

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
INSTITUTO DE FÍSICA

LUCAS DE LIMA VIEIRA CAMPOS

ESPALHAMENTO CAÓTICO POR BURACOS NEGROS

BRASÍLIA

3 DE NOVEMBRO DE 2021

Lucas de Lima Vieira Campos

Espalhamento Caótico por Buracos Negros

Monografia apresentada ao Instituto de Física da Universidade de Brasília como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Bacharel em Física.

Orientador: Adriane Beatriz Schelin
Coorientador: Clovis Achy Soares Maia

Universidade de Brasília – UnB
Instituto de Física

Brasília
3 de novembro de 2021

Lucas de Lima Vieira Campos

Espalhamento Caótico por Buracos Negros/ Lucas de Lima Vieira Campos. –
Brasília, 3 de novembro de 2021-
83 p. : il. (algumas color.) ; 30 cm.

Orientador: Adriane Beatriz Schelin

Monografia – Universidade de Brasília – UnB
Instituto de Física, 3 de novembro de 2021.

1. Caos. 2. Buracos Negros. I. Adriane Beatriz Schelin. II. Universidade de
Brasília. III. Instituto de Física. IV. Espalhamento Caótico por Buracos Negros

CDU 02:141:005.7

Lucas de Lima Vieira Campos

Espalhamento Caótico por Buracos Negros

Monografia apresentada ao Instituto de Física da Universidade de Brasília como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Bacharel em Física.

Trabalho aprovado. Brasília, 3 de novembro de 2021:

Adriane Beatriz Schelin

Orientador

Clovis Achy Soares Maia

Co-orientador

Vanessa Carvalho de Andrade

Convidado 1

Leonardo Luiz E Castro

Convidado 2

Brasília

3 de novembro de 2021

*Dedico esse trabalho a todas as pessoas que me apoiaram,
a universidade pública e todos os meus colegas e amigos de curso.*

Agradecimentos

Agradeço inicialmente aos meus pais, Lucinete Ribeiro de Lima e Valdivino Vieira Campos, por proporcionarem a escolha de estudar física, ao incentivo e apoio em busca desse grande sonho. Agradeço a minha mãe, por mais que já tenha dez anos que a senhora se foi, sei o quanto me amou e em vida fez de tudo para que eu chegasse aqui. Agradeço ao meu pai, por ser o meu suporte nos momentos mais difíceis e por toda força que teve durante anos, você é o meu herói. Não devo esquecer-me de mencionar a minha cadela, Duquesa. Sem você nossa casa não é tão alegre e feliz.

Agradeço a minha namorada, Stefani dos Santos Oliveira Barros, por todo carinho, amor e companheirismo. Obrigado por compartilhar todos os momentos de dor e alegria e por sempre ser o meu apoio, assim como sou para você. Minha vida com você é mais bonita e feliz. Amo você!

Em especial, gostaria de agradecer a professora Adriane Beatriz Schelin. Agradeço por todo apoio, paciência e aprendizado. Todos os seus ensinamentos e orientações me fizeram ficar fascinado pelos sistemas dinâmicos e o caos. Como as crianças dizem, quero ser como a senhora quando "crescer". Agradeço aos professores Arsen Melikian, Celius Antônio Magalhães, Leonardo Luiz e Castro e Qu Fanyao por todas as conversas e ensinamentos. Minha formação não seria nada sem vocês.

Agradeço aos meus familiares, a todas as famílias que me acolheram como um integrante, mesmo sem laços sanguíneos. Menciono em especial meus sobrinhos e afilhadas respectivamente, Joyce Lorrane Farias de Lima, Ravi Nóbrega Lopes, Isabela de Andrade Viana e Gabriela Souza Luz, vocês são luz em minha vida. Agradeço aos meus amigos, em especial a Brenda Jhulie Urany, André Aldebaran Lobofilho Pinheiro e David Ribeiro Paiva, por todo apoio e companheirismo.

Por fim, gostaria de agradecer aos idealizadores do ensino público. Sem o ensino público, jovens como eu e muitos outros não teriam a oportunidade de realizar seus sonhos e terem a oportunidade de um futuro melhor para o país. A luta pela educação pública deve ser constante.

*“Se eu vi mais longe,
foi por estar sobre ombros de gigantes.
(Isaac Newton)”*

Resumo

Este trabalho apresenta um estudo da aplicação da teoria de espalhamento caótico de partículas de luz em um campo gravitacional de dois buracos negros em órbita. Espalhamento caótico ocorre em diversos sistemas e o caos presente é transiente. O caos ocorre apenas em uma região restrita que chamamos de região de espalhamento. O nosso objetivo é estudar as diferentes configurações e as suas implicações. Inicialmente estudamos o espalhamento discreto, com a colisão de uma partícula com discos rígidos. Em seguida, estudamos a interação de potenciais atrativos classicamente com partículas de luz espalhadas. Em seguida apresentamos mapas considerando a órbita dos buracos negros. Com os resultados encontrados, fazemos uma análise para contribuir no estudo de caos em buracos negros, que é um tema bastante interessante para a física atual.

Palavras-chaves: Espalhamento. Caos. Buracos negros.

Abstract

This work presents a study of the application of the theory of chaotic scattering of light particles in a gravitational field of two orbiting black holes. Chaotic scattering occurs in many systems and the chaos present is transitory. Chaos only occurs in a restricted region that we call the scattering region. Our goal is to study different configurations and the implications of the chaotic behaviour. Fractal structures are present, generating hypersensitivity to initial conditions. Initially a discrete scattering system was studied, with the collision of a particle with hard disks. Afterwards, we studied the interaction of attractive potentials classically interacting with scattered particles of light. Next, maps were constructed considering the orbit of black holes. With the results found, an analysis was made to contribute to the study of chaos in black holes, which is a very interesting topic for current physics.

Key-words: Scattering. Chaos. Black holes.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Características de um processo de espalhamento. Fonte: elaboração do autor.	21
Figura 2 – Espalhamento em um disco, sendo a colisão elástica. Fonte: elaboração do autor.	28
Figura 3 – Função de espalhamento no problema de um disco. Fonte: Imagem retirada do livro (TÉL; GRUIZ, 2006).	29
Figura 4 – Problema com dois discos. Uma das partículas salta para trás ($ \theta > \pi/2$), e a outra (órbita tracejada) é espalhada para frente ($ \theta < \pi/2$). Fonte: Imagem retirada do livro (TÉL; GRUIZ, 2006).	29
Figura 5 – Relações geométricas necessárias para construir o mapa de espalhamento. Fonte: Imagem retirada do livro (TÉL; GRUIZ, 2006).	30
Figura 6 – Espalhamento no problema de dois discos ($R/a = 0,3$). A figura superior mostra a função de espalhamento para partículas ao longo do eixo x . Entre os centros do disco existem dois valores, $\pm bc$, onde o ângulo de deflexão é singular. A figura inferior mostra a distribuição do tempo de vida: número, n^* , de colisões antes de escapar (a altura da faixa preta mais larga é a unidade). Fonte: Imagem retirada do livro (TÉL; GRUIZ, 2006).	31
Figura 7 – Retrato de fase do mapa de espalhamento no plano - $(\theta, \sin\varphi)$ ($R/a = 0,3$) com base nas variedades dos dois ciclos (pontos pretos, conectados por uma seta dupla). A linha da condição inicial, $\theta_0 = 0$, é marcada por uma linha tracejada. Fonte: Imagem retirada do livro (TÉL; GRUIZ, 2006).	32
Figura 8 – Algumas órbitas periódicas simples (todas instáveis) do problema de três discos ($R/a = 0,3$). Fonte: Imagem retirada do livro (TÉL; GRUIZ, 2006).	32
Figura 9 – Órbitas de dispersão no problema dos três discos. Em (a) e (b) a órbita se aproxima dos ciclos (a), (c), (d) e (c), (d), (j) da Fig. 8, respectivamente. Ambas as órbitas escapam após 14 colisões. Fonte: Imagem retirada do livro (TÉL; GRUIZ, 2006).	33
Figura 10 – Dispersão no problema de três discos ($R/a = 0,3$). A figura superior mostra a função de espalhamento para partículas injetadas ao longo do eixo x . A figura inferior é a distribuição do tempo da partícula na região de espalhamento: número n^* de colisões antes de escapar. Fonte: Imagem retirada do livro (TÉL; GRUIZ, 2006).	34

Figura 11 – Variedades invariantes do problema de três discos ($R/a=0,4$): (a) variedade estável e (b) variedade instável. Os gráficos foram gerados a partir de trajetórias que não escapam antes de 12 colisões. As partes (a) e (b) são obtidas nos números de colisão $n = 0$ e $n = 12$, respectivamente (ver Quadro 6.1). A linha da condição inicial, $\theta_0 = 0$, é marcada por uma linha tracejada em (a). Fonte: Imagem retirada do livro (TÉL; GRUIZ, 2006).	34
Figura 12 – Contorno de potencial gaussiano. Fonte: Elaboração do autor.	38
Figura 13 – Parâmetro de impacto pela velocidade de saída. Presença de estruturas fractais. Fonte: elaboração do autor.	40
Figura 14 – Zoom para mostrar a figura fractal. Fonte: elaboração do autor.	41
Figura 15 – Trajetória no plano x e y . Fonte: elaboração do autor.	41
Figura 16 – Bacia de escape para a partícula. Fonte: elaboração do autor.	41
Figura 17 – Trajetória do potencial (em vermelho) e da partícula (em azul) no plano x e y . Fonte: elaboração do autor.	42
Figura 18 – Parâmetro de impacto pela velocidade de saída. Presença de estruturas fractais. Fonte: elaboração do autor.	42
Figura 19 – Trajetória no plano x e y . Fonte: elaboração do autor.	42
Figura 20 – Trajetória no plano x e y . Fonte: elaboração do autor.	43
Figura 21 – Trajetória no plano x e y . Fonte: elaboração do autor.	43
Figura 22 – Bacia de escape para a partícula. Fonte: elaboração do autor.	43
Figura 23 – Problema de dois corpos e o centro de massa. Fonte: elaboração do autor.	44
Figura 24 – Trajetória no referencial do centro de massa no espaço x , y e z . Fonte: elaboração do autor.	45
Figura 25 – Trajetórias no espaço x , y e z . Fonte: elaboração do autor.	46
Figura 26 – Velocidade de escape pelo parâmetro de impacto. Fonte: elaboração do autor.	49
Figura 27 – Tempo de escape (ou atraso) pelo parâmetro de impacto. Fonte: elaboração do autor.	49
Figura 28 – Trajetórias no espaço x , y e z . Fonte: elaboração do autor.	50
Figura 29 – Trajetórias no referencial do centro de massa no espaço x , y e z . Fonte: elaboração do autor.	50
Figura 30 – Trajetórias no espaço x , y e z . Fonte: elaboração do autor.	51
Figura 31 – Trajetórias no referencial do centro de massa no espaço x , y e z . Fonte: elaboração do autor.	51
Figura 32 – Velocidade de escape pelo parâmetro de impacto. Fonte: elaboração do autor.	52
Figura 33 – Tempo de escape (ou atraso) pelo parâmetro de impacto. Fonte: elaboração do autor.	52

Figura 34 – Trajetórias no espaço x, y e z . Fonte: elaboração do autor.	53
Figura 35 – Trajetórias no referencial do centro de massa no espaço x, y e z . Fonte: elaboração do autor.	53
Figura 36 – Construção do mapa de espalhamento. Fonte: Imagem retirada do artigo (MOURA; LETELIER, 2000).	69
Figura 37 – A função de deflexão $\Delta(b)$ para um buraco negro isolado de Schwarzschild. Fonte: Imagem retirada do artigo (MOURA; LETELIER, 2000).	69
Figura 38 – Função discreta $g(b)$. Fonte: Imagem retirada do artigo (MOURA; LETELIER, 2000).	70
Figura 39 – As condições iniciais usadas para o esboço da bacia de escape. (a) Condições iniciais no espaço (ρ, z) . (b) Condições iniciais no espaço (ρ, p_ρ) . Em ambos os casos, a curva azul é o contorno $h = p_\phi^* - \Delta p_\phi$, com $\Delta p_\phi = 0,02$. Fonte: Imagem retirada do artigo (DAZA et al., 2018).	77
Figura 40 – Bacias de escape (a–c) no espaço (ρ, z) e (d–f) no espaço (ρ, p_ρ) . Fonte: Imagem retirada do artigo (DAZA et al., 2018).	78

Sumário

1	INTRODUÇÃO	21
1.1	Espalhamento caótico clássico	21
1.2	Espalhamento caótico por buracos negros	22
1.3	Estrutura da monografia	23
2	TEORIA DO ESPALHAMENTO	25
2.1	Caos	25
2.2	Fractais	26
2.3	Introdução à teoria do espalhamento	27
2.4	Espalhamento em discos	27
2.4.1	O problema de um disco	27
2.4.2	O problema de dois discos	29
2.4.3	O problema de três discos	32
2.5	Conclusões	34
3	ESPALHAMENTO POR POTENCIAIS ATRATIVOS	37
3.1	Mecânica Hamiltoniana	37
3.2	Espalhamento de uma partícula livre	38
3.2.1	Potencial gaussiano estático	40
3.2.2	Potenciais gaussianos em órbita	41
3.3	Potencial gravitacional newtoniano	44
3.4	Espalhamento caótico para o problema de três corpos	46
3.5	Conclusões	47
4	ESPALHAMENTO POR BURACOS NEGROS	55
4.1	Uma Breve Perspectiva da Relatividade Geral	55
4.2	Buracos negros	64
4.3	Espalhamento em dois buracos negros de Schwarzschild	65
4.4	Buracos negros de Kerr	70
4.4.1	A geodésica nula	73
4.5	A solução Majumdar-Papapetrou	75
4.6	Conclusões	78
5	CONCLUSÃO	81
	REFERÊNCIAS	83

1 Introdução

Neste trabalho estudamos um problema de espalhamento caótico no contexto de dois buracos negros como principal propósito. É estudado inicialmente o espalhamento em sistemas clássicos, discretos e contínuos.

1.1 Espalhamento caótico clássico

Um sistema de espalhamento é descrito a partir do movimento de uma partícula sujeita a uma força limitada a uma região no espaço. A dinâmica é em geral retilínea e simples. Ao interagir com o potencial, existem trajetórias que ficam presas no potencial e depois escapam. Vários trabalhos mostram que o comportamento de um sistema desse tipo pode ser caótico.

Uma forma inicial de caracterizar um processo de espalhamento é a distância, b , na qual a partícula passaria pelo centro da região de espalhamento (a origem) se não houvesse nenhuma interação presente (ver fig. 1). (TÉL; GRUIZ, 2006)

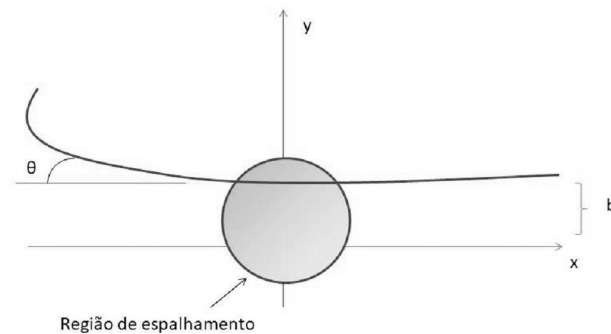


Figura 1 – Características de um processo de espalhamento. Fonte: elaboração do autor.

Esse parâmetro b é chamado de parâmetro de impacto. Um possível parâmetro de saída é o ângulo entre as linhas retas dos segmentos incidentes e de saída da órbita, o ângulo de deflexão, θ . Uma característica importante do processo de espalhamento é a relação funcional entre o ângulo de deflexão e o parâmetro de impacto,

$$\theta(b), \tag{1.1}$$

a função de espalhamento. Quando um sistema assim é caótico, dizemos que o caos é transiente, porque o movimento complicado é restrito à região do potencial. A dinâmica tem grande sensibilidade às condições iniciais e estruturas fractais aparecem no espaço de fases.

Para o sistema ser caótico, no espaço de fases deve haver infinitas órbitas, que podem ser periódicas e aperiódicas. As órbitas ficam presas na região de espalhamento por um longo tempo. O conjunto de órbitas que ficam presas na região de espalhamento é chamado de sela caótica e sua medida é nula. Podemos definir termos como variedades, em que elas podem ser caracterizadas por estável e instável. A variedade estável da sela caótica é formada por trajetórias que ficam presas na região de espalhamento para $t \rightarrow \infty$.

1.2 Espalhamento caótico por buracos negros

Um exemplo de sistema de espalhamento caótico é citado no artigo (MOURA; LETELIER, 2000), que trata o caso de espalhamento por dois buracos negros. No presente artigo, os buracos negros estão estáticos e para que não ocorra uma singularidade cônica, é imposto que a carga e as massas devem ser iguais, em unidades relativísticas, logo a atração é igual a repulsão. Isso é feito na métrica Majumdar-Papetrou (DAZA et al., 2018), mas ela não é muito realista. Logo, no artigo do (MOURA; LETELIER, 2000), utiliza-se a métrica de Schwarzschild, onde os dois buracos negros estão distantes, a uma distância muito maior que o raio de Schwarzschild.

Uma geodésica nula descreve o movimento da luz interagindo com dois buracos negros estáticos. Para que não ocorra singularidades, fazemos o cálculo conforme no artigo (MOURA; LETELIER, 2000), com os buracos negros estão a uma distância tão grande que a sua interação gravitacional é praticamente nula, podendo assim desconsiderar o efeito de um buraco negro quando a luz interage com o outro. Por meio das equações diferenciais é possível construir um mapa e por meio da análise do mapa encontramos um limite fractal que indica diferentes saídas da luz da região de espalhamento entre os dois buracos negros. A luz interage com um buraco negro e após sair do primeiro ela interage com o segundo.

Em nosso trabalho é analisado o movimento de partículas em um campo gravitacional de dois buracos negros de Schwarzschild. As simulações foram feitas para o caso estático para o espalhamento da luz, sendo esse um cenário artificial, pois ambos deveriam ter a mesma massa e carga para que isso ocorresse. Uma descrição do sistema de dois buracos negros em órbita foi feita, sendo um caso mais realista, mas ainda aproximado. Também foi feita uma descrição para o caso em que os buracos negros tem momento angular. Um ponto importante para estudar o espalhamento é a construção de mapas.

1.3 Estrutura da monografia

Esta monografia contém quatro capítulos, começando pela introdução. Todos os pontos abordados estão interligados pela presença do espalhamento caótico.

No segundo capítulo é feita uma revisão de todos os principais conceitos a serem utilizados durante a monografia, onde foi utilizado como principal fonte de consulta o livro do (TÉL; GRUIZ, 2006).

O capítulo 3 se ocupa do espalhamento caótico por potenciais atrativos clássicos, onde procuramos mostrar de forma significativa como ocorre o caos em dois sistemas clássicos. Inicialmente é abordado o espalhamento de uma partícula livre interagindo com dois potenciais gaussianos. Quando fazemos os potenciais gaussianos estarem em órbita, novas configurações são mostradas, indicando que o caso em que os buracos negros em órbita também devem ter novas situações interessantes. Depois é tratado um sistema menos artificial, onde uma partícula de luz interage com dois corpos por meio do potencial newtoniano.

