Universidade de Brasília

Instituto de Física

Trabalho de Conclusão de Curso

Modelo da Dinâmica de um Mercado de Ações por Processos Estocásticos

Juliana dos Santos da Rosa

Orientador: Leonardo Luiz e Castro

Coorientador: Henrique Alves de Lima

Modelo da Dinâmica de um Mercado de Ações por Processos Estocásticos

Por

Juliana dos Santos da Rosa

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Instituto de Física da Universidade de Brasília como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Bacharel em Física.

Aprovado por:

Leonardo Luiz e Castro (Orientador)

Instituto de Física - Universidade de Brasília

Henrique Alves de Lima (Coorientador)

Instituto de Física - Universidade de Brasília

Aleksandr Nikolaievich Pinzul

Instituto de Física - Universidade de Brasília

Fábio Luís de Oliveira Paula

Instituto de Física - Universidade de Brasília

Brasília, abril de 2021.

"Life isn't about waiting for the storm to pass; it's about learning to dance in the rain. It's about removing the fear in this area of your life so you can focus on what matters most."

Anthony Robbins

If you want to make the world a better place, take a look at yourself, and make a change."

Michael Jackson

Agradecimentos

Acredito que essa seja a parte mais difícil de escrever de todo o projeto. Quando penso em agradecimento um filme se passa em minha cabeça. Vejo desde o início da minha jornada dentro do curso de Física até o momento do dia de hoje, muita coisa se passou, muitas pessoas fizeram parte dessa história. Quando olho para trás vejo que para eu chegar aqui foi preciso antes de tudo paciência, força, consistência e perseverança. Foi preciso não deixar os problemas que surgiram tomarem conta, foi preciso saber administrar tudo a minha volta e compreender que a vida é um dia de cada vez.

A minha família foi ponto fundamental, sem ela eu nem de longe teria começado esse curso. Foi ela que me apoiou desde o começo, foi ela que me incentivou a não desistir do que eu acredito e seguir os meus sonhos quaisquer que sejam eles. Em nenhum momento minha mãe e meu pai me deixaram cair, eles fizeram de tudo, até o impossível para eu sempre poder ser mais do que posso ser. Eles são a minha base, a minha estrutura para seguir o meu caminho. Sem eles eu não seria ninguém, eles são meu tudo!

Meus amigos viram de perto o quanto a Física me mudou, eles viram coisas boas e coisas ruins serem arrancadas de mim e no meio disso tudo nada os assustou. Eles sempre estiverem presente no pior do pior e no melhor do melhor, eles nunca desistiram de mim como eu o fiz algumas vezes, eles secaram choro, eles cessaram desespero, eles foram paz em meio ao caos. Muitos nomes merecem constar aqui, porque por mais que a Física não tenha sido minha melhor experiência, ela me cercou de muitas pessoas que eu jamais vou esquecer, pessoas que são suporte, pessoas para a vida.

Todas essas pessoas são meus super-heróis! Sem eles posso dizer com toda certeza que eu não teria tido forças para chegar aqui. E com eles aprendi como seguir em frente para onde quer que eu vá. Agradeço a cada um que fez parte dessa insana loucura. Agradeço aos meus pais, meu irmão, minha cunhada, Tito, Elisa, Ju, Larissa, Lorena, Marcos, Henrique, Vitor, Felipe, Ranier, Moises, Tabata, Pedro, Vava, Brandow, Alisson, Cat, Hanani, Vitor Veil, Lele, Maisa, Karina. Espero não ter esquecido o nome de nenhum dos meus heróis, todos foram importantes, cada um a sua maneira.

Agradeço a oportunidade fornecida pela Universidade de Brasília juntamente à meu orientador Leonardo e aos professores que mais me marcaram nesses 5 anos: Aleksandr Pinzul, Olavo Leopoldino, Ivan Soares e Júnio Rosa.

Deixo aqui o meu obrigada! É hora de dar tchau. Mas antes preciso deixar um breve agradecimento para mim mesma, porque encarar tudo como eu encarei e jamais baixar a cabeça para a injustiça não é para poucos. Hoje sou melhor do que fui graças a tudo que aprendi nessa batalha. Agora sim, tchau.

