

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
INSTITUTO DE FÍSICA

Lorena Reis de Lima

**Métodos de Geometria Algébrica em Física Matemática:
Variedades de Calabi-Yau**

BRASÍLIA

20 de maio de 2021

Lorena Reis de Lima

Métodos de Geometria Algébrica em Física Matemática: Variedades de Calabi-Yau

Monografia apresentada ao Instituto de Física da Universidade de Brasília como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Bacharel em Física.

Orientador: Prof. Dr. Arsen Melikyan

Universidade de Brasília – UnB

Instituto de Física

Brasília

20 de maio de 2021

Lorena Reis de Lima

Métodos de Geometria Algébrica em Física Matemática: Variedades de Calabi-Yau

Monografia apresentada ao Instituto de Física da Universidade de Brasília como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Bacharel em Física.

Trabalho aprovado. Brasília, 20 de maio de 2021:

Prof. Dr. Arsen Melikyan
Orientador

**Prof. Dr. Aleksandr Nikolaievich
Pinzul**
Convidado 1

Profa. Dra. Carolina Matté Gregory
Convidada 2

Brasília
20 de maio de 2021

Este trabalho é dedicado a todas as meninas e mulheres que sonham em se tornar cientistas.

Agradecimentos

Primeiro, eu gostaria de agradecer ao orientador deste Trabalho de Conclusão de Curso, o prof. Dr. Arsen Melikyan, por ter aceitado me guiar durante quase toda a minha graduação – seja nos PIBICs, seja nessa dissertação – e por ter me proporcionado a oportunidade de aprender toda matemática que eu tive vontade. Muito obrigada por sua paciência, dedicação e cuidado.

Também gostaria de agradecer aos meus orientadores do Departamento de Matemática da UnB, o Prof. Dr. Ma To Fu e especialmente o Prof. Dr. Luis Henrique de Miranda, que me acolheu e me apoiou quando bati em sua porta e pedi para ele me ensinar Análise Matemática. Agradeço também ao Prof. Dr. Qu Fanyao, que um belo dia apareceu na minha caixa de entrada de e-mail me oferecendo um PIBIC e mudou completamente a minha perspectiva de carreira na Física. Agradeço também ao saudoso Prof. Dr. Ivan Soares Ferreira, que nos deixou precocemente, mas que também foi uma pessoa importante na minha trajetória. Com ele, aprendi sobre gentileza e humildade. Não poderia deixar de adicionar aqui meus sinceros agradecimentos ao Prof. Dr. Antônio Carlos Pedroza, por ter insistido em mim e por ter me feito ver a beleza que existe na Mecânica Quântica. Agradeço também à professora Ritsuko Matayoshi, por ter me ensinado japonês.

Não obstante, agradeço aos meus tios Delcia e Cláudio e ao meu irmão de coração, Artur, que me acolheram em sua casa durante minha graduação. Meus sinceros agradecimentos à minha tia Maria do Socorro, que sempre me deu bons conselhos e acreditou em mim quando eu mais duvidei da minha capacidade e sempre me incentivou a seguir meu sonho de me tornar cientista. Agradeço à minha avó, Maria Erculano, pelo amor e pelo exemplo de força e sabedoria.

Não poderia deixar de agradecer enormemente aos meus amigos Amanda Freitas, Miguel Citeli, Felipe Fontinele, Ludmila Lima, João Valeriano, Mariana Casement, Pedro Cintra, João Augusto, Ranier Menote, Tábata Luiza, Thalita, Francis, Juliana, Amanda Cristina, Gustavo Magalhães, Clara Taboza, Igor Reis, Vitor Dantas, Vitor Machado, Deborah Andrade, Victor Porto, Lorena do Carmo, Graciele Arvelos, Caio Oliveira, Isabela de Melo e Vinicius Cerqueira. Vocês foram muito importantes durante minha graduação, me deram muito apoio, muito amor e muito carinho. Obrigada por tornarem essa jornada tão árdua mais suave e descontraída. Eu não teria feito metade das coisas que fiz sem o incentivo de vocês. Dizem que os amigos são a família que a gente escolhe. Eu olho para vocês e tenho vontade de gritar de alegria, pois não poderia ter escolhido uma família melhor.

Meus sinceros agradecimentos ao PET Física UnB, pela oportunidade de ensinar e divulgar ciência; às agências de fomento FAP-DF, Fundação Universidade de Brasília e CNPq, por terem me concedido financiamento para minhas pesquisas em Matemática e em Física; à Universidade de Brasília; e à banca avaliadora desse TCC.

Por fim, eu agradeço a mim mesma, por ter aguentado até aqui. Esses quatro anos foram muito difíceis, quase desisti em vários momentos, não fosse o apoio de todas essas pessoas que citei anteriormente (principalmente do Arsen, coitado; de vez em quando eu aparecia chorando na sala dele e ele me consolava).

"(...) Tem coisas que nunca iremos saber porque nossa vida é curta. Só que elas estão escritas na natureza. As angústias dos homens da cidade têm seu remédio na terra e eles olham para o céu."

Daniel Munduruku, in "Meu vô Apolinário: Um mergulho no rio da (minha) memória".

Resumo

O estudo de geometria algébrica e a aplicação de seus métodos em física é uma das tarefas mais promissoras da física matemática. Neste trabalho, é feito um estudo, em nível de graduação, de elementos de geometria algébrica e diferencial, necessários para a compreensão de estruturas matemáticas utilizadas em teorias de cordas e supercordas. Para isto, são introduzidos e discutidos conceitos essenciais de geometria diferencial, variedades diferenciáveis, homologia e cohomologia. Em seguida, são apresentadas as variedades de Kähler e Calabi-Yau, que possuem importantes aplicações em teoria de supercordas, uma das tentativas mais famosas de construção de uma teoria quântica de gravitação. São mostradas as principais características e propriedades desse tipo de estrutura matemática, motivando estudos futuros em Física Teórica.

Palavras-chaves: Geometria algébrica. Física Matemática. Variedades de Kähler. Variedades de Calabi-Yau.

Conteúdo

I	Introdução	3
1	Elementos de Geometria Diferencial	6
1.1	Variedades	6
1.2	Espaços tangentes e cotangentes	7
1.3	Campo Tensorial	9
1.3.1	Tensores covariantes e contravariantes e rank de um tensor	9
1.4	Métrica	10
1.5	Formas diferenciais	11
1.6	Derivada exterior	12
2	Noções de Homologia e Cohomologia	13
2.1	Definições preliminares	13
2.1.1	Homologia	13
2.1.2	Cohomologia	14
2.2	Variedade Produto	15
II	Variedades e estruturas complexas	17
3	Variedades de Riemann	17
4	Estruturas complexas	19
4.1	Retomando a discussão sobre variedades complexas	20
4.2	Estruturas e variedades quase complexas	22
4.3	Variedades hermitianas, quase hermitianas e simpléticas	25
III	Variedades de Calabi-Yau	29
5	Variedades de Kähler	29
6	Conexões e curvaturas em variedades hermitianas	32
6.1	Conexões e curvaturas em variedades de Kähler	33
7	Classes de Chern	34
8	Variedades de Calabi-Yau	37
9	Exemplos	42
IV	Conclusão	45

V	Bibliografia	46
VI	Apêndice	47

Parte I

Introdução

Contextualização

Nas últimas décadas, físicos matemáticos têm explorado aplicações de geometria algébrica em física, obtendo avanços importantes em física teórica. Dentre esses avanços, podemos citar a aplicação de geometria algébrica em modelos de rede bidimensionais de solução exata, álgebras de simetria infinita que surgem em teoria conforme de campos e cadeias quânticas de spin, bem como problemas de geometria algébrica em *orbifolds* decorrente da teoria de cordas, dentre outras [14].

Em particular, podemos destacar o estudo de tópicos avançados de matemática, como geometria algébrica, geometria diferencial, homologias e cohomologias em problemas de Física, como é o caso da busca por uma teoria quântica de gravidade. Muitas tentativas de construir uma teoria capaz de unir a Teoria da Relatividade Geral e a Mecânica Quântica foram e continuam sendo desenvolvidas. Apesar das lacunas experimentais, do ponto de vista matemático, essas teorias – como é o caso da teoria de cordas, que motivou o estudo desenvolvido nesse Trabalho de Conclusão de Curso – podem ser cada vez melhor estabelecidas, levando a avanços em áreas correlatas a matemática e física teórica.

A nível de graduação, podemos iniciar o estudo de teoria de cordas com abordagens mais físicas, como encontrado na referência [17]. Contudo, do ponto de vista matemático, essa tarefa pode ser um pouco mais árdua, pois exige o estudo de tópicos avançados, como cohomologias, fibrados tangentes, etc. Não obstante, o entendimento desses conceitos matemáticos pode ser muito útil no contexto da física teórica – não somente em áreas de gravitação, mas também em áreas como física da matéria condensada¹. Por este motivo, este trabalho se baseia nos aspectos matemáticos introdutórios da Teoria de Cordas. O foco do estudo é aprender os tópicos que levam ao conceito de Variedade de Calabi-Yau, que é utilizada em teoria de supercordas, por exemplo.

A teoria de cordas é uma teoria quântica de gravitação [17] que se baseia na descrição de partículas elementares não como objetos pontuais, mas sim como objetos unidimensionais, que chamamos *cordas*. Esses objetos podem assumir algumas configurações – por exemplo, as cordas podem ser abertas ou fechadas, podem ter extremidades livres ou podem ter algumas condições de contorno sobre essas extremidades. A primeira tentativa de descrever as partículas elementares em termos dessas cordas é feita utilizando as ferramentas de mecânica clássica: podemos calcular a *ação* dessas cordas. Podemos escrever a ação para cordas relativísticas – como por exemplo, a ação de Nambu-Goto [17]. Contudo, essa ação não é suficiente para uma descrição quântica das cordas. Para isto, devemos modificá-la.

¹No Projeto de Trabalho de Conclusão de Curso, por exemplo, mostramos alguns modelos de matéria condensada, como o modelo de Potts e o modelo de Ising, em que os conceitos de geometria algébrica se aplicavam no entendimento da física.

Essa modificação resulta na *Ação de Polyakov* [4].

Contudo, quando combinamos nossa descrição das cordas com a mecânica quântica, um resultado interessante surge: para preservar a simetria de Lorentz da nossa teoria – ou seja, para que as leis da física continuem equivalentes em todos os referenciais inerciais – o número de *dimensões* do espaço-tempo deve ser escolhida de maneira cuidadosa – e usualmente não temos nossas meras quatro dimensões, mas um número maior delas! Outro resultado é que surge uma partícula peculiar, com massa imaginária, que denominamos *tachyon*. Um outro resultado também não muito amigável é o fato de que essa primeira descrição da natureza em termos de cordas, da maneira que escolhemos fazer, só consegue descrever partículas com estatística bosônica – e nosso universo também tem férmions.

Por esses motivos, precisamos de uma sucessora da teoria de cordas. A boa notícia é que não precisamos jogar todo o trabalho fora, ainda podemos descrever as partículas elementares em termos de cordas. Mas, dessa vez, nossas cordas são *super* especiais, pois conseguem descrever bósons e férmions... e também introduzem um novo tipo de simetria ao nosso universo (que infelizmente ainda não foi verificada experimentalmente), a *supersimetria* – ou SUSY². A essa teoria, chamamos *teoria de supercordas* [16]. Nela, para preservar a simetria de Lorentz, nosso espaço-tempo deve ter dez dimensões. Contudo, até o presente momento, usando nossos aparelhos mais avançados – como os grandes colisores de partículas – e investigando o mundo microscópico até os limites da nossa acurácia experimental, não encontramos nenhuma evidência de que nosso mundo possua mais do que as quatro dimensões usuais. Isto pode ocorrer pelo fato de que as outras seis dimensões estão *compactificadas*, num limite de altas energias que ainda não somos capazes de investigar [15]. Por isso, não vamos encontrar nossas cordas movendo-se arbitrariamente pelo nosso mundo de dez dimensões: na verdade, se a teoria de supercordas estiver correta, o espaço-tempo tem a forma $M^4 \times N^6$, onde M^4 é a variedade de quatro dimensões em que ordinariamente vivemos, e N^6 é alguma variedade compacta de seis dimensões, tão pequena, mas tão absurdamente pequena, que não conseguimos medir com a tecnologia atual.

Existe um número enorme de variedades possíveis que são candidatas a essas variedades compactas que citamos anteriormente. Contudo, nossa escolha é restrita a algumas condições, como o fato de que necessariamente a nossa teoria consiga descrever o mundo que observamos em quatro dimensões. Exigindo que a supersimetria seja preservada na escala compactificada da nossa variedade, chegamos a uma classe especial de variedades que são as candidatas perfeitas a nossa N^6 : as variedades de Calabi-Yau [10].

Como dito anteriormente, esse trabalho tem o objetivo de introduzir conceitos matemáticos importantes para o estudo de Variedades de Calabi-Yau. Vamos assumir que o leitor tem afinidade com a matemática de fibrados tangentes³. Tentamos fazer uma abordagem seguindo a ordem as referências [7] [5], [12] e [13].

²O objetivo deste trabalho não é dar uma detalhagem aprofundada desses aspectos mais avançados da teoria, então vamos por hora entender supersimetria como uma relação entre bósons e férmions, necessária para teoria de supercordas.

³Contudo, caso esse conteúdo não seja dominado por alunos que porventura irão ler este trabalho, uma abordagem bastante didática pode ser encontrada em [13].

Na primeira parte deste TCC, fazemos uma explanação geral do conceito de variedades, espaços tangentes e cotangentes e demais conceitos relacionados à Geometria Diferencial. Em seguida, damos uma explanação sobre noções de homologia e cohomologia⁴. Uma abordagem mais completa encontra-se em [5] e [12].

Na segunda parte, é aprofundado o conceito de variedades; desta feita, damos destaque à estrutura complexa delas. Também introduzimos conceitos de variedades hermitianas, quase hermitianas e simpléticas.

Na terceira parte, introduzimos as variedades de Kähler e definimos conexões e curvaturas em variedades hermitianas e em variedades de Kähler. Logo depois, introduzimos as classes de cohomologia denominadas classes de Chern. Finalmente, introduzimos as variedades de Calabi-Yau e damos alguns exemplos de estruturas que são essas variedades.

Este trabalho também possui alguns apêndices curtos, mas muito úteis para a compreensão dos conceitos aqui introduzidos. No apêndice, introduzimos o Teorema de Stokes, o operador Hodge \star e Hodge-DeRham e noções de cohomologias em variedades complexas e variedades de Kähler.

⁴No meu Projeto de Trabalho de Conclusão de Curso, é feita uma explicação mais completa desses termos, principalmente de homologia.

1 Elementos de Geometria Diferencial

1.1 Variedades

Vamos começar nosso estudo com alguns conceitos de geometria diferencial e variedades diferenciáveis, que serão importantes para que tenhamos um entendimento concreto do nosso objeto de estudo principal, as variedades de Calabi-Yau.

Definição 2.1.0. *Variedade diferenciável.* Uma variedade diferenciável de dimensão n é um conjunto M e uma família de aplicações biunívocas $\chi_j : \mathcal{U}_j \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ de abertos \mathcal{U}_j de \mathbb{R}^n em M tais que:

(i) $\bigcup_j \chi_j(\mathcal{U}_j) = M$,

(ii) $\forall j, k$, com $\chi_j(\mathcal{U}_j) \cap \chi_k(\mathcal{U}_k) \neq \emptyset = W$, os conjuntos $\chi_j^{-1}(W)$ e $\chi_k^{-1}(W)$ são abertos em \mathbb{R}^n e as aplicações $\chi_k^{-1} \circ \chi_j$ são diferenciáveis.

