

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
INSTITUTO DE FÍSICA

GABRIEL MACEDO DANTAS

**SOLUÇÕES TOPOLÓGICAS NA TEORIA
QUÂNTICA DE CAMPOS**

BRASÍLIA

8 DE SETEMBRO DE 2022

Gabriel Macedo Dantas

Soluções Topológicas na Teoria Quântica de Campos

Monografia apresentada ao Instituto de Física da Universidade de Brasília como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Bacharel em Física.

Orientador: Arsen Melikyan

Universidade de Brasília – UnB

Instituto de Física

Brasília

8 de setembro de 2022

Gabriel Macedo Dantas
Soluções Topológicas na Teoria Quântica de Campos/ Gabriel Macedo Dantas.
– Brasília, 8 de setembro de 2022-
99 p. : il. (algumas color.) ; 30 cm.

Orientador: Arsen Melikyan

Monografia – Universidade de Brasília – UnB
Instituto de Física, 8 de setembro de 2022.

1. Instantons. 2. Soluções Topológicas. I. Arsen Melikyan. II. Universidade de Brasília. III. Instituto de Física. IV. Soluções Topológicas na Teoria Quântica de Campos

CDU 02:141:005.7

Gabriel Macedo Dantas

Soluções Topológicas na Teoria Quântica de Campos

Monografia apresentada ao Instituto de Física da Universidade de Brasília como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Bacharel em Física.

Trabalho aprovado. Brasília, 8 de setembro de 2022:

Arsen Melikyan
Orientador

Aleksandr Nikolaievich Pinzul
Convidado 1

José Francisco da Rocha Neto
Convidado 2

**Waleska Priscylla Florencio de
Medeiros**
Convidado 3

Brasília
8 de setembro de 2022

Agradecimentos

*And it's only the giving,
That makes you what you are.*

— Ian Anderson, *Wond'ring Aloud*

Creio que seja impossível agradecer da maneira apropriada todas as pessoas que, de uma forma ou outra, me ajudaram nessa caminhada no curso de física. Por isso, já peço desculpas antecipadas por qualquer omissão. De maneira geral, me sinto muito grato por ter conhecido tantas pessoas queridas que me apoiaram (e me apoiam) nessa jornada.

Agradeço aos meus colegas de turma. Em especial: Laura, Gabriel, Lucca, Juliana, Ricardo, João, Isabelle e Ana. Muito obrigado pela amizade e por todos os momentos que compartilhamos nos últimos anos!

Agradeço a todos os professores que contribuíram para a minha formação. Agradeço ao professor Arsen pela orientação atenciosa, pela paciência infinita em tirar minhas dúvidas, pelas excelentes aulas e por todos os conselhos. Agradeço ao professor Clóvis por ter me aceitado como seu aluno de iniciação científica no longínquo ano de 2019 e ter se dedicado de forma tão generosa em ensinar relatividade a este jovem estudante. Guardo na memória com bastante afeto os momentos de tirar dúvidas em sua sala, suas excelentes aulas e todas as nossas conversas. Tenho vocês dois como grandes fontes de inspiração.

Agradeço à minha família, e em particular, à minha avó e minha mãe por terem sempre me apoiado em tudo. Amo vocês.

Por fim, gostaria de dedicar essa monografia em memória dos meus avós paternos, Lenilson e Mércia.

Escutem!
Será que se brilham
as estrelas —
significa que alguém precisa delas?
significa — que é indispensável
que a cada noite
sobre os telhados
arda ao menos uma estrela?!
Maiakóvski, *Escutem!* (1914)

Resumo

Nesta monografia, revisitamos a construção e as propriedades básicas de certas soluções topológicas em teorias de campos. Após introduzir algumas ferramentas matemáticas básicas que permeiam o trabalho, como as integrais de caminho e os grupos de homotopia, um estudo das soluções é realizado. Nossa análise está centrada; na solução de instanton na mecânica quântica do potencial quártico enquanto modelo prototípico para os cálculos com instantons, na solução de sóliton para a teoria $\lambda\phi^4$ e sua interpretação na teoria quântica, nas soluções de vórtices em teorias com simetria $U(1)$ global em uma e duas dimensões e a relação com a física estatística do gás de Coulomb, no modelo sigma não-linear e sua construção geométrica dos instantons e nos instantons BPST da teoria de Yang-Mills livre. Procuramos ressaltar as semelhanças entre as soluções e os cálculos realizados em modelos distintos e, sempre que possível, discutir a relevância dos métodos para a elucidação de problemas concretos da teoria quântica de campos.

Palavras-chaves: Instantons. Soluções Topológicas. Teoria Quântica de Campos.

Abstract

In this work, we revisit the construction and some of the basic properties of topological solutions in field theories. After introducing some basic mathematical tools which are employed throughout the text, such as path integrals and homotopy groups, we study the aforementioned solutions. Our analysis focuses on: the quantum mechanics of the double well and its instanton solution as a prototypical model, the $\lambda\phi^4$ soliton and its quantum meaning, the one and two dimensional vortex solutions of theories which exhibit a global $U(1)$ symmetry and the connection with the statistical physics of the Coulomb gas, the geometrical construction of instantons in non-linear sigma models and the BPST instanton in pure Yang-Mills theory. In our exposition, we sought to highlight the similarities of the techniques employed in each model and make connections between analogous phenomena. Whenever possible, discussions were raised regarding the practical relevance of such solutions to concrete problems in quantum field theory

Key-words: Instantons. Topological Solutions. Quantum Field Theory.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Potencial quártico $U(q) = \frac{\lambda}{4} \left(\frac{\mu^2}{\lambda} - q^2 \right)^2$ de um oscilador anarmônico. Adaptado de (FRADKIN, 2021).	42
Figura 2 – O potencial $-U(q)$ presente na equação de movimento Euclidiana e a solução de tunelamento $\bar{q}(\tau)$. Adaptado de (FRADKIN, 2021).	44
Figura 3 – Representação de um processo de multi-instantons como uma sequência de instantons e anti-instantons localizados nos instantes de tempo imaginário τ_1, τ_2, \dots . Na figura, $\Delta\tau \sim 1/\mu$ quantifica a largura do instanton. Adaptado de (FRADKIN, 2021).	50
Figura 4 – Homotopias no círculo S^1 . (a) Uma configuração constante $\theta(x) = \theta_0$, (b) uma configuração homotópica ao mapa constante, (c) uma configuração com <i>winding number</i> +1, e por fim, (d) uma configuração homotópica ao exemplo (c). Adaptado de (FRADKIN, 2021).	61
Figura 5 – Uma homotopia Γ em S^2 é topologicamente trivial pois todos os laços são retráteis a um único ponto n_0 da esfera. Adaptado de (FRADKIN, 2021).	62
Figura 6 – Projeção estereográfica da esfera alvo S^2_{target} em um plano complexo de coordenadas (ω_1, ω_2) . Adaptado de (FRADKIN, 2021).	73

Lista de tabelas

Tabela 1 – Soluções para os estados ligados do operador de Schrödinger no potencial de Pöschl-Teller e seus autovalores.	98
---	-----------

Lista de abreviaturas e siglas

TQC	Teoria Quântica de Campos
QCD	Cromodinâmica Quântica (do inglês <i>Quantum Chromodynamics</i>)
QED	Eletrodinâmica Quântica (do inglês <i>Quantum Electrodynamics</i>)
BPST	Belavin-Polyakov-Schwarz-Tyupkin

Lista de símbolos

$\epsilon_{\mu\nu\lambda}$	Símbolo de Levi-Civita
$\eta_{a\mu\nu}$	Símbolo de 't Hooft
$\delta_{\mu\nu}$	Delta de Kronecker
σ^a	Matrizes de Pauli
$\tilde{F}_{\mu\nu}$	Dual do tensor antissimétrico $F_{\mu\nu}$
Tr	Operação de traço

Sumário

	Introdução	14
I	ALGUMAS FERRAMENTAS MATEMÁTICAS	16
	1 INTEGRAIS DE CAMINHO	17
1.1	Motivação	17
1.2	Integrais de caminho na mecânica quântica	18
1.2.1	O propagador como uma integral funcional	18
1.2.2	Limite semiclássico	20
1.2.3	Rotação de Wick e física estatística	21
1.2.4	Aproximação Gaussiana e o determinante funcional	22
1.3	Teorias de campos e o método de Faddeev-Popov	27
	2 TOPOLOGIA E ÁLGEBRA	32
2.1	Grupos de homotopia	32
2.2	Espaços quocientes, grupos de Lie e variedades de vácuo	35
II	SOLUÇÕES TOPOLÓGICAS: SÓLITONS, VÓRTICES E INSTANTONS	39
	3 TUNELAMENTO E SÓLITONS	40
3.1	Instantons na mecânica quântica: o potencial quártico	42
3.1.1	A solução de instanton	43
3.1.2	Cálculo da função de correlação e multi-instantons	45
3.2	Sólitons na teoria $\lambda\phi^4$	51
3.2.1	As soluções de kink e anti-kink	51
3.2.2	Interpretando as soluções clássicas na teoria quântica	53
	4 INSTANTONS EM DUAS DIMENSÕES	58
4.1	Preliminares e o teorema de Derrick	58
4.2	Vórtices	59
4.2.1	O caso unidimensional	60
4.2.2	Vórtices em duas dimensões	63
4.3	O modelo sigma não-linear $O(3)$	67
4.3.1	Condições de contorno e a carga topológica	68

4.3.2	Equações auto-duais e anti-auto-duais	71
4.3.3	Transformações conformes e a redução de Pohlmeyer	75
4.4	Modelo sigma não-linear em espaços quocientes	81
4.4.1	Considerações gerais	81
4.4.2	Instantons no espaço projetivo $\mathbb{C}\mathbb{P}^{N-1}$	82
	5 INSTANTONS EM MAIS DIMENSÕES	84
5.1	Teoria de Yang-Mills em quatro dimensões	84
5.1.1	Condições de contorno, equações auto-duais <i>and all that</i>	86
5.1.2	Efeitos qualitativos: o vácuo θ	91
	Conclusão	92
	REFERÊNCIAS	93
	APÊNDICES	96
	APÊNDICE A – A equação de Schrödinger para o potencial de Pöschl-Teller	97

Introdução

O Modelo Padrão da física de partículas constitui a mais bem sucedida teoria física para a descrição da matéria e suas interações a nível subatômico. Contudo, os métodos perturbativos que usualmente são empregados na QED, por exemplo, não são adequados para avaliar certos regimes de outras teorias como a QCD. A busca, tanto pelo lado da física quanto da matemática, por novos métodos não-perturbativos para o estudo das teorias de campos faz parte de um rico, atual e extremamente relevante programa de pesquisa da física teórica.

Notáveis avanços nessa direção surgiram com a investigação e descoberta de novas estruturas integráveis¹ em modelos de interesse físico. Além disso, destacamos também o papel dos métodos semiclássicos, sobretudo no que se refere à investigação das chamadas soluções topológicas, o assunto central do nosso projeto.

Um dos primeiros exemplos de uma solução não-perturbativa das equações de movimento Euclidianas e topologicamente não-trivial veio à tona com o seminal artigo de Belavin, Polyakov, Schwartz e Tyupkin, sendo conhecida desde então como o *instanton BPST* (BELAVIN et al., 1975). Essa solução foi encontrada investigando a teoria de Yang-Mills livre com grupo de simetria $SU(2)$. O instanton descreve uma transição entre diferentes setores topológicos do vácuo da teoria.

Logo se tornou evidente que o estudo dessas soluções topológicas especiais levaria a um entendimento mais profundo da estrutura do vácuo da QCD e das demais teorias de calibre. Em particular, diversos trabalhos surgiram com o intuito de entender o problema do confinamento de quarks na QCD e em teorias de calibre semelhantes, porém com simplificações (POLYAKOV, 1994). Não somente isso, claro. Pouco tempo depois, Coleman e colaboradores (e vários outros cientistas posteriormente) investigaram o problema do decaimento do falso vácuo e suas implicações cosmológicas. Nesses trabalhos, o emprego de métodos semiclássicos e de soluções solitônicas que mediam processos de tunelamento ocupa um papel central nas discussões (COLEMAN, 1977), (JR; COLEMAN, 1977).

Ainda sobre as possíveis aplicações, um resumo do *status* experimental de várias soluções de sólitons pode ser consultado em (MANTON; SUTCLIFFE, 2004), §1.6.

¹ Não só surgiram novas estruturas integráveis a serem investigadas, como também novos métodos algébricos de análise desses modelos, como os grupos quânticos (ETINGOF; SEMENYAKIN, 2021).

Encarando ainda a teoria de calibre do ponto de vista puramente matemático enquanto o estudo de conexões em fibrados principais, as soluções de instantons de Yang-Mills abriram portas para uma gama enorme de trabalhos na geometria diferencial e na topologia das variedades em dimensão 4 ([DONALDSON; KRONHEIMER, 1990](#)).

A topologia, como antecipamos na discussão acima, irá ocupar um papel central na discussão acerca dessas soluções estendidas para as equações de movimento Euclidianas em teorias de campos. De fato, a topologia ocupa vários papéis na TQC, dentre os quais podemos citar ([FRADKIN, 2021](#)):

- (i) Identificar classes de configurações topologicamente inequivalentes na função de partição;
- (ii) Permitir uma definição não-perturbativa da integral de caminho em teorias com simetrias globais, em teorias de calibre e também em teoria para fenômenos de transição de fase;
- (iii) O estudo de configurações clássicas (e estados quânticos) com energia finita e topologia não-trivial (sólitons);
- (iv) Compreensão de processos de tunelamento na TQC.

O objetivo do nosso projeto é introduzir as ferramentas físicas e matemáticas básicas para entender as propriedades fundamentais das soluções topológicas em teorias de campos. Faremos isso abordando exemplos concretos que ilustram de maneira simples os aspectos mais relevantes do comportamento dessas soluções a nível clássico e/ou quântico.

A principal referência para a escrita dessa monografia foi o livro do E. Fradkin ([FRADKIN, 2021](#)). Outra referência sobre o mesmo assunto que o autor julgou útil no desenvolvimento do projeto é o livro do E. Weinberg ([WEINBERG, 2012](#)).

Parte I

Algumas ferramentas matemáticas

1 | Integrais de Caminho

Johnny! 'Lesson 5'! (...) 'The shortest route was a detour.' 'It was the detour that was our shortest path.'

— Gyro Zeppeli em *Steel Ball Run* (Hirohiko Araki)

1.1 Motivação

Na mecânica clássica, a dinâmica de uma partícula entre dois instantes de tempo t_i e t_f é determinada pela sua trajetória $q = q(t)$, $t \in [t_i, t_f]$, uma função suave obtida a partir das equações de movimento submetidas às condições de contorno apropriadas. Em contraste, os princípios da mecânica quântica fornecem uma prescrição probabilística para descrevermos o dinâmica de uma partícula entre duas configurações. Neste formalismo, basta determinar a *amplitude de probabilidade*¹

$$\langle q', t' | q, t \rangle \quad (1.1)$$

para sermos capazes de calcular os observáveis relevantes da teoria. A amplitude acima é, precisamente, o elemento matricial do operador de evolução temporal, também chamado de *propagador*:

$$K(q', t'; q, t) \equiv \langle q', t' | q, t \rangle = \langle q' | e^{-i\hat{H}(t'-t)} | q \rangle. \quad (1.2)$$

Dado K e $\psi(q, t)$ em uma configuração inicial, podemos reconstruir a função de onda para qualquer instante de tempo:

$$\psi(q', t') = \int K(q', t'; q, t) \psi(q, t) dq. \quad (1.3)$$

De certo modo, a fórmula acima realiza o análogo quântico do conhecido princípio de Huygens (COHEN-TANNOUJJI; DIU; LALOË, 2019). Em palavras, para determinar ψ , basta integrar o estado inicial em conjunto com o propagador sob todas as posições entre as configurações inicial e final.

A ideia básica por trás da formulação da mecânica quântica por *integrais de caminho* consiste em considerar essa analogia com o princípio de Huygens como um novo

¹ Por $|q, t\rangle \equiv e^{i\hat{H}t} |q(t)\rangle$ nós denotamos um estado no “quadro móvel”, seguindo (RYDER, 1996). Este *ket* é um autoestado do operador $\hat{q}(t)$ no quadro de Heisenberg no instante t , cujo autovalor é $q(t)$.

ponto de partida da teoria. Para tal, o propagador é reescrito como uma espécie de soma de vários propagadores em tempos intermediários. No limite apropriado, uma integral de Riemann surge e obtemos uma representação *funcional* para K . Isto é, chegamos a uma expressão envolvendo uma integral sob um espaço de funções. Desse modo, para determinar o propagador, nós devemos em princípio realizar uma integração sobre *todas* as possíveis trajetórias que a partícula pode assumir.

As vantagens de formular a mecânica quântica dessa maneira são várias. O limite semiclássico da teoria se torna mais evidente, e por meio do procedimento formal chamado de rotação de Wick, construímos a linguagem correta para uma série de analogias com a física estatística. Quando adaptadas para as teorias de campos relativísticos, as integrais de caminho se tornam a ferramenta mais conveniente para realizar a quantização das teorias de calibre, como o eletromagnetismo. De maior interesse para nós, entretanto, é o fato que a integral funcional nos permite discutir novos fenômenos não-perturbativos das teorias de campos, como veremos ao longo do texto. Até certo ponto, a aproximação Gaussiana que discutiremos ao final desse capítulo é análoga (mas não idêntica) à aproximação WKB da mecânica quântica não-relativística².

Historicamente, o formalismo das integrais de trajetória foi desenvolvido no início da década de 1940 por R. Feynman em sua tese de doutorado, seguindo considerações iniciais feitas anteriormente por P. Dirac (FEYNMAN; BROWN, 2005).

1.2 Integrais de caminho na mecânica quântica

1.2.1 O propagador como uma integral funcional

Para entender o surgimento da representação funcional do propagador, vamos dividir o intervalo de tempo $[t, t']$ da seguinte maneira:

$$t_0 = t, \quad t_1 = t + \epsilon, \quad \dots \quad t_{n+1} = t', \quad (1.4)$$

onde ϵ é um parâmetro pequeno. Vemos que

$$\epsilon = \frac{t' - t}{n + 1}. \quad (1.5)$$

Usando a completude dos autoestados de \hat{H} , em cada um dos n tempos intermediários entre t e t' nós introduzimos no elemento matricial (1.2) o operador identidade:

$$\mathbb{1} = \int dq_i(t_i) |q_i, t_i\rangle\langle q_i, t_i|, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.6)$$

² Lembre-se que o uso mais celebrado da aproximação WKB é justamente na descrição do tunelamento, um fenômeno não-perturbativo, como veremos no capítulo 3.

De agora em diante, empregamos a notação $q_i(t_i) \equiv q_i$ para simplificar as equações. Seguindo o procedimento descrito acima, encontramos:

$$K(q', t'; q, t) = \int dq_1 \cdots dq_n \langle q', t | q_n, t_n \rangle \langle q_n, t_n | q_{n-1}, t_{n-1} \rangle \cdots \langle q_2, t_2 | q_1, t_1 \rangle \langle q_1, t_1 | q, t \rangle. \quad (1.7)$$

Para proceder com o cálculo, vamos reescrever cada um dos propagadores intermediários na última integral passando para o espaço dos momentos. Com efeito,

$$\begin{aligned} \langle q_i, t_i | q_{i-1}, t_{i-1} \rangle &= \langle q(t_i) | e^{-i\epsilon \hat{H}} | q(t_{i-1}) \rangle \\ &= \int \frac{dp_i(t_i)}{2\pi} \langle q(t_i) | p_i(t_i) \rangle \langle p_i(t_i) | e^{-i\epsilon \hat{H}} | q(t_{i-1}) \rangle. \end{aligned} \quad (1.8)$$

O primeiro termo no integrando acima é simplesmente $e^{iq(t_i)p_i(t_i)}$. Para determinar o segundo termo, assumimos que o hamiltoniano foi reescrito de modo a colocar todos os operadores \hat{q} à direita e todos os operadores \hat{p} à esquerda³. Expandindo a exponencial em primeira ordem em ϵ , obtemos:

$$\begin{aligned} \langle p_i(t_i) | e^{-i\epsilon \hat{H}} | q(t_{i-1}) \rangle &= \langle p_i(t_i) | (1 - i\epsilon H) | q(t_{i-1}) \rangle \\ &= e^{-i\epsilon H(p(t_i), q(t_{i-1}))} e^{-ip(t_i)q(t_{i-1})}. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Portanto:

$$\langle q_i, t_i | q_{i-1}, t_{i-1} \rangle = \int \frac{dp_i(t_i)}{2\pi} e^{ip(t_i)(q(t_i) - q(t_{i-1}))} e^{-i\epsilon H(p(t_i), q(t_{i-1}))}. \quad (1.10)$$

Coletando nossos resultados, a equação (1.7) toma a forma:

$$\begin{aligned} K(q', t'; q, t) &= \int \left[\prod_{i=1}^n dq(t_i) \right] \left[\prod_{j=1}^{n-1} \frac{dp(t_j)}{2\pi} \right] \exp \left(i\epsilon \sum_{k=0}^{n+1} p(t_{k+1}) \frac{[q(t_{k+1}) - q(t_k)]}{\epsilon} \right) \\ &\times \exp \left(-i\epsilon \sum_{k=0}^{n+1} H(p(t_{k+1}), q(t_k)) \right). \end{aligned} \quad (1.11)$$

Notamos que os argumentos das exponenciais acima se assemelham com a expressão que define a integral de Riemann convencional, no limite em que $\epsilon \rightarrow 0$ e $n \rightarrow \infty$. Nessas condições, escrevemos

$$K(q', t'; q, t) = \int \mathcal{D}q(t) \mathcal{D}p(t) \exp \left(i \int_{t_0}^{t_{n+1}} dt [p(t)\dot{q}(t) - H(p(t), q(t))] \right), \quad (1.12)$$

onde $\mathcal{D}q(t)$ e $\mathcal{D}p(t)$ denotam as medidas de integração formais sobre todo o espaço de fase:

$$\mathcal{D}q(t) := \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^n dq(t_i), \quad \mathcal{D}p(t) := \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^{n-1} \frac{dp(t_j)}{2\pi}. \quad (1.13)$$

³ Isso é sempre possível por meio do ordenamento de Weyl (GREINER; REINHARDT, 2013).

O estudante familiarizado com a mecânica analítica certamente se sentirá tentado à identificar o integrando na exponencial em (1.12) com a lagrangiana $L(p, q)$ da partícula clássica. Contudo, nesse estágio do formalismo isso ainda não é possível. *A priori*, não há razão para identificarmos \dot{q} com $\frac{\partial H(q, p)}{\partial p}$, como a mecânica hamiltoniana exige.

Vamos considerar $p(t)$ e $\dot{q}(t)$ como variáveis independentes e realizar a integral sobre os momentos assumindo que a hamiltoniana é quadrática, como de costume:

$$H(q, p) = \frac{1}{2}p^2 + V(q). \quad (1.14)$$

Recorrendo à expressão discreta (1.11) para o propagador, a integração sobre $p(t_j)$ se torna Gaussiana e pode ser realizada explicitamente. O resultado final é

$$K(q', t'; q, t) = \mathcal{N} \int \mathcal{D}q \exp(iS[q]), \quad (1.15)$$

onde \mathcal{N} é uma constante divergente⁴ e $S[q]$ é a ação clássica da partícula. Interpretamos a fórmula acima da seguinte maneira: para avaliar a amplitude de probabilidade entre duas configurações, devemos integrar sobre *todos* os possíveis caminhos $q(t)$ que conectam os estados inicial e final, onde cada caminho possui um peso dado pela fase $e^{iS[q]}$.

Raramente somos capazes de avaliar exatamente uma integral de caminho que não seja estritamente Gaussiana. A situação se torna ainda mais dramática quando adaptamos o método para as teorias de campos. A vantagem dessa formulação da mecânica quântica é, na verdade, fornecer um atalho para deduzir as outras equações e relações entre observáveis relevantes da teoria.

1.2.2 Limite semiclássico

Por um breve instante, considere integrais da forma⁵

$$I := \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{\frac{i}{\hbar}f(x)}. \quad (1.16)$$

Quando $\hbar \rightarrow 0$, a exponencial oscila rapidamente, de modo que a integral sobre um pequeno intervalo $(x, x + \Delta x)$ é zero, a menos que a função $f(x)$ esteja próxima de seus pontos críticos $x = x_c$ tais que $f'(x_c) = 0$.

Isto é, para os pontos críticos de $f(x)$ não há oscilações em primeira ordem em Δx . Desse modo, a maior contribuição para I vem justamente dos pontos estacionários

⁴ O fato dessa constante divergir não é preocupante. No cálculo dos observáveis da teoria esse fator é sempre cancelado.

⁵ O estudo dessas integrais oscilatórias é um ramo bem conhecido da análise harmônica e uma série de teoremas precisos acerca dos seus comportamentos oscilatórios podem ser provados, como o lema de Riemann-Lebesgue.

do integrando. Voltando à integral (1.15), concluímos que no limite clássico $\hbar \rightarrow 0$ apenas os pontos estacionários da ação clássica contribuem para a integral de caminho:

$$\frac{\delta S[q]}{\delta q} = 0. \quad (1.17)$$

Ou seja, recuperamos o princípio de Hamilton, a partir do qual as equações de movimento clássicas são deduzidas. O caráter quântico de (1.15) vem das flutuações Gaussianas (e de ordem superior) que surgem como correções da trajetória clássica que domina a integral de caminho em primeira ordem. Na seção 1.2.4 estudamos em mais detalhes a aproximação Gaussiana.

1.2.3 Rotação de Wick e física estatística

Primeiro, lembre-se que o propagador admite uma representação em termos das autofunções $\psi_n(q) = \langle q|n\rangle$ do operador hamiltoniano \hat{H} , o qual assumimos possuir um conjunto completo de autoestados que satisfazem o problema de autovalores

$$\hat{H} |n\rangle = E_n |n\rangle. \quad (1.18)$$

Assim, temos:

$$\langle q', t'|q, t\rangle = \sum_n \psi_n(q') \psi_n^*(q) e^{-iE_n \Delta t}. \quad (1.19)$$

O propagador Euclidiano é obtido por meio da prescrição $\Delta t = -i\tau$, denominada *rotação de Wick*. Esse é o ponto de partida para várias das conexões entre a física estatística e a teoria de campos. Com efeito, note que agora:

$$\begin{aligned} \int dq \langle q, \tau|q, 0\rangle &= \sum_n \int dq |\psi_n(q)|^2 e^{-\tau E_n} \\ &= \sum_n e^{-\tau E_n} = \text{tr} e^{-\tau \hat{H}} = Z. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Ou seja, integrando o propagador Euclidiano sob o mesmo ponto q nós obtemos a função de partição de um sistema estatístico com temperatura $\beta = \tau/\hbar$. Essas considerações nos indicam que devemos usar na integral de caminho Euclidiana apenas trajetórias periódicas

$$q' \equiv q(\tau) = q(0) \equiv q \quad (1.21)$$

de comprimento $\tau = \hbar\beta$. Dessa maneira, estaremos calculando a função de partição do sistema.

1.2.4 Aproximação Gaussiana e o determinante funcional

Vamos discutir agora como avaliar integrais de caminho na aproximação Gaussiana. Ilustraremos o método no caso do oscilador harmônico simples antes de partir para a situação mais genérica.

Primeiro exemplo: oscilador harmônico simples

Como bem sabemos, a lagrangiana do oscilador harmônico é dada por

$$L = \frac{m}{2}\dot{q}^2 - V(q) = \frac{m}{2}\dot{q}^2 - \frac{m\omega^2}{2}q^2, \quad (1.22)$$

e a trajetória clássica $q_c(t)$ satisfaz à equação de movimento:

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + \omega^2\right)q_c(t) = 0. \quad (1.23)$$

Agora, definimos a função $\xi(t) := q(t) - q_c(t)$ e impomos condições de contorno de tal forma que

$$q(t_i) = q_c(t_i) \equiv q_i, \quad q(t_f) = q_c(t_f) \equiv q_f. \quad (1.24)$$

Isto é, $\xi(t)$ se anula nos instantes inicial e final da trajetória. Substituindo $q(t)$ na ação clássica, encontramos:

$$\begin{aligned} S(q, \dot{q}) &= \int_{t_i}^{t_f} dt \left[\frac{m}{2}(\dot{q}_c + \dot{\xi})^2 - \frac{m\omega^2}{2}(q_c + \xi)^2 \right] \\ &= S(q_c, \dot{q}_c) + S(\xi, \dot{\xi}) + \int_{t_i}^{t_f} dt (m\dot{q}_c\dot{\xi} - m\omega^2 q_c\xi). \end{aligned} \quad (1.25)$$

Integrando por partes e utilizando a equação de movimento, encontramos⁶:

$$S(q, \dot{q}) = S(q_c, \dot{q}_c) + S(\xi, \dot{\xi}). \quad (1.26)$$

Dessa maneira, obtemos a seguinte expressão para a integral de caminho:

$$\langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle = e^{iS_c/\hbar} \int_{\xi_i=\xi_f=0} \mathcal{D}\xi \exp \left[\frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} dt L(\xi, \dot{\xi}) \right], \quad (1.27)$$

onde S_c denota a ação avaliada para a trajetória clássica. Notamos ainda que toda a informação acerca dos estados inicial e final se encontra no pré-fator acima. Por isso, dizemos que para o oscilador harmônico simples as flutuações quânticas são independentes desses estados.

Para completar o cálculo do propagador, vemos que são necessários dois passos intermediários: encontrar $q_c(t)$ para determinar o pré-fator e lidar com integral de caminho restante que descreve as flutuações quânticas.

⁶ Note ainda que no caso do oscilador harmônico, $S(q_c, \dot{q}_c)$ é igual a $S(\xi, \dot{\xi})$. Isso é uma particularidade desse sistema apenas.