Resumo

Este estudo investigou a dinâmica das interações de um mercado financeiro por meio de processos estocásticos. Processos estes que foram focados no Movimento Browniano Geométrico, ou seja, um processo estocástico de Markov com o tempo e a variável aleatória contínuos. Foi levado em consideração o lema de Itô bem como duas aplicações (Distribuição de Renda e Mercado Financeiro com Bolhas Especulativas) que trouxeram maior visibilidade para o tema do projeto e também justificativas de algumas indagações.

As análises se deram por meio da criação de 3 programas em Python onde um deles simula um mercado financeiro utilizando o MBG e trouxe em si a interação de agentes realizando compra e venda de ativos no mercado financeiro; o outro é uma distribuição de Boltzmann-Gibbs simples e o outro uma distribuição de renda que utiliza de base o BG. Antes de qualquer simulação foi feito um embasamento teórico para caracterizar a estrutura matemática, conceitos físicos e econômicos e possíveis modelagens por detrás do tema.

Por fim, é apresentada a investigação de três problemáticas onde foi descoberto que o MBG aqui não permitiu a conservação de dinheiro quando pensamos no sistema de compra e vende de ativos, algo que difere quando não possuímos esse mercado (Distribuição de Renda) na interação; e um mercado de bolhas dentro do mercado descrito sem a consideração da memória de longo prazo pedida pelas bolhas.

Palavras-chave: Processos Estocásticos, Markov, MGB, Bolhas Econômicas, Crash, Renda

Abstract

This project investigated the dynamics of financial market through stochastic processes. These processes were focused on the geometric Brownian motion (GBM), i.e, Markov's stochastic process with continuous time and random variable. The Itô formula was taken into account as well as two applications (Income Distribution and Financial Market with Speculative Bubbles) that brought greater visibility to the theme of the project and also justified some questions.

The analysis took place through the creation of three programs in Python language where one simulates a financial market using GBM and brought with it the interaction of agents making purchases and sales of assets in the financial market, the other is a simple Boltzmann-Gibbs (BG) distribution and the final one is an income distribution based on BG. Before any simulation, a theorical basis was made to characterize the mathematical structure, physical and economic concepts and possible model behind the theme.

Finally, the investigation of three problems is presented where it was discovered that the GBM here did not allow the conservation of money when we think about the purchase and sale of assets system, something that differs when we do not have this market (Income Distribution) in the interaction; and a bubble market within the market described without considering the longer-time memory requested by the bubbles.

Keywords: Stochastic Processes, Markov, GBM, Speculative Bubbles, Crash, Income

SUMÁRIO

1 Introdução **10**

2 Revisão Bibliográfica **14**

2.1 Breve compreensão da Teoria da Probabilidade 15

2.2 Processos Estocásticos 18

2.3 Processo de Markov 19

2.4 Movimento Browniano 20

2.5 Movimento Browniano Geométrico 21

2.6 Bolhas Econômicas 27

2.7 Distribuição de Renda 30

3 Simulações do Mercado Financeiro e suas logísticas **36**

3.1 Problema 1 - Mercado Financeiro - Movimento Browniano Geométrico 37

3.2 Problema 2 - Bolhas Econômicas - Lei de Potência Log-Periódica 43

3.3 Problema 3 - Distribuição de Renda 45

4 Resultados **49**

4.1 Mercado Financeiro por Processos Estocásticos 49

4.2 Bolhas Econômicas em um Mercado Estocásticos 58

4.3 Distribuição de Renda 60

5 Conclusões **65**

Bibliografia **67**

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

A primeira imagem que se tem ao falar de mercado financeiro é simplesmente Wall Street, a rua de Manhattan que todo especulador deseja ir um dia lucrar. Essa é a ideia que se tem quando o assunto é finanças, bolsa de valores, investimentos, entretanto essa área não é esse conto de fadas todo. Estamos falando de um assunto extremamente complexo que demanda pesquisadores de áreas como física, matemática, economia, biologia, química [...] para ser compreendido.