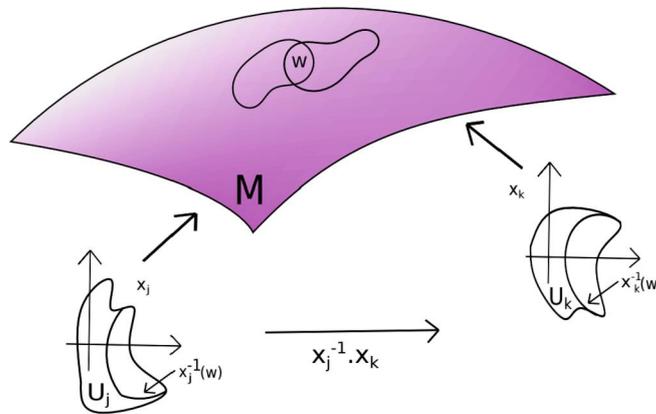


Figura 1: Representação esquemática de uma variedade diferenciável, com destaque para os conjuntos abertos em \mathbb{R}^n e as aplicações $\chi_k^{-1} \circ \chi_j$.

Ao par \mathcal{U}_j, χ_j com $p \in \chi_j(\mathcal{U}_j)$ damos o nome de *atlas* ou *parametrização* ou *sistema de coordenadas* de M em p . $\chi_j(\mathcal{U}_j)$ é uma *vizinhança coordenada* em p . Chamamos $\{(\mathcal{U}_j, \chi_j)\}$ de *família diferenciável* em M se o par satisfaz às condições (i) e (ii) [7]. A seguir, definiremos o conceito de variedade complexa.

Definição 2.1.1. *Variedade Complexa.* Uma variedade complexa M é um espaço topológico junto com um atlas holomorfo. Em outras palavras, é uma coleção de mapas (\mathcal{U}_j, z_j) , que são mapas um para um dos correspondentes \mathcal{U}_j para \mathbb{C}^n , tal que, para toda intersecção não-vazia $\mathcal{U}_j \cap \mathcal{U}_k$, os mapas $z_j \cdot z_k$ são holomorfos.

A diferença central entre uma variedade real e uma variedade complexa está justamente no fato de que os mapas de transição, no caso das variedades complexas, são holomorfos, enquanto que nas variedades reais, esses mapas são de classe C^∞ [5]. Por hora, suspenderemos

a discussão mais aprofundada sobre variedades complexas; o assunto será retomado mais adiante, quando tivermos estudado temas mais aprofundados.

Definição 2.1.2. *Espaço topológico \mathbb{C}^r .* Dizemos que um espaço topológico é do tipo \mathbb{C}^r se ele corresponde a uma coleção de coordenadas do tipo (U_j, x_j) , onde U_j corresponde à coleção de subconjuntos abertos de uma variedade M , e cada x_j é um mapa 1 para 1 de um U_j , que vão para algum subconjunto aberto de \mathbb{R}^n , tal que as seguintes condições sejam satisfeitas:

- (i) U_j é a cobertura de M ,
- (ii) Se $U_j \cap U_k$ é não-vazia, então o mapa $x_j x_k^{-1} : x_k(U_j \cap U_k) \rightarrow x_j(U_j \cap U_k)$ é um mapa \mathbb{C}^r de um conjunto aberto em \mathbb{R}^n , que vai para um conjunto de abertos em \mathbb{R}^n .

Definição 2.1.3. *Seja M uma variedade n -dimensional. Dizemos que essa variedade, junto com um atlas, é um espaço topológico \mathbb{C}^r .*

Outro importante conceito que deveremos ter em mente é a noção de *orientação* numa variedade. Por isto, introduzimos a definição a seguir.

Definição 2.1.4. *Variedade orientável.* Seja M uma variedade diferenciável. dizemos que M é *orientável* se a variedade admite uma estrutura diferenciável $\{U_j, x_j\}$ de modo que, $\forall j, k$, com $x_j(U_j) \cap x_k(U_k) = W$, a diferencial da mudança de coordenadas $x_k \circ x_j^{-1}$ tem determinante positivo.

Assim, toda variedade que não obedece à definição acima é chamada *não-orientável*. A estrutura diferenciável da variedade que obedece à condição acima definida é dita *orientação* da variedade. Se a união de duas estruturas diferenciáveis satisfaz à definição 2.1.4, então dizemos que essas estruturas determinam a mesma orientação.

1.2 Espaços tangentes e cotangentes

É interessante estender às variedades diferenciáveis em \mathbb{R}^n conceitos que comumente encontramos em \mathbb{R}^3 . Um desses conceitos é a noção de *vetor tangente*. Em \mathbb{R}^3 , entendemos fisicamente o vetor tangente a um ponto p numa superfície regular como uma *velocidade* de uma curva da superfície passando pelo ponto p . Em \mathbb{R}^n , essa noção de velocidade se perde [7], de modo que deveremos buscar outras formas de introduzir e entender esse conceito. Vamos começar retomando a ideia de derivada direcional.

Seja $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma curva diferenciável em \mathbb{R}^n , tal que $\alpha(0) = p$. Podemos escrever essa curva em termos de um parâmetro $x(t)$, tal que $(x_1, x_2, \dots, x_n)(t) \in \mathbb{R}^n$ e $t \in (-\epsilon, \epsilon)$:

$$\alpha(0) = (x_1(0), x_2(0), \dots, x_n(0)), \quad (1.1)$$

$$\rightarrow \alpha'(0) = (x_1'(0), x_2'(0), \dots, x_n'(0)) = v \in \mathbb{R}^n. \quad (1.2)$$

Seja também f uma função escalar diferenciável definida em alguma vizinhança do ponto p . Restringindo essa função à curva que definimos anteriormente, obtemos então que a derivada direcional de f em relação à v é dada por:

$$\frac{d(f \circ \alpha)}{dt} \Big|_{t=0} = \left(\sum_i x'_i(0) \frac{\partial}{\partial x_i} \right) f. \quad (1.3)$$

A partir disso, escrevemos as definições a seguir.

Definição 2.2.1. *Vetor tangente.* O vetor tangente a uma curva $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$, com $\alpha(0) = p \in M$, em $t = 0$, é dado pela seguinte função:

$$\alpha'(0)f = \frac{d(f \circ \alpha)}{dt} \Big|_{t=0}, \quad (1.4)$$

onde f pertence ao conjunto de funções de M diferenciáveis em p .

Definição 2.2.2. O conjunto dos vetores tangentes à variedade M no ponto p é denotado por T_pM . Uma parametrização $x : U \rightarrow M$ define uma base associada em T_pM , que denotamos por $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \right\}$.

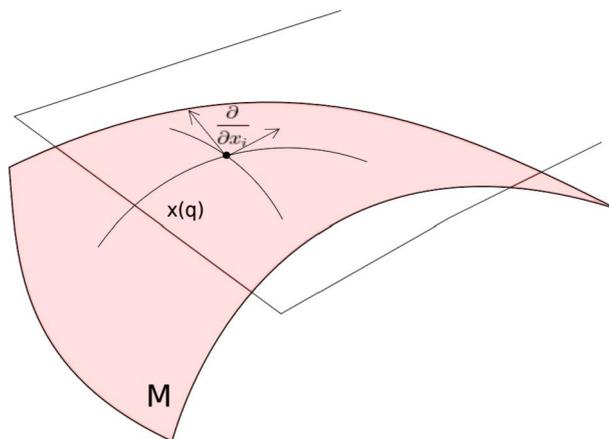


Figura 2: Representação esquemática de um espaço tangente, com uma parametrização $x(q)$. A parametrização $x(q)$ define uma base associada em T_pM , mas a estrutura linear do espaço tangente não depende dessa parametrização.

O vetor tangente de uma curva em qualquer ponto p de uma variedade diferenciável depende apenas das derivadas dessa curva, dado o sistema de coordenadas. A estrutura linear de T_pM não depende da parametrização que escolhemos.

Existe um espaço – denotado por T_p^*M – que é dual ao espaço tangente que definimos anteriormente. A este espaço, damos o nome de *espaço cotangente*. Denotamos por $\{dx_j\}$ a

base dos co-vetores que são duais à base $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \right\}$. Se tomarmos o produto interno entre essas duas bases, veremos que elas são ortogonais entre si, ou seja:

$$\left\langle dx_j, \frac{\partial}{\partial x_i} \right\rangle = \delta_{ji}. \quad (1.5)$$

1.3 Campo Tensorial

Um tensor $T = T(f_1, f_2, \dots, f_k, v_1, v_2, \dots, v_n)$, $f_k \in V^*$, $v_n \in V$ do tipo (k, n) é um *mapa multilinear* definido como o produto cartesiano entre elementos de um espaço vetorial V e um espaço vetorial V^* , que é dual a V [2]. Escolhendo uma base $\{E^{jk}\}$ para o espaço V e uma base $\{e^{jn}\}$ para V^* , podemos escrever um tensor em termos do *produto tensorial* entre essas bases. Aqui, podemos entender o produto tensorial como um espaço vetorial munido de um mapa bilinear $(f, v) \mapsto f \otimes v$.

Podemos escolher os espaços tangente e cotangente previamente definidos e usar suas bases para construir um tensor. Obteremos a seguinte forma para um tensor do tipo (k, n) assim construído:

$$T = T_{j_1 \dots j_n}^{i_1 \dots i_k} dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_n} \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_k}}, \quad (1.6)$$

onde $T_{j_1 \dots j_n}^{i_1 \dots i_k}$ correspondem às componentes do tensor T . Na realidade, podemos ver a definição dada na equação acima não apenas como um mero tensor, mas como um *campo tensorial*. Basicamente, isso significa que, dado um espaço matemático – no nosso caso, uma variedade M – o campo tensorial em 1.6 associa um tensor a cada ponto de M .

1.3.1 Tensores covariantes e contravariantes e rank de um tensor

Classificar tensores em termos de como as suas coordenadas se comportam quando realizamos transformações (i.e., trocamos a base em que esses tensores estão representados) é muito útil para a descrição de problemas físicos, posto que esse tipo de transformação geralmente corresponde a uma mudança nas unidades em que o problema está definido [8]. Por isto, é importante termos noção desses conceitos. Vamos discutir brevemente o que significa um tensor ser *covariante* ou *contravariante*.

Vamos considerar uma variedade n -dimensional, cujas coordenadas são $x_i = x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$. Uma função $f(x_i)$, então, possui o seguinte gradiente:

$$(\nabla f)_\mu := \frac{\partial f}{\partial x_\mu} x_i. \quad (1.7)$$

Suponhamos que exista uma segunda função – denotada por $f'(x'_i)$ – tal que $f(x_i) = f'(x'_i)$. Se quisermos reescrever o gradiente em termos dessa segunda função, obteremos:

$$\frac{\partial f'}{\partial x'_i} = \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial x'_i}. \quad (1.8)$$

Denotando

$$A_i \equiv \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad (1.9)$$

então qualquer quantidade tensorial A_j que definirmos, que se transformem tal que

$$A'_i = \frac{\partial x_j}{\partial x'_i} A_j \quad (1.10)$$

é chamado um *tensor covariante*. Em geral, gradientes obedecem a esse tipo de transformação.

Em contrapartida, um tensor dito *contravariante* obedece a propriedades de transformações diferentes. Consideremos um vetor tal que

$$d\mathbf{r}_i = dr_1 \hat{\mathbf{r}}_1 + \dots + dr_n \hat{\mathbf{r}}_n. \quad (1.11)$$

Escrevemos:

$$dx'_i = \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} dx_j, \quad (1.12)$$

onde $A_i \equiv dx_i$. Qualquer quantidade tensorial A_j que se transforme de acordo com a seguinte regra

$$A'_i = \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} A_j \quad (1.13)$$

é um *tensor contravariante*. Em geral, vetores obedecem a transformações contravariantes.

A forma com que um tensor se transforma também tem a ver com um outro conceito importante: o *rank*. O rank é definido como o número de índices covariantes e contravariantes de um tensor. Essa quantidade é independente do número de dimensões do espaço em que o tensor vive. Um tensor de rank 0 é escalar. Um objeto de rank 1 é o que conhecemos usualmente como vetor. Um objeto de rank maior ou igual a 3 é o que usualmente conhecemos como tensor.

1.4 Métrica

Definição 2.4.1. *Métrica.* Seja M uma variedade diferenciável. Uma métrica em M é a correspondência que associa a cada ponto $\mathbf{p} \in M$ um produto interno (positivamente definido) no espaço $T_{\mathbf{p}}M$. Se $\chi : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ é um sistema de coordenadas locais em torno de \mathbf{p} , tal que $\chi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathbf{q} \in U(\chi)$ e $\frac{\partial}{\partial x_i}(\mathbf{q}) = dx(0, \dots, 1, \dots, 0)$, então

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(\mathbf{q}), \frac{\partial}{\partial x_j}(\mathbf{q}) \right\rangle_{\mathbf{q}} = g_{ij}(x_1, \dots, x_n) \quad (1.14)$$

é uma função diferenciável em U .

A equação 1.14 define a métrica g_{ij} da nossa variedade M^5 . Podemos também escrever essa métrica em termos não apenas dos elementos da base, mas também em termos de dois vetores $X, Y \in T_p M$, da seguinte forma:

$$g(X, Y) = g\left(X^i \frac{\partial}{\partial x_i}(q), Y^j \frac{\partial}{\partial x_j}(q)\right) = g_{ij} X^i Y^j. \quad (1.15)$$

Em termos do produto tensorial, temos:

$$g = g_{ij} dx^i \otimes dx^j. \quad (1.16)$$

1.5 Formas diferenciais

Em geral, nosso primeiro encontro com formas diferenciais se dá ainda nos primeiros semestres da graduação, no curso de cálculo de muitas variáveis. Quando nos deparamos com a mudança de coordenadas em cálculo 3, por exemplo, com a matriz Jacobiana [11]. Formas diferenciais são uma excelente alternativa ao cálculo vetorial que usualmente aprendemos [1].

Definição 2.5.1. p-forma. Uma p-forma é um tensor simétrico e covariante, de rank p.

Através da definição acima, podemos usar o conceito de rank que aprendemos para tentar imaginar alguns exemplos de formas diferenciais. Uma 0-forma, por exemplo, é uma função (lembramos que um tensor de rank zero é simplesmente um objeto escalar). Já uma 1-forma é um vetor covariante.

Denotemos por $\Lambda^p(x)$ o conjunto de todas as p-formas em x . Seja também $C^\infty(\Lambda^p)$ o espaço das p-formas suaves. Esse conjunto de todas as p-formas é na verdade um espaço vetorial, cuja base é

$$\{dx^{m_1} \wedge dx^{m_2} \wedge \dots \wedge dx^{m_p}\}, m_1 < m_2 < \dots < m_p, \quad (1.17)$$

onde

$$dx^{m_1} \wedge \dots \wedge dx^{m_p} = \frac{1}{p!} \{\text{soma das permutações pares de } dx^{m_1} \otimes \dots \otimes dx^{m_p} \quad (1.18)$$

$$- \text{soma das permutações ímpares}\}. \quad (1.19)$$

O símbolo \wedge representa o que chamamos de *produto exterior*. Em três dimensões, o produto vetorial $\vec{u} \times \vec{v}$ é muito útil; contudo, não temos uma analogia direta para esse tipo de operação em mais dimensões, daí a necessidade de introduzir o conceito de produto exterior. Dados dois vetores $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ o produto entre esses dois vetores é dado pela seguinte matriz:

$$\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \frac{1}{2}(\mathbf{u}^T \mathbf{v} - \mathbf{v}^T \mathbf{u}). \quad (1.20)$$

⁵A definição de métrica aqui introduzida também pode ser estendida, sem perda de generalidade, para variedades complexas. Nesse caso, a função será holomorfa em U .

A diferença crucial entre \times e \wedge é que a matriz produzida acima tem a propriedade de ser uma matriz antissimétrica, ou seja $A^T = -A$. Geometricamente, ainda podemos pensar no produto exterior como a área do paralelogramo gerado pelos vetores \mathbf{u} e \mathbf{v} e o plano que contém esses vetores [1]. Também podemos calcular o produto exterior entre duas formas [5].

1.6 Derivada exterior

A derivada exterior implica na extensão do conceito de rotacional, só que para formas diferenciais. Na realidade, podemos entender a derivada exterior como o rotacional de um tensor anti-simétrico.