Caso geral

Para discutir os dois procedimentos restantes que acabamos de mencionar vamos considerar o caso de um potencial genérico $V(q)$. A expansão de $V(q_c + \xi)$ em uma série de Taylor em torno da solução clássica fornece

$$V(q_c + \xi) = V(q_c) + \left. \frac{\partial V}{\partial q} \right|_{q_c} \xi(t) + \frac{1}{2} \int_{t_i}^{t_f} dt' \left. \frac{\partial^2 V}{\partial q(t) \partial q(t')} \right|_{q_c} \xi(t) \xi(t') + \mathcal{O}(\xi^3). \quad (1.28)$$

Inserindo a expressão acima na ação clássica, encontramos

$$S(q, \dot{q}) = S(q_c, \dot{q}_c) + S_{\text{eff.}}(\xi, \dot{\xi}; q_c), \quad (1.29)$$

onde a *ação efetiva* $S_{\text{eff.}}$ é definida como

$$S_{\text{eff.}} := \int_{t_i}^{t_f} dt \frac{m}{2} \dot{\xi}^2 - \frac{1}{2} \int_{t_i}^{t_f} dt \int_{t_i}^{t_f} dt' \left. \frac{\partial^2 V}{\partial q(t) \partial q(t')} \right|_{q_c} \xi(t) \xi(t'). \quad (1.30)$$

Para simplificar algumas fórmulas, vamos empregar a notação:

$$V''(q_c) := \int_{t_i}^{t_f} dt' \left. \frac{\partial^2 V}{\partial q(t) \partial q(t')} \right|_{q_c}. \quad (1.31)$$

Pela equação (1.30), percebe-se que $S_{\text{eff.}}$ fornece uma aproximação da ação clássica que é quadrática nas flutuações $\xi(t)$. Note que, em geral, $V''(q_c(t))$ não será uma constante no tempo. Desse modo, a ação efetiva depende, em princípio, da trajetória clássica. Contudo, se estivermos interessados em flutuações em torno de um mínimo de V , então $q_c(t)$ é uma constante igual a $q_{\text{min.}}$.

Antes de discutir como avaliar as contribuições Gaussianas para a integral de caminho, vamos tecer alguns comentários sobre o significado dessa aproximação. Dito de outra forma, procuramos responder à pergunta: “em quais condições descartar termos de ordem $\mathcal{O}(\xi^3)$ e superiores fornece uma boa aproximação?”.

Uma vez que a expansão de $q(t)$ é feita em torno da trajetória clássica, espera-se que a aproximação Gaussiana seja adequada para o limite $\hbar \rightarrow 0$. Sabemos que:

$$\langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle = e^{iS_c/\hbar} \int_{\xi_i=\xi_f=0} \mathcal{D}\xi \exp \left[\frac{i}{\hbar} S_{\text{eff.}}(\xi, \dot{\xi}; q_c) \right]. \quad (1.32)$$

Isto é, $S_{\text{eff.}}$ sempre aparece na integral de caminho por meio do termo $\exp(\frac{i}{\hbar} S_{\text{eff.}})$. Para uma ação efetiva quadrática nas flutuações ξ , podemos eliminar a dependência com \hbar alterando a escala:

$$\xi^2 := \hbar \tilde{\xi}^2. \quad (1.33)$$

Logo,

$$\frac{S}{\hbar} = \frac{1}{\hbar} S^{(0)}(q_c) + S^{(2)}(\tilde{\xi}; q_c) + \sum_{n=3}^{\infty} \hbar^{(\frac{n}{2}-1)} S^{(n)}(\tilde{\xi}; q_c). \quad (1.34)$$

Percebe-se que o primeiro termo, dado simplesmente pela ação avaliada na trajetória clássica, permanece inalterado. Portanto, no limite $\hbar \rightarrow 0$, podemos expandir formalmente o peso $e^{iS/\hbar}$ da integral de caminho numa série de potências de \hbar :

$$\langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle = e^{iS_c^{(0)}/\hbar} \int_{\tilde{\xi}_i = \tilde{\xi}_f = 0} \mathcal{D}\tilde{\xi} \exp \left[iS^{(2)} + i \sum_{n=3}^{\infty} \hbar^{(n/2-1)} S^{(n)} \right]. \quad (1.35)$$

Finalmente, descobrimos que

$$\langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle = e^{iS_c^{(0)}/\hbar} Z^{(2)}(q_c) [1 + \mathcal{O}(\hbar)], \quad (1.36)$$

onde $Z^{(2)}(q_c)$ denota o resultado da integral de caminho na aproximação Gaussiana:

$$Z^{(2)}(q_c) := \int_{\tilde{\xi}_i = \tilde{\xi}_f = 0} \mathcal{D}\tilde{\xi} \exp \left[iS_{\text{eff}}^{(2)}(\tilde{\xi}, \dot{\tilde{\xi}}; q_c) \right]. \quad (1.37)$$

Lidando com o termo Gaussiano

Uma integração por parte em (1.30) releva que a ação efetiva pode ser escrita na forma

$$S_{\text{eff}} = \frac{1}{2} \int_{t_i}^{t_f} dt \tilde{\xi}(t) \hat{A} \tilde{\xi}(t), \quad (1.38)$$

onde o operador diferencial \hat{A} é definido como

$$\hat{A} := -m \frac{d^2}{dt^2} - V''(q_c). \quad (1.39)$$

Nota-se de imediato que \hat{A} possui a forma de um operador de Schrödinger unidimensional para uma partícula submetida ao potencial $-V''(q_c)$. Com isso em mente, considere um conjunto $\{\psi_n(t)\}$ completo de autofunções para \hat{A} satisfazendo às condições de contorno $\psi(t_i) = \psi(t_f) = 0$. A completude e a ortonormalidade das autofunções ψ_n significa que elas satisfazem:

$$\sum_n \psi_n^*(t) \psi_n(t') = \delta(t - t'), \quad \int_{t_i}^{t_f} dt \psi_n^*(t) \psi_m(t) = \delta_{nm}. \quad (1.40)$$

Como consequência, uma função $\tilde{\xi}(t)$ arbitrária que satisfaz $\tilde{\xi}(t_i) = \tilde{\xi}(t_f) = 0$ pode ser expandida em uma série da forma

$$\tilde{\xi}(t) = \sum_n c_n \psi_n(t). \quad (1.41)$$

Assim, a medida de integração funcional sobre as flutuações $\tilde{\xi}(t)$ é transformada no produto das medidas de integração sobre as constantes c_n . Escrevemos

$$\mathcal{D}\tilde{\xi} = \mathcal{N} \prod_n \frac{dc_n}{\sqrt{2\pi}}, \quad (1.42)$$

onde \mathcal{N} é uma constante. Usando (1.40) e (1.41), vemos que (1.38) pode ser escrita como

$$S_{\text{eff}}^{(2)} = \frac{1}{2} \sum_n c_n^2 A_n, \quad (1.43)$$

onde A_n denota o n -ésimo autovalor do operador \hat{A} . Ou seja,

$$Z^{(2)} = \int \mathcal{D}\tilde{\xi} e^{iS^{(2)}} = \mathcal{N} \prod_n \int \frac{dc_n}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{i}{2}c_n^2 A_n} = \mathcal{N}(\det \hat{A})^{-1/2}, \quad (1.44)$$

onde $\det \hat{A}$ representa o determinante formal dado pelo produto dos autovalores:

$$\det \hat{A} = \prod_n A_n. \quad (1.45)$$

Avaliando o determinante funcional no caso Euclidiano

Nosso ponto de partida é a função de partição Euclidiana

$$Z = \int \mathcal{D}q(\tau) \exp\left(-\frac{1}{2} \int_0^\beta \xi(\tau) \hat{A}_E \xi(\tau) d\tau\right), \quad (1.46)$$

onde o operador \hat{A}_E é dado por

$$\hat{A}_E = -\frac{m}{\hbar^2} \frac{d^2}{d\tau^2} + V''(q_c(\tau)). \quad (1.47)$$

Nas fórmulas acima, $q_c(\tau)$ representa a solução da equação de movimento clássica e $\xi(\tau) = q(\tau) - q_c(\tau)$ é a diferença entre uma trajetória arbitrária e a solução clássica. Como acabamos de mostrar, o cálculo da integral de caminho na aproximação quadrática apresentada acima é equivalente (a menos de um pré-fator constante) ao cálculo do determinante funcional. Nosso objetivo, portanto, é avaliar formalmente

$$\det \hat{A}_E, \quad (1.48)$$

com $\tau \in [0, \beta]$ e considerando que o operador \hat{A}_E atua no espaço de funções que satisfazem certas condições de contorno no tempo imaginário (Euclidiano). No que se segue investigaremos o caso da condição de contorno nula.

Primeiro, defina $x = \frac{\hbar}{\sqrt{m}}\tau$ de modo que $x \in [0, L]$, onde $L = \frac{\hbar\beta}{\sqrt{m}}$. Nosso interesse está no problema de autovalores para o operador de Schrödinger dado por

$$[-\partial^2 + W(x)]\psi_n(x) = \lambda_n \psi_n(x) \quad (1.49)$$

e sujeito às condições de contorno $\psi_n(0) = \psi_n(L) = 0$. Vamos assumir que o espectro do operador acima é não-degenerado. O determinante D é dado formalmente pelo produto de todos os autovalores:

$$D = \prod_n \lambda_n. \quad (1.50)$$

Para calcular o determinante vamos introduzir uma função auxiliar $\psi_\sigma(x)$, onde o rótulo σ é um número real que não necessariamente está contido no espectro. Vamos assumir as seguinte condições:

- (i) A função ψ_σ satisfaz à mesma equação de autovalores, i.e., $(-\partial^2 + W)\psi_\sigma = \lambda\psi_\sigma$;
- (ii) A função $\psi_\sigma(x)$ satisfaz $\psi_\sigma(0) = 0$ e $\partial_x\psi_\sigma(0) = 1$.

Lembrando que $\psi(0) = \psi(L) = 0$ no problema de autovalores inicial, vemos pelas condições acima que σ será um autovalor do operador de Schrödinger se, e somente se, $\psi_\sigma(L) = 0$. O determinante será então o produto de todos os σ 's determinados por esta última condição.

Considere a seguinte função de σ :

$$r(\sigma) \equiv \frac{\det(-\partial^2 + W^{(1)} - \sigma)}{\det(-\partial^2 + W^{(2)} - \sigma)}, \quad (1.51)$$

onde $W^{(1)}$ e $W^{(2)}$ são dois potenciais distintos. O seguinte teorema sobre $r(\sigma)$ será crucial para o cálculo do determinante funcional do operador \hat{A}_E .

Teorema 1.2.1 (S. Coleman). *Para todo $\sigma \in \mathbb{C}$, vale*

$$r(\sigma) = \frac{\psi_\sigma^{(1)}(L)}{\psi_\sigma^{(2)}(L)}. \quad (1.52)$$

Demonstração. Por simplicidade, denote o lado direito da equação (1.52) por $\varphi(\sigma)$. Primeiro, perceba que $r(\sigma)$ é uma função meromorfa com polos simples localizados nos autovalores do potencial $W^{(2)}$. Ademais, temos zeros nos autovalores do potencial $W^{(1)}$. Também, é fácil ver que $r(\sigma) \rightarrow 1$ quando $|\sigma| \rightarrow \infty$, exceto quando o limite é tomado ao longo do eixo real positivo, visto que os polos de $r(\sigma)$ se localizam nessa região. Isso se dá pois o termo σ no argumento dos determinantes em (1.51) domina o numerador e o denominador, de tal forma que qualquer diferença entre os potenciais $W^{(1)}$ e $W^{(2)}$ não será relevante no limite $|\sigma| \rightarrow \infty$. Agora note que $\varphi(\sigma)$ também é uma função meromorfa com os mesmos polos e zeros que $r(\sigma)$. Além disso, também vale que $\varphi(\sigma) \rightarrow 1$ quando $|\sigma| \rightarrow \infty$ (exceto sob o eixo real positivo). Ou seja, a razão $\frac{r(\sigma)}{\varphi(\sigma)}$ é uma função inteira e limitada tal que

$$\lim_{|\sigma| \rightarrow \infty} \frac{r(\sigma)}{\varphi(\sigma)} = 1.$$

Pelo teorema de Liouville, segue que $r(\sigma) = \varphi(\sigma)$ em todo o plano complexo. ■

Com o resultado acima em mãos, podemos afirmar que a razão

$$\frac{\det(-\partial^2 + W(x) - \sigma)}{\psi_\sigma(L)} \quad (1.53)$$

independe de $W(x)$. Defina uma constante \mathcal{N} tal que

$$\frac{\det[-\partial^2 + W(x)]}{\psi_0(L)} = \pi \hbar \mathcal{N}^2. \quad (1.54)$$

Portanto, vemos que o cálculo do determinante funcional para o operador de Schrödinger (com a constante de normalização da integral de caminho incluída) foi reduzido ao cálculo da função auxiliar $\psi_0(x)$ em $x = L$:

$$\mathcal{N} \det[-\partial^2 + W(x)]^{-1/2} = [\pi\hbar\psi_0(L)]^{-1/2}. \quad (1.55)$$

Como um exemplo prático, considere o caso do oscilador harmônico simples. Nesse caso $W = V'' = m\omega^2$ e o problema de determinar $\psi_0(x)$ é dado pela simples equação diferencial

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2} + m\omega^2\right)\psi_0(x) = 0 \quad (1.56)$$

com as condições iniciais $\psi_0(0) = 0$ e $\psi_0'(0) = 1$. A solução é

$$\psi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{m\omega^2}} \sinh\left(x\sqrt{m\omega^2}\right). \quad (1.57)$$

Portanto, a função de partição é

$$Z = \mathcal{N} [\det(-\partial^2 + m\omega^2)]^{-1/2} = [\pi\hbar\psi_0(L)]^{-1/2}, \quad (1.58)$$

onde $L = \hbar\beta/\sqrt{m}$. Simplificando, obtemos:

$$Z = \left[\frac{\pi\hbar}{\sqrt{m\omega^2}} \sinh(\beta\hbar\omega)\right]^{-1/2}. \quad (1.59)$$

Como um teste de consistência, podemos verificar que a função de partição acima reproduz a energia do estado fundamental. De fato,

$$E_0 = \lim_{\beta \rightarrow \infty} -\frac{1}{\beta} \log Z = \frac{\hbar\omega}{2} \quad (1.60)$$

e respiramos aliviados. Finalmente, faremos uma rotação de Wick de volta para o tempo real usando os resultados já obtidos. Em particular, vamos avaliar a amplitude de transição vácuo-vácuo após um intervalo de tempo T . O resultado é dado pela simples substituição $\beta \rightarrow \frac{iT}{\hbar}$ na fórmula (1.59). Com efeito,

$$\langle 0, T | 0, 0 \rangle = \left[\frac{i\pi\hbar}{\sqrt{m\omega^2}} \sin(\omega T)\right]^{-1/2}. \quad (1.61)$$

1.3 Teorias de campos e o método de Faddeev-Popov

A maneira apropriada de lidar com integrações funcionais em teorias de calibre, como a QCD, é por meio do método de Faddeev-Popov. Este procedimento será empregado por nós no capítulo 3, onde calcularemos a contribuição da solução de instanton para a função de correlação de dois pontos Euclidiana de uma partícula no potencial quártico.

No que se segue, apresentamos primeiro um procedimento análogo envolvendo integrais convencionais no \mathbb{R}^2 com o intuito de nos familiarizarmos com o método. Para tal, seguiremos de perto a seção 7.2 de (RYDER, 1996). Em seguida, escreveremos as fórmulas apropriadas para integrais funcionais em teorias de calibre.

O exemplo simplificado diz respeito à integral bidimensional:

$$I = \iint_{\mathbb{R}^2} dx dy e^{-(x^2+y^2)}. \quad (1.62)$$

Nota-se imediatamente que I é invariante sobre rotações dos eixos coordenados x e y . Em coordenadas polares temos

$$I = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\infty dr r e^{-r^2}. \quad (1.63)$$

Note ainda que a expressão acima pode ser reescrita na forma

$$I = \int d\theta \int dr d\theta r e^{-r^2} \delta(\theta). \quad (1.64)$$

A integral dupla acima se reduz a uma integral ordinária em uma dimensão devido ao delta de Dirac. Além disso, a integração fica restrita ao eixo real $\theta = 0$. Vamos explorar a invariância por rotações do integrando e performar a integral acima ao longo de um caminho com θ fixo e não-nulo. Lembre-se que $\theta = \arctan(y/x)$, de modo que

$$f(\theta) \equiv y \cos \theta - x \sin \theta = 0. \quad (1.65)$$

Agora nós invocamos a bem-conhecida fórmula

$$\delta(f(\theta)) = \sum_i \left| \frac{df(\theta_i)}{d\theta} \right|^{-1} \delta(\theta - \theta_i) = \frac{1}{r} [\delta(\theta - \theta_1) + \delta(\theta - \theta_2)], \quad (1.66)$$

onde θ_i denota os zeros da função $f(\theta)$, dados por

$$\theta_1 = \arctan\left(\frac{y}{x}\right), \quad \theta_2 = \pi + \arctan\left(\frac{y}{x}\right). \quad (1.67)$$

Dessa maneira, escrevemos

$$\int \delta(f(\theta)) d\theta = \frac{2}{r} \equiv [\Delta(r)]^{-1}. \quad (1.68)$$

Ou ainda,

$$\Delta(r) \int \delta(f(\theta)) d\theta = 1. \quad (1.69)$$

É evidente que $f(\theta)$ foi obtida por uma rotação rígida dos eixos cartesianos. Além disso, a coordenada r é trivialmente preservada, o que nos permite escrever

$$x' = x \cos \theta + y \sin \theta; \quad (1.70a)$$

$$y' = y \cos \theta - x \sin \theta = f(\theta). \quad (1.70b)$$

e por consequência

$$\Delta(\sqrt{x'^2 + y'^2}) \int \delta(y') d\theta = 1. \quad (1.71)$$

Uma vez que a expressão acima se reduz à unidade, vamos inseri-la na integral I :

$$I = \int d\theta \int dx' dy' e^{-(x'^2 + y'^2)} \Delta(\sqrt{x'^2 + y'^2}) \delta(y'). \quad (1.72)$$

Finalmente, podemos ainda simplificar a forma de $\Delta(r)$ na expressão acima. Com efeito,

$$\begin{aligned} [\Delta(r)]^{-1} &= \int \delta(f(\theta)) d\theta \\ &= \int \delta(f(\theta)) \det \left| \frac{\partial \theta}{\partial f} \right| df = \det \left| \frac{\partial \theta}{\partial f} \right|_{f=0}. \end{aligned} \quad (1.73)$$

Vamos generalizar o truque esboçado acima para o cálculo do funcional gerador de uma teoria de calibre com grupo de Lie compacto G . Como sempre, consideramos um campo vetorial A_μ que toma valores na álgebra de G .

Primeiro, notamos que a integração funcional em

$$Z = \int \mathcal{D}A_\mu e^{iS} \quad (1.74)$$

é feita sob todos os possíveis potenciais A_μ , incluindo aqueles relacionados entre si por meio de transformações de calibre. Uma vez que a ação é invariante sob essas transformações, esperamos que a integração se separe na forma

$$Z \sim \int \mathcal{D}\chi \int \mathcal{D}\bar{A}_\mu e^{iS}, \quad (1.75)$$

onde \bar{A}_μ denota um potencial pertencente a uma certa classe de equivalência. Cada A_μ pode ser obtido por transformações de calibre $\chi(x)$ e um potencial fixo \bar{A}_μ . Diferentes potenciais \bar{A}_μ não são relacionados por essas transformações, o que os coloca em classes de equivalência distintas. Matematicamente, os elementos de uma mesma classe constituem uma órbita do grupo de calibre.

O pré-fator $\int \mathcal{D}\chi$ é uma constante divergente que pode ser negligenciada no cálculo dos observáveis da teoria. O procedimento de Faddeev-Popov nos permitirá realizar a separação acima em Z da maneira apropriada.

Começamos lembrando algumas propriedades básicas sobre as transformações do campo A_μ . Escrevemos um elemento do grupo de calibre como $U = e^{i\Lambda_a T^a}$, onde T^a denota a representação (usualmente matricial) dos geradores de G e a soma sob o índice a vai de 1 a $\dim G$. Dizemos que U é uma transformação de calibre local quando os parâmetros $\Lambda_a(x)$ são funções do espaço-tempo. Os campos A_μ são matrizes que tomam valores na álgebra de G , ou seja, $A_\mu = T^a A_\mu^a$.

Por simplicidade, assumimos que $G = SU(N)$, de modo que na representação fundamental os geradores são matrizes hermitianas $N \times N$ e $\dim G = N^2 - 1$. Os campos de matéria serão denotados genericamente por ψ . Esses campos se acoplam com o potencial A_μ por meio de uma derivada covariante D_μ , definida por

$$D_\mu \psi = \partial_\mu \psi - ig A_\mu \psi, \quad (1.76)$$

onde g é a constante de acoplamento da teoria. A importância da derivada acima reside no fato de que, se ψ se transforma de acordo com $\psi' = U\psi$, então $D'_\mu \psi' = U D_\mu \psi$. Isto é,

$$\begin{aligned} D'_\mu \psi' &= (\partial_\mu - ig A'_\mu)(U\psi) = U D_\mu \psi \\ &= U(\partial_\mu - ig A_\mu)\psi. \end{aligned} \quad (1.77)$$

Podemos isolar A'_μ da expressão acima. Com efeito, descobre-se que

$$A'_\mu = U A_\mu U^{-1} - \frac{i}{g} (\partial_\mu U) U^{-1}. \quad (1.78)$$

Vamos denotar A'_μ por A_μ^U para reforçar o fato de que a transformação realizada se dá por meio do elemento $U \in G$. A maneira de separar as configurações em diferentes classes é por meio de condições de fixação de calibre. É absolutamente crucial que cada classe de equivalência seja contada apenas uma vez pela condição de calibre. Para a QED isso é sempre verdade, diferente das teorias não-abelianas com grupo de calibre compacto em geral. A origem do problema de contagem neste último caso, conhecido na literatura como o problema de Gribov, reside em certas obstrução topológicas (FRADKIN, 2021). Não nos preocuparemos com tais pormenores.

Escrevemos a condição de calibre como um funcional de A_μ e suas derivadas:

$$F^a[A_\mu] = 0. \quad (1.79)$$

Por exemplo, o calibre de Lorentz na QED é dado pela condição $F[A_\mu] = \partial^\mu A_\mu = 0$. Agora, em analogia com o nosso exemplo simplificado, introduzimos

$$\Delta_F^{-1}[A_\mu] = \int \mathcal{D}U \delta(F^a[A_\mu^U]). \quad (1.80)$$

Nota que o funcional de fixação de calibre está sendo avaliado no campo A_μ^U , o qual pertence a uma classe de configurações específica; aquela cujos elementos se relacionam pela transformação U . Ou seja, temos acima uma soma sob a órbita do grupo de calibre. Por construção, $\Delta_F[A_\mu]$ depende apenas da classe definida pelo funcional F . Isto é, $\Delta_F[A_\mu]$ independe do calibre. Vamos mostrar isso explicitamente. Para tal, note que a medida de integração $\mathcal{D}U$, chamada na literatura matemática de medida de Haar⁷, é invariante sob

⁷ Um tratamento detalhado pode ser consultado em (KNIGHTLY; LI, 2006), §7.

composições $U \mapsto UU' = U''$. Isso segue do fato que, para grupos de Lie compactos, o elemento de volume da variedade do grupo define uma medida de integração invariante.

Assim,

$$\Delta_F^{-1}[A_\mu^{U'}] = \int \mathcal{D}U'' \delta(F^a[A_\mu^{U''}]) = \Delta_F^{-1}[A_\mu^U], \quad (1.81)$$

o que confirma a invariância. Seguindo o procedimento, escrevemos a unidade como

$$1 = \Delta_F[A_\mu] \int \mathcal{D}U \delta(F^a[A_\mu^U]) \quad (1.82)$$

e a inserimos no funcional gerador Z para obter:

$$\begin{aligned} Z &= \int \mathcal{D}A_\mu e^{iS} \\ &= \int \mathcal{D}A_\mu \Delta_F[A_\mu] \int \mathcal{D}U \delta(F^a[A_\mu^U]) e^{iS}. \end{aligned} \quad (1.83)$$

Agora, realizamos uma transformação de calibre que leva A_μ^U em A_μ e usamos o fato que a medida de integração, a ação S e o objeto $\Delta_F[A_\mu]$ são todos invariantes. Segue que

$$Z = \int \mathcal{D}U \int \mathcal{D}A_\mu \Delta_F[A_\mu] \delta(F^a[A_\mu]) e^{iS}. \quad (1.84)$$

Logo, nota-se que foi possível “fatorar” Z em duas integrações: uma sob as órbitas de G e outra sob as classes de configurações físicas fixas pela condição de calibre. O pré-fator infinito, como antecipado, surge na expressão de Z como o resultado natural de somar sobre estados equivalentes em uma mesma classe.

Portanto, se $\Delta_F[A_\mu]$ for finito e não-nulo, a expressão apropriada para o funcional gerador de uma teoria de calibre é

$$Z = \int \mathcal{D}A_\mu \Delta_F[A_\mu] \delta(F^a[A_\mu]) e^{iS}. \quad (1.85)$$

Assim como no exemplo simplificado, uma mudança de coordenadas $U \mapsto F$ releva que $\Delta_F[A_\mu]$ é dado por um determinante:

$$\Delta_F^{-1}[A_\mu] = \int \mathcal{D}F \det \left| \frac{\delta U}{\delta F} \right| \delta(F) = \det \left| \frac{\delta U}{\delta F} \right|_{F=0}. \quad (1.86)$$

Ou seja,

$$\Delta_F[A_\mu] = \det \left| \frac{\delta F}{\delta U} \right|_{F=0} \quad (1.87)$$

e temos um determinante funcional (não-trivial) a ser avaliado.

2 | Topologia e álgebra

(...) geometry is the art of reasoning well from badly drawn figures; however, these figures, if they are not to deceive us, must satisfy certain conditions; the proportions may be grossly altered, but the relative positions of the different parts must not be upset.

— Henri Poincaré, *Analysis Situs* (1895)

O propósito desse capítulo é introduzir a terminologia e os resultados básicos da topologia algébrica que serão usados nos capítulos seguintes para classificar as soluções das equações de campo que estudaremos. Em particular, nosso foco será no significado e nas propriedades essenciais do grupo fundamental $\pi_1(X)$ de um espaço topológico X , bem como os grupos de homotopia de ordem superior. De especial interesse é o caso em que X é um dos grupos de Lie clássicos, o que exige também uma discussão adicional sobre os espaços de recobrimentos desses grupos.

2.1 Grupos de homotopia

Intuitivamente falando, a topologia se ocupa em ampla medida com o estudo de espaços que podem ser deformados continuamente uns nos outros. A noção fundamental de *homeomorfismo* — uma bijeção contínua com inversa contínua — nos permite catalogar espaços topológicos em classes de equivalência distintas. Dois espaços pertencem a uma mesma classe de equivalência se eles forem homeomorfos.

O próximo passo no esquema de classificação dos espaços topológicos é construir um arsenal matemático robusto o suficiente para que cada uma dessas classes de equivalência seja caracterizada de forma satisfatória. Após a construção desse aparato, almeja-se dispor de um número considerável de *invariantes* topológicos, i.e., objetos que não se alteram sob homeomorfismos.

Boa parte dos invariantes mais famosos e com um amplo leque de aplicações provém da topologia algébrica, onde novas estruturas matemáticas como os grupos de homotopia e homologia são introduzidos para estudar precisamente a classificação dos espaços topológicos (mas não somente isso, certamente). Um conceito básico nesse ramo da topologia

é aquele de homotopia, o qual é motivado pela noção intuitiva de deformações de curvas em um certo espaço.

Definição 2.1.1 (Laço). *Um laço (ou caminho fechado) no ponto x_0 em um espaço topológico X é um mapa contínuo $\alpha(t): [0, 1] \rightarrow X$ para o qual $\alpha(0) = \alpha(1) = x_0$.*

É possível ainda compor dois laços baseados no mesmo ponto de maneira natural. O que a próxima definição nos diz é que basta percorrer ambos os laços consecutivamente com o dobro da “velocidade” em cada volta.

Definição 2.1.2 (Produto de laços). *Definimos o produto $\gamma = \alpha * \beta$ de dois laços α e β no ponto $x_0 \in X$ como*

$$\gamma(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & \text{para } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \beta(2t - 1) & \text{para } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} \quad (2.1)$$

É extremamente sugestivo considerar dois laços baseados no mesmo ponto como equivalentes quando um deles pode ser obtido por deformações contínuas do outro. É com essa intuição em mente que definimos o conceito de homotopia de laços.

Definição 2.1.3 (Homotopia). *Dois laços α e β no ponto x_0 são ditos homotópicos (escreve-se $\alpha \simeq \beta$) se existe um mapa contínuo $H: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ que satisfaz*

$$\begin{aligned} H(t, 0) &= \alpha(t), & 0 \leq t \leq 1 \\ H(t, 1) &= \beta(t), & 0 \leq t \leq 1 \\ H(0, s) &= H(1, s) = x_0, & 0 \leq s \leq 1. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Dizemos que H é uma homotopia entre os laços α e β .

Note que variando o parâmetro s da homotopia $H(t, s)$ nós obtemos uma família de laços que interpolam α e β .

Não é difícil se convencer de que a noção de homotopia de laços naturalmente nos leva a uma classificação desses objetos em diferentes classes de equivalência¹. Ou seja, o espaço de todos os laços pode ser particionado em classes disjuntas, onde todos os membros de uma certa classe são homotópicos entre si. Vamos denotar por $[\alpha]$ a classe de equivalência de laços homotópicos a α .

Definição 2.1.4 (Grupo fundamental). *Denotamos por $\pi_1(X, x)$ o conjunto de todas as classes de homotopias de laços no ponto $x_0 \in X$. Este conjunto se torna um grupo quando munido da operação binária*

$$[\alpha] \cdot [\beta] = [\alpha * \beta]. \quad (2.3)$$

Chamamos $\pi_1(X, x)$ de grupo fundamental do espaço X no ponto x_0 .

¹ Esse é o conteúdo do lema da página 55 em (NASH; SEN, 1988).