Por possuir tal profundidade essa temática deu origem a áreas como a Econofísica, uma área que utiliza de modelagens com embasamento físico teórico e prático para tratar conceitos e estruturas dentro das finanças que antes não eram tão bem modelados e se quer compreendidos. Isso se torna possível em decorrência da similaridade do comportamento do mercado financeiro, p.ex., com características presentes na natureza. A física estatística é uma grande referência de onde se retira conceitos, técnicas e modelos para descrever e entender as dinâmicas desse sistema (mercado).

O assunto é tão antigo que pode-se datar de meados do século XVIII apesar de muitos acharem que a mescla da Física com a Economia é recente. O termo Econofísica é novo e não a aplicação deste. Se formos olhar para trás Adam Smith já se inspirava no trabalho *Princípia* de Isaac Newton para escrever a obra *Sobre a Riqueza das Nações*, onde utilizava o princípio de forças causais para conceituar a dinâmica de um sistema econômico análogo à física newtoniana. Alfred Marshall juntamente com Francis Edgeworth, em 1880, já traçavam por meio da termodinâmica dos gases de Maxwell e Boltzmann o conceito físico de equilíbrio na Economia. Louis Bachelier, em 1900, com a *Teoria da Especulação* utilizava do movimento Browniano para explicar o comportamento dos preços no mercado financeiro especulativo da bolsa de Paris.

Muito já foi descoberto, entretanto ainda existe uma busca incessante para explicar a dinâmica do mercado financeiro a fim de se conseguir prever seu comportamento e obviamente lucrar em cima disso (estamos falando de bilhões de dólares). O presente projeto não foge desse padrão e traz como ferramenta base os processos estocásticos por se tratar de uma matemática que trabalha em cima de probabilidade e predição, algo que tem tudo a ver com a busca mundial.

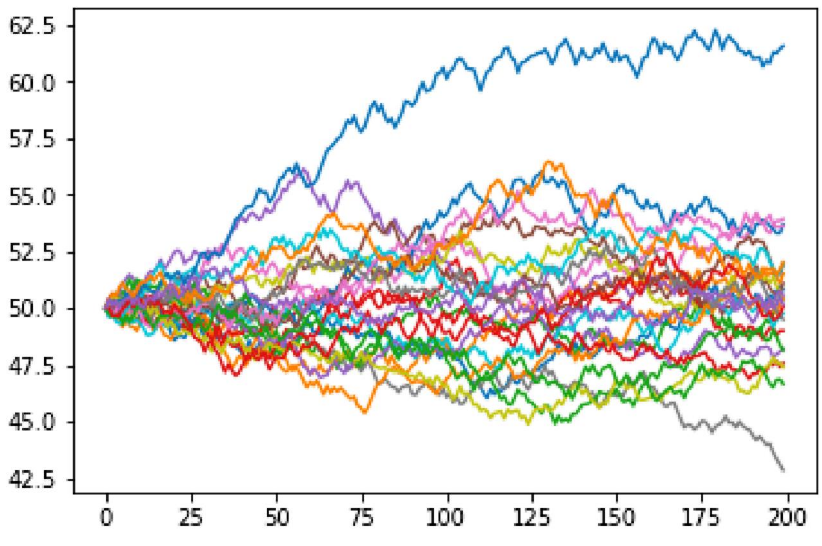

Figura 1.1: Mercados financeiros - MGB

Black, um dos autores do modelo Black-Scholes, introduz bem isso dizendo que o mercado financeiro não passa de puro ruído. Este declara que a maioria dos traders são “traders ruidosos” e portanto fornecem a liquidez. Em outras palavras, um mercado eficiente não oferece base para ganhos sistemáticos, no ruído é onde acontece as negociações que lucram. Graficamente podemos imaginar esse ruído como oscilações aleatórias da função no tempo, os famosos altos e baixos que parecem imprevisíveis em decorrência do seu movimento desordenado e praticamente caótico. [1]

Fato este que abre portas para análises utilizando-se modelos estocásticos como o de Markov, o Browniano, o Browniano Geométrico, o *random walk*, entre outros. O último inclusive pode capturar a dinâmica do mercado em grande escala, como mudanças na Média Industrial Dow Jones; para menores escalas (nível comercial) os pesquisadores já construíram um modelo microscópico usando dados sobre comerciantes individuais e mostraram que ele poderia ser usado para desenvolver uma teoria macro de alta precisão na leitura de distribuições de preços e outros indicadores de mercado. [2]