Definição 2.6.1. *Derivada exterior.* A derivada exterior d é um mapa que vai do espaço das p – formas para o espaço das $p + 1$ – formas

$$d : C^\infty(\Lambda^p) \rightarrow C^\infty(\Lambda^{p+1}). \quad (1.21)$$

Usando o produto exterior que definimos anteriormente, podemos escrever a derivada exterior das p -formas em uma maneira mais explícita, dado o rank da forma. Por exemplo, para uma 0-forma α ,

$$d\alpha = \frac{\partial \alpha}{\partial x^m} dx^m. \quad (1.22)$$

Pra uma 1-forma, usando a linearidade do operador derivada exterior, temos:

$$d(\alpha_n dx^n) = \frac{\partial \alpha_n}{\partial x^m} dx^m \wedge dx^n. \quad (1.23)$$

2 Noções de Homologia e Cohomologia

2.1 Definições preliminares

2.1.1 Homologia

Definição 3.1.1.0. *Seja M uma variedade suave e conectada. Uma p -cadeia \mathbf{a}_p é dada pela seguinte soma:*

$$\mathbf{a}_p = \sum_i c_k N_k, \quad (2.1)$$

onde os N_k correspondem a subvariedades orientadas de M e c_k são os coeficientes da cadeia.

Uma forma intuitiva de pensar em p -cadeias é imaginá-las como objetos sob os quais podemos performar integrais. Podemos obter vários tipos de cadeias, dependendo da natureza dos coeficientes c_k . Por exemplo, se os coeficientes são complexos, então temos cadeias complexas; se eles são reais, temos cadeias reais.

Podemos ainda aplicar o conceito de *operador de fronteira* ∂ em p -cadeias, da seguinte forma:

$$\partial \mathbf{a}_p = \sum_i c_k \partial N_k. \quad (2.2)$$

Se \mathbf{a}_p é uma p -cadeia a ação do operador de fronteira em \mathbf{a}_p nos retorna uma $p-1$ -cadeia.

Definição 3.1.1.1. Ciclo. *Um ciclo é uma cadeia sem fronteira, denotado por z_p , tal que*

$$\partial z_p = 0. \quad (2.3)$$

Definição 3.1.1.2 Homologia simplicial. *Seja M uma variedade diferenciável. Seja Z_p um conjunto de ciclos e B_p o conjunto das p -cadeias que são fronteiras de $p+1$ -cadeias, ou seja*

$$B_p = \{\mathbf{a}_p | \mathbf{a}_p = \partial \mathbf{a}_{p+1}\}. \quad (2.4)$$

A homologia simplicial de M , denotada por H_p , é o quociente:

$$H_p = \frac{Z_p}{B_p}. \quad (2.5)$$

Para exemplificar essa definição, pode-se calcular, por exemplo, os grupos de homologia H_0 e H_1 de um toroide. Para H_0 , temos 0-cadeias, que correspondem a pontos. Ora, pontos não possuem fronteira, de modo que uma 0-cadeia é um 0-ciclo. Mas, se pensarmos em dois pontos, podemos traçar uma linha que os conecta. Quaisquer dois pontos formam a fronteira de uma curva. Se temos 0-cadeias reais, então podemos considerar que na verdade H_0 é equivalente ao conjunto dos números reais. Portanto,

$$H_0 \cong \mathbb{R}. \quad (2.6)$$

Para o grupo de homologia H_1 , temos dois ciclos independentes, digamos, x e y . Qualquer elemento desse grupo pode ser escrito como uma combinação linear de x e y . Assim, dizemos que

$$H_1 \cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}. \quad (2.7)$$

2.1.2 Cohomologia

Vamos agora a alguns conceitos importantes de cohomologia. Vamos começar pelos grupos de cohomologia de DeRham.

Definição 3.1.2.0. Grupos de cohomologia de DeRham. Seja Z^p o conjunto das p -formas fechadas, dado por

$$Z^p = \{\omega_p \mid d\omega_p = 0\}. \quad (2.8)$$

Seja também B_p o grupo das p -formas exatas:

$$B^p = \{\nu_p \mid \nu_p = d\beta_{p-1}\}. \quad (2.9)$$

Os grupos de cohomologia de DeRham são dados pelo seguinte quociente:

$$H^p = \frac{Z^p}{B^p}. \quad (2.10)$$

Dizemos que H^p é o conjunto das p -formas fechadas, onde duas p -formas são equivalentes se:

$$\omega_p \simeq \omega_p + d\beta_{p-1}, \quad (2.11)$$

ou seja: são equivalentes se diferem por uma forma exata.

Podemos, como na subseção anterior, calcular alguns dos grupos de cohomologia de DeRham, usando a definição acima. Vamos calcular H^0 , por exemplo. Não existem formas do tipo (-1) -forma. Assim, temos que H^0 é o espaço de funções constantes. A dimensão desse espaço corresponde ao número de componentes conectadas da variedade [9].

Podemos mostrar que o grupo de homologia simplicial e o grupo de cohomologia de DeRham são na verdade duais um em relação a outro. Isto pode ser feito através de alguns teoremas, que foram enunciados pelo DeRham. Vamos ver como fazer isto a seguir.

Primeiro, devemos estabelecer alguma relação entre os grupos H_p e H^p . Para isto, vamos introduzir o produto $\pi(z_p, \omega_p)$. Seja ω_p uma forma fechada e z_p um ciclo de H_p . O produto $\pi(z_p, \omega_p)$ é chamado *período* e é definido matematicamente pela seguinte expressão:

$$\pi(z_p, \omega_p) = \int_{z_p} \omega_p. \quad (2.12)$$

É importante perceber que o período é na verdade um produto tensorial entre os dois espaços. De fato, podemos substituir z_p e ω_p por qualquer elemento das classes de equivalência de cada um dos grupos. Por exemplo, consideremos um ciclo do grupo de homologia

simplicial e o bordo de uma forma do grupo de cohomologia de DeRham. Podemos usar o Teorema de Stokes para mostrar que [5]:

$$\int_{z_p + \partial\alpha_{p-1}} (\omega_p + d\alpha_{p-1}) = \int_{z_p} \omega_p. \quad (2.13)$$

Isto na verdade indica que existe um isomorfismo entre o grupo de homologia simplicial e o grupo de cohomologia de DeRham. Agora que estabelecemos uma correspondência entre os dois grupos, vamos enunciar os teoremas de DeRham.

Teorema 3.1.2.0. *Dada uma base $\{z_i\}$ de H_p e um conjunto de períodos v_i , tal que $i = 1, 2, \dots, \dim H_p$, então existe uma p – forma fechada ω tal que*

$$\pi(z_i, \omega) = v_i. \quad (2.14)$$

Teorema 3.1.2.1. *Seja ω uma p – forma. Se todos os seus períodos se anulam, então ela é uma forma exata.*

2.2 Variedade Produto

Será possível fazer um produto entre duas variedades? A resposta é sim. Usualmente, o produto cartesiano entre duas variedades é também uma variedade. A essa variedade resultante, damos o nome de *variedade produto*. Em geral, podemos usar os elementos de homologia e cohomologia que vimos anteriormente para entender como isso funciona. Primeiro, vamos introduzir os conceitos de número de Betti e característico de Euler em termos desses elementos.

Definição 3.2.0. Número de Betti. *O rank do grupo H^p , dado por*

$$b_p = \dim H^p \quad (2.15)$$

é chamado número de Betti.

Geometricamente, podemos interpretar os números de Betti como o número de buracos $p + 1$ -dimensionais em uma variedade diferenciável M .

Definição 3.2.1. Característico de Euler. *Seja b_p o número de Betti de uma determinada variedade M . O característico de Euler é a soma alternada desses números, a saber:*

$$\chi = \sum_{p=0}^n (-1)^p b_p. \quad (2.16)$$

O característico de Euler para $M_1 \times M_2$ é dado por:

$$\chi(M_1 \times M_2) = \chi(M_1)\chi(M_2). \quad (2.17)$$

Agora, imaginemos que α_1 e α_2 sejam duas formas harmônicas, definidas, respectivamente, nas variedades M_1 e M_2 . Se tomarmos o produto exterior entre essas duas formas na variedade $M_1 \times M_2$, veremos que:

$$d(\alpha_1 \wedge \alpha_2) = d\alpha_1 \wedge \alpha_2 \pm \alpha_1 \wedge d\alpha_2 = 0. \quad (2.18)$$

Podemos mostrar que derivada exterior d^\dagger também é igual a zero. Ou seja, na variedade produto, $\alpha_1 \wedge \alpha_2$ é uma forma harmônica. Podemos construir uma base para todas as k – formas harmônicas em $M_1 \times M_2$, através do conjunto de todas as formas harmônicas do tipo $\alpha_p \wedge \beta_q$, tal que $p + q = k$. De fato, esse conjunto é uma base para essas k -formas definidas na variedade produto. Em termos gerais, isto significa relacionar a homologia de dois objetos – no nosso caso, as variedades M_1 e M_2 – à homologia do produto entre esses objetos [5]. Isso é um resultado direto da *fórmula de Kunneth*, dada por:

$$b_k(M_1 \times M_2) = \sum_{p+q=k} b_p(M_1)b_q(M_2). \quad (2.19)$$

Parte II

Variedades e estruturas complexas

3 Variedades de Riemann

Nessa seção, iremos estudar alguns conceitos fundamentais de variedades de Riemann. Contudo, faremos uma abordagem diferente da usual, utilizando formas diferenciais.

Primeiro, iremos introduzir o conceito de métrica de Riemann e, em seguida, iremos definir variedades de Riemann utilizando essa métrica.

Definição 4.0. *Métrica Riemanniana.* Seja M uma variedade suave. Uma métrica Riemanniana em M é um campo tensorial g do tipo $(2,0)$, que é simétrico e positivo definido em cada ponto de M .

Definição 4.1. *Variedade de Riemann.* Seja M uma variedade n -dimensional suave. Um tensor do tipo $(2,0)$ definido em M associa a cada mapa x uma coleção de n^2 funções suaves $T^{ij}(x^1, x^2, x^3, \dots, x^n)$ que satisfaz à seguinte regra de transformação:

$$\bar{T}^{ij} = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^m} T^{km}. \quad (3.1)$$

Definição 4.2. *Variedade de Riemann.* Seja M uma variedade n -dimensional e g uma métrica Riemanniana. Ao par (M, g) damos o nome de variedade de Riemann.

Vamos agora introduzir curvatura em termos das formas diferenciais. Vamos começar definindo uma base de 1-forma. Seja e^a , $a = 1, 2, \dots, n$ uma base de 1-forma, dada por

$$e^a = e_m^a dx^m, \quad (3.2)$$

e seja e_a a base de vetores recíproca, dada por

$$e_a = e_a^m \frac{\partial}{\partial x^m}, \quad (3.3)$$

tal que

$$\langle e^a, e_b \rangle = \delta_b^a. \quad (3.4)$$

Equivalentemente, 3.4 pode ser escrita da seguinte forma:

$$(e_a^m) = (e_m^a)^{-1}. \quad (3.5)$$

A partir dessa base, podemos definir o que chamamos de coeficientes de conexão, que são úteis para que construamos nossa noção de curvatura na variedade. Seja ∇_b uma derivada covariante. Os coeficientes de conexão Γ_{bc}^a são dados por

$$\nabla_b e_c = \Gamma_{bc}^a e_a, \quad (3.6)$$

onde $\nabla_b = e_b^m \nabla_m$. Equivalentemente, podemos definir esses coeficientes em termos da atuação de uma derivada covariante numa base de 1-forma, exatamente como definimos em 3.3, da seguinte maneira:

$$\nabla_b e^a = -\Gamma_{bc}^a e^c. \quad (3.7)$$

Calculando a derivada de maneira explícita e reescrevendo o resultado em termos de um produto exterior, encontramos:

$$de^a + \Gamma_{bc}^a e^b \wedge e^c = \Gamma_{mn}^r e_r^a dx^m \wedge dx^n. \quad (3.8)$$

Podemos escolher uma conexão de diferentes formas, mas, para nossos fins, geralmente restringimos a escolha a duas condições. A primeira condição é que a derivada covariante da métrica seja nula. A segunda é que os coeficientes da conexão sejam simétricos (em termos de seus índices inferiores). Toda essa formalidade é para dizer que queremos que nossa conexão seja uma conexão especial, chamada conexão de Christoffel [5].

A noção de *curvatura* numa variedade é dada através do *tensor de curvatura de Riemann*. Em coordenadas locais, ele é dado em termos dos símbolos de Christoffel:

$$R_{\sigma\mu\nu}^\rho = \partial_\mu \Gamma_{\nu\sigma}^\rho - \partial_\nu \Gamma_{\mu\sigma}^\rho + \Gamma_{\mu\lambda}^\rho \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}^\rho \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda. \quad (3.9)$$

Podemos definir o tensor de curvatura da variedade em termos de vetores arbitrários. Suponha que queiramos definir o tensor de curvatura para um vetor V^k . Temos:

$$[\nabla_m, \nabla_n]V^k + \Gamma_{mn}^l \nabla_l V^k = R_{mnl}^k V^l, \quad (3.10)$$

onde R_{mnl}^k é dado por

$$R_{mnl}^k = \partial_m \Gamma_{nl}^k - \partial_n \Gamma_{ml}^k + \Gamma_{mr}^k \Gamma_{nl}^r - \Gamma_{nr}^k \Gamma_{ml}^r. \quad (3.11)$$

Podemos também definir o tensor de curvatura em termos de uma 2-forma. Denotamos esse tensor por R_b^a , dado matematicamente por:

$$R_b^a = \frac{1}{2} R_{mnl}^k e_k^a e_b^l dx^m \wedge dx^n = (\partial_m \Gamma_{nl}^k + \Gamma_{mr}^k \Gamma_{nl}^r) e_k^a e_b^l dx^m \wedge dx^n. \quad (3.12)$$

Reescrevendo a equação acima, obtemos:

$$R_b^a = dw_b^a + w_c^a \wedge w_b^c. \quad (3.13)$$

Essa curvatura satisfaz uma identidade diferencial, chamada identidade de Bianchi, dada pela seguinte equação:

$$dR_b^a + \omega_c^a \wedge R_b^c - R_c^a \wedge \omega_b^c = 0. \quad (3.14)$$

Existe uma coisa em comum entre e^a e a curvatura R_b^a : ambas as formas possuem espaços tangentes com índices. A partir disso, podemos também definir derivadas covariantes que atuam nesses espaços. Seja ν^a um conjunto de formas diferenciais, cujo índice a representa o espaço tangente com índices. Definimos:

$$D\nu^a = d\nu^a + \omega_b^a \wedge \nu^b. \quad (3.15)$$

Agora, seja ν_b^a um conjunto de formas diferenciais denotado pelos espaços tangentes com índices a e b . Definimos:

$$D\nu_b^a = d\nu_b^a + \omega_c^a \wedge \nu_b^c - \omega_b^c \wedge \nu_c^a. \quad (3.16)$$

4 Estruturas complexas

Nesta seção, iremos estudar a estrutura complexa das variedades. Começemos com a seguinte definição.