No capítulo 4 estudamos o espalhamento caótico por buracos negros. Nos atentamos a construir mapas para que pudéssemos fazer uma análise significativa dos problemas propostos. Inicialmente consideramos o caso de dois buracos negros sem momento angular, descrevemos eles parados e em órbitas. Posteriormente foi estudado o caso em que os buracos negros tem momento angular. Por fim é descrito um sistema binário de buracos negros com cargas elétricas iguais as massas. Essa configuração indica que a atração gravitacional é igual à repulsão elétrica dos buracos negros. Esse sistema é descrito pela métrica Majumdar-Papetrou. É feito um estudo sobre as regiões de escape da luz por meio da bacia de escape.

O capítulo 5 descreve brevemente as principais conclusões obtidas nesta monografia.

2 Teoria do Espalhamento

Neste capítulo, vamos abordar a teoria do espalhamento, iniciando pela definição de caos. Depois, fazemos uma breve passagem por conceitos de fractais e, por fim, definimos conceitos da teoria de espalhamento e mostramos exemplos estudados para o caso de espalhamento em discos.

2.1 Caos

Inicialmente, vamos começar definindo alguns conceitos importantes para a compreensão do trabalho. Alguns movimentos são longos e periódicos. Em movimentos periódicos, é possível prever o próximo instante de tempo e ele sempre retorna a uma posição específica com mesma velocidade. O movimento regular constitui apenas uma pequena parte de todo movimento. O movimento de longa duração é frequentemente irregular e não se repete.

O movimento imprevisível de alguns sistemas contendo alguns componentes é chamado caótico. A existência de tal movimento se deve ao fato de que as soluções das equações de movimento são complicadas. O movimento caótico é caracterizado por não se repetir, é imprevisível por causa da sensibilidade às condições iniciais e uma estrutura complexa, auto similar, aparece no gráfico da posição pelo momento que denominamos de espaço de fases.

Um gráfico que representa a posição pelo tempo não fornece uma visão geral do movimento, pois sempre pode esperar um comportamento novo. O caos normalmente surge na representação da posição pela velocidade. As coordenadas de posição e velocidade definem o espaço de fase de um sistema.

Exemplos interessantes de movimentos caóticos é o espalhamento por discos. Iremos discutir de forma mais sistemática esses exemplos e apresentar discussões a cerca de como aparece o caos.

O movimento caótico é irregular quando evolui no tempo, é imprevisível e sensível a condições iniciais e complexo no espaço de fases, associado a estruturas fractais que iremos discutir posteriormente. Nem toda evolução temporal complicada de um sistema pode ser considerada caótica. O caos é uma ponte entre o movimento regular e o aleatório. Ele pode ser descrito de forma probabilística.

Existem duas classes de dinâmica caótica, o caos permanente e o transiente. No caos transiente, apenas condições iniciais excepcionais levam a um movimento caótico em tempo finito. Ambas as classes podem ocorrer em sistemas dissipativos e conservativos.

Os conjuntos caóticos, que aparecem no espaço de fases, aparecem em diferentes tipos de caos e eles são os atratores caóticos, selas e etc.

Em sistemas dissipativos, o caos pode ser permanente e o movimento é representado por atratores caóticos. Também, para sistemas dissipativos, pode haver caos transitente com representação de atratores, bacias de limites fractais (selas caóticas).

Em sistemas conservativos, o movimento pode ser caótico em bandas. Dessa forma definimos a bacia de escape. Temos nesse caso o espalhamento caótico representado pelas selas caóticas.

Podemos examinar o movimento caótico de diversas maneiras. Deve-se compreender o comportamento instável, mesmo em sistemas não caóticos, compreender a representação do espaço de fase e a abordagem geométrica da dinâmica e o uso de mapas de Poincaré. Um mapa de Poincaré consiste em um conjunto de pontos definidos pela intersecção de um fluxo com uma seção transversal, chamada de seção de Poincaré. Outra forma de pensar em um mapa de Poincaré é pensando no movimento que ocorre numa região de três dimensões, que é chamada de superfície de energia. Escolhendo uma superfície dentro desse espaço de três dimensões e marcando sucessivas intersecções das trajetórias com essa superfície, a superfície onde marcamos os pontos é a seção de Poincaré e as intersecções sucessivas geram o mapa de Poincaré. A seção de Poincaré reduz o estudo do fluxo num espaço de fases de n dimensões para o estudo do fluxo em um espaço de fases com $n-1$ dimensões. Devemos solucionar numericamente as equações de movimento. Descrever de forma probabilística alguns comportamentos e ter em mente como funciona a geometria dos fractais.

Agora vamos falar sobre fractais e sua geometria.

2.2 Fractais

De modo bem simples, fractais são objetos geométricos, diferentes dos usuais clássicos que conhecemos, em que padrões são repetidos. Temos que o perímetro de um fractal não é bem definido, fractais são objetos auto-semelhantes.

Objetos com grande superfície tem várias ramificações, e por conta dessas ramificações a dimensão da superfície não é mais bidimensional, ou no caso do perímetro, não ser unidimensional. A dimensão para esse caso é de um número irracional, maior que 2 e menor que 3.

Os fractais estão associados ao caos a partir da evolução temporal de um determinado sistema. Ou seja, os fractais são consequências da natureza caótica da dinâmica do sistema. Os fractais são observados a partir das equações de movimento. Quanto mais caótica a dinâmica for, mais complicada é a estrutura fractal. As estruturas fractais são

observadas no espaço de fase.

Diferentes estruturas fractais são associadas a diferentes tipos de caos. Se um corpo está se aproximando de outro, como no caso do espalhamento caótico que será bastante discutido, a origem do caos está na existência de selas caóticas que são responsáveis pelo caos transiente, exibindo a existência de um conjunto Cantor.

2.3 Introdução à teoria do espalhamento

Dando continuidade ao que foi discutido nas seções anteriores, um exemplo simples de espalhamento é de uma partícula sob o efeito de uma força limitada a uma região no espaço. Essa força pode ser testada por meio do movimento de partículas que se aproximam de grandes distâncias. A natureza caótica do processo surge porque o movimento pode se tornar duradouro e irregular na região onde as forças finitas estão em ação. Nestes casos, falamos de dispersão caótica.

Em geral o processo de espalhamento é a dinâmica de um sistema conservativo que começa e termina em um movimento simples. O espalhamento caótico é a manifestação do caos transiente em sistemas conservativos.

Vamos considerar duas abordagens para descrever o sistema de espalhamento: a abordagem discreta e a contínua. Como exemplo de um sistema discreto temos o espalhamento clássico por discos rígidos. Para o sistema contínuo, vamos analisar o espalhamento caótico em sistemas sob o efeito de potenciais independentes do tempo a partir do formalismo Hamiltoniano.

Para exemplificar esses conceitos, vamos abordar o espalhamento caótico por discos, que é um estudo feito a partir do livro do (TÉL; GRUIZ, 2006).

2.4 Espalhamento em discos

Conforme foi discutido anteriormente, o espalhamento pode ser caracterizado de modo discreto e contínuo. O caso discreto ocorre com a colisão entre corpos, não havendo um potencial existente no processo. Nessa seção vamos discutir o espalhamento para o caso de discos, onde os casos de um e dois discos não ocorre o que chamamos de espalhamento caótico. Já o caso de três discos aparece o que chamamos de espalhamento caótico.

2.4.1 O problema de um disco

Para iniciar a exemplificação da teoria de espalhamento e caos, mostramos o problema do espalhamento de uma partícula em um disco de raio R . A colisão é elástica,

logo não há perda de energia, ou seja, a velocidade em que a partícula colide no disco é constante.

Pela figura 2, podemos identificar os ângulos de incidência e reflexão. O ângulo de incidência é o ângulo formado entre a reta em que a partícula incide com o disco e a reta que vem do raio R . O ângulo de reflexão é o ângulo entre a reta que vem do raio R e a reta de em que a partícula está saindo da região de espalhamento. Identificamos que os dois ângulos são iguais e denotados por ϕ .

Conforme discutimos na introdução, b é o parâmetro de impacto. Para $|b| \leq R$, o ângulo ϕ_0 está relacionado com o parâmetro de impacto b . Esse é o único intervalo em que ocorre a colisão. Obtemos a relação

$$b = R \sin \phi_0. \quad (2.1)$$

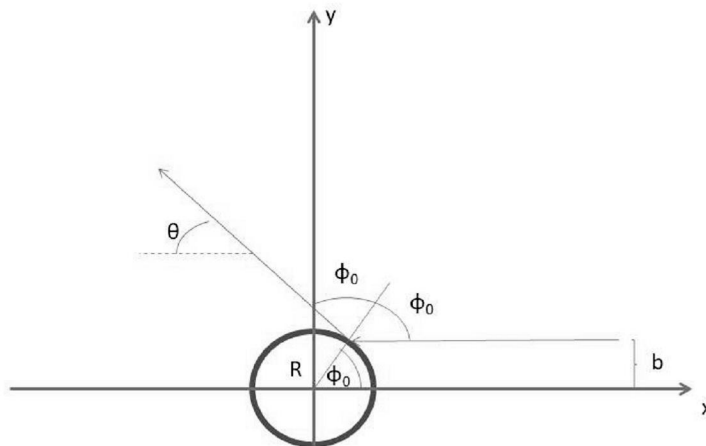


Figura 2 – Espalhamento em um disco, sendo a colisão elástica. Fonte: elaboração do autor.

O ângulo de deflexão é o ângulo suplementar de $2\phi_0$, ou seja,

$$\theta = \pi - 2\phi_0. \quad (2.2)$$

A função de espalhamento, usando $\phi_0 = \arcsin(b/R)$, é

$$\theta = \pi - 2 \arcsin \frac{b}{R}. \quad (2.3)$$

Na figura 3 temos o perfil da função de espalhamento, sendo ela uma função sem singularidades e com parâmetros de impacto críticos sendo $b \pm R$, com $R=0,3$.

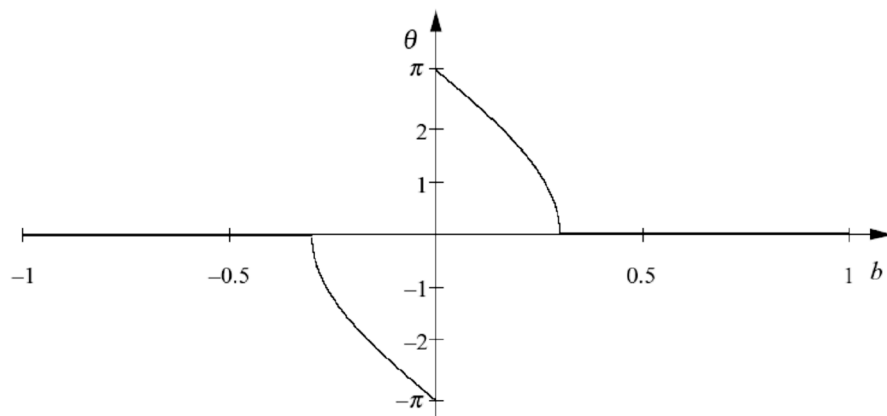


Figura 3 – Função de espalhamento no problema de um disco. Fonte: Imagem retirada do livro (TÉL; GRUIZ, 2006).

2.4.2 O problema de dois discos

Vamos estudar agora a situação em que acrescentamos um novo disco na configuração anterior, de modo que esse segundo disco seja idêntico, de raio R e esteja simétrico no eixo y a uma distância $a > 2R$ um do outro, conforme a figura 4. Novamente, a colisão é elástica.

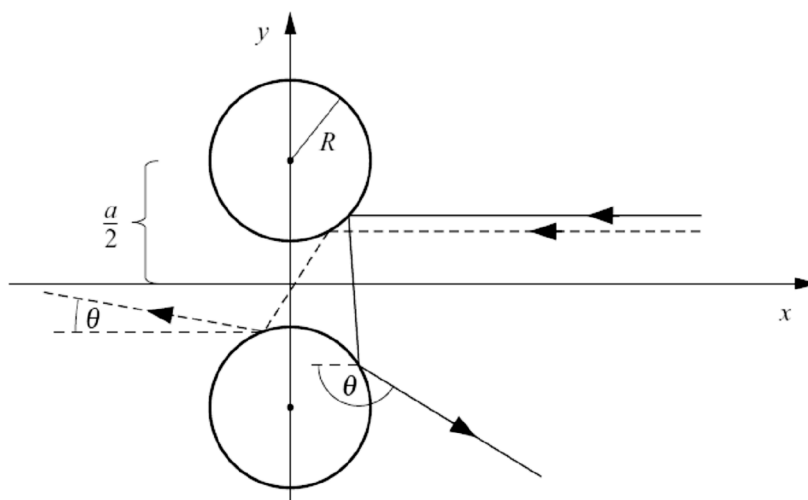


Figura 4 – Problema com dois discos. Uma das partículas salta para trás ($|\theta| > \pi/2$), e a outra (órbita tracejada) é espalhada para frente ($|\theta| < \pi/2$). Fonte: Imagem retirada do livro (TÉL; GRUIZ, 2006).

A figura 4 mostra uma partícula incidindo paralelamente ao eixo x colide com um dos discos. A região em que $|b| < a/2$ é a única para a qual a partícula pode saltar entre os dois discos, existindo ao menos uma órbita periódica no sistema. Para entender a dinâmica, derivamos um mapa relacionando os dados de duas colisões consecutivas nas superfícies do disco. Para isso, analisamos a geometria proposta pelo problema na

figura 5. A colisão n é escolhida para ser caracterizada pelo ângulo θ_n entre a órbita reta incidente e o eixo x e o ângulo de incidência, ϕ_n .

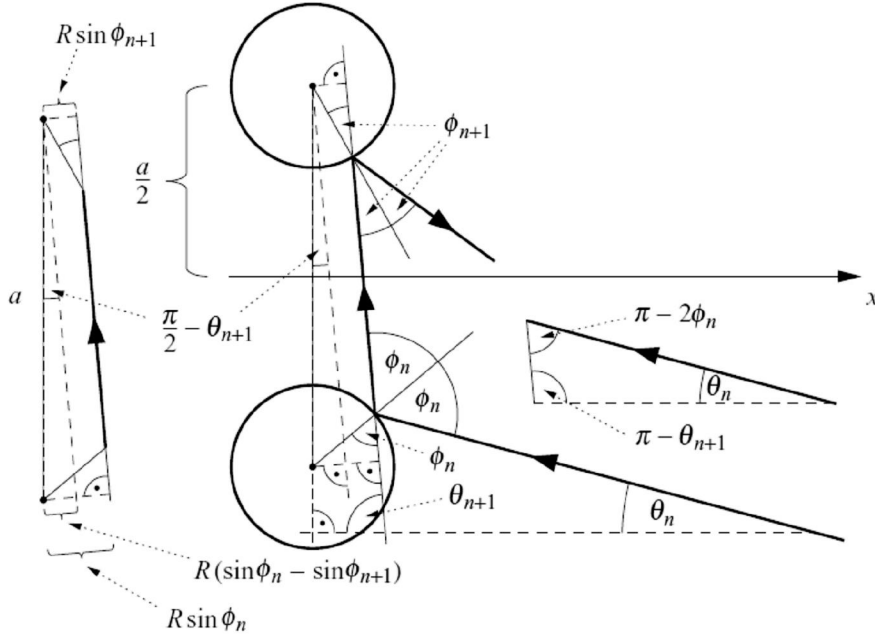


Figura 5 – Relações geométricas necessárias para construir o mapa de espalhamento. Fonte: Fonte: Imagem retirada do livro (TÉL; GRUIZ, 2006).

A colisão da partícula com o primeiro disco ocorre em uma certa região para que ocorra uma órbita periódica. Há alguns valores para que ocorra essa colisão, mas todos eles devem obedecer a relação $|b| < a/2$. O triângulo do lado direito da figura 5 nos dá que a soma de todos os ângulos presentes nele é π , logo

$$\pi = \pi - 2\phi_n + \pi - \theta_{n+1} + \theta_n. \quad (2.4)$$

Chegando em

$$\theta_{n+1} = \theta_n - 2\phi_n + \pi. \quad (2.5)$$

Deslocando a linha da órbita refletida paralela a si mesma de forma que cruze o centro de um dos discos (observando o triângulo do lado esquerdo da figura), obtemos um triângulo retangular de hipotenusa a e de ângulo reto mais curto.

$$R(\sin \phi_n - \sin \phi_{n+1}). \quad (2.6)$$

Mas, também temos que

$$\sin(\pi/2 - \theta_{n+1})a = R(\sin \phi_n - \sin \phi_{n+1}). \quad (2.7)$$

Usando a relação

$$\sin(\pi/2) \cos \theta_{n+1} - \cos(\pi/2) \sin \theta_{n+1} = \cos \theta_{n+1}, \quad (2.8)$$

encontramos

$$\sin \phi_{n+1} = \sin \phi_n - \frac{a}{R} \operatorname{sgn}(\theta_{n+1}) \cos \theta_{n+1}. \quad (2.9)$$

Por meio das equações 2.5 e 2.9 construímos o mapa de espalhamento para os dois discos. A função de espalhamento na figura 6 exibe o surgimento de dois valores de parâmetro de impacto ($\pm bc$), observando que ela é singular. Uma função singular é descontínua. A explicação é que entre os discos existe uma órbita periódica que fica saltando ao longo do eixo y . Esta órbita pode ser atingida para valores de parâmetro de impacto $\pm bc$. Se o valor do parâmetro de impacto for próximo ao valor crítico, a órbita da partícula se aproxima de uma órbita periódica, saltando várias vezes entre os discos antes de escapar. O tempo da partícula espalhada é longa entre os discos.

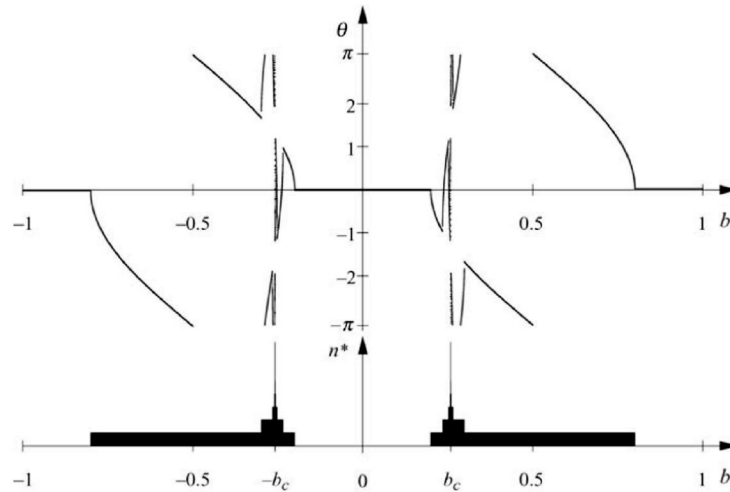


Figura 6 – Espalhamento no problema de dois discos ($R/a = 0,3$). A figura superior mostra a função de espalhamento para partículas ao longo do eixo x . Entre os centros do disco existem dois valores, $\pm bc$, onde o ângulo de deflexão é singular. A figura inferior mostra a distribuição do tempo de vida: número, n^* , de colisões antes de escapar (a altura da faixa preta mais larga é a unidade). Fonte: Imagem retirada do livro (TÉL; GRUIZ, 2006).

Podemos observar o retrato de fase na figura 7 que indica que os pontos $(0, -\pi/2)$ e $(0, \pi/2)$ correspondem aos saltos da partícula entre os discos ao longo do eixo y . As coordenadas iniciais, $x_0 = \text{constante}$, $y_0 = b$, da partícula correspondem às coordenadas de colisão, $\varphi_0 = \arcsin[(b - (a/2)\operatorname{sign}(b))/R]$, $\theta_0 = 0$.

Devemos afirmar que o espalhamento para o caso de um e dois discos é regular. Para tornar mais interessante nossa abordagem do espalhamento em discos, vamos acrescentar um terceiro disco, que será assunto da próxima seção.