Teorema 2.1.1. *O grupo fundamental do círculo S^1 é isomorfo ao grupo dos inteiros \mathbb{Z} sob adição. Isto é,*

$$\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}. \quad (2.4)$$

Por brevidade, a demonstração precisa desse teorema será omitida e indicamos que o leitor consulte (NAKAHARA, 2018), §4.3. Note também que não fizemos referência a um ponto base de S^1 . Isso se deve pois o grupo fundamental de um espaço topológico conexo por caminhos depende, a menos de isomorfismos, apenas do espaço X (NASH; SEN, 1988).

Os análogos do grupo fundamental em dimensão mais alta são chamados de grupos de homotopia superiores. As definições básicas são generalizadas de forma natural.

Definição 2.1.5 (*n*-laço). *Seja I_n o cubo unitário no espaço Euclidiano \mathbb{R}^n . Se α for um mapa contínuo $\alpha: I_n \rightarrow X$ tal que a fronteira ∂I_n do cubo é mapeada em um único ponto $x_0 \in X$, então α é um *n*-laço em X baseado no ponto x_0 .*

Assim, representamos um *n*-laço por uma função $\alpha(t_1, \dots, t_n)$ tal que para um ponto do cubo I_n nós temos $0 < t_i < 1$ para todo $i = 1, \dots, n$. Se $t_i = 0$ ou $t_i = 1$ para todo i , então $\alpha(t_1, \dots, t_n) = x_0$.

O *n*-laço que leva I_n em x_0 é chamado de mapa constante e denotado por e . Assim, $e: I_n \rightarrow x_0$. Além disso, o inverso de um *n*-laço α , denotado por α^{-1} , é definido como

$$\alpha^{-1}(t_1, t_2, \dots, t_n) = \alpha(1 - t_1, t_2, \dots, t_n). \quad (2.5)$$

Definição 2.1.6 (Produto de *n*-laços). *Sejam α e β *n*-laços em $x_0 \in X$. O produto $\gamma = \alpha * \beta$ é o *n*-laço em $x_0 \in X$ definido por*

$$\gamma(t_1, \dots, t_n) = \begin{cases} \alpha(2t_1, t_2, \dots, t_n) & \text{para } 0 \leq t_1 \leq \frac{1}{2} \\ \beta(2t_1 - 1, t_2, \dots, t_n) & \text{para } \frac{1}{2} \leq t_1 \leq 1 \end{cases} \quad (2.6)$$

Definição 2.1.7 (Homotopia entre *n*-laços). *Dois *n*-laços α e β baseados em x_0 são ditos homotópicos se existe um mapa contínuo $H(s; t_1, \dots, t_n)$, com $0 \leq s \leq 1$, tal que*

$$\begin{aligned} H(0; t_1, \dots, t_n) &= \alpha(t_1, \dots, t_n), \\ H(1; t_1, \dots, t_n) &= \beta(t_1, \dots, t_n), \\ H(s; t_1, \dots, t_n) &= x_0, \quad \text{se } (t_1, \dots, t_n) \in \partial I_n \quad \forall s. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Novamente, a noção de homotopia induz uma relação de equivalência no conjunto de *n*-laços de um espaço topológico X , de modo que é possível realizar uma partição X em classes disjuntas, onde os membros de uma certa classe representativa são todos homotópicos entre si. Como antes, denotamos por $[\alpha]$ a classe de equivalência de *n*-laços homotópicos ao *n*-laço α .

Definição 2.1.8 (Grupo de homotopia superiores). *Definimos o n -ésimo grupo de homotopia $\pi_n(X, x_0)$ como o grupo formado pelas classes de equivalência de n -laços $[\alpha]$ baseados em x_0 munidas do produto $[\alpha] \cdot [\beta] = [\alpha * \beta]$.*

Em contraste com o grupo fundamental $\pi_1(X, x_0)$, todos os grupos superiores $\pi_n(X, x_0)$, para $n > 1$, são abelianos (NASH; SEN, 1988).

Outros teoremas são passíveis de uma generalização imediata para o caso dos grupos superiores. Por exemplo, se X é conexo por caminhos, então $\pi_n(X, x_0)$ e $\pi_n(X, x_1)$ são isomorfos para todo n . Novamente, esse isomorfismo não é natural e depende do caminho escolhido para unir os pontos x_0 e x_1 . No caso desses espaços, portanto, podemos omitir o ponto base ao discutir seus grupos de homotopia sem perda de generalidade. Além disso, se X for contrátil por uma homotopia que deixa x_0 fixo, então $\pi_n(X, x_0) = \{0\}$ para todo n .

Em geral, não há algoritmo para determinar $\pi_n(X, x_0)$ para n par, nem mesmo quando X é um espaço triangulável. Contudo, existe uma ferramenta útil para o cálculo desses grupos chamada de *sequência de homotopia exata*. Para discutir essa sequência, precisamos introduzir a noção de grupos de homotopia relativos, algo que não faremos aqui por brevidade.

Os corolários do seguinte teorema, cuja demonstração faz uso da sequência de homotopia exata, serão de particular interesse para nós no capítulo 4, onde discutiremos as soluções de instantons em modelos quirais.

Teorema 2.1.2. *Existe um homomorfismo entre $\pi_k(S^n)$ e $\pi_{k+1}(S^{n+1})$ para $k < 2n - 1$. Quando $k < 2n - 1$, esse homomorfismo é um isomorfismo, enquanto que no caso $k = 2n - 1$, o homomorfismo é sobrejetivo.*

Corolário 2.1.2.1. *Se $k < n$, então $\pi_k(S^n) = \{0\}$, uma vez que $\pi_1(S^n) = \{0\}$ para todo $p > 1$.*

Corolário 2.1.2.2. *Se $k = n$, então $\pi_k(S^n) = \pi_2(S^2) = \mathbb{Z}$.*

2.2 Espaços quocientes, grupos de Lie e variedades de vácuo

Nos próximos capítulos nós usaremos alguns resultados básicos acerca dos grupos de homotopia de espaços quocientes envolvendo grupos de Lie clássicos. Para iniciar nossa discussão sobre esse tema, vamos primeiro apresentar alguns conceitos preliminares que serão úteis.

Definição 2.2.1 (Ação de um grupo de Lie). *Seja G um grupo de Lie e M uma variedade. A ação de G em M é um mapa diferenciável $\sigma: G \times M \rightarrow M$ que satisfaz às condições:*

- (i) $\sigma(e, p) = p$, para todo $p \in M$;
- (ii) $\sigma(g_1, \sigma(g_2, p)) = \sigma(g_1 g_2, p)$.

Por simplicidade, é comum usar a notação $\sigma(g, p) \equiv gp$. Com essa escolha, a segunda condição acima, por exemplo, fica escrita como $g_1(g_2 p) = (g_1 g_2)p$.

Definição 2.2.2 (Ações transitivas, livres e efetivas). *Seja G um grupo de Lie que atua sobre M por $\sigma: G \times M \rightarrow M$. A ação σ é dita*

- (i) *transitiva, se para todo $p_1, p_2 \in M$, existe um elemento $g \in G$ tal que $\sigma(g, p_1) = p_2$;*
- (ii) *livre, se todo elemento não-trivial $g \neq e$ de G não possui pontos fixos em M . Isto é, se existe um elemento $p \in M$ $\sigma(g, p) = p$, então $g = e$;*
- (iii) *efetiva, se o elemento identidade $e \in G$ é o único elemento que define uma ação trivial em M , isto é, se $\sigma(g, p) = p$ para todo $p \in M$, então $g = e$.*

Dado um ponto $p \in M$, a ação de um grupo G em p leva este ponto a vários outros pontos em M . O conjunto de todos os pontos que podem ser mapeados por σ atuando em p é definido como a órbita de p .

Definição 2.2.3 (Órbita). *A órbita de $p \in M$ sobre a ação σ é definida como o subconjunto*

$$Gp := \{\sigma(g, p) \mid g \in G\}. \quad (2.8)$$

Se a ação de G é transitiva, então a órbita de qualquer ponto $p \in M$ é a própria variedade M . Além disso, pela propriedade (ii) da definição 2.2.1, é evidente que a ação de G em qualquer órbita Gp é transitiva.

Definição 2.2.4 (Estabilizador). *Seja G um grupo de Lie que age em uma variedade M por σ . O estabilizador (ou grupo de isotropia) de $p \in M$ é o subgrupo de G definido por*

$$H(p) := \{g \in G \mid \sigma(g, p) = p\}. \quad (2.9)$$

É fácil ver que o estabilizador de p é de fato um subgrupo. Primeiro, $e \in H(p)$ trivialmente. Ademais, se $g_1, g_2 \in H(p)$, então

$$\sigma(g_1 g_2, p) = \sigma(g_1, \sigma(g_2, p)) = \sigma(g_1, p) = p. \quad (2.10)$$

Por fim, se $g \in H(p)$, então $g^{-1} \in H(p)$ pois

$$p = \sigma(e, p) = \sigma(g^{-1} g, p) = \sigma(g^{-1}, \sigma(g, p)) = \sigma(g^{-1}, p). \quad (2.11)$$

Teorema 2.2.1. *Seja G um grupo de Lie que age em uma variedade M . Então, para todo $p \in M$, o estabilizador $H(p)$ é um subgrupo de Lie.*

Demonstração. Para $p \in M$ fixo, definimos o mapa $\varphi_p: G \rightarrow M$ por $\varphi_p(g) := \sigma(g, p)$. Então, $H(p)$ é a pré-imagem φ_p^{-1} de um ponto p . Segue que $H(p)$ é um conjunto fechado². Já mostramos que $H(p)$ satisfaz às propriedades de um subgrupo. Uma vez que todo subgrupo fechado de um grupo de Lie é um subgrupo de Lie, a demonstração está completa. ■

Como um exemplo, considere $M = \mathbb{R}^3$, $G = SO(3)$ e fixe um ponto $p = (0, 0, 1) \in \mathbb{R}^3$. Nesse caso, o estabilizador $H(p)$ é o conjunto de rotações em torno do eixo z , que é isomorfo ao $SO(2)$.

Vamos agora discutir espaços quocientes. Seja G um grupo de Lie e H um subgrupo qualquer de G . O quociente G/H admite uma estrutura diferenciável, i.e., G/H é uma variedade, a qual chamamos de *espaço homogêneo*. Note ainda que $\dim G/H = \dim G - \dim H$.

Seja G um grupo de Lie que age transitivamente sobre uma variedade M e seja $H(p)$ o estabilizador de $p \in M$. Sabemos que $H(p)$ é um subgrupo de Lie. Além disso, $G/H(p)$ é um espaço homogêneo. Se assumirmos condições adicionais sobre G , $H(p)$ e M , como a compacidade de $G/H(p)$, então podemos provar que $G/H(p)$ é homeomorfo a M . O próximo teorema, cuja demonstração será informal, ilustra um exemplo dessa situação.

Teorema 2.2.2. *Seja $G = SO(3)$ o grupo que atua sobre \mathbb{R}^3 e $H = SO(2)$ o estabilizador de $x \in \mathbb{R}^3$. Então,*

$$SO(3)/SO(2) \cong S^2. \quad (2.12)$$

Demonstração. Sabemos que $SO(3)$ atua transitivamente sobre S^2 . Considere $g' = gh$, onde $g', g \in G$ e $h \in H$. Uma vez que H descreve rotações em um plano, g e g' devem ser rotações sobre um mesmo eixo. Assim, a classe de equivalência $[g]$ é especificada por um par de ângulos polares (θ, ϕ) , como de costume. Portanto, temos que $G/H \cong S^2$. ■

Note, entretanto, que S^2 não admite uma estrutura de grupo, uma vez que $SO(2)$ não é um subgrupo normal de $SO(3)$. O homeomorfismo acima pode ser generalizado, de modo que

$$SO(n+1)/SO(n) = S^n. \quad (2.13)$$

Relações semelhantes também se verificam no caso dos grupos especiais unitários:

$$SU(n+1)/SU(n) = S^{2n+1}. \quad (2.14)$$

Vamos comentar agora sobre a conexão entre a matemática que acabamos de apresentar e a física que será estudada na segunda parte dessa monografia.

² Lembre-se que, se X é um espaço topológico Hausdorff, então todo conjunto unitário $\{x\}$, com $x \in X$, é fechado.

Nos próximos capítulos, estudaremos teorias de campos que admitem certas soluções especiais das equações de movimento clássicas. Como um exemplo de situação típica, podemos imaginar uma teoria com n campos escalares que podem ser coletados em um vetor ϕ com n componentes e uma lagrangiana que contém um potencial $V(\phi)$. Vamos assumir que $V(\phi)$ possui uma família de mínimos degenerados (i.e., com a mesma energia) que constituem uma variedade \mathcal{M} .

Um caso de interesse envolve uma degenerescência que resulta da quebra espontânea de simetria³ de um grupo G a um subgrupo H pela escolha do valor esperado do vácuo de ϕ .

Dado um valor de ϕ , a ação de um elemento $g \in G$ mapeia ϕ em $D(g)\phi$, onde $D(g)$ é uma representação n -dimensional (usualmente matricial) de g . Se ϕ_0 for uma configuração que minimiza V , então $D(g)\phi_0$ também minimiza V , para qualquer $g \in G$. Ademais, pela hipótese de que a degenerescência é resultado único e exclusivo do grupo de simetria G , sabemos que todos os mínimos de V são da forma $D(g)\phi_0$.

Se a simetria inicial do grupo G for quebrada completamente, então nós temos um mapeamento um a um entre elementos de G e os mínimos do potencial. Dizemos que a *variedade de vácuo* \mathcal{M} da teoria é precisamente o grupo de simetria G , usualmente um grupo de Lie⁴.

A situação muda de figura se a simetria inicial não for quebrada completamente. Nesse caso, resta ainda um subgrupo H que pode ser definido pela condição que a ação de seus elementos em ϕ_0 deixa as configurações minimizantes invariantes. Isto é, $D(h)\phi_0 = \phi_0$ para todo $h \in H$. Ou seja, gh e h possuem o mesmo efeito em ϕ_0 : $D(gh)\phi_0 = D(g)\phi_0$. Podemos então definir classes de equivalência de elementos de G definindo dois elementos g e g' como equivalentes quando $g' = gh$, para algum $h \in H$. Isso define um elemento da classe lateral à direita de H . Se H for um subgrupo normal de G , então o conjunto de suas classes laterais possui a estrutura de um grupo, chamado de grupo quociente G/H . Portanto,

$$\mathcal{M} = G/H. \quad (2.15)$$

A moral da história é que nós podemos utilizar ferramentas algébricas como os grupos de homotopia para caracterizar essas diferentes variedades de vácuo. Conforme mencionamos acima, estamos particularmente interessados no caso em que G e H são grupos de Lie. Nessa situação é fundamental distinguir os grupos fundamentais dos grupos de Lie que compartilham a mesma álgebra de Lie.

³ Certamente, mínimos degenerados de potenciais podem ser obtidos de outras formas além da quebra espontânea de simetria de algum grupo, mas esse é a situação que nos interessa aqui.

⁴ Lembre-se que grupos de Lie são variedades diferenciáveis por definição.

Parte II

Soluções topológicas: sólitons, vórtices e instantons

3 | Tunelamento e sólitons

Such, in the month of August 1834, was my first chance interview with that singular and beautiful phenomenon which I have called the Wave of Translation.

— John Scott Russell, *Report on Waves: Made to the Meetings of the British Association in 1842-43*

O triunfo dos métodos perturbativos nas teorias quânticas de campos, especialmente na eletrodinâmica quântica com as suas excepcionais verificações experimentais, é irrevogável. Contudo, na medida em que a QCD foi se desenvolvendo e foi sendo estudada mais à fundo, logo se percebeu a ineficácia desses métodos para avaliar o seu regime de baixas energias¹. De fato, existem aspectos importantes das teorias de campos, e notavelmente, das teorias de calibre como a teoria de Yang-Mills, que passam despercebidos do tratamento convencional baseado em séries perturbativas, inclusive no regime de acoplamento fraco.

Podemos entender essa situação de maneira simples a partir de um argumento heurístico devido a S. Coleman (COLEMAN, 1988), cujo papel também será o de nos guiar em direção ao assunto central da seção 3.1. O problema em questão se refere ao tunelamento de uma única partícula de massa $m = 1$ na mecânica quântica não-relativística. Considere o potencial

$$V(x; g) = \frac{1}{g^2} F(gx), \quad (3.1)$$

onde g representa a constante de acoplamento e F denota uma função genérica cuja série de Taylor começa no termo de ordem x^2 . O que ocorre se investigarmos o fenômeno de transmissão por uma barreira de potencial? Pela aproximação WKB (DAVYDOV, 1965), a probabilidade de transmissão é dada por:

$$T(E) = \exp\left(-\frac{2}{\hbar} \int_{x_1}^{x_2} dx \sqrt{2(V-E)}\right) [1 + \mathcal{O}(\hbar)], \quad (3.2)$$

onde E é a energia da partícula e os limites de integração x_1 e x_2 são os pontos de retorno clássicos, determinados pela condição $V = E$. Apesar dessa ser uma aproximação semiclássica, nota-se facilmente que o efeito de tunelamento é indetectável pela teoria de

¹ O acoplamento da QCD se torna forte no limite de baixas energias.

perturbações. Isso ocorre pois, no limite $\hbar \rightarrow 0$, a exponencial em (3.2) suprime $T(E)$ mais rápido do que qualquer potência de \hbar , e por consequência, qualquer potência de g^2 .

Na TQC há fenômenos análogos ao tunelamento cujo tratamento apropriado exige o uso dos métodos que serão esboçados neste capítulo. Como um exemplo prototípico para a dita solução de instanton, iremos investigar na seção 3.1 o tunelamento quântico de uma partícula no potencial quártico com o método semiclássico.

A existência de soluções não-triviais para as equações clássicas, como os instantons e os sólitons, é uma característica genérica das teorias regidas por equações não-lineares. Os sólitons são soluções estendidas que descrevem configurações estáveis dos campos e com energia bem definida. Com efeito, a citação que abre o capítulo faz referência ao primeiro relato documentado da observação de uma onda solitônica na situação de uma onda nas águas de um canal inglês. A equação que rege o fenômeno narrado por John S. Russell é uma famosa EDP não-linear: a equação de Korteweg-De Vries (KdV).

Notavelmente, os sólitons e instantons são objetos topológicos. O significado dessa afirmação se tornará mais transparente ao longo do texto. Por enquanto nos contentaremos em dizer que a estabilidade dessas soluções é consequência direta de certas condições de contorno, as quais impõem uma classificação puramente topológica para as soluções em termos de certos mapas que não podem ser deformados uns nos outros (RYDER, 1996). É nesse contexto que se faz necessário o ferramental da topologia algébrica, com destaque para os grupos de homotopia.

Claro, não devemos nos esquecer que o grande interesse no estudo das soluções topológicas é investigar essas soluções clássicas não-triviais inseridas nas teorias quânticas de campos e avaliar a dinâmica deste casamento. De maneira mais ambiciosa, almeja-se obter por meio das soluções topológicas clássicas um novo caminho para estudar algumas das propriedades fundamentais das teorias de calibre, e descobrir outras novas, com sorte. Duas das principais perguntas de interesse imediato são (WEINBERG, 2012):

- (i) Até que ponto a forma explícita da solução clássica é relevante na teoria quântica?;
- (ii) Como a existência da solução solitônica clássica se reflete nos estados da teoria quântica?

Não temos a intenção de responder a essas perguntas de forma exaustiva nessa monografia. Entretanto, discussões que caminham em direção a possíveis respostas às perguntas acima em situações específicas serão realizadas ao longo dos próximos capítulos. De qualquer

² Na teoria quântica, o limite $\hbar \rightarrow 0$ se confunde com o limite $g \rightarrow 0$. Para ver isso, note que sempre podemos definir $\phi' = g\phi$ sem alterar as equações de movimento. Assim, a lagrangiana do campo escalar com interação $g^2\phi^4$, por exemplo, é escrita como $\mathcal{L} = \mathcal{L}'/g^2$. Uma vez que o objeto relevante para a integral de caminho é $\mathcal{L}/\hbar = \mathcal{L}'/g^2\hbar$, verifica-se a equivalência entre os limites supracitados.

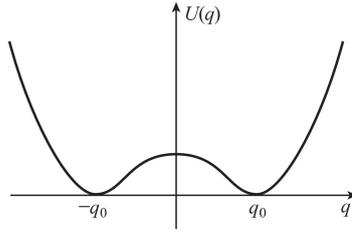


Figura 1 – Potencial quártico $U(q) = \frac{\lambda}{4} \left(\frac{\mu^2}{\lambda} - q^2 \right)^2$ de um oscilador anarmônico. Adaptado de (FRADKIN, 2021).

maneira, vale a pena mencionar de imediato alguns exemplos de fenômenos em que as soluções topológicas possuem influência direta nas teorias quânticas de campos:

- (i) A interação entre os instantons de Yang-Mills e uma teoria com férmions tem consequências para o fenômeno da anomalia quiral. De fato, ocorre que os instantons constituem um ingrediente essencial da solução de 't Hooft para o chamado “problema U(1)” (COLEMAN, 1988). Curiosamente, eles também trazem consigo um problema ainda em aberto: o *strong CP problem* (WEINBERG, 2012);
- (ii) Efeitos de instantons são responsáveis por algo parecido com o confinamento dos quarks no modelo de Higgs abeliano bidimensional. Infelizmente, o argumento não se estende para a QCD em quatro dimensões (COLEMAN, 1988).

Vamos partir agora para a nossa primeira solução de instanton. No que se segue, adotamos unidades naturais em que $\hbar = k_b = 1$, exceto quando for conveniente explicitar essas constantes.

3.1 Instantons na mecânica quântica: o potencial quártico

Como antes, considere uma partícula de massa $m = 1$ na presença de um potencial $U(q)$. A lagrangiana toma a forma

$$L = \frac{1}{2} \left(\frac{dq}{dt} \right)^2 - U(q). \quad (3.3)$$

Nosso interesse está no potencial quártico que descreve um oscilador anarmônico:

$$U(q) = -\frac{\mu^2}{2}q^2 + \frac{\lambda}{4}q^4 = \frac{\lambda}{4} \left(\frac{\mu^2}{\lambda} - q^2 \right)^2 - \frac{\mu^2}{4\lambda}, \quad (3.4)$$

onde λ é uma constante pequena de modo que $\lambda \ll \mu^2$. A forma de $U(q)$ está ilustrada na figura 1. Esse potencial possui um máximo local na origem $q = 0$ e dois mínimos locais nos pontos $\pm q_0 = \pm \sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}}$.

Note que o sinal negativo no termo quadrático $-\frac{\mu^2}{2}q^2$ da lagrangiana degenera o estado de energia mais baixa, i.e., o “estado de vácuo”, em duas configurações distintas. A transformação $q \mapsto -q$, uma simetria do caso em que o termo quadrático é positivo, deixa de ser uma simetria para o vácuo do sistema que estamos considerando. No nível clássico, dizemos que há uma *quebra espontânea de simetria*. Veremos que essa simetria será reestabelecida no regime quântico por fenômenos de tunelamento mediados pela solução de instanton³.

De fato, sabemos que a mecânica quântica do vácuo desse sistema é descrita por uma função de onda par, e portanto, não-degenerada. Em outras palavras, ψ deve exibir a restauração da simetria, cuja origem se deve ao simples fato que uma partícula posta em um dos poços pode (com probabilidade finita) tunelar para o outro poço. Para tempos suficientemente grandes esperamos encontrar a partícula em qualquer um dos poços (POLYAKOV, 1987).

3.1.1 A solução de instanton

Neste momento estamos em condições de introduzir a solução de instanton. Considere a seguinte função de correlação (temporalmente ordenada) de dois pontos no tempo Euclidiano:

$$\langle \hat{q}(0)\hat{q}(\tau) \rangle \equiv \langle 0|T\{\hat{q}(0)\hat{q}(\tau)\}|0 \rangle. \quad (3.5)$$

Podemos reescrever a função acima com o mesmo truque usado anteriormente para escrever o propagador. Denotando $\hat{q}(0) = \hat{q}$ e lembrando que $\hat{q}(t) = e^{i\hat{H}t}\hat{q}e^{-i\hat{H}t}$ na representação de Heisenberg, obtemos:

$$\begin{aligned} \langle \hat{q}(0)\hat{q}(\tau) \rangle &= \langle 0|e^{\hat{H}\tau}\hat{q}e^{-\hat{H}\tau}\hat{q}|0 \rangle \\ &= \sum_{n,m} e^{E_0\tau} \langle 0|\hat{q}|n \rangle \langle n|e^{-\hat{H}\tau}|m \rangle \langle m|\hat{q}|0 \rangle. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Portanto:

$$\langle \hat{q}(0)\hat{q}(\tau) \rangle = \sum_n |\langle 0|\hat{q}|n \rangle|^2 e^{-(E_n - E_0)\tau}. \quad (3.7)$$

No limite $\tau \rightarrow \infty$ os primeiros termos da soma acima dominam e o correlator decai como

$$\langle q(0)q(\tau) \rangle \sim \exp(-\tau\Delta E), \quad (3.8)$$

onde ΔE representa a separação entre os estados de energia mais baixa, cada qual referente a um poço de potencial. Com ajuda das integrais de caminho, podemos obter o correlator

³ O termo instanton foi cunhado por G. 't Hooft, de acordo com Polyakov (POLYAKOV, 1977).

acima pela fórmula:

$$\langle q(0)q(\tau) \rangle = \frac{\int \mathcal{D}q(\tau) q(0)q(\tau) e^{-\mathcal{E}[q]}}{\int \mathcal{D}q(\tau) e^{-\mathcal{E}[q]}}. \quad (3.9)$$

A função de partição agora é dada por

$$Z \equiv \int \mathcal{D}q(\tau) e^{-\mathcal{E}[q]}, \quad (3.10)$$

onde $\mathcal{E}[q]$ é a ação Euclidiana do sistema:

$$\mathcal{E}[q] = \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \left[\frac{1}{2} \left(\frac{dq}{d\tau} \right)^2 - \frac{\mu^2}{2} q^2 + \frac{\lambda}{4} q^4 \right]. \quad (3.11)$$

Primeiro, vamos investigar os extremos da ação impondo a condição $\delta\mathcal{E}[\bar{q}] = 0$. Como resultado, a equação de Euler-Lagrange nos fornece

$$\frac{d^2\bar{q}}{d\tau^2} = -\mu^2\bar{q} + \lambda\bar{q}^3 \equiv -\frac{d}{d\bar{q}} V(\bar{q}). \quad (3.12)$$

Note que essas são as equações de movimento clássicas para o potencial $V(q) = -U(q)$ (veja a figura 2a).

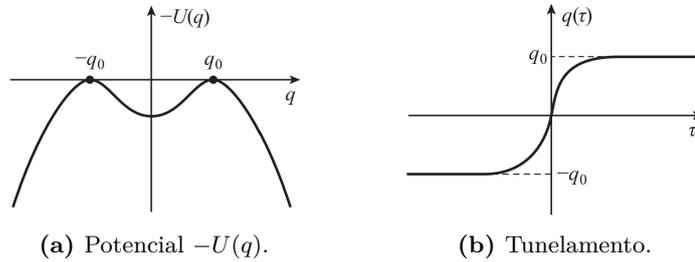


Figura 2 – O potencial $-U(q)$ presente na equação de movimento Euclidiana e a solução de tunelamento $\bar{q}(\tau)$. Adaptado de (FRADKIN, 2021).

As soluções estáticas da equação (3.12) são dadas pelas configurações do estado de vácuo $\bar{q}(\tau) = \pm q_0$. Para obter uma solução não-trivial note que o sistema admite uma constante de movimento E :

$$E = \frac{1}{2} \left(\frac{d\bar{q}}{d\tau} \right)^2 + V(\bar{q}) = \frac{1}{2} \left(\frac{d\bar{q}}{d\tau} \right)^2 - U(\bar{q}). \quad (3.13)$$

Vamos absorver o termo constante do potencial (3.4) na definição da constante de movimento acima. Impondo $E = 0$, encontramos:

$$\tau - a = \pm \sqrt{\frac{2}{\lambda}} \int \frac{d\bar{q}}{\left(\frac{\mu^2}{\lambda} - \bar{q}^2 \right)}, \quad (3.14)$$

onde a é uma constante. A integral acima é imediata e nos fornece a solução:

$$\bar{q}(\tau) = \pm \sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}} \tanh \left[\frac{\mu(\tau - a)}{\sqrt{2}} \right], \quad (3.15)$$

A expressão acima para $\bar{q}(\tau)$ representa o processo de tunelamento. Com efeito, na medida em que τ vai para $\pm\infty$, a solução interpola as configurações estáticas $\pm q_0$, como esperado. A inserção de $\bar{q}(\tau)$ na ação Euclidiana resulta em:

$$\mathcal{E}[\bar{q}(\tau)] = \frac{\mu^3}{\lambda\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\cosh^4 x} = \frac{(2\sqrt{2})\mu^3}{3\lambda}. \quad (3.16)$$

Chamamos genericamente essas soluções com ação Euclidiana finita de instantons. Nosso objetivo agora é calcular o correlator (3.9) por meio de uma aproximação semiclássica. Para tal, se faz necessário avaliar a contribuição de cada solução de instanton encontrada⁴ para a integral de caminho. O resultado final é dado pela soma de todas as contribuições individuais calculadas separadamente para o numerador e o denominador de (3.9). Veremos que será necessário introduzir processos de multi-instantons para garantir resultados coerentes para tempos grandes $\tau \rightarrow \infty$.

3.1.2 Cálculo da função de correlação e multi-instantons

Vamos nos lembrar brevemente do procedimento usual para o cálculo da contribuição quadrática da função de partição⁵. Definimos a função $\xi(\tau)$ como a diferença entre uma trajetória arbitrária e a trajetória clássica:

$$\xi(\tau) = q(\tau) - \bar{q}_c(\tau) = \sum_n c_n \psi_n(\tau), \quad (3.17)$$

onde as funções $\psi_n(\tau)$ presentes na expansão acima são parte do conjunto completo e ortonormal de autofunções do operador

$$\hat{A} = -\frac{d^2}{d\tau^2} - \mu^2 + 3\lambda\bar{q}_c^2(\tau) = \int d\tau' \frac{\delta^2 \mathcal{E}}{\delta q(\tau)\delta q(\tau')} \Big|_{q=\bar{q}_c}. \quad (3.18)$$

que surge na aproximação Gaussiana do termo $\exp(-S[q])$ na integral de caminho. O problema de autovalores do operador \hat{A} é

$$\left[-\frac{d^2}{d\tau^2} - \mu^2 + 3\lambda\bar{q}_c^2(\tau) \right] \psi_n(\tau) = \omega_n^2 \psi_n(\tau), \quad (3.19)$$

onde o conjunto $\{\omega_n^2\}$ é o espectro. As autofunções obedecem à condição de contorno $\psi_n(\pm\infty) = 0$. Se todos os autovalores ω_n^2 são positivos, então podemos prosseguir com o cálculo seguindo o procedimento apresentado no capítulo 1. A condição $\omega_n^2 > 0$ pode ser entendida de outra maneira, a saber, como um critério de estabilidade da solução clássica em questão. A motivação para exigir a estabilidade reside na exigência que o estado quântico correspondente também seja estável (JACKIW, 1977).