Especificar esse mercado não retira a possibilidade de trabalhar com um sistema estocástico. Bolhas Especulativas são um exemplo e de certa forma bem rentável dado o seu funcionamento. Um mercado de Bolhas Especulativas, bolhas econômicas ou, simplesmente, bolhas financeiras são ditas como sendo um período de crescimento muito rápido do preço de um ativo (boom econômico), tão rápido que não se pode fazer um ajuste exponencial, para ele é necessário um ajuste pela lei de potência log-periódica. Apesar do *boom* o preço não crescerá para sempre, pois o mercado não suportará esse aumento acelerado por muito tempo e logo ocorre o que chamamos de "crash"ou "estouro da bolha"(recessão da bolha)[3], ou ainda "ponto de grande faturamento na operação".

Uma curiosidade que nem todo sabe é que renda também pode ser estudada por meio da estocasticidade e a equação que gera a distribuição desta pode ser reduzida a lei de Boltzmann-Gibbs. A diferença aqui é que quando se fala de renda estamos tratando de um sistema que se retira o mercado financeiro, existe uma ideia de não interação par a par entre os agentes envolvidos na análise apesar disso diferir a priori do que se tem na lei de Boltzmann-Gibbs.

As crises mostram que a economia (e tudo que engloba ela) não é tão simples quanto se imagina. Vários fatores são motivos para a alteração de dinâmica; a interação social e o comportamento humano, p.ex., dão uma maior complexidade a sua análise lógica feita por estudiosos da área.[3]. O presente projeto tem então por meta compreender a dinâmica desses sistemas estocásticos dentro de problemáticas de bolhas, distribuição renda e de um mercado feito pelo Movimento Browniano Geométrico

CAPÍTULO 2

REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Neste capítulo será mostrado de forma sequencial a fundamentação teórica acerca do estudo realizado pensando na melhor didática de compreensão deste. Utilizamos de uma estratégia metódica e fragmentada para a aprendizagem.

O projeto visa compreender três problemas, segue abaixo a divisão da revisão bibliográfica para eles:

- Problema 1 (mercado financeiro): Teoria da Probabilidade, Processo Estocástico, Processo de Markov e Movimento Browniano Geométrico.

- Problema 2 (mercado financeiro com bolhas econômicas): todos os itens do problema 1 mais o estudo da função Log-Periódica que gera a bolha.

- Problema 3 (Distribuição de Renda): distribuição de Boltzmann-Gibbs.

A Econofísica apresenta em sua estrutura modelagens fisico-matemáticas, para tanto é fundamental a compreensão de equações, teoremas e fundamentos vindos dessas duas áreas

(Física e Matemática) para que informações não sejam perdidas e o estudo possua maior embasamento em suas análises econômicas.

2.1 Breve compreensão da Teoria da Probabilidade

"As questões mais importantes da vida são, em grande parte, nada mais do que problemas de probabilidade[...] A Teoria da Probabilidade nada mais é do que o cálculo do bom senso." -Pierre-Simon Laplace, 1812, Théorie Analytique des Probabilités

Nesta seção vamos introduzir de forma direta a ideia de espaço de probabilidade, variáveis aleatórias e funções de distribuição de probabilidade para que os conceitos estejam claros posteriormente quando forem mencionados.

Espaço de Probabilidade

A teoria da probabilidade pode ser formalizada com base em três axiomas para uma função real p sobre o conjunto Ω de possíveis $outcomes$ A de um experimento envolvendo aleatoriedade. Seguindo Kolmogorov, temos:

1. Não negatividade: $p(A) \geq 0$
2. Normalização: $p(\Omega) = 1$
3. Aditividade: $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$ quando $A \cap B = \emptyset$

Essas bases estão partindo do pré-suposto de que probabilidades são como medidas em algum espaço amostral.