Definição 5.0. Funções holomorfas. Seja F uma função definida por

$$F = f + ig : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}. \quad (4.1)$$

F é dita holomorfa se satisfaz às condições de Cauchy-Riemann,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y}, \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\partial g}{\partial x}. \quad (4.3)$$

Agora, consideremos j como um *endomorfismo* de \mathbb{R}^2 . Ele é construído através da identificação de \mathbb{R}^2 com \mathbb{C} , dada por:

$$z = x + iy \mapsto (x, y). \quad (4.4)$$

Podemos também representar esse endomorfismo em sua base canônica, obtendo a seguinte equação:

$$j = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.5)$$

Por outro lado, se F é uma função real,

$$F : \mathbf{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (4.6)$$

podemos calcular sua derivada em algum ponto \mathbf{p} do aberto \mathbf{U} . Essa derivada é um mapa linear, dado por

$$(F_*)_{\mathbf{p}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{p}) & \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{p}) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(\mathbf{p}) & \frac{\partial g}{\partial y}(\mathbf{p}) \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

Dada a equação acima, é fácil verificar que as condições de Cauchy-Riemann previamente enunciadas equivalem a uma relação de comutação, dada por:

$$j \circ (F_*)_{\mathbf{p}} = (F_*)_{\mathbf{p}} \circ j, \quad \forall \mathbf{p} \in \mathbf{U}. \quad (4.8)$$

Mas, e se tratando de uma função complexa? Anteriormente, estabelecemos essa relação de comutação pois F era real. O que acontece quando fazemos uma identificação entre \mathbb{C}^m e \mathbb{R}^{2m} ? Vejamos. Seja essa identificação dada por:

$$(z_1, z_2, \dots, z_m) = (x_1 + iy_1, \dots, x_m + iy_m) \mapsto (x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_m). \quad (4.9)$$

Como anteriormente, iremos denotar j_m como o endomorfismo de \mathbb{R}^{2m} ,

$$j_m = \begin{pmatrix} 0 & -I_m \\ I_m & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.10)$$

Agora, o mapa $F : \mathbf{U} \subset \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$ é holomorfo se e somente se a derivada F_* de F – como mapa real $F : \mathbf{U} \subset \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2m}$ satisfaz à seguinte relação:

$$j_m \circ (F_*)_{\mathbf{p}} = (F_*)_{\mathbf{p}} \circ j_n, \quad \forall \mathbf{p} \in \mathbf{U}. \quad (4.11)$$

4.1 Retomando a discussão sobre variedades complexas

Vamos retomar nossa discussão sobre variedades complexas. Como vimos anteriormente, essencialmente, uma variedade é complexa quando seus mapas de colagem são holomorfos. Assim, o sistema de coordenadas da variedade – ou *atlas* – forma uma estrutura holomorfa.

Um exemplo muito importante de variedade complexa é o espaço projetivo complexo $\mathbb{C}P^m$. Matematicamente, esse espaço é definido como o conjunto das linhas complexas de \mathbb{C}^{m+1} . Por *linha*, entendemos um subespaço vetorial de dimensão um (no nosso caso, essas linhas são um subespaço do espaço complexo). Definindo uma relação de equivalência \sim em $\mathbb{C}^{m+1} \setminus \{0\}$ como

$$(z_0, \dots, z_m) \sim (\alpha z_0, \dots, \alpha z_m), \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}^*. \quad (4.12)$$

Usando a equação acima, podemos escrever o espaço projetivo complexo em termos de \mathbb{C}^{m+1} , sendo este último uma classe de equivalência de $\mathbb{C}P^m$, ou seja,

$$\mathbb{C}P^m = (\mathbb{C}^{m+1} \setminus \{0\}) / \sim. \quad (4.13)$$

Denotando a classe de equivalência de (z_0, \dots, z_m) por $[z_0 : \dots : z_m]$, podemos definir a cobertura aberta do espaço projetivo complexo. Seja $U_i, i = 0, \dots, m$ essa cobertura. Temos:

$$U_i := \{z_0 : \dots : z_m \mid z_i \neq 0\}. \quad (4.14)$$

Os mapas de colagem $\phi_i : U_i \rightarrow \mathbb{C}^m$, em termos das classes de equivalência do espaço projetivo complexo, são escritos da seguinte maneira:

$$\phi_i([z_0 : \dots : z_m]) = \left(\frac{z_0}{z_i}, \dots, \frac{z_{i-1}}{z_i}, \frac{z_{i+1}}{z_i}, \dots, \frac{z_m}{z_i} \right). \quad (4.15)$$

Para que o espaço projetivo seja de fato uma variedade complexa, toda intersecção não-vazia entre dois abertos U e V desse espaço deve possuir mapas de colagem do tipo

$$\phi_{UV} := \phi_U \circ \phi_V^{-1}, \quad (4.16)$$

sendo ainda esses mapas holomorfos. Cada $\frac{z_m}{z_i} = \zeta_i^m$ – que correspondem aos elementos do aberto U_i – corresponde a uma coordenada dentro de U_i . Agora, seja U_j um outro conjunto aberto do espaço projetivo. Na intersecção $U_i \cap U_j$, temos:

$$\zeta_i^m = \frac{z_m}{z_i} = \frac{\frac{z_m}{z_j}}{\frac{z_i}{z_j}} = \frac{\zeta_j^m}{\zeta_j^i}. \quad (4.17)$$

A função ζ_i^m é uma função holomorfa de ζ_j^m na intersecção entre os dois abertos, já que z_i e z_j são diferentes de zero nessa região (dado que podemos construir o aberto U_j com a mesma regra que usamos para U_i , na equação 4.14). Em termos das classes de equivalência, podemos mostrar [13] que $\phi_i \circ \phi_j^{-1}$ é um mapa holomorfo em todo o seu domínio.

Outra consideração importante é o fato de que toda variedade complexa M de dimensão m pode ser definida como uma variedade real $2m$ – **dimensional** – que chamaremos $M_{\mathbb{R}}$. Isto pois todo mapa holomorfo entre abertos de \mathbb{C}^m corresponde a um mapa suave entre dois abertos de \mathbb{R}^{2m} . Essa é uma propriedade importante, que corresponde ao fato de \mathbb{C}^m ser localmente igual a \mathbb{R}^{2m} . Podemos ilustrar isso com o fato de que todo número complexo pode ser expresso em termos de algum par (x, y) no plano real⁶ [13].

⁶Vale a pena ressaltar que o contrário nem sempre pode ser verdadeiro, pois nem toda função suave é uma função holomorfa.

4.2 Estruturas e variedades quase complexas

Podemos nos perguntar mais a fundo de onde vem essa propriedade da variedade M . De fato, essa estrutura holomorfa da variedade complexa está na verdade relacionada a um campo tensorial da variedade $M_{\mathbb{R}}$. $\forall X \in T_x M_{\mathbb{R}}$, vamos escolher algum aberto U contido no atlas da variedade que contém x . Definimos:

$$J_U(X) = (\phi_U)_*^{-1} \circ j_m \circ (\phi_U)_*(X). \quad (4.18)$$

Tomando agora algum outro aberto V no atlas de $M_{\mathbb{R}}$ (que também contenha x), podemos usar os mesmos argumentos anteriormente usados para mostrar que o espaço projetivo era uma variedade complexa para verificar que as funções de colagem $\phi_{VU} = \phi_V \circ \phi_U^{-1}$ são holomorfas. Usando $\phi_V = \phi_{VU} \circ \phi_U$, podemos mostrar que:

$$J_V(X) = (\phi_V)_*^{-1} \circ j_m \circ (\phi_V)_*(X) = J_U(X). \quad (4.19)$$

Isto basicamente nos mostra que o tensor J não depende de U , ou seja, não depende do conjunto de abertos que escolhemos para cobertura de nossa variedade. A coleção de todos os J_U é então nosso tensor J em $M_{\mathbb{R}}$, que satisfaz á condição a seguir:

$$J^2 = -\text{Id}. \quad (4.20)$$

Isto nos leva à seguinte definição.

Definição 5.2.0. Estrutura quase complexa. *Seja J um tensor definido em uma variedade real M , que satisfaz à condição de que $J^2 = -\text{Id}$. Esse tensor é chamado de estrutura quase complexa. Ao par (M, J) , damos o nome de variedade quase complexa.*

De certo modo, podemos entender uma variedade complexa também como uma variedade quase complexa – ainda que a afirmação contrária não seja verdadeira. O tensor J , em termos de suas componentes, também possui a propriedade $J_{mn} = -J_{nm}$. A propriedade definida em 4.20 pode também ser reescrita em termos das componentes do tensor, da seguinte maneira: $J_m^n J_n^p = -\delta_m^p$.

Para que o contrário seja válido – ou seja, para que uma variedade quase complexa seja uma variedade complexa – é necessário que algumas condições de integrabilidade sejam válidas. Vejamos quais.

Seja (M, J) uma variedade quase complexa. Queremos *diagonalizar* o endomorfismo J , no sentido de que queremos encontrar uma matriz diagonal que satisfaça à condição 4.20. Para isto, devemos *complexificar* o espaço tangente da variedade M . Façamos a seguinte definição:

$$TM^{\mathbb{C}} := TM \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}. \quad (4.21)$$

Pela linearidade do espaço \mathbb{C} , podemos estender os operadores e endomorfismos de TM para $TM^{\mathbb{C}}$. Podemos definir, para essa variedade M (mesmo que ela seja apenas uma variedade quase complexa) o que chamamos de *tensores de projeção*, dados por⁷:

$$P_m^n = \frac{1}{2}(\delta_m^n - iJ_m^n), \quad (4.22)$$

$$Q_m^n = \frac{1}{2}(\delta_m^n + iJ_m^n). \quad (4.23)$$

Podemos separar o espaço tangente TM em uma soma direta de dois subespaços: $T^{(1,0)}$ e $T^{(0,1)}$, da seguinte forma:

$$TM^{\mathbb{C}} = T^{(1,0)}M \oplus T^{(0,1)}M. \quad (4.24)$$

Em seguida, podemos usar os tensores de projeção para projetar qualquer vetor para o primeiro espaço ou para o segundo espaço (usando P e Q para cada caso, respectivamente). Em termos de projeção de outros tensores, podemos usar os tensores de projeção para projetar as componentes holomorfas e anti-holomorfas de tensores.

Separando o espaço tangente de M como soma direta, podemos escrever o primeiro subespaço como:

$$T^{(1,0)}M = \{X - iJX \mid X \in TM\}, \quad (4.25)$$

que corresponde ao espaço que contém o autovalor (i) do tensor J . Já o segundo subespaço é escrito como:

$$T^{(0,1)}M = \{X + iJX \mid X \in TM\}, \quad (4.26)$$

que corresponde ao espaço que contém o autovalor $(-i)$ do tensor J .

A maneira de mostrar a complexificação do espaço e diagonalizar o tensor J é através do *teorema de Newlander-Nirenberg*. Basicamente, esse teorema estabelece que a condição necessária e suficiente para que uma estrutura quase complexa seja holomorfa – e assim uma variedade quase complexa seja uma variedade complexa – é que a estrutura $T^{(0,1)}M$ seja *integrável*. Vejamos o enunciado do teorema.

Teorema 5.2.1. Teorema de Newlander-Nirenberg. *Seja (M, J) uma variedade quase complexa. A estrutura quase complexa de J vem de uma estrutura holomorfa se e somente se $T^{(0,1)}M$ é integrável.*

A prova deste teorema em geral é bastante complicada. Seguindo os passos da referência [13], iremos provar apenas a segunda parte do teorema, sendo suficiente entender a ideia central da condição de integrabilidade de $T^{(0,1)}M$ para que a variedade quase complexa tenha de fato uma estrutura holomorfa e possa ser considerada uma variedade complexa.

⁷Aqui, usamos a representação de tensores em termos de suas componentes, conforme [5]

Assim sendo, vamos assumir que de fato J venha de uma estrutura holomorfa em M . Consideremos então um mapa holomorfo (U, ϕ_U) , tal que ϕ_U seja decomposta em $z_\alpha = x_\alpha + iy_\alpha$. Seja também $\{e_1, e_2, \dots, e_{2m}\}$ a base canônica de \mathbb{R}^{2m} . Pela definição de J , escrevemos:

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha} = (\phi_U)_*^{-1}(e_\alpha), \quad (4.27)$$

$$\frac{\partial}{\partial y_\alpha} = (\phi_U)_*^{-1}(e_{m+\alpha}). \quad (4.28)$$

Por outro lado, $j_m(e_\alpha) = e_{m+\alpha}$, o que diretamente nos leva a :

$$J\left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\right) = \frac{\partial}{\partial y_\alpha}. \quad (4.29)$$

Definindo:

$$\frac{\partial}{\partial z_\alpha} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha} - i\frac{\partial}{\partial y_\alpha}\right), \quad (4.30)$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}_\alpha} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha} + i\frac{\partial}{\partial y_\alpha}\right). \quad (4.31)$$

Vemos diretamente que, das decomposições do espaço tangente dadas em 4.25 e 4.26 e da equação 4.29, as equações 4.30 e 4.31 representam, respectivamente, seções locais de $T^{(1,0)}M$ e $T^{(0,1)}M$. Essas seções formam uma base local em cada ponto de U .

Vamos agora escrever seções locais de $T^{(0,1)}M$. Sejam Z e W duas dessas seções locais (definidas na base local), definidas por:

$$Z = \sum Z_\alpha \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_\alpha}\right), \quad (4.32)$$

$$W = \sum W_\alpha \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_\alpha}\right). \quad (4.33)$$

Calculando o comutador entre essas duas seções locais, obtemos:

$$[Z, W] = \sum_{\alpha, \beta=1}^m Z_\alpha \frac{\partial W_\beta}{\partial \bar{z}_\alpha} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_\beta} - \sum_{\alpha, \beta=1}^m W_\alpha \frac{\partial Z_\beta}{\partial \bar{z}_\alpha} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_\beta}, \quad (4.34)$$

O resultado acima é exatamente o significado de $T^{(0,1)}M$ ser integrável. Para que $T^{(0,1)}M$ seja integrável, o comutador de dois vetores (seções locais) X e Y anti-holomorfos deve também ser um vetor anti-holomorfo. No cálculo acima, obtemos uma base para esses vetores anti-holomorfos, de modo que o comutador de fato gera um vetor desse tipo, mostrando que $T^{(0,1)}M$ é integrável. Assim, dizemos que uma estrutura quase complexa que surge de uma estrutura holomorfa é de fato uma estrutura complexa.

4.3 Variedades hermitianas, quase hermitianas e simpléticas

Vamos discutir brevemente o conceito de variedades hermitianas, que introduzem para nós um análogo complexo de uma variedade de Riemann. Podemos usá-la para definir uma variedade real dotada de métrica riemanniana e que preserva uma estrutura complexa (!). Em termos gerais, uma variedade hermitiana é uma variedade complexa dotada de um produto interno hermitiano. Vamos discutir como essas variedades se associam com formas diferenciais fundamentais.

Também, iremos discutir brevemente o conceito de variedades simpléticas, que são úteis em muitas áreas de física teórica, como por exemplo, mecânica clássica. Começemos com a seguinte definição.

Definição 5.3.0. *Variedade simplética.* Seja ω uma 2-forma fechada e não degenerada e M uma variedade complexa. A variedade (M, ω) é chamada uma variedade simplética, e a forma ω é dita uma forma simplética.

Aqui, é necessário explicar o que significa uma forma simplética ser não degenerada. Uma forma simplética não degenerada é uma forma bilinear tal que

$$\Omega(v, w) = -\Omega(w, v), \quad \forall v, w \in V, \quad (4.35)$$

ou seja: todo vetor definido nessa forma é isotrópico. Ainda, ela ser não degenerada significa que, $\forall v \in V$, $v \neq 0$, existe um $w \in V$ tal que $\Omega(v, w) \neq 0$. Outra forma de visualizar essa não degenerescência é observar o produto \wedge (não necessariamente em um sistema de coordenadas definido). Neste caso, essa condição implica que, para uma variedade $2n$ -dimensional, o n -ésimo produto \wedge da forma ω é sempre diferente de zero, ou seja:

$$\omega^n = \omega \wedge \omega \wedge \dots \wedge \omega \neq 0. \quad (4.36)$$

Outro ponto importante sobre variedades simpléticas é que elas sempre terão dimensão par. Isto decorre diretamente do fato de serem equipadas com formas simpléticas, já que toda matriz invertível e anti-simétrica terá sempre um número par de linhas e colunas.

Um exemplo de variedade simplética é o espaço \mathbb{R}^{2n} . Podemos verificar isso tomando o produto

$$\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \quad (4.37)$$

utilizando como coordenadas x^i, y_i , $i = 1, 2, \dots, n$. A forma simplética será dada por:

$$\omega = dx^i \wedge dy_i = \begin{pmatrix} 0 & I_{n \times n} \\ -I_{n \times n} & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.38)$$

Agora, vamos enunciar e provar um teorema que relaciona variedades riemannianas simpléticas com estruturas quase complexas.

