



Universidade de Brasília

Instituto de Física - IF

Programa de Graduação de bacharelado em Física

**Grupos de renormalização: aplicações na teoria
quântica de campos**

Autor: João Gabriel Cardozo Castro

Orientador: Prof. Dr. Arsen Melikyan

Brasília, DF

2022

João Gabriel Cardozo Castro

Grupos de renormalização: aplicações na teoria quântica de campos

Trabalho apresentado como requisito parcial para a obtenção do diploma de graduação em bacharelado de física.

Universidade de Brasília

Orientador: Prof. Dr. Arsen Melikyan

Brasília, DF

2022

Agradecimentos

Agradeço primeiro a minha família, meu pai, mãe, avós e tias, que sempre me deram apoio. A meus colegas da empresa, de PET, da UnB e de curso, que passaram por dificuldades comigo e me aguentaram quando eu estava no meu mais baixo, especialmente, meus conterrâneos de semestre: Marcos, William, Saboya, Israel, Macedo, Laura, Ju e Isa. Aos meus orientadores, Mariana Penna e Arsen Melykian, que conseguiram me ensinar muito e me fazer terminar meus trabalhos após muito incentivo (e pressão). Sou muito grato a ambos por enxergarem algo e não desistirem de mim quando eu mesmo pensei em desistir. Finalmente, agradeço a Rebeca, minha namora, motivo maior pelo qual não colapsei nem desisti em tempos de extrema tensão e nervosismo, transformando parte do meus dias e oxalá, a minha vida, em alegria. A todos, obrigado.

Resumo

Este trabalho teve como objetivo estudar a aplicação da teoria dos grupos de renormalização na teoria quântica de campos. Para fundamentar esse estudo, foi explorado o emprego do GR na teoria de transição de fases críticas (TFC), tendo como referência para toda a pesquisa as seguintes bibliografias: (YEOMANS, 1992), (CARDY, 1992) (para a teoria TFC) e (FRADKIN, 2021a) (para TQC). Por fim foi explicado como os grupos de renormalização permitem obter os valores dos expoentes críticos de um sistema analiticamente, a forma que explicam fenômenos como a universalidade e permitem calcular valores para quantidades aparentemente divergentes em TQC.

Palavras-chaves: Grupos de renormalização, Teoria quântica de campos, Teoria de transição de fases críticas.

Abstract

This paper aimed to study the application of renormalization group theory in quantum field theory. To base this study in, the use of RG in critical phase transition theory (CPT) was explored, using the following bibliographies as reference for the entire research: (YEOMANS, 1992), (CARDY, 1992) (for the CPT theory) and (FRADKIN, 2021a) (for QFT). Finally, it was explained how the renormalization groups allow us to obtain the values of critical exponents of a system analytically, the way they explain phenomena such as universality and allow us to calculate values for apparently divergent quantities in QFT.

Key-words: Renormalization Group. Quantum Field Theory. Critical Phase Transition Theory.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Curva de coexistência para diferentes fluidos em variáveis reduzidas. O ajuste do gráfico foi feito com $\beta = 1/3$. (GUGGENHEIM, 1945)	23
Figura 2 – Representação da superfície crítica de um sistema com um parâmetro relevante (g_1) e dois parâmetros irrelevantes (g_2 e g_3). Todos os pontos sobre a superfície tendem ao ponto fixo (representados pelas trajetórias com setas preenchidas), mas os pontos próximos, porém onde $g_1 \neq 0$, se aproximam, mas acabam se afastando do ponto fixo (esses pontos têm trajetórias representadas pelas linhas tracejadas). Adaptado de (YEOMANS, 1992)	27
Figura 3 – Pedacinho de uma superfície crítica de um sistema próximo a dois pontos críticos A e B. O ponto crítico A tem um parâmetro relevante e um irrelevante enquanto B tem dois parâmetros irrelevantes. Trajetórias que começam com o parâmetro relevante de A próximo a zero se aproximam de A, mas são levadas até B quando o valor do parâmetro relevante aumenta. Nesse momento, o sistema cruza do estado crítico A para o B. Adaptado de (YEOMANS, 1992)	28
Figura 4 – Ilustração da separação do espaço de momentos em 2-D	41
Figura 5 – Diagrama de Feynman de ordem 0 para o valor esperado da expressão (3.31).	45
Figura 6 – Função beta da constante de acoplamento v em $D < 4$ (a) e em $D = 4$ (b) dimensões. (c) mostra o fluxo RG completo em $D < 4$ dimensões.	48

Lista de abreviaturas e siglas

TFC	Transição de fases crítica
GR	Grupo de renormalização
TQC	Teoria quântica de campos
IV	Infra-vermelho
UV	Ultra-violeta
WF	Wilson-Fisher

Lista de símbolos

ξ	Tamanho de correlação
T	Temperatura absoluta
t	Temperatura reduzida
b	Fator de escala da transformação de renormalização
\mathbf{H}	Hamiltoniana
\mathbf{T}	Operador de transformação do GR
Z	Função de partição
f_s	Energia livre por spin reduzida
g_i	Constantes de acoplamento de um sistema
O_i	Operadores genéricos
C_H	Calor específico a campo zero
α	Expoente crítico do calor específico a campo zero
β	Expoente crítico da magnetização a campo zero
γ	Expoente crítico susceptibilidade isotérmica a campo zero
δ	Expoente crítico da isotérmica crítica
ν	Expoente crítico do tamanho de correlação
η	Expoente crítico da função de correlação de dois pontos
Λ	Regulador UV
S	Ação de um sistema
ϕ	Campo escalar
∂_μ	Derivada D -dimensional
\mathcal{D}	Medida da integral funcional (integral de caminho)

Sumário

Introdução	17	
I	O GRUPO DE RENORMALIZAÇÃO NA TEORIA DE TRANSIÇÃO DE FASES CRÍTICAS	19
1	TEORIA DE TRANSIÇÃO DE FASES CRÍTICAS	21
1.1	Tipos de transição de fase e pontos críticos	21
1.2	Expoentes críticos e características de transições de fase crítica	22
1.2.1	Universalidade e outras características	22
1.3	Teoria dos grupos de renormalização	23
1.4	Espaço de parâmetros	24
2	APLICAÇÃO DO GRUPO DE RENORMALIZAÇÃO NA TEORIA DE TRANSIÇÃO DE FASES CRÍTICAS	29
2.1	Mudanças de escala e expoentes críticos	29
2.2	Resolução do modelo de Ising unidimensional	31
II	O GRUPO DE RENORMALIZAÇÃO NA TEORIA QUÂN-TICA DE CAMPOS	35
3	TEORIA DOS GRUPOS DE RENORMALIZAÇÃO NA TQC	37
3.1	Introdução aos conceitos e ferramentas	37
3.2	A ideia do grupo de renormalização na TQC	37
3.3	Espaço de parâmetros na TQC	38
3.4	Renormalização da teoria de campos ϕ^4 : a casca de momento de Wilson-Fisher	40
3.4.1	Análise dos pontos fixos	48
3.4.2	Renormalização da massa	48
4	CONCLUSÃO	51
	REFERÊNCIAS	53

APÊNDICES

55

**APÊNDICE A – RESOLUÇÃO ANALÍTICA DO MODELO DE ISING
1-D VIA OPERAÇÃO DE ANIQUILAÇÃO 57**

**APÊNDICE B – PROPRIEDADE DA AÇÃO LIVRE LIVRE SOB
TRANSFORMAÇÃO DA CASCA DE MOMENTO 61**

Introdução

A teoria dos grupos de renormalização é uma poderosa ferramenta matemática com utilidades em diversas áreas da física, como por exemplo, na Teoria Quântica de Campos e na física estatística. Esta teoria foi inicialmente concebida e tem sua principal utilidade na TQC, na qual é usada para tratar dos infinitos emergentes nos cálculos das grandezas físicas.

Os grupos de renormalização tratam-se de um conjunto de transformações na função de partição de um sistema físico, geralmente de escala, alterando sua quantidade de graus de liberdade. Essa transformação pode ser feita por meio de uma mudança de escala física da grade (eixo coordenado), que é utilizada na teoria TFC ou mudanças no momento/energia, que aplicamos na TQC, a partir da mudança do regulador UV Λ , permitindo examinar seu comportamento físico em diferentes escalas de tamanho e energia. A partir dessas transformações, é notável a utilidade da teoria GR na observação de fenômenos advindos de invariância de escala de sistemas físicos, onde apresentam auto-similaridade e auto-interação (no caso das TQC) nas diferentes escalas observadas, sendo descritos pela mesma física (interações), mas com novas constantes de acoplamento, ditas renormalizados e que resultam numa intensidade diferente das interações. No contexto da Eletrodinâmica Quântica por exemplo (GELL-MANN; LOW, 1954), as propriedades dos GR são utilizadas para calcular a massa e carga do elétron em regimes de altas energias.

Na teoria de transição de fases críticas a aplicação da teoria dos grupos de renormalização realizado inicialmente por K. G. Wilson em (WILSON, 1971a) e (WILSON, 1971b), permitiu cálculos mais exatos de expoentes críticos, além de dar fundamentação teórica à alguns fenômenos observados em transições de fase críticas, que antes não tinham explicação, como a universalidade. Na TQC, permite o tratamento de infinitos que aparecem no cálculo de observáveis, permitindo escrever teorias sem regulador, fazendo que seja possível calcular os resultados medidos em laboratório.

Salientada a importância dos grupos de renormalização, na parte 1 deste trabalho iremos explorar as bases da teoria TFC e estudar aplicações dos métodos do GR a ela, servindo de fundamentação para parte 2, onde serão aplicados os conceitos estabelecidos à TQC.

Parte I

O grupo de renormalização na teoria de
transição de fases críticas

1 teoria de transição de fases críticas

Podemos definir uma teoria estatística no limite do contínuo, utilizando-se de campos pela rotação de Wick ¹ da integral de caminho de uma TQC. Sendo assim, é de se esperar que hajam outras conexões ou paralelos entre essas duas áreas. No que tange as ferramentas dos grupos de renormalização, esse paralelo encontra nas condições que definem uma transição de fase crítica e condições necessárias para definir uma TQC sem *cutoff* UV.

Neste capítulo será descrito o problema das transições de fase críticas, o formalismo dos grupos de renormalização utilizados na literatura padrão dessa área e será resolvido o modelo de Ising 1-D utilizando-se deste ferramental.

1.1 Tipos de transição de fase e pontos críticos

O tamanho de correlação de um sistema físico diz para qual tamanho/distância físico diferentes partes do sistema, que estejam separados desta distância, estão correlacionados, ou seja, têm propriedades físicas macroscópicas (densidade, magnetização e etc.) relacionadas entre si, i.e, estão em um mesmo estado da matéria.

Em uma transição de fase que ocorre ao cruzarmos uma linha de coexistência, teremos tamanhos de correlação finitos, pois diferentes partes do sistema podem estar nessas duas ou mais fases distintas ao mesmo tempo. Devido a mudança abrupta das propriedades do sistema, essa transição de fases é chamada "descontínua" ou de primeira ordem.

Caso o sistema tenha linhas de coexistência que acabem em seu diagrama de fases, o ponto em que isso ocorre é chamado *ponto crítico*. Quando o sistema se aproxima de um ponto crítico, as propriedades físicas (como densidade, calor específico, etc.) das distintas fases de cada lado da linha de coexistência tendem para um valor limite, ou seja, a diferença entre elas tende zero. Essa aproximação do sistema de um ponto crítico (sobre a linha de coexistência ou não) é o que chamamos de fenômeno crítico, ou transição de fase crítica. Na região após o ponto crítico, as propriedades físicas variam continuamente, logo, chamamos essa transição de fase de contínua ou de segunda ordem. Essa transição é caracterizada pela divergência do tamanho de correlação, dado que independente do ponto ou escala que observamos o sistema, este estará numa única fase coerente. Um exemplo de ponto crítico é aquele que determina quando um fluido se torna fluido supercrítico.

¹ As rotações de Wick são método matemática que consiste de uma continuação analítica de funções para tempo imaginário. Pode-se encontrar mais informações sobre esse procedimento em (SCHLINGEMANN, 1999).

A forma como os parâmetros físicos de um sistema mudam durante a transição de fases crítica, geralmente seguem leis de potência em termos de parâmetros adimensionais como a temperatura reduzida $t = (T - T_c)/T_c$. Obter os expoentes dessas leis de potência é o maior alvo dessa área de estudo. Surpreendentemente, esses independem das interações microscópicas específicas entre átomos ou moléculas do sistema, sendo iguais para muitos sistemas que, a princípio, são bastantes diferentes. Essa universalidade é característica chave desses fenômenos, pois reduz a análise específica de cada sistema com diferentes hamiltonianas (que definem suas interações), para a análise de algumas poucas classes de universalidade representando uma gama de sistemas.