Definição 1 *O espaço amostral é um espaço de probabilidade, ou seja, um espaço de medida (uma terna)* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *formada por um conjunto* Ω*, uma* σ*-álgebra* $\mathcal{F}$ *de subconjuntos de* Ω *e uma medida* $\mathbb{P}$ *em* $\mathcal{F}$*. Um evento é um conjunto* $A \in \mathcal{F}$ *e a probabilidade para este evento é a medida* $\mathbb{P}(A)$*. A medida tem a propriedade:* $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

A família $\mathcal{F}$ possui a estrutura σ-álgebra. E esta segue algumas propriedades:

1. $\Omega \in \mathcal{F}$, e $\emptyset \in \mathcal{F}$
2. Se $A \in \mathcal{F}$, o complemento de A, ou seja, A^c também pertence a $\mathcal{F}$
3. Se $A, B \in \mathcal{F}$, então $A \cap B \in \mathcal{F}$
4. Se $A_i \in \mathcal{F}, i = 1, 2, ...$, então $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$; se além disso $Ai \cap A_j = \emptyset$ para $i \neq j$, então $\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)$ = $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$

Variáveis Aleatórias

Definição 2 *Dado um espaço de probabilidade* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *uma variável aleatória é uma função real X*

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$

$$\omega \mapsto X(\omega)$$

satisfazendo para todo $x \in \mathbb{R}$

$$[X < x] = \{\omega \in \Omega : X(\omega) < x\} \in \mathcal{F}$$

Ou seja, para uma variável aleatória X, cada um dos conjuntos $[X < x]$, $x \in \mathbb{R}$, pertence a σ-álgebra, $\mathcal{F}$ de Ω.

A variável aleatória também pode ser definida através dos ternos dos borelianos de $\mathbb{R}$:

Definição 3 *Denote por $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ a menor σ-álgebra gerada pelos intervalos da reta, a chamamos de σ-álgebra de Borel em $\mathbb{R}$. Uma função $X : \Omega \to \mathbb{R}$ é uma variável aleatória se, somente se, para todo $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ temos $X^{-1}(A) \in \mathcal{F}$.*

Assim, podemos falar da probabilidade de uma variável aleatória X aceitar um valor menor que x:

$$\mathbb{P}_X[A] = \mathbb{P}[\omega \in \Omega / X(\omega) \in A] \quad \forall A \in \mathcal{F}$$

Função de Distribuição

Definição 4 *Uma variável aleatória X em um espaço de probabilidades $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ a função de distribuição, $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$ de X,é dada por:*

$$F_X(x) = \mathbb{P}[X \leq x] \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

A função de distribuição possui algumas propriedades, tais quais:

1. $0 \leq F(x) \leq 1$, $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$ e $\lim\limits_{x \to \infty} F(x) = 1$
2. F é não decrescente
3. F é uma função contínua (pela esquerda e direita)

A função distribuição de uma variável aleatória é fundamental para compreender o comportamento desta e por ventura trazer sua interpretação dentro dos processos estocásticos.

2.2 Processos Estocásticos

A palavra *ESTOCÁSTICO* significa algo capaz de estimar, de conjecturar. [4] A partir disso é fácil pensar que um processo estocástico é um sistema dinâmico que evolui probabilisticamente no tempo enquanto sofre flutuações[5]. Uma definição formal seria dizer que :

Definição 5 *Um processo estocástico é uma coleção de variáveis aleatórias*

$$\{X_t\}_{t\in T} \tag{2.1}$$

definido em um espaço probabilístico ($\Omega, \mathcal{F}, P$) e parametrizado pela variável t. Onde Ω é o conjunto de todas as possibilidades elementares de "outcomes"ω (resultados);$\mathcal{F}$ é uma família de subconjuntos de Ω; e P é uma medida de probabilidade.

Iremos pensar em *t* como sendo o tempo, de modo que X_t é dita trajetória do processo estocástico, como por exemplo a posição de uma partícula browniana em *t*[6]. Ou seja, a coleção de variáveis aleatórias é utilizada para estudar a evolução de sistemas/fenômenos ao longo do tempo onde tem-se inúmeras trajetórias possíveis para a evolução. Diferentemente do que aconteceria se o sistema fosse descrito por meio de equações determinísticas.