⁴ Lembre-se que temos uma família de soluções, cada qual determinada pelo valor da constante a .

⁵ Consulte o primeiro capítulo para mais detalhes.

Contudo, há um fato crucial que deve ser levado em consideração. Apesar do espectro ser não-negativo, conforme nossa análise no apêndice A, existe um autovalor nulo para o operador em questão, e isto nos impede de avançar com o procedimento usual⁶.

A origem desse modo nulo (do inglês, *zero mode*) é simples de entender. Embora a ação (3.16) seja invariante sob translações temporais, a solução de instanton não apresenta essa característica, em virtude da presença do parâmetro a . De fato

$$\frac{\partial \mathcal{E}[\bar{q}_c(\tau)]}{\partial a} = 0, \quad (3.20)$$

e portanto:

$$\frac{\delta}{\delta \bar{q}_c(\tau)} \frac{\partial \mathcal{E}[\bar{q}_c(\tau)]}{\partial a} = 0. \quad (3.21)$$

Reescrevendo a expressão acima usando a regra da cadeia, obtemos

$$\frac{\delta^2 \mathcal{E}}{\delta \bar{q}_c(\tau) \delta \bar{q}_c(\tau')} \frac{d\bar{q}_c(\tau)}{da} = 0, \quad (3.22)$$

e concluímos que o problema (3.19) admite um modo nulo determinado por:

$$\psi_0(\tau) \equiv \frac{d\bar{q}_c(\tau)}{da}. \quad (3.23)$$

Os modos nulos possuem um significado facilmente compreendido no contexto de problemas de pequenas oscilações na mecânica clássica, como ocorre no estudo dos modos normais de uma cadeia de osciladores simples. Os modos com frequência nulas não representam oscilações harmônicas do sistema, mas sim translações rígidas em uma determinada direção. De certa maneira, os modos nulos estão relacionados a existência de um parâmetro coletivo que descreve o sistema como um todo, diferente dos modos normais de oscilação individuais. Essa ideia de um comportamento coletivo para o parâmetro a será confirmada pelo método que utilizaremos para calcular corretamente a função de correlação. A ideia é tratar o parâmetro a da solução de instanton como um coordenada genuína e usar o método de Faddeev-Popov para avaliar a integral de caminho. No caso, as translações por a ocuparão o papel das transformações de calibre.

Como mencionamos anteriormente, a ação Euclidiana $\mathcal{E}[q]$ e a medida de integração funcional são invariantes sob translações sob o parâmetro a da forma:

$$q(\tau) \mapsto q_a(\tau) = q(\tau + a). \quad (3.24)$$

Seguindo o método de Faddeev-Popov, definimos um funcional de fixação de calibre $F[q_a]$ e expressamos a unidade como

$$1 = \int dF \delta(F[q_a]) = \int_{-\infty}^{+\infty} da \delta(F[q_a]) \frac{\partial F}{\partial a}. \quad (3.25)$$

⁶ Para verificar isso, lembre-se que a integral de caminho na aproximação semiclássica é proporcional a $(\det \hat{A}_E)^{-1/2}$. O determinante em questão é formalmente igual ao produto dos seus autovalores, o que nos leva a concluir que um modo nulo faz a função de partição divergir.

Inserindo a identidade acima na função de partição, obtêm-se

$$\begin{aligned} Z &= \int \mathcal{D}q(\tau) e^{-\mathcal{E}[q]} \\ &= \int \mathcal{D}q(\tau) \int_{-\infty}^{+\infty} da \delta(F[q_a]) \frac{\partial F}{\partial a} e^{-\mathcal{E}[q]}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Agora, realize uma mudança de variáveis $q(\tau) \mapsto q(\tau - a)$ para encontrar

$$Z = \int \mathcal{D}q_{-a} \int_{-\infty}^{+\infty} da \delta(F[q]) D[q_{-a}, a] e^{-\mathcal{E}[q-a]}, \quad (3.27)$$

onde denotamos o Jacobiano, o qual ocupa o papel do determinante de Faddeev-Popov, por

$$D[q, a] \equiv \frac{\partial F}{\partial a}. \quad (3.28)$$

Usando o fato que tanto a medida de integração quanto a ação são invariantes, escrevemos (3.27) como

$$Z = \int \mathcal{D}q \int_{-\infty}^{+\infty} da \delta(F[q]) D[q_{-a}, a] e^{-\mathcal{E}[q]}. \quad (3.29)$$

Resta-nos invocar um funcional de fixação de calibre específico para continuarmos com o cálculo. Com efeito, usaremos

$$F[q_a] \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \left. \frac{\partial \bar{q}_c}{\partial a} \right|_{a=0} [q(\tau + a) - \bar{q}_c(\tau)|_{a=0}]. \quad (3.30)$$

Há um argumento simples para motivar a introdução do funcional acima. A invariância da ação pela simetria $q(\tau) \mapsto q(\tau + a)$ é uma condição local para as trajetórias e vale *a priori* para qualquer valor de τ . Para escrever o funcional de fixação de calibre nós integramos a condição acima sob τ com um peso dado pelo modo nulo⁷. Perceba também que $F[(\bar{q}_c)_a] = 0$, trivialmente. Com essa escolha, notamos que

$$\frac{\partial F[q_a]}{\partial a} = \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \left. \frac{\partial \bar{q}_c}{\partial a} \right|_{a=0} \frac{\partial}{\partial a} q(\tau + a), \quad (3.31)$$

Ou seja,

$$D \equiv D[q_{-a}, a] = \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \left. \frac{\partial \bar{q}_c}{\partial a} \right|_{a=0} \left. \frac{\partial q(\tau)}{\partial a} \right|_{a=0}. \quad (3.32)$$

Agora, parametrizamos as trajetórias da seguinte forma

$$q(\tau) = \bar{q}_c(\tau, a) + \sum_{n \neq 0} \xi_n \psi_n(q, a) \equiv \bar{q}_c(\tau, a) + \tilde{q}(\tau), \quad (3.33)$$

⁷ Lembre-se que o modo nulo é proporcional à derivada da solução clássica em relação ao parâmetro a .

onde $\{\psi_n\}$ representa o conjunto de autofunções do problema (3.19) com autovalores ω_n^2 estritamente positivos. Ademais, as notações $\bar{q}_c(\tau, a)$ e $\psi_n(\tau, a)$ na equação acima foram empregadas apenas para enfatizar o tratamento especial que o parâmetro a está recebendo em nosso cálculo via procedimento de Faddeev-Popov. Agora, usando

$$\frac{\partial \bar{q}_c(\tau, a)}{\partial a} = -\frac{\partial \bar{q}_c(\tau, a)}{\partial \tau}, \quad \frac{\partial \psi_n(\tau, a)}{\partial a} = -\frac{\partial \psi_n(\tau, a)}{\partial \tau}, \quad (3.34)$$

escrevemos

$$\left. \frac{\partial q(\tau)}{\partial a} \right|_{a=0} = - \left[\frac{\partial \bar{q}_c(\tau)}{\partial \tau} + \sum_{n \neq 0} \xi_n \frac{\partial \psi_n(\tau)}{\partial \tau} \right]_{a=0}. \quad (3.35)$$

Inserindo (3.35) em (3.32), encontramos:

$$D = A + \sum_{n \neq 0} \xi_n r_n, \quad (3.36)$$

onde

$$A \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \left(\frac{\partial \bar{q}_c(\tau)}{\partial \tau} \right)^2, \quad r_n \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \left. \frac{\partial \bar{q}_c}{\partial \tau} \right|_{a=0} \left. \frac{\partial \psi_n(\tau)}{\partial \tau} \right|_{a=0}. \quad (3.37)$$

No limite $\lambda \ll \mu^3$, podemos descartar o segundo termo do jacobiano D e escrever a contribuição de um *instanton* para a função de partição (na aproximação gaussiana) como

$$Z_1 = \int \mathcal{D}\tilde{q}(\tau) \int_{-\infty}^{+\infty} da A e^{-\mathcal{E}[\bar{q}_c]} \exp \left(-\frac{1}{2} \int d\tau \tilde{q}(\tau) \hat{A}_E \tilde{q}(\tau) \right). \quad (3.38)$$

Podemos proceder com a integração gaussiana usual, visto que agora a expansão da trajetória exclui o modo nulo. Portanto, ao integrar sobre os modos não-nulos nós obtemos

$$Z_1 = A \int_{-\infty}^{+\infty} da e^{-\mathcal{E}[\bar{q}_c]} \prod_{n \neq 0} \frac{1}{\omega_n}. \quad (3.39)$$

O outro termo que contribui para Z provém do ponto de sela trivial $\bar{q} = q_0$. Com efeito, temos simplesmente

$$Z_0 = \prod_{n \neq 0} \frac{1}{\omega_n^{(0)}}, \quad (3.40)$$

onde $\omega_n^{(0)}$ são os autovalores para o ponto de sela trivial. O cálculo para o numerador da função de correlação (3.9) procede da mesma maneira. Coletando todas as contribuições do numerador e do denominador, encontramos

$$\begin{aligned} \langle q(0)q(\tau) \rangle &= \frac{\frac{\mu^2}{\lambda} + AK \left[\int da \bar{q}_c(0, a) \bar{q}_c(\tau, a) \right] \exp(-\mathcal{E}[\bar{q}_c])}{1 + AK \left(\int da \right) \exp(-\mathcal{E}[\bar{q}_c])} \\ &\simeq \frac{\mu^2}{\lambda} + A \exp(-\mathcal{E}[\bar{q}_c]) K \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\bar{q}_c(0, a) \bar{q}_c(\tau, a) - \frac{\mu^2}{\lambda} \right], \end{aligned} \quad (3.41)$$

onde K denota a razão

$$K \equiv \frac{\prod_{n \neq 0} \omega_n^{-1}}{\prod_{n \neq 0} (\omega_n^{(0)})^{-1}} = \frac{\det' \left[-\frac{d^2}{d\tau^2} + 3\lambda \bar{q}_c^2(\tau) - \mu^2 \right]^{-1/2}}{\det' \left[-\frac{d^2}{d\tau^2} + 4\mu^2 \right]^{-1/2}}. \quad (3.42)$$

Acima, a notação \det' foi empregada para ressaltar que os determinantes funcionais devem ser avaliados na ausência dos modos nulos. O cálculo de A foi realizado no início do capítulo:

$$A = \mathcal{E}[\bar{q}_c(\tau)] = \frac{(2\sqrt{2})\mu^3}{3\lambda}. \quad (3.43)$$

Temos ainda, usando a aproximação para tempos grandes $\tau \gg \sqrt{2}/\mu$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\bar{q}_c(0, a) \bar{q}_c(\tau, a) - \frac{\mu^2}{\lambda} \right] = -\frac{2\mu^2}{\lambda} \frac{\tau}{\tanh(\mu\tau/\sqrt{2})} \simeq -\frac{2\mu^2}{\lambda} \tau. \quad (3.44)$$

Na aproximação para tempos grandes, a função de correlação de dois pontos se reduz a

$$\langle q(0)q(\tau) \rangle = \frac{\mu^2}{\lambda} + KA \exp(-\mathcal{E}[\bar{q}_c]) \frac{2\mu^2}{\lambda} \tau. \quad (3.45)$$

Portanto, conforme esperávamos, a contribuição do *instanton* é exponencialmente pequena. Contudo, essa aproximação falha para tempos suficientemente longos tais que

$$\tau \gtrsim \frac{e^{-\mathcal{E}[\bar{q}_c]}}{2KA}. \quad (3.46)$$

A solução para o problema acima envolve a inclusão de processos com multi-instanton. Se a constante λ for pequena, a falha da aproximação ocorre em instantes de tempo muito mais longos do que a largura do instanton, isto é, $\Delta\tau \sim 1/\mu$. Com essa consideração em mente, podemos avaliar a soma sobre os processos com multi-instantons por meio da aproximação de um “gás” diluído de instantons fracamente interagentes (veja a figura 3). Nesse limite, um processo de multi-instanton será representado por

$$\bar{q}_c \simeq \sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}} \prod_{j=1}^N \text{sgn}(\tau - a_j), \quad (3.47)$$

onde o conjunto $\{a_j\}$ informa a localização dos instantons e anti-instantons.

A ação Euclidiana para a configuração com N instantons é dada (a menos de termos exponencialmente pequenos de interação) por

$$\mathcal{E}_c^N \simeq N \frac{(2\sqrt{2})\mu^3}{3\lambda}. \quad (3.48)$$

Podemos realizar o cálculo de maneira exata agora. Denotando

$$C(\tau) = \frac{2AK\tau}{\tanh(\mu\tau/\sqrt{2})} \xrightarrow{\mu\tau \gg 1} 2AK\tau, \quad (3.49)$$

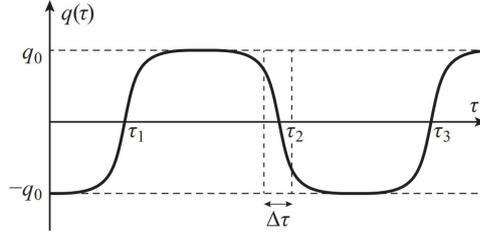


Figura 3 – Representação de um processo de multi-instantons como uma sequência de instantons e anti-instantons localizados nos instantes de tempo imaginário τ_1, τ_2, \dots . Na figura, $\Delta\tau \sim 1/\mu$ quantifica a largura do instanton. Adaptado de (FRADKIN, 2021).

escrevemos o correlator como

$$\langle q(0)q(\tau) \rangle = \frac{1}{Z} \frac{\mu^2}{\lambda} \sum_{N=0}^{\infty} C^N e^{-\frac{(2\sqrt{2})\mu^3}{3\lambda}} \int_{a_1 < \dots < a_N} da_1 \dots da_N \prod_{j=1}^N \text{sgn}(\tau - a_j), \quad (3.50)$$

onde a função de partição Z é dada por

$$Z = \sum_{N=0}^{\infty} C^N e^{-\frac{(2\sqrt{2})\mu^3}{3\lambda}} \int_{a_1 < \dots < a_N} da_1 \dots da_N. \quad (3.51)$$

Além disso, escrevemos

$$\int_{a_1 < \dots < a_N} da_1 \dots da_N = \frac{T^N}{N!}, \quad (3.52)$$

sendo $T \rightarrow \infty$ o intervalo de tempo total decorrido. Após calcular as somas, encontramos a seguinte expressão para o correlator:

$$\langle q(0)q(\tau) \rangle = \frac{\mu^2}{\lambda} \exp(-\tau \Delta E), \quad (3.53)$$

onde

$$\Delta E \simeq 2AK e^{-\frac{(2\sqrt{2})\mu^3}{3\lambda}}. \quad (3.54)$$

Dessa maneira, vemos que o nosso cálculo exato reproduz o comportamento que prevemos a partir da equação (3.8), isto é, o estado fundamental e o primeiro estado excitado do poço duplo diferem por uma quantidade ΔE . Notamos ainda a singularidade essencial em λ na fórmula acima para ΔE , evidenciando o caráter não-perturbativo do fenômeno.

O cálculo apresentado nessa seção constitui um modelo prototípico para os demais cálculos envolvendo instantons em outros modelos e teorias. A abordagem que apresentamos será bem sucedida para as teorias em que a ação Euclidiana do instanton é finita e a solução clássica em si é rotulada apenas pela sua localização. Não obstante, a condição de finitude da ação pode ser relaxada para permitir divergências logarítmicas em vários casos de interesse.

3.2 Sólitons na teoria $\lambda\phi^4$

3.2.1 As soluções de kink e anti-kink

Considere agora a teoria $\lambda\phi^4$ no espaço de Minkowski em (1+1) dimensões, cuja densidade lagrangiana é

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - \frac{1}{2}(\partial_x\phi)^2 - U(\phi). \quad (3.55)$$

A densidade hamiltoniana correspondente é dada por

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{2}(\partial_x\phi)^2 + U(\phi), \quad (3.56)$$

onde $\pi = \dot{\phi}$ denota o momento canonicamente conjugado ao campo ϕ . Assim como na seção anterior, consideramos configurações clássicas estáticas com energia finita tais que \mathcal{H} é um extremo. Além disso, a equação de movimento para a coordenada x é a mesma que acabamos de discutir no exemplo do poço de potencial duplo com tempo imaginário (Euclidiano). Na situação que estamos considerando agora, essas soluções são chamadas de *sólitons* (ou *kinks*). Introduza o potencial

$$U(\phi) = \frac{\lambda}{4!}(\phi^2 - \phi_0^2)^4, \quad (3.57)$$

o qual possui dois estados de vácuo degenerados com energia \mathcal{H} nula definidos por $\pm\phi_0$. O termo de massa associado ao potencial $U(\phi)$ acima nos indica que $m_0^2 = -\lambda\phi_0^2/6 < 0$. A teoria possui uma simetria \mathbb{Z}_2 global e a solução de *sóliton* irá interpolar os dois vácuos estáticos distintos. Isto é, as condições de contorno são $\phi(\pm\infty) = \pm\phi_0$.

Assumindo uma solução estática, a equação de Euler-Lagrange que precisamos resolver é

$$-\phi'' + \frac{\lambda}{6}\phi(\phi^2 - \phi_0^2) = 0. \quad (3.58)$$

Multiplicando a equação acima por ϕ' , vemos que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dx} \left[-(\phi')^2 + \frac{\lambda}{12}(\phi^2 - \phi_0^2)^2 \right] = 0. \quad (3.59)$$

Ou seja, o termo entre colchetes acima deve ser igual a uma constante C . As condições de contorno impõem que C se anula identicamente, de modo que a solução é determinada por

$$\frac{d\phi}{dx} = \pm \sqrt{\frac{\lambda}{12}}(\phi^2 - \phi_0^2). \quad (3.60)$$

Imediatamente escrevemos:

$$\phi(x) = \pm\phi_0 \tanh \left[\frac{(x - x_0)}{\xi\sqrt{2}} \right], \quad (3.61)$$

onde $\xi = (\lambda\phi_0^2/6)^{-1/2} = |m_0|^{-1}$ denota o comprimento de correlação. Ademais, a energia da solução é

$$E_{\text{sóliton}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{H} dx = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{\lambda}{3}} \phi_0^3. \quad (3.62)$$

Uma vez que a densidade de energia do sóliton é localizada na origem $x = 0$, é sugestivo imaginar que essa solução descreve de fato uma partícula com massa dada pela energia da solução estática clássica que acabamos de calcular. Veremos na próxima subseção como avaliar correções quânticas para essa massa.

Se interpretamos a solução de kink como uma partícula de fato, então devemos ser capazes de encontrar soluções que descrevem partículas em movimento. Não é difícil mostrar que a solução $\phi(x \pm vt)$ após um *boost* da coordenada espacial com velocidade $v < 1$ obedece à equação de Euler-Lagrange completa (i.e., sem descartar o termo com a derivada temporal do campo). Tal propriedade justifica o nome dado à solução: temos uma onda solitária que se translada com velocidade constante sem alterar sua forma.

O fato que o sóliton se comporta como uma partícula clássica, a despeito de ser uma solução estendida para um campo, se confirma pelo cálculo da energia associada a essa solução após o *boost*. Com efeito, descobre-se facilmente que

$$E = \frac{E_{\text{sóliton}}}{\sqrt{1 - v^2}} \quad (3.63)$$

e vemos que a fórmula para a energia de uma partícula massiva e relativística se aplica.

Existe ainda uma outra maneira de calcular a energia (3.62) sem precisar usar explicitamente a solução de kink na expressão para \mathcal{H} . Além disso, esse método se aproxima do cálculo que realizaremos para reescrever a ação em outras teorias com mais dimensões que também admitem soluções topológicas. Assumindo novamente soluções estáticas, começamos escrevendo a equação de Euler-Lagrange para a lagrangiana (3.55) na forma

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 - U(\phi) \right] = 0. \quad (3.64)$$

Assumindo que $U(\phi) \geq 0$, podemos introduzir uma nova função $W(\phi)$ de tal forma que

$$U(\phi) = \frac{1}{2} \left(\frac{dW}{d\phi} \right)^2. \quad (3.65)$$

Além disso, assumindo que ϕ converge para uma das soluções da equação algébrica $U(\phi) = 0$ no infinito espacial, podemos eliminar a constante arbitrária escondida na equação (3.64) e concluir que

$$\frac{d\phi}{dx} = \pm \frac{dW}{d\phi}. \quad (3.66)$$

As fórmulas acima são análogas às equações auto-duais e anti-auto-duais que serão introduzidas nos próximos capítulos. Agora, é fácil ver que a energia

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 + U(\phi) \right] \quad (3.67)$$

pode ser reescrita como

$$E = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left(\phi' \mp \frac{dW}{d\phi} \right)^2 \pm [W(\phi(\infty)) - W(\phi(-\infty))]. \quad (3.68)$$

Ademais, pelas equações auto-duais o primeiro termo acima se anula e temos simplesmente

$$E = \pm [W(\phi(\infty)) - W(\phi(-\infty))]. \quad (3.69)$$

Desse modo, basta identificar $W(\phi)$ a partir do potencial $U(\phi)$ e avaliar os limites presentes na expressão acima.

Nesse momento já deve estar evidente o papel fundamental da existência dos estados de vácuo não-equivalentes do modelo para a solução de sóliton. É justamente daí que vem o caráter topológico do sóliton. Com isso em mente, introduzimos a corrente topológica

$$J_{\text{top}}^{\mu} := \frac{1}{2a} \epsilon^{\mu\nu} \partial_{\nu} \phi. \quad (3.70)$$

A antissimetria do símbolo de Levi-Civita garante automaticamente a conservação da corrente acima, isto é, vale que $\partial_{\mu} J_{\text{top}}^{\mu} = 0$. A normalização dessa corrente foi escolhida de tal modo que sua carga conservada é dada por

$$Q = \int_{-\infty}^{+\infty} dx J^0 = \frac{1}{2a} [\phi(\infty) - \phi(-\infty)]. \quad (3.71)$$

Ou seja, $Q = 1$ para o kink e $Q = -1$ para o anti-kink.

3.2.2 Interpretando as soluções clássicas na teoria quântica

Agora que investigamos um exemplo de solução não-trivial para as equações clássicas na teoria $\lambda\phi^4$, surge a pergunta: como interpretar essa solução após a quantização da teoria e qual a sua relevância nesse cenário?

A relevância prática dos estados de sólitons que iremos discutir nessa seção é limitada. Nenhum dos mésons ou hádrons pesados do Modelo Padrão são de fato descritos por tais soluções. De qualquer maneira, a exposição é instrutiva, visto que ela pode ser adaptada para interpretar soluções topológicas de modelos mais interessantes que servem de fato como bons guias para o estudo das teorias de calibre.

No que segue, veremos que associadas às soluções de sóliton, existem setores do espaço de Hilbert populados por partículas pesadas e estáveis, cujos números quânticos surgem de leis de conservação topológicas (ou da mistura de simetrias internas e espaço-temporais). A exposição seguirá de perto o artigo (JACKIW, 1977). A menos que seja explicitado o contrário, trabalhemos aqui na assinatura de Minkowski usual.

Primeiro, lembramos que as soluções clássicas das equações de movimento se enquadram em quatro categorias: constantes no tempo e espaço, estáticas (independentes do tempo), Dependentes do tempo e espaço e Euclidianas ($t \mapsto -it_E$).

O significado das soluções constantes é bem conhecido no formalismo usual da teoria de campos. Elas são primeiras aproximações para o valor esperado vácuo (VEV) de um campo e frequentemente sinalizam o fenômeno da quebra espontânea de simetria. Nosso objetivo agora é investigar o significado das soluções estáticas e dependentes do tempo. As soluções Euclidianas, como já vimos no exemplo apresentado no início do capítulo, estão associadas ao tunelamento quântico.

Breve investigação das soluções estáticas

Consideramos inicialmente a teoria de um campo escalar $\Phi(x, t)$ em uma dimensão espacial cuja lagrangiana é

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi - U(\Phi), \quad (3.72)$$

onde assumimos que $U(\Phi) \geq 0$ para que a energia seja positivo definida. O funcional energia do modelo é dado por

$$E_c(\varphi) = \int dx \left[\frac{1}{2} (\varphi')^2 + U(\varphi) \right]. \quad (3.73)$$

Assim como no exemplo do potencial quártico, a estabilidade clássica da solução estática $\varphi_c(x)$ da equação de movimento $\varphi_c'' = U'(\varphi_c)$ é garantida exigindo que o espectro do problema de autovalores

$$\left[-\frac{d^2}{dx^2} + U(\varphi_c(x)) \right] \psi_k(x) = \omega_k^2 \psi_k(x) \quad (3.74)$$

seja estritamente positivo. Todo problema de autovalores dessa espécie admite uma solução de frequência nula, um *modo de translação* proporcional a φ_c' . Essa condição também pode ser entendida por meio de um princípio variacional para $E(\varphi)$. Exigimos que a segunda variação desse funcional, dada por

$$\frac{\delta^2 E_c(\varphi)}{\delta\varphi(x)\delta\varphi(y)} = \left[-\frac{d^2}{dx^2} + U''(x) \right] \delta(x - y), \quad (3.75)$$

seja um operador diferencial não-negativo quando avaliada em φ_c . O potencial específico que teremos em mente durante a subsequente discussão será escrito como

$$U(\varphi) = \frac{m^4}{2g^2} \left(1 - \frac{g^2 \varphi^2}{m^2} \right)^2, \quad (3.76)$$

onde m e g são constantes. Pela discussão no apêndice A, sabemos que o problema de autovalores que surge para esse modelo admite um espectro não-negativo. Essa teoria, como já mencionamos, possui uma simetria \mathbb{Z}^2 global. Entretanto, os valores $\varphi_0 = \pm m/g$ para o mínimo do potencial nos indicam que essa simetria é quebrada pelo estado de vácuo. Seguindo o procedimento usual, escolhemos $\langle 0|\Phi|0\rangle = m/g$ e expandimos o potencial $U(\phi)$ em torno de φ_0 para descobrir que o “méson” da teoria $\lambda\varphi^4$ possui massa m .

Na notação que introduzimos, a solução de sóliton toma a forma

$$\varphi_c(x) = \pm \frac{m}{g} \tanh(x - x_0). \quad (3.77)$$

A existência do parâmetro x_0 é uma consequência da simetria por translações. A energia clássica associada a essa solução é finita e igual a $E_c(\varphi_c) = 4m^3/3g^2$.

Para inserir essas soluções na teoria quântica, introduzimos alguns postulados para o espaço de Hilbert cuja auto-consistência pode ser verificada *a posteriori*. Com isso, um esquema para expansões perturbativas emergirá naturalmente.

Com efeito, postulamos a existência de um estado de vácuo $|0\rangle$ (no nosso exemplo esse estado é degenerado). Há, certamente, estados de 1 partícula $|k\rangle$ que descrevem um méson de massa μ e momento k , bem como estados de multi-mésons $|k_1, k_2, \dots\rangle$. Esse é o chamado setor do vácuo e os cálculos perturbativos são realizados da maneira usual. O campo Φ é escrito como

$$\Phi(x, t) = \varphi_0 + \tilde{\Phi}(x, t) \quad (3.78)$$

e a teoria de perturbações é empregada para avaliar as amplitudes de $\tilde{\Phi}$. Para acomodar (3.77), postulamos também a existência de um outro conjunto de estados de partículas: os estados quânticos de sólitons. O estado de 1 partícula solitônica $|P\rangle$ é um autoestado simultâneo do funcional E e do operador momento:

$$\begin{aligned} P|P\rangle &= P|P\rangle, \\ E|P\rangle &= E(P)|P\rangle, \quad E(P) = \sqrt{P^2 + M^2}. \end{aligned} \quad (3.79)$$

Postulamos também que, para g pequeno, a massa do sóliton é grande. Especificamente, exigimos que $M = \mathcal{O}(g^{-2})$. Além dos estados de 1 partícula, temos os estados de 1 sóliton e multi-mésons $|P; k_1, k_2, \dots\rangle$, onde P é o momento total e k_j são os momentos assintóticos dos mésons. Assumimos que o sóliton é estável sob decaimento em mésons, isto é, todos os elementos matriciais da forma

$$\langle \text{sóliton, méson} | \Phi \Phi \dots | \text{sem sólitons, méson} \rangle \quad (3.80)$$

se anulam identicamente. Esse setor do espaço de Hilbert é chamado de “setor de sóliton”. Uma questão importante surge quando nos lembramos que a solução de instanton carrega consigo o parâmetro x_0 . Devemos fazer alguma distinção entre tipos diferentes de sólitons? Bom, essas simetrias não são relevantes para realizarmos uma distinção dessa espécie.

Vamos considerar como idênticas aquelas soluções que produzem o mesmo valor para o funcional $E_c(\varphi)$. Desse modo, há apenas um sóliton⁸ na teoria $\lambda\varphi^4$.