1.2 Expoentes críticos e características de transições de fase crítica

A medida que um sistema se aproxima de um ponto crítico, suas propriedades termodinâmicas variam com leis de potência, sendo elas elevadas aos chamados expoentes críticos. No contexto dessa teoria, a definição formal de um expoente crítico λ que dita o comportamento da função $F(t)$ perto do ponto crítico é dada por (1.1), ou seja, podemos dizer que $F(t) \sim |t|^\lambda$, i.e. $F(t)$ é assintoticamente igual a $|t|^\lambda$.

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln |F(t)|}{\ln |t|} \quad (1.1)$$

1.2.1 Universalidade e outras características

Experimentalmente é checado que apesar da temperatura crítica e outras quantidades, como a densidade crítica, variarem bastante de sistema para sistema, e tendo em vista que dependem dos detalhes de suas interações microscópicas, há uma surpreendente universalidade dos expoentes críticos i.e. Nesse sentido, muitos sistemas diferentes apresentam os mesmos expoentes críticos, esse comportamento pode ser observado por exemplo na figura (1)

A partir dessa propriedade, podemos fazer a análise de classes de universalidade, invés de analisar cada sistema individualmente.

Outras propriedades notáveis dessa teoria são a igualdade da aproximação de T_c por $t > 0$ e $t < 0$ e desigualdades termodinâmicas que se mostram experimentalmente iguais. Todas as propriedades anteriormente citadas são explicadas formalmente a partir da análise do problema, utilizando-se do formalismo dos grupos de renormalização.

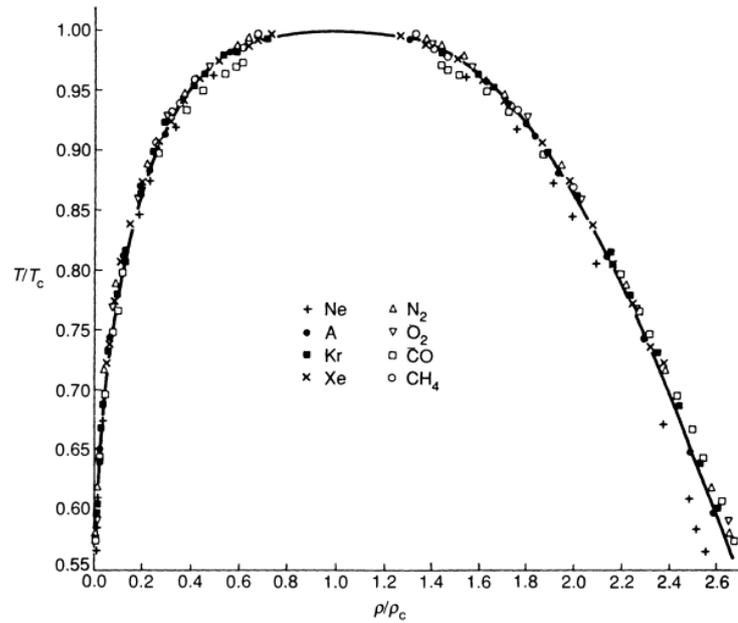


Figura 1 – Curva de coexistência para diferentes fluidos em variáveis reduzidas. O ajuste do gráfico foi feito com $\beta = 1/3$. (GUGGENHEIM, 1945)

1.3 Teoria dos grupos de renormalização

Sistemas próximos à transição de fases críticas são caracterizados pela divergência do tamanho de correlação ξ . Caso seja definido um operador que, atuando no sistema, tenha o efeito de mudar a escala do sistema, então o comportamento de uma transição de fase é caracterizado por um ponto fixo da transformação. Visto que apenas $\xi = 0$ ou $\xi \rightarrow \infty$ são invariantes à mudança de escala física.

Um operador \mathbf{T} do grupo de renormalização atua numa hamiltoniana \mathbf{H} que tem N graus de liberdade e dá uma nova hamiltoniana com N' graus de liberdade, ou seja:

$$\mathbf{H}' = \mathbf{T}\mathbf{H} \quad \text{e} \quad b^d = \frac{N}{N'}, \quad (1.2)$$

sendo b o fator de escala da transformação e d é a dimensão física do sistema. O fator de escala b determina como o espaçamento da grade e as coordenadas (o que determina distâncias) se transformam, sendo a transformação da grade dada por $a' = ab$ e a das coordenadas dado por

$$x' = b^{-1}x, \quad (1.3)$$

pois com o aumento da escala de medição, as distâncias medidas/observadas diminuem. Dada essa definição, a condição de interesse a ser estudada, é aquela que caracteriza transição de fase de segunda ordem, ou seja

$$\xi' = b^{-1}\xi = \xi \equiv \xi^*, \quad (1.4)$$

que tem como resultado trivial $\xi = 0$ ou o resultado de interesse, $\xi \rightarrow \infty$. Outras quantidades físicas se transformam de forma análoga.

É importante notar que quando fazemos a renormalização exigimos que a função de partição, que determina as propriedades físicas do sistema, seja invariante de tal forma a não fazer demais uma transformação geral que descaracterize o sistema físico estudado. Dessa forma,

$$Z'_{N'}(\mathbf{H}') = Z_N(\mathbf{H}). \quad (1.5)$$

A partir das definições da transformação, algumas das quantidades alteradas podem ser escritas diretamente em uma simples fórmula de escala, por exemplo, a energia livre por spin, reduzida, que se transforma de acordo com (1.6).

$$f_s(\mathbf{H}') = b^d f_s(\mathbf{H}). \quad (1.6)$$

Como comentado no começo da seção, a transição de fase pode ser caracterizada por uma invariância no comportamento do sistema dada uma mudança de escala no mesmo ($\xi \rightarrow \infty$). Agora, na linguagem da teoria GR, à luz da equação (1.5), fica claro que essa condição equivale a dizer que a hamiltoniana \mathbf{H} é invariante (em sua forma funcional) pela transformação, ou seja

$$\mathbf{H}' = \mathbf{T}\mathbf{H} \equiv \mathbf{H}^*. \quad (1.7)$$

Existem diversas maneiras de se implementar uma transformação de renormalização, porém em sua maioria são tomadas médias de grandezas na hamiltoniana original sobre alguns de seus graus liberdade. Assim, são substituídos esses valores "integrados" na hamiltoniana original para obter a hamiltoniana transformada, tentando escreve-la na mesma forma funcional, mas com parâmetros diferentes multiplicando cada operador. Levando em conta que computacionalmente fazemos a transformação em \mathbf{H} , utilizaremos (1.7) para calcular os pontos fixos da transformação.

1.4 Espaço de parâmetros

Grande parte do poder da teoria desenvolvida, surge da análise do comportamento do sistema sob uma transformação GR como um fluxo no espaço de parâmetros. A ideia de espaço de parâmetros permite formulação matemática conceitual que deixa claras as

propriedades dos sistemas analisados, de forma que será definido o que é o espaço de parâmetros e suas propriedades.

Toda hamiltoniana de interesse pode ser escrita como:

$$\mathbf{H} = \sum_{\alpha} \mu_{\alpha} f_{\alpha}, \quad (1.8)$$

onde os μ_{α} são constantes de acoplamento adequadas dado cada sistema físico e f_{α} são todas combinações de operadores. A expressão (1.8) também pode ser vista como o produto escalar $\vec{\mu} \cdot \vec{f}$. Como os f_{α} são fixos, o que determina o formato da hamiltoniana são os valores dos parâmetros μ , então quando aplicarmos a transformação do grupo de renormalização em uma hamiltoniana H , teremos

$$\mathbf{H}' = \mathbf{T}\mathbf{H} = (\mathbf{T}\vec{\mu}) \cdot \vec{f},$$

ou seja, a transformação é completamente determinada por

$$\vec{\mu}' = \mathbf{T}\vec{\mu}, \quad (1.9)$$

dada a equação (1.9), podemos interpretar a mudança de H sobre consecutivas transformações como um fluxo dentro do espaço parâmetros, onde cada vetor $\vec{\mu}$ pode ser pensado como um vetor posição dentro desse espaço de parâmetros.

Como estamos interessados em fenômenos críticos ($\xi \rightarrow \infty$) que são caracterizados por pontos fixos das transformações GR, iremos então analisar o comportamento de uma hamiltoniana arbitrária próximo a um ponto crítico. Primeiramente, a condição $H' = H$ se traduz

$$\mathbf{T}\vec{\mu} = \vec{\mu} \equiv \vec{\mu}^*. \quad (1.10)$$

Expandindo (1.9) em torno de $\vec{\mu}^*$, até primeira ordem teremos

$$\vec{\mu}' \approx \vec{\mu}^* + \mathbf{T}'\delta\vec{\mu} \rightarrow \delta\vec{\mu}' \approx \mathbf{T}'(\mu^*)\delta\vec{\mu} \quad (1.11)$$

ou de forma explícita em termos das componentes de $\vec{\mu}$

$$\mu'_{\alpha} - \mu_{\alpha}^* = \left. \frac{\partial \mu'_{\alpha}}{\partial \mu_{\beta}} \right|_{\vec{\mu}^*} (\mu_{\beta} - \mu_{\beta}^*), \quad (1.12)$$

onde $T'_{\alpha\beta} = \left. \frac{\partial \mu'_{\alpha}}{\partial \mu_{\beta}} \right|_{\vec{\mu}^*}$ são as componentes da matriz T .

A matriz $\mathbf{T}'(\vec{\mu}^*)$ é constante, pois está sendo avaliada num ponto específico $\vec{\mu}^*$. E devido a isso podemos encontrar seus auto-valores λ_i e auto-vetores \mathcal{O}_i que serão im-

portante para descrever o comportamento físico do sistema. Expandimos as variações de (1.11) em termos dos v_i para obter

$$\sum_i g'_i O_i = \sum_{i,j} g_j T_{i,j} O_j = \sum_i \lambda_i g_i O_i, \quad (1.13)$$

ou usando a independência linear dos v_i ,

$$g'_i = \lambda_i g_i. \quad (1.14)$$

Para dar maior poder de análise a expressão (1.14), notamos que, duas mudanças de escala consecutivas com fator de escala b_1 e b_2 podem ser vistas como uma única mudança de escala de fator de escala $b_1 \cdot b_2$, ou seja, devemos ter que

$$\lambda_i(b_1)\lambda_i(b_2) = \lambda_i(b_1 b_2), \quad (1.15)$$

o que significa que os autovalores λ_i devem ter a forma

$$\lambda_i(b) = b^{y_i}. \quad (1.16)$$

Utilizando (1.16) reescrevemos (1.14) como:

$$g'_i = b^{y_i} g_i. \quad (1.17)$$

Com base na expressão (1.17) podemos analisar o comportamento do sistema próximo a um ponto fixo de forma diferente da vista anteriormente, utilizando a seguinte classificação para os parâmetros y_i : caso $y_i < 0$, mediante sucessivas aplicações da transformação do GR, $g'_i \rightarrow 0$. Ou seja, as partes do sistema dependente desses g_i tendem ao ponto fixo, independentemente do valor inicial destes. Logo esses parâmetros são chamados de irrelevantes. Caso $y_i > 0$, após sucessivas aplicações de escala, o valor g'_i aumenta e a hamiltoniana se afasta do ponto fixo, e o valor inicial de g_i importa na análise de se hamiltoniana de fato tenderá ao ponto fixo ou não. Por isso, os g_i com $y_i > 0$ são chamadas parâmetros relevantes. Caso $y_i = 0$, termos de ordem superior na expansão (1.11) se tornam relevantes à análise.