Teorema 5.3.1. *Toda variedade riemanniana simplética é quase complexa.*

Vamos provar o teorema. Primeiro, vamos definir um operador $A : V \rightarrow V$ da seguinte forma:

$$g(AX, Y) = w(X, Y), \quad \forall X, Y \in \Gamma(TM). \quad (4.39)$$

Usando as coordenadas locais da variedade (i.e., um atlas), podemos mostrar que de fato existe um operador que satisfaça tal condição. Vamos calcular o conjugado de A em relação à métrica da equação 4.39:

$$g(AX, Y) = w(X, Y) = -w(Y, X) = -g(AY, X) = -g(X, AY), \quad \forall X, Y \in \Gamma(TM). \quad (4.40)$$

Desse modo, verificamos que $A^\dagger = -A$, o que implica que $A^\dagger A = -A^2$ (que é claramente uma matriz auto-adjunta). Notemos que:

$$A(X) = 0 \leftrightarrow X = 0. \quad (4.41)$$

Portanto, usando isso, temos:

$$g(A^\dagger AX, X) = g(AX, AX) > 0 \quad \forall AX \neq 0 \in \Gamma(TM) \rightarrow g(A^\dagger AX, X) > 0 \quad AX \neq 0 \in \Gamma(TM), \quad (4.42)$$

o que nos mostra que $A^\dagger A$ é positivamente definido e tem autovalores positivos. Assim, podemos definir o tensor J como (lembrando que $A^\dagger = -A$)

$$J^2 = (A^\dagger A)^{-1} A^2 = -\mathbb{I}. \quad (4.43)$$

E, como w e g são globalmente bem definidos, o tensor J também o é. Portanto, temos uma estrutura quase complexa, que é exatamente o que queríamos mostrar.

Definição 5.3.2. *Uma estrutura quase complexa J definida em uma variedade simplética (M, w) é dita compatível se, para todo $X, Y \in \Gamma(TM)$, temos:*

$$w(JX, JY) = w(X, Y), \quad w(X, JX) > 0 \quad \text{se } X \neq 0. \quad (4.44)$$

A definição acima é dada em relação a vetores reais. Como fazer essa definição ser compatível com estruturas complexas? Para isso, introduziremos o seguinte corolário.

Corolário 5.3.3. *A estrutura complexa $J = (A^\dagger A)^{-\frac{1}{2}} A$ é compatível com w .*

A prova desse corolário consiste em usar o fato de J ser anti-hermitiano e que, para quaisquer $X, Y \in \Gamma(TM)$,

$$w(JX, JY) = g(AJX, JY) = g(JAX, JY) = -g(AX, J^2 Y) = g(AX, Y) = w(X, Y). \quad (4.45)$$

E, como $A^\dagger A$ é positivo definido, então, para qualquer $X \neq 0 \in \Gamma(TM)$,

$$w(X, JX) = g(AX, JX) = -g(JAX, X) = g(\sqrt{A^\dagger A}X, X) > 0, \quad (4.46)$$

o que condiz exatamente com a definição 5.3.2., completando nossa prova.

Agora, passemos à definição de variedades hermitianas. Para isto, precisamos introduzir o conceito de métrica hermitiana.

Definição 5.3.4. Métrica (quase) hermitiana. Seja (M, J) uma variedade (quase) complexa, $2n$ -dimensional. Seja g uma métrica riemanniana definida em M . A métrica g é dita uma métrica (quase) hermitiana se satisfaz qualquer uma das seguintes condições equivalentes entre si:

(i) $g(X, Y) = g(JX, JY) \quad \forall X, Y \in \Gamma(TM)$,

(ii) $g_{\mu\nu} = J_\mu^\rho J_\nu^\sigma g_{\rho\sigma}$,

(iii) Em coordenadas complexas locais z^α, \bar{z}^α , onde $\alpha, \beta = 1, 2, \dots, n$,

$$g = g_{\alpha\bar{\beta}}(z, \bar{z})(dz^\alpha \otimes d\bar{z}^\beta + d\bar{z}^\beta \otimes dz^\alpha), \quad (4.47)$$

ou seja, as componentes da métrica se anulam.

Numa visão geral, essas condições basicamente implicam que quaisquer campos vetoriais holomorfos e/ou anti-holomorfos são ortogonais com respeito à métrica g .

Métricas hermitianas definem um produto interno (positivamente definido) entre os espaços tangentes holomorfos e anti-holomorfos, da seguinte forma:

$$g : T_p M^+ \otimes T_p M^- \rightarrow \mathbb{C} \quad \forall p \in M. \quad (4.48)$$

Contudo, vale a pena ressaltar: a hermiticidade é uma restrição sob a métrica, e não sob a variedade.

Definição 5.3.5. Qualquer variedade (quase) complexa (M, J) admite uma métrica (quase) hermitiana.

Contudo, vale a pena lembrar que estamos considerando somente vetores reais. Quando passamos ao espaço tangente complexificado, a métrica não é positivamente definida.

Corolário 5.3.6. Uma variedade simplética sempre admite uma métrica quase hermitiana.

A prova desse corolário vem diretamente do teorema 5.3.1., que mostra que toda variedade simplética é quase complexa.

Definição 5.3.7. *Seja (M, J) uma variedade (quase) complexa, dotada de uma métrica hermitiana g . Definimos então a 2-forma fundamental ou 2-forma hermitiana como:*

$$w(X, Y) = g(JX, Y) \quad \forall X, Y \in \Gamma(TM). \quad (4.49)$$

Vamos ver dois corolários que nos mostram algumas propriedades importantes dessa 2-forma.

Corolário 5.3.8. *A 2-forma fundamental é não degenerada.*

A prova desse teorema segue rapidamente usando coordenadas locais da variedade e mostrando que $w^{\mu\nu}w_{\nu\rho} = \delta_{\rho}^{\mu}$.

Corolário 5.3.9. *A forma fundamental w é compatível com J .*

Para provar o corolário, temos que nos lembrar que a condição de compatibilidade requer que, para quaisquer $X, Y \in \Gamma(TM)$, $w(JX, JY) = w(X, Y)$ e, quando $X \neq 0$, $w(X, JX) > 0$. Vamos verificar a primeira parte:

$$w(JX, JY) = g(J^2X, JY) = -g(X, JY) = -g(JX, J^2Y) = g(JX, Y) = w(X, Y). \quad (4.50)$$

A segunda parte é bem parecida com as contas que já tínhamos feito anteriormente:

$$w(X, JX) = g(JX, JX) = g(X, X) > 0, \quad \text{se } X \neq 0, \quad (4.51)$$

finalizando nossa prova.

Parte III

Variedades de Calabi-Yau

5 Variedades de Kähler

Definição 6.1.0. Seja (M, J) uma variedade complexa com uma métrica hermitiana g e uma 2-forma fundamental ω . Se ω é fechada, ou seja,

$$d\omega = 0, \quad (5.1)$$

então M é uma variedade de Kähler, g é uma métrica de Kähler e ω é uma forma de Kähler.

Definição 6.1.1. Seja (M, g, J) uma variedade quase hermitiana com $d\omega = 0$. Dizemos que M é uma variedade quase Kähler.

Corolário 6.1.2. Uma variedade (quase) Kähler é uma variedade simplética.

Teorema 6.1.3. Seja (M, ω, J) uma variedade simplética com uma estrutura (quase) complexa e compatível J . Então, temos que M é Kähler.

Vamos provar o teorema acima. Vamos começar construindo a métrica:

$$g(X, Y) = -\omega(JX, Y). \quad (5.2)$$

Podemos verificar que a métrica acima satisfaz às seguintes condições: $g(X, Y) = g(Y, X)$, $g(JX, JY) = g(X, Y)$ e $g(X, X) > 0 \quad \forall X \neq 0$. Como g é uma métrica hermitiana positivamente definida, e como a 2-forma simplética ω é fechada, a variedade é (quase) Kähler, o que é exatamente o que queríamos mostrar.

Teorema 6.1.4. Qualquer (p, q) -forma – que denotamos por ω – pode ser escrita localmente como

$$\omega = \partial\bar{\partial}\chi, \quad (5.3)$$

para alguma $(p-1, q-1)$ -forma χ .

A prova desse teorema deriva diretamente do lema de Poincaré em coordenadas complexas. O teorema diz que, numa variedade *contratível*, todas as formas fechadas são exatas. Ele estabelece que formas fechadas representam classes de cohomologia na variedade.

Para que uma forma seja fechada, devemos lembrar que $d\omega = 0$. Isso implica que, para $(p+1, q)$ -formas e $(p, q+1)$ -formas:

$$d\omega = \partial\omega + \bar{\partial}\omega = 0 \rightarrow \partial\omega = \bar{\partial}\omega = 0. \quad (5.4)$$

Escrevendo a forma w em coordenadas locais

$$w = \frac{1}{(p+q)!} w_{a_1 \dots a_p \bar{b}_1 \dots \bar{b}_q} dz^{a_1} \wedge \dots \wedge dz^{a_p} \wedge d\bar{z}^{b_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}^{b_q}, \quad (5.5)$$

e calculando ∂w ⁸, obtemos:

$$\partial w = \frac{1}{(p+q)!} \partial_{c_1} w_{a_1 \dots a_p \bar{b}_1 \dots \bar{b}_q} dz^{c_1} \wedge dz^{a_1} \wedge \dots \wedge dz^{a_p} \wedge d\bar{z}^{b_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}^{b_q}. \quad (5.6)$$

Para que a equação 5.4 seja satisfeita, então

$$\partial_{[c_1 w_{a_1 \dots a_p \bar{b}_1 \dots \bar{b}_q]} = 0, \quad (5.7)$$

$$\partial_{[\bar{c}_1 w_{a_1 \dots a_p \bar{b}_1 \dots \bar{b}_q]} = 0. \quad (5.8)$$

Usando as equações acima e o lema de Poincaré, temos que, para alguma forma $\chi(z, \bar{z})$,

$$w = \partial \bar{\partial} \chi. \quad (5.9)$$

Teorema 6.1.5. *Para uma variedade de Kähler, a métrica de Kähler pode ser localmente escrita como:*

$$g_{a\bar{b}} = \partial_a \partial_{\bar{b}} K, \quad (5.10)$$

onde $K(z, \bar{z})$ é alguma função escalar, que chamamos potencial de Kähler⁹.

Como a forma de Kähler é fechada numa variedade de Kähler, então ela pode ser escrita como

$$w_{a\bar{b}} = i \partial_a \partial_{\bar{b}} K, \quad (5.11)$$

onde $K(z, \bar{z})$ é alguma função escalar. Em termos da métrica (e considerando as coordenadas locais da variedade), podemos escrever a forma fundamental como

$$w = i g_{a\bar{b}} (dz^a \otimes d\bar{z}^b - d\bar{z}^b \otimes dz^a). \quad (5.12)$$

Comparando 5.11 e 5.12, podemos então concluir que a métrica de Kähler pode ser escrita em termos do potencial de Kähler:

$$g_{a\bar{b}} = \partial_a \partial_{\bar{b}} K, \quad (5.13)$$

como queríamos mostrar.

Sejam K_i e K_j potenciais de Kähler e sejam U_i e U_j mapas coordenados definidos na variedade. Em uma intersecção não trivial de U_i e U_j tal que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, os potenciais de Kähler são relacionados por uma transformação de Kähler, definida como:

$$K_i(z, \bar{z}) = K_j(z, \bar{z}) + f_{ij}(z) + \bar{f}_{ij}(\bar{z}), \quad (5.14)$$

⁸O mesmo procedimento pode ser feito para $\bar{\partial}$.

⁹Definimos o potencial de Kähler localmente.

onde as funções $f_{ij}(z)$ são holomorfas. Sob transformações de Kähler, a métrica permanece invariante. Transformações de Kähler são muito úteis para, por exemplo, mostrar que uma variedade complexa é Kähler. Podemos fazer isso mostrando que existe um potencial de Kähler nessa variedade complexa e depois mostrando que temos uma métrica de Kähler positivamente definida.

Para ilustrar o que discutimos acima, vamos mostrar que $\mathbb{C}\mathbb{P}^N$ – uma variedade complexa – é uma variedade de Kähler. O atlas dessa variedade é dado por $(\mathbf{U}_i, \xi_{[i]})^\alpha$, onde

$$\xi_{[i]}^\alpha = \frac{z^\alpha}{z^i}, \quad (5.15)$$

onde z^α são coordenadas homogêneas do espaço \mathbb{C}^{N+1} , definidas nos mapas coordenados \mathbf{U}_i e são todos os pontos onde $z^i \neq 0$. Agora, seja

$$K_i = \ln \left(\sum_{\alpha=1}^{N+1} |\xi_{[i]}^\alpha|^2 \right) \quad (5.16)$$

uma função definida em algum mapa coordenado \mathbf{U}_i . Na intersecção de quaisquer $\mathbf{U}_i \cap \mathbf{U}_j \neq \emptyset$, as coordenadas que definimos são relacionadas da seguinte forma:

$$\xi_{[i]}^\alpha = \frac{\xi_{[j]}^\alpha}{\xi_{[j]}^i}. \quad (5.17)$$

Usando isto, podemos verificar que K_i e K_j são relacionadas por

$$K_i(z, \bar{z}) = K_j(z, \bar{z}) - \ln(\xi_{[i]}^i) - \ln(\bar{\xi}_{[j]}^i). \quad (5.18)$$

A equação acima tem exatamente a forma de uma transformação de Kähler, definida em 5.14. Assim, podemos definir uma métrica com a seguinte forma:

$$g_{a\bar{b}} = \partial_a \partial_{\bar{b}} K_i = \partial_a \partial_{\bar{b}} K_j. \quad (5.19)$$

Essa métrica tem um nome especial: métrica de Fubini-Study. Para completar nosso exemplo, só nos falta mostrar que ela é positivamente definida. Calculando a métrica definida em 5.19 (e descartando o índice i) usando 5.18, temos:

$$g_{a\bar{b}} = \frac{\delta_{a\bar{b}}(1 + |\xi|^2) - \bar{\xi}_a \xi_b}{(1 + |\xi|^2)^2}. \quad (5.20)$$

Agora, seja $X \in \Gamma(TM)$ um campo vetorial real. Devido a isto, temos que $X^a = \bar{X}^{\bar{a}}$. Em termos da métrica, temos:

$$g_{\mu\nu} X^\mu X^\nu = \frac{|X|^2 + |X|^2 |\xi|^2 - |(\bar{\xi}X)|^2}{(1 + |\xi|^2)^2}. \quad (5.21)$$

Usando a desigualdade de Schwarz, sabemos que $|X|^2 |\xi|^2 - |(\bar{\xi}X)|^2 > 0$ e, portanto, temos que g é positivamente definida, como queríamos verificar. Portanto, chegamos ao que queríamos: mostramos que o espaço $\mathbb{C}\mathbb{P}^N$ é de fato uma variedade de Kähler.

6 Conexões e curvaturas em variedades hermitianas

Definição 7.1.0. *Seja (M, J, g) uma variedade hermitiana. Podemos construir uma conexão que é compatível com a métrica hermitiana e com a estrutura complexa da mesma, isto é:*

$$\nabla g = \nabla J = 0. \quad (6.1)$$

A isto, damos o nome de conexão hermitiana.

