ser identificada, por exemplo, com um vetor. Um tensor de dois índices (como o do exemplo), indica uma matriz de duas dimensões; um vetor com n índices poderia ser associado, por sua vez, a uma matriz com n dimensões.

Nesse âmbito, um conceito relativo a matrizes que surge com frequência na definição e aplicação de certos tensores é o conceito de "traço". Este pode ser definido como o escalar (ou seja, trata-se de um número) obtido com a soma dos elementos da diagonal principal de uma matriz (BOVYKIN ISAAC LáZARO, 2020).

1.3 Variedades

Do ponto de vista físico, no contexto da RG, uma variedade pode ser considerada, a grosso modo, um conjunto (ou uma coleção) de pontos com propriedades de conectividade bem definidas. Isto é, trata-se do arcabouço teórico utilizado por Einstein para descrever o espaço-tempo, de forma que seja possível considerar eventos (como aqueles descritos pela Relatividade Restrita) que ocorram em diferentes pontos e conectá-los - ou associá-los - de alguma maneira. A variedade é, assim, o objeto matemático capaz de estabelecer a noção de como conectar uma região do espaço-tempo (onde ocorre um dado evento físico) à outra região do espaço-tempo (onde demais eventos ocorrem) (HUGHES, 2020a).

Dessarte, variedades diferenciáveis de dimensão n são espaços capazes de apresentar uma geometria global curva - ou seja, espaços dotados de aspectos topológicos mais elaborados que os apresentados por espaços planos - mas que, localmente, em pequenas regiões, comportam-se como um espaço plano de dimensão n, $\mathbb{R}^n$. A variedade é construída, então, ao "juntarmos", de forma contínua, cada uma dessas regiões locais[4]. Tal propriedade encontra-se em acordo com o Princípio da Equivalência de Einstein, segundo o qual as leis da física descritas pela Relatividade Restrita são recuperadas quando em regiões suficientemente pequenas do espaço-tempo (CARROLL, 2004).

Além disso, para definir uma variedade de dimensão n, mesmo no escopo de uma discussão com caráter heurístico, algumas condições devem ser satisfeitas. Dentre elas, uma das mais marcantes, no âmbito deste trabalho, é a da dimensionalidade da variedade: cada espaço plano, de caráter Euclidiano, em cada pequena região da variedade, deve possuir dimensionalidade n. Na prática, isso quer dizer que cada ponto de uma variedade deve possuir o mesmo número de dimensões. Outra propriedade relevante diz respeito à diferenciabilidade da variedade: o fato de ser uma variedade diferenciável indica, qualitativamente, que em cada ponto da variedade as funções ali avaliadas possuem derivadas e que estas são contínuas.

Como exemplos de variedades podem ser citados os espaços $\mathbb{R}^n$, como a linha ($\mathbb{R}^1$) ou o plano ($\mathbb{R}^2$). Uma esfera n-dimensional, definida em um espaço $\mathbb{R}^{n+1}$, também é uma variedade[5], bem como transformações contínuas - a exemplo de rotações em um espaço $\mathbb{R}^n$ - e grupos de Lie também o são (CARROLL, 2004). Variedades são de grande importância pois, na RG, são os objetos responsáveis por descrever o espaço-tempo. Isto é, o espaço físico é representado por uma variedade pseudo-Riemanniana 4-dimensional (SCHUTZ, 2009). Consequentemente, torna-se um ente de grande relevância em nossa discussão pois, no contexto teleparalelo, esse papel é mantido - porém passa a ser parte de uma estrutura geométrica mais elaborada, com a qual as particularidades de uma teoria de Gauge podem ser descritas: a variedade passa a constituir a base de um fibrado.

1.4 Fibrados

Apesar de se mostrar um objeto matemático bastante elaborado, a noção intuitiva do que é um fibrado é razoavelmente direta quando se conhecem as variedades. Em linhas gerais, um fibrado é uma variedade (denominada "base", ou mesmo "espaço base") à qual associamos (anexamos), em cada ponto, outra variedade (denominada "fibra"). Daí o nome "fibrado": trata-se de um espaço ao qual "colamos", em cada ponto, um outro espaço (a "fibra").

Um exemplo de fibrado é aquele constituído por uma esfera (indicada por S^2) e por

[4] Para uma descrição mais formal dessas noções, a discussão realizada em (CARROLL, 2004) pode ser consultada. Para uma apresentação ainda mais detalhada da geometria diferencial, com a definição de variedades feita a partir de espaços topológicos, ver (ISHAM, 1999; SCHULLER, 2015; ALDROVANDI; PEREIRA, 2016; NAKAHARA, 2003).

[5] Apesar de uma variedade ser um objeto cuja existência independe de quaisquer outros espaços; não é necessário, por exemplo, que uma variedade esteja imersa em algum espaço Euclidiano de dimensão superior. Ver discussão apresentada em (CARROLL, 2004) para maiores detalhes.

todos os planos (isto é, espaços do tipo $\mathbb{R}^2$) tangentes a ela. Outro exemplo seria o de uma esfera, S^2, e todas as retas, $\mathbb{R}^1$, perpendiculares a ela. Nesse sentido, fibrados vetoriais são aqueles cujas fibras são espaços vetoriais - um exemplo proeminente é o do fibrado dos espaços tangentes. Fibrados de sistemas lineares, por sua vez, são aqueles cujas fibras são espaços lineares.

Todavia, os espaços base e as fibras não são, por si só, suficientes para determinar completamente um fibrado - é necessário, ainda, definir como eles estão fixados (colados) um ao outro. Tal especificação é realizada pelo chamado "mapa de projeção". Dizer como a base e as fibras estão anexadas é importante pois, com os mesmos dois espaços, é possível construir diferentes fibrados dependendo da forma como estão associados. Usando o círculo, S^1, e retas, $\mathbb{R}^1$, por exemplo, poderíamos construir tanto um cilindro, quanto uma fita de Möbius.

Além disso, outra distinção à qual devemos atentar-nos é aquela relativa à classificação das fibras utilizadas. Usualmente, uma fibra é uma cópia de um dado espaço em cada ponto da base. No caso do fibrado dos espaços tangentes, por exemplo, quando as fibras são espaços tangentes, estas são cópias de algum espaço $\mathbb{R}^n$ (a dimensão n do espaço tangente em questão depende da dimensão do espaço base). Esse espaço abstrato, do qual cada fibra é uma cópia, é denominado "fibra típica". É possível definir um objeto matemático no qual as fibras não são necessariamente as mesmas em cada ponto da base, contudo nos concentraremos nas fibras típicas pois estas são as utilizadas na descrição geométrica de teorias como o TEGR.

1.5 Tetradas

No Equivalente Teleparalelo à Relatividade Geral, utiliza-se como arcabouço geométrico um fibrado. O espaço base desse fibrado é uma variedade 4-dimensional de caráter Riemanniano, responsável por representar o espaço-tempo - isto é, o espaço físico no qual ocorrem os fenômenos gravitacionais (bem como, naturalmente, os demais fenômenos físicos). Denomina-se a base desse fibrado, então, "espaço externo"ou "espaço físico"; em sua descrição, são usados índices gregos, da forma $\{\mu, \nu, \rho = 0,1,2,3\}$, os quais são chamados "índices externos"(ALDROVANDI; PEREIRA, 2012).

A cada um dos pontos do espaço externo, associa-se um espaço tangente, o qual corresponde às fibras no âmbito do arcabouço geométrico do fibrado, denominado "espaço interno". Em sua descrição, são utilizados índices latinos, da forma {i,j,k = 0,1,2,3 }, os quais recebem o nome de "índices internos"ou, ainda, de "índices algébricos".

Nesse contexto, assume papel fundamental objetos denominados "tetradas", a respeito dos quais discorremos brevemente na Seção III. As tetradas, indicadas por $h^a{}_\mu$, indicam um campo - denominado "campo de tetradas - o qual pode ser interpretado como um sistema de referência anexado a algum observador no espaço-tempo. Isto é, tetradas são conjuntos de vetores, munidos de propriedades de ortonormalidade, que descrevem o movimento de algum observador movendo-se ao longo de dada linha de mundo no espaço-tempo; a partir de suas componentes, é possível obter informações a respeito da velocidade e da aceleração de sistemas de referência (SPANIOL, 2011b) (D'INVERNO, 1992).

O papel de tais objetos na construção geométrica do Teleparalelismo, porém, vai além de sua interpretação como sistema de referência, pois a partir das tetradas induz-se, no espaço, uma métrica $g_{\mu\nu}$, por intermédio de uma relação dada pela expressão

$$g_{\mu\nu} = \eta_{ab} h^a{}_\mu h^b{}_\nu. \tag{1.11}$$

A métrica é um objeto de suma importância para a RG de Einstein pois é ela a responsável não somente por definir a noção de distância no espaço-tempo, como também por determinar qual geometria este assume. Assim, ao induzir uma métrica, as tetradas são as responsáveis por relacionar os espaços externo e interno, conforme indica a equação ((1.11)). Isto é, na medida em que possuem índices internos e externos, é possível contraí-los com a métrica de Minkowski η_{ab}, relativa ao espaço tangente (interno), e obter a métrica Riemanniana $g_{\mu\nu}$, relativa ao espaço físico (externo) - situação descrita pela equação ((1.11)). O inverso dessa mesma equação descreve a situação contrária: é possível contrair tetradas com a métrica $g_{\mu\nu}$ e obter a métrica de Minkowski.

Dessarte, $h^a{}_\mu$ é capaz de projetar um vetor U^μ do espaço-tempo no espaço tangente,

$$U^a = h^a{}_\mu U^\mu, \tag{1.12}$$

enquanto sua inversa, $h_a{}^\mu$, é capaz de trazer vetores U^a do espaço tangente ao espaço-tempo,

$$U^\mu = h_a{}^\mu U^a, \tag{1.13}$$

conforme indicado em (SPANIOL, 2011b).

Tetradas são importantes pois, enquanto na RG, é a métrica $g_{\mu\nu}$[6] o ente fundamental para a descrição da interação gravitacional, no Teleparalelismo são as tetradas os objetos responsáveis por assumir esse papel.

[6] Ou as conexões de Levi-Civita. Ver (CARROLL, 2004) para uma discussão a respeito do papel da métrica e das conexões como objetos fundamentais da descrição da gravitação.

1.6 Teoria de Grupos

Conforme abordado em (SCHWICHTENBERG, 2018), um grupo $(G,\circ)$ é um conjunto G, munido de uma dada operação $\circ$, que obedece a certos axiomas. Estes são: (1) a operação $\circ$ é “fechada"em G, então $\forall g_1, g_2 \in G, g_1 \circ g_2 \in G$; (2) existe um elemento identidade $e \in G$ tal que, se $g \in G$, então $g \circ e = e \circ g = g$; (3) para cada elemento $g \in G$ existe um elemento g^{-1} de forma que $g \circ g^{-1} = g^{-1} \circ g = e$; (4) vale a associatividade entre os elementos do grupo com respeito à operação $\circ$.

Levando em conta essas definições, a fim de exprimir o significado e o funcionamento de um “gerador", seguiremos prosseguimento análogo ao desenvolvido em (SHANKAR, 1994).

Considerando um dado grupo G, uma transformação T pertencente à G e que seja próxima da identidade $\mathbf{I}$ pode ser escrita na forma

$$T(\varepsilon) = \mathbf{I} + \varepsilon J. \tag{1.14}$$

ε é algum parâmetro infinitesimal, enquanto J é o gerador. Podemos dizer que $T(\varepsilon)$ é uma transformação infinitesimal pois a transformação através dele obtida recai na ação do parâmetro ε, reforçando o aspecto de que se trata de uma transformação próxima à transformação identidade.

Aplicando $T(\varepsilon)$ sucessivas vezes, obtém-se uma transformação finita $g(\varepsilon)$, da forma

$$g(\varepsilon) = (\mathbf{I} + \varepsilon J)^k,$$

com k o número de aplicações da transformação $T(\varepsilon)$ feitas.

Considerando algum $N \in \mathbb{R}, N >> 1$, podemos escrever $T(\varepsilon)$, de forma alternativa, como uma expressão $T(\theta)$, dada por $T(\theta) = \mathbf{I} + \frac{\theta}{N} J$; são transformações infinitesimais aquelas para as quais $N \to \infty$, caso em que o termo θ/N comporta-se como um parâmetro infinitesimal (análogo a ε). θ é um novo parâmetro em função do qual serão escritas as transformações finitas provenientes de sucessivas aplicações das transformações infinitesimais.

Considerando portanto N aplicações e tomando o limite de $N \to \infty$, obtemos as seguintes igualdades:

$$g(\theta) = \lim_{N\to\infty} \left(\mathbf{I} + \frac{\theta}{N} J\right)^N = e^{\theta J}. \tag{1.15}$$

Daí o nome "gerador": J "gera"as transformações finitas na medida em que, quando colocado na exponencial juntamente com o parâmetro θ, recupera como resultado uma dada transformação.

No escopo do Teleparalelismo, é de grande importância o gerador do grupo das translações, o qual é dado por $J \equiv P_a = \frac{\partial}{\partial x^a}$. Podemos verificar essa equivalência da seguinte maneira: consideremos uma transformação de translação $g(\alpha)$ cuja ação em $\psi(x,t)$, na coordenada particular $x^a \equiv x$, fornece $g(\alpha)\psi(x,t) = \psi(x+\alpha,t)$. Isto é, a aplicação da transformação desloca a função por um parâmetro espacial α. Como $g(\alpha) = e^{\alpha\frac{\partial}{\partial x}}$, usando expansão em série de potências temos

$$e^{\alpha\frac{\partial}{\partial x}}\psi(x,t) = \left(1 + \alpha\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\alpha^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \dots\right)\psi(x,t). \tag{1.16}$$

Realizando expansão em série de potências de $\psi(x+\alpha,t)$, vemos que

$$\begin{aligned}\psi(x+\alpha) &= \psi(x,t) + \frac{\partial\psi(x,t)}{\partial x}\alpha + \frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2}\frac{\alpha^2}{2} + \dots \\ &= \left(1 + \alpha\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\alpha^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \dots\right)\psi(x,t).\end{aligned} \tag{1.17}$$

Como a equação (1.16) coincide com a equação (1.17), vemos que de fato $e^{\alpha\frac{\partial}{\partial x}}\psi(x,t) = \psi(x+\alpha)$ e que, consequentemente, o gerador para o grupo das translações é P_a.

1.7 Teorias de Calibre

A fim de de entender o que são Teorias de Calibre, precisamos primeiramente compreender o que são Transformações de Gauge (ou de calibre). Estas são transformações de campo - isto é, transformações que atuam em campos, modificando-os - e são caracterizadas pela propriedade de que os parâmetros da transformação dependem arbitrariamente do ponto no espaço-tempo no qual elas são realizadas (RUBAKOV, 2002).

Esse tipo de transformação distingue-se das chamadas transformações globais, que são definidas como aquelas para as quais o parâmetro é invariante. Isto é, podemos considerar, por exemplo, uma dada transformação para algum ponto x no espaço tangente à variedade que representa o espaço-tempo, que depende de algum parâmetro ε, dada por

$$x \to x' = x + \varepsilon. \tag{1.18}$$

No que diz respeito a ε não importa se a transformação foi tomada em algum ponto x_1 ou em outro ponto x_2, com $x_1 \neq x_2$, pois ε permanece o mesmo (no caso de uma transformação global). Então para todos os pontos onde é tomada a variação, no caso das transformações globais, vale que

$$\varepsilon(x_1) = \varepsilon(x_2) = \dots \equiv \varepsilon. \tag{1.19}$$

Aqui é importante perceber que o que permanece constante é o parâmetro da transformação, e não o valor do campo que atua em cada ponto do espaço. Por exemplo, suponha um campo $\psi \equiv \psi(x^\mu)$ definido em alguma região do espaço-tempo. Caso sofra uma transformação global, quando avaliado no ponto x_1, esse campo será levado em algum correspondente $\psi'(x_1)$, isto é, $\psi(x_1) \to \psi'(x_1)$. Para o mesmo campo, avaliado em algum ponto x_2, teríamos: $\psi(x_2) \to \psi'(x_2)$. O que gostaríamos de ressaltar é que, em geral, não necessariamente $\psi'(x_1)$ e $\psi'(x_2)$ são iguais. O que permanece constante é o parâmetro da transformação que levou ψ em ψ' em cada caso.