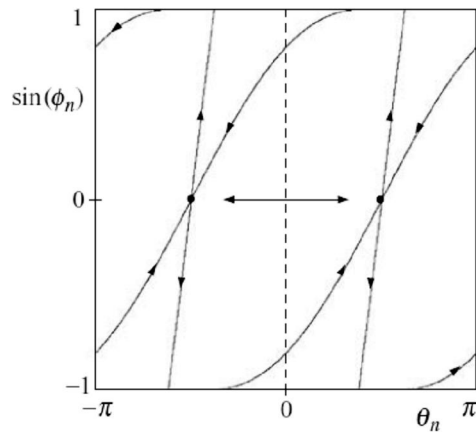


Figura 7 – Retrato de fase do mapa de espalhamento no plano - $(\theta, \sin\varphi)$ ($R/a = 0,3$) com base nas variedades dos dois ciclos (pontos pretos, conectados por uma seta dupla). A linha da condição inicial, $\theta_0 = 0$, é marcada por uma linha tracejada. Fonte: Imagem retirada do livro (TÉL; GRUIZ, 2006).

2.4.3 O problema de três discos

Agora adicionamos um terceiro disco de raio idêntico com seu centro no ponto $x = -\sqrt{3}/2, y = 0$, podendo ser um outro ponto, mas mantendo essa configuração em que ele está sobre o eixo $y=0$. Uma situação de espalhamento nova surge, uma vez que, após deixar os discos centralizados no eixo vertical, a partícula pode saltar de volta do novo disco e colidir novamente com os anteriores. Além dos dois ciclos correspondentes ao salto de pares para frente e para trás, conforme o caso de dois discos, o tipo mais simples descreve o salto em torno dos discos ao longo de uma órbita com a forma de um triângulo regular, conforme a figura 8.b. Sendo a colisão elástica.

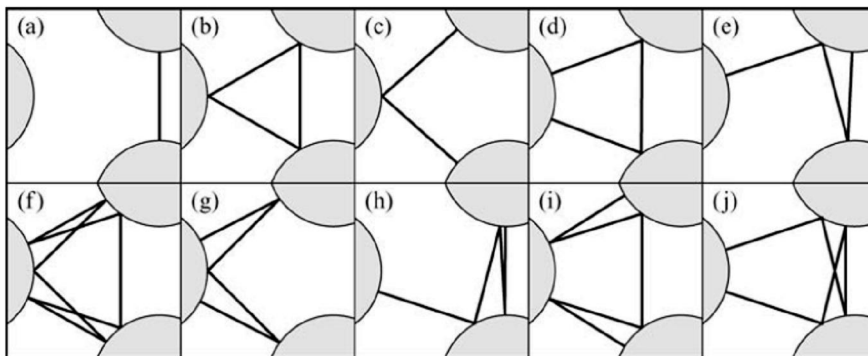


Figura 8 – Algumas órbitas periódicas simples (todas instáveis) do problema de três discos ($R/a = 0,3$). Fonte: Imagem retirada do livro (TÉL; GRUIZ, 2006).

É possível obter o mapa de Poincaré para as colisões n e $n+1$ do problema de dois discos. Para isso, temos que girar o referencial em 120° ou -120° , de modo que os discos de colisão n e $n+1$ caiam no novo eixo y , conforme a equação 2.9. Para perceber isso,

basta observar a figura 8.a, em que a órbita encontrada é parecida com uma órbita do caso de dois discos. O que muda nessa situação é a questão das condições iniciais.

Agora, um número infinito de órbitas periódicas presas está presente no sistema, todas elas hiperbólicas. Algumas delas são mostradas na figura 8. Uma órbita de espalhamento geral pode ser considerada como aquela que vagueia entre as órbitas periódicas instáveis antes que ocorra o escape, conforme a figura 9.

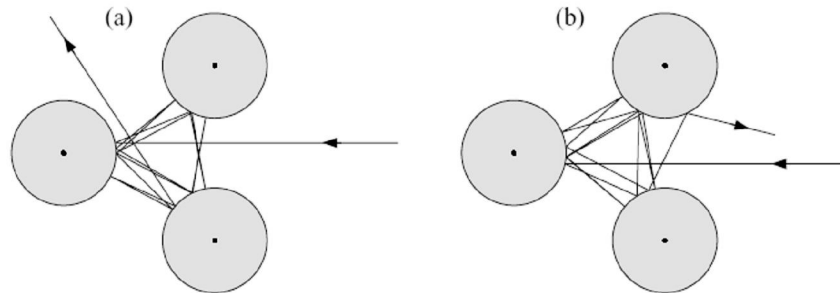


Figura 9 – Órbitas de dispersão no problema dos três discos. Em (a) e (b) a órbita se aproxima dos ciclos (a), (c), (d) e (c), (d), (j) da Fig. 8, respectivamente. Ambas as órbitas escapam após 14 colisões. Fonte: Imagem retirada do livro (TÉL; GRUIZ, 2006).

Novamente, temos que considerar o caso em que $|b| < a/2$. A função de espalhamento é, portanto, muito complicada, e é mostrada na figura 10.

As variedades fractais estáveis e instáveis estão na figura 11. A intersecção de uma variedade estável com uma linha de condições iniciais produz valores de b onde a função de espalhamento é singular.

As partículas deixam a região de espalhamento cruzando uma das três linhas que conectam os centros dos discos. Atribuindo uma cor a cada uma delas, no retrato de fase, observaremos que o plano do mapa se divide em três regiões de escape. No espalhamento caótico, as regiões de escape são separadas por limites fractais. Esses limites contêm as variedades estáveis da sela caótica subjacente ao processo de espalhamento. Na verdade, a variedade estável acaba por estar na fronteira de todas as três cores simultaneamente.

O presente caso é caótico por existirem estruturas fractais presentes no problema. Conforme discutido no início do presente capítulo, caos e fractais estão intimamente ligados e por conta dessas estruturas fractais que notamos a presença de caos no espalhamento. Logo, o caso do espalhamento de uma partícula em três discos exemplifica bem o aparecimento de caos e por esse motivo estudamos os casos de um e dois discos, para que ficasse bem compreensível a abordagem do espalhamento em três discos e a existência de caos.

No próximo capítulo será abordado o espalhamento de forma contínua para o caso clássico, em que a partícula interage com potenciais atrativos.

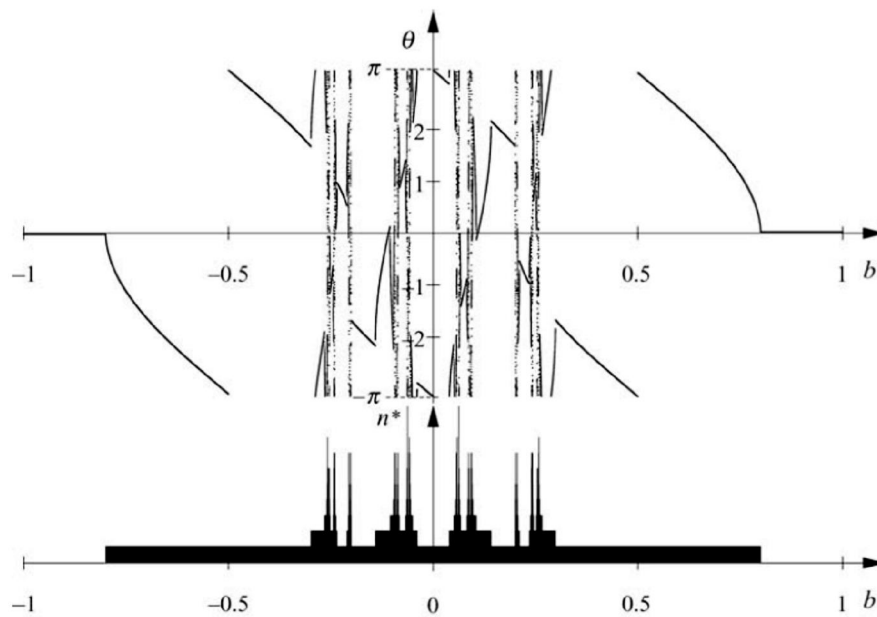


Figura 10 – Dispersão no problema de três discos ($R/a = 0,3$). A figura superior mostra a função de espalhamento para partículas injetadas ao longo do eixo x . A figura inferior é a distribuição do tempo da partícula na região de espalhamento: número n^* de colisões antes de escapar. Fonte: Imagem retirada do livro (TÉL; GRUIZ, 2006).

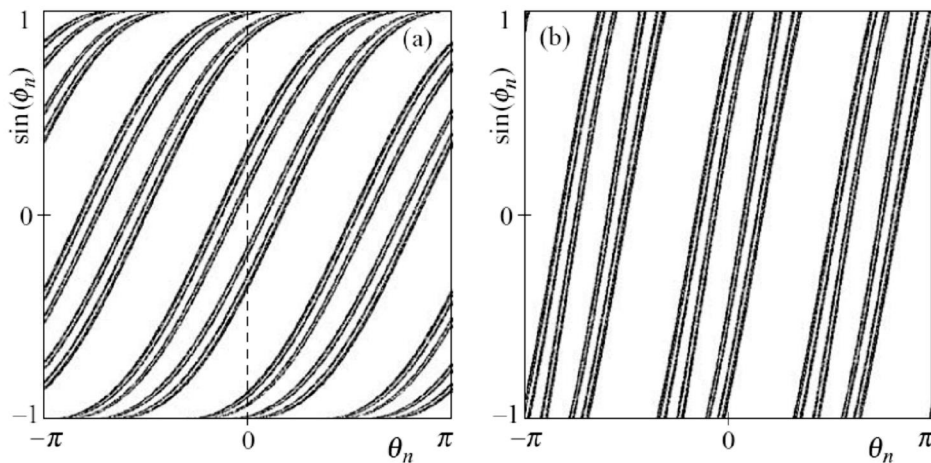


Figura 11 – Variedades invariantes do problema de três discos ($R/a=0,4$): (a) variedade estável e (b) variedade instável. Os gráficos foram gerados a partir de trajetórias que não escapam antes de 12 colisões. As partes (a) e (b) são obtidas nos números de colisão $n = 0$ e $n = 12$, respectivamente (ver Quadro 6.1). A linha da condição inicial, $\theta_0 = 0$, é marcada por uma linha tracejada em (a). Fonte: Imagem retirada do livro (TÉL; GRUIZ, 2006).

2.5 Conclusões

Neste capítulo foram apresentados diversos conceitos para o entendimento de espalhamento caótico. Foram introduzidos alguns conceitos para que fosse possível com-

preender o aparecimento de caos e estruturas fractais no exemplo de espalhamento por discos.

Para o problema do espalhamento de uma partícula com um disco, temos que os resultados obtidos mostram uma função de espalhamento contínua, sem singularidades, apresentando comportamentos lineares.

No problema de dois discos a situação muda um pouco. A função de espalhamento já não é mais contínua e o número de colisões da partícula antes dela escapar da região de espalhamento é grande. Uma singularidade é encontrada, mas não há o aparecimento de caos, por não apresentar a existência de estruturas fractais. A variedade estável é mostrada, apresentado apenas duas formas de saída da região de espalhamento.

O caso de três discos é bem mais interessante, já que a presença de um terceiro disco pode provocar a existência de infinitas órbitas periódicas e aperiódicas. A função de espalhamento é totalmente descontínua, o número de colisões é enorme e cada pico mostrado é uma região de singularidade. As variedades estáveis e instáveis são variedades hiperbólicas, e percebemos a existência de estruturas fractais, apresentando, conforme discutimos no decorrer do capítulo, a existência de caos. Por meio das variedades, percebemos que existem três regiões de escape para a partícula.

3 Espalhamento por potenciais atrativos

Para o atual capítulo, vamos estudar o espalhamento em sistemas contínuos, ou seja, para potenciais atrativos. Vamos apresentar dois exemplos clássicos apenas, em que o espalhamento ocorre para uma partícula livre que é atraída para um potencial com perfil gaussiano e também para o caso em que a partícula interage com dois corpos por meio do potencial gravitacional newtoniano. Todos os resultados e a teoria trabalhada neste capítulo são autorais.

3.1 Mecânica Hamiltoniana

A dinâmica Hamiltoniana é bastante prática, já que ela consiste em um conjunto de $2n$ equações de movimento, onde essas equações de movimento são equações diferenciais de primeira ordem. O movimento pode ser representado no espaço de fases, cujas coordenadas são independentes. Um ponto no espaço de fases determina o estado do sistema. As $2n$ equações são as posições e os momentos canônicos, denotados por q_1, \dots, q_n como as posições e p_1, \dots, p_n os momentos. Definimos a partir das equações de Euler Lagrange o momento canônico como

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.1)$$

onde a grandeza \mathcal{L} é chamada de Lagrangiana e denotamos ela como

$$\mathcal{L} = T - U, \quad (3.2)$$

onde T é a energia cinética do sistema e U a energia potencial.

Sendo assim, definimos a hamiltoniana \mathcal{H} como

$$\mathcal{H}(q, p, t) = \sum_{i=1}^n \dot{q}_i p_i - \mathcal{L}(q, \dot{q}, t). \quad (3.3)$$

Tomando a diferencial da função \mathcal{H} ,

$$d\mathcal{H} = \sum_{i=1}^n (\dot{q}_i dp_i + p_i d\dot{q}_i) - \left[\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i \right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt \right]. \quad (3.4)$$

A partir da equação 3.1,

$$d\mathcal{H} = \sum_{i=1}^n (\dot{q}_i dp_i - \dot{p}_i dq_i) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt. \quad (3.5)$$

Sabendo que \mathcal{H} só depende de q s e p s, temos

$$d\mathcal{H} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} dp_i \right) + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} dt. \quad (3.6)$$

Comparando ambas as equações, temos que

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}, \quad (3.7)$$

além de

$$\dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}, \quad p_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \dot{q}_i}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.8)$$

Essas equações são conhecidas como as equações de Hamilton.

Se as coordenadas generalizadas são independentes do tempo, assegurando que a energia cinética seja uma função quadrática de \dot{q}_i e se a energia potencial for independente da velocidade, podemos definir a hamiltoniana como a energia total do sistema, ou seja,

$$\mathcal{H} = E \quad (3.9)$$

Iremos utilizar essa hamiltoniana para os nossos exemplos seguintes, já que ela será igual a energia do problema.

3.2 Espalhamento de uma partícula livre

Consideremos inicialmente uma partícula livre. A partícula deve interagir com o potencial em uma certa região. Denominamos essa região de região de espalhamento. A partícula livre deve interagir com um potencial com perfil gaussiano. Vamos estudar o caso estático e o caso em que os potenciais estão em órbita. O potencial gaussiano está descrito na equação abaixo:

$$U(x, y) = -e^{-((x+dx)^2+(y+dy)^2)} - e^{-((x-dx)^2+(y-dy)^2)}. \quad (3.10)$$

O potencial é mostrado na figura 12.

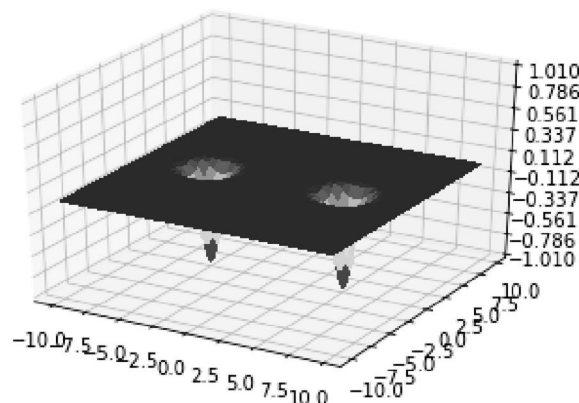


Figura 12 – Contorno de potencial gaussiano. Fonte: Elaboração do autor.

O potencial acima é composto por dois vales, de altura controlável, que estão a uma distância tal que eles não interagem entre si. Os parâmetros dx e dy na equação acima que controlam a altura do potencial.

A hamiltoniana para uma partícula livre que interage com o potencial tipo gaussiano no caso estático, onde os potenciais permanecem parados, é dada por:

$$H = \frac{P_x^2}{2} + \frac{P_y^2}{2} - e^{-((x+dx)^2+(y+dy)^2)} - e^{-((x-dx)^2+(y-dy)^2)}, \quad (3.11)$$

Nota-se que essa hamiltoniana é independente do tempo, logo temos que a energia do sistema é constante e o problema é conservativo. A partir da Hamiltoniana na equação 3.11 e utilizando as equações de Hamilton, temos as seguintes equações de movimento:

$$\dot{x} = P_x, \quad (3.12)$$

$$\dot{y} = P_y, \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} \dot{P}_x = & -2(x + dx)e^{-((x+dx)^2+(y+dy)^2)} \\ & -2(x - dx)e^{-((x-dx)^2+(y-dy)^2)}, \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} \dot{P}_y = & -2(y + dy)e^{-((x+dx)^2+(y+dy)^2)} \\ & -2(y - dy)e^{-((x-dx)^2+(y-dy)^2)}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Temos um sistema aberto, ou seja, trajetórias típicas irão aproximar-se do potencial, interagir com ele e, depois, escapar. Podemos definir a velocidade v de entrada da partícula na região de espalhamento, definindo a energia total do sistema sendo E e energia potencial sendo U , como:

$$v = \sqrt{\frac{2}{m}(E - U)}, \quad (3.16)$$

A partícula, ao ser defletida pelo potencial, pode ser caracterizada pelo parâmetro de impacto b que define as condições iniciais do problema e a função de deflexão v_y , que define as condições de saída. A função de deflexão neste caso é a velocidade de saída da região de espalhamento. Algumas órbitas periódicas permanecem presas no potencial para $t \rightarrow \infty$. Existe um número infinito delas, composto por diferentes combinações das trajetórias. Esse conjunto infinito de órbitas presas é responsável pelo comportamento caótico do espalhamento. O conjunto dessas órbitas instáveis é denominado por conjunto de sela caótica.

Podemos analisar duas configurações, em que os potenciais estão parados e em seguida quando os potenciais estão em órbitas. Para cada caso é possível observar diversos fatores importantes que indicam a dinâmica do sistema.

Para encontrar cada resultado, utilizamos a linguagem de programação PYTHON para efetuar os cálculos numéricos. Para todas as simulações utilizamos o pacote de integração ODEINT. Neste pacote existem integradores mais antigos implementados no Fortran (principalmente ODEPACK). Ele resolve o problema de valor inicial para sistemas de equações diferenciais de primeira ordem. Todas as outras simulações utilizaremos a mesma linguagem e o mesmo pacote de integração.

3.2.1 Potencial gaussiano estático

Para os potenciais gaussianos estáticos, temos que trajetórias típicas ficam presas na região de espalhamento durante um tempo e escapam. A figura 13 mostra a relação entre o parâmetro de impacto pela velocidade de saída v_y . Observamos uma estrutura fractal, que indica a natureza caótica do sistema. Um zoom da região no retângulo na figura 13 está na figura 14. Uma das trajetórias está figura 15. Para estudar as diferentes condições de escape observadas na figura 13 vamos calcular bacias de escape, que separam diferentes direções de saída da região de espalhamento. Para o presente potencial, há duas opções de saídas para a partícula que interagir com ele, cada saída denotada por uma cor. A bacia de escape é mostrada na figura 16.