Sendo assim, a estabilidade das soluções de pontos fixos depende na quantidade de parâmetros relevantes e irrelevantes. Uma forma de observar a influência desses parâmetros é plotar os pontos do sistemas depois de várias iterações da transformação de renormalização e ver o fluxo dos parâmetros no espaço de parâmetros. O fluxos de sistemas que começam num ponto do esação de parâmetros $\vec{\mu}$ com todos parâmetros relevantes $g_i = 0$, $i = 1, \dots, m$ num sistema de $n > m$ parâmetros, serão levados ao ponto fixo, logo são pontos estáveis. Pontos que tem algum dos parâmetros relevantes $g_i \neq 0$, serão

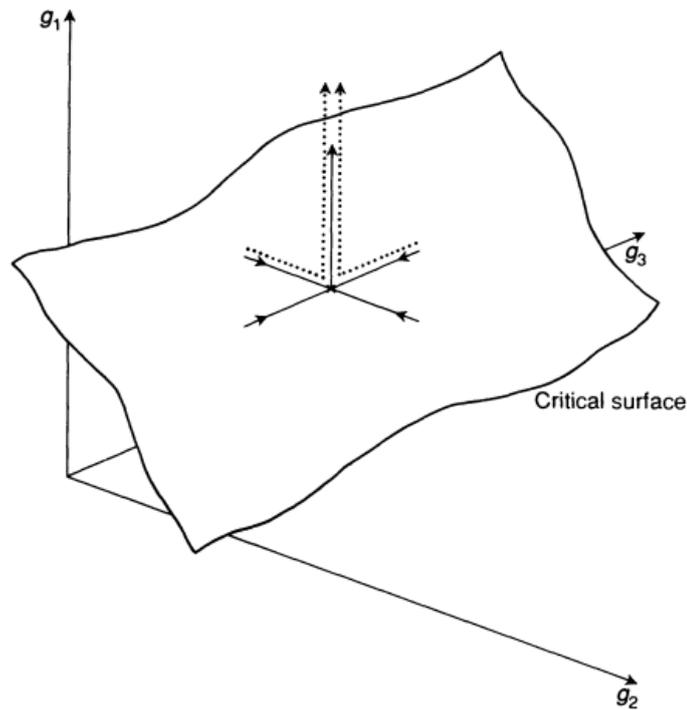


Figura 2 – Representação da superfície crítica de um sistema com um parâmetro relevante (g_1) e dois parâmetros irrelevantes (g_2 e g_3). Todos os pontos sobre a superfície tendem ao ponto fixo (representados pelas trajetórias com setas preenchidas), mas pontos próximos, porém onde $g_1 \neq 0$, se aproximam, mas acabam se afastando do ponto fixo (esses pontos têm trajetórias representadas pelas linhas tracejadas). Adaptado de (YEOMANS, 1992)

repelidos do ponto fixo. Os pontos iniciais $\vec{\mu}$ que fluem a um ponto crítico definem uma superfície em $n - m$ dimensões chamada superfície crítica. Como ponto fixo tem tamanho de correlação infinito (ou zero) e o tamanho de correlação apenas diminui após cada iteração da renormalização, os pontos da superfície crítica são pontos onde o sistema inicialmente tinha tamanho de correlação infinito. A figura (2) ilustra uma superfície crítica assim como alguns fluxos devido à uma transformação de renormalização.

Caso haja mais de um ponto fixo nas equações de recorrência da transformação de renormalização, pode ocorrer o fenômeno de cruzamento. Sistemas desse tipo podem passar de um estado crítico para outro, pois um estado crítico pode ter mais parâmetros relevantes que outro, ou seja, o sistema poderia estar próximo desse estado com mais parâmetros relevantes, porém sem que um desses fosse zero. Assim, depois de algumas transformações de renormalização, o sistema tende ao ponto crítico onde esses parâmetros (diferentes de zero) agora são irrelevantes. Uma ilustração desse fenômeno é mostrado na figura (3).

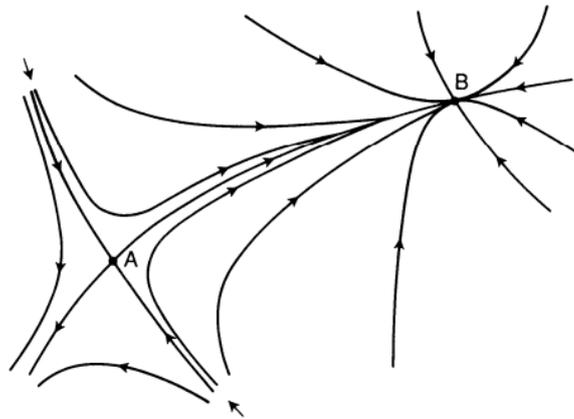


Figura 3 – Peça de uma superfície crítica de um sistema próximo a dois pontos crítico A e B. O ponto crítico A tem um parâmetro relevante e um irrelevante enquanto B tem dois parâmetros irrelevantes. Trajetórias que começam com parâmetro relevante de A próximo a zero se aproximam de A, mas são levado até B quando o valor do parâmetro relevante aumenta. Nesse momento, o sistema cruza do estado crítico A para o B. Adaptado de (YEOMANS, 1992)

2 Aplicação do grupo de renormalização na teoria de transição de fases críticas

Neste capítulo, serão demonstradas as aplicações diretas dos GR na teoria investigada, com a descrição geral do método para obter os expoentes críticos de um sistema, finalizando com a resolução do modelo de Ising 1-D a partir do método desenvolvido.

2.1 Mudanças de escala e expoentes críticos

Com base na teoria descrita, podemos analisar como as mudanças de escala da transformação do GR afeta as quantidades termodinâmicas de interesse. Para obter grande parte das quantidades de interesse, observa-se primeiro o comportamento da energia livre reduzida por spin. Essa é função da hamiltoniana, porém como foi mostrado, a hamiltoniana pode ser representada por um ponto no espaço de parâmetro, então reescrevemos (1.6) como:

$$f_s(\vec{\mu}) = b^{-d} f_s(\vec{\mu}'), \quad (2.1)$$

ou em termos dos parâmetros e auto-valores da transformação linearizada,

$$f(g_1, g_2, \dots, g_n) \sim b^{-d} f(g_1 b^{y_1}, g_2 b^{y_2}, \dots, g_n b^{y_n}). \quad (2.2)$$

Façamos a análise de um sistema magnético. No modelo de Ising (e em sistemas magnéticos em geral) os expoentes críticos de interesse são dados a partir das seguintes quantidades:

- α : Calor específico a campo zero é dado por $C_H \equiv \left. \frac{\partial U}{\partial T} \right|_H = -T \left. \frac{\partial^2 F}{\partial T^2} \right|_H \sim |t|^{-\alpha}$
- β : magnetização a campo zero $M \equiv - \left. \frac{\partial F}{\partial H} \right|_T \sim |t|^\beta$
- γ : susceptibilidade isotérmica a campo zero $\chi_T \equiv \left. \frac{\partial M}{\partial H} \right|_T = - \left. \frac{\partial^2 F}{\partial H^2} \right|_T \sim |t|^{-\gamma}$
- δ : isotérmica crítica $H \sim |M|^\delta \text{sgn}(M)$
- ν : tamanho de correlação $\xi \sim |t|^{-\nu}$
- η : função de correlação de dois pontos em T_c $G(r) \sim 1/r^{d-2+\eta}$

Para esses sistemas, como no modelo de Ising, comumente temos dois parâmetros relevantes, a temperatura reduzida $t = (T - T_c)/T_c$ e o campo magnético reduzido $h = H/kT$, pois esses são os parâmetros que controlam a criticalidade desses sistemas. Escrevemos então

$$f(t, h, \dots, g_n) \sim b^{-d} f(b^{y_1} t, b^{y_2} h, \dots, g_n b^{y_n}). \quad (2.3)$$

Podemos encontrar o expoente crítico relacionado ao calor específico a campo constante C_H em termos de y_1 e y_2 utilizando a definição de C_H em termos das derivadas de f da seguinte forma:

$$C_H \sim \left. \frac{\partial^2 f_s}{\partial t^2} \right|_h \equiv f_{tt}. \quad (2.4)$$

Derivando a equação (2.3) e utilizando a forma já conhecida da energia livre perto do ponto crítico temos que:

$$f_{tt} \sim |t|^{-\alpha} \rightarrow b^{2y_1-d} f(b^{y_1} t, b^{y_2} h = 0, \dots, \vec{0}) \sim |t|^{-\alpha}. \quad (2.5)$$

O valor dos argumentos da variáveis com parâmetros irrelevantes podem ser escolhidos como zero, portanto esses ficam arbitrariamente pequenos após sucessivas aplicações da transformação de renormalização. Utilizando o fato de que b é arbitrário, escolhemos $b^{y_1} |t| = 1$ para acabar com a dependência de t dentro da função f . Obtemos então,

$$C_H \sim |t|^{d-2y_1/y_1} f(\pm 1, 0) \sim |t|^{-\alpha}, \quad (2.6)$$

o que permite identificar:

$$\alpha = 2 - \frac{d}{y_1}. \quad (2.7)$$

De forma similar, a partir da derivada em relação a h de f obtemos

$$f_h \sim |t|^\beta \rightarrow b^{y_2-d} f(b^{y_1} t, b^{y_2} h) \sim |t|^\beta, \quad (2.8)$$

que ainda com $b^{y_1} |t| = 1$,

$$M \sim |t|^{d-y_2/y_1} f(\pm 1, h|t|^{-y_2/y_1}) \sim |t|^\beta, \quad (2.9)$$

onde identificamos

$$\beta = \frac{d - y_2}{y_1}. \quad (2.10)$$

Os outros expoentes críticos como (2.11) e (2.12) são obtidos igualmente a partir das derivadas adequadas dos potenciais termodinâmicos, em especial, as da energia livre.

$$\gamma = \frac{2y_2 - d}{y_1} \quad (2.11)$$

$$\delta = \frac{y_2}{d - y_2} \quad (2.12)$$

Para escolha padrão de $b|t|^{y_1} = 1$, chegamos a conclusão de que o tamanho de correlação (assim como todas as outras distâncias) sofre mudança de escala como $b \sim |t|^{-y_1}$, ou seja

$$\nu = \frac{1}{y_1}. \quad (2.13)$$

2.2 Resolução do modelo de Ising unidimensional

Consideraremos a hamiltoniana mais geral para esse modelo:

$$\mathbf{H} = -K \sum_{\langle i,j \rangle} s_i s_j - h \sum_i s_i - \sum C, \quad (2.14)$$

Sendo o primeiro termo associado à interação dos spins vizinhos, com $K = \frac{J}{k_b T}$, o segundo termo associado com a interação dos spins e o campo externo, onde $h = \frac{\mu B}{K_b T}$, sendo μ o momento magnético do spin. As constantes C, apesar de não possuírem contribuição nas equações de movimento do sistema, terão contribuição na análise após a renormalização do sistema, pois essas reagiram a mudança da escala da energia do mesmo.

Iremos fazer uma transformação padrão de mudança de escala chamada de "aniquilação", tendo em vista que iremos "retirar" metade dos spins da cadeia de Ising, assim reduzindo os graus de liberdade do sistema. Para encontrarmos o ponto fixo da transformação, devemos seguir a condição de que a função de partição

$$Z = \sum_s \exp \left\{ K \sum_{\langle i,j \rangle} s_i s_j + h \sum_s s_i + \sum C \right\}, \quad (2.15)$$

que determina as propriedades do sistema seja invariante, ou seja, tenha a mesma forma funcional após a transformação.

O desenvolvimento se encontra apêndice A, chegando às seguintes equações de recorrência:

$$\begin{cases} e^{4K'} = \cosh(2K + h) \cosh(2K - h) / \cosh^2 h, \\ e^{2C'} = e^{2h} \cosh(2K + h) / \cosh(2K - h), \\ e^{4C'} = \frac{e^{8C}}{8} \cosh(2K + h) \cosh(2K - h) \cosh^2(h). \end{cases} \quad (2.16)$$

Para facilitar análise do sistema, é feita a mudança de coordenadas seguinte:

$$\omega = e^{-4C}, x = e^{-4K}, y = e^{-2h}, \quad (2.17)$$

e com ela obtemos o sistema (2.18) a partir de (2.16)

$$\begin{cases} \omega' = \frac{\omega^2 x y^2}{(1+xy)(x+y)(1+y)^2}; \\ x' = \frac{x(1+y)^2}{(1+xy)(x+y)}; \\ y' = \frac{y(x+y)}{(1+xy)}. \end{cases} \quad (2.18)$$

Para esse sistema, obtemos três pontos fixos, sendo apenas o ponto $(0, 1)$ ponto crítico, porque para ele, temos campo zero e correlação de spins tendendo a infinito ($K \rightarrow \infty$).