Já para uma transformação de calibre, o valor do parâmetro depende de cada ponto no espaço. Ou seja, vale que

$$\varepsilon \equiv \varepsilon(x^\mu). \tag{1.20}$$

Nessa perspectiva, invariância por transformações de Gauge (ou simplesmente invariância de Gauge, ou mesmo simetria de Gauge) é a propriedade de que as grandezas observáveis referentes a um dado campo permanecem inalteradas quando os campos correspondentes sofrem transformações de Gauge - isto é, diferentes configurações de campo geram os mesmos observáveis (CAPOZZIELLO; LAURENTIS, 2011). Mas o que isso quer dizer?

Nesse tipo de teoria, os campos não são em si observáveis; o que se observa são as grandezas físicas a eles correspondentes. A invariância de Gauge ocorre quando há mudança na configuração de campos, porém a grandeza observável é mantida a mesma. Mais especificamente, não somente as grandezas físicas, mas também as ações, lagrangianas e equações de movimento mantém-se inalteradas no caso de uma simetria de Gauge (RUBAKOV, 2002). Uma teoria com a propriedade de ser invariante por transformações de Gauge é chamada de Teoria de Gauge.

1.8 O Eletromagnetismo como Exemplo de Teoria de Calibre e o Tensor Intensidade de Campo Eletromagnético

Frequentemente, na literatura da área, o Eletromagnetismo é citado como sendo o caso mais simples de uma teoria de Calibre (a exemplo de (RUBAKOV, 2002)). Dessa forma, podemos usá-lo como exemplo a fim de ilustrar os conceitos expostos até então. Para tal, recorremos à expressão do tensor de campo eletromagnético, dado por (GRIFFITHS, 2013)

$$F^{\mu\nu} = \frac{\partial A^\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A^\mu}{\partial x_\nu} \equiv \partial_\mu A^\nu - \partial_\nu A^\mu. \tag{1.21}$$

Mas o que significa cada uma das grandezas expostas na equação (1.21)? Para melhor compreendê-las, é de grande utilidade a discussão realizada em (GRIFFITHS, 2013). Dessa forma, no que diz respeito à formulação tensorial do Eletromagnetismo, seguimos nossa exposição considerando a referência indicada: $F^{\mu\nu}$ é o tensor de campo (ou intensidade de campo) eletromagnético, enquanto A^{μ} é o potencial 4-vetorial.

Em linhas gerais, $F^{\mu\nu}$ é uma generalização dos campos elétrico e magnético **E** e **B**. Isto é, os campos **E** e **B** manifestam-se como casos particulares de $F^{\mu\nu}$. Este tensor pode ser expresso como uma matriz, e pares específicos de índices selecionam elementos específicos dessa matriz, conforme indicado pela expressão (1.22):

$$F^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ -E_x/c & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y/c & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z/c & B_y & -B_x & 0 \end{bmatrix}, \tag{1.22}$$

em que B_x, B_y e B_z são componentes do campo magnético **B**, E_x, E_y e E_z são componentes do campo elétrico **E** e c é a velocidade da luz. Ou seja, os campos elétrico e magnético são combinados em um único objeto, o tensor intensidade de campo $F^{\mu\nu}$.

Analogamente, A^{μ} é uma generalização do potencial elétrico V e do potencial vetor **A**, em termos do qual $F^{\mu\nu}$ é escrito. Os campos elétrico e magnético podem ser expressos em função do potencial V e do potencial vetor **A** da seguinte maneira:

$$\mathbf{E} = \nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \tag{1.23}$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \tag{1.24}$$

Assim, ao generalizar as expressões de **E** e **B**, faz sentido generalizar também o potencial em função do qual eles são escritos. O potencial 4-vetorial é dado por

$$A^{\mu} = (V/c, A_x, A_y, A_z). \tag{1.25}$$

Uma vez compreendida a equação (1.21), podemos então discutir uma das facetas das simetrias de Calibre inerentes ao Eletromagnetismo. Segundo Rubakov[7], tanto $F^{\mu\nu}$, a ação e a lagrangiana[8] a ele associadas, quanto as equações de campo e a energia do sistema são invariantes por transformações do tipo

$$A^{\mu}(x) \rightarrow A'^{\mu}(x) = A^{\mu}(x) + \partial_{\mu}\varepsilon(x), \tag{1.26}$$

[7] Ver (RUBAKOV, 2002).

[8] A expressão para uma lagrangiana na presença de um campo eletromagnético é abordada por Aldrovandi e Pereira em (ALDROVANDI; PEREIRA, 2016) e, em contextos mais gerais - para qualquer campo de Gauge -, por Andrade e Pereira em (ANDRADE; PEREIRA, 1997a).

com $\varepsilon(x)$ uma função arbitrária (o parâmetro) que depende dos pontos do espaço-tempo. Podemos verificar essa propriedade para o caso do tensor intensidade de campo. Substituindo a equação (1.26) na equação (1.21), temos que

$$\begin{aligned} F^{\mu\nu} \to F'^{\mu\nu} &= \partial_\mu (A^\nu + \partial_\nu \varepsilon) - \partial_\nu (A^\mu + \partial_\mu \varepsilon) \\ &= \partial_\mu A^\nu - \partial_\nu A^\mu \\ &= F_{\mu\nu}. \end{aligned} \tag{1.27}$$

Ou seja, como a transformação realizada na equação (1.26) é uma transformação de Gauge, a invariância da equação (1.27) sob esse tipo de transformação é um dos pontos que caracteriza o Eletromagnetismo como uma teoria de Gauge (ou de Calibre). Neste caso, o "campo não observável"é o potencial 4-vetorial A^μ, enquanto os observáveis físicos são os campos elétrico e magnético. A alteração de A_μ, feita na equação (1.26), não afetou os observáveis físicos, segundo a equação (1.27), o que corresponde a rearranjar "os campos não observáveis"mantendo as grandezas físicas invariantes.

Apesar disso, vale dizer que, do ponto de vista quântico, percebe-se um cenário distinto, no qual o fenômeno físico observado depende do potencial eletromagnético. Trata-se do efeito Aharonov-Bohm, no qual uma partícula carregada é afetada pelo potencial mesmo que em uma região do espaço na qual os campos **E** e **B** sejam nulos, devido à fase de A_μ, a qual é mensurável (e cujos efeitos são perceptíveis a nível quântico) (ALDROVANDI; PEREIRA, 2012).

2 Metodologia

O processo metodológico adotado na construção do presente trabalho consistiu em uma revisão bibliográfica da literatura constante na área, ao longo da qual foram investigados formalismos voltados ao estabelecimento de analogias entre gravitação e eletromagnetismo - ou nos quais vislumbramos potencial para tal. Mais especificamente, foram estudadas a teoria gravitoeletromagnética e a eletrodinâmica não linear.

No âmbito do gravitoeletromagnetismo, investigou-se sua construção tanto no contexto da Relatividade Geral, materializada na análise de duas possíveis abordagens - a linearização das equações de Einstein e a utilização de analogias com o tensor de Weyl -, quanto no contexto teleparalelo. Ao longo desse processo, a principal fonte utilizada para consulta foi (SPANIOL, 2011a), com a qual foi possível estabelecer noções gerais a respeito da prescrição seguida na elaboração de cada teoria; posteriormente, materiais complementares foram utilizados. A investigação, nesse estágio da pesquisa, constituiu-se das seguintes etapas:

- Investigação do gravitoeletromagnetismo via aproximação linear;
  - Estudo do processo de linearização das equações de Einstein por intermédio do limite de campo fraco;
  - Obtenção de soluções para as equações de Einstein linearizadas análogas às equações para os potenciais eletromagnéticos V e $\mathbf{A}$;
  - Identificação dos potenciais gravitoelétrico e gravitomagnético em termos da perturbação na métrica.
- Investigação do gravitoeletromagnetismo via tensor de Weyl;
  - Estabelecimento de uma correspondência entre o tensor de Weyl e o tensor intensidade de campo eletromagnético, $F_{\mu\nu}$;
  - Definição dos campos gravitoelétrico e gravitomagnético como componentes do tensor de Weyl.
- Investigação do gravitoeletromagnetismo no contexto teleparalelo;
  - Estabelecimento de uma correspondência entre o superpotencial $\dot{S}_a{}^{\mu\nu}$ e o tensor intensidade de campo eletromagnético, $F_{\mu\nu}$;
  - Definição dos campos gravitoelétrico e gravitomagnético como componentes de $\dot{S}_a{}^{\mu\nu}$;

  - Obtenção do par não homogêneo das equações de campo gravitoelétromagnéticas, em analogia à Lei de Faraday e à Lei de Ampère-Maxwell, a partir da expressão das equações de campo teleparalelas;
  - Obtenção do par homogêneo das equações de campo gravitoeletromgnéticas, em analogia à Lei de Gauss e à divergência do campo magnético, a partir da identidade de Bianchi teleparalela.

Já no escopo da eletrodinâmica não linear, a revisão bibliográfica proporcionou contato com variadas tentativas de generalizar a lagrangiana eletromagnética. A revisão de tais trabalhos deu-se por intermédio da leitura desses artigos e identificação de quais tratavam de abordagens semelhantes; assim, foi possível entender os objetivos de cada modelo, suas propriedades e seu campo de atuação. Mais especificamente, foram seguidas as seguintes etapas:

- Identificação dos artigos cujo desenvolvimento fornece expressões explicítas para os campos gravitoelétrico e gravitomagnético;
  - Seleção de lagrangianas generalizadas, $\mathscr{L}$, que mantêm o princípio da correspondência;
  - Aplicação dessas lagrangianas às equações de Euler-Lagrange para obtenção de equações de campo generalizadas em sua forma tensorial;
  - Determinação dos campos **D** e **H** não lineares, a partir de $\mathscr{L}$, em analogia com o eletromagnetismo;
  - Determinação da permissividade elétrica, ε, e permeabilidade magnética, μ, apresentadas pelo vácuo descrito por esses modelos;
  - Determinação das equações eletromagnéticas não lineares em analogia com as equações de Maxwell.
- Identificação de artigos cuja aplicação volta-se à Cosmologia;
  - Proposição de uma lagrangiana generalizada $\mathscr{L}$;
  - Cálculo de $\Theta_{\mu\nu}$, a partir de $\mathscr{L}$;
  - Observação das implicações do $\Theta_{\mu\nu}$ calculado na obtenção de grandezas relevantes para o modelo.

O ponto até o qual se deu o aprofundamento de cada um desses tópicos é, por sua vez, discutido ao longo do texto.

O processo descrito até então foi conduzido sob constante supervisão da orientadora, concretizada em encontros - virtuais ou presenciais - nos quais foi possível discutir os caminhos a serem seguidos durante o processo de estudo. Além disso, a colaboração entre docente e discente permitiram a discussão, elaboração e produção de material, na área da Relatividade Geral, que foi além do material previamente publicado e utilizado na construção deste texto.

Mais especificamente, houve a possibilidade, concomitantemente ao processo de pesquisa para a elaboração deste trabalho, de participação em colaboração que resultou na publicação de dois artigos na área de ensino de física (SANTOS et al., 2022; SCHINZEL et al., 2022), bem como dois capítulos publicados em livro editado pela Editora Livraria da Física (FERREIRA et al., 2022). Estes mostraram-se intimamente ligados ao tema proposto neste trabalho na medida em que, ao abordar o tratamento e ensino de Relatividade Geral no nível básico, propiciaram reflexões a respeito de possíveis maneiras de levar tais conhecimentos para diferentes públicos. Certas seções do capítulo 1, por exemplo, foram elaboradas com base na produções citadas.

Outra atividade relevante para o desenvolvimento do presente trabalho,cuja realização foi possível ao longo do semestre, tratou-se da participação no 28º Congresso de Iniciação Científica da UnB e 19º Congresso de Iniciação Científica do DF, com apresentação de trabalho na forma de pôster. Este foi desenvolvido no âmbito do Programa de Iniciação Científica 2021-2022 da Universidade de Brasília (UnB), e constituiu uma das atividades propostas do edital ProIC/DPG/UnB - PIBIC/PIBIC-AF (2021/2022). O tema do referido trabalho girou em torno, justamente, de teorias gravitomagnéticas e da proposta do uso da eletrodinâmica não linear como possível caminho para aproximar gravitação e eletromagnetismo - um preâmbulo das discussões aqui dispostas, de forma ampliada.

Também houve a oportunidade de participar, ao longo do semestre 2022/2, da disciplina Teoria dos Grupos Aplicada à Física, ofertada sob o código IFD0132. A participação nessa disciplina mostrou-se útil pois foi possível aprofundar o conhecimento a respeito da Teoria de Grupos, a qual constitui-se como ferramental de grande importância para a compreensão de teorias de calibre, como o Teleparalelismo. Foi possível, por exemplo, refinar a compreensão do papel e do comportamento dos geradores e das representações de dado grupo, bem como dos diferentes grupos de interesse na Física.

3 A Relatividade Geral como uma Teoria para a Gravitação

A teoria da Relatividade Geral (RG), proposta por Albert Einstein, descreve a interação gravitacional utilizando-se de um arcabouço geométrico. Nesse formalismo, a gravidade é encarada como uma consequência da curvatura espaço-temporal, estabelecendo-se, assim, uma relação entre a massa que o ocupa e a geometria adotada (SCHUTZ, 2009). Considerando, nesse âmbito, o arcabouço matemático utilizado em tal descrição, dize-se que o espaço-tempo é modelado como uma variedade 4-dimensional diferenciável, de caráter Riemanniano, e que a trajetória de partículas em queda-livre (sob a livre ação do campo gravitacional) relaciona-se com geodésicas (CARROLL, 2004).

Nesse contexto, o objeto fundamental utilizado para a descrição da gravidade é o tensor métrico (ou, simplesmente, "métrica"), $g_{\mu\nu}$, a qual pode ser definida pela expressão (D'INVERNO, 1992)

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \tag{3.1}$$

ds^2 é o chamado "elemento de linha"e indica a distância de intervalos espaço-temporais. Os índices μ e ν, bem como os demais índices gregos utilizados neste texto, são tais que $\mu, \nu \in \{0, 1, 2, 3\}$ e indicam, por sua vez, cada uma das coordenadas do espaço-tempo 4-dimensional. Assim, heuristicamente, pode-se dizer que dx^μ e dx^ν representam intervalos infinitesimais os quais, relacionados de acordo com a métrica $g_{\mu\nu}$, definem um dado intervalo espaço-temporal ds^2 (D'INVERNO, 1992)[1]. A equação (3.1) evidencia, assim, como a métrica é o objeto responsável pelo estabelecimento da noção de distância no espaço-tempo - ou, mais especificamente, na variedade utilizada em sua representação.