Os processo de Poisson, de Markov e o "random walk"são exemplos famosos de processos estocásticos, onde o primeiro possui tempo contínuo; o segundo, tempo contínuo ou discreto; e o último, tempo discreto. Aqui trataremos apenas do caso de tempo contínuo, visto que nosso objetivo é chegar na equação do Movimento Browniano Geométrico (MBG), a equação que gera o mercado financeiro tratado neste projeto, que é um processo de Markov.

No fim, tudo que interessa para nós é a descrição do processo que ocorre no MBG por meio da especificação da sua dinâmica (dada por uma equação diferencial estocástica, EDE) e das funções de distribuição de probabilidade das quais as variáveis aleatórias X_t são obtidas.

2.3 Processo de Markov

Somente o presente determina o futuro. Essa frase é a essência do que se trata o Processo de Markov. Neste o histórico de uma variável aleatória é irrelevante para prever o futuro e consequentemente para descrever sua distribuição de probabilidade, falamos que não há memória de longo prazo ("longer-time memory")[7].

Então, se considerarmos uma probabilidade condicional para um conjunto de eventos n e os tempos associados $t_1 < t_2 < ... < t_n$ tem-se[8]:

$$p_{1|n-1}(x_n, t_n | x_1, t_1; ...; x_{n-1}, t_{n-1}) = p_{1|1}(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1}). \tag{2.2}$$

Portanto, basta saber o estado real do sistema (x_{n-1}, t_{n-1}) para calcular a probabilidade de ocorrência de (x_n, t_n)[8]. Isso se torna mais compreensível quando percebemos que estamos falando de um processo que segue a equação de Chapman–Kolmogorov–Smoluchowski[9].

O processo de Markov implica em um mercado financeiro que não sofre com influências externas para moldar o preço de ações financeiras. Este preço não será influenciado por uma nova notícia global, por exemplo. Assim como facilita a observação do mercado, também o torna fraco por não incorporar informações de balanço ou informações privadas ou uma estrutura/dados antecessores para análise.

2.4 Movimento Browniano

O Movimento Browniano (MB) teve origem na biologia a partir da observação feita por Robert Brown do movimento intermitente de partículas orgânicas e inorgânicas colidindo entre si ao estarem suspensas em fluidos[10].

Este pode ser pensado em uma dimensão como um *random walk* após um número infinito de passos infinitesimais[6]. Durante a história muitos nomes foram importantes para construção da Teoria do Movimento Browniano como se conhece hoje[10].

A teoria completa foi obtida por Einstein em uma série de artigos, o primeiro deles foi de suma importância para a ciência dado que, pela primeira vez, o coeficiente de difusão foi encontrado em termos de outras variáveis macroscópicas, tais quais a viscosidade e a temperatura absoluta do líquido dispersante. E o mais relevante, encontrou a expressão que caracteriza o MB e por consequência a distribuição do mesmo, mas não qualquer distribuição, uma distribuição gaussiana.

Tais fatos juntamente com o desenvolvimento da teoria feita por Langevin, Wiener e Bachelier trouxeram que o MB não se restringe a biologia ou a física, este pode ser aplicado a qualquer sistema dotado de movimentos aleatórios cuja distribuição de probabilidades seja gaussiana, tornando possível trabalhar até mesmo com preços de ações e seu desenvolvimento temporal no mercado financeiro (pesquisa feita por Bachelier 5 anos antes de Einstein) como veremos ao utilizar o Movimento Browniano Geométrico neste projeto em questão[10].

Definição 6 *O Movimento Browniano padrão ou Processo de Wiener* $W(t), t \geq 0$ *é um processo estocástico de Markov com as seguintes propriedades [6]:*

1. *W(0)=0*
2. *Os incrementos W(t) - W(s) são estacionários e independentes*
3. *Para t > s, W(t) - W(s) tem uma distribuição normal* $\mathcal{N}(0, \sqrt{t-s})$
4. *Trajetórias continuas*
5. *Valor Esperado: E[W(t)]=0 e E[W(t)W(s)] = min(s,t).*
6. *Auto similaridade ("self-similarity")*

A distribuição de probabilidade Gaussiana fica na forma:

$$p_N(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right). \tag{2.3}$$

2.5 Movimento Browniano Geométrico

Até agora tratamos de conceitos e particularidades do que representaria o berço do Movimento Browniano Geométrico. Isso foi feito para que a compreensão do presente texto seja clara visto que estamos tratando de um sistema de abordagem físico-econômica. A partir de agora iremos começar a inserir interpretações dessa segunda área.