Para obter os autovalores da transformação e descobrir os parâmetros relevantes e irrelevantes, devemos expandir as relações em série de Taylor até primeira ordem em torno do ponto crítico $(0, 1)$, linearizando os equações de recursão. Feito isso, obtém-se

$$x' \sim 4x, \quad dy' \sim 2dy, \quad (2.19)$$

onde $dy = y - y^* = y - 1$. Esses valores que multiplicam as variações em torno do ponto fixo na transformação linearizada são os coeficientes da matriz $R(\mu^*)$ da teoria e como não temos termos cruzados, a matriz já é diagonal e seus autovalores são

$$\lambda_1 = 4 \quad \text{e} \quad \lambda_2 = 2.$$

Escrevendo esse autovalores na forma da equação (1.16) e notando que o fator de normalização é $b = 2$, chegamos a conclusão que:

$$y_1 = 2 \quad \text{e} \quad y_2 = 1. \quad (2.20)$$

No sistema de coordenadas que estamos utilizando, as variáveis relevantes que determinam o comportamento crítico do sistema são x e dy , então a aplicação da transformação de escala na energia livre por spin perto do ponto crítico, seguindo a forma dada em (2.3) será dada por

$$f_s(x, dy) \sim b^{-1} f_s(b^2 x, b dy). \quad (2.21)$$

Apesar de b poder ser apenas potências de 2, podemos utilizar uma continuação analítica dessa função para nossa análise e escolher $b^2 x = 1$ (sem nos preocupar com o módulo pois $x \geq 0$) para obter

$$f_s(x, dy) \sim \sqrt{x} f_s(1, \frac{dy}{\sqrt{x}}). \quad (2.22)$$

A temperatura crítica desse sistema é 0, o que indica que não há verdadeira transição de fases (tendo em vista que nunca chegamos a $T = 0$) e por isso não podemos utilizar a definição usual de t , para calcular os expoentes críticos. Para visualizar claramente que não podemos utilizar as definições (2.7, 2.10-2.13), notamos que nesse caso podemos fazer $T = t$ e utilizar as relações de x' (2.19) e definição de x em termos de K dada por (2.17). Com $K = \frac{J}{k_b T}$ podemos escrever

$$e^{-\frac{4}{T'}} = 4e^{-\frac{4}{T}} \Rightarrow -\frac{4}{T'} = \ln 4 - \frac{4}{T},$$

$$T' = \frac{4}{\frac{4}{T} - \ln 4} = \frac{T}{1 - \frac{T \ln 4}{4}},$$

que utilizando a aproximação de $1/1 - \epsilon = 1 + \epsilon + O(\epsilon^2)$ para $\epsilon = \frac{T \ln 2}{2}$ dá

$$T' = T(1 + \ln 2 \frac{T}{2} + O(T^2)) = T + \ln 2 \frac{T^2}{2} + O(T^3), \quad (2.23)$$

ou ainda

$$\delta T \equiv T' - T = \ln 2 \frac{T^2}{2} + O(T^3). \quad (2.24)$$

Notando que, como $T^* = 0$, $dT' = T'$ e $dT = T$, logo a equação (2.23) pode ser escrita como

$$dT' = dT + \ln 2 \frac{(dT)^2}{2} + O(T^3), \quad (2.25)$$

que mostra que nesse sistema $y_1 = 0$, ou seja, a temperatura é um parâmetro marginal e de fato as formulas para os expoentes críticos deduzidas não podem ser utilizadas.

O fato desse modelo não ter transição de fases crítica real, impossibilitando o calculo dos expoentes críticos é notoriamente sabido na teoria como consequência deste sistema ter dimensão igual a *dimensão crítica inferior* d_l para essa classe de universalidade de sistemas discretos. Essa dimensão crítica inferior diz a maior dimensão para

qual abaixo dela, não há comportamento crítico, causado pela falta de estado fortemente correlacionado do sistema, i.e. o sistema não consegue entrar em estado ordenado que caracteriza a transição de fase crítica ($\xi \rightarrow \infty$). Geralmente para sistemas com simetria discreta, $d_l = 1$ e para sistemas com simetria contínua $d_l = 2$.

Parte II

O grupo de renormalização na teoria quântica
de campos

3 Teoria dos grupos de renormalização na TQC

Durante a primeira parte deste trabalho, foi desenvolvida a ideia do que são os grupos de renormalização, assim como uma de suas importantes aplicações. Seguiremos agora a analisar sua aplicação em nosso objeto de estudo principal, a teoria quântica de campos.

3.1 Introdução aos conceitos e ferramentas

Na TQC, o formalismo das integrais de caminho de Feynman é amplamente usado, sendo utilizado para calcular a função de partição $Z[J]$, da qual extraímos os valores esperados de multiplicações de operadores de campo. Esses valores esperados formam as chamadas funções de correlação de N pontos que são utilizadas para calcular propriedades físicas de um sistema. Neste trabalho iremos analisar uma das teorias com interação mais simples: a teoria de campos escalares $\phi^4(x)$ no espaço euclidiano (com função de partição real após rotação de Wick) ¹.

Podemos usar métodos perturbativos para calcular essas funções de correlação, porém diferentemente da mecânica quântica, onde cada termo da perturbação era finito (apesar da série total poder divergir), na TQC temos em geral, divergências em cada termo da expansão. O tratamento inicial para lidar com isso, é introduzir um regulador UV, que "corta" as divergências devido a altas energia. Para nos livrarmos desse regulador introduzido, iremos reescrever a ação da teoria em função de um conjunto de constantes de acoplamento efetivas (chamadas renormalizadas), que são divergentes em termos do *cutoff* UV Λ . Fazendo isso, é possível esconder essas divergências nas relação das constantes de acoplamento com Λ e obter resultados físicos significativos, medidos em laboratório, além de permitir escrevermos teorias sem regulador UV. Esse procedimento é feito com base nas transformações do grupo de renormalização, estudado na primeira parte deste trabalho.

3.2 A ideia do grupo de renormalização na TQC

Durante o desenvolvimento da TQC, especificamente na eletrodinâmica quântica, Murray Gell-Mann e Francis Low propuseram renormalizar as constantes de acoplamento cruas λ da teoria, sendo seu novo valor dado pela equação diferencial (3.1)

¹ Para uma definição de rotação de Wick, ler (SCHLINGEMANN, 1999).

$$\beta(\lambda) = -\Lambda \left. \frac{\partial \lambda}{\partial \Lambda} \right|_g = \left. \frac{\partial \lambda}{\partial \ln b} \right|_g. \quad (3.1)$$

Nesse processo, mudamos o *cutoff* UV e a constante de acoplamento crua, enquanto fixamos um valor g para a contante de acoplamento renormalizada, definimos a função beta de Low-Man que dá o fluxo de λ no espaço de parâmetros. Como veremos, a função beta pode ser calculada a partir dos diagramas de loop da teoria de perturbação.

Nessas teorias, ocorrem divergências nos cálculos de quantidades físicas importantes, como a masse do campo (massa das partículas associadas ao ele), carga elétrica, etc. devido à auto-interação dos campos.

Por exemplo, em teoria de perturbação, no calculo da correção de um *loop* da função de correlação de 2 pontos, aparece uma integral do tipo

$$\int^\Lambda \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{1}{m_0^2 + p^2}. \quad (3.2)$$

Observando-a, vemos que com $|p| \approx 0$ temos contribuição para divergência pois o integrando é maior. As escalas com $|p| \approx \Lambda$ dão contribuições ainda maiores, visto que o espaço de fase cresce de um fator Λ^D . Desta forma, flutuações em escalas de tamanho entre $a = \Lambda^{-1} < |x| < \xi = m_0^{-1}$ contribuam na integral, o que gera as divergências.

Se o tamanho a for pensado como o tamanho mínimo onde as interações fazem sentido (espaçamento da grade), então definir uma teoria sem *cutoff* é o mesmo que definir uma teoria no limite do contínuo. Podemos fazer isso a partir de um processo de sucessivas aproximações, diminuindo a a cada passo, fazendo $a/2, a/4, \dots$, por exemplo e tomar o limite de infinitas iterações desse processo, fazendo a grade ficar cada vez mais densa. Para conseguir definir uma teoria sem reguladores ($\Lambda \rightarrow \infty$ ou $a \rightarrow 0$) e assim lidar com essas divergências, é preciso saber as condições que definem quando podemos tomar o limite $\Lambda \rightarrow \infty$.

Percebeu-se que para conseguirmos tomar esse limite, é preciso reescrever a teoria em termos de constantes de acoplamento efetivas, que fazem o tamanho físico característico ξ (seu tamanho de correlação), divergir em unidades do espaçamento da grade a , ou seja, $\xi \gg a$. Como visto na primeira parte deste trabalho, essa é a condição já estudada para determinar quando um sistema passa por uma transição de fases contínua, logo esses problemas são equivalentes.

3.3 Espaço de parâmetros na TQC

Toda ideia de espaço de parâmetros já foi desenvolvida na primeira parte, mas como há uma diferença matemática entra a mecânica quântica e a TQC, precisamos fazer

uma pequena adaptação no formalismo do espaço de parâmetros e escrever a função Beta em termos mais familiares para auxiliar a compreensão dos paralelos que essa teoria tem com a teoria TFC.

Na TQC, os objetos matemáticos utilizados para descrever a dinâmica do sistema ainda são funções de partição, mas agora essas são descritas em termos de integrais de caminho, que são funcionais da ação do sistema. Dessa forma, as transformações do grupo de renormalização serão efetuadas sobre as ações do sistema, que ainda são escritas em termos de operadores na teoria de campos, mas esses são usualmente densidades em $D = d + 1$ dimensões, de forma que escrevemos

$$S = \sum_{\alpha} g_{\alpha} \int d^D x O_{\alpha}(\phi(x)), \quad (3.3)$$

onde $O[\phi(x)]$ são os operadores que constroem a densidade hamiltoniana reduzida, ou seja, já escrita em termos dos auto-vetores da transformação T . Com isso podemos escrever uma ação efetiva (renormalizada), próxima a um ponto fixo da transformação como uma transformação homogênea dos parâmetros g_i , assim como escrevemos uma hamiltoniana renormalizada na teoria TFC. A partir disso, podemos escrever a ação de uma teoria como:

$$S = S^* + S_{eff} = S^* + \sum_i g_i \int d^D x O_i(\phi(x)), \quad (3.4)$$

que após sofrer uma transform GR se torna

$$S' = S^* + \sum_i b^{y_i} g_i \int d^D x O_i(\phi(x))$$

com $b = a'/a$, o inverso da relação (1.3), pois a , o tamanho da grade, se transforma como o inverso de x , uma coordenada, de tal forma que a mesma distância física, antes e depois da transformação se conserva.

Com base na expressão (3.3) podemos analisar o comportamento do sistema próximo a um ponto fixo, utilizando a seguinte classificação para os parâmetros y_i seguindo o que já foi feito na primeira parte d trabalho: caso $y_i < 0$, o chamamos suas constantes de acoplamento associadas de irrelevantes e o fluxo de parâmetros ao IV (para $a' > a$), não sofre influência dos valores de g_i , logo teremos um ponto fixo IV estável em $g_i = 0$. Caso o fluxo do grupo de renormalização seja reverso, indo ao UV ($a > a'$), teremos um ponto fixo UV instável. As constantes associadas a $y_i > 0$ são chamadas relevantes, sendo o ponto fixo $g_i = 0$ um ponto fixo UV estável e IV instável, também chamado de ponto fixo crítico, pois está relacionado com uma TFC. Caso $y_i = 0$, chamamos as constantes de acoplamento de marginais e termos de ordem superior na expansão (1.11) se tornam relevantes à análise. Este é o caso do modelo de Ising em $d = 1$ discutido na parte 1

deste trabalho, que além de a temperatura ser parâmetro marginal, também não possui transição de fase crítica verdadeira pois $T_c = 0$.

Para nos familiarizarmos com a aplicação da função Beta de Gell-Mann-Low, podemos aplica-la em nosso *toy-model*: o modelo de Ising 1-D. Para tal, é útil reescrever a equação (3.1) em termos dos parâmetros da equação (3.3). Primeiramente, notamos que $b = a'/a = \Lambda/\Lambda'$, $\lambda = g$, logo

$$\beta(\lambda) = \lim_{\Lambda \rightarrow \Lambda'} \frac{\lambda'(\Lambda) - \lambda}{\ln \Lambda' - \ln \Lambda} = \lim_{b \rightarrow 1} \frac{g'(b) - g}{\ln b} \equiv \frac{\partial g}{\partial \ln b}. \quad (3.5)$$

Escrita desta forma, fica clara a conexão de (3.5) e (2.25) deduzida na parte 1. Como $T^* = 0$, então teremos que $dT' - dT = T' - T \equiv \delta T$, ou seja, a equação (2.25) tem conexão direta com uma aproximação para função beta, logo podemos escrever

$$\beta(T) \approx \frac{\delta T}{\ln b} = \frac{T^2}{2} + O(T^3), \quad (3.6)$$

sendo $b = 2$ na transformação de aniquilação em questão.