Uma vez estabelecido o significado de $g_{\mu\nu}$ é possível, então, construir uma série de objetos matemáticos responsáveis pela estruturação do formalismo da RG proposto por Einstein. Dentre eles, um de grande destaque, também pela recorrência na sua utilização para definição de demais objetos mais elaborados, como veremos adiante, é a conexão de Levi-Civita, dada por (ALDROVANDI; PEREIRA, 2012; D'INVERNO, 1992)

$$\mathring{\Gamma}^{\sigma}{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\sigma\rho} (\partial_\mu g_{\rho\nu} + \partial_\nu g_{\rho\mu} - \partial_\rho g_{\mu\nu}). \tag{3.2}$$

[1] A rigor, os elementos dx^μ e dx^ν estão ligados à noção de formas diferenciais, conforme ressalta Carroll em (CARROLL, 2004); a descrição proposta por D'Inverno, porém, fornece uma ferramenta didática útil para uma visualização concreta do significado do intervalo ds^2.

Tais conexões, no arcabouço da RG, são os objetos sobre os quais recai a manifestação da curvatura espaço-temporal, e sua introdução pode ser feita, na teoria, por intermédio da definição de derivadas covariantes as quais, quando atuando em um dado campo vetorial contravariante $V^{\nu} = \{V^0, V^1, V^2, V^3\}$, assumem a forma (CARROLL, 2004; D'INVERNO, 1992)

$$\nabla_{\mu} V^{\nu} = \partial_{\mu} V^{\nu} + \mathring{\Gamma}^{\nu}_{\mu\sigma} V^{\sigma}. \tag{3.3}$$

Denotada por ∇_{μ}, como indicado na equação (3.3), a derivada covariante é uma generalização da operação de derivação ordinária, ∂_{μ}, utilizada até então em espaços de caráter não curvo. Nesse âmbito, atua como um fator de correção para esta última, mantendo a covariância de transformações realizadas em espaços curvos. Daí se estabelece, também, outro importante papel cumprido pela métrica (equação (3.1)): uma vez que a conexão de Levi-Civita é dada em termos desta (equação (3.2)), é a métrica também a responsável não somente por estabelecer a noção de distância, mas também por descrever o comportamento do espaço-tempo em si.

Com as conexões pode-se, então, definir o chamado tensor de Curvatura - também chamado tensor de Riemann -, o qual surge a partir da aplicação do comutador da derivada covariante a um vetor V^{ρ}, de acordo com a expressão

$$[\nabla_{\mu}, \nabla_{\nu}] V^{\rho} = \mathring{R}^{\rho}{}_{\sigma\mu\nu} V^{\sigma}, \tag{3.4}$$

segundo a qual define-se

$$\mathring{R}^{\rho}{}_{\sigma\mu\nu} = \partial_{\mu} \mathring{\Gamma}^{\rho}{}_{\sigma\nu} - \partial_{\nu} \mathring{\Gamma}^{\rho}{}_{\sigma\mu} + \mathring{\Gamma}^{\rho}{}_{\eta\mu} \mathring{\Gamma}^{\eta}{}_{\sigma\nu} - \mathring{\Gamma}^{\rho}{}_{\eta\nu}. \tag{3.5}$$

Partindo de $\mathring{R}^{\rho}{}_{\lambda\mu\nu}$, define-se o chamado "Tensor de Ricci", caso particular no qual $\mathring{R}^{\rho}{}_{\sigma\mu\nu} = \mathring{R}^{\rho}{}_{\sigma\rho\nu}$; isto é,

$$\mathring{R}_{\mu\nu} = \mathring{R}^{\rho}{}_{\mu\rho\nu}; \tag{3.6}$$

uma contração de $\mathring{R}_{\mu\nu}$ com a métrica $g^{\mu\nu}$, por sua vez, resulta no chamado escalar de Ricci, R:

$$\mathring{R} = g^{\mu\nu} \mathring{R}_{\mu\nu}. \tag{3.7}$$

Outra grandeza relacionada ao tensor de Curvatura com grande importância para a tentativa de construção de um formalismo gravitomagnético, conforme veremos posteriormente, é o chamado "tensor de Weyl", $\mathring{C}_{\rho\sigma\mu\nu}$, descrito pela fórmula (D'INVERNO, 1992; CARROLL, 2004)

$$\begin{aligned}\mathring{C}_{\rho\sigma\mu\nu} =& \mathring{R}_{\rho\sigma\mu\nu} + \frac{1}{n-2}(g_{\rho\nu}\mathring{R}_{\mu\sigma} + g_{\sigma\mu}\mathring{R}_{\nu\rho} - g_{\rho\mu}\mathring{R}_{\nu\sigma} - g_{\sigma\nu}\mathring{R}_{\mu\rho}) \\ &+ \frac{1}{(n-1)(n-2)}(g_{\rho\mu}g_{\nu\sigma} - g_{\rho\nu}g_{\mu\sigma})\mathring{R}, \quad n \geq 3,\end{aligned} \tag{3.8}$$

de forma que, para $n = 4$ (isto é, para quatro dimensões, como no caso da RG), tem-se

$$\begin{aligned}\mathring{C}_{\rho\sigma\mu\nu} =& \mathring{R}_{\rho\sigma\mu\nu} + \frac{1}{2}(g_{\rho\nu}\mathring{R}_{\mu\sigma} + g_{\sigma\mu}\mathring{R}_{\nu\rho} - g_{\rho\mu}\mathring{R}_{\nu\sigma} - g_{\sigma\nu}\mathring{R}_{\mu\rho}) \\ &+ \frac{1}{6}(g_{\rho\mu}g_{\nu\sigma} - g_{\rho\nu}g_{\mu\sigma})\mathring{R}.\end{aligned} \tag{3.9}$$

O tensor de Weyl possui traço nulo, de forma que quaisquer contrações de pares de índices são nulas. Pode ser encarado, então, como o tensor de Riemann com todas as contrações possíveis removidas (CARROLL, 2004) - ou, de maneira equivalente, como a parte do tensor de Riemann para a qual todas as contrações são nulas (D'INVERNO, 1992; FILHO, 2021). A informação a respeito dos traços do tensor de Riemann, por sua vez, já está contida no tensor e no escalar de Ricci.

Nesse contexto, tais objetos permitem-nos a construção do tensor de Einstein, $\mathring{G}_{\mu\nu}$, o qual é escrito, justamente, em termos de $\mathring{R}_{\mu\nu}$, R e $g^{\mu\nu}$, segundo a expressão[2]

$$\mathring{G}_{\mu\nu} = \mathring{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathring{R}; \tag{3.10}$$

este possui grande importância devido à sua íntima relação com as equações de campo da RG, pois a expressão da parte geométrica destas é dada, justamente, por $\mathring{G}_{\mu\nu}$.

Assim, em geral, as equações de campo de Einstein são escritas como

$$\mathring{R}^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\mathring{R}g^{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}\Theta^{\mu\nu}, \tag{3.11}$$

formulação na qual a geometria do espaço-tempo (membro esquerdo da equação (3.11)) é relacionada à massa/energia que o ocupa (membro direito da equação (3.11)). Tal relação é evidenciada com a igualdade entre o tensor de Einstein e o tensor $\Theta^{\mu\nu}$, denominado "tensor energia-momento", conforme se percebe na expressão geral das equações de campo. $\Theta^{\mu\nu}$ é, justamente, o termo referente à massa (fonte) geradora do campo[3].

2 A equação (3.10) encontra-se na forma covariante; esta também pode ser escrita, apesar disso, na forma contravariante.

3 Uma discussão mais detalhada a respeito da construção e das propriedades dos objetos matemáticos aqui expostos, como as conexões e o tensor de Riemann, bem como das equações de campo de Einstein em si, podem ser encontradas em (SCHUTZ, 2009; D'INVERNO, 1992; CARROLL, 2004; LANDAU; LIFSHITZ, 1980). Discussões pormenorizadas a respeito de topologia e geometria diferencial, por sua vez, encontram-se em (ISHAM, 1999; SCHULLER, 2015; ALDROVANDI; PEREIRA, 2016; NAKAHARA, 2003).

Tais equações indicam como o espaço-tempo se comporta geometricamente quando sob a presença de alguma deformação - isto é, quando há a presença de massa-energia (essa identificação entre as grandezas “massa” e “energia” é, por sua vez, retomada do arcabouço da Relatividade Especial). O membro esquerdo da equação (3.11) refere-se à geometria do espaço-tempo – evidenciada, por exemplo, pela métrica $g_{\mu\nu}$ -, enquanto seu membro direito refere-se à massa-energia que ocupa certo ponto no espaço-tempo. A equação (3.11) relaciona a geometria espaço-temporal à massa que o ocupa, salientando como cada uma dessas grandezas interage entre si.

As equações de campo de Einstein (equação (3.11)) podem ser interpretadas, também, como equações de movimento. Dessa forma, de maneira semelhante ao que ocorre na Mecânica Clássica, essas equações podem ser obtidas a partir de uma lagrangiana - isto é, por intermédio de sua aplicação às equações de Euler-Lagrange (ver (GOLDSTEIN; POOLE; SAFKO, 2001)); no âmbito da RG, tal lagrangiana será dada por $L = \mathring{L} + L_S$. L_S é a Lagrangiana referente à matéria (isto é, à fonte), geradora do campo, e é responsável por englobar, na descrição dos fenômenos gravitacionais, quaisquer outros campos provenientes de demais interações.

$\mathring{L}$, por sua vez, denomina-se "lagrangiana de Einstein-Hilbert", e é da forma

$$\mathring{L} = -\frac{c^4}{16\pi G}\sqrt{-g}\mathring{R}. \tag{3.12}$$

4 O Equivalente Teleparalelo como uma Teoria de Gauge para a Gravitação

Uma maneira alternativa de descrever a interação gravitacional é por intermédio do Equivalente Teleparalelo à RG, o qual reestrutura o formalismo proposto por Einstein como uma teoria de calibre (ALDROVANDI; PEREIRA, 2012). Nesta seção apresentaremos, em linha gerais, os objetos utilizados na construção desse formalismo alternativo, bem como a relação entre as equações de campo dele provenientes e aquelas encontradas no escopo da RG.

4.1 Construção, Definições e Objetos Fundamentais

Como arcabouço matemático para descrição do espaço-tempo, a teoria teleparalela utiliza-se de um fibrado, bem como dos conceitos de espaço interno e externo (ALDROVANDI; PEREIRA, 2012). O espaço-tempo - neste contexto, chamado "espaço externo" -, é considerado como a base de um fibrado; ou seja, é representado por uma variedade (ALDROVANDI; PEREIRA, 2016) a qual, neste caso, possui caráter riemanniano. Em cada ponto da base são fixados espaços tangentes - chamados "espaços interno" - que correspondem às fibras da configuração. Isto é, a cada ponto no espaço externo corresponde um ponto no espaço interno (à fibra).

Os objetos responsáveis por relacionar tais espaços são as tetradas, $h_a{}^\mu, h^a{}_\mu$, que, a princípio, podem ser consideradas como sistemas de coordenadas (campos vetoriais) inerentes à partícula que percorre dada trajetória no espaço-tempo. Na alçada do ferramental geométrico descrito elas podem, por sua vez, ser introduzidas por intermédio de sua atuação na métrica de Minkowski, η_{ab}:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{ab} h^a{}_\mu h^b{}_\nu. \tag{4.1}$$

A equação (4.1) relaciona a métrica η_{ab}, a qual descreve o espaço de Minkowski (de caráter plano), e uma métrica $g_{\mu\nu}$ qualquer (de caráter mais geral, podendo representar espaços curvos). Dessarte, na medida em que a aplicação das tetradas em η_{ab} - neste contexto, a métrica dos espaços tangentes à cada ponto da base do fibrado - resulta na métrica que descreve a base em si - uma variedade de caráter riemanniano, que pode possuir curvatura - é estabelecida, concretamente, a relação entre espaços interno e externo anteriormente descrita.

O papel desempenhado pelas tetradas em relacionar espaço interno e espaço externo, porém, vai além da atuação na direção indicada pela equação (4.1), na qual aplicações na métrica do espaço interno levam à métrica do espaço externo. Como possuem tanto índices da forma $\{a, b, c, ... = 0, 1, 2, 3\}$ (os quais indicam grandezas no espaço interno e, portanto, são denominados "índices internos / algébricos") e da forma $\{\mu, \nu, \rho = 0, 1, 2, 3\}$ (os quais indicam grandezas no espaço externo e, analogamente, denominam-se "índices externos"), é possível contraí-las com uma dada métrica - seja ela correspondente ao espaço interno, seja ela correspondente ao espaço externo - e obter a métrica correspondente no outro espaço, bastando considerar a relação inversa da equação (4.1) e que $h^a{}_\mu h_a{}^\nu = \delta^\nu_\mu$, $h^a{}_\mu h_b{}^\mu = \delta^a_b$. Ou seja, da mesma forma que é possível manipular índices tensoriais internos utilizando a métrica η_{ab}, também é possível fazê-lo com índices tensoriais externos usando $g_{\mu\nu}$.

Dessa maneira, uma vez definido o campo de tetradas, tem-se que o Teleparalelismo corresponde a uma teoria de Gauge[1] para o grupo das translações (ALDROVANDI; PEREIRA, 2012). A referência explícita ao grupo das translações indica que, na gravitação teleparalela, uma transformação de Gauge corresponde a uma translação na fibra - ou, equivalentemente, no espaço tangente ao ponto x^μ da base - em que é feita a adição de um parâmetro $\varepsilon \equiv \varepsilon(x^\mu)$, expressa por

$$x'^a = x^a + \varepsilon^a; \tag{4.2}$$

os geradores das translações infinitesimais, por sua vez, serão[2]

$$P_a = \frac{\partial}{\partial x^a} \equiv \partial_a, \tag{4.3}$$

enquanto, devido ao caráter das transformações de calibre, transformações infinitesimais, em si, podem ser expressas por

$$\delta x^a = \varepsilon^b P_b x^a. \tag{4.4}$$

Todavia, se for considerada, ao invés de uma variação infinitesimal nas coordenadas, uma transformação de alguma fonte $\psi(x^a(x^\mu))$ geradora do campo, tem-se que sua derivada ordinária não é covariante; isso ocorre pois o parâmetro ε não é constante, o que implica o surgimento de um termo adicional quando computamos a variação de $\partial_\mu\psi$:

$$\delta(\partial_\mu\psi) = \varepsilon^a\partial_a(\partial_\mu\psi) + (\partial_\mu\varepsilon^a)\partial_a\psi. \tag{4.5}$$

[1] Uma discussão a respeito do que são teorias de Calibre/Gauge pode ser encontrada em (RUBAKOV, 2002).

[2] Uma apresentação a respeito da Teoria de Grupos, bem como das propriedades de seus geradores, encontra-se em (SCHWICHTENBERG, 2018). Para uma exposição de como os geradores das translações infinitesimais assume a forma mostrada na equação (4.3), ver (SHANKAR, 1994), seção 11.2, "Translational Invariance in Quantum Theory".

Assim, para recuperar a covariância, introduz-se o potencial de Gauge $A_\mu = A^a{}_\mu P_a$, o qual faz parte da álgebra de Lie do grupo das translações. Desse modo, defini-se a derivada

$$h_\mu \psi = \partial_\mu \psi + A^a{}_\mu \partial_a \psi, \tag{4.6}$$

que, ao contrário da derivada ordinária ∂_μ, na equação (4.5), é covariante sob transformações infinitesimais

Reescrevendo a equação (4.6) como $h_\mu \psi = h^a{}_\mu \partial_a \psi$, com

$$h^a{}_\mu = \partial_\mu x^a + A^a{}_\mu, \tag{4.7}$$

encontramos, então, a expressão do campo das tetradas, dada justamente pela equação (4.7).