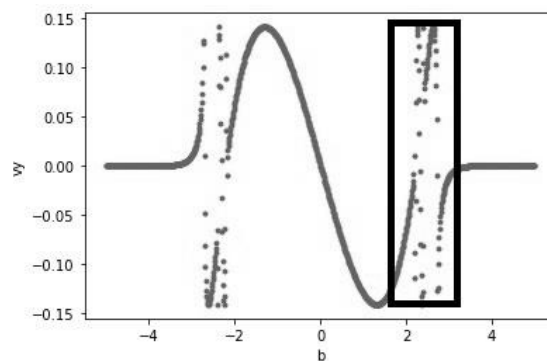


Figura 13 – Parâmetro de impacto pela velocidade de saída. Presença de estruturas fractais. Fonte: elaboração do autor.

Cada cor presente na bacia distingue as diferentes regiões de escape para as quais as condições iniciais deixam a região de espalhamento. No presente caso, as regiões de escape são dadas pelas cores azul e vermelha, representando duas regiões de escape. Há fronteiras nas bacias, de modo que no presente caso percebemos que ela não é suave, ou seja, ela é complexa, sendo um caso caótico, implicando na formação de uma geometria fractal presente.

Agora devemos analisar o caso em que os potenciais estão em órbitas.

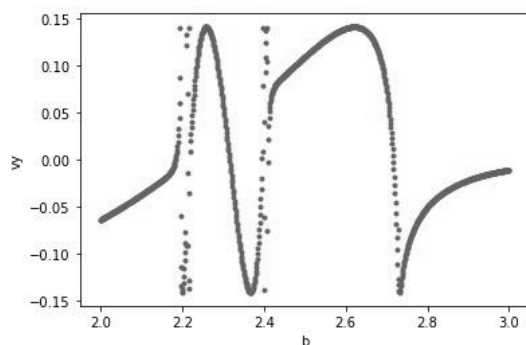


Figura 14 – Zoom para mostrar a figura fractal. Fonte: elaboração do autor.

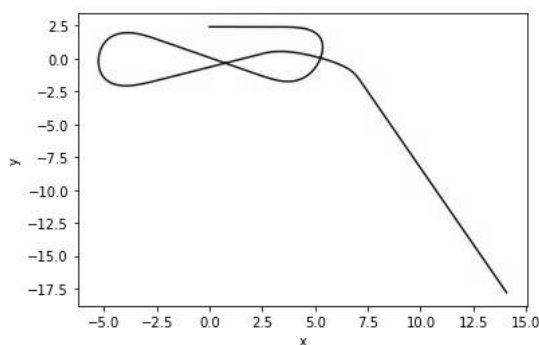


Figura 15 – Trajetória no plano x e y. Fonte: elaboração do autor.

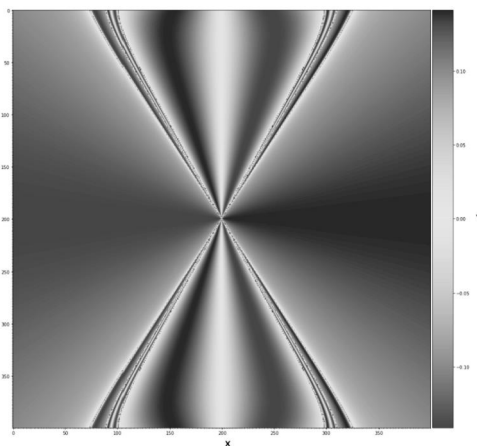


Figura 16 – Bacia de escape para a partícula. Fonte: elaboração do autor.

3.2.2 Potenciais gaussianos em órbita

Para o caso em que os potenciais estão em órbita, ou seja, eles estão em movimento, girando entre si. Temos o gráfico do parâmetro de impacto pela velocidade de saída na figura 18. Algumas trajetórias com algumas condições iniciais próximas às estruturas fractais são dadas pelas figuras 19 e 20. A trajetória do mínimo do potencial, que está em vermelho, é dada pela figura 17.

Temos que as trajetórias nas figuras 19 e 20 começam similares, mas se separaram

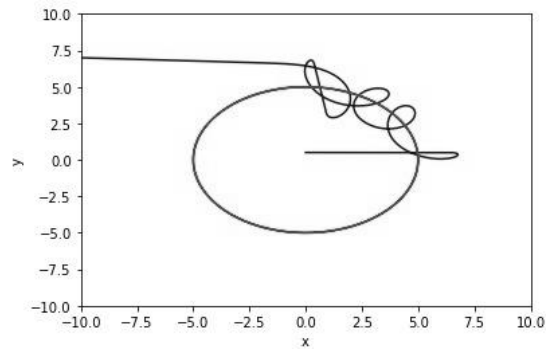


Figura 17 – Trajetória do potencial (em vermelho) e da partícula (em azul) no plano x e y . Fonte: elaboração do autor.

e cada uma escapa em uma direção diferente. Conforme feito no caso dos potenciais parados, para estudar as diferentes regiões de escape, calculamos a bacia de escape, que está na figura 22.

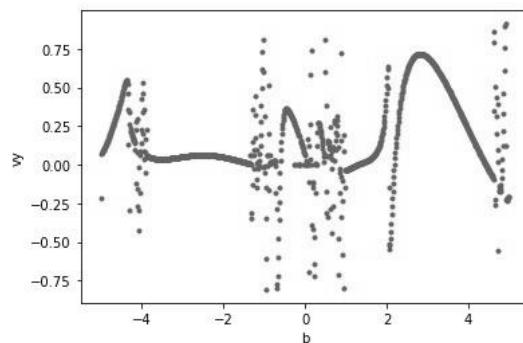


Figura 18 – Parâmetro de impacto pela velocidade de saída. Presença de estruturas fractais. Fonte: elaboração do autor.

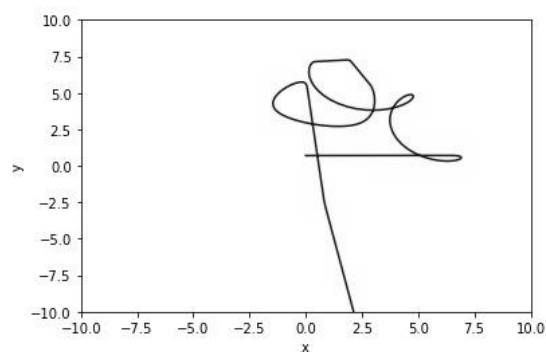


Figura 19 – Trajetória no plano x e y . Fonte: elaboração do autor.

Conforme discutido no caso dos potenciais estáticos, cada cor presente na bacia distingue as diferentes regiões de escape para as quais as condições iniciais deixam a região de espalhamento. No presente caso, as regiões de escape são dadas pelas cores azul e vermelha, e também algumas cores intermediárias, mas sendo elas derivadas do azul e

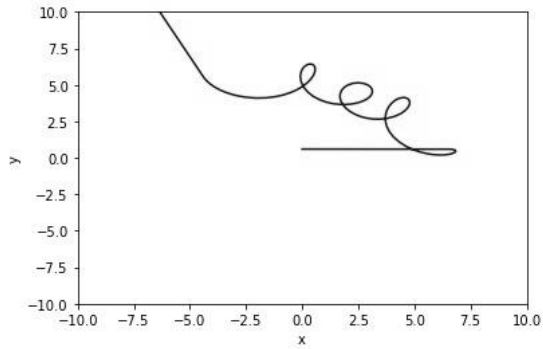


Figura 20 – Trajetória no plano x e y. Fonte: elaboração do autor.

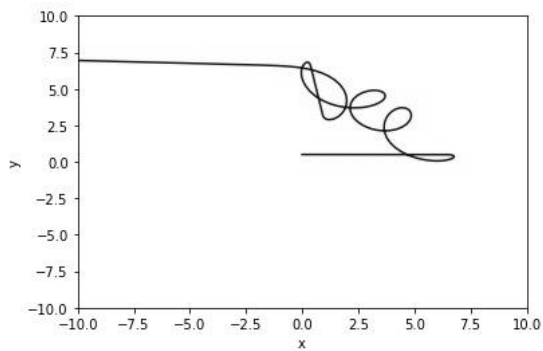


Figura 21 – Trajetória no plano x e y. Fonte: elaboração do autor.

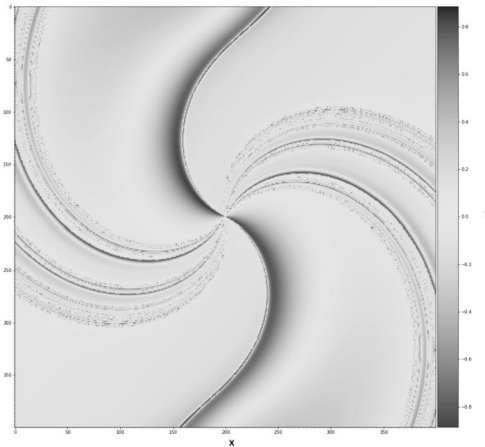


Figura 22 – Bacia de escape para a partícula. Fonte: elaboração do autor.

vermelho, logo representando duas regiões de escape. O caráter caótico é apresentado por conta da existência de estruturas fractais nas regiões de escape.

A rotação dos potenciais traz um novo cenário complexo e rico, com um novo conjunto de órbitas periódicas e aperiódicas, motivo pelo qual queremos verificar o que ocorre com sistema de espalhamento quando os buracos negros estão em órbita. O parâmetro escolhido ω , que define a rotação do potencial, foi de 0.01. Claramente esse valor é bem maior do que o usual, logo os potenciais tem maior rotação em comparação com um caso

mais natural.

Na próxima seção vamos abordar o espalhamento de uma partícula interagindo com dois corpos por meio do potencial gravitacional newtoniano. É um caso mais realista do que os apresentados até agora para o espalhamento no caso contínuo.

3.3 Potencial gravitacional newtoniano

Agora vamos considerar o problema de dois corpos e uma partícula teste. A figura 23 denota todas as principais informações para a solução do problema.

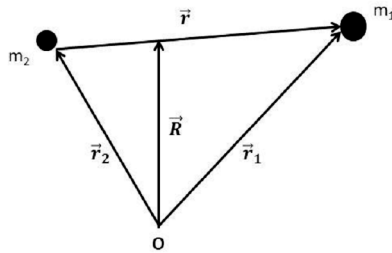


Figura 23 – Problema de dois corpos e o centro de massa. Fonte: elaboração do autor.

O potencial utilizado é o newtoniano, dado pela equação 3.17.

$$U = -\frac{Gm_1m_2}{r}, \quad (3.17)$$

onde G é a constante universal gravitacional, m_1 e m_2 são as massas dos corpos e $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ a distância entre os dois corpos.

Esse potencial assume que, quando r tende ao infinito, o potencial é nulo. Ou seja, a partícula só interage com o potencial na região de espalhamento, fora dela não há interação.

A discussão feita acima para o potencial com perfil gaussiano é válida para o potencial newtoniano, apresentando algumas diferenças. O potencial newtoniano não tem dois vales de altura ajustável, já que depende da massa apresentada neles.

Temos que as equações de movimento para esse caso são

$$m_1 \frac{d\mathbf{v}_1}{dt} = \frac{Gm_1m_2}{r_{12}^3} \mathbf{r}_{12} \quad (3.18)$$

$$\frac{d\mathbf{r}_1}{dt} = \mathbf{v}_1 \quad (3.19)$$

$$m_2 \frac{d\mathbf{v}_2}{dt} = \frac{Gm_1m_2}{r_{21}^3} \mathbf{r}_{21} \quad (3.20)$$

$$\frac{d\mathbf{r}_2}{dt} = \mathbf{v}_2 \quad (3.21)$$

As trajetórias para os dois corpos interagindo entre si são encontradas por meio da solução das equações diferenciais acima. Algumas trajetórias são mostradas nas figuras 24 e 25. Na figura 24 temos as trajetórias no referencial do centro de massa e a figura 25 são as trajetórias no espaço de configuração evoluindo no tempo.

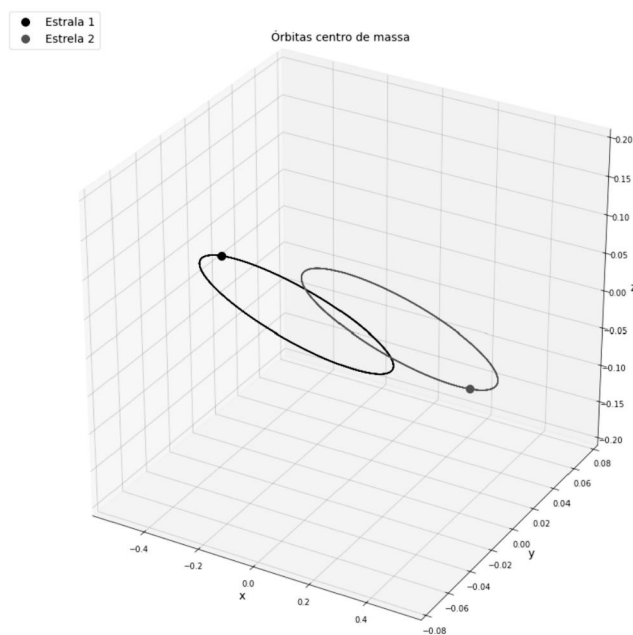


Figura 24 – Trajetória no referencial do centro de massa no espaço x, y e z. Fonte: elaboração do autor.

Todas as integrações foram feitas por meio da normalização das equações diferenciais. Utilizamos a massa do sol como referência, além da distância entre as estrelas em questão e o período da órbita para normalizar as equações. O processo de integração, conforme já discutido anteriormente, foi caracterizado pelo uso do pacote ODEINT do PYTHON.

Para o caso de dois corpos não há a existência de caos, se colocarmos um terceiro corpo, o que acontecerá? Vamos analisar esse caso na próxima seção.

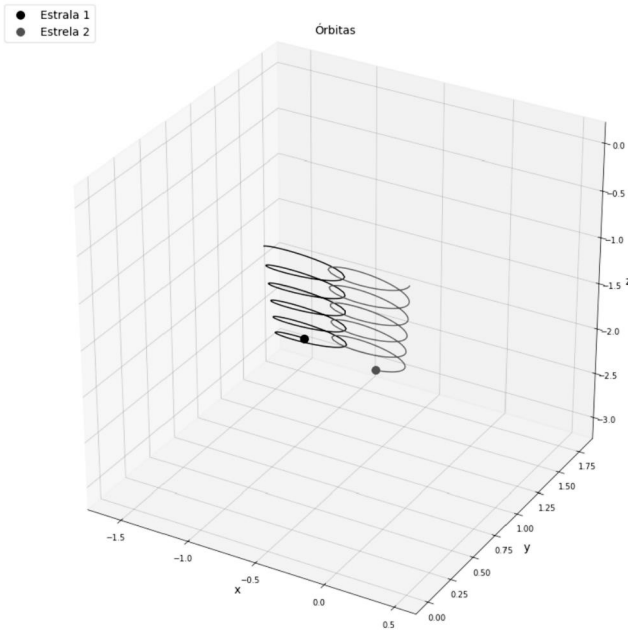


Figura 25 – Trajetórias no espaço x, y e z. Fonte: elaboração do autor.

3.4 Espalhamento caótico para o problema de três corpos

Quando acrescentamos uma nova partícula para o problema as equações de movimento mudam, ficando na forma:

$$m_1 \frac{d\mathbf{v}_1}{dt} = \frac{Gm_1m_2}{r_{12}^3} \mathbf{r}_{12} + \frac{Gm_1m_3}{r_{13}^3} \mathbf{r}_{13} \quad (3.22)$$

$$\frac{d\mathbf{r}_1}{dt} = \mathbf{v}_1 \quad (3.23)$$

$$m_2 \frac{d\mathbf{v}_2}{dt} = \frac{Gm_1m_2}{r_{21}^3} \mathbf{r}_{21} + \frac{Gm_2m_3}{r_{23}^3} \mathbf{r}_{23} \quad (3.24)$$

$$\frac{d\mathbf{r}_2}{dt} = \mathbf{v}_2 \quad (3.25)$$

$$m_3 \frac{d\mathbf{v}_3}{dt} = \frac{Gm_1m_3}{r_{13}^3} \mathbf{r}_{13} + \frac{Gm_2m_3}{r_{23}^3} \mathbf{r}_{23} \quad (3.26)$$

$$\frac{d\mathbf{r}_3}{dt} = \mathbf{v}_3 \quad (3.27)$$

Para uma partícula de massa nula, que chamaremos de fóton clássico, temos a função de deflexão (velocidade final em z pelo parâmetro de impacto) para alguns parâmetros específicos na figura 26. No presente caso a massa dos outros dois corpos são iguais, que chamamos de buracos negros clássicos. Também podemos ver o tempo de escape pelo

parâmetro de impacto na figura 27. As trajetórias para algumas condições iniciais, no espaço tridimensional, estão na figura 28. A partícula de massa nula é a que escapa da região de espalhamento.

Quando analisamos a figura 26, percebemos que existem estruturas fractais presentes na função de deflexão, sendo ela bem irregular em certas regiões. Conforme já discutido, a existência dessas estruturas fractais implica na existência de caos.

Também podemos analisar a figura 27, que é o tempo em que uma partícula permanece na região de espalhamento. Novamente, estudamos com relação ao parâmetro de impacto. Assim como na função de deflexão, existem singularidades no tempo de escape que se intercalam com algumas regiões suaves. Quando o tempo de escape é pequeno, a partícula escapa da região de espalhamento. As regiões de irregularidades estão relacionadas às divergências no tempo de escape.

As duas figuras, função de deflexão e tempo de escape, têm algo em comum, que são as regiões irregulares. Essas regiões apresentam as condições iniciais nas quais as órbitas periódicas ficam presas na região de espalhamento.

As trajetórias para algumas condições iniciais, no espaço tridimensional estão na figura 28. As trajetórias no referencial do centro de massa do problema estão na figura 29. Para outras condições iniciais, encontramos a trajetória no espaço na figura 30 e a trajetória do centro de massa na figura 31. É possível obter diversas outras trajetórias, e por meio de todas elas percebemos a sensibilidade a condições do problema de três corpos. Mudando as condições iniciais, não conseguimos prever a evolução do sistema.

Quando fazemos a massa dos outros dois corpos serem diferentes, mas mantendo a terceira partícula com massa nula, encontramos a função de deflexão e o tempo de escape da partícula nas figuras 32 e 33. Além disso, temos uma trajetória no espaço tridimensional e a trajetória no referencial do centro de massa nas figuras 34 e 35. Neste caso percebemos as mesmas relações discutidas anteriormente. A existência de caos no problema de três corpos é o que nos impulsiona a estudar a dinâmica caótica do fóton por buracos negros em órbita, sendo um caso mais realístico do que o apresentado no artigo do (MOURA; LETELIER, 2000).

3.5 Conclusões

É perceptível o caráter caótico no sistema de uma partícula interagindo com dois potenciais gaussianos e também no caso de uma partícula teste interagindo com outros dois corpos. A descrição do espalhamento caótico em potenciais clássicos conduziu a compreensão que a natureza caótica de um sistema por meio de estruturas fractais presentes no espaço de fases. Para os potenciais gaussianos observamos que essas estruturas apare-

ceram também nas bacias de escape, que representam as regiões de escape da partícula. Para o potencial newtoniano analisamos a existência de caos por meio da função de deflexão e o tempo de escape. As estruturas fractais estão presentes em diferentes situações testadas.

A percepção de estruturas fractais e a grande sensibilidade as condições iniciais estão atreladas. Conforme percebemos, as condições iniciais encontradas por meio das estruturas fractais presentes na bacia de escape conduziram a um novo estudo, deixando de lado o caso artificial proposto no problema de uma partícula livre e iniciando os estudos para o caso da interação de corpos por meio do potencial newtoniano. Para esse caso, notamos de forma clara que, quando três corpos interagem, a sensibilidade a condições iniciais é a principal razão para a existência de caos no sistema.