Teorema 7.1.1. *Numa variedade hermitiana, existe uma conexão hermitiana única, que chamamos conexão de Chern, e tem a propriedade adicional de que a derivada covariante anti-holomorfa de um campo vetorial holomorfo é dada pela derivada anti-holomorfa do campo vetorial holomorfo¹⁰. Em outras palavras,*

$$\nabla_{\bar{a}} V^b = \partial_{\bar{a}} V^b, \quad \nabla_a V^{\bar{b}} = \partial_a V^{\bar{b}}. \quad (6.2)$$

Para provar o teorema, deve-se usar o resultado da definição 7.1.0, dado na equação 6.1. Por causa disso, as únicas componentes da conexão que são diferentes de zero são símbolos de Christoffel do primeiro tipo:

$$\Gamma_{ab}^c \neq 0, \quad \Gamma_{\bar{a}\bar{b}}^{\bar{c}} \neq 0. \quad (6.3)$$

O resultado acima também vem do fato de que devemos ter uma conexão única. Vamos agora mostrar a segunda parte do teorema. Impondo que a métrica é covariante e constante, calculamos a derivada covariante, obtendo:

$$\nabla_a g_{b\bar{c}} = \partial_a g_{b\bar{c}} - \Gamma_{ab}^d g_{d\bar{c}} = 0, \quad \nabla_{\bar{a}} g_{b\bar{c}} = \partial_{\bar{a}} g_{b\bar{c}} - \Gamma_{\bar{a}\bar{c}}^{\bar{d}} g_{b\bar{d}} = 0. \quad (6.4)$$

Invertendo, obtemos:

$$\Gamma_{ab}^c = g^{c\bar{d}} \partial_a g_{\bar{d}b}, \quad \Gamma_{\bar{a}\bar{b}}^{\bar{c}} = g^{\bar{c}d} \partial_{\bar{a}} g_{d\bar{b}}, \quad (6.5)$$

Como para conexões arbitrárias temos que as componentes mistas da conexão são tensores sob quaisquer mudança holomorfa de coordenadas, temos que as conexões na equação acima são tensores e portanto campos vetoriais. Assim, por construção, terminamos nossa prova do teorema.

Definição 7.1.2. *Seja (M, J, g) uma variedade hermitiana. Seja $R_{\nu\rho\sigma}^{\mu}$ o tensor de curvatura de Riemann (em coordenadas locais). A partir disso, dizemos que R é uma forma de Ricci, dada por:*

$$R = \frac{1}{4} R_{\nu\rho\sigma}^{\mu} J_{\mu}^{\nu} dx^{\rho} \wedge dx^{\sigma}. \quad (6.6)$$

¹⁰De maneira análoga, obtemos a derivada covariante holomorfa de um campo vetorial anti-holomorfo.

Teorema 7.1.3. *Seja (M, J, g) uma variedade hermitiana. Então, sua forma de Ricci é dada por:*

$$R = -i\partial\bar{\partial}\ln(\sqrt{|g|}). \quad (6.7)$$

Usando a forma de Ricci em coordenadas locais e o teorema 7.1.1, temos que as únicas componentes mistas da forma que são diferentes de zero são:

$$\mathcal{R}_{a\bar{b}} = \frac{i}{2}(\mathcal{R}_{ca\bar{b}}^c - \mathcal{R}_{c\bar{a}b}^{\bar{c}}). \quad (6.8)$$

Calculando a primeira componente explicitamente, temos:

$$\mathcal{R}_{ca\bar{b}}^c = -\partial_{\bar{b}}\Gamma_{ac}^c = -\partial_{\bar{b}}(g^{c\bar{d}}\partial_a g_{\bar{d}c}) \quad (6.9)$$

Contudo, devemos atentar ao fato de que, em coordenadas locais,

$$\partial_\mu \ln(|g|) = g^{\nu\rho} \partial_\mu g_{\nu\rho} = 2g^{a\bar{b}} \partial_\mu g_{a\bar{b}}, \quad (6.10)$$

de modo que 6.9 se torna:

$$\mathcal{R}_{ca\bar{b}}^c = -\partial_{\bar{b}}\partial_a \ln(\sqrt{|g|}). \quad (6.11)$$

Para a segunda componente, calculando de maneira parecida, obtemos:

$$\mathcal{R}_{c\bar{a}b}^{\bar{c}} = \partial_a \partial_{\bar{b}} \ln(\sqrt{|g|}). \quad (6.12)$$

Substituindo 6.11 e 6.12 em 6.8, obtemos:

$$\mathcal{R}_{a\bar{b}} = -i\partial_a \partial_{\bar{b}} \ln(\sqrt{|g|}), \quad (6.13)$$

como queríamos mostrar.

6.1 Conexões e curvaturas em variedades de Kähler

Teorema 7.1.1.0. *Em variedades de Kähler, a conexão de Chern é a conexão de Levi-Civita.*

Para provar esse teorema, devemos nos lembrar que uma variedade de Kähler tem uma forma fundamental fechada, ou seja, $d\omega = 0$. Escrevendo 5.12 em coordenadas locais, temos

$$\partial_a g_{b\bar{c}} - \partial_b g_{a\bar{c}} = 0, \quad (6.14)$$

$$\partial_{\bar{a}} g_{\bar{b}c} - \partial_{\bar{b}} g_{\bar{a}c} = 0. \quad (6.15)$$

Usando as duas equações acima e a equação 6.5, obtemos:

$$\Gamma_{ab}^c = g^{c\bar{d}}\partial_a g_{\bar{d}b} = g^{c\bar{d}}\partial_b g_{\bar{d}a} = \Gamma_{ba}^c. \quad (6.16)$$

De maneira análoga, podemos reproduzir o procedimento para $\Gamma_{\bar{a}\bar{b}}^{\bar{c}}$. Desse modo, a nossa conexão de Chern tem torção nula, e sabemos que existe apenas uma conexão compatível com a métrica cuja torção é nula, que é exatamente a conexão de Levi-Civita, como queríamos mostrar [12].

Definição 7.1.1.1. *Sejam X, Y, Z campos vetoriais quaisquer pertencentes a $\Gamma(TM)$. Para X, Y, Z , o tensor de curvatura de Riemann é definido como*

$$R(X, Y)Z = [\nabla_X, \nabla_Y]Z - \nabla_{[X, Y]}Z. \quad (6.17)$$

Escrevendo esse tensor de curvatura em coordenadas locais para qualquer $V \in \Gamma(TM)$,

$$[\nabla_{\mu}, \nabla_{\nu}]V^{\rho} = R_{\sigma\mu\nu}^{\rho} V^{\sigma}. \quad (6.18)$$

Isso basicamente significa que, quando fazemos um transporte paralelo desse vetor em torno de algum loop infinitesimalmente pequeno, i.e., quando tomamos o comutador das derivadas covariantes, esse vetor é transformado da seguinte maneira:

$$V'^{\mu} = V^{\mu} + a^{\rho\sigma} R_{\nu\rho\sigma}^{\mu} V^{\nu}, \quad (6.19)$$

onde temos que $a^{\rho\sigma}$ depende do loop que escolhemos.

Teorema 7.1.1.2. *O grupo de holonomia de uma variedade de Kähler 2n-dimensional é o grupo $U(n)$.*

Teorema 7.1.1.3. *Uma variedade de Kähler n-dimensional com a holonomia do grupo $SU(n)$ tem o tensor de Ricci nulo.*

7 Classes de Chern

Classes de Chern são estruturas invariantes de uma variedade. São o que chamamos classes de cohomologia. Podemos defini-las de formas distintas, mas vamos dar destaque a duas definições: a que leva em conta classes de Chern como polinômios e a que relaciona classes de Chern com a forma de Ricci.

Consideremos uma variedade complexa M . É natural definirmos, em M , bases em função de formas. Por exemplo, podemos escolher bases que são relacionadas por seu conjugado complexo, $(e^{\alpha}, e^{\bar{\alpha}})$, tal que

$$e^{\alpha} = e_{\mu}^{\alpha} dx^{\mu}. \quad (7.1)$$

e^α é uma $(1,0)$ -forma. Usando a identidade de Bianchi e uma conexão em termos de formas diferenciais, temos:

$$(\partial + \bar{\partial})e^\alpha + w_\beta^\alpha \wedge e^\beta + w_{\bar{\beta}}^\alpha \wedge e^{\bar{\beta}} = 0, \quad (7.2)$$

onde temos que essa equação contém formas do tipo $(2,0)$, $(1,1)$ e $(0,2)$, o que nos permite escrever três equações independentes a partir dela:

$$\partial e^\alpha + w_\beta^{(1,0)\alpha} \wedge e^\beta = 0, \quad (7.3)$$

$$\bar{\partial} e^\alpha + w_\beta^{(0,1)\alpha} \wedge e^\beta + w_{\bar{\beta}}^{(1,0)\alpha} \wedge e^{\bar{\beta}} = 0, \quad (7.4)$$

$$w_{\bar{\beta}}^{(0,1)\alpha} \wedge e^{\bar{\beta}} = 0. \quad (7.5)$$

Vamos tentar resolver essas equações. Podemos sempre escolher as componentes $w_{\bar{\beta}}^\alpha$ de tal modo que elas se anulem. Fazendo isto, podemos perceber que, por exemplo, $w_{\bar{\beta}}^{(0,1)\alpha}$ se anular implica que resolvemos a equação (7.5). Por outro lado, escolhendo que $w_{\bar{\beta}}^{(1,0)\alpha}$ se anule, temos, para a equação (7.4):

$$\bar{\partial} e^\alpha + w_\beta^{(0,1)\alpha} \wedge e^\beta = 0. \quad (7.6)$$

Contudo, também podemos resolver a equação introduzindo a seguinte equação:

$$w_\beta^{(0,1)\alpha} = w_{\beta\bar{\gamma}}^{(0,1)\alpha} e^{\bar{\gamma}}, \quad (7.7)$$

tal que

$$\bar{\partial} e^\alpha = w_{\beta\bar{\gamma}}^{(0,1)\alpha} e^\beta \wedge e^{\bar{\gamma}}. \quad (7.8)$$

Podemos resolver a equação (7.3) da mesma maneira.

Desta forma, devemos sempre escolher w_β^α de modo que as suas únicas componentes não-nulas sejam w_β^α e $w_{\bar{\beta}}^\alpha$. Desta maneira, temos que a curvatura R_β^α é escrito como:

$$R_\beta^\alpha = dw_\beta^\alpha + w_\gamma^\alpha \wedge w_\beta^\gamma. \quad (7.9)$$

Vamos agora definir Θ

$$\Theta = (R_\beta^\alpha) \quad (7.10)$$

como uma matriz de 2-formas, cujas componentes são dadas pela curvatura R_β^α . Vamos definir um polinômio em Θ que seja invariante sob quaisquer transformações unitárias de referencial. Por essas transformações, entendamos:

$$e^\alpha \rightarrow \Phi_\beta^\alpha e^\beta. \quad (7.11)$$

Cada polinômio invariante define uma classe de cohomologia, que é um invariante analítico. Podemos provar isso mostrando que cada polinômio invariante da nossa matriz é fechado (isso segue diretamente da identidade de Bianchi) e também que, sob uma

variação da conexão, a mudança no polinômio invariante é exata. Para isto, consideremos uma variação do tipo

$$w_{\beta}^{\alpha} \rightarrow w_{\beta}^{\alpha} + \delta w_{\beta}^{\alpha}. \quad (7.12)$$

Usando as equações 3.16 e 7.9, encontramos que a variação em Θ é dada por:

$$\delta\Theta = d(\delta w) + \delta w \wedge w + w \wedge \delta w = D(\delta w). \quad (7.13)$$

De uma maneira parecida, os nossos polinômios invariantes se "transformam" através de uma quantidade exata, dada por

$$\delta F(\Theta) = d(\delta Q). \quad (7.14)$$

Sejam w e w' quaisquer duas conexões e seja

$$w_t = (1-t)w + tw' \quad (7.15)$$

uma função tal que $w_0 = w$ e $w_1 = w'$. Assim

$$\frac{d}{dt} F(\Theta_t) = dQ_t. \quad (7.16)$$

Integrando a equação acima, obtemos:

$$F(\Theta') - F(\Theta) = d\left(\int_0^1 dt Q_t\right). \quad (7.17)$$

Um conjunto muito importante de polinômios invariantes são justamente o que chamamos de Polinômios de Chern. Esses polinômios são na verdade $2k$ -formas, onde $k = 0, \dots, n$. Eles são definidos através de uma expansão do que chamamos de polinômio total de Chern, dado por

$$c = \det\left(1 + \frac{i}{2\pi}\Theta\right). \quad (7.18)$$

Essa expansão é dada em termos de $c = c_0 + c_1 + \dots + c_n$.

Aos polinômios de Chern, podemos associar outros dois objetos, definidos em termos de um fibrado vetorial E : o característico de Chern – denotado por $ch(E)$ – e os polinômios simétricos – denotados por $S_k(E)$:

$$ch(E) = \text{tr}(e^x) = \sum \frac{1}{k!} S_k(E), \quad (7.19)$$

$$S_k(E) = \text{tr}(x^k), \quad x = \frac{i\Theta}{2\pi}, \quad (7.20)$$

onde x é uma matriz.

O característico de Chern é muito útil quando queremos fazer adição e multiplicação de fibrados. Isto pois

$$\text{ch}(E \oplus F) = \text{ch}(E) + \text{ch}(F), \quad (7.21)$$

$$\text{ch}(E \otimes F) = \text{ch}(E) \wedge \text{ch}(F). \quad (7.22)$$

Vamos analisar a matriz χ . Seja λ_m , $m = 1, 2, \dots, n$ o conjunto dos autovalores dessa matriz. Usando a equação 7.18, escrevemos:

$$c = \prod_m (1 + \lambda_m) = 1 + \sum_m \lambda_m + \sum_{m>n} \lambda_m \lambda_n + \sum_{m>n>r} \lambda_m \lambda_n \lambda_r + \dots, \quad (7.23)$$

onde

$$S_k = \sum_m \lambda_m^k. \quad (7.24)$$

Assim, podemos ver que existe uma relação entre os polinômios de Chern e os polinômios simétricos S_k . Podemos escrever algumas dessas relações para os polinômios c_1, c_2, c_3 :

$$c_1 = S_1, \quad (7.25)$$

$$c_2 = \frac{1}{2}(-S_2 + c_1^2), \quad (7.26)$$

$$c_3 = \frac{1}{3}(S_3 - c_1^3 + 3c_1 c_2). \quad (7.27)$$

Em especial, a primeira classe de Chern – denotada por c_1 – pode também ser definida, no espaço de 2-formas, em termos da forma de Ricci, como

$$c_1 = \left[\frac{1}{2\pi} R \right]. \quad (7.28)$$

Uma maneira mais geral de definir as equações (8.25) - (8.27) e as demais classes (ou polinômios) de Chern é usar as fórmulas de Girard-Newton [5],

$$S_k - c_1 S_{k-1} + \dots + (-1)^k c_k k = 0, \quad k \geq 1. \quad (7.29)$$

8 Variedades de Calabi-Yau

Teorema 9.1.0. *Se uma variedade de Kähler admite uma métrica Ricci plana, a sua primeira classe de Chern se anula.*

Para provar esse teorema, vamos começar estudando a métrica. Seja g a métrica Ricci plana da variedade de Kähler. Digamos que a variedade admite uma outra métrica g' , que não necessariamente é Ricci plana. Sabemos que, sob uma variação suave da métrica¹¹, a

¹¹ $g_{\mu\nu} \rightarrow g'_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}$.

primeira classe de Chern se anula. A forma de Ricci de duas métricas se relaciona pela seguinte equação:

$$R(g') = R(g) - dA, \quad (8.1)$$

onde $A = \frac{i}{4}(\partial - \bar{\partial})g^{mn}\delta g_{mn}$ é uma 1-forma. Temos também que A é uma forma bem definida. Se $R(g)$ e $R(g')$ pertencem à mesma classe de equivalência, e essa classe de equivalência for c_1 e $R(g) = 0$, então $R(g')$ se anula na classe de cohomologia, de modo que $c_1 = 0$, como queríamos mostrar.