Outra relevante propriedade das transformações de Calibre - que se aplica ao formalismo descrito até então -, é que o tensor intensidade de campo $F^a{}_{\mu\nu}$ pode ser obtido com o comutador da derivada covariante h_μ (ALDROVANDI; PEREIRA, 2012). Logo, a partir da equação (4.6), temos que

$$[h_\mu, h_\nu] = F^a{}_{\mu\nu} P_a; \tag{4.8}$$

ressaltamos que $F^a{}_{\mu\nu}$ é o tensor intensidade de campo para o campo de Gauge gerado no escopo do Teleparalelismo.

Ao expandir a aplicação do comutador de h_μ, indicado na equação (4.8), uma inspeção termo a termo do resultado encontrado leva-nos a identificar o tensor intensidade de campo com a expressão geral para a torção, $\dot{T}^a{}_{\mu\nu}$, conforme indicado por Andrade e Pereira (ANDRADE; PEREIRA, 1997a). Ou seja, há uma correspondência entre o tensor intensidade de campo e a torção, a qual é uma grandeza relativa à geometria do espaço-tempo e é, ainda de acordo com Andrade e Pereira, identificada como:

$$\dot{T}^\rho{}_{\mu\nu} = h_a{}^\rho \dot{T}^a{}_{\mu\nu} = h_a{}^\rho \partial_\mu h^a{}_\nu - h_a{}^\rho \partial_\nu h^a{}_\mu \equiv \dot{\Gamma}^\rho{}_{\nu\mu} - \dot{\Gamma}^\rho{}_{\mu\nu} \neq 0. \tag{4.9}$$

Ressaltamos que, no presente trabalho, grandezas sobrescritas por '•' referem-se à grandezas em diferentes formalismos, distintos da RG, utilizadas para indicar os objetos da Gravitação Teleparalela ou, até mesmo, de formalismos mais gerais. Na equação (4.9), $\dot{\Gamma}^\rho{}_{\mu\nu}$, por exemplo, é a chamada "conexão de Weitzenböck", expressa por

$$\dot{\Gamma}^\rho{}_{\mu\nu} = h_a{}^\rho \partial_\nu h^a{}_\mu. \tag{4.10}$$

Trata-se da conexão teleparalela a qual, num contexto mais amplo, pode ser identificada como um caso particular da conexão de Cartan, que assume forma semelhante (ANDRADE; PEREIRA, 1997b).

Sob tais perspectivas, levando em conta que a teoria eletromagnética também é, tradicionalmente, construída como uma teoria de Gauge, é interessante notar um paralelo (ou correspondência) que pode ser convenientemente traçado entre esta e o teleparalelismo. Tal correspondência dá-se na medida em que, no eletromagnetismo, também surge um tensor intensidade de campo que, assim como o ${F^a}_{\mu\nu}$ da equação (4.8), depende de potenciais A_μ - como ${F^a}_{\mu\nu}$ equivale à torção, sua dependência de potenciais pode ser visualizada com o auxílio das equações (4.9) e (4.7). Assim, no eletromagnetismo, o tensor intensidade de campo pode ser escrito, em termos de potenciais, como (RUBAKOV, 2002; GRIFFITHS, 2013)

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \tag{4.11}$$

Evidencia-se, dessa forma, uma semelhança estrutural entre o teleparalelismo e a teoria eletromagnética[3].Vemos, apesar disso, que, no contexto do formalismo eletromagnético, tanto a intensidade de campo quanto o potencial eletromagnéticos não possuem índice interno. Ou seja, em comparação com o equivalente teleparalelo, o eletromagnetismo coloca-se como um caso mais restrito de uma teoria de Gauge.

Outra relevante diferença entre o equivalente teleparalelo e a RG diz respeito às propriedades apresentadas pelas conexões de cada teoria: como a conexão de Weitzenböck não é simétrica em seu último par de índices, a equação (4.9) indica uma torção não nula, enquanto, na RG, ${\mathring{\Gamma}^\sigma}_{\mu\nu}$ (equação (3.2)) é simétrica no último par de índices e resulta numa torção identicamente nula,

$$\mathring{T}^\rho_{\mu\nu} = \mathring{\Gamma}^\rho_{\nu\mu} - \mathring{\Gamma}^\rho_{\mu\nu} = 0. \tag{4.12}$$

Vale ressaltar, também, que as equações (4.7), (4.9) e (4.10) assumem as formas mostradas devido ao referencial adotado - o referencial inercial das tetradas. Em casos mais gerais, surgem nessas expressões a conexão de spin, identificada por ${\dot{A}^a}_{b\mu}$; tal conexão é responsável por representar os efeitos de uma transformação de referenciais. Para a conexão de Cartan (ver a equação (4.10)) na base tetrada (nosso sistema de referencial), porém, ela é nula. Ou seja, ${\dot{A}^a}_{b\mu} = 0$.

Assim, como adotamos o referencial da base tetrada, grandezas dependentes somente da conexão de spin também serão nulas. É esse o caso do tensor de curvatura, cuja ex-

[3] Salientamos somente que a equação (4.11) diz respeito, especificamente, ao eletromagnetismo, a despeito da convenção usada para os potenciais. Escrevê-los, tanto no caso do teleparalelismo, quanto no do eletromagnetismo, utilizando a notação A_μ é, justamente, uma forma de evidenciar a analogia estrutural entre essas teorias.

pressão se dá em termos da conexão de Lorentz/spin (ALDROVANDI; PEREIRA, 2012). Considerando, então, que a curvatura pode ser escrita em função, unicamente, da conexão $\dot{A}^a{}_{b\mu}$ e de suas derivadas, por meio de uma função da forma

$$\dot{R}^a{}_{b\mu\nu} = f(\dot{A}^a{}_{b\mu}, \partial_\nu \dot{A}^a{}_{b\mu}), \tag{4.13}$$

aferimos que, no Teleparalelismo, a curvatura é nula. Ou seja, enquanto a RG é uma teoria na qual há curvatura e a torção é identicamente nula, no formalismo teleparalelo ocorre o contrário: a gravitação é representada pela torção, e a curvatura é igual a zero. Portanto, tem-se duas teorias estruturalmente diferentes, que atribuem a gravitação a grandezas geometricamente distintas, porém que resultarão na mesma fenomenologia (do ponto de vista clássico).Isso é fundamental pois qualquer teoria que se coloque como alternativa à RG deve estar em concordância com os fenômenos observados e descritos exitosamente pela mesma. O interesse está em apresentar uma teoria gravitacional que tenha maior afinidade com o modelo padrão de teoria de partículas, baseados em teorias de gauge (ALDROVANDI; PEREIRA, 2012).

Isto posto, é possível relacionar a conexão de Weitzenböck com a conexão de Levi-Civita por intermédio da relação

$$\dot{\Gamma}^\rho{}_{\mu\nu} = \mathring{\Gamma}^\rho_{\mu\nu} + \dot{K}^\rho{}_{\mu\nu}, \tag{4.14}$$

em que $\dot{K}^\rho{}_{\mu\nu}$, dado por

$$\dot{K}^\rho{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\dot{T}_\mu{}^\rho{}_\nu + \dot{T}_\nu{}^\rho{}_\mu - \dot{T}^\rho{}_{\mu\nu}), \tag{4.15}$$

é o chamado “tensor de contorção”.

4.2 A lagrangiana teleparalela e suas equações de campo

Outra propriedade das teorias de Gauge a ser explorada é a forma que a lagrangiana, no contexto de tais teorias, assume (ALDROVANDI; PEREIRA, 2012). No caso do Teleparalelismo, com a construção exposta até então, na qual é levado em conta, especificamente, o grupo das translações, a lagrangiana para campos de Gauge, segundo (ANDRADE; PEREIRA, 1997a), assume a forma

$$\dot{L} = \frac{hc^4}{16\pi G}\left[\frac{1}{4}\dot{T}^a{}_{\mu\nu}\dot{T}^b{}_{\theta\rho}g^{\mu\theta}N_{ab}{}^{\nu\rho}\right], \tag{4.16}$$

em que $\dot{T}^a{}_{\mu\nu}$ é a intensidade do campo e, como identificamos anteriormente, no caso da gravidade teleparalela, coincide com a torção. Além disso, $N_{ab}{}^{\nu\rho} = \eta_{ab}g^{\nu\rho} \equiv \eta_{ab}h_c{}^\nu h^{c\rho}$. Como temos a presença de tetradas, os índices internos (algébricos) e externos (de espaço tempo) podem ser transformados um no outro. É necessário, dessarte, incluir todas permutações cíclicas possíveis dos índices a, b e c na equação de $N_{ab}{}^{\nu\rho}$. Realizando tais permutações e substituindo na equação (4.16), obtemos (ANDRADE; PEREIRA, 1997a)

$$\begin{aligned}\overset{\bullet}{L} &= \frac{hc^4}{16\pi G}\overset{\bullet}{T}{}^{a}{}_{\mu\nu}\overset{\bullet}{T}{}^{b}{}_{\theta\rho}g^{\mu\theta}\left[\frac{1}{4}h_c{}^{\nu}h^{c\rho}\eta_{ab}+\frac{1}{2}h_a{}^{\rho}h_b{}^{\nu}-h_a{}^{\nu}h_b{}^{\rho}\right]\\ &= \frac{hc^4}{16\pi G}\left[\frac{1}{4}\overset{\bullet}{T}{}^{\rho}{}_{\mu\nu}\overset{\bullet}{T}{}_{\rho}{}^{\mu\nu}+\frac{1}{2}\overset{\bullet}{T}{}^{\rho}{}_{\mu\nu}\overset{\bullet}{T}{}^{\nu\mu}{}_{\rho}-\overset{\bullet}{T}{}^{\rho}{}_{\mu\rho}\overset{\bullet}{T}{}^{\nu\mu}{}_{\nu}\right]. \end{aligned}\tag{4.17}$$

Essa é a lagrangiana teleparalela; ou seja, as equações de campo de partículas, no referencial das tetradas, sob o formalismo teleparalelo, podem ser obtidas a partir da equação (4.17).

Usando as definições da curvatura com a conexão de Weitzenböck (a qual é nula) e a equação (4.14), é possível encontrar a relação entre $\overset{\bullet}{L}$ e a lagrangiana de Einstein-Hilbert:

$$\overset{\bullet}{L} = \overset{\circ}{L} - \partial_\mu\left(\frac{c^4 h}{8\pi G}\overset{\bullet}{T}{}^{\nu\mu}{}_{\nu}\right). \tag{4.18}$$

Isto é, a despeito de um termo de divergência, a lagrangiana teleparalela é equivalente à lagrangiana da RG (Einstein-Hilbert) [4].

Analogamente ao que se sucede na RG, com as equações (3.12) e (3.11), é possível obter, a partir da equação (4.17), as equações de campo teleparalelas. Na presente situação, um caminho conveniente para fazê-lo é considerar uma lagrangiana da forma $L = \overset{\bullet}{L} + L_s$ e usar as leis de conservação (teoria de Noether), com os quais torna-se possível escrever o equivalente teleparalelo das equações de campo na equação (3.11) (ALDROVANDI; PEREIRA, 2012):

$$\partial_\sigma(h\overset{\bullet}{S}_a{}^{\rho\sigma}) - kh\overset{\bullet}{J}_a{}^{\rho} = kh\Theta_a{}^{\rho}, \tag{4.19}$$

em que $k = 8\pi G/c^4$, $\overset{\bullet}{S}_a{}^{\rho\sigma}$ é chamado superpotencial e $\overset{\bullet}{J}_a{}^{\rho}$ é a corrente de Gauge, dados, respectivamente, por

$$\overset{\bullet}{S}_a{}^{\rho\sigma} = \overset{\bullet}{K}{}^{\rho\sigma}{}_{a} - h_a{}^{\sigma}\overset{\bullet}{T}{}^{\theta\rho}{}_{\theta} + h_a{}^{\rho}\overset{\bullet}{T}{}^{\theta\sigma}{}_{\theta}, \tag{4.20}$$

$$\overset{\bullet}{J}_a{}^{\rho} = \frac{1}{k}h_a{}^{\mu}\overset{\bullet}{S}_c{}^{\nu\rho}\overset{\bullet}{T}{}^{c}{}_{\nu\mu} - \frac{h_a{}^{\mu}}{h}\overset{\bullet}{L}. \tag{4.21}$$

[4] Tal equivalência sustenta-se na medida em que, quando é feita a integração da lagrangiana ao longo de todo o espaço, o termo com a divergência equivale a um termo de superfície (Teorema da Divergência), cuja contribuição, no infinito, pode ser considerada nula.

Usando a identidade na equação (4.14) é possível, também, relacionar a equação de campo em (4.19) com grandezas da RG, ao mostrar como o membro esquerdo da equação teleparalela obedece à relação

$$\partial_\sigma(h\overset{\bullet}{S}_a{}^{\rho\sigma}) - k(h\overset{\bullet}{J}_a{}^{\rho}) = h(\overset{\circ}{R}_a{}^{\rho} - 1/2 h_a{}^{\rho}\overset{\circ}{R}). \tag{4.22}$$

5 Aproximando a Gravitação ao Eletromagnetismo: o Gravitomagnetismo no Contexto da RG

Uma das maneiras possíveis de estabelecer uma analogia entre os formalismos eletromagnético e gravitacional é partir das expressões utilizadas na descrição deste e, de alguma forma, ir ao encontro das expressões utilizadas na descrição daquele. Um problema de compatibilidade surge, então, na medida em que as equações de campo de Einstein (equação (3.11)) possuem derivadas de ordem superior e as equações de Maxwell (que descrevem o eletromagnetismo) possuem somente derivadas de primeira ordem. Surgem, então, ainda no contexto da RG, duas principais alternativas para a tentativa de compatibilização entre ambos tipos de equação: uma via linearização das equações de Einstein, a outra via decomposição do tensor de Weyl.

A primeira das opções citadas trata-se do GEM via aproximação linear (MASHHOON, 2003; MALEKOLKALAMI; FARHOUDI, 2009; SANTOS, 2021). Neste caso, considera-se a hipótese de campo fraco, na qual a métrica, $g_{\mu\nu}$, é constituída por uma parte plana, evidenciada pela métrica do espaço de Minkowski, $\eta_{\mu\nu}$, mais uma pequena perturbação, $h_{\mu\nu}$, gerada pela matéria fonte do campo gravitacional; $g_{\mu\nu}$ assume, assim, a forma

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}. \tag{5.1}$$

Uma observação bastante pertinente é que, na presente seção, excepcionalmente, o termo "$h_{\mu\nu}$" refere-se à perturbação gerada, e não ao campo de tetradas. Optamos por tal denominação para a perturbação a fim de manter a coerência com a notação tradicionalmente utilizada na literatura. Malgrado a coincidência referente às notações, no restante do texto - com exceção de casos excepcionais, explicitados ao longo da exposição -, $h^a{}_\mu$ referir-se-á às tetradas.

Substituindo a aproximação linear para $g_{\mu\nu}$ - equação (5.1) - na equação (3.11) (considerando as definições do tensor de Ricci, na equação (3.6), e do escalar de Ricci, na equação (3.7), em termos da métrica) e levando em conta, ainda, que o traço de $h_{\mu\nu}$ é

$$h = \eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu}, \tag{5.2}$$

pode-se encontrar as equações de Einstein linearizadas. Para tal, é necessário adotar o gauge de Lorentz (neste caso, um sistemas de coordenadas conveniente), no qual $\bar{h}^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0$, e conveniente definir a grandeza

$$\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h, \tag{5.3}$$

em função da qual a equação de Einstein linearizada pode ser escrita como (HUGHES, 2020b)

$$\Box\bar{h}_{\mu\nu} = \frac{-16\pi G}{c^4}\Theta_{\mu\nu}. \tag{5.4}$$

$\Theta_{\mu\nu}$ é o tensor energia momento, ao qual nos referimos ao tratar as equações de campo de Einstein (equação (3.11)).