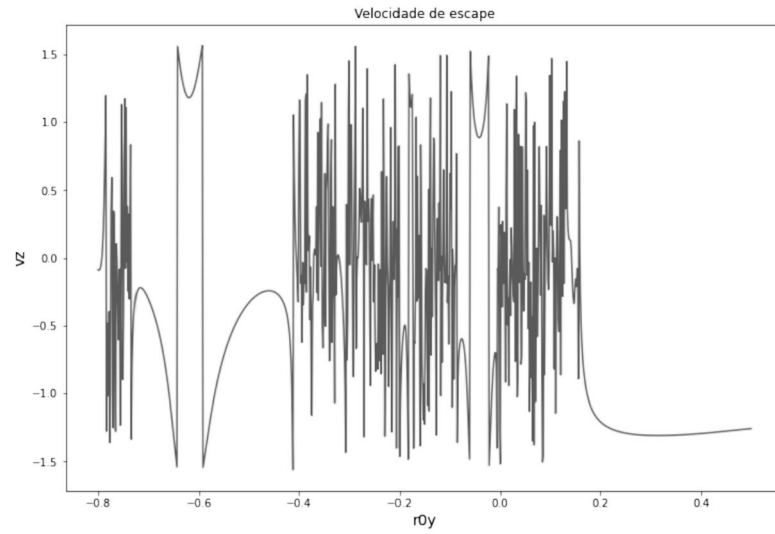


Figura 26 – Velocidade de escape pelo parâmetro de impacto. Fonte: elaboração do autor.

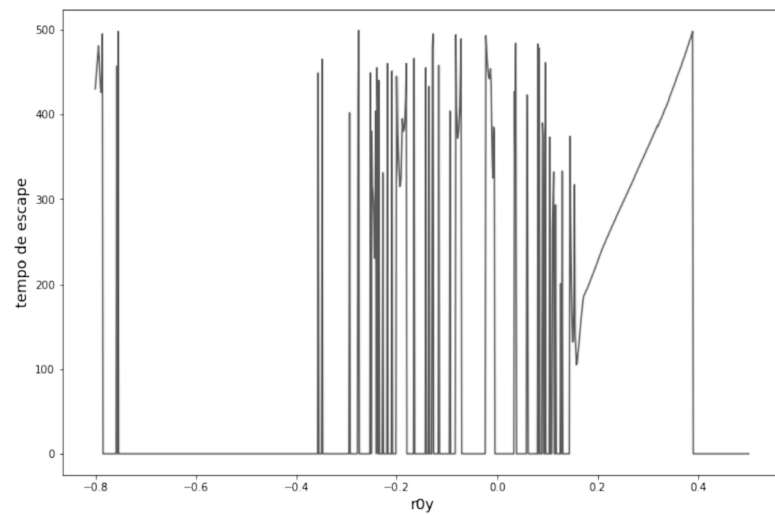


Figura 27 – Tempo de escape (ou atraso) pelo parâmetro de impacto. Fonte: elaboração do autor.

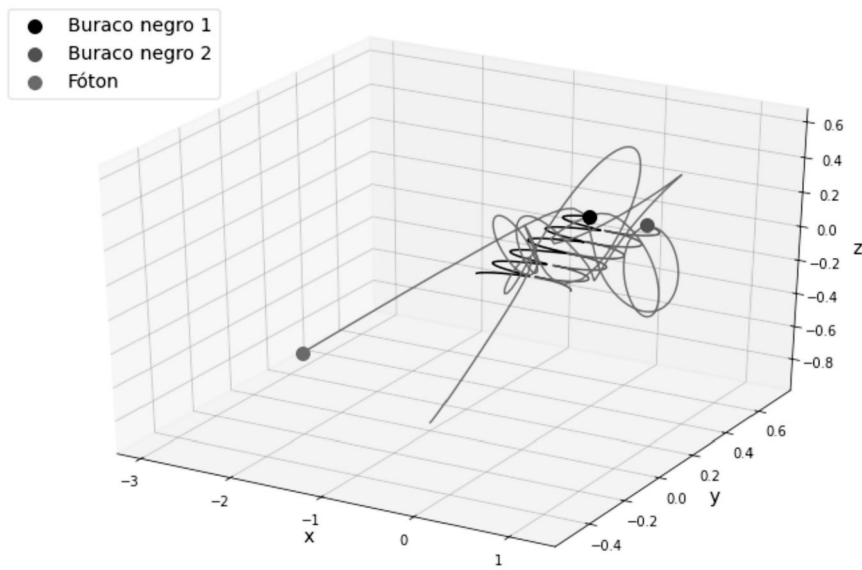


Figura 28 – Trajetórias no espaço x, y e z. Fonte: elaboração do autor.

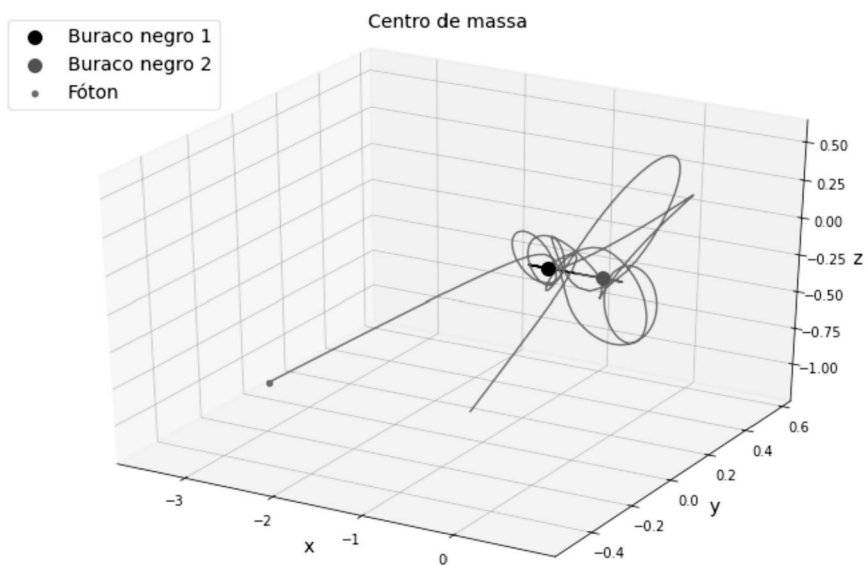


Figura 29 – Trajetórias no referencial do centro de massa no espaço x, y e z. Fonte: elaboração do autor.

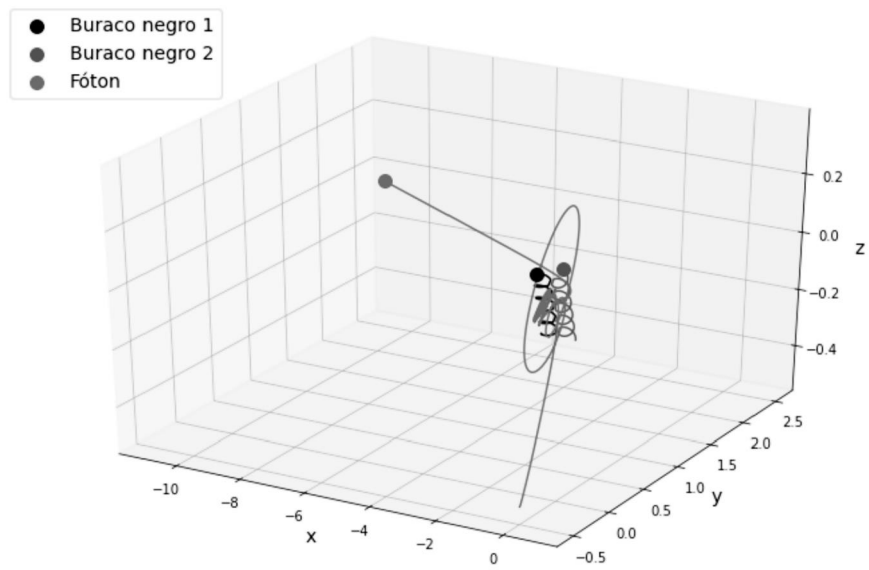


Figura 30 – Trajetórias no espaço x, y e z. Fonte: elaboração do autor.

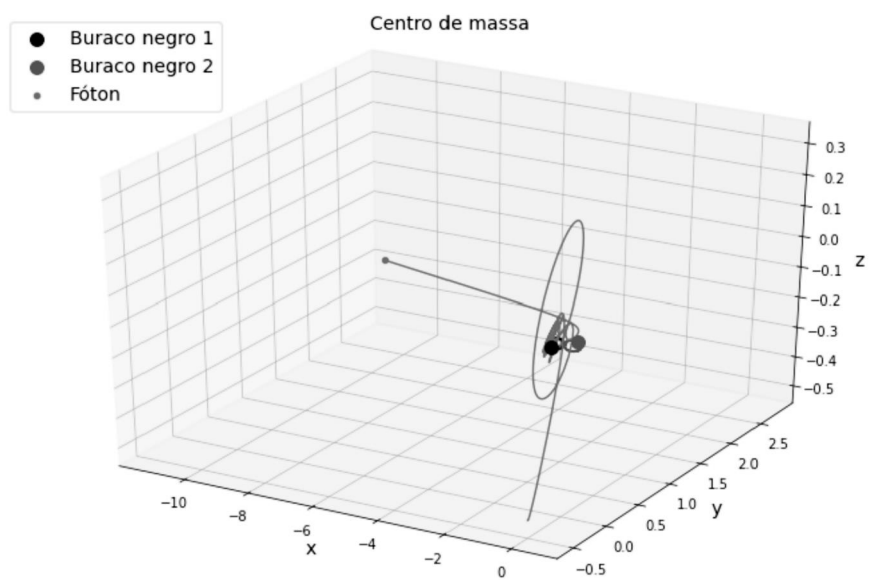


Figura 31 – Trajetórias no referencial do centro de massa no espaço x, y e z. Fonte: elaboração do autor.

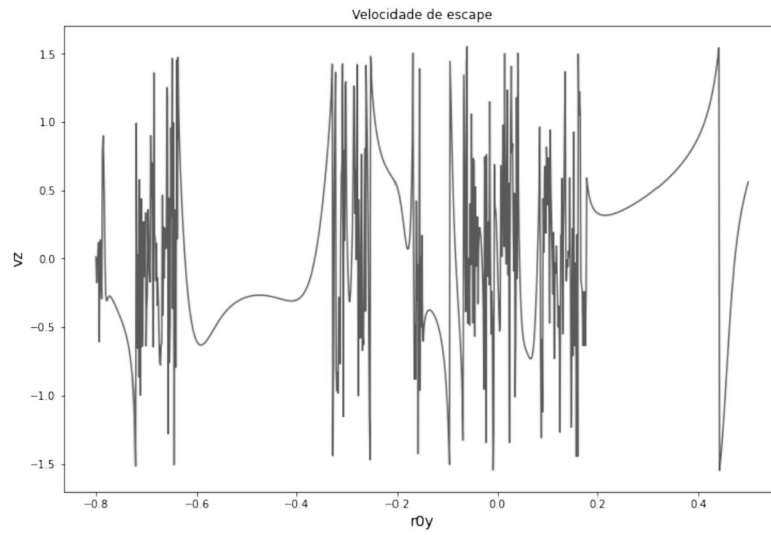


Figura 32 – Velocidade de escape pelo parâmetro de impacto. Fonte: elaboração do autor.

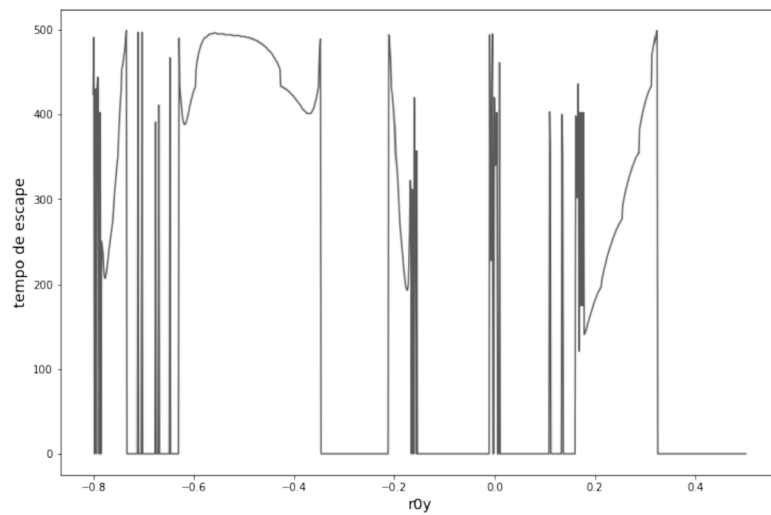


Figura 33 – Tempo de escape (ou atraso) pelo parâmetro de impacto. Fonte: elaboração do autor.

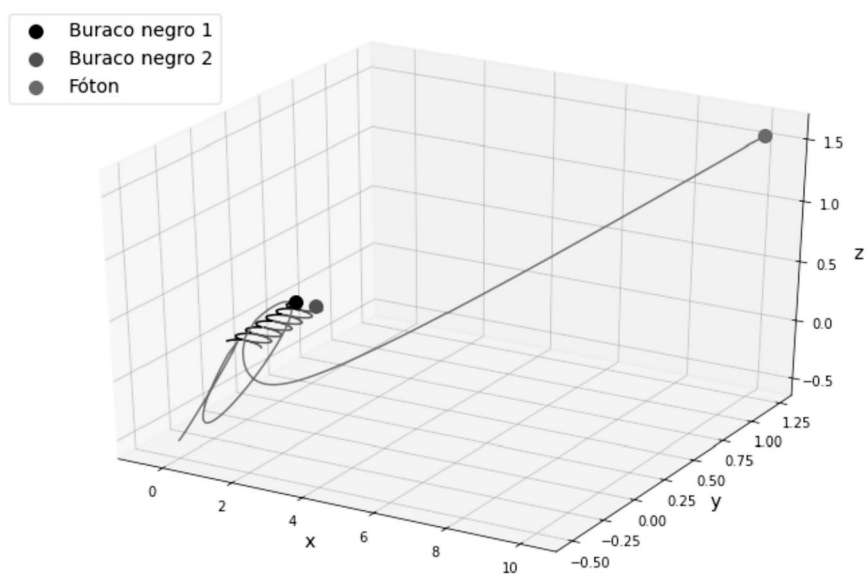


Figura 34 – Trajetórias no espaço x, y e z. Fonte: elaboração do autor.

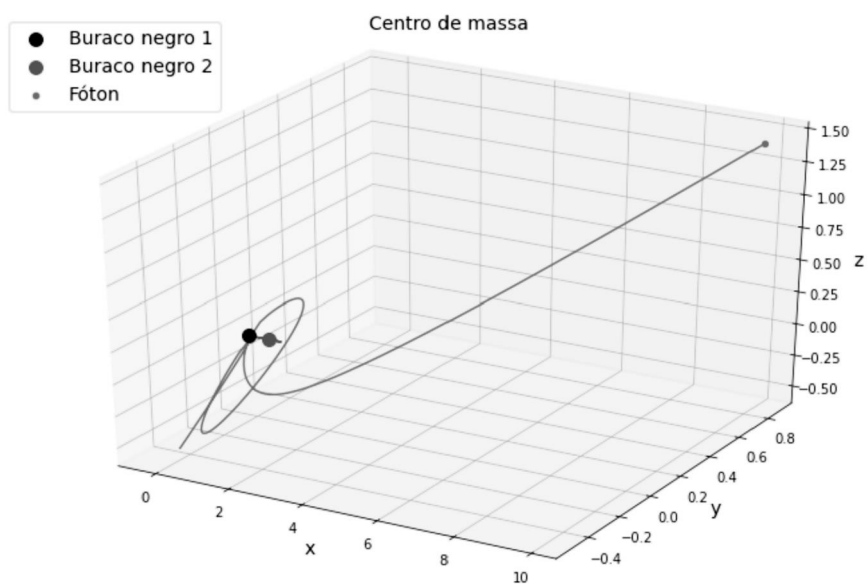


Figura 35 – Trajetórias no referencial do centro de massa no espaço x, y e z. Fonte: elaboração do autor.

4 Espalhamento por buracos negros

Vamos iniciar o presente capítulo explicando alguns conceitos sobre relatividade geral para que seja possível a compreensão de toda a teoria acerca do espalhamento por buracos negros.

4.1 Uma Breve Perspectiva da Relatividade Geral

Einstein desenvolveu a teoria da relatividade geral após a sua publicação sobre a teoria da relatividade especial e publicou o artigo final da teoria geral em 1915. A relatividade geral foi baseada no princípio da equivalência em que todas as leis da física são as mesmas em todos os referenciais. (D'IVERNNO, 1992)

O princípio da equivalência nos diz que experimentos locais não podem distinguir entre um referencial acelerado e a presença de um campo gravitacional. Em ambos os casos, observamos que os corpos sujeitos a nenhuma força não gravitacional caem com igual aceleração. Se fizermos um experimento mental, deixando uma pessoa A em um local longe da terra, em uma nave com aceleração g . Uma pessoa B está em repouso na terra. O princípio da equivalência diz que não existem experimentos que essas duas pessoas possam realizar que lhes dirão em qual das duas configurações elas estão. A pessoa A verá a pessoa B se movimentando com aceleração $-g$, e a pessoa B observará a pessoa A se movimento com aceleração g . A física em cada um dos sistemas é a mesma. Existem outras formas de falar a respeito, como, por exemplo, o caso em que no lugar de estar se afastando com aceleração g , ele se aproxima com aceleração g . Essas são duas formas interessantes de exemplificar o princípio da equivalência.

Uma terceira forma é a partir da massa gravitacional. A massa gravitacional é definida a partir da lei de gravitação universal de Newton,

$$\mathbf{F} = G \frac{Mm_g}{r^2} \hat{\mathbf{r}} = m_g \mathbf{g}. \quad (4.1)$$

Definimos a massa inercial como m_i , e ela aparece na segunda lei de Newton,

$$\mathbf{F} = m_i \mathbf{a}. \quad (4.2)$$

Se um objeto é jogado na superfície da terra, temos que igualando as equações acima, encontramos a aceleração

$$a = \frac{m_g}{m_i} g. \quad (4.3)$$

O princípio da equivalência afirma que a proporção m_g/m_i é igual para quaisquer tipos de massa.

De acordo com o princípio da equivalência, para descrever o movimento de um objeto no campo gravitacional da Terra, temos que descrever o movimento em um referencial em queda livre inercial, em que referencial se refere a mudança de observação do ente físico, e também fazer uma mudança de coordenadas, ou seja, mudar a coordenada de um sistema para outro, a partir deste referencial inercial para o referencial da Terra. Vamos tratar o caso de um fóton no referencial da terra.

No referencial em queda livre, temos as coordenadas no espaço tempo descritas da seguinte maneira:

$$\xi = \xi^\alpha, \quad (4.4)$$

onde $\alpha = 0, 1, 2, 3$. Denotamos o tempo próprio da partícula sendo τ . O movimento da partícula livre é descrito pelo 4-vetor aceleração que é igual à zero. Ou seja

$$\frac{d^2\xi^\alpha}{d\tau^2} = 0, \quad (4.5)$$

onde $ds^2 = cd\tau^2$, já que estamos tratando de uma partícula sem massa, ou seja, um fóton.

Se quisermos descrever o movimento da partícula livre em um referencial não inercial, nomeamos as novas coordenadas nesse novo referencial como x^μ .