Teorema 9.1.1. *Teorema de Yau.* *Seja (M, g, w) uma variedade de Kähler e seja R uma $(1, 1)$ -forma, que representa a primeira classe de Chern. Existe uma única métrica g' em M com uma forma de Kähler w' na mesma classe de Kähler que w , cuja forma de Ricci é R .*

Corolário 9.1.2. *Seja M, g, w uma variedade de Kähler com a primeira classe de Chern nula. Então, existe uma única métrica Ricci plana g' em M com uma forma de Kähler w' na mesma classe de Kähler que w .*

Combinando esses dois teoremas e o corolário que definimos, podemos finalmente introduzir a definição de variedade de Calabi-Yau.

Definição 9.1.3. *Uma variedade de Calabi-Yau é uma variedade de Kähler compacta com a primeira classe de Chern nula.*

Teorema 9.1.4. *Uma variedade de Calabi-Yau $2n$ -dimensional é uma variedade de Kähler que possui as seguintes propriedades equivalentes entre si:*

- (i) *Ela possui a primeira classe de Chern nula;*
- (ii) *Ela admite uma métrica Ricci plana;*
- (iii) *Ela admite uma métrica cujo grupo de holonomia é $SU(N)$ ou é um subgrupo desse grupo;*
- (iv) *Existe uma única $(n, 0)$ -forma Ω holomorfa e que não se anula em nenhum lugar da variedade;*
- (v) *Ela admite um par de espinores covariantes e globalmente bem definidos.*

Pelo resultado do Teorema 9.1.0, por exemplo, temos já a prova de que uma métrica Ricci plana implica que a primeira classe de Chern se anula. Um resultado que pode ser verificado em [12] é o fato de que uma métrica Ricci plana é equivalente ao grupo de holonomia $SU(N)$. Como as condições são equivalentes, podemos escolher apenas uma para provar e poupar nosso tempo. Seguindo os passos da referência [12], vamos provar a propriedade (iv).

Teorema 9.1.5. *Uma variedade de Kähler $2n$ -dimensional e compacta, dotada de uma $(n, 0)$ -forma holomorfa e que não se anula em nenhum lugar da variedade é uma variedade*

de Calabi-Yau.

A prova desse teorema se dá da seguinte maneira: Como temos uma forma holomorfa, podemos escrevê-la em termos de alguma função $f(z)$ e um símbolo $\eta_{a_1 \dots a_n} = \frac{1}{\sqrt{g}} \epsilon_{a_1 \dots a_n}$ ¹², da seguinte maneira:

$$\Omega_{a_1 \dots a_n} = f(z) \eta_{a_1 \dots a_n}. \quad (8.2)$$

Usando a métrica hermitiana da nossa variedade de Kähler, podemos reescrever a equação acima da seguinte maneira:

$$\|\Omega\|^2 = \frac{1}{n!} \Omega_{a_1 \dots a_n} g^{a_1 \bar{b}_1} \dots g^{a_n \bar{b}_n} \bar{\Omega}_{\bar{b}_1 \dots \bar{b}_n} = \frac{|f|^2}{\sqrt{g}}. \quad (8.3)$$

Se invertermos essa equação – i.e., isolando \sqrt{g} – e substituirmos na expressão da forma de Ricci dada na equação 6.7, obtemos:

$$\mathcal{R} = i\partial\bar{\partial} \ln(\|\Omega\|^2). \quad (8.4)$$

Contudo, sabemos que a forma dentro do argumento do logaritmo é globalmente bem definida e é um escalar, de modo que \mathcal{R} é exata. Desse modo, a primeira classe de Chern se anula, como queríamos mostrar.

Teorema 9.1.6. *Numa variedade complexa $2n$ –dimensional, existe pelo menos – a menos de uma constante – uma única $(n, 0)$ –forma holomorfa globalmente definida.*

O teorema acima nos mostra que a forma dada no teorema (9.1.5) é única.

No apêndice D, introduzimos os números de Hodge. Vamos agora brevemente discutir o que acontece com esses números quando estamos estudando variedades de Calabi-Yau.

O teorema que provamos anteriormente é bastante importante, pois ele nos ajuda a identificar variedades de Calabi-Yau de maneira direta, bastando construir uma variedade com uma forma holomorfa do tipo explicitado no teorema. Vamos introduzir um teorema que vai nos ajudar em nosso estudo.

Teorema 9.1.7. *Numa variedade com número de Euler \mathcal{X} , qualquer campo vetorial tem pelo menos $|\mathcal{X}|$ zeros.*

Agora, enunciaremos o seguinte teorema.

¹²Esse na verdade é um símbolo de Levi-Civita, em uma forma n -dimensional.

Teorema 9.1.8. *Uma variedade de Calabi-Yau cujo número de Euler é diferente de zero, tem $h^{1,0} = 0$.*

Para provar esse teorema, devemos nos recordar das identidades que relacionam os números de Betti com os números de Hodge, dadas no apêndice D. Usando-as, temos que

$$b^1 = 2h^{1,0}, \quad (8.5)$$

de modo que b^1 só será igual a zero se $h^{1,0} = 0$. Aqui, vale a pena lembrar que é importante utilizar essas relações entre esses números, porquê, diferente dos números de Betti, os números de Hodge não são invariantes topológicos, i.e., eles não dependem da métrica da variedade, mas sim da estrutura complexa da mesma. Os números de Betti nos proporcionam usar a métrica. Vamos escolher nossa métrica Ricci plana. Assumindo que $w \in \mathcal{H}^1$ é uma 1-forma harmônica e usando a forma de atuação da operação de Hodge nessa forma, e lembrando que o tensor de Ricci se anula, obtemos que a forma w só pode ser harmônica se:

$$\nabla^\nu \nabla_\nu w_\mu = 0. \quad (8.6)$$

Multiplicando por w^μ e integrando no volume da variedade, obtemos que essa integral é nula, o que implica que $\nabla_\nu w_\mu = 0$. Pelo teorema 9.1.7, w tem pelo menos um zero. Contudo, se ela é constante (em relação à derivada covariante) e se anula em qualquer ponto (como podemos verificar ao performar a integral) então $w = 0$.

Teorema 9.1.9. *Uma variedade de Calabi-Yau $2n$ -dimensional tem o número de Hodge $h^{n,0} = 1$.*

A prova do teorema acima deriva diretamente da unicidade da $(n,0)$ -forma holomorfa em uma variedade de Calabi-Yau.

Teorema 9.1.10. *Uma variedade de Calabi-Yau $2n$ -dimensional tem o número de Hodge $h^{p,0} = h^{n-p,0}$.*

A prova explícita desse teorema encontra-se em [12], mas o ponto principal da mesma consiste em provar que temos uma forma harmônica.

Vamos mostrar alguns exemplos de números de Hodge em variedades de Calabi-Yau. Mais exemplos podem ser encontrados em diversas referências da literatura, em especial em [12] e [5]. Consideremos primeiro uma variedade de duas dimensões. Nessa variedade, deve existir uma 1-forma holomorfa, de modo que, pelo teorema 9.1.9, $h^{1,0} = 1$. Ainda, pelo teorema 9.1.10 e pela identidade $h^{p,q} = h^{n-p,n-q}$, temos algumas simetrias sob nosso diamante de Hodge, de modo que ele terá apenas um número independente, $h = 1$.

Agora, vamos escolher o caso em que o número de Euler é diferente de zero e olhar para variedades com quatro dimensões. Usando os resultados dos teoremas 9.1.7, 9.1.9 e 9.9.10, combinados com a expressão geral do diamante de Hodge para uma variedade $2n$ -dimensional, obtemos que o diamante para esse tipo de variedade é dado como na figura a seguir:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 1 & & \\
 & & & & 0 & & 0 \\
 & & & & 0 & & 0 \\
 & & & & h^{1,1} & & \\
 1 & & & & & & 1 \\
 & & & & 0 & & 0 \\
 & & & & 1 & &
 \end{array}$$

Figura 3: Diamante de Hodge para uma variedade de Calabi-Yau com 4 dimensões [12]. Perceba que o único número de Hodge do qual o diamante depende é $h^{1,1}$.

Variedades do tipo que acabamos de ver recebem o nome de *superfícies K3*. Em teoria de cordas, esse tipo de superfície é muito utilizada nas compactificações de cordas, que são em geral não triviais [3].

Vamos considerar agora uma variedade de Calabi-Yau de seis dimensões. Perceba que ainda podemos usar os teoremas que usamos para o caso de quatro dimensões, pois essa continua sendo uma variedade $2n$ -dimensional. Agora, encontramos que o diamante de Hodge depende apenas de dois números: $h^{1,1}$ e $h^{1,2}$. A expressão completa para o diamante encontra-se na figura abaixo.

$$\begin{array}{cccccccc}
 & & & & & & & 1 \\
 & & & & & & & 0 & & 0 \\
 & & & & & & & 0 & & h^{1,1} & & 0 \\
 & & & & & & & h^{1,2} & & & & h^{1,2} & & 1 \\
 1 & & & & & & & 0 & & h^{1,1} & & 0 & & \\
 & & & & & & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & & & & & & 1 & & & & & &
 \end{array}$$

Figura 4: Diamante de Hodge para uma variedade de Calabi-Yau com 6 dimensões [12].

9 Exemplos

Para finalizar nosso estudo, vamos dar alguns exemplos de variedades de Calabi-Yau. Um exemplo direto de variedade de Calabi-Yau são os espaços T^2 e T^4 – espaço de Hausdorff e espaço normal, respectivamente. Uma variedade Hausdorff que também é uma variedade de Calabi-Yau é o toroide [12].

Não há uma forma concreta em que possamos construir uma variedade de Calabi-Yau, no sentido de que não há um passo a passo único para fazer tal coisa. Dessa forma, para facilitar nosso trabalho, deveremos introduzir alguns teoremas.

Definição 10.0. *Uma subvariedade analítica de uma variedade M é determinada pelo lugar geométrico das equações holomorfas*

$$F(z) = 0 \tag{9.1}$$

na variedade M .

A partir disso, introduzimos o seguinte teorema.

Teorema 10.1. *Uma subvariedade analítica de uma variedade de Kähler também é Kähler.*

A prova desse teorema segue diretamente do fato de que a restrição da métrica e da forma de Kähler a uma subvariedade analítica dá a essa subvariedade uma métrica e uma forma de Kähler.

Vamos usar o resultado desse teorema e nosso conhecimento até aqui desenvolvido para construir alguns exemplos de variedades do tipo Calabi-Yau. $\mathbb{C}P^N$ é uma variedade de Kähler, mas não é Calabi-Yau [12]. Contudo, podemos procurar subvariedades analíticas dessa variedade que são. Todas as subvariedades analíticas de $\mathbb{C}P^N$ podem ser descritas como o lugar geométrico de um número finito de equações polinomiais holomorfas [12], [5]. Vejamos os seguintes exemplos.

Exemplo 1. Tomemos as subvariedades de uma dimensão de $\mathbb{C}P^2$. Vamos considerar as coordenadas homogêneas $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}^3$. Usando essas coordenadas, vamos escrever um polinômio de ordem n :

$$P(z) = z_1^n + z_2^n + z_3^n. \tag{9.2}$$

Fazendo $P(z) = 0$, obtemos uma superfície bem definida. Podemos encontrar os valores de n para os quais podemos obter uma variedade de Calabi-Yau, de modo que podemos tentar construir uma 1-forma holomorfa. Vamos escolher o mapa $z_1 \neq 0$ e definir as seguintes coordenadas inhomogêneas:

$$x = \frac{z_2}{z_1}, \quad y = \frac{z_3}{z_1}. \tag{9.3}$$

A partir disso, podemos reescrever nosso polinômio da seguinte maneira:

$$P(x, y) = z_1^n(1 + x^n + y^n) = z_1^n p(x, y) = 0. \quad (9.4)$$

Nesse mapa que escolhemos, vamos definir uma 1-forma da seguinte maneira:

$$\Omega_1 = \frac{dx}{\frac{\partial p}{\partial y}}. \quad (9.5)$$

Como $p = 0$ em nossa superfície, podemos usar

$$dp = 0 = \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy \quad (9.6)$$

para reescrever 9.5 e evitar singularidades quando $\frac{\partial p}{\partial y} = 0$. Portanto,

$$\Omega_1 = -\frac{dy}{\frac{\partial p}{\partial x}}. \quad (9.7)$$

Assim, só teríamos algum problema com as singularidades quando $\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = 0$. Contudo, nesse ponto, temos $dp = 0$, de modo que a normal da superfície se anula nesse ponto. Neste caso, a superfície teria um "bico" nesse ponto, e nós não estamos interessados em superfícies problemáticas desse tipo, então nós simplesmente descartamos as superfícies geradas nesse extremo.

Agora, vamos assumir que estamos escolhendo apenas polinômios homogêneos e holomorfos, tal que $dp \neq 0$. Para que Ω_1 continue sendo bem definida, temos que considerar alguma intersecção entre dois mapas coordenados da variedade, e mostrar que nossa forma continua bem definida. Vamos escolher a região em que $z_2 \neq 0$. Nessa região, definimos as seguintes coordenadas inhomogêneas:

$$\bar{x} = \frac{z_1}{z_2}, \quad \bar{y} = \frac{z_3}{z_2}. \quad (9.8)$$

Agora, nosso polinômio é escrito, em termos dessas novas coordenadas, como

$$P(\bar{x}, \bar{y}) = z_2^n(\bar{x}^n + \bar{y}^n + 1) = z_2^n \bar{p}(\bar{x}, \bar{y}) = 0. \quad (9.9)$$

Nessa região, também definimos a 1-forma Ω_2 como:

$$\Omega_2 = -\frac{d\bar{x}}{\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}}}. \quad (9.10)$$

Consideremos a região de intersecção entre $z_1 \neq 0$ e $z_2 \neq 0$. Nela, as coordenadas inhomogêneas e homogêneas se relacionam como $\bar{x} = x^{-1}$ e $\bar{y} = yx^{-1}$. Em termos das coordenadas homogêneas e inhomogêneas, na região de intersecção, temos:

$$\Omega_1 = \frac{dx}{ny^{n-1}}, \quad \Omega_2 = -\frac{d\bar{x}}{n\bar{y}^{n-1}}. \quad (9.11)$$

Entretanto, usando a relação entre as coordenadas, podemos encontrar também uma relação entre as formas:

$$\Omega_2 = x^{n-3} \Omega_1. \quad (9.12)$$

Podemos analisar a equação acima e ver que, para o valor de $n = 3$, temos que a 1-forma é bem definida na região de intersecção que estamos considerando; podemos ficar repetindo esse procedimento indefinidamente e continuar encontrando esse resultado. Assim, essa forma não se anula em nenhum ponto da variedade, fazendo com que essa variedade seja do tipo Calabi-Yau.

Exemplo 2. Superfícies K3.

Neste exemplo, vamos construir uma superfície K3, uma variedade de Calabi-Yau de quatro dimensões. Para isso, vamos construir um polinômio no espaço $\mathbb{C}P^3$. Vamos escolher $z_1^4, z_2^4, z_3^4, z_4^4 \in \mathbb{C}^4$ como nossas coordenadas homogêneas:

$$P(z) = z_1^4 + z_2^4 + z_3^4 + z_4^4. \quad (9.13)$$

Podemos, como no exemplo anterior, fazer $P(z) = 0$ e obter uma superfície. Definindo também nossas coordenadas inhomogêneas como

$$x = \frac{z_2}{z_1}, \quad (9.14)$$

$$y = \frac{z_3}{z_1}, \quad (9.15)$$

$$z = \frac{z_4}{z_1}, \quad (9.16)$$

podemos reescrever nosso polinômio como

$$P(x, y, z) = z_1^4(x^4 + y^4 + z^4 + 1), \quad (9.17)$$

e fazer $P(x, y, z) = 0$ para obter a superfície em termos dessas novas coordenadas. Podemos também definir nossa forma diferencial – nesse caso, uma 2-forma – da seguinte maneira:

$$\Omega_1 = \frac{dx \wedge dy}{\partial p / \partial z}. \quad (9.18)$$

Como no primeiro exemplo, para evitar as singularidades se $\partial p / \partial z = 0$, usamos o fato de $dp = 0$ para reescrever a expressão da nossa forma:

$$dp = \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz = 0, \quad (9.19)$$

$$\rightarrow \frac{\partial p}{\partial x} dx \wedge dy = -\frac{\partial p}{\partial z} dz \wedge dy, \quad (9.20)$$

$$\rightarrow \Omega_1 = \frac{dy \wedge dz}{\partial p / \partial x} = \frac{dz \wedge dx}{\partial p / \partial y}. \quad (9.21)$$

Novamente, para o caso em que $dp \neq 0$, temos que a forma não se anula em nenhum ponto da variedade, de modo que essa variedade também é do tipo Calabi-Yau.