Os últimos postulados a serem introduzidos fixam a magnitude dos elementos matriciais do campo Φ no setor de sólitons. Abaixo, o subscrito C denota a parte conectada dos diagramas que representam os elementos matriciais, onde apenas os mésons são desconectados. Além disso, o Φ nas fórmulas abaixo deve ser considerado como $\Phi(0)$, avaliado na origem. Escrevemos

$$\langle P'; k'_1, \dots, k'_{n'} | \Phi | P; k_1, \dots, k_n \rangle_C = \mathcal{O}(g^{n+n'-1}), \quad (3.81)$$

bem como:

$$\begin{aligned} \langle P' | \Phi | P \rangle &= \mathcal{O}(g^{-1}) \\ \langle P' | \Phi | P; k \rangle &= \mathcal{O}(g^0) \\ \langle P'; k' | \Phi | P; k \rangle_C &= \mathcal{O}(g^{-1}) \\ \langle P'; k' | \Phi | P; k \rangle &= 2\pi\delta(k' - k) \langle P' | \Phi | P \rangle + \langle P'; k' | \Phi | P; k \rangle_C. \end{aligned} \quad (3.82)$$

Dessa forma, partindo da equação

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} = \frac{d^2}{dx^2} \right) \Phi(x, t) = -U'(\Phi(x, t)) = 2m^2\Phi(x, t) - 2g^2\Phi^3(x, t) \quad (3.83)$$

é possível mostrar, em ordem $\mathcal{O}(g^{-1})$, que o elemento matricial do campo calculado entre estados de sóliton é dado pela fórmula

$$\langle P' | \Phi | P \rangle = \frac{m}{g} \int dx e^{i(P'-P)x} \tanh(mx). \quad (3.84)$$

Naturalmente, existem correções advindas das ordens superiores de g . Não há elementos matriciais de transição entre os estados de sóliton e anti-sóliton. Portanto, o nosso primeiro resultado na teoria quântica é o fato que a transformada de Fourier da solução clássica é a primeira aproximação (em potências de g) para o fator de forma $\langle P' | \Phi | P \rangle$ do campo. Notamos também que a dependência com g^{-1} releva que esse efeito é singular em $g = 0$ e indetectável na teoria de perturbações usual.

Podemos nos perguntar ainda sobre a massa do estado de sóliton. Ela é consistente com a hipótese que $M = \mathcal{O}(g^{-2})$? Isso não apenas é verdade, como na verdade a massa calculada na ordem mais baixa de g coincide com a massa clássica da solução de sóliton. Correções de ordem superior podem ser calculadas, naturalmente. Por exemplo,

$$M = \frac{4m^3}{3g^2} - m \left(\frac{3}{\pi} - \frac{1}{2\sqrt{3}} \right) + \mathcal{O}(g^2). \quad (3.85)$$

Acima, m é um parâmetro de massa que precisa ser normalizado por razões técnicas.

⁸ Vale ressaltar que nós não nos ocuparemos com o setor de anti-sólitons.

Dentro do formalismo que estamos apresentando, as soluções do problema de autovalores (3.74) admitem uma interpretação simples. As soluções contínuas do espectro, com $\omega_k^2 = k^2 + \mu^2$, onde μ é a massa do méson, são interpretadas como estados de espalhamento méson-sóliton. O modo nulo não está associado a um estado no espaço de Hilbert. Mas, os estados físicos permanecem completos mesmo com a exclusão de uma função que *a priori* contribui para constituir o conjunto completo? Mais uma vez, a resposta é sim. Mais detalhes podem ser consultados em (JACKIW, 1977).

Por fim, mencionamos que a estabilidade do sóliton pode ser entendida como uma consequência da lei de conservação topológica que discutimos anteriormente.

4 | Instantons em duas dimensões

The art of doing mathematics consists in finding that special case which contains all the germs of generality.

— David Hilbert

4.1 Preliminares e o teorema de Derrick

Antes de partir para o nosso primeiro modelo genuíno em duas dimensões, se faz necessário alguns comentários de caráter geral sobre a construção de soluções clássicas com ação finita. Nesse sentido, apresentaremos um resultado de interesse devido a Derrick. Seguiremos a exposição de (WEINBERG, 2012), §3.2.

Considere uma teoria em D dimensões espaço-temporais com um ou mais campos escalares ϕ_a e uma densidade lagrangiana escrita como

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \gamma_{ab}(\phi) \partial_\mu \phi_a \partial^\mu \phi_b - V(\phi), \quad (4.1)$$

onde $\gamma_{ab}(\phi)$ é uma forma quadrática positivo-definida. Assumimos também que o potencial V se anula nos mínimos dos campos. Todas as soluções estáticas das equações de movimento com energia finita são pontos estacionários do funcional E dado por

$$\begin{aligned} E &= I_K + I_V \\ &= \frac{1}{2} \int d^D x \gamma_{ab}(\phi) \partial_j \phi_a \partial_j \phi_b + \int d^D x V(\phi). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Note que cada um dos termos acima é estritamente positivo. Uma vez que a solução estática é um ponto estacionário do conjunto de todas as configurações, também é verdade que a solução é um ponto estacionário de qualquer subconjunto de todas as configurações. Com efeito, dada uma solução $\bar{\phi}(\mathbf{x})$, considere a família uniparamétrica de configurações:

$$f_\lambda(\mathbf{x}) \equiv \bar{\phi}(\lambda \mathbf{x}). \quad (4.3)$$

Após uma mudança de variáveis nas integrais, verifica-se que

$$\begin{aligned} E(\lambda) &\equiv I_K[f_\lambda] + I_V[f_\lambda] \\ &= \frac{1}{\lambda^{D-2}} I_K[\bar{\phi}] + \frac{1}{\lambda^D} I_V[\bar{\phi}]. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Dado que $f_1 = \bar{\phi}$ é uma solução, $\lambda = 1$ é um ponto estacionário de $E(\lambda)$. Ou seja,

$$\left. \frac{\partial E(\lambda)}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=1} = 0, \quad (4.5)$$

o que implica em

$$0 = (D - 2)I_K[\bar{\phi}] + DI_V[\bar{\phi}]. \quad (4.6)$$

(i) **Caso** $D = 1$.

Nessa situação, (4.6) expressa uma espécie de teorema do virial¹

(ii) **Caso** $D = 2$.

Segue que $I_V = 0$ e ϕ deve assumir o seu valor no vácuo em todos os pontos. Isso já obstrui a tentativa de construir soluções de vórtice não-singulares no modelo bidimensional com simetria $U(1)$ constituído de um escalar complexo com interação quártica (WEINBERG, 2012), §3.1.

(iii) **Caso** $D \geq 3$.

Nessa situação tanto I_K quanto I_V devem se anular e a equação (4.6) só pode ser satisfeita para campos constantes iguais a seus valores no vácuo em todos os pontos.

A conclusão é que para obter sólitons em mais dimensões nós precisamos adicionar mais estrutura à teoria de alguma forma. Uma maneira simples de realizar isso é considerar uma teoria de calibre (abeliana ou não-abeliana). O argumento apresentado acima pode então ser repetido e teremos como resultado final a confirmação de que é possível a existência de soluções estáticas com campos escalares e campos de calibres para $D = 2$ ou $D = 3$. Para $D = 4$ a única opção envolve a teoria de Yang-Mills pura, sem campos escalares. Esse último caso leva aos famosos *instantons de Yang-Mills*, assunto principal da seção 5.1.

4.2 Vórtices

Diferente dos exemplos com simetrias discretas tratados no capítulo 3, vamos nos ocupar agora com teorias que apresentam simetrias contínuas globais. O caso mais simples consiste em considerar o grupo de simetria $U(1)$ com um campo de matéria dado por um escalar complexo $\phi(x) \in \mathbb{C}$.

¹ Lembre-se que o teorema do virial na mecânica clássica relaciona as médias temporais da energia cinética e da energia potencial de um sistema. A condição $2I_K[\bar{\phi}] = DI_V[\bar{\phi}]$ é precisamente uma relação dessa espécie.

Nosso interesse está na situação em que há quebra espontânea da simetria $U(1)$ à nível clássico². Nós vamos aproximar o campo escalar por um campo ϕ complexo com módulo fixo. Isto é,

$$\phi(x) = \phi_0 e^{i\theta(x)}, \quad (4.7)$$

onde ϕ_0 denota o valor esperado do vácuo do operador ϕ após quebrarmos a simetria escolhendo uma fase para o mínimo do potencial. Aqui, $\theta(x) \in [0, 2\pi)$ denota o campo que descreve o bóson de Nambu-Goldstein que surge com a quebra de simetria $U(1)$. As configurações dos sistemas com grupos de simetria (global ou local) compactos são classificadas por grupos de homotopia, conforme veremos explicitamente a seguir.

4.2.1 O caso unidimensional

Como um aquecimento, vamos considerar o caso de um sólito $U(1)$ em $(1+1)$ dimensões.

Por conta de (4.7), é natural adotar condições de contorno periódicas para a coordenada espacial $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Com efeito, vamos introduzir um relação de equivalência \sim definida por

$$\sim: x \sim x' \iff x' = x + kL, \quad k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}. \quad (4.8)$$

Em outras palavras, vamos identificar os pontos que diferem por múltiplos inteiros de um certo valor $L \geq 0$. Ou seja, “colamos” os pontos 0 e L da reta, de modo que nossas partículas vivem em uma circunferência de raio $L/2\pi$ ³. As condições de contorno periódicas são definidas pela exigência:

$$\theta(x + L) = \theta(x) + 2k\pi, \quad (4.9)$$

com k inteiro. A condição acima naturalmente preserva o valor do campo definido por (4.7). Portanto, o espaço-tempo M é dado pelo produto cartesiano do círculo S^1 e a reta real:

$$M = S^1 \times \mathbb{R}. \quad (4.10)$$

Assim como no caso do sólito da teoria $\lambda\phi^4$, vamos procurar por soluções estáticas das equações de movimento clássicas com energia finita. Uma configuração estática $\phi(x)$ é

² Um exemplo é dado pela teoria

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}|\partial_\mu\phi|^2 - \frac{\lambda}{4}\left(|\phi|^2 - \mu^2/\lambda\right)^2$$

com constantes μ^2 e λ positivas. Há uma família de configurações $|\phi|_0 = \sqrt{\mu^2/\lambda}$ para as quais o potencial é minimizado. Uma escolha de fase para performar a expansão do campo ϕ sinaliza a quebra espontânea de simetria. Após expandir o campo em torno do mínimo, temos uma lagrangiana com um campo escalar real massivo, um bóson de Nambu-Goldstone (um escalar real não-massivo) e termos de interação.

³ É um fato elementar que existe um isomorfismo $[0, 1]/\{0, 1\} \cong S^1$ com a introdução da topologia quociente, sendo S^1 o círculo unitário.

um mapa que leva pontos da variedade espacial do sistema, chamado de *espaço base*, nos possíveis valores da fase θ , o *espaço alvo*. Por conta da exponencial complexa em (4.7), o espaço alvo em consideração também é isomorfo ao círculo S^1 . Portanto, as configurações clássicas estáticas são mapas sobrejetivos de S^1 em S^1 :

$$\phi: S^1 \rightarrow S^1. \quad (4.11)$$

Uma vez que as fases $\theta(x)$ são definidas módulo 2π na definição de $\phi(x)$, as configurações estáticas que procuramos são laços do espaço S^1 no ponto $\theta(x)$. Essas soluções são classificadas pelas diferentes homotopias no círculo S^1 . Na figura 4 nós apresentamos alguns exemplos de configurações estáticas $\theta(x)$ homotópicas. Não é difícil perceber que a única característica que distingue essas diferentes homotopias é o número de vezes que o círculo alvo é coberto quando traçamos um laço no círculo base. Esse número inteiro é justamente o *winding number*, ou ainda, o grau do mapa. Essa quantidade é um invariante topológico, isto é, seu valor não se altera sob deformações contínuas das configurações do campo. Sua definição em termos de θ é

$$N := \frac{[\theta(L) - \theta(0)]}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \int_0^L dx \frac{d\theta(x)}{dx} = \frac{1}{2\pi} \int_0^L dx ie^{i\theta(x)} \frac{d}{dx} e^{-i\theta(x)}. \quad (4.12)$$

O fato que N é um inteiro segue diretamente da condição (4.9).

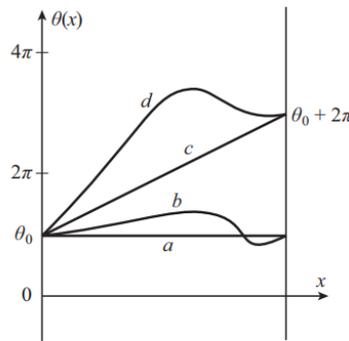


Figura 4 – Homotopias no círculo S^1 . (a) Uma configuração constante $\theta(x) = \theta_0$, (b) uma configuração homotópica ao mapa constante, (c) uma configuração com *winding number* +1, e por fim, (d) uma configuração homotópica ao exemplo (c). Adaptado de (FRADKIN, 2021).

Ou seja, de certo modo, todas as configurações possíveis que estamos interessados são deformações do mapa constante. Soluções com diferentes *winding numbers* como o exemplo (c) da figura 4, reproduzem os mesmos valores de $\phi(x)$. Como explicamos no capítulo 2 ao introduzir o grupo fundamental, a noção de homotopia de laços naturalmente nos leva a uma classificação desses objetos em diferentes classes de equivalência. Essas classes de equivalência são rotuladas pelo *winding number* de um certo elemento representativo. Em suma, toda a discussão acima pode ser condensada no resultado do teorema 2.1.1.

Extensão ingênua da classificação topológica em uma dimensão

Após o último exemplo, naturalmente surge a questão se o esquema de classificação apresentado no caso unidimensional com simetria $U(1)$ pode ser estendido para outras simetrias e/ou dimensões.

Vamos tentar aplicar o mesmo raciocínio em outra teoria de interesse, o modelo sigma não-linear $O(3)$ em duas dimensões. Nesse sistema, prescrevemos um vetor tridimensional \mathbf{n} de módulo unitário em cada ponto do espaço-tempo. A ação do modelo é dada por

$$S = \int \frac{1}{2} (\partial_\mu \mathbf{n})^2 d^2x, \quad (4.13)$$

onde $\mu = 1, 2$ e o campo $\mathbf{n}(x)$ está sujeito ao vínculo $\mathbf{n}^2 = 1$. É nítido que o espaço alvo da teoria é a esfera S^2 . Mais uma vez, consideramos condições de contorno periódicas na coordenada espacial e procuramos classificar topologicamente as possíveis configurações estáticas clássicas. Aqui, as configurações que desejamos são mapas de S^1 em S^2 .

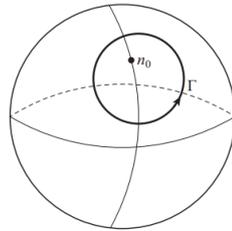


Figura 5 – Uma homotopia Γ em S^2 é topologicamente trivial pois todos os laços são retráteis a um único ponto \mathbf{n}_0 da esfera. Adaptado de (FRADKIN, 2021).

Assim como no primeiro exemplo, as configurações que buscamos são laços, só que dessa vez na superfície da esfera S^2 (veja a figura 5). Contudo, todos os laços em S^2 são retráteis a um único ponto \mathbf{n}_0 e são, por consequência, topologicamente triviais. Em outras palavras, sempre podemos deformar o laço na superfície da esfera em um único ponto sem obstruções.

O fenômeno que acabamos de descrever se generaliza para todos os mapas de S^1 em S^n , para $n > 1$. Matematicamente, o que estamos dizendo é que os grupos fundamentais desses espaços são todos triviais. Isto é,

$$\pi_1(S^n) \cong \{0\}, \quad n > 1. \quad (4.14)$$

Já discutimos o resultado matemático acima no capítulo 2. Resumindo nossas conclusões, os modelos sigma não-lineares $O(N)$ não possuem soluções solitônicas estáticas clássicas com topologia não-trivial quando $N > 1$. Na seção 4.3 veremos como construir as soluções de instantons não-estáticas no caso $N = 3$.

4.2.2 Vórtices em duas dimensões

Feitas as considerações iniciais acerca do teorema de Derrick e da classificação topológica dos vórtices em uma dimensão, vamos agora analisar os vórtices bidimensionais. Assumimos que estamos trabalhando com duas dimensões Euclidianas, mas a discussão também se aplica para soluções estáticas em $2 + 1$ dimensões espaço-temporais.

Começamos com a ação (ou energia) para um campo escalar $\phi(x)$ complexo:

$$S = \int d^2x \left(\frac{1}{2} |\partial_\mu \phi|^2 + U(\phi) \right). \quad (4.15)$$

Podemos considerar que o potencial $U(\phi)$ é simplesmente o potencial quártico que discutimos anteriormente. Esse potencial é invariante sob simetrias $U(1)$ globais e seu mínimo é dado por $|\phi(x)| = \phi_0$. Parametrizamos o campo ϕ em termos de dois campos reais, uma amplitude e uma fase, tais que

$$\phi(x) = \rho(x) e^{i\theta(x)}. \quad (4.16)$$

Uma vez que a simetria $U(1)$ do modelo é quebrada pela escolha do VEV como sendo igual a ϕ_0 , vamos assumir que

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \rho(x) = \phi_0. \quad (4.17)$$

Considere agora uma circunferência⁴ $C(R)$ no espaço base da teoria cujo raio é arbitrariamente grande, de modo que a aproximação $\rho(x) = \phi_0$ é válida.

Desse modo, o valor de $\theta(x)$ nos pontos da circunferência $C(R)$ define um mapa de S_{base}^1 (descrito por φ) em S_{alvo}^1 (descrito pelos valores de θ). Novamente, esses mapas são classificados pelo grupo fundamental $\pi(S^1) \cong \mathbb{Z}$. Cada classe de equivalência de mapas é definida pelo *winding number*, ou ainda, a vorticidade n das soluções:

$$n := \frac{(\Delta\theta)_C}{2\pi} = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} e^{i\theta(\varphi)} i \partial_\varphi e^{-i\theta(\varphi)}. \quad (4.18)$$

Tendo em vista que n é um invariante topológico, vale a pena discutirmos um pouco sobre a situação em que a circunferência $C(R)$ é deformada continuamente. Sabemos que enquanto ϕ for não-nulo para todos os pontos no contorno, n deve ser um inteiro. Ingenuamente, poderíamos esperar que a vorticidade variasse continuamente na medida em que deformamos o campo. Contudo, uma vez que $n \in \mathbb{Z}$, a vorticidade só pode “variar” permanecendo constante.

Desse modo, n apenas varia de fato se o novo contorno passar por um ponto p onde ϕ se anula, de modo que a fase $\theta(x)$ fica indefinida. Assim, dois contornos que passam

⁴ Um ponto $x \in C(R)$ é da forma $x = R e^{i\varphi}$, onde φ é um ângulo polar definido módulo 2π .

pelos lados opostos de p levam a integrais que podem diferir por um inteiro, sendo esse inteiro obtido pela integral ao longo de um círculo infinitesimal que contém p .

Caso essa integral sob a circunferência pequena ao redor de p produza um número inteiro positivo, então dizemos que p é um zero de ϕ com multiplicidade n . Caso contrário, temos um *antizero* com multiplicidade n .

Por fim, para uma certa configuração com vorticidade não-nula, considere uma deformação contínua que leva o contorno $C(R)$ original em um laço infinitesimal ao redor de um ponto q tal que $\phi(q) \neq 0$, isto é, q não é um zero de ϕ . Sabemos que para a circunferência $C(R)$ a vorticidade é n , mas a integral sobre o último laço deve ser zero. Isso só pode ocorrer se existir algum número de zeros de ϕ no interior de $C(R)$ ⁵. Se contarmos os zeros/antizeros com sinais positivos/negativos e com a multiplicidade correta, então o número total de zeros será igual à vorticidade⁶.

Ademais, por conta do gradiente na ação, o campo ρ deve se anular suficientemente rápido na origem $r = 0$ para garantir que S seja finita. Vamos ver como isso funciona na prática.

Assuma que o potencial $U(\phi)$ seja de tal forma que o campo ρ é essencialmente igual a ϕ_0 para todos os valores de x , exceto em uma região pequena de raio a . Nessa região interna, $\rho \rightarrow 0$ suficientemente rápido para impedir singularidades na origem, como mencionamos acima. Em suma, para $|x| > a$, fixamos $\phi(x) = \phi_0 e^{i\theta(x)}$. Assim, a ação toma a forma

$$S = \frac{\phi_0^2}{2} \int d^2x (\partial_\mu \theta)^2. \quad (4.19)$$

Associamos ao campo $\phi(x)$ uma densidade de corrente local

$$j_\mu := \phi_0 \partial_\mu \theta, \quad (4.20)$$

cuja conservação segue trivialmente das equações de movimento para $\theta(x)$. Em analogia com a mecânica de fluidos, introduzimos o rotacional da corrente na forma

$$\omega(x) := \epsilon_{\mu\nu} (\partial_\nu j_\mu) \quad (4.21)$$

Coincidentemente, $\omega(x)$ também é chamado de vorticidade. Se imaginarmos que temos soluções de vórtices localizadas nos pontos $\{x_j\}$, então não é difícil ver que o rotacional acima se anula em todos os pontos, exceto em $\{x_j\}$. Com efeito, pelo teorema de Stokes nós temos

$$\int_\Sigma \omega(x) d^2x = \oint_{\partial\Sigma} j_\mu dx_\mu, \quad (4.22)$$

⁵ Lembrando do princípio do argumento na análise complexa, polos devem estar fora de cogitação no cálculo da vorticidade para que ϕ ainda seja bem comportada. Só nos resta assumir a existência de zeros então.

⁶ Essa conexão entre um determinado invariante topológico de uma solução e os zeros de uma função analítica aparecerá novamente no capítulo 5 no contexto dos multi-instantons de Witten para a teoria de Yang-Mills.

onde Σ denota a região exterior à pequena circunferência de raio a que engloba o vórtice em questão. Naturalmente $\partial\Sigma$ é a fronteira dessa região. Se nenhum vórtice for englobado pelo círculo $\partial\Sigma$, então a integral acima se anula por conta de periodicidade da fase $\theta(x)$, e por consequência, $\omega(x)$ também deve se anular. Caso contrário, a integral acima é proporcional à vorticidade n , e $\omega(x)$ deve ser não-nulo nessa situação.

Desse modo, a expressão local para a vorticidade deve ser

$$\omega(x) = \sum_j n_j \delta^{(2)}(x - x_j), \quad (4.23)$$

onde n_j denota a vorticidade de cada solução de vórtice. Qual a expressão correspondente para a fase $\theta(x)$? Para responder essa pergunta, vamos introduzir um campo $\psi(x)$ tal que

$$\partial_\mu \psi(x) = \epsilon_{\mu\nu} \partial_\nu \theta(x). \quad (4.24)$$

A motivação para introduzir esse campo auxiliar é a forma das equações de Cauchy-Riemann. Com efeito, pela definição acima, $\psi(x)$ obedece à equação de Poisson:

$$-\partial^2 \psi(x) = \omega(x). \quad (4.25)$$

Integrando por partes e descartando o termo de fronteira, a ação (4.19) em termos de $\psi(x)$ se escreve

$$S = \frac{\phi_0^2}{2} \int d^2x (\partial_\mu \psi)^2 = -\frac{\phi_0^2}{2} \int d^2x \psi \partial^2 \psi = \frac{\phi_0^2}{2} \int d^2x \psi(x) \omega(x). \quad (4.26)$$

A solução para (4.25) podem ser obtida por meio de funções de Green. Com efeito, a solução toma a forma

$$\psi(x) = \int d^2y G(x - y) \omega(y), \quad (4.27)$$

onde a função de Green $G(x - y)$ satisfaz

$$-\partial^2 G(x - y) = \delta^{(2)}(x - y). \quad (4.28)$$

Em $D > 2$ dimensões, a solução para $G(x - y)$ é dada por⁷

$$G(|x - y|) = \frac{\Gamma\left(\frac{D}{2} - 1\right)}{4\pi^{D/2} |x - y|^{D-2}}. \quad (4.29)$$

Ingenuamente, para $D = 2$ a solução acima diverge. Para encontrar a fórmula apropriada, definimos

$$G(0) = \lim_{a \rightarrow 0} G(a), \quad (4.30)$$

⁷ A forma mais simples de deduzir isso é considerar a equação de Poisson na forma $(-\partial^2 + m^2)G(x - y) = \delta^{(2)}(x - y)$ e tomar o limite $m \rightarrow 0$ da solução. Para tal, é necessário usar o comportamento assintótico das funções de Bessel modificadas.

onde a é alguma constante. É possível mostrar então que

$$G(|x - y|) - G(a) = \frac{1}{2\pi} \log \left(\frac{a}{|x - y|} \right). \quad (4.31)$$

Vemos portanto que $G(0)$ diverge formalmente. Além disso, a expressão também diverge no limite $|x - y| \rightarrow \infty$. Por fim, introduzindo um *cutoff* L para a escala de comprimento linear do sistema, é possível mostrar que $G(a) = \frac{1}{2\pi} \log(L/a)$. Logo, $G(a)$ diverge tanto na região do ultravioleta ($a \rightarrow 0$) quanto na região do infravermelho ($L \rightarrow \infty$).

Isso tem consequências para a ação da teoria. Com efeito, usando a equação (4.26), descobre-se que

$$\begin{aligned} S &= \frac{\phi_0^2}{2} \int d^2x \int d^2y \omega(x) G(x - y) \omega(y) \\ &= \frac{\phi_0^2}{2} \sum_{i,j} n_i n_j G(x_i - x_j) \\ &= \frac{\phi_0^2}{2} \left(\sum_j n_j \right)^2 G(0) + \phi_0^2 \sum_{i>j} n_i n_j [G(x_i - x_j) - G(0)]. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Ou seja, a menos que a vorticidade total $\sum_j n_j$ se anule, S diverge por conta do termo $G(0)$. Assumindo vorticidade total nula e usando (4.31), a ação para a família de vórtices pode ser escrita como

$$S[n] = \frac{\phi_0^2}{2\pi} \sum_{i>j} n_i n_j \log \left(\frac{a}{|x_i - x_j|} \right). \quad (4.33)$$

Surpreendentemente, conseguimos mapear o problema original para o estudo do modelo do gás de Coulomb neutro em duas dimensões! (MINNHAGEN, 1987). Em particular, para um par vórtice/anti-vórtice com “cargas” $n_1 = -n_2 = 1$ e separados a uma distância $R \gg a$, nós temos:

$$S[1, -1; R] = \frac{\phi_0^2}{2\pi} \log \left(\frac{R}{a} \right). \quad (4.34)$$

A temperatura T associada ao gás descrito pela energia de interação (4.33) é a razão π/ϕ_0^2 . A menos de um pré-fator constante, a função de partição do modelo possui a forma

$$Z \propto \prod_{\{n_j\}} \sum_j \int d^2x_j \delta \left(\sum_j n_j \right) \exp(-S[n]). \quad (4.35)$$

Conforme o esperado pelo teorema de Derrick, a ação para vórtices individuais diverge logaritmicamente, o que fere a condição de ação finita que gostaríamos de estabelecer para os instantons. Apesar disso, nossos vórtices possuem um papel fundamental na caracterização da transição de fase de Kosterlitz-Thouless que o modelo exhibe. Vamos tentar compreender essa situação.

Para isso, vamos estimar a energia livre de Helmholtz F associada a um vórtice. Um argumento simples (KOSTERLITZ; THOULESS, 1973) releva que

$$F = \frac{1}{2\pi} \log\left(\frac{R}{a}\right) - T \log\left(\frac{R}{a}\right)^2. \quad (4.36)$$

O primeiro termo acima é a “auto-energia” divergente do vórtice (com um *cutoff* R na região do infravermelho). O segundo termo, por sua vez, é a entropia do vórtice, visto que $F = U - TS$.

Para baixas temperaturas (ϕ_0^2 pequeno), a energia U vence a entropia e $F > 0$. Isso significa que vórtices livres são suprimidos. Contudo, pares (dipolos) de vórtices/anti-vórtices possuem energia finita e entropia logarítmica. Nesse regime, portanto, há uma densidade finita de tais dipolos.

Para altas temperaturas, a entropia vence a energia e $F < 0$. Desse modo, o sistema se torna instável para proliferação de vórtices e antivórtices. Ou seja, existe uma temperatura crítica que sinaliza uma transição de fase entre esses dois regimes: aquele em que apenas dipolos de vórtices/anti-vórtices ocorrem e aquele em que os vórtices livres se proliferam (o gás de Coulomb se torna um plasma efetivamente neutro). Em unidades de ϕ_0^2 , a temperatura crítica dessa transição é estimada como sendo $\pi/2$.

A situação descrita acima pode ser confirmada de maneira precisa analisando o análogo na rede da teoria em questão: o modelo XY da física estatística (FRADKIN, 2021).

Resumindo toda a discussão, em uma teoria em duas dimensões com uma simetria $U(1)$ global, a transição de fase para o estado desordenado é guiada por um processo de proliferação de vórtices. O *gap* de massa da teoria é um resultado do fato que, em temperaturas altas, o gás de Coulomb neutro é submetido a efeitos de blindagem.

4.3 O modelo sigma não-linear $O(3)$

Esta seção tem como objetivo mostrar que o modelo sigma não-linear $O(3)$ em duas dimensões admite soluções de instantons. A escolha do modelo não foi em vão: a teoria apresenta uma série de características interessantes e seu domínio de aplicações é amplo.

A construção dos instantons que apresentaremos aqui será facilmente adaptada para o caso da teoria livre de Yang-Mills em quatro dimensões, a qual será discutida no capítulo 5. Tal construção foi realizada pela primeira vez para o modelo sigma não-linear $O(3)$ por Belavin e Polyakov (BELAVIN; POLYAKOV, 1975) em um estudo da física estatística de ferromagnetos isotrópicos em duas dimensões (no limite contínuo da teoria). Originalmente, modelos sigma não-lineares foram concebidos para descrever a física de

píons e o fenômeno da quebra de simetria quirial em física de partículas (FRADKIN, 2021). Atualmente, uma parcela significativa dos estudos destes modelos são motivados pela teoria de cordas⁸.

Dentre as características mais notáveis do modelo sigma não-linear $O(3)$ citamos: sua renormalizabilidade⁹ em duas dimensões, sua integrabilidade enquanto teoria clássica de campos e a fatorabilidade da sua matriz-S.

4.3.1 Condições de contorno e a carga topológica

Começamos nossa discussão introduzindo a ação Euclidiana do modelo:

$$S_E[\mathbf{n}] = \int d^2x \frac{1}{2} (\partial_\mu \mathbf{n})^2 = \int d^2x \mathcal{L}_E. \quad (4.37)$$

Acima, a configuração é determinada pelo vetor tridimensional $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ com componentes reais e as coordenadas Euclidianas¹⁰ são denotadas por $x^\mu = (x^0, x^1)$. Além disso, vamos impor o vínculo $\mathbf{n}^2 = 1$. Com essa condição suplementar, a teoria livre que acabamos de escrever deixa de ser trivial e passa a exibir uma série de novas características peculiares, sendo uma delas a existência das soluções não-singulares que iremos construir na próxima subseção. Uma consequência imediata do vínculo é o fato que o espaço alvo da teoria é topologicamente idêntico à esfera S^2 .