O Movimento Browniano Geométrico é de grande relevância para as finanças, principalmente quando se fala de bolsa de valores. Este é o responsável pela modelagem de preço de ativos, como por exemplo, preço de ações no modelo Black-Scholes e por consequência acaba propiciando uma forma de analisar o mercado para que ocorra a compra ou a venda de um ativo sem que seja necessário observar o passado desse ativo (diferente do que ocorre na análise gráfica, uma análise fundamentada no que aconteceu antes e/ou no aparecimento de padrões gráficos).

É relevante compreender que o MBG é de fato um processo estocástico, mas não qualquer um, este é um processo de Markov onde o tempo e a variável aleatória são contínuos. O que nos leva a pensar que ao olhar para um mercado financeiro desse tipo não observaremos saltos na função provenientes de eventos ou notícias do mundo (jornal). A função, ou melhor, a solução da equação diferencial estocástica não leva em conta o passado, apenas a última informação fornecida para a previsão do futuro (verifique a seção 2.4). Mas isso não quer dizer que este não sofre flutuações no tempo, inclusive essas vão ser dadas por um MB.

Equações Diferenciais Estocásticas (EDE)

Podemos dizer que as EDE's são como equações diferenciais que possuem a inclusão de efeitos aleatórios tal como a equação de Langevin[6]:

$$\frac{dv}{dt} = -\gamma v + \sigma \xi(t), \tag{2.4}$$

que neste caso está descrevendo um movimento Browniano de uma partícula em um líquido viscoso. Na física, a expressão

$$\xi(t) \equiv \frac{dW}{dt} \tag{2.5}$$

é chamada de ruído branco ou simplesmente uma rápida flutuação do sistema em virtude do MB. Um termo puramente matemático já que essa derivada não existe de verdade como um processo estocástico regular[6].

De forma geral, o Movimento Geométrico Browniano tem origem nas equações diferenciais estocásticas, mas não é tão básico resolvê-las e precisaremos de uma ferramenta chamada Fórmula de Itô para que isso aconteça.

Fórmula de Itô ou Lema de Itô

Considere um processo estocástico genérico expresso por uma EDE da forma:

$$dX = a(X,t)dt + b(X,t)dW, \tag{2.6}$$

onde a e b são função de X e t. Essa equação se trata de uma notação mais conveniente da equação integral estocástica que se segue:

$$X(t) = X(0) + \int_0^t a(X,t')dt' + \int_0^t b(X,t')dW(t'). \tag{2.7}$$

Dado isso, iremos supor a existência de um processo estocástico $Z(t)$. Onde:

$$Z(t) = F(X(t), t) \tag{2.8}$$

para uma função $F(x,t)$. Estamos em busca da dinâmica de $Z(t)$, ou seja, da EDE cujas soluções correspondem ao processo $Z(t)$, e portanto usaremos o Lema de Itô para encontrá-la posteriormente. Agora é necessário desenvolver o Lema de Itô. Considere a expansão genérica de Taylor em duas dimensões:

$$\begin{aligned} f_n(x,y) =& f(x_0,y_0) + (x-x_0)\frac{\partial f}{\partial x}_{x_0,y_0} + (y-y_0)\frac{\partial f}{\partial y}_{x_0,y_0} + \\ &+ \frac{1}{2!}\left((x-x_0)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}_{x_0,y_0} + (y-y_0)^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}_{x_0,y_0} + 2(y-y_0)(x-x_0)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}_{x_0,y_0}\right) + ... \end{aligned} \tag{2.9}$$

Usaremos esta aplicada à $F(X,t)$ que é a nossa função aqui:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial t}dt + \frac{\partial F}{\partial x}dX + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(dX)^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial t \partial x}dtdX + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}(dt)^2 + ... \tag{2.10}$$