Seguindo, então, procedimento análogo ao desenvolvido no eletromagnetismo (GRIFFITHS, 2013), pode-se usar a função de Green para resolver a equação (5.4) (ARFKEN; WEBER, 1999), obtendo-se, como solução, a expressão (HUGHES, 2020c)

$$\bar{h}_{\mu\nu} = \frac{4G}{c^4}\int \frac{\Theta_{\mu\nu}(ct - |\mathbf{x} - \mathbf{x'}|, \mathbf{x'})}{|\mathbf{x} - \mathbf{x'}|}. \tag{5.5}$$

Definindo $\Theta_{\mu\nu}$ em termos de $J^{\mu} = (c\rho, \mathbf{j})$ (corrente de massa-energia), pode-se fazer a identificação

$$\Theta^{00} = \rho c^2, \tag{5.6}$$

$$\Theta^{0i} = c j^i, \tag{5.7}$$

com as quais é possível definir os potenciais gravitoelétrico, Φ, e gravitomagnético, $\mathbf{A}$. Essa definição é feita em termos das componentes de $\bar{h}_{\mu\nu}$, na equação (5.5), levando aos termos

$$\begin{aligned} \bar{h}_{00} &= 4\Phi/c^2, \\ \bar{h}_{0i} &= -2A_i/c^2. \end{aligned} \tag{5.8}$$

Isto é, Φ e $\mathbf{A}$ seriam potenciais a partir dos quais surgiriam campos gravitomagnéticos, justamente em analogia com o que se passa na teoria eletromagnética. Ainda seguindo essa analogia, os campos gravitoelétrico (GE), $\mathbf{E}$, e gravitomangético (GM), $\mathbf{B}$, em si, são, então, definidos aos moldes das expressões para os campos elétrico e eletromagnético de acordo com o formalismo de Maxwell (SPANIOL, 2011a):

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\nabla\Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\mathbf{A}}{2}\right), \\ \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A}. \end{aligned} \tag{5.9}$$

Seguem, então, o que seriam as equações de Maxwell gravitacionais (análogas, no GEM, às equações de Maxwell para o eletromagnetismo):

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\mathbf{B}}{2}\right), \\ \nabla \cdot \mathbf{E} &= 4\pi G\rho, \\ \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{B}}{2}\right) &= 0, \\ \nabla \times \left(\frac{\mathbf{B}}{2}\right) &= \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{E} + \frac{4\pi G}{c}\mathbf{j}. \end{aligned} \tag{5.10}$$

Já no caso da GEM não linear, utiliza-se o tensor de Weyl (equação (3.9)) - ou, mais especificamente, uma decomposição de suas componentes - a fim de estabelecer uma correspondência entre grandezas gravitacionais e eletromagnéticas. (MAARTENS, 2008; RAMOS; MONTIGNY; KHANNA, 2010; RAMOS; MONTIGNY; KHANNA, 2018; SANTOS, 2021). Esta é feita, então, entre o tensor de Weyl (representando o campo gravitacional livre) e o tensor eletromagnético:

$$C_{\mu\nu\lambda\sigma} \iff F_{\mu\nu}. \tag{5.11}$$

Contraindo-o com um vetor quadrivelocidade tipo-tempo, u^{μ}, definem-se, então, os campos GE e GM, respectivamente dados por

$$\begin{aligned} E_{\mu\nu} &= C_{\mu\nu\lambda\sigma} u^{\lambda} u^{\sigma}, \\ B_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\lambda\sigma} C^{\lambda\sigma}{}_{\nu\gamma} u^{\gamma}. \end{aligned} \tag{5.12}$$

Dessa forma estabelece-se, então, uma analogia com o eletromagnetismo sem a necessidade de linearização das equações de campo. Vale ressaltar, apesar disso, certo grau de artificialidade inerente a esses procedimentos, conforme exposto em (SPANIOL, 2011a); objetos geométricos - como o tensor de Weyl ou uma pertubação no tensor métrico - são identificados com grandezas eltromagnéticas, porém não há uma correspondência estrutural entre a base geométrica utilizada na construção destas e a construção dos entes geométricos citados.

6 Gravitomagnetismo no Contexto Teleparalelo

Uma maneira de tentar contornar a aparecente artificialidade das tentativas de se estabelecer um formalismo para GEM, na RG, é, justamente, trabalhar no contexto do ETRG. Na medida em que este se apresenta como uma teoria de Gauge para o grupo das translações - estrutura semelhante à apresentada pelo formalismo eletromagnético, porém com um diferente grupo de simetria (o das translações) - torna-se possível estabelecer paralelos com motivações intrínsecas à própria estrutura de cada teoria. Para tal, seguiremos o procedimento adotado em (SPANIOL, 2011a).

6.1 Campos Gravitoeletromagnéticos

No eletromagnetismo, os campos elétrico e magnético apresentam-se como manifestações de um objeto mais geral, o tensor eletromagnético $F_{\mu\nu}$ (GRIFFITHS, 2013). A fim de definir os campos GE e GM é necessário, portanto, definir qual grandeza teleparalela corresponderá ao $F_{\mu\nu}$ eletromagnético. Para tal, faze-se útil uma análise da lagrangiana teleparalela (equação (4.17)).

Utilizando a definição do superpotencial, $\overset{\bullet}{S}_a{}^{\rho\sigma}$, na equação (4.20), a lagrangiana teleparalalela pode ser reescrita como (ALDROVANDI; PEREIRA, 2012)

$$\overset{\bullet}{L} = \frac{c^4 h}{32\pi G}\overset{\bullet}{T}_{\rho\mu\nu}\overset{\bullet}{S}{}^{\rho\mu\nu}. \tag{6.1}$$

Percebemos que tal lagrangiana - equivalente, naturalmente, à equação (4.17) - é análoga, no que tange à sua estrutura, à lagrangiana eletromagnética pois esta, a despeito de um termo contendo o potencial vetorial eletromagnético, A_μ, também é definida por intermédio de uma contração do tensor eletromagnético, $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$. Mais especificamente, na equação (6.1), percebemos uma contração do superpotencial, $\overset{\bullet}{S}{}^{\rho\mu\nu}$, com o tensor de torção, $\overset{\bullet}{T}_{\rho\mu\nu}$; ressaltamos, então, como este é identificado, no contexto do ETRG, justamente com o tensor intensidade de campo da teoria, enquanto aquele, por sua vez, é uma generalização desse mesmo tensor intensidade de campo (vê-se, na equação (4.20), sua dependência da torção e, consequentemente, do tensor intensidade de campo).

Outra interessante propriedade a respeito da qual é possível estabelecer uma analogia é a forma que assumem as equações de campo teleparalelas (equação (4.19)) quando não há fontes. Obtém-se, nesta conjuntura, a expressão

$$\partial_\sigma(h\dot{S}_a{}^{\rho\sigma}) = k(h\dot{J}_a{}^{\rho}), \tag{6.2}$$

que apresenta, mais uma vez, estrutura análoga à expressões da teoria eletromagnética. Neste caso, é estabelecido um paralelo com as equações de Maxwell cuja estrutura, na forma tensorial, é tal que derivadas do tensor eletromagnético correspondem à densidade de corrente.

As relações expostas sugerem, como proposto por Spaniol e Andrade, em (SPANIOL, 2011a), que o objeto apto a desempenhar o papel do tensor intensidade de campo, análogo ao utilizado no eletromagnetismo, é o superpotencial

$$\dot{S}_a{}^{\mu\nu} = h_{a\rho}\dot{S}^{\rho\mu\nu}. \tag{6.3}$$

Os campos GE e GM são, então, definidos como componentes de $\dot{S}_a{}^{\mu\nu}$ - estabelecendo-se, mais uma vez, correspondência com o eletromagnetismo:

$$\begin{aligned} \dot{S}_a{}^{0i} &= E_a{}^{i}, \\ \dot{S}_a{}^{ij} &= \varepsilon^{ijk}B_{ak} \end{aligned} \tag{6.4}$$

Uma vez definidas tais grandezas torna-se possível, então, analisar o comportamento das equações de campo delas provenientes.

6.2 Equações de Campo

Na forma tensorial, as equações de Maxwell, quando expressas em função do tensor eletromagnético, podem ser escritas como

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = \mu_0 J^{\mu}, \tag{6.5}$$

$$\partial_\rho F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu} = 0. \tag{6.6}$$

A partir da equação (6.5), recupera-se a lei de Gauss - quando $\mu = 0$ - e a lei de Ampère-Maxwell - quando $\mu = i$ -, respectivamente dadas por

$$\nabla\cdot\mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \tag{6.7}$$

$$\nabla\times\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{J} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}. \tag{6.8}$$

O equivalente à equação (6.5), na GEM teleparalela, será a equação (6.2) - à luz da semelhança estrutural entre essas expressões. Assim, fazendo $\rho = 0$ na equação (6.2), espera-se obter o equivalente à lei de Gauss. A equação advinda de tal procedimento é

$$\partial_i(hE_a{}^i) = k(h\dot{J}_a{}^0). \tag{6.9}$$

A menos do termo multiplicativo h, o membro esquerdo da equação (6.9) é análogo à divergência do campo elétrico; o membro direito, por sua vez, atua como fonte do campo gravitacional. Percebe-se, dessa forma, correspondência, por intermédio da analogia estrutural, com a equação de Gauss (equação (6.7)).

No caso dos índices espaciais, em que $\rho = p$ (índice espacial), obtém-se, a partir da equação (6.2), com a aplicação das definições até então expostas, a expressão (SPANIOL, 2011a)

$$\varepsilon^{qjk}\partial_j(hB_a{}^k) - \partial_0(hE_a{}^q) = 4\pi(h\dot{J}_a{}^q), \tag{6.10}$$

a qual, por sua vez, também possui expressão semelhante à lei de Ampère-Maxwell (equação (6.8)): há um termo com derivadas do campo GM, um termo em que aparece uma derivada temporal do campo GE, bem como um termo dependente da corrente de Gauge. Nessa interpretação, o termo $(h\dot{J}_a{}^q)$ atua, mais uma vez, como fonte do campo.

Evidencia-se, assim, a vantagem em considerar o superpotencial $\dot{S}_a{}^{\mu\nu}$ e a corrente $\dot{J}_a{}^\rho$ como correspondentes, no GEM teleparalelo, às grandezas eletromagnéticas, uma vez que sua utilização permite a obtenção de equações com estruturas semelhantes às do eletromagnetismo. A forma exata das equações (6.9) e (6.10), em termos dos campos GE e GM, possuem uma série de termos de acoplamento, os quais podem ser conferidos em (SPANIOL; ANDRADE, 2010).

Já a equação (6.6) decompõe-se, ainda no âmbito do eletromagnetismo, nas equações

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \tag{6.11}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \tag{6.12}$$

As equações de Maxwell gravitacionais correspondentes, por sua vez, a fim de manter a analogia entre os formalismos, devem surgir da primeira identidade de Bianchi teleparalela,

$$\partial_\rho F^a{}_{\mu\nu} + \partial_\mu F^a{}_{\nu\rho} + \partial_\nu F^a{}_{\rho\mu} = 0. \tag{6.13}$$

Tal definição faz sentido pois a identidade de Bianchi também surge no eletromagnetismo, sob a forma da identidade (GRIFFITHS, 2013)

$$\partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} = 0, \tag{6.14}$$

em que $F_{\mu\nu}$ indica o tensor eletromagnético (equação (1.22)).

Partindo da equação (4.20), a qual descreve $\dot{S}_a{}^{\mu\nu}$ em termos de $F^a{}_{\mu\nu}$ - uma vez que a torção corresponde ao tensor intensidade de campo -, é possível, ao inverter a equação, obter o tensor $F^a{}_{\mu\nu}$ em termos de $\dot{S}_a{}^{\mu\nu}$ (SPANIOL, 2011a),

$$F^a{}_{\gamma\delta} = h^b{}_\lambda g_{\rho\delta} h^b{}_\mu \dot{S}_b{}^{\mu\rho} - h^b{}_\delta g_{\nu\lambda} h^a{}_\mu \dot{S}_b{}^{\mu\nu} - \frac{1}{2} h^a{}_\delta g_{\nu\lambda} h^b{}_\theta \dot{S}_b{}^{\theta\nu} + \frac{1}{2} h^a{}_\gamma g_{\rho\delta} h^b{}_\theta \dot{S}_b{}^{\theta\rho}. \tag{6.15}$$

Deve-se escrever, então, a identidade de Biachi em função do superpotencial, uma vez que este foi o ente a partir do qual definimos os campos GE e GM. Substituindo a equação (6.15) na equação (6.13), tem-se

$$\begin{aligned} \partial_\sigma[\mathscr{O}^{ba}{}_{\gamma i\delta} E_b{}^i + \mathscr{P}^{ba}{}_{\gamma ij\delta} \varepsilon^{ijk} B_b{}^k] + \partial_\gamma[\mathscr{Q}^{ba}{}_{\delta i\sigma} E_b{}^i + \mathscr{R}^{ba}{}_{\delta ij\sigma} \varepsilon^{ijk} B_b{}^k] + \\ + \partial_\delta[\mathscr{S}^{ba}{}_{\delta i\sigma} E_b{}^i + \mathscr{T}^{ba}{}_{\sigma ij\gamma} \varepsilon^{ijk} B_b{}^k] = 0, \end{aligned} \tag{6.16}$$

em que

$$\begin{aligned} \mathscr{O}^{ba}{}_{\gamma i\delta} = {} & h^b{}_\gamma h^a{}_i g_{j\delta} - h^b{}_\delta h^a{}_0 g_{0\delta} - h^b{}_\delta h^a{}_0 g_{i\gamma} + h^b{}_\delta h^a{}_i g_{0\gamma} + \\ & + \frac{1}{2} h^a{}_\delta h^b{}_0 g_{i\gamma} - \frac{1}{2} h^a{}_\delta h^b{}_i g_{0\gamma} - \frac{1}{2} h^a{}_\gamma h^b{}_0 g_{i\delta} + \frac{1}{2} h^a{}_\gamma h^b{}_i g_{0\delta}; \end{aligned} \tag{6.17}$$

$$\mathscr{P}^{ba}{}_{\gamma ij\delta} = h^b{}_\gamma h^a{}_i g_{j\delta} - h^b{}_\delta h^a{}_i g_{j\gamma} + \frac{1}{2} h^a{}_\delta h^b{}_i g_{i\gamma} - \frac{1}{2} h^a{}_\gamma h^b{}_i g_{i\delta}. \tag{6.18}$$

Os termos $\mathscr{Q}^{ba}{}_{\delta i\sigma}$ e $\mathscr{R}^{ba}{}_{\delta ij\sigma}$ são obtidos, a partir de $\mathscr{O}^{ba}{}_{\gamma i\delta}$ e $\mathscr{P}^{ba}{}_{\gamma ij\delta}$, respectivamente, com as trocas de índices $\gamma \to \delta$ e $\delta \to \sigma$; de forma análoga, obtém-se os termos $\mathscr{S}^{ba}{}_{\delta i\sigma}$ e $\mathscr{T}^{ba}{}_{\sigma ij\gamma}$ com as mudanças $\gamma \to \sigma$ e $\delta \to \gamma$.

7 Aproximando o Eletromagnetismo à Gravitação: a Eletrodinâmica não Linear

A eletrodinâmica não linear propõe-se a generalizar as equações de Maxwell por intermédio da construção de lagrangianas alternativas à lagrangiana canonicamente utilizada no eletromagnetismo. Assim, são obtidas equações de campo de ordem superior - isto é, generalizações das equações de Maxwell. Nesse contexto, vislumbramos a possibilidade de tentar uma aproximação entre gravitação e eletromagnetismo, de certa maneira análoga ao procedimento seguido no GEM, porém em sentido inverso: partir do eletromagnetismo em direção à gravitação, utilizando essas generalizações das equações de Maxwell, de forma que se faz útil uma análise das propostas de eletrodinâmica não linear constantes na literatura.