A função de partição do sistema é dada por

$$Z = \int \mathcal{D}\mathbf{n} e^{-\frac{1}{g} S_E[\mathbf{n}]}, \quad (4.38)$$

onde g denota a constante de acoplamento da teoria. Para introduzir o vínculo $\mathbf{n}^2 = 1$, vamos lançar mão de um multiplicador de Lagrange λ na ação:

$$S_E = \int d^2x \frac{1}{2} [(\partial_\mu \mathbf{n})^2 - \lambda(\mathbf{n}^2 - 1)]. \quad (4.39)$$

A equação de Euler-Lagrange para $\lambda(x)$ nos informa trivialmente que o vínculo é satisfeito no espaço todo:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_E}{\partial \lambda} = \mathbf{n}^2 - 1 = 0. \quad (4.40)$$

Em contrapartida, a equação de Euler-Lagrange para o campo \mathbf{n} fornece

$$-\partial_\mu \partial^\mu \mathbf{n}(x) = \lambda(x) \mathbf{n}(x). \quad (4.41)$$

Note ainda que

$$\mathbf{n} \cdot (-\partial_\mu \partial^\mu \mathbf{n}) = \lambda \mathbf{n}^2 = \lambda. \quad (4.42)$$

⁸ Na teoria de cordas, a ação que governa a propagação de uma supercorda em um espaço-tempo fixo \mathcal{M} é aquela de um modelo sigma não-linear (supersimétrico) cuja variedade alvo é precisamente \mathcal{M} (HULL, 1987).

⁹ Uma demonstração detalhada pode ser consultada no capítulo 16 do livro (FRADKIN, 2021).

¹⁰ Como consequência, índices serão abaixados e levantados livremente com a métrica Euclidiana usual.

Por simplicidade, vamos denotar o operador diferencial $\partial_\mu \partial^\mu$ por ∂^2 . Inserindo (4.42) em (4.41), obtemos:

$$\boxed{\partial^2 n^a(x) = n^a(x) \mathbf{n} \cdot \partial^2 \mathbf{n}.} \quad (4.43)$$

Acima, $a = 1, 2, 3$. A equação de movimento para \mathbf{n} é não-linear e extremamente não-trivial. Para irmos além da mera obtenção de extremos da ação Euclidiana, vamos exigir que S_E seja finita impondo que uma configuração suave $\mathbf{n}(x)$ deve satisfazer à condição:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \|\partial_\mu \mathbf{n}\|^2 = 0. \quad (4.44)$$

Ou ainda, em termos mais simples, exigimos que \mathbf{n} se aproxime de um valor fixo \mathbf{n}_0 (mas arbitrário) quando $r \rightarrow \infty$. Portanto, nós identificamos os pontos no infinito espaço-temporal com um único ponto. Ou seja, identificamos o plano (x^0, x^1) onde o campo é definido com uma outra esfera S^2 . Dessa maneira, \mathbf{n} deve ser encarado como um mapa de S_{base}^2 em S_{target}^2 .

Conforme antecipamos em nossa discussão sobre o grupo fundamental, se dois mapas pertencem à diferentes classes de homotopia, então eles não podem ser deformados um no outro. Cada classe de equivalência de mapas é caracterizada por um único número inteiro: o grau do mapa¹¹.

Em suma, as configurações que procuramos são mapas suaves \mathbf{n} da forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{n}: S^2 &\rightarrow S^2. \\ x &\mapsto \xi \end{aligned} \quad (4.45)$$

Antes de construir explicitamente as soluções desejadas, vamos discorrer sobre o *winding number* da esfera S^2 e provar que ele é de fato um número inteiro $\ell \in \mathbb{Z}$.

Teorema 4.3.1. *A carga topológica definida pela integral*

$$Q := \frac{1}{8\pi} \int_{S^2} d^2x \varepsilon^{\mu\nu} \mathbf{n} \cdot (\partial_\mu \mathbf{n} \times \partial_\nu \mathbf{n}). \quad (4.46)$$

é um número inteiro.

Demonstração. Sejam ξ_1 e ξ_2 os dois ângulos de Euler da esfera alvo S_{target}^2 . O elemento de área infinitesimal de S_{target}^2 é dado pela expressão:

$$d\mathbf{S}_{\text{target}} = \left(\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \xi_1} \times \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \xi_2} \right) d^2\xi. \quad (4.47)$$

Usando a antissimetria do produto vetorial, podemos reescrever o elemento de área acima na forma

$$d\mathbf{S}_{\text{target}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \xi_1} \times \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \xi_2} - \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \xi_2} \times \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \xi_1} \right) d^2\xi. \quad (4.48)$$

¹¹ Ou ainda, o número de enrolamento (*winding number*).

Agora note que a integral (4.46) pode ser escrita como

$$Q = \frac{1}{8\pi} \int_{S^2_{\text{base}}} d^2x \varepsilon^{\mu\nu} \varepsilon_{abc} n^a \partial_\mu n^b \partial_\nu n^c. \quad (4.49)$$

O mapa \mathbf{n} pode ser encarado como uma mudança de coordenadas da esfera S^2 . Dessa maneira, a mudança na medida de integração fica determinada pelo determinante Jacobiano. Com efeito:

$$\varepsilon_{\mu\nu} \frac{\partial \xi^r}{\partial x_\mu} \frac{\partial \xi^s}{\partial x_\nu} d^2x \longrightarrow \varepsilon^{rs} d^2\xi. \quad (4.50)$$

Assim, usando a regra da cadeia e a mudança de variáveis acima, calculamos:

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{8\pi} \int_{S^2_{\text{base}}} \varepsilon_{abc} n^a \varepsilon_{\mu\nu} \frac{\partial n^b}{\partial \xi^\mu} \frac{\partial n^c}{\partial \xi^\nu} d^2x \\ &= \frac{1}{8\pi} \int_{S^2_{\text{base}}} \varepsilon_{abc} n^a \frac{\partial n^b}{\partial \xi^r} \frac{\partial n^c}{\partial \xi^s} \frac{\partial \xi^r}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^s}{\partial x^\nu} \varepsilon_{\mu\nu} d^2x \\ &= \frac{1}{8\pi} \int_{S^2_{\text{target}}} \varepsilon_{abc} n^a \frac{\partial n^b}{\partial \xi^r} \frac{\partial n^c}{\partial \xi^s} \varepsilon^{rs} d^2\xi. \end{aligned} \quad (4.51)$$

Usando (4.48), notamos que o integrando acima pode ser escrito como um produto escalar:

$$Q = \frac{1}{8\pi} \int_{S^2_{\text{target}}} 2(\mathbf{n} \cdot d\mathbf{S}_{\text{target}}). \quad (4.52)$$

Uma vez que \mathbf{n} e $d\mathbf{S}_{\text{target}}$ são colineares, temos finalmente:

$$Q = \frac{1}{4\pi} \int_{S^2_{\text{target}}} |d\mathbf{S}_{\text{target}}|. \quad (4.53)$$

Uma vez que o mapa entre ambas as esferas é simplesmente uma mudança de variáveis, na medida em que as coordenadas (x^1, x^2) cobrem toda a esfera base, as coordenadas (ξ^1, ξ^2) cobrem a esfera alvo *ao menos uma vez*. Há, claro, a possibilidade da mudança de variáveis ser de tal forma que a esfera alvo será coberta um número inteiro qualquer de vezes quando varreremos a totalidade da esfera base. O essencial a ser notado é que a esfera alvo será varrida completamente pela mudança de variáveis. Desse modo, a integral acima é igual a $4\pi\ell$, com ℓ inteiro, e concluímos que $Q \in \mathbb{Z}$. ■

O caráter topológico da carga Q vem da seguinte observação: podemos deformar suavemente o mapa \mathbf{n} sem alterar o valor de Q , o qual será um inteiro fixo. Dizemos que Q é um *invariante topológico* da classe de mapas de S^2 a S^2 . Estes mapas são classificados pelo segundo grupo de homotopia da esfera S^2 :

$$\pi_2(S^2) \cong \mathbb{Z}. \quad (4.54)$$

Vamos agora provar um importante resultado acerca da ação Euclidiana do modelo que nos permitirá em breve encontrar as soluções das complicadas equações de movimento (4.43) usando uma elegante construção geométrica.

Teorema 4.3.2. *A existência da carga topológica Q impõe um limite inferior para o valor da ação Euclidiana S . Especificamente, temos que*

$$S[\mathbf{n}] \geq 4\pi|Q|. \quad (4.55)$$

Demonstração. Primeiro, considere a seguinte identidade trivial:

$$[\partial_\mu \mathbf{n} \pm (\mathbf{n} \times \partial_\nu \mathbf{n})]^2 \geq 0. \quad (4.56)$$

Agora, note que pela identidade de Cauchy-Binet

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}) - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})(\mathbf{A} \cdot \mathbf{D}), \quad (4.57)$$

nós temos

$$\begin{aligned} (\mathbf{n} \times \partial_\nu \mathbf{n})^2 &= (\mathbf{n} \times \partial_\nu \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{n} \times \partial_\nu \mathbf{n}) \\ &= \mathbf{n}^2 (\partial_\nu \mathbf{n})^2 - (\mathbf{n} \cdot \partial_\nu \mathbf{n})^2 \\ &= (\partial_\nu \mathbf{n})^2. \end{aligned} \quad (4.58)$$

Usando o resultado acima e o fato que $(\varepsilon^{\mu\nu})^2 = \delta^{\mu\nu}$, segue de (4.56):

$$\begin{aligned} [\partial_\mu \mathbf{n} \pm \varepsilon^{\mu\nu} (\mathbf{n} \times \partial_\nu \mathbf{n})]^2 &= (\partial_\mu \mathbf{n})^2 + (\varepsilon^{\mu\nu})^2 (\mathbf{n} \times \partial_\nu \mathbf{n})^2 \pm 2\varepsilon^{\mu\nu} (\partial_\mu \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{n} \times \partial_\nu \mathbf{n}) \\ &= 2(\partial_\mu \mathbf{n})^2 \pm 2\varepsilon^{\mu\nu} \mathbf{n} \cdot (\partial_\nu \mathbf{n} \times \partial_\mu \mathbf{n}) \\ &\geq 0. \end{aligned} \quad (4.59)$$

Escolhendo o sinal positivo, obtemos

$$(\partial_\mu \mathbf{n})^2 \geq \varepsilon^{\mu\nu} \mathbf{n} \cdot (\partial_\mu \mathbf{n} \times \partial_\nu \mathbf{n}). \quad (4.60)$$

Ora, o lado direito da desigualdade é exatamente o integrando que surge na expressão da carga topológica. De fato,

$$\begin{aligned} S[\mathbf{n}] &= \frac{1}{2} \int d^2x (\partial_\mu \mathbf{n})^2 \\ &\geq \frac{1}{2} \int d^2x \varepsilon^{\mu\nu} \mathbf{n} \cdot (\partial_\mu \mathbf{n} \times \partial_\nu \mathbf{n}) = 4\pi|Q|, \end{aligned} \quad (4.61)$$

e provamos o resultado desejado. ■

4.3.2 Equações auto-duais e anti-auto-duais

O limite inferior (4.55) é saturado quando

$$[\partial_\mu \mathbf{n} \pm (\mathbf{n} \times \partial_\nu \mathbf{n})]^2 = 0. \quad (4.62)$$

Nesse caso, dizemos que as configurações \mathbf{n} satisfazem às *equações auto-duais* e *anti-auto-duais*, a depender do sinal escolhido¹²:

$$\boxed{\partial_\mu \mathbf{n} = \pm \varepsilon^{\mu\nu} (\mathbf{n} \times \partial_\nu \mathbf{n})}. \quad (4.63)$$

As soluções das equações acima são os *instantons* e *anti-instantons* do modelo sigma não-linear $O(3)$ bidimensional. Para encontrá-las, usaremos o fato de que o espaço alvo da teoria é a esfera S^2 e empregaremos uma projeção estereográfica dessa esfera em um plano complexo. Especificamente, faremos a projeção polo-tangente ilustrada na figura 6.

Um simples argumento envolvendo semelhança de triângulos nos releva que as coordenadas (ω_1, ω_2) do plano e as componentes (n_1, n_2, n_3) do campo \mathbf{n} que “mora” na esfera S^2 estão relacionados por meio das equações:

$$\omega_1 = \frac{2n_1}{1-n_3}, \quad \omega_2 = \frac{2n_2}{1-n_3}. \quad (4.64)$$

Antes de reescrever as equações auto-duais/anti-auto-duais, vamos definir variáveis complexas n e ω da seguinte maneira:

$$n := n_1 + in_2, \quad \omega := \omega_1 + i\omega_2 = \frac{2n}{1-n_3}. \quad (4.65)$$

Desse modo, calculamos

$$\begin{aligned} \partial_1 \omega &= 2 \partial_1 \left(\frac{n}{1-n_3} \right) \\ &= \frac{2}{(1-n_3)^2} [(1-n_3)\partial_1 n - n\partial_1(1-n_3)] \\ &= \frac{2}{(1-n_3)^2} [\partial_1 n + n\partial_1 n_3 - n_3\partial_1 n]. \end{aligned} \quad (4.66)$$

Empregando a notação

$$n \overleftrightarrow{\partial}_1 n_3 := n\partial_1 n_3 - n_3\partial_1 n, \quad (4.67)$$

escrevemos

$$\partial_1 \omega = \frac{2}{(1-n_3)^2} (\partial_1 n + n \overleftrightarrow{\partial}_1 n_3). \quad (4.68)$$

Vamos enfim reescrever as equações (4.63) em termos da variável n . Primeiro, temos

$$\begin{aligned} \partial_1 n &= \partial_1 n_1 + i\partial_1 n_2 \\ &= \pm \varepsilon^{12} (\mathbf{n} \times \partial_1 \mathbf{n})_1 \pm i \varepsilon^{12} (\mathbf{n} \times \partial_2 \mathbf{n})_2 \\ &= \pm [n_2 \partial_2 n_3 - n_3 \partial_2 n_2 + i(n_3 \partial_2 n_1 - n_1 \partial_2 n_3)] \\ &= \pm [(n_2 - in_1)\partial_2 n_3 - n_3 \partial_2 (n_2 - in_1)]. \end{aligned} \quad (4.69)$$

¹² Lembre-se também que \mathbf{n} obedece o vínculo $\mathbf{n}^2 = 1$.

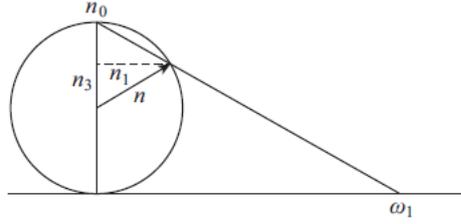


Figura 6 – Projeção estereográfica da esfera alvo S^2_{target} em um plano complexo de coordenadas (ω_1, ω_2) . Adaptado de (FRADKIN, 2021).

Portanto,

$$\partial_1 n = \mp i n \overleftrightarrow{\partial}_2 n_3. \quad (4.70)$$

Analogamente, calculamos $\partial_2 n$ e encontramos

$$\partial_2 n = \pm i n \overleftrightarrow{\partial}_1 n_3. \quad (4.71)$$

Podemos reescrever as equações (4.70) e (4.71) em uma única fórmula envolvendo a variável complexa ω . Para tal, note que

$$\begin{aligned} i\partial_1 \omega &= \frac{2}{(1-n_3)^2} (i\partial_1 n + i n \overleftrightarrow{\partial}_1 n_3) \\ &= \pm \frac{2}{(1-n_3)^2} (\partial_2 n + n \overleftrightarrow{\partial}_2 n_3) \\ &= \pm \partial_2 \omega, \end{aligned} \quad (4.72)$$

e portanto

$$\partial_1 \omega = \mp i \partial_2 \omega. \quad (4.73)$$

Ou seja, as partes real e imaginária da variável complexa ω satisfazem às equações de Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial x^1} = \pm \frac{\partial \omega_2}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial \omega_2}{\partial x^1} = \mp \frac{\partial \omega_1}{\partial x^2}. \quad (4.74)$$

A escolha de sinais acima caracteriza $\omega(z)$ como uma função holomorfa da variável $z = x_1 + ix_2$, para o sinal positivo, ou antiholomorfa, caso contrário. Contudo, apesar da função $\omega(z)$ ser analítica, ela não pode ser inteira. Ora, uma vez que \mathbf{n} é uma função limitada das variáveis (x_1, x_2) , ω também é limitada nestas mesmas variáveis¹³. Por este motivo, se ω fosse inteira, o teorema de Liouville afirmaria que ω deveria ser constante, o que é um absurdo. Logo, $\omega(z)$ é simplesmente analítica, podendo admitir polos simples e zeros mas sem qualquer *branch cut*.

Uma solução particular que atende aos requerimentos acima e possui um único zero de multiplicidade p é dada por

$$\omega(z) = \left(\frac{z - z_0}{\lambda} \right)^p, \quad (4.75)$$

¹³ Lembre-se que $\mathbf{n}(x)$ se aproxima de um valor constante e fixo quando $x \rightarrow \infty$. Nesse caso, a função $\omega(z)$ também tenderia a um valor fixo e constante no infinito, qualificando-a como uma função limitada nas variáveis z .

onde $\lambda \in \mathbb{R}$ e $z_0 \in \mathbb{C}$. Para calcular a carga topológica desta solução, nós devemos primeiro reescrever a ação $S_E[\mathbf{n}]$ em termos de $\omega(z)$. Não é difícil verificar que

$$S_E[\mathbf{n}] = \frac{1}{2} \int d^2x \frac{\partial_\mu \omega \partial^\mu \bar{\omega}}{(1 + \frac{1}{4}|\omega|^2)^2} = \int d^2x \frac{|\frac{d\omega}{dz}|^2}{(1 + \frac{1}{4}|\omega|^2)^2}. \quad (4.76)$$

Notamos de imediato que o denominador da ação acima é simplesmente o coeficiente da métrica¹⁴ do espaço projetivo \mathbb{CP}^1 . Tendo em vista ainda o difeomorfismo entre S^2 e este espaço projetivo, por vezes o modelo sigma não-linear $O(3)$ é chamado de modelo \mathbb{CP}^1 quando posto na forma (4.76)¹⁵.

Agora, podemos inserir (4.75) diretamente em (4.76) e determinar a carga topológica Q . Encontramos assim que $Q = p$. Se a solução polinomial (4.75) fosse um polo simples de ordem p ao invés de um zero, então teríamos um *anti-instanton* de carga $Q = -p$.

Ao contrário dos vórtices e sólitons unidimensionais estudados anteriormente, a solução (4.75) possui dois parâmetros arbitrários, ao invés de apenas um. Temos:

- (i) A “localização” z_0 do instanton/anti-instanton;
- (ii) A “escala” λ do instanton/anti-instanton.

A presença da λ como um parâmetro arbitrário é uma consequência direta da invariância do modelo sigma não-linear clássico por transformações de escala¹⁶. Chamamos z_0 e λ de *modos nulos* do instanton. A solução de instanton mais geral possível é dada por

$$\omega(z) = \prod_i \left(\frac{z - z_i}{\lambda} \right)^{m_i} \prod_j \left(\frac{\lambda}{z - \zeta_j} \right)^{n_j}, \quad (4.77)$$

onde ζ_j denotam os polos de ordem n_j e z_i denotam os zeros de multiplicidade m_i . Nesse caso, temos:

$$Q = \sum_i m_i - \sum_j n_j. \quad (4.78)$$

Uma vez que a solução que encontramos satura a desigualdade (4.55), a ação depende apenas da carga topológica total e não das localizações dos instantons e anti-instantons. Em termos físicos, dizemos que nessa situação os instantons não interagem uns com os outros.

¹⁴ Este fato pode ser confirmado de forma rigorosa investigando a métrica de Fubini-Study do espaço \mathbb{CP}^n e especializando para o caso $n = 1$. Para mais detalhes, consulte o capítulo 8 de (NAKAHARA, 2018). A origem dessa métrica reside no fato de que, dada a identificação $\mathbb{CP}^n = S^{2n+1}/S^1$, o requerimento de que a projeção $\pi: S^{2n+1} \rightarrow \mathbb{CP}^n$ seja uma submersão Riemanniana determina uma métrica quociente no espaço projetivo de maneira natural.

¹⁵ Vale mencionar que a equivalência entre o modelo $O(3)$ e o modelo \mathbb{CP}^1 é preservada no processo de quantização (BANERJEE, 1994).

¹⁶ Na próxima subseção nós iremos discutir brevemente a invariância do modelo sob transformações conformes.

Por fim, vamos determinar explicitamente a configuração $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ para a solução de instanton localizada na origem $z_0 = 0$ e com carga $Q = 1$. Para tal, primeiro invertemos as equações (4.64) e isolamos as componentes de \mathbf{n} :

$$n_3 = \frac{|\omega|^2 - 4}{|\omega|^2 + 4}, \quad n_i = \frac{\omega_i}{\left(1 + \frac{|\omega|^2}{4}\right)}, \quad i = 1, 2. \quad (4.79)$$

Inserindo $\omega(z) = z/\lambda$ nas equações acima, encontramos por fim

$$\boxed{n_3(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}^2 - 4\lambda^2}{\mathbf{x}^2 + 4\lambda^2}, \quad n_i(\mathbf{x}) = \frac{4\lambda x_i}{\mathbf{x}^2 + 4\lambda^2}.} \quad (4.80)$$

Apesar da construção das soluções acima ser bastante elegante, problemas surgem na tentativa de incluir contribuições de instantons e anti-instantons na função de partição. Isso ocorre devido à presença de um segundo parâmetro arbitrário em nossas soluções: a escala λ , sob a qual devemos realizar uma integração para incluir as contribuições dos instantons de todos os “tamanhos”, gerando divergências no infravermelho (FRADKIN, 2021). Essa situação é completamente diferente do caso dos vórtices e anti-vórtices no modelo de Higgs abeliano, onde a função de partição se torna trivial quando não levamos em consideração essas soluções topológicas.

Todavia, isso não significa que é impossível avaliar a contribuição para a função de partição do gás de instantons. De fato, como Berg e Lüscher afirmam em (BERG; LÜSCHER, 1979), a divergência no infravermelho não implica na divergência do gás de instantons como um todo. Isso apenas significa que o gás é “denso” e a intuição construída no modelo de Higgs abeliano, onde é empregada a aproximação de gás diluído, não se aplica diretamente.

Um ingrediente fundamental para construir a solução (4.80) foi a implementação de condições de contorno que nos permitiram identificar o espaço base com a esfera S^2 . Também é possível construir instanton para o modelo $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ usando condições de contorno periódicas, i.e., identificando o espaço base com o toro \mathbb{T}^1 . Além disso, é possível calcular a contribuição dessas soluções para a função de partição (RICHARD; ROUET, 1983). Um estudo que compara e melhora os cálculos no artigo de Berg e Lüscher e no artigo de Richard e Rouet pode ser consultado em (PATRASCIOIU; ROUET, 1982).

4.3.3 Transformações conformes e a redução de Pohlmeyer

Quando posta na forma (4.76), a ação do modelo sigma não-linear $O(3)$ exibe invariância por transformações conformes. Lembramos que, no caso de mapas conformes de um espaço plano nele mesmo, essas transformações de coordenadas são definidas pela seguinte condição sob o tensor métrico (BLUMENHAGEN; PLAUSCHINN, 2009):

$$\eta_{\alpha\beta} \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\nu}} = \Omega(x) \eta_{\mu\nu}, \quad (4.81)$$

onde a função $\Omega(x)$ é um fator de escala positivo. Ou seja, transformações conformes são aquelas que preservam ângulos entre vetores mas não preservam comprimentos. Com o intuito de investigar as condições para a invariância conforme, vamos considerar transformações infinitesimais da forma

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \epsilon^{\mu}(x) + \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (4.82)$$

Notando que $\epsilon_{\mu} = \eta_{\mu\nu}\epsilon^{\nu}$, o lado esquerdo de (4.81) toma a seguinte forma:

$$\eta_{\alpha\beta} \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\nu}} = \eta_{\mu\nu} + (\partial_{\mu}\epsilon_{\nu} + \partial_{\nu}\epsilon_{\mu}) + \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (4.83)$$

Desse modo, vemos que para a transformação ser conforme nós devemos exigir que

$$\partial_{\mu}\epsilon_{\nu} + \partial_{\nu}\epsilon_{\mu} = K(x)\eta_{\mu\nu}. \quad (4.84)$$

onde $K(x)$ é alguma função. Para determiná-la basta tomar o traço da equação acima e substituir o resultado novamente em (4.84). Com isso, descobrimos que

$$\partial_{\mu}\epsilon_{\nu} + \partial_{\nu}\epsilon_{\mu} = \frac{2}{d}(\partial^{\lambda}\epsilon_{\lambda})\eta_{\mu\nu}, \quad (4.85)$$

onde d é a dimensão do espaço em questão. Em duas dimensões (com coordenadas x^0 e x^1) a condição acima se traduz nas equações de Cauchy-Riemann para $\epsilon(x)$:

$$\partial_0 x_0 = \partial_1 x_1, \quad \partial_0 x_1 = -\partial_1 x_0. \quad (4.86)$$

Uma função complexa cujas partes real e imaginária satisfazem às equações acima é holomorfa (em algum conjunto aberto). Com isso em mente, introduzimos as seguintes variáveis complexas:

$$\begin{aligned} z &= x^0 + ix^1, & \epsilon &= \epsilon^0 + i\epsilon^1 \\ \bar{z} &= x^0 - ix^1, & \bar{\epsilon} &= \epsilon^0 - i\epsilon^1. \end{aligned} \quad (4.87)$$

Introduzimos também as derivadas holomorfas:

$$\partial_z = \frac{1}{2}(\partial_0 - i\partial_1), \quad \partial_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(\partial_0 + i\partial_1), \quad (4.88)$$

de modo que

$$\partial_z z = \partial_{\bar{z}} \bar{z} = 1, \quad \partial_z \bar{z} = \partial_{\bar{z}} z = 0. \quad (4.89)$$

Evidentemente, as coordenadas z e \bar{z} não são independentes. Entretanto, é conveniente introduzi-las como tais, visto que assim seremos capazes de invocar os poderosos métodos da geometria complexa quando necessário. Devemos apenas tomar o cuidado de considerar \bar{z} como o complexo conjugado de z ao final dos cálculos.

Tendo em vista (4.86), vemos que uma função holomorfa arbitrária $f(z) = z + \epsilon(z)$ induz uma transformação conforme infinitesimal em duas dimensões¹⁷. Sob o mapeamento $z \mapsto f(z)$ o tensor métrico se transforma de acordo com

$$ds^2 = dz d\bar{z} \mapsto \left| \frac{\partial f}{\partial z} \right|^2 dz d\bar{z}. \quad (4.90)$$

Agora a invariância conforme da ação (4.76) se torna óbvia. A transformação da medida de integração é cancelada pela transformação da derivada no numerador.

Feita uma discussão preliminar acerca da invariância conforme da teoria, vamos usar essa propriedade para mostrar que é possível reduzir a equação de movimento do modelo sigma não-linear $O(3)$ à equação de sine-Gordon para um determinado campo escalar ψ . Na literatura, esse procedimento é conhecido como a redução de Pohlmeyer. Ao final dos cálculos iremos discorrer sobre o significado desse resultado. O início da nossa discussão segue o livros (SHNIR, 2018) e (ABDALLA; ABDALLA; ROTHE, 1991). O cálculo da redução em si segue de perto o artigo original de Pohlmeyer (POHLMAYER, 1976).

O ponto de partida é a lagrangiana do modelo sigma não-linear $O(3)$ no espaço de Minkowski usual com coordenadas espaço-temporais t e x :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \mathbf{n})^2 = \frac{1}{2}[(\partial_t \mathbf{n})^2 - (\partial_x \mathbf{n})^2]. \quad (4.91)$$

Introduzindo coordenadas cone-de-luz

$$\sigma := \frac{1}{2}(x + t), \quad \rho := \frac{1}{2}(x - t), \quad (4.92)$$

vemos que a lagrangiana acima toma a forma

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{4}(\partial_\sigma \mathbf{n} - \partial_\rho \mathbf{n})^2 - \frac{1}{4}(\partial_\sigma \mathbf{n} + \partial_\rho \mathbf{n})^2 \right] = -\frac{1}{2}(\partial_\sigma \mathbf{n}) \cdot (\partial_\rho \mathbf{n}). \quad (4.93)$$

Como antes, introduzimos um termo $\frac{\lambda}{2}(\mathbf{n}^2 - 1)$ na ação e calculamos as equações de movimento. A equação de Euler-Lagrange para \mathbf{n} é

$$\partial_\sigma \partial_\rho \mathbf{n} = -\lambda \mathbf{n}. \quad (4.94)$$

Calculando o produto escalar da equação acima com o campo \mathbf{n} , podemos isolar λ e inserir o resultado em (4.94). Obtemos:

$$\partial_\sigma \partial_\rho \mathbf{n} - \mathbf{n} [(\partial_\sigma \partial_\rho \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n}] = 0. \quad (4.95)$$

Podemos simplificar a equação acima. Primeiro, note que as derivadas de \mathbf{n} são ortogonais ao campo como consequência do vínculo $\mathbf{n}^2 = 1$:

$$\mathbf{n} \cdot \partial_\sigma \mathbf{n} = \mathbf{n} \cdot \partial_\rho \mathbf{n} = 0. \quad (4.96)$$

¹⁷ Esse é, claro, um resultado bem conhecido da análise complexa. O teorema relevante é: se $f(z)$ é holomorfa em z_0 e $f'(z_0) \neq 0$, então $f(z)$ é conforme em z_0 (GAMELIN, 2001).