Em geral, temos que

$$\xi^\alpha = \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} x^\mu. \quad (4.6)$$

Derivando com relação ao tempo próprio da partícula

$$\frac{d\xi^\alpha}{d\tau} = \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{d\tau}. \quad (4.7)$$

onde usamos a notação de Einstein para o somatório acima.

Derivando com relação ao tempo próprio novamente, e usando a regra da cadeia

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{d\xi^\alpha}{d\tau} \right) = \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \right) \frac{dx^\mu}{d\tau} + \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{d^2x^\mu}{d\tau^2}. \quad (4.8)$$

Igualando a zero e usando a regra da cadeia novamente, temos:

$$0 = \frac{dx^\nu}{d\tau} \left(\frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \right) \frac{dx^\mu}{d\tau} + \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{d^2x^\mu}{d\tau^2}. \quad (4.9)$$

Com a relação

$$\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial \xi^\alpha} = \frac{\partial x^\beta}{\partial x^\mu} = \delta_\mu^\beta. \quad (4.10)$$

Multiplicando a equação 4.9 por $\partial x^\beta / \partial \xi^\alpha$, obtemos

$$0 = \frac{\partial x^\beta}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial \tau} \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} + \delta_\mu^\beta \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2}. \quad (4.11)$$

Temos que δ_μ^β é o delta de Kronecker, e ele é definido como 1 para $\beta = \mu$ e 0 caso sejam diferentes. Então somando o segundo termo da equação acima por μ , fazendo $\mu = \beta$:

$$0 = \frac{\partial x^\beta}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial \tau} \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} + \frac{d^2 x^\beta}{d\tau^2}. \quad (4.12)$$

Finalmente,

$$0 = \frac{d^2 x^\beta}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\beta \frac{\partial x^\mu}{\partial \tau} \frac{\partial x^\nu}{\partial \tau}. \quad (4.13)$$

Que é a equação Geodésica. Temos que

$$\Gamma_{\mu\nu}^\beta = \frac{\partial x^\beta}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu}, \quad (4.14)$$

é o coeficiente de conexão.

Agora vamos falar de um conceito importante para a realização do trabalho, o conceito de métrica. Denotamos o elemento de linha no espaço de Minkowski sendo

$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta, \quad (4.15)$$

onde

$$\eta_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (4.16)$$

denominada de métrica no espaço de Minkowski em coordenadas cartesianas.

Para um referencial não inercial, denotamos as coordenadas por x^μ , com $\mu = 0, 1, 2, 3$, escrevendo então $\xi^\alpha = \xi^\alpha(x^\mu)$. A variação infinitesimal $d\xi^\alpha$ é:

$$d\xi^\alpha = \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^0} dx^0 + \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^3} dx^3, \quad (4.17)$$

ou, usando a notação de somatório de Einstein

$$d\xi^\alpha = \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} dx^\mu, \quad (4.18)$$

do mesmo modo

$$d\xi^\beta = \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} dx^\nu. \quad (4.19)$$

Portanto

$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (4.20)$$

Podemos denotar $g_{\mu\nu}$ como

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu}, \quad (4.21)$$

que é chamado de tensor métrico, mais precisamente, as componentes de um tensor em um sistema de coordenadas geral. Temos que ele é simétrico com relação aos seus índices.

Logo

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (4.22)$$

Temos que o tensor métrico é simétrico no sentido de alternar seus índices. A matriz inversa muda o sentido dos índices, se tornando superiores. O tensor métrico contém todas as informações do espaço-tempo e como a curvatura do espaço-tempo é equivalente à gravitação, a métrica contém todas as informações sobre o campo gravitacional. Definir a métrica é bastante importante para as nossas finalidades nesse trabalho.

Pela segunda lei de Newton, temos

$$\mathbf{a} = -\nabla\Phi, \quad (4.23)$$

onde \mathbf{a} é o vetor de aceleração e a parte direita da equação o gradiente do potencial gravitacional. No limite Newtoniano, a partícula se move lentamente comparada a velocidade da luz, o campo gravitacional é fraco e o campo é estático.

A equação geodésica para o tempo próprio é dada por:

$$\frac{d^2 x^\beta}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\beta \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0. \quad (4.24)$$

Os termos temporais dominam os termos espaciais para o caso da partícula que está se movendo lentamente. Podemos tomar a aproximação:

$$\frac{dx^i}{d\tau} \ll \frac{dt}{d\tau}, \quad (4.25)$$

Logo

$$\frac{d^2 x^\beta}{d\tau^2} + \Gamma_{00}^\beta \left(\frac{cdt}{d\tau} \right)^2 = 0 \quad (4.26)$$

Considerando o espaço 3-dimensional newtoniano, vamos restringir β apenas para as coordenadas espaciais, que denotamos por $i = x, y, z$. Então

$$\frac{d^2 x^i}{d\tau^2} + \Gamma_{00}^i \left(\frac{cdt}{d\tau} \right)^2 = 0. \quad (4.27)$$

Temos os símbolos de Christoffel para uma determinada métrica:

$$\Gamma_{00}^i = \frac{1}{2} g^{ij} (g_{j0,0} + g_{j0,0} - g_{00,j}). \quad (4.28)$$

Como o campo é estático, a derivada com relação ao tempo $g_{j0,0}$ é nula, tendo então a simplificação

$$\Gamma_{00}^i = -\frac{1}{2} g^{ij} g_{00,j}. \quad (4.29)$$

Para um campo gravitacional fraco, a métrica no espaço-tempo como uma pequena perturbação da métrica de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1. \quad (4.30)$$

Então

$$g_{00,j} = (\eta_{00} + h_{00})_{,j}; \quad (4.31)$$

$$g_{00,j} = (\eta_{00})_{,j} + h_{00,j} = 0 + h_{00,j}. \quad (4.32)$$

Pois, temos que $\eta_{00} = 1$, então a derivada é nula por ser uma constante. Portanto

$$g_{00,j} = h_{00,j}. \quad (4.33)$$

Temos, por meio das equações 4.28 e 4.33,

$$\frac{d^2 x^i}{d\tau^2} = \frac{1}{2} g^{ij} h_{00,j} \left(\frac{cdt}{d\tau} \right)^2. \quad (4.34)$$

Se denotarmos $g^{ij} = \eta^{ij} - h^{ij}$, encontramos que $g^{\mu\sigma} g_{\sigma\nu} = \delta_\nu^\mu$, que define uma métrica inversa. Obtemos assim

$$\frac{d^2 x^i}{d\tau^2} = \frac{1}{2} \eta^{ij} h_{00,j} \left(\frac{cdt}{d\tau} \right)^2. \quad (4.35)$$

Invertendo os índices em η^{ij} e fazendo $i = j$, obtemos

$$\frac{d^2 x^i}{d\tau^2} = -\frac{1}{2} h_{00,i} \left(\frac{cdt}{d\tau} \right)^2. \quad (4.36)$$

Agora temos que mudar a derivada de τ para t no lado esquerdo da equação. Substituindo $i = 0$, temos

$$c^2 \frac{d^2 t}{d\tau^2} = -\frac{1}{2} h_{00,0} \left(\frac{cdt}{d\tau} \right)^2. \quad (4.37)$$

Como o campo gravitacional é constante, $h_{00,0} = 0$

$$c^2 \frac{d^2 t}{d\tau^2} = 0, \quad (4.38)$$

portanto

$$\frac{d^2 t}{d\tau^2} = 0. \quad (4.39)$$

Vamos agora calcular as derivadas parciais com relação à τ :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x^i}{d\tau^2} &= \frac{d}{d\tau} \frac{dx^i}{d\tau} = \frac{d}{d\tau} \left(\frac{dt}{d\tau} \frac{dx^i}{dt} \right) = \frac{dt}{d\tau} \left(\frac{d}{d\tau} \frac{dx^i}{dt} \right) + \frac{dx^i}{dt} \left(\frac{d}{d\tau} \frac{dt}{d\tau} \right), \\ \frac{d^2 x^i}{d\tau^2} &= \frac{dt}{d\tau} \left(\frac{dt}{d\tau} \frac{d}{dt} \frac{dx^i}{dt} \right) + \frac{dx^i}{dt} \left(\frac{d}{d\tau} \frac{dt}{d\tau} \right) = \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 \left(\frac{d^2 x^i}{dt^2} \right) + \frac{dx^i}{dt} \left(\frac{d^2 t}{d\tau^2} \right). \end{aligned} \quad (4.40)$$

Portanto

$$\frac{d^2 x^i}{d\tau^2} = \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 \left(\frac{d^2 x^i}{dt^2} \right). \quad (4.41)$$

Logo

$$\left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 \left(\frac{d^2 x^i}{dt^2} \right) = -\frac{1}{2} h_{00,i} \left(\frac{cdt}{d\tau} \right)^2. \quad (4.42)$$

Simplificando

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = -\frac{c^2}{2} h_{00,i}. \quad (4.43)$$

Finalmente, expressando na forma vetorial:

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -\nabla \Phi. \quad (4.44)$$

Comparando as equações 4.43 e 4.44, temos

$$\Phi = \frac{c^2}{2} h_{00}. \quad (4.45)$$

Queremos encontrar a generalização relativística para a equação de Poisson para o campo gravitacional:

$$-\nabla \cdot \mathbf{g} = -\nabla \cdot (-\nabla\Phi) = 4\pi G\rho, \quad (4.46)$$

onde ϕ é o potencial gravitacional e ρ a densidade de massa. Tendo a seção passada, é razoável assumir que nossa equação deve tomar a forma de:

$$G^{\mu\nu} = kT^{\mu\nu}, \quad (4.47)$$

onde k significa um escalar de $G^{\mu\nu}$ o tensor de Einstein de grau 2, descrevendo a curvatura do espaço-tempo.

Temos as seguintes consequências para esse tensor: ele deve ser nulo em um espaço-tempo plano; deve descrever a curvatura do espaço-tempo e ser linear ao tensor de Riemann; deve ter o divergente nulo; nos limites Newtonianos, deve reduzir-se à $4\pi G\rho$.

Temos que o potencial gravitacional no limite Newtoniano está ligado com a métrica por meio de $h_{00} = (g_{00} - 1)/c^2$

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \nabla\Phi, \quad (4.48)$$

com $\Phi = \frac{c^2 h_{00}}{2}$.

Como a gravidade está sendo modelada como uma curvatura no espaço tempo, vamos calcular o tensor de Riemann e encontrar o laplaciano de Φ :

$$R^\alpha_{\mu\sigma\nu} = (\partial_\sigma\Gamma^\alpha_{\mu\nu} - \partial_\nu\Gamma^\alpha_{\mu\sigma} + \Gamma^\alpha_{\gamma\sigma}\Gamma^\gamma_{\nu\mu} - \Gamma^\alpha_{\nu\gamma}\Gamma^\gamma_{\mu\sigma}). \quad (4.49)$$

No limite de um campo gravitacional estático e fraco, apenas o termo R_{00} , que é um tensor de Ricci, contribui:

$$R_{00} = R^\alpha_{00\alpha} = \Gamma^\alpha_{0\alpha,0} - \Gamma^\alpha_{00,\alpha} + O(h^2) = -\Gamma^i_{00,i}. \quad (4.50)$$

Temos que já calculamos esse símbolo de Christoffel

$$\Gamma^i_{00} = -\frac{1}{2}g^{ij}g_{00,j}. \quad (4.51)$$

Com a aproximação de $g^{ij} = \eta^{ij}$ e $g_{00,j} = h_{00,j}$, temos

$$\Gamma^i_{00} = -\frac{1}{2}\eta^{ij}h_{00,j} = \frac{1}{2}\delta_j^i h_{00,j}, \quad (4.52)$$

$$\Gamma^i_{00,i} = \frac{1}{2}\delta_j^i h_{00,ij}, \quad (4.53)$$

$$R_{00} = -\Gamma^i_{00,i} = -\frac{1}{2}(\partial_1^2 h_{00} + \partial_2^2 h_{00} + \partial_3^2 h_{00}) = -\frac{1}{2}\nabla^2 h_{00} = -\frac{1}{c^2}\nabla^2\Phi. \quad (4.54)$$

Em 1915, usando esta equação, Einstein foi capaz até de resolver o problema de longa data da precessão do periélio de Mercúrio. Einstein rejeitou essa primeira tentativa, devido ao fato do divergente de R_{ab} ser não nulo.

Vamos derivar o tensor de Einstein, que está na equação logo abaixo a partir da identidade de Bianchi.

$$G^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg^{\mu\nu}. \quad (4.55)$$

onde $R_a^a = R$ é o escalar de Ricci.

Esta forma de G_{ab} é de grau 2 e simétrico, descrevendo a curvatura do espaço-tempo. Vamos provar que a derivada é nula. Temos a identidade de Bianchi

$$\nabla_\sigma R_{\alpha\beta\mu\nu} + \nabla_\nu R_{\alpha\beta\sigma\mu} + \nabla_\mu R_{\alpha\beta\nu\sigma} = 0. \quad (4.56)$$

Multiplicando por $g^{\gamma\sigma}g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu}$, temos

$$\nabla_\sigma g^{\gamma\sigma}g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu}R_{\alpha\beta\mu\nu} + \nabla_\nu g^{\gamma\sigma}g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu}R_{\alpha\beta\sigma\mu} + \nabla_\mu g^{\gamma\sigma}g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu}R_{\alpha\beta\nu\sigma} = 0, \quad (4.57)$$

$$\nabla_\sigma g^{\gamma\sigma}R + \nabla_\nu g^{\gamma\sigma}g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu}R_{\alpha\beta\sigma\mu} + \nabla_\mu g^{\gamma\sigma}g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu}R_{\alpha\beta\nu\sigma} = 0, \quad (4.58)$$

$$\nabla_\sigma g^{\gamma\sigma}R + \nabla_\nu g^{\gamma\sigma}g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu}R_{\sigma\mu\alpha\beta} + \nabla_\mu g^{\gamma\sigma}g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu}R_{\nu\sigma\alpha\beta} = 0, \quad (4.59)$$

$$\nabla_\sigma g^{\gamma\sigma}R - \nabla_\nu g^{\gamma\sigma}g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu}R_{\mu\sigma\alpha\beta} - \nabla_\mu g^{\gamma\sigma}g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu}R_{\nu\sigma\beta\alpha} = 0. \quad (4.60)$$

Usando a definição do tensor de Ricci $R^{\mu\nu} = g^{\mu\beta}g^{\nu\sigma}R_{\beta\sigma}$ e renomeando os índices, temos

$$\nabla_\sigma g^{\gamma\sigma}R - \nabla_\nu g^{\gamma\sigma}g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu}R_{\mu\sigma\alpha\beta} - \nabla_\mu g^{\gamma\sigma}g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu}R_{\nu\sigma\beta\alpha} = 0, \quad (4.61)$$

$$\nabla_\sigma g^{\gamma\sigma}R - \nabla_\nu g^{\gamma\sigma}g^{\beta\nu}R_{\sigma\beta} - \nabla_\mu g^{\gamma\sigma}g^{\alpha\mu}R_{\sigma\alpha} = 0, \quad (4.62)$$

$$\nabla_\sigma g^{\gamma\sigma}R - \nabla_\nu R^{\gamma\nu} - \nabla_\mu R^{\gamma\mu} = 0, \quad (4.63)$$

$$\nabla_\sigma g^{\gamma\sigma}R - \nabla_\sigma R^{\gamma\sigma} - \nabla_\sigma R^{\gamma\sigma} = 0. \quad (4.64)$$

Realizando as derivadas, obtemos

$$\nabla_\sigma g^{\gamma\nu}R - 2\nabla_\sigma g^{\gamma\nu} = 0, \quad (4.65)$$

$$\nabla_\sigma(2R^{\gamma\sigma} - g^{\gamma\sigma}R) = 0, \quad (4.66)$$

$$\nabla_{\sigma}(R^{\gamma\sigma} - \frac{1}{2}g^{\gamma\sigma}R) = 0. \quad (4.67)$$

A divergência do tensor de Einstein é nula, e encontramos o candidato certo para o lado esquerdo da nossa equação para a curvatura do espaço tempo.

Substituindo o tensor de Einstein por sua expressão completa:

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R = kT^{\mu\nu}. \quad (4.68)$$

Multiplicando ambos os lados por $g_{\mu\nu}$

$$g_{\mu\nu}R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}g^{\mu\nu}R = kg_{\mu\nu}T^{\mu\nu}. \quad (4.69)$$

Por definição, com a contração métrica $g_{\mu\nu}R^{\mu\nu} = R$ e $g_{\mu\nu}T^{\mu\nu} = T$, assim

$$R - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = kT. \quad (4.70)$$

Temos que $g_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = \delta_{\nu}^{\nu}$. Como seu produto da uma matriz identidade de quarta ordem, então $g_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = \delta_{\nu}^{\nu} = 1 + 1 + 1 + 1 = 4$, portanto

$$R - \frac{1}{2}R4 = kT, \quad (4.71)$$

$$R - 2R = kT, \quad (4.72)$$

$$R = -kT. \quad (4.73)$$

Substituindo R por -kT na equação original de Einstein

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}(-kT) = kT^{\mu\nu}, \quad (4.74)$$

$$R^{\mu\nu} + \frac{1}{2}kg^{\mu\nu}T = kT^{\mu\nu}, \quad (4.75)$$

$$R^{\mu\nu} = k\left(T^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}T\right). \quad (4.76)$$

No limite newtoniano, temos que a componente do tensor de Riemann R_{00} se aproxima por

$$R_{00} \approx -\frac{1}{c^2}\nabla^2\Phi. \quad (4.77)$$

Mas quando a métrica se reduz para a métrica η do espaço-tempo plano, temos por definição do tensor de Ricci:

$$R^{00} = g^{0\mu}g^{0\nu}R_{\mu\nu} \approx \eta^{0\mu}\eta^{0\nu}R_{\mu\nu} = (-1)(-1)R_{00} = R_{00} \approx -\frac{1}{c^2}\nabla^2\Phi. \quad (4.78)$$

O limite newtoniano implica que a única componente não desprezível do tensor de energia-momento é $T^{00} = \rho c^2$ ($T^{\mu\nu} = \rho u^\mu u^\nu$, $u^i \ll c$).

Então

$$T = g_{\mu\nu} T^{\mu\nu} \approx g_{00} T^{00} \approx n_{00} T^{00} = T_{00} = \rho c^2. \quad (4.79)$$

Desenvolvendo a componente de grau 00, impondo que $R^{00} = \nabla\Phi$, da equação de Einstein

$$R^{00} = k \left(T^{00} - \frac{1}{2} \eta^{00} T \right), \quad (4.80)$$

$$-\frac{4\pi G \rho}{c^2} = k \left(\rho c^2 - \frac{1}{2} \rho c^2 \right), \quad (4.81)$$

$$-\frac{4\pi G \rho}{c^2} = \frac{1}{2} k \rho c^2, \quad (4.82)$$

$$k = -\frac{8\pi G}{c^4}. \quad (4.83)$$

Portanto, a equação de Einstein em sua forma padrão é

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R = -\frac{8\pi G}{c^4} T^{\mu\nu}, \quad (4.84)$$

$$R^{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4} \left(T^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} T \right). \quad (4.85)$$

Karl Schwarzschild, em 1916, anunciou ter descoberto a solução para as equações de campo da relatividade geral para o vácuo. O tensor energia-momento é nulo nesse caso e essa solução fornece a curvatura do espaço-tempo na região externa a uma distribuição de massa, simetricamente esférica. A solução é denotada pela métrica de Schwarzschild.