Nesse contexto, nas próximas seções propomo-nos investigar os objetivos, características e propriedades desses modelos particulares. Com esse processo, pretendemos, em um primeiro momento, observar processos de generalização da lagrangiana eletromagnética e, então, apreender os procedimentos práticos necessários para tal. Tem-se, como perspectiva, a possibilidade de aplicação desses processos a lagrangianas convenientes para a tentativa de estabelecimento de analogias com a gravitação, no âmbito de ulteriores projetos de pesquisa. Visamos, também, além disso, averiguar sobre quais situações estendem-se as tentativas de generalizar as equações de Maxwell, a fim de ter um panorama das possibilidades teóricas de aplicação e, ainda, de eventuais considerações convenientes aos nossos objetivos (aproximar eletromagnetismo e gravitação) no que diz respeito à eletrodinâmica não linear.

7.1 Modelos Eletrodinâmicos não Lineares por intermédio da Introdução de Parâmetros Dimensionais e Adimensionais

7.1.1 Modelo dado pela introdução de um Parâmetro Dimensional β

Voltemo-nos, primeiramente, à generalização da lagrangiana eletromagnética proposta em (KRUGLOV, 2015), na qual são introduzidos um parâmetro dimensional β (com unidades de comprimento[4]) e um parâmetro adimensional a. Neste caso, adotando $\hbar = c = \varepsilon_0 = \mu_0 = 1$, a referência citada leva em conta as seguintes densidades lagrangianas:

$$\mathscr{L} = -\frac{\mathscr{F}}{2(\beta\mathscr{F}) + 1} \quad \text{e} \tag{7.1}$$

$$\mathscr{L} = -\mathscr{F} - \frac{a\mathscr{F}}{2(\beta\mathscr{F}) + 1} \tag{7.2}$$

A grandeza $\mathscr{F}$ é definida como

$$\mathscr{F} = \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = \frac{\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2}{2}, \tag{7.3}$$

em que $F_{\mu\nu}$ é o tensor intensidade de campo eletromagnético (equação (1.22)), dado por $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, enquanto A_μ é o potencial quadrivetorial (GRIFFITHS, 2013). $\mathscr{L} = -\mathscr{F}$ é a lagrangiana a qual, uma vez aplicada nas equações de Euler-Lagrange, fornece a parte relativa aos campos das equações de Maxwell. Ou seja, é a partir dela que as equações de Maxwell surgem, de forma que, ao generalizá-la, espera-se também ser possível generalizar as equações de Maxwell.

Tal modelo é munido das seguintes propriedades (KRUGLOV, 2015):

- O campo elétrico de uma carga pontual na origem deixa de ser singular (passa a ser bem definido);
- A energia (elétrica) de cargas pontuais carregadas é finita;
- A simetria dual é violada;
- Os tensores energia-momento e as correntes de Belinfante, bem como a energia de caragas pontuais, são calculadas.

Vale notar que tais propriedades - a exemplo do tensor energia momento de Belinfante e da simetria dual - colocam-se no âmbito da teoria quântica de campos. Ou seja, vê-se que o presente modelo propõe-se a resolver questões referentes a esse domínio de validade, na medida em que as correções (isto é, o processo de generalização) à eletrodinâmica linear de Maxwell, no escopo deste modelo, parte de efeitos da gravitação quântica. É esse o motivo, inclusive, pelo qual se inclui um parâmetro dimensional β nos termos propostos.

Como exposto anteriormente, o cenário da teoria quântica de campos coloca-se, em um primeiro momento, fora dos objetivos deste trabalho, de forma que não entraremos nos detalhes relativos a esses conceitos e ao seu funcionamento, suas propriedades, e mesmo seu papel no modelo composto pelas lagrangianas das equações (7.1) e (7.2).

Apesar disso, um ponto de grande interesse tratado em (KRUGLOV, 2015) é o procedimento de aplicação da lagrangiana generalizada às equações de Euler-Lagrange, o qual pode ser reproduzido em regime clássico. Antes de nos estendermos sobre a prescrição seguida para tal procedimento, voltemo-nos à lagrangiana da equação (7.1), a qual possui, além do parâmetro dimensional β, o parâmetro adimensional a.

Quando $a \to 0$, $\mathscr{L} \to -\mathscr{F}$, que é a lagrangiana de Maxwell (ou seja, são recuperadas as equações eletromagnéticas lineares). Considerando, porém, que $\beta\mathscr{F} \ll 1$, a equação obtida (utilizando expansão em série de potências, com ($\beta\mathscr{F}$) como variável) é a seguinte:

$$\mathscr{L} \approx -\mathscr{F} - a\mathscr{F} + 2a\beta\mathscr{F}^2. \tag{7.4}$$

Para campos eletromagnéticos pequenos, o segundo termo, com $\mathscr{F}^2$, tende a 0, de forma que se obtém a densidade lagrangiana

$$\mathscr{L} = -(1+a)\mathscr{F} - \mathscr{F}. \tag{7.5}$$

Isto é, a densidade lagrangiana de Maxwell não é recuperada, de forma que o princípio da correspondência - segundo o qual deve-se recuperar as equações lineares como caso particular, para campos pouco intensos - é violada. A lagrangiana (7.2), por sua vez, recupera a lagrangiana eletromagnética para campos pequenos, uma vez que não surge, no processo de expansão em série de potências, o termo com $a\mathscr{F}$, como na equação (7.4). Por esse motivo, consideraremos, para nossos propósitos, somente o procedimento seguido com a lagrangiana (7.2) uma vez que, numa eventual aplicação desse método na tentativa de encontrarmos analogias com as equações gravitacionais, gostaríamos que as equações eletromagnéticas lineares fossem recuperadas.

Vale notar, ainda, que o parâmetro dimensional β é tal que o produto $\beta\mathscr{F}$, no denominador da lagrangiana de interesse (equação (7.1)), seja adimensional. Esse parâmetro é de grande relevância para o modelo pois, conforma descrito em (KRUGLOV, 2017), o modelo serve como uma descrição efetiva da eletrodinâmica para campos fortes que levam em conta a possibilidade de correções devidas à gravitação quântica. Além disso, relacionando-se com as propriedades deste modelo listadas acima, β é também responsável por determinar o limite superior da intensidade de campo dos campos eletromagnéticos possíveis. Mais uma vez, enfatizamos que tal arcabouço teórico coloca-se fora de nossos objetivos iniciais e, por tal razão, não serão aprofundados.

Dando sequência, então, ao ponto de principal interesse, é exposto um procedimento para obtenção de campos eletromagnéticos não lineares. Considerando o potencial A_μ como variável dinâmica, a lagrangiana na equação (7.1) pode ser aplicada nas equações de Euler-Lagrange, na forma

$$\frac{\partial L}{\partial A_\nu} - \partial_\mu \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = 0, \tag{7.6}$$

levando, então, às equações de movimento (correspondentes às equações de campo) dadas pela expressão

$$\partial_\mu \left(\frac{F_{\mu\nu}}{[2(\beta\mathscr{F})+1]^2} \right) = 0. \tag{7.7}$$

A partir da equação (7.1) é possível, também, encontrar o campo de deslocamento elétrico, **D**, e o campo auxiliar, **H**, os quais são definidos, no escopo da formulação lagrangiana, como $\mathbf{D} = \partial L/\partial \mathbf{E}$ e $\mathbf{H} = -\partial L/\partial \mathbf{B}$ (KRUGLOV, 2015; KRUGLOV, 2017; KRUGLOV, 2015; KRUGLOV, 2016). **D** e **H** são tais que, na eletrodinâmica de Maxwell, coincidem com os campos elétrico, **E**, e magnético, **B**, quando considerados campos no vácuo, uma vez que estamos considerando $\varepsilon_0 = \mu_0 = 1$ e que o momento de dipolo e a magnetização são nulas, nesta situação (GRIFFITHS, 2013).

Dessarte, usando a equação (7.1) nas definições de **D** e **H**, obtém-se que **D** é dado por

$$\mathbf{D} = \left(\frac{1}{[2(\beta\mathscr{F})+1]^2} \right) \mathbf{E}, \tag{7.8}$$

de forma que a permissividade elétrica é

$$\varepsilon = \frac{1}{[2(\beta\mathscr{F})+1]^2}, \tag{7.9}$$

enquanto que o campo **H** é dado por

$$\mathbf{H} = \frac{1}{[2(\beta\mathscr{F})+1]^2} \mathbf{B} \tag{7.10}$$

e a permeabilidade magnética, consequentemente, expressa como

$$\mu = [2(\beta\mathscr{F})+1]^2. \tag{7.11}$$

Usando, então, as equações (7.8) e (7.10), a equação de campo (7.7) fornece o primeiro para das equações de Maxwell generalizadas,

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0, \tag{7.12}$$

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} - \nabla \times \mathbf{H} = 0. \tag{7.13}$$

Usando a equação (6.6) obtemos o segundo par de equações:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \tag{7.14}$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{E} = 0. \tag{7.15}$$

Essas equações são não lineares na medida em que ε e $\mu = \varepsilon^{-1}$ dependem dos campos elétrico e magnético e o vácuo, neste caso, atua como um meio com permissividade elétrica ε e permeabilidade magnética μ.

A prescrição seguida para obtenção dessas equações é aplicada, na literatura, a diferentes lagrangianas (KRUGLOV, 2017; KRUGLOV, 2015; KRUGLOV, 2016). Em linhas gerais, o procedimento de obtenção das equações eletromagnéticas não lineares é análogo ao realizado no modelo constante em (KRUGLOV, 2015). A diferença em cada uma dessas propostas recai na densidade lagrangiana utilizada - cada modelo propõe lagrangianas particulares -, nas propriedades a elas inerentes e às aplicações realizadas em cada caso.

7.1.2 Generalização por Intermédio da introdução de um Parâmetro Adimensional γ

Dentre os modelos citados no final da seção anterior, um cuja aplicação feita nos é conveniente, ao menos em parte, é o exposto em (KRUGLOV, 2017). Trata-se de uma generalização do modelo tratado anteriormente, que era descrito pela lagrangiana da equação (7.2), à qual introduz-se um parâmetro adimensional γ como potência do termo $\beta\mathscr{F}$, na forma

$$\mathscr{L} = -\frac{\mathscr{F}}{1 + (\beta\mathscr{F})^{\gamma}}. \tag{7.16}$$

No limite de campo fraco, quando $\beta\mathscr{F} \ll 1$, $\mathscr{L} \to -\mathscr{F}$, recuperando-se, assim, a eletrodinâmica de Maxwell. Ou seja, o princípio da correspondência é respeitado.

Usando as equações de Euler-Lagrange, as equações de campo correspondentes são dadas por

$$\partial_{\mu}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \mathscr{F}} F^{\mu\nu}\right) = 0, \qquad \text{com} \tag{7.17}$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \mathscr{F}} = \frac{(\gamma - 1)(\beta\mathscr{F})^{\gamma} - 1}{(1 + (\beta\mathscr{F})^{\gamma})^2}. \tag{7.18}$$

Seguindo procedimento análogo ao descrito anteriormente, são calculados ε e μ; calcula-se, inclusive, a forma que assume o tensor energia-momento, $\Theta_{\mu\nu}$, a partir da equação (7.16). O ponto mais interessante do desenvolvimento apresentado em (KRUGLOV, 2017), no escopo de nossa proposta, é uma das aplicações feitas deste modelo: estuda-se o comportamento de buracos negros carregados magneticamente.

Para isso, a ação referente à $\mathscr{L}$ é acoplada à ação da RG, cujo argumento é a lagrangiana de Einstein-Hilbert, resultando na ação

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\left(\frac{R}{16\pi G} + \mathscr{L}\right), \tag{7.19}$$

em que $\mathscr{L}$ é dada pela equação (7.16).

Variando S com respeito a $g^{\mu\nu}$ e com o potencial eletromagnético, são obtidas as equações de campo: respectivamente, as equações de campo de Einstein (equação (3.11)) e equações com forma semelhante à da equação (7.18) (com a adição de um fator multiplicativo $\sqrt{-g}$ no argumento da derivada indicada na equação).

O artigo, porém, mais uma vez, não discorre muito sobre as propriedades e a forma explícita da equação de campo, com termo a termo sendo analisado. Ao invés disso, prossegue investigando quais os impactos da densidade lagrangiana utilizada na densidade de energia do buraco negro - a qual pode ser encontrada a partir do tensor energia momento anteriormente calculado, em (KRUGLOV, 2017) -, sua função de massa, bem como outras características. São tratados, ainda, casos para diferentes valores de γ.

Trata-se, entretanto, de uma interessante aplicação ao contexto da gravitação, o qual nos interessa diretamente. Um ponto relevante é que, no artigo citado, trabalha-se com a ideia de acrescentar uma contribuição eletromagnética - materializada pela lagrangiana $\mathscr{L}$ - , à ação que descreve a RG (o que é feito na equação (7.19)). Tal abordagem é, também, um de nossos interesses - porém visamos, ao contrário do caminho seguido em (KRUGLOV, 2017), ao menos inicialmente, voltar nossas atenções à forma tensorial das equações de campo.

7.2 A Eletrodinâmica não Linear Aplicada à Cosmologia

Outra interessante aplicação da eletrodinâmica não linear dá-se na área da Cosmologia, conforme pudemos constatar em (NOVELLO et al., 2007). Neste tipo de proposta, em específico, o interesse em utilizar generalizações da lagrangiana eletromagnética não recai diretamente nas equações de movimento que surgem a partir delas, mas sim dos modelos cosmológicos delas provenientes. Além disso, constituem um exemplo de aplicação de modelo não linear para o eletromagnetismo que não se dá no cenário da Teoria Quântica de Campos, como a maioria dos demais modelos observados.

Mais especificamente, o modelo proposto em (NOVELLO et al., 2007) possui como objetivo tentar contornar dois percalços com os quais se depara no estudo da Cosmologia: a singularidade que surgiria no início do desenvolvimento do universo - denominada "Big Bang-, bem como seu atual movimento de expansão acelerada. Para tal, propõe uma modificação na dinâmica da teoria, por intermédio da utilização de eletrodinâmica não linear, na forma de uma lagrangiana generalizada, como fonte das equações de campo de Einstein.

Nesse cenário, a utilização de lagrangianas não lineares no contexto clássico, bem como a forma das modificações (generalizações) impostas à lagrangiana eletromagnética, as quais se utilizam de potências de $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$, talvez sejam os maiores pontos de conveniência, para nossos objetivos, ao citar propostas como essa. Apesar disso, é exposto, em (NOVELLO et al., 2007), o procedimento seguido pela referida abordagem.

Como se trata de um modelo cosmológico, é relevante saber como serão definidas grandezas como a pressão, p, e densidade, ρ, por intermédio das quais a dinâmica cosmológica será descrita. Por tais razões, o procedimento adotado em (NOVELLO et al., 2007) preocupa-se em, primeiramente, calcular a expressão do tensor energia-momento, $\Theta_{\mu\nu}$, a partir da lagrangiana modificada em questão. Esse procedimento é necessário pois, na medida em que o tensor energia-momento atua como fonte da interação gravitacional, é ele o responsável por descrever a densidade e o fluxo de energia e momento no espaço-tempo (uma espécie de generalização da massa como fonte da gravitação no contexto Newtoniano).