Desse modo,

$$0 = \partial_\sigma(\mathbf{n} \cdot \partial_\sigma \mathbf{n}) = \partial_\sigma \mathbf{n} \cdot \partial_\rho \mathbf{n} + \mathbf{n} \cdot \partial_\sigma \partial_\rho \mathbf{n}. \quad (4.97)$$

Usando (4.97) em (4.95), encontramos:

$$\boxed{\partial_\sigma \partial_\rho \mathbf{n} + \mathbf{n}(\partial_\sigma \mathbf{n} \cdot \partial_\rho \mathbf{n}) = 0.} \quad (4.98)$$

Na região em que ambas as derivadas de \mathbf{n} são não-nulas e linearmente independentes, de modo que o trio $\{\mathbf{n}, \partial_\sigma \mathbf{n}, \partial_\rho \mathbf{n}\}$ forma uma base para o espaço \mathbb{R}^3 , introduzimos o campo ψ definido por:

$$\cos \psi := \frac{\partial_\sigma \mathbf{n} \cdot \partial_\rho \mathbf{n}}{|\partial_\sigma \mathbf{n}| |\partial_\rho \mathbf{n}|}. \quad (4.99)$$

Proposição 4.3.1. *Pode-se assumir que $|\partial_\sigma \mathbf{n}| = |\partial_\rho \mathbf{n}| = 1$.*

Demonstração. Lembre-se que nas coordenadas (t, x) o tensor energia-momento da teoria é dado por $T_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathbf{n} \cdot \partial_\nu \mathbf{n} - \eta_{\mu\nu} \mathcal{L}$. Calculando as componentes de $T_{\mu\nu}$ em coordenadas cone de luz, temos que $T_{\sigma\rho} = 0$, bem como

$$T^{\sigma\sigma} = \frac{1}{4}(\partial_\sigma \mathbf{n})^2, \quad T^{\rho\rho} = \frac{1}{4}(\partial_\rho \mathbf{n})^2. \quad (4.100)$$

Como consequência da equação de movimento (4.98), encontramos que

$$\partial_\sigma T_{\rho\rho} = \partial_\rho T_{\sigma\sigma} = 0. \quad (4.101)$$

Logo, $T_{\rho\rho}$ e $T_{\sigma\sigma}$ dependem apenas de ρ e σ , respectivamente. Agora, uma vez que a ação clássica é invariante sob uma transformação conforme¹⁸ $(\sigma, \rho) \mapsto (f(\sigma), f(\rho))$ qualquer, temos que a densidade de energia deve ser uma constante. Sem perda de generalidade, escolhamos essa constante de tal modo que $|\partial_\sigma \mathbf{n}| = |\partial_\rho \mathbf{n}| = 1$. ■

Vamos resumir as propriedades que \mathbf{n} e suas primeiras derivadas devem satisfazer. De agora em diante, vamos usar a notação $\partial_\sigma \mathbf{n} \equiv \mathbf{n}_\sigma$ para derivadas parciais. Temos:

$$\mathbf{n}^2 = \mathbf{n}_\sigma^2 = \mathbf{n}_\rho^2 = 1, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_\sigma = \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_\rho = 0. \quad (4.102)$$

O único invariante não determinado é precisamente $\mathbf{n}_\sigma \cdot \mathbf{n}_\rho = \cos \psi$.

Sabemos que o trio $\{\mathbf{n}, \mathbf{n}_\sigma, \mathbf{n}_\rho\}$ forma uma base para \mathbb{R}^3 e que as soluções de (4.98) satisfazem às propriedades (4.102). Reciprocamente, (4.102) implica na equação de movimento. Vamos provar rapidamente essa última afirmação.

¹⁸ Note que, a menos de uma constante, as coordenadas σ e ρ coincidem com z e \bar{z} na teoria Euclidiana, de modo que a transformação que invocamos para lançar mão da invariância conforme de fato faz sentido.

Demonstração. Em primeiro lugar, note que apesar do conjunto $\{\mathbf{n}, \mathbf{n}_\sigma, \mathbf{n}_\rho\}$ gerar o espaço \mathbb{R}^3 , esta base não é ortonormal dado que $\mathbf{n}_\sigma \cdot \mathbf{n}_\rho \neq 0$. Vamos construir uma base ortonormal $\{\mathbf{n}, \mathbf{n}_\sigma, \mathbf{m}\}$. Para tal, definimos \mathbf{m} como

$$\mathbf{m} := \frac{\mathbf{n}_\rho - (\mathbf{n}_\sigma \cdot \mathbf{n}_\rho)\mathbf{n}_\sigma}{\|\mathbf{n}_\rho - (\mathbf{n}_\sigma \cdot \mathbf{n}_\rho)\mathbf{n}_\sigma\|} = \frac{1}{\sin \psi}(\mathbf{n}_\rho - \cos \psi \mathbf{n}_\sigma). \quad (4.103)$$

Agora podemos decompor $\mathbf{n}_{\sigma\rho}$ em suas componentes da maneira convencional:

$$\mathbf{n}_{\sigma\rho} = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_{\sigma\rho})\mathbf{n} + (\mathbf{n}_\sigma \cdot \mathbf{n}_{\sigma\rho})\mathbf{n}_\sigma + (\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}_{\sigma\rho})\mathbf{m}. \quad (4.104)$$

Para calcular $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_{\sigma\rho}$, basta notar que

$$0 = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_\sigma)_\rho = \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_{\sigma\rho} + \mathbf{n}_\rho \cdot \mathbf{n}_\sigma. \quad (4.105)$$

Os termos $\mathbf{n}_\sigma \cdot \mathbf{n}_{\sigma\rho}$ e $\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}_{\sigma\rho}$, por sua vez, se anulam em virtude do fato que

$$0 = (\mathbf{n}_\sigma \cdot \mathbf{n}_\sigma)_\rho = 2\mathbf{n}_\sigma \cdot \mathbf{n}_{\sigma\rho}. \quad (4.106)$$

Evidentemente, a relação acima também se aplica quando trocamos σ e ρ de lugar. Por fim, encontramos

$$\mathbf{n}_{\sigma\rho} = -(\mathbf{n}_\sigma \cdot \mathbf{n}_\rho)\mathbf{n}, \quad (4.107)$$

que é precisamente a equação de movimento (4.98) e a prova está completa. ■

Com isso, vemos que encontrar soluções para (4.98) é equivalente à construção de todas as componentes do vetor unitário $\mathbf{n} = \mathbf{n}(\sigma, \rho)$ tal que $\mathbf{n}_\sigma^2 = \mathbf{n}_\rho^2 = 1$. Agora, vamos enfim deduzir a equação de sine-Gordon para o campo ψ . O primeiro passo é expressar as derivadas segundas $\mathbf{n}_{\sigma\sigma}$ e $\mathbf{n}_{\rho\rho}$ como combinações lineares de \mathbf{n} , \mathbf{n}_σ e \mathbf{n}_ρ . Calcularemos as componentes de $\mathbf{n}_{\rho\rho}$ em detalhes e apenas citaremos o resultado para $\mathbf{n}_{\sigma\sigma}$, cuja dedução é completamente análoga. Começamos escrevendo

$$\mathbf{n}_{\rho\rho} = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_{\rho\rho})\mathbf{n} + (\mathbf{n}_\sigma \cdot \mathbf{n}_{\rho\rho})\mathbf{n}_\sigma + (\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}_{\rho\rho})\mathbf{m}. \quad (4.108)$$

Para calcular $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_{\rho\rho}$, note que

$$0 = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_\rho)_\rho = \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_{\rho\rho} + 1. \quad (4.109)$$

Por outro lado, para obter $\mathbf{n}_\sigma \cdot \mathbf{n}_{\rho\rho}$ nós calculamos

$$\begin{aligned} (\mathbf{n}_\sigma \cdot \mathbf{n}_\rho)_\rho &= \mathbf{n}_\sigma \cdot \mathbf{n}_{\rho\rho} = (\cos \psi)_\rho \\ &= -\psi_\rho \sin \psi, \end{aligned} \quad (4.110)$$

onde acima usamos (4.106). Usando a definição de \mathbf{m} , escrevemos

$$\mathbf{n}_{\rho\rho} = -\mathbf{n} - \psi_\rho \sin \psi \mathbf{n}_\sigma + \left[\frac{(\mathbf{n}_\rho - \cos \psi \mathbf{n}_\sigma) \cdot \mathbf{n}_{\rho\rho}}{\sin \psi} \right] \mathbf{m}. \quad (4.111)$$

Uma vez que $\mathbf{n}_{\rho\rho} \cdot \mathbf{n}_\rho = 0$, o primeiro termo dentro das chaves acima se anula. Usando (4.110) em (4.111), encontramos após algumas simplificações:

$$\mathbf{n}_{\rho\rho} = -\mathbf{n} - \psi_\rho \sin \psi \mathbf{n}_\sigma + \sigma_\rho \cot \psi \mathbf{n}_\rho - \psi_\rho \frac{\cos^2 \psi}{\sin \psi} \mathbf{n}_\sigma. \quad (4.112)$$

Finalmente, temos

$$\mathbf{n}_{\rho\rho} = -\mathbf{n} - \frac{\psi_\rho}{\sin \psi} \mathbf{n}_\sigma + \psi_\rho \cot \psi \mathbf{n}_\rho; \quad (4.113a)$$

$$\mathbf{n}_{\sigma\sigma} = -\mathbf{n} - \frac{\psi_\sigma}{\sin \psi} \mathbf{n}_\rho + \psi_\sigma \cot \psi \mathbf{n}_\sigma. \quad (4.113b)$$

Para completar a redução de Pohlmeyer resta calcularmos $\psi_{\sigma\rho}$. Começamos usando a relação (4.106) para escrever:

$$\begin{aligned} \psi_{\sigma\rho} &= - \left[\frac{(\mathbf{n}_\sigma \cdot \mathbf{n}_{\rho\rho})}{\sin \psi} \right]_\sigma \\ &= - \left[\frac{1}{\sin \psi} (\mathbf{n}_{\sigma\sigma} \cdot \mathbf{n}_{\rho\rho} + \mathbf{n}_\sigma \cdot \mathbf{n}_{\sigma\rho\rho}) + \psi_\rho \psi_\sigma \cot \psi \right]. \end{aligned} \quad (4.114)$$

Antes de prosseguirmos, vamos avaliar o termo $\mathbf{n}_\sigma \cdot \mathbf{n}_{\sigma\rho\rho}$ usando uma série de truques parecidos com aqueles empregados até o momento em nosso cálculo. Primeiro, perceba que a equivalência das derivadas parciais mistas nos permite escrever

$$0 = (\mathbf{n}_\sigma \cdot \mathbf{n}_{\sigma\rho})_\rho = (\mathbf{n}_{\sigma\rho})^2 + \mathbf{n}_\sigma \cdot \mathbf{n}_{\sigma\rho\rho}. \quad (4.115)$$

Portanto, para determinar $\mathbf{n}_\sigma \cdot \mathbf{n}_{\sigma\rho\rho}$ basta calcular $(\mathbf{n}_{\sigma\rho})^2$. Como antes, decompondo $\mathbf{n}_{\sigma\rho}$ na base $\{\mathbf{n}, \mathbf{n}_\sigma, \mathbf{m}\}$, encontramos:

$$\mathbf{n}_{\sigma\rho} = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_{\sigma\rho})\mathbf{n} + \underbrace{(\mathbf{n}_\sigma \cdot \mathbf{n}_{\sigma\rho})}_{=0} \mathbf{n}_\sigma + \underbrace{(\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}_{\sigma\rho})}_{=0} \mathbf{m}. \quad (4.116)$$

O único produto escalar não-nulo acima pode ser facilmente calculado avaliando $(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_\sigma)_\rho$. O resultado final é

$$\mathbf{n}_\sigma \cdot \mathbf{n}_{\sigma\rho\rho} = -(\mathbf{n}_{\sigma\rho})^2 = -\cos^2 \psi. \quad (4.117)$$

Inserindo (4.117) em (4.114), obtemos¹⁹:

$$\psi_{\sigma\rho} = -\frac{1}{\sin \psi} (\mathbf{n}_{\rho\rho} \cdot \mathbf{n}_{\sigma\sigma} - \cos^2 \psi + \psi_\sigma \psi_\rho \cos \psi). \quad (4.118)$$

Por fim, usando as equações (4.113a) e (4.113b) para calcular o último produto escalar acima e simplificando, descobrimos que

$$\boxed{\psi_{\sigma\rho} = -\sin \psi.} \quad (4.119)$$

¹⁹ O leitor atento notará que o pré-fator da equação (4.118) consiste em um termo de $\sin \psi$ no denominador ao invés desse mesmo fator no numerador, conforme indicam a segunda linha da equação III.2 e a equação III.3 em (POHLMAYER, 1976). De fato, há um pequeno erro de digitação no artigo do Pohlmeyer que não compromete de forma alguma o resultado final.

Conforme antecipado, ψ de fato obedece à equação de sine-Gordon.

Essa relação entre o modelo sigma não-linear $O(3)$ e o modelo de sine-Gordon é mais do que apenas sugestiva. A matriz-S dos sólitons de ambas as teorias é idêntica (ZAMOLODCHIKOV; ZAMOLODCHIKOV, 1990) e os pares de Lax de ambos os modelos clássicos podem ser mapeados. O método de redução foi posteriormente estendido para outros modelos advindos da teoria de cordas (GRIGORIEV; TSEYTLIN, 2008) (SHNIR, 2018).

4.4 Modelo sigma não-linear em espaços quocientes

A existência de instantons no modelo sigma não-linear $O(3)$ em duas dimensões não é uma característica genérica dos modelos $O(N)$, mas sim uma consequência particular do caso $N = 3$, uma vez que $\pi_2(S^2)$ é não-trivial. Como vimos no capítulo 2, sabe-se que $\pi_2(S^n)$ é trivial para todo $n > 2$.

A pergunta fundamental que surge é: existem teorias que admitem configurações topologicamente não-triviais de forma genérica, “para todo N”? A resposta é sim.

4.4.1 Considerações gerais

A família mais importante de exemplos são os modelos sigma não-lineares cujos espaços alvos são classes laterais G/H , onde G é um grupo de Lie simplesmente conexo e H possui pelos menos um subgrupo $U(1)$.

Dado que G é simplesmente conexo, segue que todos os laços nesse espaço são retráteis a um único ponto, ou seja, $\pi_2(G) \cong \{0\}$. Assim, vemos que a introdução do quociente G/H é crucial para a existência dos instantons. As configurações de campos que procuramos definem mapas do tipo $S^2_{\text{base}} \rightarrow G/H$. Pelas considerações do capítulo 2, sabemos que

$$\pi_2(G/H) \cong \pi_1(H) \quad (4.120)$$

é não-trivial, se H possui algum subgrupo $U(1)$. No caso em que $H = U(1)$, então temos $\pi_2(G/H) \cong \mathbb{Z}$. É possível ainda entender essa situação por meio de um argumento informal devido a Polyakov (POLYAKOV, 1987), o qual reproduzimos a seguir.

Para a família de teorias que estamos considerando os campos podem ser representados na forma

$$\varphi_a(x) = g_{ab}(x)\varphi_b^{(0)}, \quad x \in S^2, \quad (4.121)$$

onde $g \in G$ e $\varphi^{(0)}$ é um campo constante constante e invariante sob a ação do grupo H . Ou seja,

$$h_{ab}\varphi_b^{(0)} = \varphi_a^{(0)}. \quad (4.122)$$

É importante ressaltar que a matriz $g(x)$ não precisa ser necessariamente contínua. Vamos analisar essa questão agora. Considere um conjunto de matrizes $g^N(x)$ definidas no hemisfério norte da esfera base S^2 e um conjunto $g^S(x)$ definido no hemisfério sul. Suponha ainda que a seguinte relação seja válida no equador:

$$g^N(x) = g^S(x) \cdot h(x), \quad x \in S^1, h \in H. \quad (4.123)$$

Agora que $\varphi(x)$ está restrito a cada hemisfério de S^2 , podemos mostrar sem esforço que esse campo é contínuo no equador. Para ver isso, primeiro definimos

$$\varphi^N(x) = g^N(x)\varphi^{(0)}, \quad \varphi^S(x) = g^S(x)\varphi^{(0)}. \quad (4.124)$$

Portanto, no equador nós temos:

$$\varphi^N(x) = g^N(x)\varphi^{(0)} = g^S(x)h(x)\varphi^{(0)} = g^S(x)\varphi^{(0)} = \varphi^S(x). \quad (4.125)$$

Tendo em vista a relação (4.123), os mapas de S^2 em G/H que procuramos podem ser classificados de acordo com os mapas do equador, o círculo S^1 , em H . Se H for $U(1)$, então temos mapas de S^1 em S^1 , os quais são classificados pelo *winding number*, como já sabemos.

Uma situação um pouco mais geral se dá quando o grupo H é da forma:

$$H = U(1) \otimes (\text{outro grupo}). \quad (4.126)$$

Dessa forma, podemos mapear S^1 no primeiro fator de H e novamente temos $\pi_2(G/H) \cong \mathbb{Z}$. Essa é demonstração informal da relação (4.120).

4.4.2 Instantons no espaço projetivo \mathbb{CP}^{N-1}

Um exemplo concreto que se enquadra na família de teorias que discutimos é dado pelo modelo \mathbb{CP}^{N-1} . Esse é um modelo sigma não-linear de um campo complexo com N componentes, o qual denotaremos por $z_a(x)$, $a = 1, \dots, N$. Assumimos que o campo se transforma de acordo com a representação fundamental de $SU(N)$ e que ele é acoplado a um subgrupo de calibre $U(1)$. O seguinte vínculo é satisfeito em todos os pontos do espaço base:

$$\sum_{a=1}^N |z_a(x)|^2 = 1; \quad (4.127)$$

A lagrangiana da teoria é

$$\mathcal{L} = \frac{1}{g^2} |D_\mu z_a|^2, \quad (4.128)$$

onde a derivada covariante D_μ é definida por $D_\mu = \partial_\mu + iA_\mu$, sendo A_μ o campo de calibre $U(1)$. O espaço quociente em que o modelo está definido é dado por

$$\mathbb{CP}^{N-1} \cong \frac{SU(N)}{SU(N-1) \otimes U(1)}. \quad (4.129)$$

Na linguagem introduzida no capítulo 2 para discutir as variedades de vácuo, dizemos que essa teoria quebra a simetria $SU(N)$ espontaneamente para uma simetria $SU(N-1)$ não quebrada e calibrada com um subgrupo $U(1)$.

Analogamente ao caso do modelo sigma não-linear $O(3)$, para que a ação da teoria seja finita, exigimos que

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} D_\mu z_a = 0. \quad (4.130)$$

Isso pode ser realizado se impormos a condição:

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \mathbf{z} = \mathbf{z}_0 e^{i\theta(x)}, \quad (4.131)$$

onde o vetor complexo \mathbf{z}_0 é constante e arbitrário (com norma unitária, evidentemente). O campo $\theta(x)$ é uma fase definida módulo 2π . O *winding number* dessa fase é um invariante topológico com valores inteiros (lembre-se da fase que discutimos nas soluções de vórtices). Portanto, a carga topológica Q é dada pela integral

$$Q := \frac{1}{2\pi} \oint_{\partial\Sigma} dx_\mu \partial_\mu \theta = \int_\Sigma d^2x \epsilon_{\mu\nu} \partial_\mu (z_a^* \partial_\nu z_a), \quad (4.132)$$

onde Σ é um disco grande cuja fronteira é $\partial\Sigma$. Lembramos ainda que há uma soma subentendida sob os índices repetidos. Fazendo novamente um paralelo com o modelo $O(3)$, provamos que a existência dessa carga implica em um limite inferior para o valor da ação. Para tal, introduzimos o campo

$$C_\mu^a(x) := \partial_\mu z^a(x) - z^a(z_b^* \partial_\mu z_b). \quad (4.133)$$

Com isso, temos a seguinte desigualdade imediata

$$[C_\mu^a(x) \pm i\epsilon_{\mu\nu} C_\nu^a(x)]^2 \geq 0, \quad (4.134)$$

a partir da qual segue que

$$|\partial_\mu z_a|^2 + (z_a^* \partial_\mu z_a)^2 \geq \pm i\epsilon_{\mu\nu} \partial_\mu (z_a^* \partial_\nu z_a). \quad (4.135)$$

Integrando, obtemos a desigualdade desejada:

$$S[z_a] \geq 2\pi|Q|. \quad (4.136)$$

Os instantons da teoria são as configurações que saturam a desigualdade acima. Essa condição nos leva novamente às equações de dualidade:

$$\boxed{C_\mu^a(x) = \pm i\epsilon_{\mu\nu} C_\nu^a(x)}. \quad (4.137)$$

Essa é uma equação diferencial parcial de primeira ordem cujas soluções são dadas por funções racionais no plano complexo, assim como no modelo $O(3)$. Escritas em termos de A_μ , as soluções de instantons (e anti-instantons) com carga topológica $Q = \pm n$ localizadas na origem tomam a forma:

$$\boxed{A_\mu^\pm(x) = \pm n \epsilon_{\mu\nu} \frac{x_\nu}{x^2 + \lambda^2}}, \quad (4.138)$$

onde λ é um fator de escala arbitrário.

5 | Instantons em mais dimensões

Then I tried to define the field strengths $F_{\mu\nu}$ by

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial B_\mu}{\partial x_\nu} - \frac{\partial B_\nu}{\partial x_\mu},$$

which was a “natural” generalization of electromagnetism.

This led to a mess, and I had to give up.

— Chen Ning Yang em *Selected Papers (1945-1980) with Commentary*

Em 1975, Belavin e colaboradores descobriram a primeira família de soluções de instantons¹ para a teoria de Yang-Mills livre em quatro dimensões (BELAVIN et al., 1975). O interesse nessas soluções para a investigação de fenômenos não-perturbativos da QCD já havia sido discutido por Polyakov na época em que o artigo foi publicado. Conforme antecipamos, a construção das soluções para o grupo de calibre $SU(2)$ será análoga àquela feita para os instantons do modelo sigma não-linear $O(3)$.

5.1 Teoria de Yang-Mills em quatro dimensões

Nosso ponto de partida é a teoria de Yang-Mills Euclidiana com grupo de calibre $G = SU(2)$. Seguiremos a notação previamente introduzida na seção 1.3. A ação desse modelo é dada por

$$S_E = \frac{1}{4} \int d^4x \operatorname{Tr} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad (5.1)$$

onde $F_{\mu\nu}^a$ é dado por

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g\epsilon^{abc} A_\mu^b A_\nu^c. \quad (5.2)$$

Tanto o tensor $F_{\mu\nu}$ quanto o potencial A_μ tomam valores na álgebra de G . Isto é,

$$F_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \sigma^a F_{\mu\nu}^a, \quad A_\mu = \frac{1}{2} \sigma^a A_\mu^a, \quad (5.3)$$

onde σ^a denotam as matrizes de Pauli, como de costume. Usando as relações de comutação dessas matrizes, é fácil mostrar que em termos de $F^{\mu\nu}$ a expressão (5.2) se escreve

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig[A_\mu, A_\nu] \equiv \partial_{[\mu} A_{\nu]} - ig[A_\mu, A_\nu]. \quad (5.4)$$

¹ Ou ainda, na terminologia da época: pseudoparticulas.

Além disso, definimos o dual de $F_{\mu\nu}$ como

$$\tilde{F}_{\mu\nu} := \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\lambda}F_{\rho\lambda}, \quad (5.5)$$

onde o símbolo de Levi-Civita é definido de tal modo que $\epsilon_{1234} = +1$. É importante ressaltar que não há diferença entre índices contravariantes e covariantes na formulação Euclidiana da teoria. Nesse caso, temos que o dual de \tilde{F} é simplesmente F , diferente da teoria no espaço-tempo de Minkowski, onde o dual do tensor dual retorna $-F$. Por fim, não é difícil provar que

$$\tilde{F}_{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}. \quad (5.6)$$

Como um primeiro exercício de aquecimento, vamos reescrever o traço de $\tilde{F}_{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ como uma derivada total de um certo 4-vetor K_μ .

Proposição 5.1.1. *Seja*

$$K_\mu := \frac{1}{4}\epsilon_{\mu\nu\rho\lambda} \left(A_\nu^a \partial_\rho A_\lambda^a + \frac{g}{3}\epsilon_{abc} A_\nu^a A_\rho^a A_\lambda^a \right) = \epsilon_{\mu\nu\rho\lambda} \text{Tr} \left(\frac{1}{2} A_\nu \partial_\rho A_\lambda - \frac{ig}{3} A_\nu A^\rho A_\lambda \right), \quad (5.7)$$

Então,

$$\partial_\mu K_\mu = \frac{1}{4} \text{Tr} \tilde{F}_{\mu\nu} F_{\mu\nu} = \frac{1}{8} \tilde{F}_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a. \quad (5.8)$$

Demonstração. Usando a antissimetria de $\epsilon_{\mu\nu\rho\lambda}$ e a propriedade cíclica do traço, encontramos:

$$\begin{aligned} \partial_\mu K_\mu &= \epsilon_{\mu\nu\rho\lambda} \text{Tr} \left(\frac{1}{2} (\partial_\mu A_\nu) (\partial_\rho A_\lambda) + \frac{1}{2} A_\nu \partial_\mu \partial_\rho A_\lambda - ig (\partial_\mu A_\nu) A_\rho A_\lambda \right) \\ &= \epsilon_{\mu\nu\rho\lambda} \text{Tr} \left(\frac{1}{2} (\partial_\mu A_\nu) (\partial_\rho A_\lambda) - ig (\partial_\mu A_\nu) A_\rho A_\lambda \right). \end{aligned} \quad (5.9)$$

Por outro lado, calculando diretamente o traço de $\tilde{F}_{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ e usando as mesmas propriedades citadas acima, temos:

$$\begin{aligned} \text{Tr} F_{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu} &= \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho\lambda} \text{Tr} \{ (\partial_{[\mu} A_{\nu]}) - ig[A_\mu, A_\nu] (\partial_{[\rho} A_{\lambda]} - ig[A_\rho, A_\lambda]) \} \\ &= 2\epsilon_{\mu\nu\rho\lambda} \text{Tr} [(\partial_\mu A_\nu) (\partial_\rho A_\lambda)] - 2ig\epsilon_{\mu\nu\rho\lambda} \text{Tr} [(\partial_\mu A_\nu) A_\rho A_\lambda] \\ &\quad - 2ig\epsilon_{\mu\nu\rho\lambda} \text{Tr} [A_\mu A_\nu (\partial_\rho A_\lambda)] - 2g^2 \epsilon_{\mu\nu\rho\lambda} \text{Tr} (A_\mu A_\nu A_\rho A_\lambda). \end{aligned} \quad (5.10)$$

Novamente, pela propriedade cíclica do traço vemos que o último termo é identicamente nulo e os dois últimos termos restantes são idênticos. Assim, descobrimos que

$$\text{Tr} F_{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu} = 2\epsilon_{\mu\nu\rho\lambda} \text{Tr} [(\partial_\mu A_\nu) (\partial_\rho A_\lambda)] - 4ig\epsilon_{\mu\nu\rho\lambda} \text{Tr} [A_\mu A_\nu (\partial_\rho A_\lambda)] \quad (5.11)$$

e a demonstração está completa após compararmos (5.9) com a equação acima. ■

Se o cálculo acima lhe pareceu uma bagunça, é porque ele de fato é. A linguagem mais conveniente para expressar resultados desse tipo se baseia no uso das *formas diferenciais*. Nesse contexto, o potencial $A = A_\mu dx^\mu$ é uma 1-forma e F é uma 2-forma dada por

$$F = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu = dA - igA \wedge A, \quad (5.12)$$

onde o símbolo \wedge denota o produto exterior e d representa o operador de derivada exterior. Com as definições acima, o resultado que acabamos de provar pode ser enunciado da seguinte maneira: dado que

$$\int d^4x \operatorname{Tr} F_{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu} = 2 \int \operatorname{Tr}(F \wedge F), \quad (5.13)$$

então o integrando $\operatorname{Tr}(F \wedge F)$ é uma forma exata. Isto é,

$$\operatorname{Tr}(F \wedge F) = d \operatorname{Tr} \left(dA \wedge A + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A \right). \quad (5.14)$$

O traço no lado direito da equação acima é chamado de *forma de Chern-Simons*, a qual denotaremos por f_{CS} . De fato, usando a definição $F = dA + A \wedge A$, é fácil ver que

$$df_{\text{CS}} = \operatorname{Tr}(dA \wedge dA + 2 dA \wedge A \wedge A) = \operatorname{Tr}(F \wedge F). \quad (5.15)$$

5.1.1 Condições de contorno, equações auto-duais *and all that*

Caminhando em direção à física do problema, vamos considerar um volume 4-dimensional $V \subset E^4$ cuja fronteira no infinito seja a 3-esfera S^3 . Assuma primeiro que estamos lidando com o vácuo puro da teoria de Yang-Mills, de modo que tanto A_μ quanto $F_{\mu\nu}$ se anulam identicamente. Não é difícil ver que $K_\mu = 0$ também. Desse modo, tanto as equações de movimento quanto a identidade de Bianchi são identicamente satisfeitas:

$$D_\mu F_{\mu\nu} = 0, \quad D_\mu \tilde{F}_{\mu\nu} = 0. \quad (5.16)$$

Pelo teorema de Gauss, segue que

$$\int_V d^4x \operatorname{Tr} F_{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu} = 4 \int_V \partial_\mu K_\mu d^4x = 4 \oint_{S^3} K_\mu \hat{n}_\mu d^3x, \quad (5.17)$$

onde \hat{n}_μ representa o versor normal à superfície de S^3 . Novamente, as duas igualdades acima são identicamente satisfeitas no caso do vácuo puro de Yang-Mills.