3.4 Renormalização da teoria de campos ϕ^4 : a casca de momento de Wilson-Fisher

A partir da parte 1 deste trabalho, que tem mérito por si só, abordaremos agora a aplicação da teoria GR à uma teoria quântica de campos amplamente estudada: a teoria ϕ^4 .

A Ação dessa teoria é

$$S[\phi] = \int d^D x \left[\frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 + \frac{m_0^2}{2} \phi^2 + \frac{\lambda}{4!} \phi^4 \right]. \quad (3.7)$$

Trabalharemos no espaço de momentos e escreveremos as constantes de acoplamento λ e m em termos de parâmetros adimensionais auxiliares u e t e do *cutoff* UV:

$$S[\phi] = \int d^D x \left[\frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 + \frac{t\Lambda^2}{2} \phi^2 + \frac{u\Lambda^\epsilon}{4!} \phi^4 \right], \quad (3.8)$$

com $\epsilon = 4 - D$, $m_0^2 = t\Lambda^2$ e $\lambda = u\Lambda^\epsilon$.

A transformação consiste em separar o campo ϕ em dois, uma parte dependente da esfera de momentos $0 < |p| < b\Lambda$ (3.9) e outra que depende da casca de de momentos $b\Lambda < |p| < \Lambda$ (3.10), como ilustrado na figura 4 e escrever uma ação efetiva integrando os momentos rápidos.

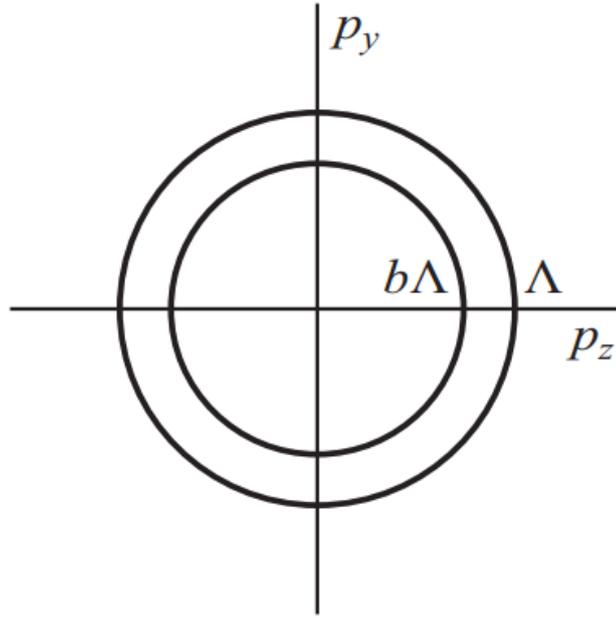


Figura 4 – Ilustração da separação do espaço de momentos em 2-D

$$\phi_{<}(x) = \int_0^{b\Lambda} \frac{d^D x}{(2\pi)^D} \phi(x) e^{ip \cdot x} \quad (3.9)$$

$$\phi_{>}(x) = \int_{b\Lambda}^{\Lambda} \frac{d^D x}{(2\pi)^D} \phi(x) e^{ip \cdot x} \quad (3.10)$$

Os campos devagar $\phi_{<}(x)$ e rápido $\phi_{>}(x)$, foram escritos a partir da transformada de Fourier em D dimensões no espaço de momento adequado, de tal forma que o campo total $\phi(x)$ seja

$$\phi(x) = \phi_{<}(x) + \phi_{>}(x) \quad (3.11)$$

e a ação possa ser escrita como,

$$S[\phi] = S_{<}[\phi_{<}(x)] + S_{>}[\phi_{>}(x)] + S_{int}[\phi_{<}(x), \phi_{>}(x)], \quad (3.12)$$

onde:

$$\begin{aligned} S_{<}[\phi_{<}] &= \int d^D x \left[\frac{1}{2} (\partial_\mu \phi_{<})^2 + \frac{t\Lambda^2}{2} \phi_{<}^2 + \frac{u\Lambda^\epsilon}{4!} \phi_{<}^4 \right], \\ S_{>}[\phi_{>}] &= \int d^D x \left[\frac{1}{2} (\partial_\mu \phi_{>})^2 + \frac{t\Lambda^2}{2} \phi_{>}^2 + \frac{u\Lambda^\epsilon}{4!} \phi_{>}^4 \right], \\ S_{int}[\phi_{<}, \phi_{>}] &= \int d^D x \left[4\phi_{>}^3 \phi_{<} + 6\phi_{>}^2 \phi_{<}^2 + 4\phi_{>} \phi_{<}^3 \right], \end{aligned} \quad (3.13)$$

sendo os termos de interação entre os campos rápidos e devagares da ação livre ignorados pois, mostramos em (B) que

$$S_0 = S_{0,>} + S_{0,<}, \quad (3.14)$$

com o subscrito 0 indicando as respectivas ações livres.

Podemos agora escrever a função de partição em termos de uma ação efetiva (renormalizada) da seguinte forma

$$\begin{aligned} Z &= \int \mathcal{D}\phi e^{-S^\Lambda[\phi]} = \int \mathcal{D}\phi_{>} \mathcal{D}\phi_{<} e^{-S_{<}^{b\Lambda}[\phi_{<}] - S_{>}^\Lambda[\phi_{>}] - S_{int}^\Lambda[\phi_{>}, \phi_{<}]} = \\ &= \int \mathcal{D}\phi_{<} e^{-S_{<}^{b\Lambda}[\phi_{<}]} \int \mathcal{D}\phi_{>} e^{-S_{>}^\Lambda[\phi_{>}] - S_{int}^\Lambda[\phi_{>}, \phi_{<}]} = \\ &= \int \mathcal{D}\phi_{<} e^{-S_{eff,<}^{b\Lambda}[\phi_{<}]}, \end{aligned} \quad (3.15)$$

com

$$e^{-S_{eff}^{b\Lambda}} = e^{-S_{<}^{b\Lambda}[\phi_{<}]} \int \mathcal{D}\phi_{>} e^{-S_{>}^\Lambda[\phi_{>}] - S_{int}^\Lambda[\phi_{>}, \phi_{<}]}. \quad (3.16)$$

Como veremos a seguir, a forma escrita, Z depende apenas dos campos devagares e por isso, tem *cutoff* $b\Lambda$. Logo, atingimos o objetivo da transformação. Porém, para obter uma forma útil de Z que conseguimos avaliar numericamente, precisamos expandir os operadores dependentes dos campos rápidos usando a definição de exponencial em série de potencia:

$$= e^{S_{>}^\Lambda - S_{int}^\Lambda[\phi_{>}, \phi_{<}]} = e^{-S_{0,>}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{u\Lambda^\epsilon}{4!} \right)^n A_n, \quad (3.17)$$

sendo A_n a n -ésima potência da integral dos operadores de interação mais o operador $\phi_{>}^4$ e $S_{0,>}$ a ação livre dos campos rápidos, ou seja

$$A_n = \int \prod_{j \neq 0}^n d^D x_j \left[\phi_{>}^4(x_j) + 4\phi_{>}(x_j)^3 \phi_{<}(x_j) + 6\phi_{>}(x_j)^2 \phi_{<}(x_j)^2 + 4\phi_{>}(x_j) \phi_{<}(x_j)^3 \right], \quad (3.18)$$

com $A_0 = 1$.

Multiplicando e dividindo (3.16) pela função de partição livre dos campos rápidos (3.19), podemos escrever (3.20).

$$Z_{0,>} = \int \mathcal{D}\phi_{>} e^{-S_{0,>}} \quad (3.19)$$

$$\int \mathcal{D}\phi_{>} e^{-S_{>}^\Lambda[\phi_{>}] - S_{int}^\Lambda[\phi_{>}, \phi_{<}]} = Z_{0,>} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{u\Lambda^\epsilon}{4!} \right)^n I_n, \quad (3.20)$$

onde I_n é dado por (3.22), sendo os valores médios são calculados via equação (3.21)². O subscrito $0, >$ no valor esperado indica que estamos tomando o valor médio em relação aos campos livres rápidos.

$$\langle A \rangle_{0, >} = \frac{\int \mathcal{D}\phi A e^{-S_{0, >}}}{\int \mathcal{D}\phi e^{-S_{0, >}}} \quad (3.21)$$

$$I_n = \left\langle \int \prod_{j \neq 0}^n d^D x_j \left[\phi_{>}^4(x_j) + 4\phi_{>}(x_j)^3 \phi_{<}(x_j) + 6\phi_{>}(x_j)^2 \phi_{<}(x_j)^2 + 4\phi_{>}(x_j) \phi_{<}(x_j)^3 \right] \right\rangle_{0, >} \quad (3.22)$$

Os termos de I_n até segunda ordem são

$$I_0 = 1 \quad \text{por definição,} \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned} I_1 &= \int d^D x \left[\langle \phi_{>}^4(x) \rangle_{0, >} + 4 \langle \phi_{>}^3(x) \rangle_{0, >} \phi_{<}(x) + 6 \langle \phi_{<}^2(x) \rangle_{0, >} \phi_{>}^2(x) + 4 \langle \phi_{>}(x) \rangle_{0, >} \phi_{<}^3(x) \right] \\ &= \int d^D x \left[\langle \phi_{>}^4(x) \rangle_{0, >} + 6 \langle \phi_{<}^2(x) \rangle_{0, >} \phi_{>}^2(x) \right], \end{aligned} \quad (3.24)$$

na qual foi usado que, por simetria, $\langle \phi^{2k+1} \rangle_{0, >} = 0$, pois somamos sobre todas as configurações de campo, inclusive todas contribuições opostas de campos, que se cancelam identicamente. Por último,

$$\begin{aligned} I_2 &= \left\langle \int d^D x_1 \int d^D x_2 \left[\left(\phi_{>}^4(x_1) + 4\phi_{>}(x_1)^3 \phi_{<}(x_1) + 6\phi_{>}(x_1)^2 \phi_{<}(x_1)^2 + 4\phi_{>}(x_1) \phi_{<}(x_1)^3 \right) \times \right. \right. \\ &\quad \left. \left(\phi_{>}^4(x_2) + 4\phi_{>}(x_2)^3 \phi_{<}(x_2) + 6\phi_{>}(x_2)^2 \phi_{<}(x_2)^2 + 4\phi_{>}(x_2) \phi_{<}(x_2)^3 \right) \right] \right\rangle_{0, >} \\ &= \int d^D x_1 \int d^D x_2 \left[\langle \phi_{>}^4(x_1) \phi_{>}^4(x_2) \rangle_{0, >} + 12 \langle \phi_{>}^4(x_1) \phi_{>}^2(x_2) \rangle_{0, >} \phi_{<}^2(x_2) + \right. \\ &\quad 16 \langle \phi_{>}^3(x_1) \phi_{>}^3(x_2) \rangle_{0, >} \phi_{<}(x_1) \phi_{<}(x_2) + 32 \langle \phi_{>}^3(x_1) \phi_{>}(x_2) \rangle_{0, >} \phi_{<}(x_1) \phi_{<}^3(x_2) \\ &\quad \left. + 36 \langle \phi_{>}^2(x_1) \phi_{>}^2(x_2) \rangle_{0, >} \phi_{>}^2(x_1) \phi_{>}^2(x_2) + 16 \langle \phi_{>}(x_1) \phi_{>}(x_2) \rangle_{0, >} \phi_{<}^3(x_1) \phi_{<}(x_2) \right], \end{aligned} \quad (3.25)$$

em que utilizou-se o fato de que

$$\int d^D x_1 \int d^D x_2 \phi^n(x_1) \phi^m(x_2) = \int d^D x_1 \int d^D x_2 \phi^m(x_1) \phi^n(x_2) \quad (3.26)$$

, sendo o mesmo válido para os valores esperados.