$\Theta_{\mu\nu}$ pode ser encontrado, a partir da densidade lagrangiana, com o auxílio da expressão (CARROLL, 2004)

$$\Theta_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta(\mathscr{L}\sqrt{-g})}{\delta g^{\mu\nu}}; \tag{7.20}$$

trata-se de uma definição para o tensor energia-momento que surge durante o processo de obtenção das equações de Einstein ((3.11)) por intermédio do formalismo lagrangiano - isto é, da variação da lagrangiana de Einstein-Hilbert[1].

Considerando, então, neste caso, uma lagrangiana que dependa dos produtos tensoriais $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \equiv F = 4\mathscr{F}$ e $F^{\mu\nu}F^{*}_{\mu\nu} \equiv G$, e realizando a variação, com relação à métrica, segundo o prescrito pela equação (7.20), obtém-se a seguinte expressão:

$$\Theta_{\mu\nu} = -4\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial F}F_{\mu}{}^{\alpha}F_{\alpha\nu} + G\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial G}g_{\mu\nu} - \mathscr{L}g_{\mu\nu}. \tag{7.21}$$

A densidade lagrangiana indicada na equação anterior, $\mathscr{L}$, é, justamente, a lagrangiana eletromagnética a ser generalizada, e a equação em si corresponde à forma geral que a equação de campo assumiria. No que concerne aos nossos interesses, seria interessante trabalhar, ao menos em um primeiro momento, com lagrangianas que dependessem somente de $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ - o argumento da lagrangiana que leva às equações de Maxwell. O próprio artigo consultado também trabalha, por fim, com o caso de lagrangianas com dependência somente em $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$.

[1] A definição de $\Theta_{\mu\nu}$ a partir da lagrangiana de Einstein-Hilbert pode ser verificado em (CARROLL, 2004).

Posteriormente, a referência citada segue um procedimento padrão para o cálculo da média volumétrica (espacial) de uma dada quantidade qualquer, descrito em (TOLMAN; EHRENFEST, 1930). Este, por sua vez, coloca-se fora de nossas pretensões iniciais, uma vez que atua no contexto da Cosmologia, de forma que não o trataremos neste texto. É interessante, porém, citá-lo, pois ele permite impor uma série de restrições aos campos eletromagnéticos, as quais impactam na forma permitida para $\Theta_{\mu\nu}$. Tais restrições são tais que $\Theta_{\mu\nu}$ assume a forma do tensor energia-momento de um fluido perfeito, dada por (D'INVERNO, 1992)

$$\Theta_{\mu\nu} = (\rho + p)v_\mu v_\nu - p g_{\mu\nu}. \tag{7.22}$$

ρ e p são, respectivamente, a densidade (a qual, no contexto cosmológico, associa-se à densidade de energia) e a pressão, enquanto v_μ indica a quadri-velocidade.

Considerando as restrições impostas pelo modelo, bem como uma lagrangiana eletromagnética generalizada, que dependa somente do produto $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$, o tensor energia-momento na equação (7.22) implica as seguintes expressões para ρ e p:

$$\begin{aligned} \rho &= -\mathscr{L} - 4E^2\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial F}, \\ p &= \mathscr{L} + \frac{4}{3}(E^2 - 2H^2)\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial F}, \end{aligned} \tag{7.23}$$

expressão na qual E e H dizem respeito, especificamente, aos campos elétrico e magnético.

Em seguida, apesar de trabalhar, com maior nível de detalhamento, com uma densidade lagrangiana da forma $\mathbf{L} = AF^2 + BF + CF^{-1}$, com A, B e C constantes, expõe-se, em (NOVELLO et al., 2007), as implicações de se trabalhar com densidades lagrangianas dadas por potências de F,

$$\mathscr{L} = \sum_k c_k F^k, \tag{7.24}$$

no que diz repeito a ρ e p. c_k indicam os coeficientes de cada potência de F.

Assim, chega-se às formas que ρ e p assumem. O artigo em questão prossegue, então, examinando as consequências dessas grandezas na praxe prevista pela teoria para a expansão do universo, com a utilização de leis de conservação e vínculos impostos pelas equações de Einstein. Esse processo, mais uma vez, coloca-se além de nossas intenções iniciais ao tentar compreender teorias eletromagnéticas não lineares, uma vez que constituem aplicação direta à Cosmologia. Não serão, portanto, objeto de análise desta exposição.

Nesse cenário, podemos elencar as etapas da prescrição seguida, em (NOVELLO et al., 2007), da seguinte forma:

1. Propõe-se uma lagrangiana generalizada $\mathscr{L}$;
2. Calcula-se $\Theta_{\mu\nu}$, a partir de $\mathscr{L}$;
3. Aplicam-se restrições (relativas ao estabelecimento de médias volumétricas e ao modelo cosmológico padrão), restringindo $\Theta_{\mu\nu}$ ao tensor energia-momento de um fluido perfeito;
4. A partir de $\Theta_{\mu\nu}$, encontram-se expressões para ρ e μ em termos de $\mathscr{L}$;
5. Com o uso de propriedades de conservação e de condições impostas pelas equações de Einstein, estuda-se as implicações de utilizar os parâmetros ρ e p encontrados.

Ressalta-se sobre como o trabalho desenvolvido em (NOVELLO et al., 2007) não tem como foco o estudo das equações de campo em si - isto é, das equações eletromagnéticas generalizadas -, na medida em que as lagrangianas modificadas $\mathscr{L}$ não chegam a ser variadas (aplicadas às equações de Euler-Lagrange). Em um outro artigo com proposta similar, no que tange ao procedimento utilizado para aplicação cosmológica, chega-se a expor, em um dos apêndices do texto, para a densidade lagrangiana (NOVELLO; BERGLIAFFA; SALIM, 2004)

$$\mathscr{L} = -\frac{F}{4} + \gamma F^{-1}, \tag{7.25}$$

- em que γ é o parâmetro que indica a correção dada pelo termo com F^{-1} -, a seguinte expressão para as equações de movimento:

$$\left[\left(1+\frac{4\gamma}{F^2}\right)F^{\mu\nu}\right]_{;\nu} = 0. \tag{7.26}$$

Tal expressão não é, entretanto, desenvolvida, a fim de que possam ser analisadas cada uma das componentes tensoriais da equação de campo - procedimento que pretendemos realizar na busca por analogias entre as equações eletromagnéticas não lineares e as equações de campo teleparalelas (equação (4.19)). Apesar disso, o modelo abordado nesta seção mostrou-se um exemplo de que há precedentes, na literatura, de aplicações de modelos eletrodinâmicos não lineares em regime clássico - mesmo que voltados a modelos cosmológicos. Cabe dizer que processo análogo ao realizado em (NOVELLO et al., 2007) é seguido, além de na já citada publicação (NOVELLO; BERGLIAFFA; SALIM, 2004), em (LORENCI et al., 2002).

8 Discussão e Perspectivas

8.1 Sobre o Gravitomagnetismo

A revisão bibliográfica realizada ao longo da execução deste trabalho mostrou-se bastante prolífica, pois permitiu construir um panorama, mesmo que em linhas gerais, a respeito das teorias que tentam o estabelecimento de analogias entre os formalismos gravitacional e eletromagnético. Buscou-se também, com tal processo de revisão, formar uma base para posterior desenvolvimento de propostas de modelos eletrodinâmicos não lineares capazes de realizar uma aproximação entre gravitação e eletromagnetismo.

No que diz respeito ao gravitomagnetismo, foi possível estudar a descrição da teoria tanto no âmbito da RG, quanto no âmbito do formalismo teleparalelo. No contexto da RG, foram revisadas duas possíveis abordagens: a da linearização das equações de campo de Einstein e a da identificação das componentes do que seriam os campos gravitomagnéticos com elementos do Tensor de Weyl. Tais abordagens, porém, mostraram-se, de certa forma, artificiais, na medida em que não há um paralelo direto entre a motivação física para a constituição do Tensor Eletromagnético $F_{\mu\nu}$, com componentes dos campos eletromagnéticos, no Eletromagnetismo - esta bastante robusta e coerente -, e o processo de definição das componentes de entes geométricos, a exemplo do tensor de Weyl, como componentes dos campos gravitomagnéticos.

Tal discussão, levantada em (SPANIOL, 2011a), constituiu, também, parte do processo de revisão desempenhado. Dessa maneira, investigou-se também o desenvolvimento de uma proposta de teoria gravitomagnética no contexto do Teleparalelismo Relativístico, seguindo a linha de discussão proposta em (SPANIOL, 2011a). Aferiu-se, com base nos resultados apresentados na referência citada, que, de fato, há maior consistência em estabelecer esse tipo de analogia usando o formalismo teleparalelo, uma vez que este é capaz de munir a gravitação de uma descrição aos moldes de uma teoria de calibre. Ou seja, a identificação das componentes dos campos gravitomagnéticos passa a ser feita com elementos de um tensor intensidade de campo - uma analogia mais próxima como formalismo eletromagnético, também ressaltada em (SPANIOL, 2011a).

Um ponto passível de aprofundamento, partindo do ponto ao qual se chegou com a revisão citada, seria o estudo de demais abordagens gravitomagnéticas ainda no contexto da RG - há, por exemplo, o tratamento da GEM nas coordenadas de Fermi, a qual não tratamos e que é comentada também em (SPANIOL, 2011a). Além disso, a revisão de materiais que propõem outras maneiras de definir os campos gravitomagnéticos, desta vez no contexto teleparalelo, também constitui um possível caminho a ser seguido, partindo da base formada pelos formalismos analisados até então - apesar da evidente conveniência de utilizar as definições propostas em (SPANIOL, 2011a), como indicado há pouco.

8.2 Sobre a Eletrodinâmica não Linear

A revisão de artigos na área da eletrodinâmica não linear, por sua vez, constituiu um de nossos principais focos de interesse pois, ao menos em ulteriores projetos de pesquisa, gostaríamos de traçar o caminho inverso ao proposto pelo gravitomagnetismo - generalizar as equações de Maxwell, que são lineares, e obter algum correspondente análogo às equações de campo gravitacionais teleparalelas (equação (4.19)). Nesse sentido, as referências visitadas forneceram algumas ferramentas relevantes.

Os artigo analisados nas seções 6.1.1 e 6.1.2, (KRUGLOV, 2015) e (KRUGLOV, 2017), que trabalhavam com a proposta da adição de parâmetros β e γ, trouxeram, como grande contribuição, a exposição de como calcular, em linha gerais, as equações eletromagnéticas generalizadas. A partir deles foi possível ver que, ao utilizar as equações de Euler-Lagrange, a variável dinâmica que deve ser adotada é o potencial quadrivetorial A_μ. Eles também trouxeram, de forma sucinta, algumas expressões tensoriais para essas equações de campo (equações (7.7) e (7.17)) - mesmo que não desenvolvidas detalhadamente -, com as quais foi possível praticar o procedimento de produção de cálculos analíticos envolvido na aplicação desse tipo de lagrangiana às equações de Euler-Lagrange.

Notou-se, apesar disso, que tais modelos não desenvolvem, em detalhe, as formas tensoriais das equações de campo. O foco dos artigos acaba recaindo em calcular os impactos da lagrangiana generalizada nos parâmetros ε (equação (7.9)) e μ (equação (7.11)), a fim de encontrar as equações não lineares explícitas para os campos **E** e **B** (equações (7.12), (7.13), (7.14) e (7.15)). A princípio, gostaríamos de desenvolver as expressões tensoriais dessas equações de campo, pois as equações gravitacionais teleparalelas (equação (4.19)) são equações tensoriais. Dessa forma, numa eventual pesquisa sobre a proposição de uma dinâmica eletromagnética não linear para os fins já descritos, preocupar-nos-íamos em desenvolver essas expressões, encontrar explicitamente cada um de seus termos e, então, interpretar seus significados.

Outro aspecto observado no discussão presente em (KRUGLOV, 2015) foi que o modelo não linear proposto tem suas aplicações no âmbito da teoria quântica. Assim, coloca-se além das nossas pretensões iniciais, uma vez que, a princípio, visaríamos buscar analogias no contexto clássico (assim como o fazem os modelos gravitomagnéticos analisados). O mesmo ocorre em (KRUGLOV, 2017) e (KRUGLOV, 2015), os quais envolvem Cromodinâmica Quântica. Em todas essas referências, assim como (KRUGLOV, 2017) - ou mesmo em outras propostas com as quais nos deparamos, como em (GAETE; HELAYËL-NETO, 2014) -, discorre-se com mais detalhes sobre as expressões especificamente dos campos **E** e **B**, ao invés da forma tensorial das equações de campo.

Apesar disso, em (KRUGLOV, 2017), notamos uma interessante aplicação da eletrodinâmica não linear: é feito o acoplamento do eletromagnetismo com a gravitação por intermédio da adição, na ação da Relatividade Geral, de termos eletromagnéticos - como indica a equação (7.19). Este é, em si, um dos caminhos que seguiríamos em ocasiões futuras: investigar como contribuições eletromagnéticas à ação gravitacional - na forma da generalização da lagrangiana eletromagnética - poderiam impactar os campos descritos. A referência citada, porém, não desenvolve em detalhes o estudo das equações de campo encontradas - assim como os demais trabalhos semelhantes já citados -, e segue calculando o tensor energia momento para o modelo em questão (o de um buraco negro magnetizado), a densidade de energia correspondente, bem como grandezas relacionadas à sua massa e ao elemento de linha. Constitui, mesmo assim, um exemplo de aplicação de uma dinâmica eletromagnética não linear no contexto da gravitação clássica (ao menos nas seções iniciais do artigo).

Os artigos revisados cuja aplicação volta-se à Cosmologia, como (NOVELLO et al., 2007; NOVELLO; BERGLIAFFA; SALIM, 2004; LORENCI et al., 2002), por sua vez, também não possuem como foco principal encontrar as equações de campo, na forma tensorial, e analisar cada um de seus termos - conforme foi possível perceber ao consultar esses materiais. Aparentemente, seu interesse recai, principalmente, em calcular o tensor energia-momento, a partir da lagrangiana generalizada, e, consequentemente, obter expressões para parâmetros ρ e p para, então, investigar seus impactos na descrição da dinâmica cosmológica. Ressalta-se, contudo, que estes trabalhos mostraram-se como um exemplo de aplicação de equações eletromagnéticas não lineares em um contexto clássico, que não envolve Cromodinâmica Quântica (como ocorre em (KRUGLOV, 2015; KRUGLOV, 2015; KRUGLOV, 2016), por exemplo).

8.3 Perspectivas

A revisão desempenhada ao longo do desenvolvimento deste trabalho, conformo indicado nas seções anteriores, permitiu o contato com uma série de diferentes abordagens que lidam com a generalização das equações de Maxwell. São adotadas metodologias distintas no desenvolvimento de cada proposta, e suas áreas de aplicação são as mais diversas.

Dentre a diversidade de discussões perscrutadas, entretanto, não encontramos - ao menos nos artigos visitados e citados ao longo do texto - nenhuma cujos objetivos se estendessem, por completo, sobre o foco de nossos interesses - buscar uma analogia entre os formalismos eletromagnético e gravitacional, partindo do eletromagnetismo, mediante uma comparação entre as equações não lineares e as equações de campo teleparalelas, no contexto clássico.

Frequentemente, o material consultado motivava-se por propriedades de cunho quântico - como efeitos percebidos no âmbito da Cromodinâmica Quântica. Houve casos, entretanto, cuja aplicação deu-se em regime clássico - o que visamos realizar em ulteriores processos de investigação. Particularmente, visamos uma análise tensorial de cada termo que surgiria nas equações de campo após a aplicação de dada lagrangiana generalizada às Equações de Euler Lagrange.

Isto é, buscaríamos encontrar, a princípio, alguma lagrangiana que, em forma (ou seja, estruturalmente), fosse análoga, no contexto do eletromagnetismo, à lagrangiana teleparalela, dada pela equação (4.17). Assim, ao realizarmos sua variação e encontrarmos as equações de movimento, esperaríamos obter uma equação análoga às equações de campo teleparalelas, indicadas na equação (4.19).