Uma situação mais interessante surge se considerarmos que o potencial A_μ é “puro *gauge*” no infinito, i.e., na esfera S^3 . Essa condição assintótica é escrita da forma

$$A_\mu \rightarrow -\frac{i}{g} (\partial_\mu U) U^\dagger \Big|_{S^3}. \quad (5.18)$$

Um cálculo simples revela que $F_{\mu\nu} = 0$ nesse caso. Agora, escreva U em termos das matrizes de Pauli da seguinte maneira:

$$U = \frac{1}{\tau} (x_4 I + i \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\sigma}), \quad (5.19)$$

onde τ é definido por $\tau^2 = x_4^2 + \mathbf{x}^2$. Não é difícil calcular as componentes do potencial. Com efeito, para $\ell = 1, 2, 3$ descobre-se que

$$A_4 = \frac{1}{g\tau^2} (\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\sigma}), \quad A_\ell = \frac{i}{g\tau^2} [x_\ell - \sigma_\ell (\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\sigma} + ix_4)]. \quad (5.20)$$

Usando o resultado acima, um cálculo mais tedioso revela que K_μ é dado por

$$K_\mu = \frac{2x_\mu}{g^2\tau^4}. \quad (5.21)$$

Notando que $\hat{n}_\mu = x_\mu/\tau$, obtemos:

$$\begin{aligned} \int_V d^4x \operatorname{Tr} F_{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu} &= 4 \oint_{S^3} K_\mu \hat{n}_\mu d^3x \\ &= \frac{8}{g^2\tau^3} \oint_{S^3} d^3x. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Uma vez que a área superficial da 3-esfera de raio τ é dada por $2\pi^2\tau^3$, concluímos que

$$\int_V d^4x \operatorname{Tr} F_{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{16\pi^2}{g^2}. \quad (5.23)$$

A conclusão que tiramos desse resultado é que $F_{\mu\nu}$ não pode ser nulo em *todo* o espaço E^4 , mas apenas na fronteira S^3 . A origem última desse comportamento é o fato de que K_μ não é um invariante por transformações de calibre. Em geral, chamamos de *índice de Pontryagin* (ou carga topológica) a integral²

$$Q := \frac{g^2}{16\pi^2} \operatorname{Tr} \int d^4x F_{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu}. \quad (5.24)$$

O número inteiro acima classifica as soluções das equações de movimento Euclidianas cuja ação é finita. Ora, note que na esfera S^3 de raio τ os potenciais que tornam a ação finita³ são mapas de S^3 no grupo de calibre G :

$$g(x): S^3 \longrightarrow G \quad (5.25)$$

Contudo, tendo em vista que $S^3 \cong SU(2)$, as configurações que procuramos são mapas de S^3 em S^3 . Desse modo, sabemos que

$$\pi_3(S^3) \cong \mathbb{Z}, \quad (5.26)$$

² O significado geométrico de Q reside no fato de que esse número inteiro é usado para classificar fibrados principais com grupo $SU(2)$ sobre a esfera S^4 (NASH; SEN, 1988).

³ De tal forma que $F_{\mu\nu}$ decai com $1/r^2$ na fronteira S^3 no infinito.

e portanto, o índice de Pontryagin é simplesmente o *winding number* do mapa. Para ver isso explicitamente, escrevemos K_μ usando (5.18). Obtemos com isso:

$$K_\mu = \frac{1}{6g^2} \epsilon_{\mu\nu\rho\lambda} \text{Tr}(U^{-1}\partial_\nu U)(U^{-1}\partial_\lambda U)(U^{-1}\partial_\rho U). \quad (5.27)$$

Desse modo, vemos que a fórmula

$$Q = \frac{g^2}{4\pi^2} \int \partial_\mu K_\mu d^4x. \quad (5.28)$$

para a carga topológica é a generalização imediata de (4.49) para o caso da 3-esfera⁴. Para encontrar as soluções de instanton, reescrevemos a ação da seguinte forma:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{4} \int d^4x \text{Tr} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} \\ &= \frac{1}{8} \int d^4x \text{Tr} (F_{\mu\nu} - \tilde{F}_{\mu\nu})^2 + \frac{1}{4} \int d^4x \text{Tr} F_{\mu\nu} \tilde{F}_{\mu\nu} \\ &= \frac{4\pi^2}{g^2} Q + \frac{1}{8} \int d^4x \text{Tr} (F_{\mu\nu} - \tilde{F}_{\mu\nu})^2. \end{aligned} \quad (5.29)$$

Uma vez que o último termo acima é manifestamente positivo, deduzimos um limite inferior para o valor da ação Euclidiana:

$$S \geq \frac{4\pi^2}{g^2} Q. \quad (5.30)$$

As soluções que saturam o limite acima evidentemente satisfazem às equações de auto-dualidade:

$$F_{\mu\nu} = \tilde{F}_{\mu\nu}. \quad (5.31)$$

Para o caso em que $F_{\mu\nu} = -\tilde{F}_{\mu\nu}$, temos equações anti-auto-duais e uma solução de *anti-instanton*, cuja ação é dada por $4\pi^2|Q|/g^2$. A solução explícita para a equação auto-dual no caso em que $Q = 1$ é dada por (BELAVIN et al., 1975):

$$A_\mu = \frac{\tau^2}{\tau^2 + \lambda^2} U^{-1}(x) \partial_\mu U(x), \quad U(x) = \frac{1}{\tau} (x_4 + i\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\sigma}). \quad (5.32)$$

O *Ansatz* que leva à solução acima pode ser obtido por meio do seguinte truque: considere o grupo de calibre $SU(2) \otimes SU(2) \cong O(4)$ ao invés de apenas $SU(2)$. Assim, as equações de auto-dualidade possuem uma simetria $O(4) \otimes O(4)$, onde uma cópia de $O(4)$ descreve rotações no espaço enquanto a outra descreve rotações “isotópicas”.

⁴ A maneira mais simples de ver isso é usar $U = n_4 I + i\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}$ com $n_4^2 + \mathbf{x}^2 = 1$ na equação (5.27) e calcular Q . Ao final dos cálculos encontramos

$$Q = \frac{1}{64\pi^2} \int_{S^3} d^3x \epsilon_{abcd} \epsilon^{\mu\nu\lambda} n^a \partial_\mu n^b \partial_\nu n^c \partial_\lambda n^d,$$

que é o análogo direto de (4.49).

Procuramos por uma solução que quebra a simetria $SU(2) \otimes SU(2) \cong O(4)$ mas que preserva uma cópia de $O(4)$ gerada por rotações simultâneas no espaço das coordenadas x e no espaço do isospin. Após isso, retornaremos para $SU(2)$.

Os geradores de $O(4)$ são matrizes $I^{\alpha\beta}$ antissimétricas nos índices α, β . Portanto, os campos de calibre também carregam esses mesmos dois índices: $A_\mu^{\alpha\beta}(x)$. O *Ansatz* mais geral possível que respeita à simetria $O(4)$ é dado por

$$A_\mu^{\alpha\beta}(x) = f(r^2)(x_\alpha\delta_{\mu\beta} - x_\beta\delta_{\mu\alpha}), \quad r^2 \equiv x_\mu x^\mu. \quad (5.33)$$

A expressão acima deve ser compatível com as equações de Yang-Mills e as equações de auto-dualidade. Os seis campos $A_\mu^{\alpha\beta}(x)$ podem ser decompostos em dois campos A_μ^a e B_μ^a , onde cada um destes corresponde a uma cópia de $SU(2)$. Essa decomposição é dada por

$$\begin{aligned} A_\mu^a &= \frac{1}{2} \left(A_\mu^{a0} + \frac{1}{2} \epsilon^{abc} A_\mu^{bc} \right) \equiv \frac{1}{4} \eta_{a\alpha\beta} A_\mu^{\alpha\beta}, \\ B_\mu^a &= \frac{1}{2} \left(A_\mu^{0a} + \frac{1}{2} \epsilon^{abc} A_\mu^{bc} \right) \equiv \frac{1}{4} \eta_{a\alpha\beta} A_\mu^{\alpha\beta}, \end{aligned} \quad (5.34)$$

onde definimos o símbolo η pelas relações $\eta_{abc} = \epsilon_{abc}$ e $\eta_{ab0} = \delta_{ab}$. A origem da decomposição acima reside na seguinte observação: se introduzirmos matrizes da forma

$$X_a^\pm := \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \epsilon_{abc} I_{bc} \pm I_{a0} \right), \quad (5.35)$$

então as relações de comutação para os geradores $I^{\alpha\beta}$

$$[I^{\alpha\beta}, I^{\gamma\delta}] = \delta^{\alpha\gamma} I^{\beta\delta} + \delta^{\beta\delta} I^{\alpha\gamma} - \delta^{\alpha\delta} I^{\beta\gamma} - \delta^{\beta\gamma} I^{\alpha\delta} \quad (5.36)$$

levam às seguintes relações de comutação para X_a^\pm :

$$[X_a^\pm, X_b^\pm] = \epsilon_{abc} X_c^\pm, \quad [X_a^+, X_b^-] = 0. \quad (5.37)$$

Reconhecemos de imediato que as fórmulas acima são precisamente as relações de comutações dos geradores de $SU(2)$. Com (5.36) em mãos, vemos que

$$A_\mu^a = -\frac{1}{2} f(r^2) x_\nu \eta_{a\mu\nu} \quad (5.38)$$

é compatível com as equações de auto-dualidade. Após alguns cálculos, isso nos leva às soluções (POLYAKOV, 1987):

$$\boxed{A_\mu^a = 2\eta_{a\mu\nu} \frac{(x_\nu - a_\nu)}{(\mathbf{x} - \mathbf{a})^2 + \rho^2}, \quad F_{\mu\nu}^a = -4\eta_{a\mu\nu} \frac{\rho^2}{[(\mathbf{x} - \mathbf{a})^2 + \rho^2]^2}.} \quad (5.39)$$

A solução original do instanton BPST acima descreve apenas uma única pseudo-partícula com carga topológica $Q = 1$. Em 1977, Witten apresentou uma solução geral para as equações de autodualidade que descreve um sistema com número arbitrário de pseudopartículas

(WITTEN, 1977). A estratégia se baseia em procurar solução de $\tilde{F}_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}$ invariantes sob rotações tridimensionais combinadas com transformações de calibre. Witten chama essa propriedade de simetria cilíndrica, visto que ela determina apenas a dependência dos campos com os ângulos polares em três dimensões, deixando livres o raio r e a coordenada temporal Euclidiana t . Desse modo, o ponto de partida é o seguinte *Ansatz*:

$$\begin{aligned} A_j^a &= \frac{(1 + \varphi_2)}{r^2} \epsilon_{jak} x_k + \frac{\varphi_1}{r^3} (\delta_{ja} r^2 - x_j x_a) + A_1 \frac{x_j x_a}{r^2}, \\ A_0^a &= A_0 \frac{x^a}{r}. \end{aligned} \quad (5.40)$$

Acima, j e k são índices puramente espaciais e a é o índice de isospin. As funções A_0 , A_1 , φ_1 e φ_2 dependem apenas de r e t . Suas formas precisas são determinadas *a posteriori* para facilitar os cálculos.

O campo (5.40) é o mais genérico possível respeitando à simetria cilíndrica que mencionamos. Além disso, sua forma é consistente com as transformações de calibre geradas pela matriz unitária

$$U(\mathbf{r}, t) := \exp[i f(r, t) (\mathbf{r} \cdot \mathbf{T})], \quad (5.41)$$

onde $f(r, t)$ é uma função arbitrária e T_i são os geradores de $SU(2)$. Esse é um subgrupo abeliano do grupo de calibre completo. Após alguns cálculos preliminares completamente gerais, uma escolha de calibre é feita de tal modo que os campos são determinados por

$$A_\mu = \epsilon_{\mu\nu} \partial_\nu \psi, \quad (5.42)$$

para uma certa função ψ . Fixando $\varphi_1 \equiv e^\psi \chi_1$ e $\varphi_2 \equiv e^\psi \chi_2$, argumentos envolvendo a teoria de variáveis complexas são realizados para determinar⁵ a forma de ψ como

$$\psi = -\log \left(\frac{1 - |g|^2}{2r} \right), \quad \frac{dg}{dz} = f(z) \equiv \chi_1 + i\chi_2. \quad (5.43)$$

Para ψ ser não-singular, exige-se que $|g| = 1$ em $r = 0$ e $|g| < 1$ para $r > 0$. Desse modo, a função analítica mais geral com essas propriedades e comportamento suave para $|z| \rightarrow \infty$ é

$$g(z) = \prod_{j=1}^k \left(\frac{a_j - z}{a_j^* + z} \right), \quad (5.44)$$

onde a_j é um conjunto de parâmetros complexos arbitrários com parte real positiva.

Para analisar o conteúdo físico dessas soluções, partimos da observação que a única propriedade de $f(z)$ independente das transformações de calibre consideradas no artigo é a localização dos seus zeros no semiplano superior direito. Para $k = 2$, existe apenas um zero de $f(z)$ nessa região e a solução de instanton BPST original é recuperada (em um calibre

⁵ A forma de ψ é fixa a menos de uma transformação de calibre.

distinto). A parte imaginária do zero de $f(z)$ determina a localização da pseudopartícula no eixo temporal, enquanto sua parte real determina a escala da solução.

A solução dada por (5.43) e (5.44) possui carga topológica $k - 1$. Na medida em que os zeros de $f(z)$ são separados, a solução descreve $k - 1$ instantons BPST também separados.

5.1.2 Efeitos qualitativos: o vácuo θ

Como vimos anteriormente, costuma-se adotar a lagrangiana (5.1) para descrever a teoria de Yang-Mills. A razão para tal escolha é simples: o termo $\text{Tr } F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}$ é o único invariante possível em dimensão 4. Outras escolhas, incluindo termos da forma $\text{Tr}(D_\alpha F_{\mu\nu})^2$, por exemplo, são irrelevantes na região do infravermelho e podem ser desconsiderados.

Há ainda um outro termo invariante que não podemos desconsiderar de imediato. A saber, $\text{Tr } \tilde{F}_{\mu\nu} F_{\mu\nu}$. Apesar desse termo ser uma derivada total e não alterar as equações de movimento clássicas, como mostramos no início do capítulo, a existência das soluções de instantons o torna relevante. Com efeito, a lagrangiana mais geral possível que podemos escrever (no espaço de Minkowski usual) é dada por⁶

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4g} \text{Tr } F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{i\theta}{16\pi^2} \text{Tr } \tilde{F}_{\mu\nu} F_{\mu\nu}, \quad (5.45)$$

onde g e θ são constantes de acoplamento. Por conta dos instantons, as amplitudes de transição físicas da teoria vão depender de θ . Por exemplo, a amplitude de transição vácuo-vácuo será

$$Z = \sum_{Q=-\infty}^{+\infty} e^{i\theta Q} Z_Q, \quad (5.46)$$

onde Z_Q denota a integral de caminho sobre os campos com carga topológica Q fixa. O termo θ possui consequências notáveis quando introduzido na descrição das interações fortes. Com efeito, a teoria não é mais invariante sob reversão temporal (JR; DASHEN; GROSS, 1976). Espera-se que todas as teorias de campos que descrevem as interações fundamentais sejam invariantes sob a simetria CPT, i.e., o conjunto das simetrias de conjugação de carga, reversão de paridade e reversão temporal, respectivamente. Estimativas do momento de dipolo elétrico para o nêutron na QCD impõem um limite para o valor de θ (WEINBERG, 2012). Essa nova constante de acoplamento deve ser não-nula mas extremamente pequena:

$$\theta \lesssim 10^{-10}. \quad (5.47)$$

Ainda não se sabe a razão para θ possuir essa ordem de grandeza. Na literatura, isso é conhecido como o problema de CP forte.

⁶ O fator de i no segundo termo é introduzido para que a ação no espaço de Minkowski seja real.

Conclusão

Em suma, no presente trabalho nós tivemos a oportunidade de investigar algumas das propriedades básicas das soluções topológicas em teorias de campos por meio de modelos de interesse na literatura. Com isso, foi possível entender como que certas ferramentas topológicas e algébricas são empregadas na teoria de campos. O cálculo de instanton apresentado no contexto da mecânica quântica do potencial quártico serviu como protótipo para cálculos mais complicados em teorias mais sofisticadas, como discutimos no capítulo 4 com base na literatura pertinente.

Focamos especialmente em ressaltar as semelhanças dos métodos de classificação utilizados em diferentes modelos. Por exemplo, no caso dos vórtices nós vimos o mesmo raciocínio com *winding numbers* sendo aplicado no caso unidimensional e bidimensional. No mesmo espírito, a construção de soluções topologicamente não-triviais no modelo sigma não-linear $O(3)$ serviu de base para generalizar o procedimento para outros modelos quirais e também para compreender melhor a construção dos instantons BPST na teoria de Yang-Mills.

Por fim, discutimos como o estudo dessas soluções topológicas levou a um entendimento mais profundo do vácuo das teorias de calibre, incluindo a QCD. Problemas concretos, como o problema $U(1)$, só puderam ser elucidados no século passado com o auxílio dos métodos de instantons esboçados nessa monografia.

Referências

- ABDALLA, E.; ABDALLA, M. C. B.; ROTHE, K. D. *Non-perturbative methods in 2 dimensional quantum field theory*. [S.l.]: World Scientific, 1991. Citado na página 77.
- BANERJEE, R. Quantum equivalence of $O(3)$ nonlinear σ model and the CP^1 model: A gauge-independent hamiltonian approach. *Physical Review D*, APS, v. 49, n. 4, p. 2133, 1994. Citado na página 74.
- BELAVIN, A.; POLYAKOV, A. Metastable states of two-dimensional isotropic ferromagnets. *JETP lett*, v. 22, n. 10, p. 245–248, 1975. Citado na página 67.
- BELAVIN, A. A. et al. Pseudoparticle solutions of the yang-mills equations. *Physics Letters B*, Elsevier, v. 59, n. 1, p. 85–87, 1975. Citado 3 vezes nas páginas 14, 84 e 88.
- BERG, B.; LÜSCHER, M. Computation of quantum fluctuations around multi-instanton fields from exact green’s functions: the CP^{n-1} case. *Communications in Mathematical Physics*, Springer, v. 69, n. 1, p. 57–80, 1979. Citado na página 75.
- BLUMENHAGEN, R.; PLAUSCHINN, E. *Introduction to conformal field theory: with applications to string theory*. [S.l.]: Springer, 2009. Citado na página 75.
- COHEN-TANNOUJDI, C.; DIU, B.; LALOË, F. *Quantum Mechanics, Volume 1: Basic Concepts, Tools, and Applications*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2019. Citado na página 17.
- COLEMAN, S. Fate of the false vacuum: Semiclassical theory. *Physical Review D*, APS, v. 15, n. 10, p. 2929, 1977. Citado na página 14.
- COLEMAN, S. *Aspects of Symmetry: Selected Erice Lectures*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1988. Citado 2 vezes nas páginas 40 e 42.
- DAVYDOV, A. S. *Quantum Mechanics (International Series in Natural Philosophy)*. Oxford: Pergamon Press Ltd, 1965. v. 1. Citado na página 40.
- DONALDSON, S. K.; KRONHEIMER, P. B. *The geometry of four-manifolds*. [S.l.]: Oxford University Press, 1990. Citado na página 15.
- ETINGOF, P.; SEMENYAKIN, M. *A brief introduction to quantum groups*. 2021. <<https://arxiv.org/abs/2106.05252>>. Citado na página 14.
- FEYNMAN, R. P.; BROWN, L. M. *Feynman’s thesis: a new approach to quantum theory*. [S.l.]: World Scientific, 2005. Citado na página 18.
- FRADKIN, E. *Quantum Field Theory: An Integrated Approach*. [S.l.]: Princeton University Press, 2021. Citado 12 vezes nas páginas 8, 15, 30, 42, 44, 50, 61, 62, 67, 68, 73 e 75.

- GAMELIN, T. W. *Complex Analysis*. [S.l.]: Springer, 2001. Citado na página 77.
- GREINER, W.; REINHARDT, J. *Field Quantization*. [S.l.]: Springer, 2013. Citado na página 19.
- GRIGORIEV, M.; TSEYTLIN, A. A. Pohlmeyer reduction of $AdS_5 \times S^5$ superstring sigma model. *Nuclear Physics B*, Elsevier, v. 800, n. 3, p. 450–501, 2008. Citado na página 81.
- HULL, C. Lectures on non-linear sigma-models and strings. In: *Super field theories*. [S.l.]: Springer, 1987. p. 77–168. Citado na página 68.
- JACKIW, R. Quantum meaning of classical field theory. *Reviews of Modern Physics*, APS, v. 49, n. 3, p. 681, 1977. Citado 3 vezes nas páginas 45, 54 e 57.
- JR, C. G. C.; COLEMAN, S. Fate of the false vacuum. ii. first quantum corrections. *Physical Review D*, APS, v. 16, n. 6, p. 1762, 1977. Citado na página 14.
- JR, C. G. C.; DASHEN, R.; GROSS, D. J. The structure of the gauge theory vacuum. *Physics Letters B*, Elsevier, v. 63, n. 3, p. 334–340, 1976. Citado na página 91.
- KNIGHTLY, A.; LI, C. *Traces of Hecke Operators*. [S.l.]: American Mathematical Society, 2006. Citado na página 30.
- KOSTERLITZ, J. M.; THOULESS, D. J. Ordering, metastability and phase transitions in two-dimensional systems. *Journal of Physics C: Solid State Physics*, IOP Publishing, v. 6, n. 7, p. 1181, 1973. Citado na página 67.
- LANDAU, L. D.; LIFSHITZ, E. M. *Quantum Mechanics: Non-relativistic Theory. Course of Theoretical Physics*. [S.l.]: Pergamon Press Ltd, 1965. v. 3. Citado na página 97.
- LEKNER, J. Reflectionless eigenstates of the $\text{sech}^2 x$ potential. *American Journal of Physics*, American Association of Physics Teachers, v. 75, n. 12, p. 1151–1157, 2007. Citado na página 98.
- MANTON, N.; SUTCLIFFE, P. *Topological Solitons*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2004. Citado na página 14.
- MINNHAGEN, P. The two-dimensional coulomb gas, vortex unbinding, and superfluid-superconducting films. *Reviews of modern physics*, APS, v. 59, n. 4, p. 1001, 1987. Citado na página 66.
- MORSE, P. M.; FESHBACH, H. *Methods of Theoretical Physics*. New York: McGraw-Hill, 1953. v. 2. Citado na página 97.
- NAKAHARA, M. *Geometry, Topology and Physics*. [S.l.]: CRC Press, 2018. Citado 2 vezes nas páginas 34 e 74.
- NASH, C.; SEN, S. *Topology and Geometry for Physicists*. [S.l.]: Dover, 1988. Citado 4 vezes nas páginas 33, 34, 35 e 87.
- PATRASCIOIU, A.; ROUET, A. The nonlinear σ -model; a critical analysis of semi-classical results. *Lettere al Nuovo Cimento (1971-1985)*, Springer, v. 35, n. 3, p. 107–112, 1982. Citado na página 75.

- POHLMAYER, K. Integrable hamiltonian systems and interactions through quadratic constraints. *Communications in Mathematical Physics*, Springer, v. 46, n. 3, p. 207–221, 1976. Citado 2 vezes nas páginas 77 e 80.
- POLYAKOV, A. M. Quark confinement and topology of gauge theories. *Nuclear Physics B*, Elsevier, v. 120, n. 3, p. 429–458, 1977. Citado na página 43.
- POLYAKOV, A. M. *Gauge Fields and Strings*. [S.l.]: Taylor & Francis, 1987. Citado 3 vezes nas páginas 43, 81 e 89.
- POLYAKOV, A. M. Compact gauge fields and the infrared catastrophe. In: *Instantons In Gauge Theories*. [S.l.]: World Scientific, 1994. p. 19–21. Citado na página 14.
- RAJARAMAN, R. Some non-perturbative semi-classical methods in quantum field theory (a pedagogical review). *Physics Reports*, Elsevier, v. 21, n. 5, p. 227–313, 1975. Citado na página 98.
- RICHARD, J.-L.; ROUET, A. The CP_1 model on the torus: contribution of instantons. *Nuclear Physics B*, Elsevier, v. 211, n. 3, p. 447–464, 1983. Citado na página 75.
- RYDER, L. H. *Quantum Field Theory*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1996. Citado 3 vezes nas páginas 17, 28 e 41.
- SHNIR, Y. M. *Topological and Non-topological Solitons in Scalar Field Theories*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2018. Citado 2 vezes nas páginas 77 e 81.
- WEINBERG, E. J. *Classical Solutions in Quantum Field Theory: Solitons and Instantons in High Energy Physics*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2012. Citado 6 vezes nas páginas 15, 41, 42, 58, 59 e 91.
- WITTEN, E. Some exact multipseudoparticle solutions of classical yang-mills theory. *Physical Review Letters*, APS, v. 38, n. 3, p. 121, 1977. Citado na página 90.
- ZAMOLODCHIKOV, A. B.; ZAMOLODCHIKOV, A. B. Factorized s-matrices in two dimensions as the exact solutions of certain relativistic quantum field theory models. In: *Yang-Baxter Equation In Integrable Systems*. [S.l.]: World Scientific, 1990. p. 82–120. Citado na página 81.

Apêndices

A | A equação de Schrödinger para o potencial de Pöschl-Teller

Nesse apêndice, verificamos por métodos analíticos o surgimento dos estados ligados para o operador de Schrödinger no potencial de Pöschl-Teller, um problema que surge no cálculo da função de correlação (3.9). Em particular, verificamos novamente, embora com outros métodos, a existência do modo nulo. A solução da equação de Schrödinger para o potencial em questão é bem conhecida. Entretanto, achamos conveniente apresentar o cálculo para os estados ligados explicitamente em termos das funções de Legendre, visto que o procedimento exposto em várias referências¹ faz uso de funções hipergeométricas.

O problema de autovalores (3.19) pode ser reescrito da seguinte forma, após a substituição direta da solução de *instanton* $\bar{q}_c(\tau)$:

$$\left(-\frac{1}{2} \frac{d^2}{dz^2} - 3 \operatorname{sech}^2 z\right) \tilde{\psi} = \epsilon_n \tilde{\psi}(z), \quad (\text{A.1})$$

onde

$$z = \frac{\mu}{\sqrt{2}}(\tau - a) \quad \text{e} \quad \epsilon_n = \left(\frac{\omega_n^2}{\mu^2} - 2\right). \quad (\text{A.2})$$

A condição de contorno para as autofunções é dada pela condição $\tilde{\psi}(\pm\infty) = 0$. Para resolver a equação diferencial, primeiro faça a substituição $u = \tanh z$, de modo que

$$(1 - u^2)\varphi''(u) - 2u\varphi'(u) + \left[6 + \frac{2\epsilon_n}{(1 - u^2)}\right]\varphi(u) = 0, \quad (\text{A.3})$$

onde $\varphi(u) = \varphi(\tanh z) \equiv \tilde{\psi}(z)$. Identificamos a equação acima como aquela que define as funções associadas de Legendre $P_l^m(u)$, onde os inteiros l e m , com $-l \leq m \leq l$, são dados por

$$m^2 = -2\epsilon_n = 4 \left(1 - \frac{\omega_n^2}{2\mu^2}\right), \quad l(l+1) = 6. \quad (\text{A.4})$$

Para essas restrições sobre l e m as funções $P_l^m(u)$ se tornam regulares no intervalo $[-1, 1]$. Note que há duas soluções para l , a saber, $l = 2$ e $l = -3$. Contudo, basta investigar o

¹ Por exemplo, na seção 23 de (LANDAU; LIFSHITZ, 1965) e no capítulo 12 de (MORSE; FESHBACH, 1953).

primeiro caso, visto que a equação das funções associadas de Legendre é preservada sob a transformação $l \mapsto -l - 1$. Assim, os valores possíveis para m são 0 , ± 1 e ± 2 , onde

$$m = \pm 2 \sqrt{1 - \frac{\omega_n^2}{2\mu^2}}. \quad (\text{A.5})$$

(i) **Caso** $m = 0$.

Temos $\omega^2 = 2\mu^2$ e $\epsilon = 0$. Por conta da energia nula, essa situação apenas delimita a fronteira entre as soluções de espalhamento e os estados ligados.

(ii) **Caso** $m = \pm 1$.

Escolhemos rotular essa solução pelo índice $n = 1$. Para $m = \pm 1$, obtemos $\omega_1^2 = \frac{3\mu^2}{2}$ e $\epsilon_1 = -\frac{1}{2}$. Esse é um estado ligado genuíno, bem como o caso $m = \pm 2$ que se segue.

(iii) **Caso** $m = \pm 2$.

Essa solução será rotulada por $n = 0$. Esse estado ligado é determinado por $\omega_0^2 = 0$ e $\epsilon_0 = -2$. Logo, temos um modo nulo do operador de Schrödinger.

E com isso concluímos a análise dos estados ligados. Coletamos os resultados na tabela (1) abaixo.

m	Solução	“Energia” ϵ	Autovalores ω
± 1	$\varphi_1(u) = P_2^{\pm 1}(u)$	$\epsilon_1 = -\frac{1}{2}$	$\omega_1^2 = \frac{3\mu^2}{2}$
± 2	$\varphi_0(u) = P_2^{\pm 2}(u)$	$\epsilon_0 = -2$	$\omega_0^2 = 0$

Tabela 1 – Soluções para os estados ligados do operador de Schrödinger no potencial de Pöschl-Teller e seus autovalores.

Explicitamente, as soluções $\varphi_1(u)$ e $\varphi_2(u)$ são:

$$\varphi_1(\tanh z) = P_2^1(\tanh z) = -3 \frac{\sinh z}{\cosh^2 z}; \quad (\text{A.6a})$$

$$\varphi_2(\tanh z) = P_2^2(\tanh z) = 3 \frac{1}{\cosh^2 z}. \quad (\text{A.6b})$$

Vemos imediatamente que as soluções φ se anulam no infinito $z \rightarrow \pm\infty$, como exigido no início.

Os cálculos para a solução de espalhamento $\tilde{\psi}_k$, onde k rotula o vetor de onda, são mais envolvidos e podem ser consultados em (LEKNER, 2007). A despeito disso, o excelente artigo (RAJARAMAN, 1975) apresenta a solução de espalhamento em uma forma simples, embora sem demonstração. Temos:

$$\tilde{\psi}_k(z) = e^{ikz} (3 \tanh^2 z - 3ik \tanh z - k^2 - 1), \quad (\text{A.7})$$

tal que $\epsilon = \frac{k^2}{2}$ e

$$\omega_k^2 = \frac{\mu^2}{2}(k^2 + 4). \quad (\text{A.8})$$

Portanto, concluímos que o espectro é estritamente não-negativo com um autovalor nulo. Ademais, verifica-se diretamente que o modo nulo é proporcional à derivada temporal da solução de *instanton*.