Parte IV

Conclusão

Neste trabalho, estudamos o aspecto matemático introdutório de uma das teorias mais importantes da física teórica, a teoria de supercordas. Fizemos uma introdução acerca da necessidade de se estudar essa matemática, percebendo a importância desses tópicos não apenas no estudo de teorias quânticas de gravitação, mas também em outras áreas de atuação da física matemática. Construimos a base para o estudo de variedades de Calabi-Yau, o que motiva futuros trabalhos em Física Teórica, como aprofundar a aplicação dessas variedades em teoria de supercordas. Este trabalho, ao ser disponibilizado para os demais estudantes de graduação em Física, também servirá de motivação para o estudo dos aspectos matemáticos dessa teoria.

Parte V

Bibliografia

Referências

- [1] D. Arapura. Introduction to Differential Forms, 2016.
- [2] G. B. Arfken and H. J. Weber. Mathematical Methods for Physicists, 1999.
- [3] K. Becker, M. Becker, and J. H. Schwarz. *String Theory and M-theory: A modern introduction*. Cambridge university press, 2006.
- [4] R. Blumenhagen, D. Lüüst, and S. Theisen. *Basic concepts of String Theory*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [5] P. Candelas. Lectures on Complex Manifolds. In *Superstrings and grand unification*. 1988.
- [6] P. Candelas, C. Xenia, P. S. Green, and L. Parkes. A pair of calabi-yau manifolds as an exactly soluble superconformal theory. *Nuclear Physics B*, 359(1):21–74, 1991.
- [7] M. P. d. Carmo. Geometria Riemanniana. Technical report, 1988.
- [8] K. Dullemond and K. Peeters. Introduction to Tensor Calculus. *Kees Dullemond and Kasper Peeters*, pages 42–44, 1991.
- [9] T. Eguchi, P. B. Gilkey, and A. J. Hanson. Gravitation, gauge theories and differential geometry. *Physics reports*, 66(6):213–393, 1980.
- [10] B. Grenc. String Theory on Calabi-Yau Manifolds. *arXiv preprint hep-th/9702155*, 1997.
- [11] V. Guillemin and P. Haine. *Differential Forms*. World Scientific, 2019.
- [12] E. Malek. Complex Geometry and Calabi-Yau Manifolds, 2015. Lecture notes.
- [13] A. Moroianu. *Lectures on Kähler Geometry*, volume 69. Cambridge University Press, 2007.
- [14] S. Roan. Algebraic Geometry and physics. In *Proceedings Of The Third Asian Mathematical Conference 2000*, pages 455–482. World Scientific, 2002.
- [15] M. Seifert. Calabi-Yau Compactification, 2004.
- [16] D. B. Westra. Calabi–Yau Manifolds for dummies. *Deutsches Referenzkorpus preprint ID 16424478*, 2008.
- [17] B. Zwiebach. *A first course in String Theory*. Cambridge university press, 2004.

Parte VI

Apêndice

A. Teorema de Stokes

O teorema de Stokes relaciona a derivada exterior e a integração, mostrando que uma operação é inversa à outra. A forma generalizada do teorema é bastante compacta e está relacionada com o formalismo de formas diferenciais que utilizamos neste trabalho.

Teorema A.1. *Seja X um volume com fronteira definido dentro de uma variedade orientável M de dimensão $(k + 1)$, tal que $M \subset \mathbb{R}^n$. Seja ∂X o bordo de X , orientada. Considere uma k -forma definida em uma vizinhança de X . Então,*

$$\int_{\partial} \Phi = \int_X d\Phi. \quad (9.22)$$

B. Hodge \star

Definição B.1. Hodge \star . *O operador Hodge estrela é um mapa que leva de uma p -forma para uma $n - p$ -forma, conforme a seguinte regra:*

$$\star : C^\infty(\Lambda^p) \rightarrow C^\infty(\Lambda^{n-p}). \quad (9.23)$$

O operador Hodge estrela atua da seguinte forma nos elementos de base das formas diferenciais:

$$\star(dx^{m_1} \wedge \dots \wedge dx^{m_p}) = \frac{1}{(n-p)!} g^{\frac{1}{2}} g^{m_1 k_1} \dots g^{m_p k_p} \epsilon_{k_1 \dots k_p k_{p+1} \dots k_n} dx^{k_{p+1}} \wedge \dots \wedge dx^{k_n} \quad (9.24)$$

Considerando variedades reais, podemos definir o produto interno (no espaço das formas diferenciais reais) com o advento do operador Hodge \star . Consideremos duas formas α_p e β_p . O produto interno entre essas duas formas diferenciais é dado por:

$$(\alpha_p, \beta_p) = \int \alpha_p \wedge \star \beta_p. \quad (9.25)$$

Com isto, podemos também definir d^\dagger . O operador derivada exterior adjunto é dado por:

$$d^\dagger : C^\infty(\Lambda^p) \rightarrow C^\infty(\Lambda^{p-1}), \quad (9.26)$$

tal que

$$(\alpha_p, d\beta_{p-1}) = (d^\dagger \alpha_p, \beta_{p-1}), \quad (9.27)$$

onde usamos a propriedade de simetria do produto interno [5]. Integrando 9.27 por partes e usando o Teorema de Stokes (considerando que a variedade que delimita o volume de integração é compacta e tem bordo nulo), obtemos:

$$d^\dagger = (-1)^{p(n-p+1)} \star d \star = \begin{cases} \star d \star, & \text{para } n \text{ par,} \\ (-1)^p \star d \star, & \text{para } n \text{ ímpar} \end{cases} \quad (9.28)$$

C. Operador Hodge-deRham

O operador Hodge-deRham generaliza o conceito de laplaciano para formas diferenciais ¹³. Matematicamente, definimos:

$$\Delta : C^\infty(\Lambda^p) \rightarrow C^\infty(\Lambda^p), \quad (9.29)$$

onde

$$\Delta = dd^\dagger + d^\dagger d. \quad (9.30)$$

E, analogamente às funções harmônicas, temos que p-formas são harmônicas quando são anuladas pelo operador de Hodge-deRham.

D. Cohomologia em variedades complexas e em variedades de Kähler

Cohomologia de Dolbeault

Em variedades complexas, podemos definir operadores do tipo ∂ e $\bar{\partial}$. Podemos definir cohomologias para cada um desses operadores. Começamos pela seguinte definição:

Definição D.1. *Seja (M, J, g) uma variedade complexa com uma métrica hermitiana g . Definimos $(,)_{p,q}$ como o produto interno de p, q -formas,*

$$(,)_{p,q} : \Omega^{p,q}(M) \otimes \Omega^{p,q}(M) \rightarrow \mathbb{C}, \quad (9.31)$$

tal que, $\forall \alpha, \beta \in \Omega^{p,q}(M)$,

$$(\alpha, \beta)_{p,q} = \int_M \alpha \wedge \star \bar{\beta}. \quad (9.32)$$

Teorema D.2. *O produto interno $(,)_{p,q}$ satisfaz à seguinte equação:*

$$(\alpha, \alpha)_{p,q} \geq 0, \quad (9.33)$$

$\forall \alpha \in \Omega^{p,q}(M)$, tal que $(\alpha, \alpha)_{p,q} = 0$ se e somente se $\alpha = 0$.

Definição D.3. *O operador adjunto $\bar{\partial}^\dagger : \Omega^{p,q}(M) \rightarrow \Omega^{p,q-1}(M)$ é definido pela seguinte equação:*

$$(\alpha, \bar{\partial}^\dagger \beta)_{p,q} = (\bar{\partial}^\dagger \alpha, \beta)_{p,q}, \quad (9.34)$$

¹³É importante ter em mente que esse operador não é exatamente igual ao laplaciano covariante do qual temos contato em cálculo de muitas variáveis

$\forall \alpha \in \Omega^{p,q}(\mathcal{M})$ e $\beta \in \Omega^{p,q-1}(\mathcal{M})$.

Usando o fato de que, para qualquer p, q -forma, com $\alpha \in \Omega^{p,q}(\mathcal{M})$, $\bar{\partial}(\alpha \wedge \beta) = \bar{\partial}\alpha \wedge \beta + (-1)^{p+q}\alpha \wedge \bar{\partial}\beta$, podemos escrever o operador adjunto $\bar{\partial}^\dagger$ como:

$$\bar{\partial}^\dagger = - * \bar{\partial} * . \quad (9.35)$$

Podemos, a partir disso, introduzir o operador de Hodge em termos do operador adjunto. Seja

$$\Delta_{\bar{\partial}} : \Omega^{p,q}(\mathcal{M}) \rightarrow \Omega^{p,q}(\mathcal{M}). \quad (9.36)$$

O operador de Hodge-deRham é dado por:

$$\Delta_{\bar{\partial}} = \bar{\partial}\bar{\partial}^\dagger + \bar{\partial}^\dagger\bar{\partial}. \quad (9.37)$$

Agora, iremos introduzir algumas notações que vão nos ajudar a identificar as formas e os grupos de cohomologia em termos do operador adjunto.

Definição D.4.

- (i) $Z_{\bar{\partial}}^{p,q}(\bar{Z}_{\bar{\partial}}^{p,q})$ é o espaço das p, q -formas fechadas em relação a $\bar{\partial}$;
- (ii) $B_{\bar{\partial}}^{p,q}(\bar{B}_{\bar{\partial}}^{p,q})$ é o espaço das p, q -formas exatas em relação a $\bar{\partial}$;
- (iii) $H_{\bar{\partial}}^{p,q} = Z_{\bar{\partial}}^{p,q}/B_{\bar{\partial}}^{p,q}$ é o p, q -ésimo grupo de cohomologia em relação a $\bar{\partial}$
- (iv) $\mathcal{H}_{\bar{\partial}}^{p,q}$ é o espaço das p, q -formas harmônicas em relação a $\Delta_{\bar{\partial}}$.

Teorema D.5. Qualquer p, q -forma w pode ser escrita como

$$w = \alpha + \bar{\partial}\beta + \bar{\partial}^\dagger\gamma, \quad (9.38)$$

tal que $\alpha \in \mathcal{H}_{\bar{\partial}}^{p,q}$. Portanto, podemos escrever

$$H_{\bar{\partial}}^{p,q} = \mathcal{H}_{\bar{\partial}}^{p,q} \oplus B_{\bar{\partial}}^{p,q} \oplus \bar{B}_{\bar{\partial}}^{p,q}. \quad (9.39)$$

Um ponto importante para se ressaltar é que, em geral, para variedades complexas, as classes de cohomologia de Dolbeault e de deRham são distintas. Contudo, para variedades de Kähler, essas cohomologias são equivalentes. Isto é explicitado no teorema a seguir.

Teorema D.6. Para uma variedade de Kähler, temos a seguinte equivalência entre os operadores laplacianos:

$$\Delta = 2\Delta_{\bar{\partial}} = 2\Delta_{\partial}. \quad (9.40)$$

Definição D.7. Números de Hodge. Os números de Hodge $h^{p,q}$ são a dimensão do p, q -ésimo grupo de cohomologia, i.e.,

$$h^{p,q} = \dim H_{\bar{\partial}}^{p,q}. \quad (9.41)$$

Podemos relacionar os números de Hodge com os números de Betti (como definidos no capítulo 3.2), decompondo os grupos de cohomologia de deRham em termos dos grupos de cohomologia de Dolbeault, encontrando a seguinte equação:

$$b^k = \sum_{j=0}^k h^{j,k-j}. \quad (9.42)$$

Em particular, numa variedade complexa $2n$ -dimensional, os números de Hodge satisfazem às seguintes identidades:

$$h^{j,k} = h^{k,j}, \quad (9.43)$$

$$h^{j,k} = h^{n-j,n-k}. \quad (9.44)$$

A primeira identidade se origina do fato de que o complexo conjugado de uma (p, q) -forma (harmônica) ser uma (q, p) -forma (harmônica). Já a segunda identidade deriva diretamente da dualidade de Hodge (ou simplesmente aplicando o operador Hodge \star).

Esses números de Hodge foram o que chamamos de diamante de Hodge¹⁴. Por exemplo, para uma variedade complexa $2n$ -dimensional, o diamante de Hodge é dado por:

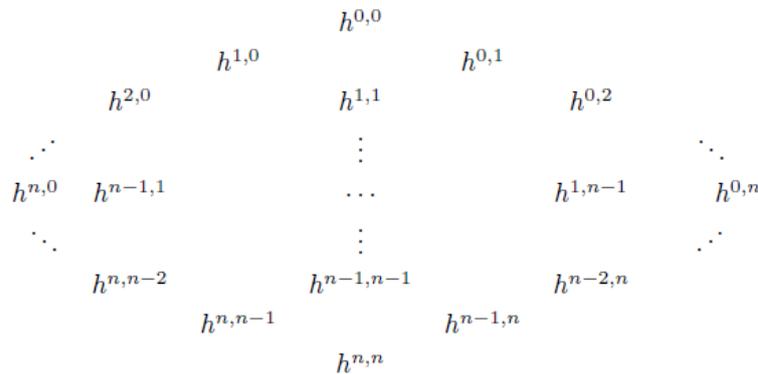


Figura 5: Diamante de Hodge [12].

As identidades (10.21) e (10.22) impõem sobre o diamante de Hodge alguns *vínculos*, de modo que nem todos os elementos que o formam são independentes. Por exemplo, para uma variedade complexa de dimensão 1, o diamante de Hodge possui apenas dois números de Hodge independentes ($h^{0,0}, h^{1,0}$). Já para uma variedade complexa com 2 dimensões, apenas quatro desses números são independentes ($h^{0,0}, h^{1,0}, h^{1,1}, h^{2,0}$).

O diamante de Hodge é responsável pelo que chamamos de *simetria de espelho*. Essa simetria é uma relação entre as variedades de Calabi-Yau. A dimensão da forma (p, q) $h^{p,q}$ (da variedade original) é traduzida na forma $h^{n-p,q}$. Pode ser mostrado que, para qualquer variedade de Calabi-Yau, o diamante de Hodge é invariante sob rotações de π radianos.

¹⁴Eu particularmente achei bastante assustador no começo, mas é só uma maneira muito útil de organizar esses números

Para diamantes de Hodge de variedades de Calabi-Yau com simetria de espelho, essa rotação invariante ocorre em $\frac{\pi}{2}$ [6].

Para variedades de Kähler, vamos adicionar mais alguns comentários acerca dos números de Hodge. Para isto, é importante fazer algumas considerações. Primeiro, deve-se notar que a forma de Kähler é harmônica. Isso vem diretamente da existência de uma $(1, 1)$ -forma globalmente definida na variedade e fechada, além do fato de que a conexão é compatível com a forma de Kähler. Como a forma de Kähler – denotamos por ω – é fechada, então temos que ela é harmônica. Assim, podemos definir a classe de Kähler, que é a classe de cohomologia de ω . A partir disso, enunciaremos mais dois teoremas, cujas provas seguem diretamente dessas considerações e podem ser encontradas em [12].

Teorema D.8. *Numa variedade de Kähler compacta e fechada,*

$$h^{k,k} > 0, \quad \forall \quad 0 \leq k \leq n. \quad (9.45)$$

Assim,

$$b^{2k} > 0, \quad \forall \quad 0 \leq k \leq n. \quad (9.46)$$

Teorema D.9. *Numa variedade de Kähler, todos os números ímpares de Betti, dados por*

$$b^{2k-1}, \quad \forall \quad 0 \leq 2k-1 \leq n, \quad (9.47)$$

são pares.