4.2 Buracos negros

Uma das descobertas da relatividade geral de Einstein, é o comportamento da luz sob a influência da gravidade. Esse comportamento é uma característica para a existência de buracos negros. Outra descoberta importante foi a de estrelas anãs e estrelas de nêutrons. A existência desses corpos implica em altas densidades, sugerindo que buracos negros podem existir.

Um buraco negro não tem superfície material, toda sua massa se colapsou em uma singularidade que é cercada por uma fronteira, que chamamos de horizonte de eventos. Nada pode escapar do horizonte de eventos. Se um fóton for emitido de dentro do

horizonte de eventos, ele encontrará no horizonte a singularidade, que iremos discutir posteriormente. Um fóton fora do horizonte de eventos pode vagar até o infinito sem cair na singularidade. Já um fóton emitido no horizonte de eventos em direção qualquer permanecerá preso ao horizonte de eventos. Por meio dessas observações, podemos pensar no horizonte de eventos como sendo feito de fótons direcionados para fora. Buracos negros são uma consequência de como as estrelas massivas evoluem.

Buracos negros podem satisfazer as leis da termodinâmica, sendo a área do buraco negro a entropia e a aceleração gravitacional a temperatura e etc. Com o efeito da física quântica, os buracos negros se comportam como objetos reais com uma temperatura e entropia definidas e diferentes de zero.

Para melhor entendimento sobre esses conceitos e estudar de forma mais sistemática sobre o assunto ver o livro do (RAINE; THOMAS, 2010).

4.3 Espalhamento em dois buracos negros de Schwarzschild

Nesta seção vamos tratar o caso estudado no artigo do (MOURA; LETELIER, 2000), onde um fóton (luz) interage com dois buracos negros estáticos.

Conforme discutido, a solução de Schwarzschild é simetricamente esférica e o tensor de energia momento é nulo. Podemos reduzir as equações de campo ao tensor de Ricci e obter uma nulidade:

$$R_{\mu\nu}g^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}g^{\mu\nu}R = 0 \quad (4.86)$$

Como o espaço é quadridimensional, temos que $g_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = 4$ e também temos o escalar de Ricci $R_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = R$, logo

$$R - \frac{1}{2}4R = 0 \quad (4.87)$$

Implicando em $R=0$. Logo, as equações de campo de Einstein no vácuo se reduzem a:

$$R_{\mu\nu} = 0 \quad (4.88)$$

Consideramos especificamente o caso da geodésica nula. A métrica de Schwarzschild, que é a solução para a equação de campo acima, é escrita em coordenadas esféricas:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{2M}{r}} - r^2 d\Omega^2, \quad (4.89)$$

onde $d\Omega = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$ e fazemos que $c = G = 1$. A constante M é a massa do buraco negro.

Observando a métrica percebemos dois valores de indeterminações, $r=0$ e $r=2M$. Essas indeterminações são chamadas de singularidades. Existem dois tipos de singularidades, a de coordenadas e as físicas. Uma singularidade de coordenadas são falhas no sistema de coordenadas utilizado e elas podem ser removidas através de uma transformação de coordenadas. As singularidades físicas são diferentes.

O valor $r=2M$ é uma singularidade de coordenadas, já $r=0$ constitui uma singularidade física, que chamamos de singularidade apenas. Na singularidade em $r=0$, o campo gravitacional tende a um valor infinito. O horizonte de eventos é denotado pelo raio clássico $R = 2GM/c^2$. Esse raio é o mesmo do raio de Schwarzschild.

É possível deduzir a lagrangiana por meio da métrica encontrada, a partir da equação

$$2\mathcal{L} = g_{ij} \frac{dx^i}{d\tau} \frac{dx^j}{d\tau}, \quad (4.90)$$

onde τ é o tempo próprio.

Do espaço tempo de Schwarzschild, a lagrangiana é

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \dot{t}^2 - \frac{\dot{r}^2}{1 - \frac{2M}{r}} - r^2 \dot{\theta}^2 - (r^2 \sin^2 \theta) \dot{\phi}^2 \right], \quad (4.91)$$

onde cada derivada é com respeito ao tempo próprio. Os momentos canônicos são

$$p_t = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{t}} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \dot{t}, \quad (4.92)$$

$$p_r = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = \frac{1}{1 - \frac{2M}{r}} \dot{r}, \quad (4.93)$$

$$p_\phi = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}, \quad (4.94)$$

e

$$p_\theta = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = r^2 \dot{\theta}. \quad (4.95)$$

A Hamiltoniana é

$$H = p_t \dot{t} - (p_r \dot{r} + p_\theta \dot{\theta} + p_\phi \dot{\phi}) - \mathcal{L} = \mathcal{L}. \quad (4.96)$$

Não existe uma 'energia potencial' presente no problema, logo a energia do sistema é puramente cinética, mas existe um potencial efetivo que é possível deduzir a partir da equação geodésica. A Hamiltoniana e Lagrangiana são constantes (CHANDRASEKHAR, 1992).

Temos também algumas equações de movimento:

$$\frac{dp_t}{d\tau} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0, \quad (4.97)$$

e

$$\frac{p_\phi}{d\tau} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0. \quad (4.98)$$

Portanto,

$$p_t = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{dt}{d\tau} = \text{const} = E, \quad (4.99)$$

e

$$p_\phi = r^2 \sin^2 \theta \frac{d\phi}{d\tau} = \text{const}. \quad (4.100)$$

Além disso, a partir da equação do movimento,

$$\frac{dp_\theta}{d\tau} = \frac{d}{d\tau}(r^2 \dot{\theta}) = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = (r^2 \sin \theta \cos \theta) \left(\frac{d\phi}{d\tau}\right)^2, \quad (4.101)$$

segue-se que se escolhermos atribuir o valor $\pi/2$ para θ quando $\dot{\theta}$ é zero, então $\ddot{\theta}$ também será zero; e θ permanecerá constante. Concluímos que a geodésica é descrita em um plano invariante que podemos distinguir por $\theta = \pi/2$, logo

$$p_\phi = r^2 \frac{d\phi}{d\tau} = \text{const} = L, \quad (4.102)$$

onde L é o momento angular.Com os resultados para \dot{t} e $\dot{\phi}$, a constância da Lagrangiana implica em

$$\frac{E^2}{1 - \frac{2M}{r}} - \frac{\dot{r}^2}{1 - \frac{2M}{r}} - \frac{L^2}{r^2} = 2\mathcal{L} = 0, \quad (4.103)$$

onde é igual a zero pela geodésica do tipo tempo ser nula.

Da equação acima, encontramos que

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + \frac{L^2}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) = E^2. \quad (4.104)$$

Esta equação deve ser considerada junto com

$$E = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{dt}{d\tau}, \quad (4.105)$$

e

$$L = r^2 \frac{d\phi}{d\tau}. \quad (4.106)$$

Considerando r como uma função de ϕ e substituindo r por $u = 1/r$ como a variável independente, obtemos a equação

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 = 2Mu^3 - u^2 + \frac{2}{b^2} = f(u), \quad (4.107)$$

onde

$$b = \frac{L}{E}, \quad (4.108)$$

é o parâmetro de impacto. Um raio de luz vindo do infinito em direção ao buraco negro é caracterizado pelo parâmetro de impacto b . Na região assintoticamente plana, $r \rightarrow \infty$, b corresponde ao parâmetro de impacto usual dos problemas clássicos de espalhamento.

Derivando $f(u)$, e igualando a zero, encontramos:

$$f'(u) = 6Mu^2 - 2u = 0, \quad (4.109)$$

$$u = \frac{1}{3M}. \quad (4.110)$$

Esse resultado de u é uma das raízes da equação $f(u)$

$$2M \left(\frac{1}{27M^3} - \frac{1}{9M^2} + \frac{1}{b^2} \right) = \frac{2}{27M^2} - \frac{1}{9M^2} + \frac{1}{b^2} = 0, \quad (4.111)$$

$$\frac{1}{27M^2} = \frac{1}{b^2}, \quad (4.112)$$

encontrando

$$b = 3\sqrt{3}M. \quad (4.113)$$

Esse é o valor do parâmetro de impacto crítico.

Sejam dois buracos negros com massas iguais M . Os dois buracos negros estão separados por uma distância D muito maior que o raio de Schwarzschild $2M$; consideram-se os dois buracos negros fixos.

Para que as órbitas não escapem, o parâmetro de impacto deve ser tal que sejam espalhadas por pelo menos π por um dos buracos negros. No caso de um buraco negro isolado, isso corresponde a um parâmetro de impacto menor que $b = b_{esc} \approx 5,35696M$, que é menor que três vezes o raio de Schwarzschild. Como a aproximação $D \gg M$, podemos considerar que os raios de luz são espalhados por cada buraco negro separadamente, o outro buraco negro está muito longe para fazer alguma interação (MOURA; LETELIER, 2000).

Suponha que tenhamos um feixe de luz escapando de um dos buracos negros com o parâmetro de impacto b_n e com um ângulo de escape φ_n em relação ao eixo de simetria, como mostrado na Figura 36.

Como os buracos negros estão muito distantes, o parâmetro de impacto b_{n+1} do feixe de luz com relação ao outro buraco negro é o segmento l mostrado na Figura 36. Da geometria, temos $l = b_n + D \sin \varphi$. O ângulo de deflexão é dado por $\Delta(b_{n+1})$. O mapa de espalhamento é então escrito como:

$$b_{n+1} = b_n + D \sin \varphi_n, \quad (4.114)$$

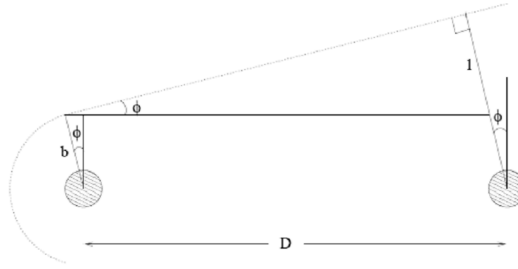


Figura 36 – Construção do mapa de espalhamento. Fonte: Imagem retirada do artigo (MOURA; LETELIER, 2000).

$$\varphi_{n+1} = \pi + \varphi_n - \Delta(b_{n+1}) \mod 2\pi. \quad (4.115)$$

Os ângulos φ_n estão no sentido anti-horário em relação a cada buraco negro. (MOURA; LETELIER, 2000)

O ângulo de dispersão Δ é então dado por

$$\Delta = \pi - 2\phi(b), \quad (4.116)$$

e a função $\phi(b)$ é uma integral elíptica.

Numericamente, foi obtido o gráfico da função de deflexão, que está na figura 37.

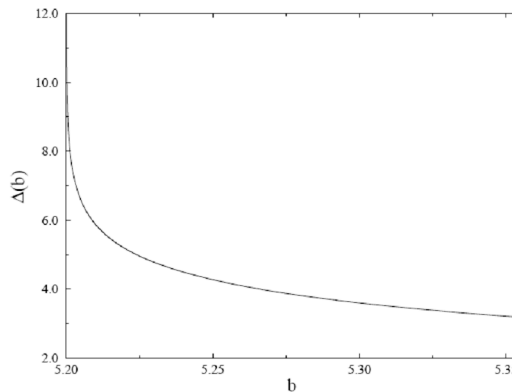


Figura 37 – A função de deflexão $\Delta(b)$ para um buraco negro isolado de Schwarzschild. Fonte: Imagem retirada do artigo (MOURA; LETELIER, 2000).

O mapa descrito acima é válido apenas enquanto b permanecer dentro da faixa $b_c < b < b_{esc}$. Se b não estiver neste intervalo, o raio escapa ou cai em um dos buracos negros.

É possível definir uma função $g(b)$, função discreta, como 1 se a órbita com condições iniciais $\varphi_0 = 0$, $b_0 = b$ cair em um dos buracos negros, -1 se cair no outro e 0 se

escapar da região de espalhamento. A função $g(b)$ fornece uma imagem das interseções das três bacias com o segmento $\varphi_0 = 0$, $b_c < b < b_{esc}$. Essa função está descrita na figura 38, retirada, assim como as demais figuras desta seção do artigo do (MOURA; LETELIER, 2000).

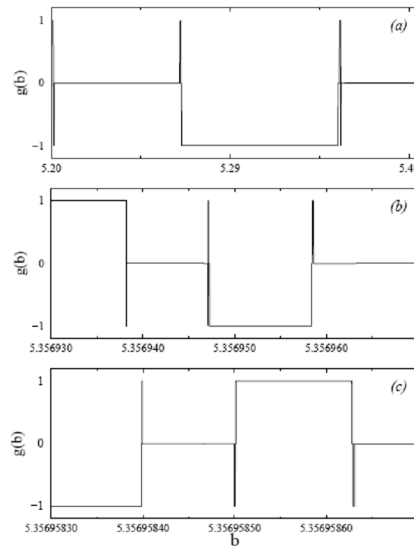


Figura 38 – Função discreta $g(b)$. Fonte: Imagem retirada do artigo (MOURA; LETELIER, 2000).

Percebemos que cada figura apresentada é a ampliação da anterior. Cada ampliação apresenta uma semelhança com a anterior. Isso sugere que a função g tem uma dependência fractal do parâmetro de impacto b .

Na próxima seção vamos descrever buracos negros com momento angular e em órbita.

4.4 Buracos negros de Kerr

Algumas demonstrações presentes nessa seção estão no livro (CHANDRASEKHAR, 1992). Para um corpo de massa m em rotação com momento angular, as equações de Einstein no vácuo são resolvidas pela métrica na equação 4.117, onde utilizando $M = Gm/c^2$ e substituímos $s = c\tau$ e $c\tau$ por t . Tendo um resultado que equivale a definir $G = 1$ e $c = 1$. Obtemos assim

$$ds^2 = \frac{(\Delta - a^2 \sin^2 \theta)}{\rho^2} dt^2 + \frac{4Ma}{\rho^2} r \sin^2 \theta d\phi dt - \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 - \rho^2 d\theta^2 - \frac{A \sin^2 \theta}{\rho^2} d\phi^2, \quad (4.117)$$

onde

$$\Delta = r^2 - 2mr + a^2, \quad (4.118)$$

$$\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \quad (4.119)$$

$$A = (r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2 \theta. \quad (4.120)$$

Caso $\rho = 0$ resulta em singularidades físicas, de modo que $r = \cos \theta = 0$. Em coordenadas cartesianas, temos que

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad (4.121)$$

$$x = r \sin \theta \cos \phi + a \sin \theta \sin \phi, \quad (4.122)$$

$$y = r \sin \theta \sin \phi + a \sin \theta \cos \phi, \quad (4.123)$$

$$z = r \cos \theta. \quad (4.124)$$

A partir dessas equações, e sabendo da singularidade física, temos que

$$x^2 + y^2 = a^2, z = 0. \quad (4.125)$$

Essa expressão nos mostra que a singularidade tem o formato de um anel de raio a . Duas regiões são formadas, não apenas o horizonte de eventos. Existe um efeito, chamado de Lense-Thirring, que puxa o sistema de coordenadas pela rotação da distribuição de massa. Para o caso de buracos negros em rotação, esse efeito é forte, que existe uma região em que é impossível não estar em movimento com relação a um referencial no infinito.

Então, um objeto que se aproxima do buraco negro, entrando nessa região passa a se mover seguindo a rotação do buraco negro. É uma região estacionária. Com isso, temos dois horizontes de eventos. A região entre o horizonte de eventos e a região estacionária tem o nome de Ergosfera. É possível adentrar a Ergosfera e conseguir sair.

A lagrangiana para movimentos no plano equatorial (para o qual $\dot{\theta} = 0$ e $\theta = \text{constante} = \pi/2$) é

$$2\mathcal{L} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \dot{t}^2 + \frac{4aM}{r} \dot{t}\dot{\phi} - \frac{r^2}{\Delta} \dot{\mathbf{r}}^2 - \left[(r^2 + a^2) + \frac{2a^2M}{r} \right] \dot{\phi}^2; \quad (4.126)$$

e deduzimos disso que os momentos generalizados são dados por

$$p_t = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \dot{t} + \frac{2aM}{r} \dot{\phi} = E = \text{const}, \quad (4.127)$$

$$-p_\phi = -\frac{2aM}{r}\dot{t} + \left[(r^2 + a^2) + \frac{2a^2M}{r} \right] \dot{\phi} = L = \text{const}, \quad (4.128)$$

e

$$-p_r = \frac{r^2}{\Delta}\dot{r}, \quad (4.129)$$

onde usamos pontos superiores para denotar a diferenciação em relação ao tempo próprio τ . (A constância de p_t e p_ϕ segue da independência da lagrangiana em t e ϕ que, por sua vez, é uma manifestação do caráter estacionário e simétrico da geometria do espaço tempo de Kerr.)

A hamiltoniana é dado por

$$\mathcal{H} = p_t\dot{t} + p_\phi\dot{\phi} + p_r\dot{r} - \mathcal{L},$$

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \dot{t}^2 + \frac{2aM}{r} \dot{t}\dot{\phi} - \frac{r^2}{2\Delta} \dot{r}^2 - \frac{1}{2} \left(r^2 + a^2 + \frac{2a^2M}{r} \right) \dot{\phi}^2, \quad (4.130)$$

e da independência da hamiltoniana em t , deduzimos que

$$2\mathcal{H} = \left[\left(1 - \frac{2M}{r} \right) \dot{t} + \frac{2aM}{r} \dot{\phi} \right] \dot{t} - \left[\left(r^2 + a^2 + \frac{2a^2M}{r} \right) \dot{\phi} - \frac{2aM}{r} \dot{t} \right] - \frac{r^2}{\Delta} \dot{r}^2 = E\dot{t} - L\dot{\phi} - \frac{r^2}{\Delta} \dot{r}^2,$$

$$2\mathcal{H} = \delta_i = \text{const}. \quad (4.131)$$

Nós, sem perda de generalidade, definimos

$$\begin{aligned} \delta_i &= 1 \text{ para geodésicas tipo tempo;} \\ &= 0 \text{ para geodésicas nulas.} \end{aligned} \quad (4.132)$$

Resolvendo as equações 4.127 e 4.128 para $\dot{\phi}$ e \dot{t} , obtemos

$$\dot{\phi} = \frac{1}{\Delta} \left[\left(1 - \frac{2M}{r} \right) L + \frac{2aM}{r} E \right], \quad (4.133)$$

$$\dot{t} = \frac{1}{\Delta} \left[\left(r^2 + a^2 + \frac{2a^2M}{r} \right) E - \frac{2aM}{r} L \right]; \quad (4.134)$$

e inserindo essas soluções na equação 4.131, obtemos a equação radial

$$r^2\dot{r}^2 = r^2E^2 + \frac{2M}{r}(aE - L)^2 + (a^2E^2 - L^2) - \delta_1\Delta. \quad (4.135)$$

4.4.1 A geodésica nula

Como observamos, $\delta_i = 0$ para geodésicas nulas e a equação radial 4.135 torna-se

$$\dot{r}^2 = E^2 + \frac{2M}{r^3}(L - aE)^2 - \frac{1}{r^2}(L^2 - a^2E^2). \quad (4.136)$$

Em nossas considerações adicionais, será mais conveniente distinguir as geodésicas pelo parâmetro de impacto

$$b = \frac{L}{E} \quad (4.137)$$

em vez de por L .