² A definição de valor esperada neste formalismo pode ser encontrada em (PATH. . . , 2023)

Aplicando o resultado da equação (3.20) em (3.16), achamos que a ação efetiva pode ser escrita até $O(u^3)$ como ((FRADKIN, 2021b))

$$S_{eff}^{b\Lambda} = S_{<}^{b\Lambda}[\phi_{<}] + F_{0,>} + \left(\frac{u\Lambda^\epsilon}{4!}\right) I_1 - \frac{1}{2!} \left(\frac{u\Lambda^\epsilon}{4!}\right)^2 (I_2 - I_1^2) + O(u^3), \quad (3.27)$$

onde $F_{0,>} = -\ln Z_{0,>}$. Calculando o valor de I_1^2 temos

$$\begin{aligned} I_1^2 &= \int d^D x_1 \int d^D x_2 \left[\left(\langle \phi_{>}^4(x_1) \rangle + 6 \langle \phi_{<}^2(x_1) \rangle \phi_{>}^2(x_1) \right) \left(\langle \phi_{>}^4(x_2) \rangle + 6 \langle \phi_{<}^2(x_2) \rangle \phi_{>}^2(x_2) \right) \right] \\ &= \int d^D x_1 \int d^D x_2 \left[\langle \phi_{>}^4(x_1) \rangle \langle \phi_{>}^4(x_2) \rangle + 12 \langle \phi_{>}^4(x_1) \rangle \langle \phi_{>}^2(x_2) \rangle \phi_{<}^2(x_2) \right. \\ &\quad \left. + 36 \langle \phi_{>}^2(x_1) \rangle \langle \phi_{>}^2(x_2) \rangle \phi_{<}^2(x_1) \phi_{<}^2(x_2) \right] \end{aligned} \quad (3.28)$$

em que adotamos a convenção de ignorar o subscrito 0, > em razão de todos valores médios dos operadores são tomados sob os campos rápidos livres. Continuaremos a utilizar essa convenção daqui em diante. Com esse resultado escrevemos S_{eff} explicitamente como

$$\begin{aligned} S_{eff} &= S_{<}[\phi_{<}] = \int d^D x \left[\frac{1}{2} (\partial_\mu \phi_{<}(x))^2 + \frac{t\Lambda^2}{2} \phi_{<}^2(x) + \frac{u\Lambda^\epsilon}{4!} \phi_{<}^4(x) \right] + F_{0,>} \\ &+ \left(\frac{u\Lambda^\epsilon}{4!}\right) \int d^D x_1 \left[\langle \phi_{>}^4(x_1) \rangle \right] + \left(\frac{u\Lambda^\epsilon}{4!}\right) 6 \int d^D x_1 \left[\langle \phi_{<}^2(x_1) \rangle \phi_{>}^2(x_1) \right] \\ &\quad - \frac{1}{2} \left(\frac{u\Lambda^\epsilon}{4!}\right)^2 \left\{ \int d^D x_1 \int d^D x_2 \langle : \phi_{>}^4(x_1) :: \phi_{>}^4(x_2) : \rangle \right. \\ &\quad \left. + 12 \int d^D x_1 \int d^D x_2 \langle : \phi_{>}^4(x_1) :: \phi_{>}^2(x_2) : \rangle \phi_{<}^2(x_2) \right. \\ &\quad \left. + 36 \int d^D x_1 \int d^D x_2 \langle : \phi_{>}^2(x_1) :: \phi_{>}^2(x_2) : \rangle \phi_{<}^2(x_1) \phi_{<}^2(x_2) \right. \\ &\quad \left. + 16 \int d^D x_1 \int d^D x_2 \langle \phi_{>}^3(x_1) \phi_{>}^3(x_2) \rangle_{0,>} \phi_{<}(x_1) \phi_{<}(x_2) \right. \\ &\quad \left. + 16 \int d^D x_1 \int d^D x_2 \langle \phi_{>}(x_1) \phi_{>}(x_2) \rangle_{0,>} \phi_{<}^3(x_1) \phi_{<}(x_2) \right. \\ &\quad \left. + 32 \int d^D x_1 \int d^D x_2 \langle \phi_{>}^3(x_1) \phi_{>}(x_2) \rangle_{0,>} \phi_{<}(x_1) \phi_{<}^3(x_2) \right\} + O(u^3). \end{aligned} \quad (3.29)$$

A notação $: A := A - \langle A \rangle$ foi utilizada para simplificar a escrita da expressão. Por exemplo, no termo $\langle : \phi_{>}^4(x_1) :: \phi_{>}^4(x_2) : \rangle$ expandindo obtemos

$$\left\langle \left(\phi_{>}^4(x_1) - \langle \phi_{>}^4(x_1) \rangle \right) \left(\phi_{>}^4(x_2) - \langle \phi_{>}^4(x_2) \rangle \right) \right\rangle = \langle \phi_{>}^4(x_1) \phi_{>}^4(x_2) \rangle - \langle \phi_{>}^4(x_1) \rangle \langle \phi_{>}^4(x_2) \rangle. \quad (3.30)$$

Faremos agora a integração das contribuições das médias das multiplicações dos campos. Para isso, será usada a expansão de *loops* em ordem 0 (sem *loops*), ou seja,

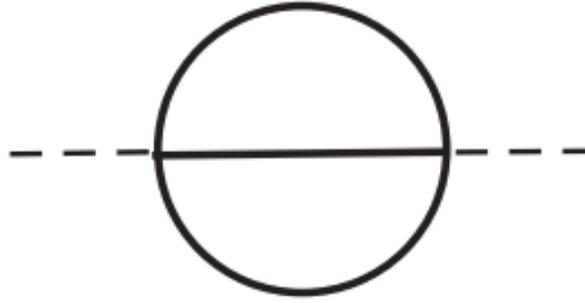


Figura 5 – Diagrama de Feynman de ordem 0 para o valor esperado da expressão (3.31).

dependente apenas de fatores $G_{0,>}(x_1 - x_2)$, sem interação (sem integração sobre termos do tipo $G_{0,>}(x_1, y)G_{0,>}(y, x_2)$). Teremos, por exemplo

$$16 \int d^D x_1 \int d^D x_2 \langle \phi_{>}^3(x_1) \phi_{>}^3(x_2) \rangle_{0,>} \phi_{<}(x_1) \phi_{<}(x_2) = 96 \int d^D x_1 \int d^D x_2 [G_{0,>}(x_2 - x_1)]^3 \phi_{<}(x_1) \phi_{<}(x_2), \quad (3.31)$$

representado graficamente pela figura 5 e com fator de multiplicidade $S = 3 \times 2 = 6$, que representa as permutações possíveis para parear os campos $\phi(x_1)$ a $\phi(x_2)$. $G_{0,>}$ é dado pela equação (3.32) e está elevado a terceira potencia temos três linhas no diagramas para serem conectadas.

$$G_{0,>} = \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{e^{ip \cdot (x_2 - x_1)}}{p^2 + t\Lambda^2} \quad (3.32)$$

A partir dessas, a fim de fazer a soma dessas contribuições e escrever a ação efetiva em termos de operadores locais, faremos uma ultima aproximação, expandindo os campos $\phi_{<}(x_2)$ em série de Taylor dentro da integral. Considerando $x_2 = x_1 + a$, escrevemos $\phi(x_2)$ como

$$\phi(x_2) = \phi(x_1 + a) = \phi(x_1) + \partial_i \phi(x_1) a_i + \frac{1}{2!} \partial_i \partial_j \phi(x_1) a_i a_j + \dots \quad (3.33)$$

com soma implícita nos índices repetidos. Utilizando essa expressão, reescrevemos (3.31) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} & \int d^D x_1 \int d^D x_2 [G_{0,>}(x_2 - x_1)]^3 \phi_{<}(x_1) \phi_{<}(x_2) = \\ & = \int d^D x \int d^D a G_{0,>}(a)^3 \phi_{<}(x) \left(\phi_{<}(x) + \partial_i \phi_{<}(x) a_i + \frac{1}{2!} \partial_i \partial_j \phi_{<}(x) a_i a_j + \dots \right) \quad (3.34) \\ & = \int d^D x d^D a G_{0,>}(a)^3 \phi_{<}^2(x) - \frac{1}{D} \left[\int d^D a [G_{0,>}(a)]^3 a^2 \right] \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi_{<}(x))^2 + \dots \end{aligned}$$

Obtendo os cálculos de todas as contribuições ((FRADKIN, 2021c)), podemos escrever a ação efetiva como

$$S_{eff} = \int d^D x \left[\frac{A}{2} (\partial_\mu \phi_<) ^2 + B \phi_<^2 + C \phi_<^4 \right] + cte + \dots \quad (3.35)$$

sendo os termos não escritos dependentes de ordens superiores nos operadores e

$$\begin{aligned} A &= 1 + 48 \left(\frac{u\Lambda^\epsilon}{4!} \right)^2 \frac{1}{D} \left[\int d^D a G_{0,>}(a)^3 a^2 \right] + O(u^3), \\ B &= \frac{t\Lambda^2}{2} + 6 \left(\frac{u\Lambda^\epsilon}{4!} \right) G_{0,>}(0) \\ &\quad - \left(\frac{u\Lambda^\epsilon}{4!} \right)^2 \left[72 G_{0,>}(0) \int d^D a G_{0,>}(a)^2 + 48 \int d^D a G_{0,>}(a)^3 \right] + O(u^3), \\ C &= \frac{u\Lambda^\epsilon}{4!} - \left(\frac{u\Lambda^\epsilon}{4!} \right)^2 \left[36 \int d^D a G_{0,>}(a)^2 + 48 G_{0,>}(0) \int d^D G_{0,>}(a) \right] + O(u^3). \end{aligned} \quad (3.36)$$

As integrais e o valor de $G_{0,>}(0)$ podem ser calculados analiticamente e escritas em termos de $s = -\ln b$ e

$$S_D = \frac{2\pi^{D/2}}{\Gamma(D/2)}, \quad (3.37)$$

que é a área de uma hipersfera, sendo Γ a função gamma.

Após muito desenvolvimento, devemos lembrar o objetivo principal: definir uma teoria quântica sem regulador UV ($\Lambda \rightarrow \infty$). Para tal, foi argumentado que devemos obter uma teoria em que o tamanho de correlação diverge em termos do *cutoff* Λ , o que ocorre quando temos um sistema que é ponto fixo no espaço de parâmetros, mediante uma transformação de renormalização. Dito isso, como os coeficientes A, B e C são diferentes dos valores apropriados, devemos adicionar mais uma variável à transformação. Fazemos uma transformação de escala nos campos dada por (3.38) para obtermos essa nova variável e por ultimo, faremos transformação de coordenadas (3.39) a fim de reverter o regulador UV para Λ .

$$\phi'(x') = L^{-1/2} \phi_<(x). \quad (3.38)$$

$$x' = bx \quad (3.39)$$

Feito isso, a ação transformada, que é a ação efetiva, aplicada nos campos e coordenadas reescaladas, pode ser escrita como

$$S'[\phi'(x')] = S_{eff}[\phi_<] = \int d^D x' b^{-D} \left[\frac{A}{2} b^2 L (\partial_\mu \phi_<) ^2 + B L \phi_<^2 + C L^2 \phi_<^4 \right], \quad (3.40)$$

ignorando termos constantes e de operadores de ordem superior. Escrito desta forma, vemos que a condição para que a ação seja invariante é

$$\begin{aligned} 1 &= b^{2-D} AL \\ \frac{t' \Lambda^2}{2} &= b^{-D} LB \\ \frac{u' \Lambda^\epsilon}{4!} &= b^{-D} L^2 C \end{aligned} \quad (3.41)$$

que nos dá

$$\begin{aligned} L &= b^{D-2} LA^{-1} = (1 + O(u^2)) \approx b^{D-2} \\ t' &= b^{-2} \left[t + \frac{u}{2} \frac{S_D \delta s}{(2\pi)^D} (1-t) + O(t^2, u^2) \right] \\ u' &= b^{-\epsilon} \left[u - \frac{2}{3} u^2 \frac{S_D \delta s}{(2\pi)^D} + 3u^2 t \frac{S_D \delta s}{(2\pi)^D} + O(u^3, t^2) \right] \end{aligned} \quad (3.42)$$

onde foram utilizados os valores das integrais e de $G_{0,>}(0)$ que aparecem em (3.40) e depois foi feita expansão em série de Taylor dos fatores de t resultados dessas integrais. Reescrever as expressões (3.42) de forma mais sucinta, podemos definir a nova variável

$$v = u \frac{S_D}{(2\pi)^D}, \quad (3.43)$$

de tal forma que as equações (3.42) ficam

$$\begin{aligned} t' &= t + \frac{1}{2} v (1-t) s + O(t^2, u^2), \\ v' &= b^\epsilon \left(v - \frac{3}{2} v^2 s + 3tv^2 s + O(t^2, u^3) \right). \end{aligned} \quad (3.44)$$

Usando a definição (3.5), escrita em termos de $s = -\ln b$,

$$\begin{aligned} \beta_t &= \left. \frac{\partial t}{\partial s} \right|_{s=0}, \\ \beta_v &= \left. \frac{\partial v}{\partial s} \right|_{s=0}, \end{aligned} \quad (3.45)$$

temos

$$\begin{aligned} \beta_v &= \epsilon v - \frac{3}{2} v^2 \\ \beta_t &= 2t + \frac{v}{2} - \frac{1}{2} vt \end{aligned} \quad (3.46)$$

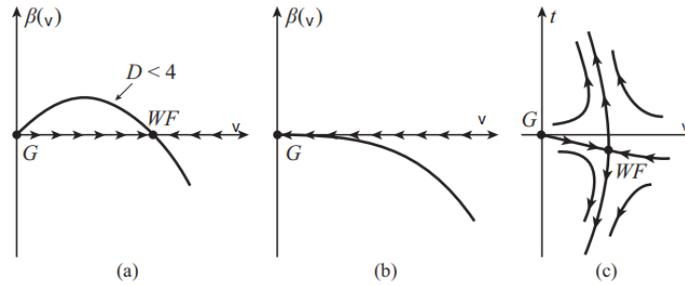


Figura 6 – Função beta da constante de acoplamento v em $D < 4$ (a) e em $D = 4$ (b) dimensões. (c) mostra o fluxo RG completo em $D < 4$ dimensões.