Desse modo, um caminho possível seria comparar, termo a termo, os elementos da equação obtida com a lagrangiana generalizada e aqueles exibidos pela equação de campo teleparalela. Ao associar, então, cada termo - ou conjunto de termos - encontrado com aqueles teleparalelos, seria possível interpretá-los e tentar dizer qual papel desempenham. Esse seria um procedimento análogo ao seguido pela abordagem gravitomagnética proposta em (SPANIOL, 2011a), porém em sentido inverso.

Naturalmente, para tal, faz-se necessária rigorosa deliberação a respeito da forma que a lagrangiana generalizada conveniente deveria assumir, o que, por si só, constitui tema para um processo de pesquisa a parte. Posto isso, uma tentativa inicial seria o exame da forma que equações proveniente de potências de $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ assumem - em um processo de desenvolvimento, detalhamento e análise de equações de campo como o exemplo particular exibido em (NOVELLO; BERGLIAFFA; SALIM, 2004), porém para potências variadas.

9 Conclusões

O presente trabalho visa, como exposto ao longo do texto, o estudo de métodos que têm como mote a tentativa de estabelecimento de uma analogia entre eletromagnetismo e gravitação. Nesse contexto, foram revisados trabalhos constantes na literatura da área a respeito de teorias gravitomagnéticas e de modelos eletrodinâmicos não lineares.

No que diz respeito ao gravitomagnetismo, foram investigados modelos no contexto da Relatividade Geral - que se utilizam da linearização das equações de Einstein e do tensor de Weyl para realizar analogias -, bem como no contexto teleparalelo. Com base na revisão bibliográfica realizada, pode-se dizer que se apresenta como caminho promissor a utilização deste - cuja estrutura é análoga ao do eletromagnetismo, na medida em que ambas teorias são estruturadas como teorias de calibre.

Já no panorama dos modelos de eletrodinâmica não linear, foram revisados artigos que propõem generalizações da lagrangiana eletromagnética para os mais variados fins. Em linhas gerais, com essa abordagem, foi possível reproduzir os cálculos e recuperar os resultados presentes em artigos da área (eletrodinâmica não linear) - ao menos no âmbito daquilo que diz respeito aos nossos objetivos. Isto é, foi possível compreender como funcionam os mecanismos para obtenção de equações de campo eletromagnético generalizadas, no contexto da física clássica, assim como as motivações que levaram à construção dos modelos estudados (e suas implicações).

O referido processo permitiu a formação de uma base para que, posteriormente, sejam realizados estudos e cálculos analíticos na tentativa de estabelecer analogias entre a gravitação e o eletromagnetismo. Visa-se, em especial, o estudo de lagrangianas alternativas que forneçam equações de campo eletromagnéticas de ordem superior.

Para tal, uma abordagem possível é seguir procedimento semelhante ao proposto pelo GEM, porém partindo da teoria eletromagnética - generalizar as equações de Maxwell com vistas a encontrar termos correspondentes às equações gravitacionais. As equações gravitacionais a serem consideradas são, por sua vez, as equações de campo teleparalelas.

Como possíveis caminhos a serem seguidos a partir de então, com a base construída ao longo da confecção deste texto, colocamos um estudo dos resultados experimentais relativos a esses modelos, a exemplo da investigação proposta em (CADÈNE et al., 2014) - esses resultados poderiam balizar a direção do processo de investigação. Outro ponto passível de aprofundamento seria o campo da Teoria Quântica de Campos, em que boa parte das teorias analisadas desenvolve-se.

A partir daí, colocam-se como perspectivas para processos de pesquisa futuros como, por exemplo, no âmbito da pós-graduação, esforços para tentar encontrar uma lagrangiana alternativa que leve, quando aplicada às equações de Euler-Lagrange, a equações generalizadas convenientes.

Referências

ALDROVANDI, R.; PEREIRA, J. G. *Teleparallel Gravity: An Introduction*. Dordrecht: Springer Science & Business Media, 2012. v. 173. Citado 10 vezes nas páginas 10, 18, 24, 29, 33, 34, 35, 37, 38 e 45.

ALDROVANDI, R.; PEREIRA, J. G. *An Introduction to Geometrical Physics*. 2. ed. New Jersey: World scientific, 2016. Citado 5 vezes nas páginas 10, 17, 23, 31 e 33.

ANDRADE, V. D.; GUILLEN, L.; PEREIRA, J. *Teleparallel Gravity: An Overview*. 2000. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/gr-qc/0011087>. Acesso em: 09/12/2021. Citado na página 10.

ANDRADE, V. D.; PEREIRA, J. *Gravitational Lorentz Force and the Description of the Gravitational Interaction*. 1997. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/gr-qc/9703059>. Acesso em: 09/12/2021. Citado 5 vezes nas páginas 10, 23, 35, 37 e 38.

ANDRADE, V. D.; PEREIRA, J. *Riemannian and Teleparallel Descriptions of the Scalar Field Gravitational Interaction*. 1997. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/gr-qc/9706070>. Acesso em: 09/12/2021. Citado na página 36.

ARFKEN, G. B.; WEBER, H. J. *Mathematical methods for physicists*. [S.l.]: American Association of Physics Teachers, 1999. Citado na página 42.

BORN, M.; INFELD, L. Foundations of the new field theory. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, The Royal Society London, v. 144, n. 852, p. 425–451, 1934. Citado na página 9.

BOVYKIN ISAAC LáZARO, I. A. P. F. J. S. M. V. M. A. *(MAT A07 - Álgebra Linear A) Aula 2 - Matrizes: Operações, Tipos Especiais e Traço*. Álgebra Linear A UFBA, 2020. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=Nkb0zQpA-L0>. Acesso em: 11/01/2023. Citado na página 16.

CADÈNE, A. et al. Vacuum magnetic linear birefringence using pulsed fields: status of the bmv experiment. *The European Physical Journal D*, Springer, v. 68, n. 1, p. 1–7, 2014. Citado na página 63.

CAPOZZIELLO, S.; LAURENTIS, M. D. Extended theories of gravity. *Physics Reports*, Elsevier, v. 509, n. 4-5, p. 167–321, 2011. Citado na página 22.

CARROLL, S. M. *An Introduction to General Relativity: Spacetime and Geometry*. San Francisco: Addison Wesley, 2004. Citado 9 vezes nas páginas 13, 15, 16, 17, 19, 29, 30, 31 e 55.

D'INVERNO, R. A. *Introducing Einstein's Relativity*. [S.l.]: Clarendon Press, 1992. Citado 6 vezes nas páginas 13, 19, 29, 30, 31 e 56.

FERREIRA, M. et al. Fundamentos, pesquisas, contemporaneidades e tendências no ensino de física no brasil. *Revista do Professor de Física*, v. 6, n. Especial, p. A1–A4, 2022. Citado na página 27.

FILHO, E. d. S. S. Tensor de weyl em espaços conformes. 2021. Citado na página 31.

GAETE, P.; HELAYËL-NETO, J. Finite field-energy and interparticle potential in logarithmic electrodynamics. *The European Physical Journal C*, Springer, v. 74, n. 3, p. 1–9, 2014. Citado na página 60.

GOLDSTEIN, H.; POOLE, C.; SAFKO, J. *Classical Mechanics*. 3. ed. [S.l.]: Addison Wesley, 2001. Citado na página 32.

GRIFFITHS, D. J. *Introduction to Electrodynamics*. 4. ed. [S.l.]: Pearson Education, 2013. Citado 8 vezes nas páginas 10, 22, 36, 42, 45, 48, 50 e 52.

HUGHES, S. *Introduction and the geometric viewpoint on physics*. MIT OpenCourseWare, 2020. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=iRVfaR3N5K4&list=PLUl4u3cNGP629n_3fX7HmKKgin_rqGzbx>. Acesso em: 15/01/2022. Citado na página 16.

HUGHES, S. *Linearized gravity I: Principles and static limit*. MIT OpenCourseWare, 2020. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=9lIgAPvppk0&list=PLUl4u3cNGP629n_3fX7HmKKgin_rqGzbx&index=14>. Acesso em: 25/08/2022. Citado na página 42.

HUGHES, S. *Linearized gravity II: Dynamic sources*. MIT OpenCourseWare, 2020. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=Oxk2nnuC130&list=PLUl4u3cNGP629n_3fX7HmKKgin_rqGzbx&index=15>. Acesso em: 25/08/2022. Citado na página 42.

ISHAM, C. J. *Modern differential geometry for physicists*. [S.l.]: World Scientific Publishing Company, 1999. v. 61. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 31.

KRUGLOV, S. A model of nonlinear electrodynamics. *Annals of Physics*, Elsevier, v. 353, p. 299–306, 2015. Citado 7 vezes nas páginas 10, 49, 50, 52, 53, 60 e 61.

KRUGLOV, S. Modified nonlinear model of arcsin-electrodynamics. *Communications in Theoretical Physics*, IOP Publishing, v. 66, n. 1, p. 59, 2016. Citado 4 vezes nas páginas 10, 52, 53 e 61.

KRUGLOV, S. Nonlinear electrodynamics and magnetic black holes. *Annalen der Physik*, Wiley Online Library, v. 529, n. 8, p. 1700073, 2017. Citado 7 vezes nas páginas 10, 51, 52, 53, 54, 60 e 61.

KRUGLOV, S. I. Nonlinear arcsin-electrodynamics. *Annalen der Physik*, Wiley Online Library, v. 527, n. 5-6, p. 397–401, 2015. Citado 5 vezes nas páginas 10, 52, 53, 60 e 61.

LANDAU, L. D.; LIFSHITZ, E. M. *The Classical Theory of Fields: Volume 2*. 4. ed. [S.l.]: Butterworth-Heinemann, 1980. v. 2. Citado na página 31.

LORENCI, V. D. et al. Nonlinear electrodynamics and frw cosmology. *Physical Review D*, APS, v. 65, n. 6, p. 063501, 2002. Citado 2 vezes nas páginas 57 e 61.

MAARTENS, R. Nonlinear gravito-electromagnetism. *General Relativity and Gravitation*, Springer, v. 40, n. 6, p. 1203–1217, 2008. Citado 2 vezes nas páginas 9 e 43.

MALEKOLKALAMI, B.; FARHOUDI, M. About gravitomagnetism. *Modern Physics Letters A*, World Scientific, v. 24, n. 08, p. 601–613, 2009. Citado 2 vezes nas páginas 9 e 41.

MASHHOON, B. Gravitoelectromagnetism: a brief review. *arXiv preprint gr-qc/0311030*, 2003. Citado 2 vezes nas páginas 9 e 41.

NAKAHARA, M. *Geometry, topology and physics.* [S.l.]: CRC press, 2003. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 31.

NOVELLO, M.; BERGLIAFFA, S. P.; SALIM, J. Nonlinear electrodynamics and the acceleration of the universe. *Physical Review D*, APS, v. 69, n. 12, p. 127301, 2004. Citado 4 vezes nas páginas 10, 57, 61 e 62.

NOVELLO, M. et al. Cosmological effects of nonlinear electrodynamics. *Classical and Quantum Gravity*, IOP Publishing, v. 24, n. 11, p. 3021, 2007. Citado 6 vezes nas páginas 10, 54, 55, 56, 57 e 61.

PASCUAL-SANCHEZ, J. et al. *Reference frames and gravitomagnetism.* [S.l.: s.n.], 2001. Citado na página 9.

RAMOS, J.; MONTIGNY, M. de; KHANNA, F. Weyl gravitoelectromagnetism. *General Relativity and Gravitation*, Springer, v. 50, n. 7, p. 1–13, 2018. Citado na página 43.

RAMOS, J.; MONTIGNY, M. de; KHANNA, F. C. On a lagrangian formulation of gravitoelectromagnetism. *General Relativity and Gravitation*, Springer, v. 42, n. 10, p. 2403–2420, 2010. Citado na página 43.

RUBAKOV, V. *Classical Theory of Gauge Fields.* New Jersey: Princeton University Press, 2002. Citado 5 vezes nas páginas 21, 22, 23, 34 e 36.

SANTOS, A. *A Gravitational Theory and the TFD Formalism.* 2021. X Escola de Física Rberto Salmeron, Minicurso 2. <https://www.youtube.com/watch?v=P1xwbF6KMcw>, Acesso em 23 agost. 2022. Citado 3 vezes nas páginas 9, 41 e 43.

SANTOS, L. L. D.; ANDRADE, V. C. de. Buracos negros e suas diferentes faces. *Physicae Organum*, v. 8, n. 1, 2022. Citado na página 11.

SANTOS, L. L. D. et al. Conceitos de relatividade geral–uma abordagem para o ensino de física no ensino médio. *Revista do Professor de Física*, v. 6, n. Especial, p. 201–210, 2022. Citado na página 27.

SCHINZEL, G. H. et al. Buracos negros–uma proposta de sequência didática em forma de ueps para o ensino fundamental e médio. *Revista do Professor de Física*, v. 6, n. Especial, p. 386–395, 2022. Citado na página 27.

SCHULLER, F. *A thorough introduction to the theory of general relativity.* 2015. The WE-Heraeus International Winter School on Gravity and Light, Linz, Austria. <https://www.youtube.com/playlist?list=PLFeEvEPtX_0S6vxxiiNPrJbLu9aK1UVC_>, Acesso em 11 out. 2021. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 31.

SCHUTZ, B. *A First Course in General Relativity.* 2. ed. [S.l.]: Cambridge University Press, 2009. Citado 3 vezes nas páginas 17, 29 e 31.

SCHWICHTENBERG, J. *Physics from Symmetry.* 2. ed. [S.l.]: Springer, 2018. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 34.

SHANKAR, R. *Principles of Quantum Mechanics*. 2. ed. New York: Plenum Press, 1994. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 34.

SOARES, T. C.; JR, H. B.; NETO, J. A. H. *Física de Partículas vista pelas Interações Fundamentais e Formação de Professores*. [S.l.]: Livraria da Física, 2008. v. 1. Citado na página 9.

SPANIOL, E.; ANDRADE, V. D. Gravitomagnetism in teleparallel gravity. *International Journal of Modern Physics D*, World Scientific, v. 19, n. 04, p. 489–505, 2010. Citado 2 vezes nas páginas 10 e 47.

SPANIOL, E.; BELO, L.; ANDRADE, V. de. Teleparallel gravitoelectromagnetism: the role of boosts in the schwarzschild geometry. *Brazilian Journal of Physics*, Springer, v. 44, n. 6, p. 811–816, 2014. Citado na página 10.

SPANIOL, E. et al. The role of observers in the measurement of teleparallel gravitoelectromagnetic fields in schwarzschild spacetime. *Gravitation and Cosmology*, Springer, v. 19, n. 2, p. 85–91, 2013. Citado na página 10.

SPANIOL, E. P. Gravitoeletromagnetismo na gravidade teleparalela. 2011. Citado 11 vezes nas páginas 10, 25, 42, 43, 45, 46, 47, 48, 59, 60 e 62.

SPANIOL, E. P. *Gravitoeletromagnetismo na Gravidade Teleparalela*. Tese (Doutorado) — Universidade de Brasília, Brasília, 12 2011. Citado na página 19.

SPANIOL, E. P. et al. The role of observers in the measurement of the teleparallel gravitoelectromagnetic fields in different geometries. *arXiv preprint arXiv:1111.1908*, 2011. Citado na página 10.

TOLMAN, R. C.; EHRENFEST, P. Temperature equilibrium in a static gravitational field. *Physical Review*, APS, v. 36, n. 12, p. 1791, 1930. Citado na página 56.