Primeiro, observamos que a geodésica com o parâmetro de impacto

$$b = a \text{ quando } L = aE, \quad (4.138)$$

desempenham, no presente contexto, o mesmo papel que as geodésicas radiais na geometria do espaço-tempo de Schwarzschild. Assim, neste caso, as equações 4.133, 4.134 e 4.136 reduzem a

$$\dot{r} = \pm E, \quad \dot{t} = (r^2 + a^2)\frac{E}{\Delta}, \quad e \quad \dot{\phi} = \frac{aE}{\Delta}. \quad (4.139)$$

A coordenada radial é descrita uniformemente em relação ao parâmetro afim, enquanto as equações governando t e ϕ são

$$\frac{dt}{dr} = \pm \frac{r^2 + a^2}{\Delta} \quad e \quad \frac{d\phi}{dr} = \pm \frac{a}{\Delta}. \quad (4.140)$$

As soluções dessas equações são

$$\pm t = r + \frac{r_+^2 + a^2}{r_+ - r_-} \lg \left(\frac{r}{r_+} - 1 \right) - \frac{r_-^2 + a^2}{r_+ - r_-} \lg \left(\frac{r}{r_-} - 1 \right), \quad (4.141)$$

$$\pm \phi = \frac{a}{r_+ - r_-} \lg \left(\frac{r}{r_+} - 1 \right) - \frac{a}{r_+ - r_-} \lg \left(\frac{r}{r_-} - 1 \right). \quad (4.142)$$

Essas soluções exibem os comportamentos característicos de t e ϕ de tender para $\pm\infty$ conforme os horizontes em r_+ e r_- são aproximados - um fato ao qual já delineamos atenção.

Em geral, é claro que devemos distinguir, como na geometria de Schwarzschild, órbitas com parâmetros de impacto maiores ou menores do que um determinado valor crítico b_c (que por sua vez será diferente para as órbitas na mesma direção da rotação do buraco negro e para órbitas na direção contrária). Para $b = b_c$ as equações geodésicas permitirão uma órbita circular instável de raio r_c . Para $b > b_c$, teremos órbitas de dois tipos: aquelas do primeiro tipo que, chegando do infinito, têm distâncias de periélio maiores que r_c ; e os do segundo tipo que, tendo distâncias de afélio menores que r_c , terminam na singularidade em $r = 0$ (e $\theta = \pi/2$). Para $b = b_c$, as órbitas dos dois tipos coalescem:

ambas espiralam, indefinidamente, sobre a mesma órbita circular instável em $r = r_c$. Para $b < b_c$, existem apenas órbitas de um tipo: chegando do infinito, elas cruzam os dois horizontes e terminam na singularidade (CHANDRASEKHAR, 1992).

As equações que determinam o raio r_c da órbita do fóton circular instável são

$$E^2 + \frac{2M}{r_c^3}(L - aE)^2 - \frac{1}{r_c^2}(L^2 - a^2E^2) = 0, \quad (4.143)$$

e

$$-\frac{6M}{r_c^4}(L - aE)^2 + \frac{2}{r_c^3}(L^2 - a^2E^2) = 0. \quad (4.144)$$

Da equação 4.144, concluímos que

$$r_c = 3M \frac{L - aE}{L + aE} = 3M \frac{b_c - a}{b_c + a}. \quad (4.145)$$

Inserindo esta última relação na equação 4.143, encontramos

$$E^2 = \frac{1}{27M^2} \frac{(L + aE)^3}{L - aE} = \frac{E^2}{27M^2} \frac{(b_c + a)^3}{b_c - a}, \quad (4.146)$$

ou

$$(b_c + a)^3 = 27M(b_c - a). \quad (4.147)$$

É possível verificar que a solução para r_c , expressa diretamente em termos de θ , é dada por

$$r_c = 4M \cos^2 \theta = 2M \left\{ 1 + \cos \left[\frac{2}{3} \cos^{-1} \left(\pm \frac{a}{M} \right) \right] \right\}, \quad (4.148)$$

onde o sinal superior se aplica às órbitas com sentido contrário a rotação do buraco negro e o sinal inferior às órbitas no sentido da rotação.

Temos então a análise que

1. para $a=0$: $b_c = (3\sqrt{3})M$ e $r_c = 3M$,
2. para $a=M$: $b_c = 2M$ e $r_c = M$ (para órbitas na mesma direção de rotação do buraco negro),
3. para $a=-M$: $b_c = 7M$ e $r_c = 4M$ (para órbitas na direção contrária a direção de rotação do buraco negro).

Se os buracos negros permanecem estáticos, os mapas são descritos da mesma forma que anteriormente, o que muda é a relação com o parâmetro de impacto.

4.5 A solução Majumdar-Papapetrou

A métrica de Majumdar-Papapetrou (MP) descreve buracos negros em equilíbrio, ou seja, mantém o sistema estático. Isso só é possível por conta que a atração gravitacional é balanceada pela repulsão elétrica dos buracos negros. Essa métrica descreve o espaço tempo estático e axialmente simétrico com respeito ao eixo z , logo é útil aplicar coordenadas cilíndricas. Temos que para que tudo isso ocorra, a massa dos buracos negros devem ser iguais a suas cargas elétricas. Ou seja, $M_i = Q_i$. A massa dos dois buracos negros são M_1 e M_2 . A métrica neste caso é denotada por

$$ds^2 = -\frac{dt^2}{U^2} + U^2(d\rho^2 + \rho^2 d\phi^2 + dz^2), \quad (4.149)$$

onde podemos escolher que um dos buracos negros está localizado em $z=0$ e o outro em $z=-a$. Com isso, temos que U é dado por

$$U(\rho, z) = 1 + \frac{M_1}{\sqrt{\rho^2 + (z - a)^2}} + \frac{M_2}{\sqrt{\rho^2 + (z + a)^2}}. \quad (4.150)$$

Temos a lagrangiana para essa métrica sendo

$$2L = -\frac{\dot{t}^2}{U^2} + U^2(\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\phi}^2 + \dot{z}^2) = -\delta. \quad (4.151)$$

O valor que δ pode assumir são os valores de 0 e 1. O valor 0 representa geodésicas nulas, ou tipo tempo, e com o valor igual a 1 temos geodésicas tipo tempo.

Os momentos generalizados são

$$p_t = -\frac{\dot{t}}{U^2} = E = \text{constante}; \quad (4.152)$$

$$p_\phi = U^2 \rho^2 \dot{\phi} = L_z = \text{constante}; \quad (4.153)$$

$$p_\rho = U^2 \dot{\rho}; \quad (4.154)$$

$$p_z = U^2 \dot{z}. \quad (4.155)$$

Substituindo E e L_z na lagrangiana, encontramos

$$E^2 - \dot{\rho}^2 - \dot{z}^2 - \frac{L_z^2}{U^4 \rho^2} = \frac{\delta}{U^2}. \quad (4.156)$$

Com $\delta = 0$, temos

$$E^2 - \dot{\rho}^2 - \dot{z}^2 - \frac{L_z^2}{U^4 \rho^2} = 0. \quad (4.157)$$

O parâmetro de impacto é denotado por

$$b = \frac{L_z}{E}. \quad (4.158)$$

Se fizermos $a=1$ e restringir a análise no plano $z=0$, com os buracos negros de massas iguais, temos que

$$U(\rho, z) = 1 + \frac{2M}{\sqrt{\rho^2 + 1}}. \quad (4.159)$$

Com essas considerações, podemos fazer com que $\dot{z} = 0$, temos a equação 4.157 sendo expressa da seguinte maneira

$$E^2 \dot{\rho}^2 = \frac{L_z^2}{U^4 \rho^2}. \quad (4.160)$$

Com essa equação, podemos definir o potencial efetivo para a geodésica nula sendo

$$V_{ef} = \frac{L_z^2}{U^4 \rho^2}. \quad (4.161)$$

Se dividirmos a equação 4.160 por E , lembrando da definição 4.158, encontramos que

$$\dot{\rho}^2 = \frac{b^2}{U^4 \rho^2}. \quad (4.162)$$

Podemos também trabalhar com o formalismo hamiltoniano, lembrando que as soluções das coordenadas generalizadas são obtidas das equações de Hamilton, que obtemos por meio da hamiltoniana $H(q, p) = (1/2)g^{\mu\nu}(q)p_\mu p_\nu$, onde $p_\mu = g_{\mu\nu}\dot{q}^\nu$ são os momentos canônicos.

Assim como a lagrangiana, a hamiltoniana ao longo da geodésica é conservada. Além disso, os momentos em ϕ e em t são constantes de movimento. Para a geodésica nula, a hamiltoniana é nula, e assim é possível definir que $p_t = -1$.

Da bibliografia, temos que geodésicas nulas são invariantes sob uma transformação. Isso permite escrever a hamiltoniana da forma

$$H = \frac{1}{2}(p_\rho^2 + p_z^2) + V = 0, \quad (4.163)$$

onde

$$V(\rho, z) = -\frac{1}{2\rho^2}(h - p_\phi)(h + p_\phi), \quad (4.164)$$

em que introduzimos a função

$$h(\rho, z) = \rho U^2. \quad (4.165)$$

Essa função determina o sinal da função $V(\rho, z)$.

Conforme o artigo de (DAZA et al., 2018), a condição de que a Hamiltoniana é nula indica que $V \leq 0$. Essa condição é o que define as regiões permitidas.

Logo após introduzir essas questões, no artigo do (DAZA et al., 2018) é possível encontrar uma discussão bastante interessante sobre as bacias de escape. O texto comenta que existem três regiões de escape presentes na bacia de escape, onde cada região é definida por diferentes cores. Vamos mostrar alguns argumentos comentados no artigo.

Inicialmente, para escolher as condições iniciais, são fixadas as coordenadas ρ e z , sendo assim, é possível escolher três condições iniciais que são tangenciais a um círculo, onde o raio dele é $\sqrt{(\rho - \rho_{max})^2 + (z - z_{max})^2}$, centrado no máximo de h , que está localizado em $(\rho_{max}, z_{max}) = (\sqrt{3}/2, 0)$. Na figura 39 é apresentada a configuração da escolha das condições iniciais.

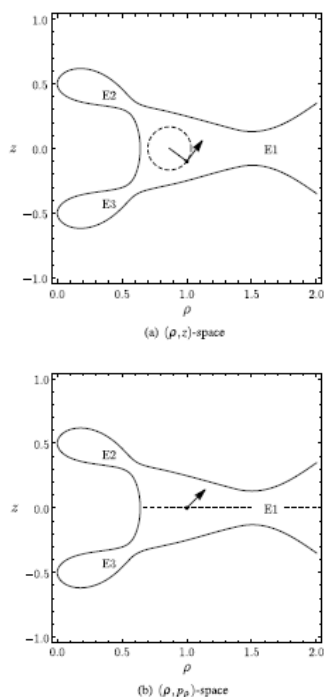


Figura 39 – As condições iniciais usadas para o esboço da bacia de escape. (a) Condições iniciais no espaço (ρ, z) . (b) Condições iniciais no espaço (ρ, p_ρ) . Em ambos os casos, a curva azul é o contorno $h = p_\phi^* - \Delta p_\phi$, com $\Delta p_\phi = 0,02$. Fonte: Imagem retirada do artigo (DAZA et al., 2018).

No artigo é fixada a condição de $z=0$, variando os parâmetros ρ e p_ρ . Logo, por meio dessa condição é calculada a bacia de escape no plano (ρ, p_ρ) .

A figura 39 (a) define as condições iniciais para as bacias apresentadas na figura 40 (a), (b) e (c). A figura 39 (b) define as condições iniciais para as bacias apresentadas na figura 40 (d), (e) e (f).

Na descrição da figura das bacias de escape, é descrito no artigo que: "... Em cada caso, as condições iniciais que levam ao infinito são plotados em verde, e aquelas que levam a assíntotas ao horizonte de eventos do buraco negro superior são mostrados em azul e no inferior em vermelho. À medida que $\Delta p_\phi = p_\phi^* - p_\phi$ diminui, a largura de escape diminui

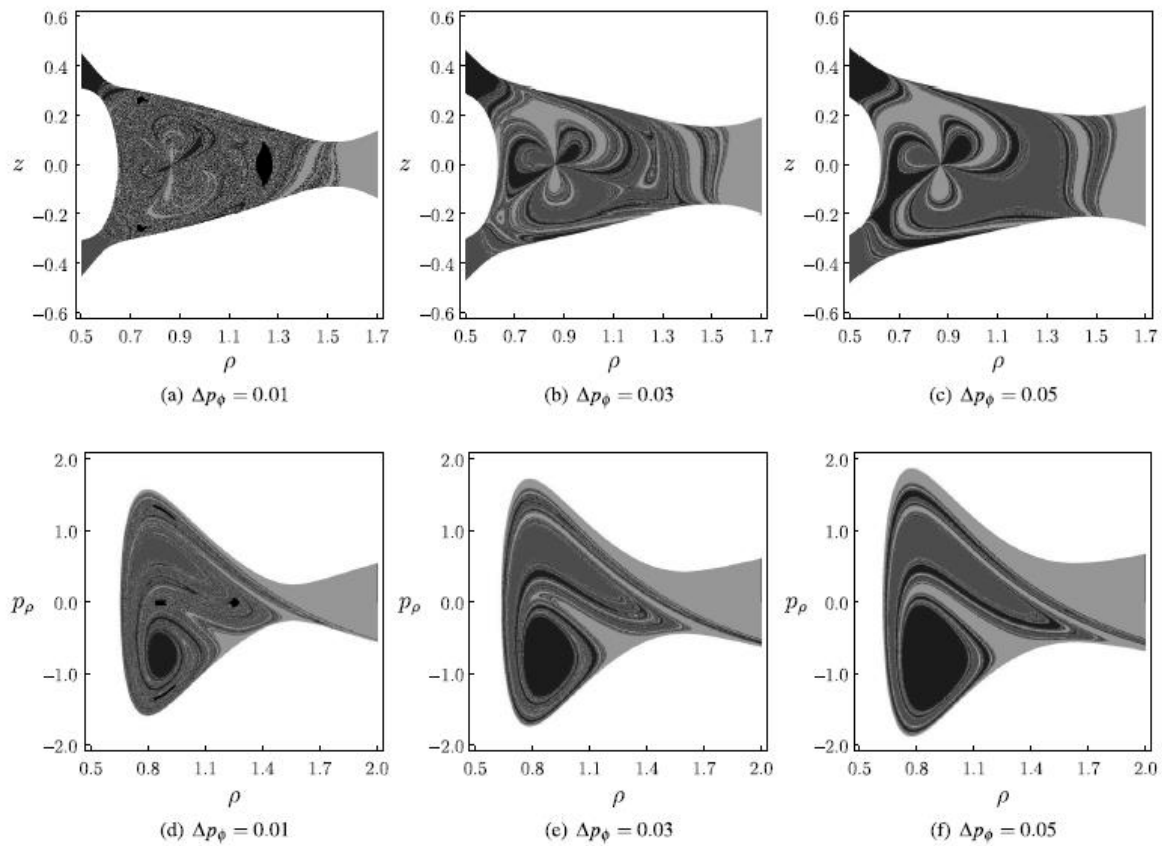


Figura 40 – Bacias de escape (a–c) no espaço (ρ, z) e (d – f) no espaço (ρ, p_ρ) . Fonte: Imagem retirada do artigo (DAZA et al., 2018).

c as ilhas de estabilidade KAM (plotadas em preto) dominam o espaço de fase..."(DAZA et al., 2018).

Cada condição inicial que leva a uma região de escape foi colorida por diferentes cores. Além das cores presentes, também existe a cor preta, que são as ilhas Kolmogorov-Arnold-Moser (KAM). No artigo do (DAZA et al., 2018) é citado que essas regiões representam o conjunto de condições iniciais às orbitas que nunca escapam da região de espalhamento. Logo, as trajetórias nessa região não escapam para o infinito e nem acabam em um dos buracos negros.

Ao aumentar a largura da bacia, as regiões de escape aumentam. Para as figuras 40 (a) e (d) é possível notar a presença de estruturas fractais. Conforme a largura da bacia aumenta, essas estruturas vão desaparecendo. Mas notamos o caráter já estudado anteriormente sobre as bacias de escape e a existência de caos.

4.6 Conclusões

Neste capítulo estudamos diversas configurações para o espalhamento de luz por dois buracos negros. Inicialmente foi feita uma descrição teórica do espalhamento caótico

para dois buracos negros não rotativos, descritos por meio da métrica de Schwarzschild. Neste caso os buracos negros estão tão distantes de tal modo que consideramos a ação de cada um deles separadamente. Das equações de movimento, foi possível descrever um mapa iterativo.

Em seguida, estudamos a métrica de Kerr, onde os buracos negros tem momento angular. Neste caso, a descrição foi similar ao caso anterior, mas vários casos foram analisados com relação ao momento angular. Percebemos que essa métrica é uma generalização da métrica discutida anteriormente, uma vez que é só fazer uma aproximação com o momento angular tendendo a zero.

Finalmente foi trabalhada uma métrica diferente, onde a atração gravitacional de cada buraco negro é igual a repulsão elétrica. Essa configuração leva a análise do movimento de uma partícula de luz sob efeitos dos buracos negros, sendo possível descrever a dinâmica caótica por meio de bacias de escape.

5 Conclusão

O estudo desta monografia tem por finalidade introduzir e demonstrar como funcionam diversos conceitos sobre o espalhamento caótico. A introdução de alguns conceitos sobre caos e fractais foi feita a partir do estudo do espalhamento de uma partícula por discos. Nesta abordagem, percebemos que no espalhamento por meio de três discos, observamos a existência de estruturas fractais presentes na região de escape do espalhamento. Sendo essa uma descrição discreta de como ocorre o espalhamento.

O segundo passo foi estudar como funciona o espalhamento no caso da interação de uma partícula com potenciais atrativos. Essa descrição nos mostrou que também existem estruturas fractais presentes na bacia de escape, resultando assim no aparecimento de caos. Cada caso foi bem específico, onde o espalhamento por meio de potenciais gaussianos nos mostrou uma percepção interessante de como ocorre o caos e motivou o estudo assim de espalhamento de fótons por buracos negros em órbitas. O problema de três corpos, mais realístico que o anterior, apresentou resultados importantes, como a existência de estruturas fractais e a maneira como as órbitas são caóticas e dependentes das condições iniciais impostas no problema.

Por fim foi feito um estudo teórico do espalhamento caótico por buracos negros. Neste estudo toda a descrição pôde ser feita por mapas, observando como a partícula interage com cada buraco negro. Também foi possível fazer uma descrição do caos a partir de bacias de escape, observando as diferentes regiões de escape e estruturas fractais presentes na fronteira das bacias.

Referências

- CHANDRASEKHAR, S. *The mathematical theory of black holes*. [S.l.]: Oxford University Press, 1992. Citado 3 vezes nas páginas 66, 70 e 74.
- DAZA, A. et al. Wada structures in a binary black hole system. *PHYSICAL REVIEW*, v. 98, n. 084050, p. 1–13, 2018. Citado 5 vezes nas páginas 17, 22, 76, 77 e 78.
- D'IVERNO, R. A. *Introducing Einstein's relativity*. [S.l.]: Oxford University Press, 1992. Citado na página 55.
- MOURA, A. P. S. d.; LETELIER, P. S. Scattering map for two black holes. *PHYSICAL REVIEW*, v. 62, n. 4784, p. 1–25, 2000. Citado 7 vezes nas páginas 17, 22, 47, 65, 68, 69 e 70.
- RAINE, D.; THOMAS, E. *Black Holes: an introduction, 2ed.* [S.l.]: Imperial College Press, 2010. Citado na página 65.
- TÉL, T.; GRUIZ, M. *Chaotic Dynamics, An Introduction Based on Classical Mechanics*. [S.l.]: CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS, 2006. Citado 11 vezes nas páginas 15, 16, 21, 23, 27, 29, 30, 31, 32, 33 e 34.