3.4.1 Análise dos pontos fixos

A partir das equações das funções beta, podemos descobrir quais são os pontos fixo da transformação. Já que ela mede a taxa de variação do parâmetro em função do regulador UV, basta colocar $\beta = 0$ para obter o ponto fixo. Fazendo isso para as funções (3.46), considerando termos $O(t^2, v^2)$ apenas, teremos apenas a solução trivial $t^* = 0, v^* = 0$, que dá a teoria de campo livre. Considerando termos $O(t^2, v^3)$ na expressão de v , obtemos um sistema de equações simples que dá o ponto fixo não trivial $(t^*, v^*) = (-\frac{1}{6}\epsilon, \frac{2}{3}\epsilon)$, chamado ponto fixo de Wilson-Fisher (WF). A condição de existência desse ponto fixo é que $D < 0$, caso contrário, com $D = 4$, teremos apenas o ponto fixo de campo livre.

Caso $D < 4$, épsilon será positivo e o ponto fixo de campo livre tem dois parâmetros relevantes, tendo duas trajetórias possíveis, uma tendendo a $t \rightarrow \pm\infty$ e outra tendendo ao ponto WF, que tem apenas um parâmetro relevante, ou seja, ocorre o fenômeno de cruzamento explicado no final da seção (1.4). O valor $t^* \neq 0$ indica que deve haver renormalização não trivial à massa do campo, o que será explorado na próxima seção. Quando $D \rightarrow 4$, o sistema tende ao estado em que temos apenas o ponto fixo de campo livre não-massivo, como mostra a figura 6 (a) e (b).

3.4.2 Renormalização da massa

Foi vista nessa seção que, para o ponto fixo não trivial, a massa depende da transformação de renormalização e que a teoria de ponto fixo tem parâmetro $t^* \neq 0$. Isso indica que, diferente do valor postulado inicial m_0 , a massa real do sistema, que pode ser medida em laboratório, será dada pela transformação de renormalização na forma de uma massa renormalizada. Podemos descobrir essa massa efetiva da teoria, escrita com dependência explícita de Λ (o *cutoff* inicial) da forma descrita a seguir. Como o tamanho de correlação é definido por $\xi = m_0^{-1}$ e vimos que após a transformação de renormalização esse depende de t e u , então, após análise dimensional, espera-se que possamos escrever

$$\xi = \Lambda^{-1} f(v, t) \quad (3.47)$$

sendo $f(v, t)$ uma função adimensional. Para um sistema que é ponto fixo da transformação de renormalização, temos que o tamanho de correlação é divergente e invariante, logo, podemos escrever

$$0 = \frac{d\xi}{d\Lambda} = -\Lambda^{-2} f(v, t) + \Lambda^{-1} \frac{df(v, t)}{d\Lambda}. \quad (3.48)$$

O segundo termo aparece pois apesar de não depender explicitamente de Λ , a função $f(v, t)$ depende de Λ pela transformação de renormalização, ou seja, pela dependência de t e v . Utilizando a regra da cadeia para derivar f e a definição das funções beta, temos

$$f = \frac{\partial f}{\partial v} \beta_v + \frac{\partial f}{\partial t} \beta_t = 0. \quad (3.49)$$

De forma similar, podemos reescrever a equação (3.49) em termos de variáveis advindas da linearização das funções beta (3.50), considerando apenas a primeira ordem em v e com x equivalente a β_t e y equivalente a β_v , para obter (3.51)

$$x = 4(t - t^*) + \left(1 - \frac{\epsilon}{6}\right)(v - v^*), \quad y = v - v^* \quad (3.50)$$

$$\beta_x = \left(2 - \frac{\epsilon}{3}\right)x + \dots, \quad \beta_y = -\epsilon + \dots, \quad (3.51)$$

sendo feito o cálculo de β_x e β_y a partir da regra da cadeia, notando que há a dependência $\beta(x(t, v), y(t, v))$.

Escrevemos a função em termos dessas novas variáveis, pois agora o ponto fixo se encontra na origem, o que facilita a análise e permite identificar que claramente que y é a variável irrelevante e x é a relevante. Com isso, podemos simplesmente colocar $y = 0$ e nos concentrarmos no fluxo de x , como feito na primeira parte deste trabalho. Esse é o motivo de termos escrito apenas o termo linear em x , pois é o mais importante para a análise seguinte.

Dito isso, identificamos (3.49) como

$$\frac{\partial f}{\partial x} \beta_x = 0, \quad (3.52)$$

que tem solução geral

$$\ln f = cte - \int \frac{dx}{\beta_x}, \quad (3.53)$$

ou

$$f(x) = f(x_0) \exp\left\{-\int_{x_0}^x \frac{dx}{\beta_x}\right\} \quad (3.54)$$

Caso observemos o fluxo de dois pontos iniciais diferente, que acabem no mesmo valor de $x = \bar{x}$ com o mesmo *cutoff*, teremos

$$f(\bar{x}) = f(x_1) \exp\left\{-\int_{x_1}^{\bar{x}} \frac{dx}{\beta_x}\right\}, \quad f(\bar{x}) = f(x_2) \exp\left\{-\int_{x_2}^{\bar{x}} \frac{dx}{\beta_x}\right\}, \quad (3.55)$$

ou

$$f(x_1) = f(x_2) \exp\left\{\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\beta_x}\right\} \quad (3.56)$$

que com

$$\xi(x_1) = \Lambda^{-1} f(x_1), \quad \xi(x_2) = \Lambda^{-1} f(x_2), \quad (3.57)$$

nos permite escrever

$$\xi(x_1) = \xi(x_2) \exp\left\{\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\beta_x}\right\}. \quad (3.58)$$

Supondo x_1 próximo muito próximo do ponto fixo, ou seja, $x_1 \rightarrow 0$ e com x_2 longe o suficiente do ponto fixo ($x_2 \gg 0$), para que $\xi(x_2)$ seja da ordem de grandeza de a , o espaçamento da grade inicial, que é a condição oposta à que atingimos no ponto fixo ($\xi \gg a$). Dessa forma, com $\xi(x_2) \simeq a$, teremos finalmente

$$\xi(x_1) \simeq a \exp\left\{\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{(2 - \frac{\epsilon}{3})x}\right\} = a \left|\frac{x_2}{x_1}\right|^\nu \quad (3.59)$$

com ν dado por

$$\nu = \frac{1}{2 - \frac{\epsilon}{3}}, \quad (3.60)$$

ou seja

$$m_1 \simeq a^{-1} \left|\frac{x_2}{x_1}\right|^{-\nu} = \Lambda \left|\frac{x_2}{x_1}\right|^{-\nu}, \quad (3.61)$$

a massa renormalizada e finita, pois o termo da fração é pequeno, o que regulariza a divergência de Λ .

Da mesma forma que obtemos a massa renormalizada, poderíamos obter a constante de acoplamento do termo ϕ^4 renormalizada a partir de análise similar da função beta de y , porém vimos que essa é irrelevante à criticalidade do sistema, logo, concluímos com o resultado de m_1 .

4 Conclusão

Neste trabalho foram estudadas as aplicações do GR em dois contextos diferentes, mas correlatos: a teoria TFC e a TQC. Foi investigada a importante ligação do GR com fenômenos relacionados à invariância de escala, e.g. na teoria TFC e também sua utilidade na descrição de sistemas com física que depende de diversas escalas de grandezas físicas, como a TQC. Deduziu-se a condição de criticalidade de um sistema estatístico e foi notada sua equivalência ao problema de definir uma TQC sem regulador Λ . Também foram utilizados os métodos dos GR para calcular uma expressão analítica para os expoentes críticos na teoria TFC, explicar propriedades peculiares da teoria TFC e calcular o valor das constantes de acoplamento renormalizadas de uma teoria quântica de campos.

Podem ser salientados os seguintes resultados principais deste trabalho: resolução analítica do modelo de Ising 1-D a partir da transformação de aniquilação e obtenção de sua função beta; Aplicação da transformação da casca de momento de WF para obtenção da massa (e o tamanho de correlação) renormalizados da teoria escalar ϕ^4 euclidiana.

Referências

- CARDY, J. In: _____. *Scaling and renormalization in statistical physics*. Great Britain: Cambridge University press, 1992. Citado 2 vezes nas páginas 5 e 7.
- FRADKIN, E. 15. In: _____. *Quantum Field theory: An integrated approach*. [S.l.]: Princeton University Press, 2021. Citado 2 vezes nas páginas 5 e 7.
- FRADKIN, E. 15. In: _____. *Quantum Field theory: An integrated approach*. [S.l.]: Princeton University Press, 2021. p. 424. Citado na página 44.
- FRADKIN, E. 15. In: _____. *Quantum Field theory: An integrated approach*. [S.l.]: Princeton University Press, 2021. p. 425. Citado na página 46.
- GELL-MANN, M.; LOW, F. E. Quantum electrodynamics at small distances. *Phys. Rev.*, American Physical Society, v. 95, p. 1300–1312, Sep 1954. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.95.1300>>. Citado na página 17.
- GUGGENHEIM, E. A. The principle of corresponding states. *Journal of Chemical Physics*, v. 13, n. 7, p. 257, 1945. Citado 2 vezes nas páginas 9 e 23.
- PATH integral formulation. Wikimedia Foundation, 2023. Disponível em: <https://en.wikipedia.org/wiki/Path_integral_formulation>. Citado na página 43.
- SCHLINGEMANN, D. From euclidean field theory to quantum field theory. *Reviews in Mathematical Physics*, v. 11, n. 09, p. 1151–1178, 1999. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 37.
- WILSON, K. G. Renormalization group and critical phenomena. i. renormalization group and the kadanoff scaling picture. *Phys. Rev. B*, American Physical Society, v. 4, p. 3174–3183, Nov 1971. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.4.3174>>. Citado na página 17.
- WILSON, K. G. Renormalization group and critical phenomena. ii. phase-space cell analysis of critical behavior. *Phys. Rev. B*, American Physical Society, v. 4, p. 3184–3205, Nov 1971. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.4.3184>>. Citado na página 17.
- YEOMANS, J. M. In: _____. *Statistical mechanics of phase transitions*. New York: Clarendon press - Oxford, 1992. Citado 5 vezes nas páginas 5, 7, 9, 27 e 28.

Apêndices

APÊNDICE A – Resolução analítica do modelo de Ising 1-D via operação de aniquilação

O objetivo deste apêndice é chegar nas equações de recorrência do modelo e encontrar sua forma linearizada (expandido em série de Taylor em primeira ordem) num conjunto de variáveis apropriadas. Para tal devemos supor que a função de partição (A.1) é invariante pela transformação feita.

$$Z = \sum_s \exp \left\{ K \sum_{\langle i,j \rangle} s_i s_j + h \sum_i s_i + \sum C \right\}, \quad (\text{A.1})$$

Para facilitar a análise, reescrevemos (A.1) como

$$Z = \sum_{s_i} \prod_{i=2,4,6,\dots} \exp \{ K s_i (s_{i-1} s_{i+1}) + h s_i + h(s_{i-1} + s_{i+1})/2 + 2C \}. \quad (\text{A.2})$$

Sobre a transformação de aniquilação, iremos tomar o valor esperado de Z (a menos de uma constante $1/2$ igual em ambos os termos) sobre os spins pares $(2,4,6,\dots)$, sendo ± 1 os possíveis valores

$$\begin{aligned} Z' = & \sum_{s_1, s_3, s_5, \dots} \prod_{i=2,4,6,\dots} \exp \{ K(s_{i-1} s_{i+1}) + h + h(s_{i-1} + s_{i+1})/2 + 2C \} \\ & + \sum_{s_1, s_3, s_5, \dots} \prod_{i=2,4,6,\dots} \exp \{ -K(s_{i-1} s_{i+1}) - h + h(s_{i-1} + s_{i+1})/2 + 2C \}. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

A expressão (A.3) tem soma e produto sobre todos spins remanescentes, então iremos renumerar os índices de s_i , $(1,3,5,\dots)$ como $(1,2,3,\dots)$ por conveniência e naturalmente, os índices do produtório também se tornarão $(1,2,3,\dots)$ nos permitindo escrever

$$\begin{aligned} Z' = & \sum_{s_i} \prod_i \exp \{ (K + h/2)(s_i + s_{i+1}) + h + 2C \} \\ & + \sum_{s_i} \prod_i \exp \{ (-K + h/2)(s_i + s_{i+1}) - h + 2C \}, \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

ou

$$Z' = \sum_{s_i} \exp \left\{ \sum_i (K + h/2)(s_i + s_{i+1}) + h + 2C \right\} \\ + \sum_{s_i} \exp \left\{ \sum_i (-K + h/2)(s_i + s_{i+1}) - h + 2C \right\},$$

Para aplicar a condição (1.5) reescrevemos $\sum_{\langle i,j \rangle} s_i s_j = K \sum_i s_i s_{i+1}$ na hamiltoniana original e dizemos que Z' tem a forma

$$Z' = \sum_{s_i} \exp \left\{ \sum_i K' s_i s_{i+1} + h' \sum_i s_i + \sum_i C' \right\}, \quad (\text{A.5})$$

ou equivalentemente

$$Z' = \sum_{s_i} \exp \left\{ \sum_i K' s_i s_{i+1} + h' \sum_i (s_i + s_{i+1})/2 + \sum_i C' \right\}, \quad (\text{A.6})$$

e supomos Z' similar a Z , mas com diferentes constantes de acoplamento. Fazendo isso e supondo que a expressão dentro do somatório em s_i é igual para cada índice i , obtemos três equações para os três casos de s_i e s_{i+1} :

$$\begin{cases} e^{K'+h'+C'} = e^{2K+2h+2C} + e^{-2K+2C} & s_i = s_{i+1} = 1 \\ e^{-K'+C'} = e^{h+2C} + e^{-h+2C} & s_i = -s_{i+1} = \pm 1 \\ e^{K'-h'+C'} = e^{-2K+2C} + e^{2K-2h+2C} & s_i = s_{i+1} = -1. \end{cases} \quad (\text{A.7})$$

Chamando as equações de (1), (2) e (3) respectivamente, podemos obter a expressão de cada constante de acoplamento fazendo

$$[(1) * (3)] / (2)^2 \rightarrow e^{4K'} = \frac{(e^{2K+2h+2C} + e^{-2K+2C})(e^{-2K+2C} + e^{2K-2h+2C})}{(e^{h+2C} + e^{-h+2C})^2} \\ = \frac{e^h(e^{2K+h} + e^{-2K-h})(e^{2K-h} + e^{-2K+h})e^{-h}}{(e^h + e^{-h})^2}$$

$$\rightarrow e^{4K'} = \cosh(2K + h) \cosh(2K - h) / \cosh^2 h, \quad (\text{A.8})$$

$$(1) / (3) \rightarrow e^{2h'} = \frac{(e^{2K+2h+2C} + e^{-2K+2C})}{(e^{-2K+2C} + e^{2K-2h+2C})} \\ = \frac{e^h(e^{2K+h} + e^{-2K-h})}{e^{-h}(e^{-2K+h} + e^{2K-h})}$$

$$\rightarrow e^{2h'} = e^{2h} \cosh(2K + h) / \cosh(2K - h), \quad (\text{A.9})$$

$$\begin{aligned}
(1) * (3) * (2)^2 &\rightarrow e^{4C'} = (e^{2K+2h+2C} + e^{-2K+2C})(e^{-2K+2C} + e^{2K-2h+2C})(e^{h+2C} + e^{-h+2C})^2 \\
&= e^{8C} e^h (e^{2K+h} + e^{-2K-h})(e^{-2K+h} + e^{2K-h}) e^{-h} (e^h + e^{-h})^2, \\
&\rightarrow e^{4C'} = 16.e^{8C} \cosh(2K + h) \cosh(2K - h) \cosh^2(h), \tag{A.10}
\end{aligned}$$

logo, as equações de recorrência são:

$$\begin{cases} e^{4K'} = \cosh(2K + h) \cosh(2K - h) / \cosh^2 h; \\ e^{2C'} = e^{2h} \cosh(2K + h) / \cosh(2K - h); \\ e^{4C'} = 16.e^{8C} \cosh(2K + h) \cosh(2K - h) \cosh^2(h). \end{cases} \tag{A.11}$$

Para fazer análise dos pontos críticos faremos a mudança de base

$$\omega = e^{-4C}, x = e^{-4K}, y = e^{-2h}. \tag{A.12}$$

Com essas substituições podemos escrever

$$\begin{aligned}
\omega'^{-1} &= \omega^{-2} (x^{1/2} y^{-1/2} + x^{1/2} y^{1/2}) (x^{1/2} y^{-1/2} + x^{-1/2} y^{1/2}) (y^{-1/2} + y^{1/2})^2 \\
&= \omega^{-2} x^{-1} (y^{-1/2} + x y^{1/2}) (x y^{-1/2} + y^{1/2}) (y^{-1/2} + y^{1/2})^2 \\
&= \omega^{-2} x^{-1} y^{-1} (1 + xy) (x + y) (1 + y)^2 y^{-1}, \\
\rightarrow \omega' &= \frac{\omega^2 x y^2}{(1 + xy)(x + y)(1 + y)^2}, \tag{A.13}
\end{aligned}$$

para omega,

$$\begin{aligned}
y'^{-1} &= \frac{y^{-1} (x^{-1/2} y^{-1/2} + x^{1/2} y^{1/2})}{(x^{1/2} y^{-1/2} + x^{-1/2} y^{1/2})} \\
&= \frac{y^{-1} x^{-1/2} (y^{-1/2} + x y^{1/2})}{x^{-1/2} (x y^{-1/2} + y^{1/2})} \\
&= \frac{y^{-1} (1 + xy)}{(x + y)} \\
\rightarrow y' &= \frac{y(x + y)}{(1 + xy)}, \tag{A.14}
\end{aligned}$$

para y e

$$\begin{aligned}
x'^{-1} &= \frac{(x^{-1/2}y^{-1/2} + x^{1/2}y^{1/2})(x^{-1/2}y^{1/2} + x^{1/2}y^{-1/2})}{(y^{-1/2} + y^{1/2})^2} \\
&= \frac{x^{-1}(y^{-1/2} + xy^{1/2})(y^{1/2} + xy^{-1/2})}{(y^{-1/2} + y^{1/2})^2} \\
&= \frac{x^{-1}y^{-1}(1 + xy)(y + x)}{y^{-1}(1 + y)^2} \\
\rightarrow x' &= \frac{x(1 + y)^2}{(1 + xy)(x + y)}, \tag{A.15}
\end{aligned}$$

para x . Teremos então o novo sistema a seguir:

$$\begin{cases} \omega' = \frac{\omega^2 xy^2}{(1+xy)(x+y)(1+y)^2}; \\ x' = \frac{x(1+y)^2}{(1+xy)(x+y)}; \\ y' = \frac{y(x+y)}{(1+xy)}. \end{cases} \tag{A.16}$$

Inicialmente, os pontos críticos do sistema serão definidos apenas por x e y , então ignoraremos a equação para ω .

Após de reescrito o sistema, fica fácil enxergar os pontos fixos (para $K > 0$) como sendo:

- A linha $x^* = 1$ e $0 \leq y^* \leq 1$;
- O ponto $x^* = 0$ e $y^* = 0$;
- O ponto $x^* = 0$ e $y^* = 1$.

O ponto de interesse é o ponto $(x^*, y^*) = (0, 1)$, que representa o sistema a zero campo $y = 0$ e com alta correlação dos spins (tendendo ao infinito), o que caracteriza um ponto crítico.

Expandindo o sistema (A.16) em série de Taylor em termos desse ponto crítico obtemos:

$$\begin{cases} x' = \frac{x(1+y)^2}{(1+xy)(x+y)} \approx (4 + dy^2 + \dots)x + (\dots)x^2 + O(x^3) \\ y' = \frac{y(x+y)}{(1+xy)} \approx 1 + 2dy + dy^2 + O(dy^3) \rightarrow dy' \approx 2dy + O(dy^2) \end{cases} \tag{A.17}$$

Dessa forma, linearizando a transformação teremos

$$x' \approx 4x, \quad dy' \approx 2dy, \tag{A.18}$$

finalizando nosso objetivo do apêndice.

APÊNDICE B – Propriedade da ação livre livre sob transformação da casca de momento

Durante o processo de separa o campo $\phi(x)$ em campos rápidos e divagares, precisamos reescrever a ação da teoria. Neste apêndice é demonstrado como a ação livre da teoria é dada pela soma das ações livres dos campos rápidos e divagares.

Começamos pelas transformações (3.9) e (3.10) de $\phi(x)$, que quando aplicadas à ação temos:

$$S_0 = \frac{1}{2} \int d^D x \left(\partial^\mu \int_0^\Lambda \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \phi(p) e^{ip \cdot x} \right)^2 + \frac{t\Lambda^2}{2} \left(\int_0^\Lambda \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \phi(p) e^{ip \cdot x} \right)^2, \quad (\text{B.1})$$

sendo $x \cdot p$ o produto escalar entre dois vetores. O primeiro quadrado da expressão acima pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} I_1^2 &= \left(\partial^\mu \int_0^\Lambda \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \phi(p) e^{ip \cdot x} \right) \left(\partial^\mu \int_0^\Lambda \frac{d^D p'}{(2\pi)^D} \phi(p') e^{ip' \cdot x} \right) \\ &= - \int_0^\Lambda \int_0^\Lambda \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{d^D p'}{(2\pi)^D} p p' \phi(p) \phi(p') e^{i(p+p') \cdot x}. \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Fazendo a integral em x o termo de velocidade da ação fica

$$\begin{aligned} \int_0^\Lambda \int_0^\Lambda \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{d^D p'}{(2\pi)^D} \phi(p) \phi(p') p p' \int \frac{d^D x}{(2\pi)^D} e^{i(p+p') \cdot x} &= \int_0^\Lambda \int_0^\Lambda \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{d^D p'}{(2\pi)^D} \phi(p) \phi(p') p p' \delta(p+p') \\ &= \int_0^\Lambda \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \phi(p) \phi(-p) p^2 \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

onde foi utilizada a definição da função delta como a transformada de Fourier da constante 1. De forma similar, o segundo termo de (B.1) dará

$$\int_0^\Lambda \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \phi(p) \phi(-p), \quad (\text{B.4})$$

que nos permite escrever a ação como

$$\frac{1}{2} \int_0^\Lambda \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \phi(p) \phi(-p) (p^2 + t\Lambda^2). \quad (\text{B.5})$$

Quando escrevemos $S_{0,<} + S_{0,>}$, no termo de velocidades temos

$$\frac{1}{2} \int d^D x \left[\left(\partial^\mu \int_0^\Lambda \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \phi(p) e^{ip \cdot x} \right)^2 + \left(\partial^\mu \int_{b\Lambda}^\Lambda \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \phi(p) e^{ip \cdot x} \right)^2 \right]. \quad (\text{B.6})$$

Cada integral dessas pode ser resolvida da forma que resolvemos (B.2), nos dando

$$\frac{1}{2} \int_0^{b\Lambda} \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \phi(p) \phi(-p) p^2 + \frac{1}{2} \int_{b\Lambda}^\Lambda \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \phi(p) \phi(-p) p^2 = \frac{1}{2} \int_0^\Lambda \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \phi(p) \phi(-p) p^2, \quad (\text{B.7})$$

que é de fato igual ao termo de velocidade da ação S_0 . Por fim, podemos novamente, aplicar o mesmo procedimento para os termos com ϕ^2 de tal forma a obter

$$\frac{t\Lambda^2}{2} \int_0^\Lambda \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \phi(p) \phi(-p). \quad (\text{B.8})$$

Combinando os termos de velocidade e de massa, obtemos (B.5), o que prova que

$$S_0 = S_{0,>} + S_{0,<} \quad (\text{B.9})$$