Lembrando que $X(t)$ é nosso processo genérico descrito por:

$$dX = a(X,t)dt + b(X,t)dW. \tag{2.11}$$

O termo quadrático desse processo aparece na expansão de Taylor. Pode-se encontrá-lo apenas elevando ao quadrado ambos os lados da equação (2.11).

$$(dX)^2 = (a(X,t)dt)^2 + (b(X,t)dW)^2 + 2a(X,t)b(X,t)dtdW$$
$$(dX)^2 = b^2dt + O(dt^{3/2}). \tag{2.12}$$

Usamos a aproximação de que $(dW)^2 = dt$ para simplificar a expressão, portanto dW está na ordem de $\sqrt{t}$ (a verificação desse fato fica à cargo do leitor). Escreveremos apenas termos de ordem maior que dt. Segue que $dF(X,t)$ será:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2}b^2(X,t)\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + a(X,t)\frac{\partial F}{\partial x}dt + b(X,t)\frac{\partial F}{\partial x}dW \tag{2.13}$$

Finalmente, obtivemos a Fórmula de Itô que será utilizada para a obtenção da equação que descreve o Movimento Browniano Geométrico. Este é solução da EDE[6]:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dW. \tag{2.14}$$

onde S está sujeita a condição inicial (C.I) $S(t_0) = S_0$, e σ e μ são coeficientes. Note que μ irá representar a deriva e σ, a volatividade do ativo, ambos constantes nesse cenário. Anteriormente havíamos utilizado $Z(t) = F(X(t),t)$ e a partir disso iremos fazer uma troca de variáveis assumindo $Z = \ln S$. Assim a equação (2.13) toma a forma:

$$a = \mu S; \qquad b = \sigma S; \qquad F(S) = \ln S \tag{2.15}$$

$$dZ = \frac{\partial Z}{\partial t} + \frac{1}{2}(\sigma S)^2 \frac{\partial^2 Z}{\partial S^2} + (\mu S)\frac{\partial Z}{\partial S}dt + (\sigma S)\frac{\partial Z}{\partial S}dW \tag{2.16}$$

Vamos substituir apenas as variáveis Z das derivadas parciais por enquanto (por mera didática):

$$\begin{aligned} dZ &= \frac{\partial lnS}{\partial t} + \frac{1}{2}(\sigma S)^2 \frac{\partial^2 lnS}{\partial S^2} + (\mu S)\frac{\partial lnS}{\partial S}dt + (\sigma S)\frac{\partial lnS}{\partial S}dW \\ &= \frac{1}{2}(\sigma S)^2 \frac{-1}{S^2} + (\mu S)\frac{1}{S}dt + (\sigma S)\frac{\partial lnS}{\partial S}dW \\ &= \mu - \frac{1}{2}\sigma^2 dt + \sigma dW \end{aligned} \tag{2.17}$$

Aplicando a C.I. e $Z = \ln S$ nos demais termos:

$$Z(t) - Z(t_0) = \mu - \frac{1}{2}\sigma^2 t - t_0 + \sigma W(t) - W(t_0) \tag{2.18}$$

$$\ln S(t) - \ln S(t_0) = \mu - \frac{1}{2}\sigma^2 t - t_0 + \sigma W(t) - W(t_0) \tag{2.19}$$

Logo, exponenciando a equação acima:

$$S(t) = S_0 \cdot \exp \mu - \frac{1}{2}\sigma^2 t - t_0 + \sigma W(t) - W(t_0) \tag{2.20}$$

obtemos a famosa equação do Movimento Browniano Geométrico ou a equação que irá descrever o comportamento do mercado nesse projeto! E a partir da nova $Z(t)$ (equação 2.18) podemos inferir a distribuição fornecida pela dinâmica do processo apresentado[6]:

$$p(S,t;S_0,t_0) = \frac{1}{\sqrt{2\sigma^2\tau S}} \cdot \exp - \frac{\ln\frac{S}{S_0} - (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)\tau^2}{2\sigma^2\tau} \tag{2.21}$$

Uma distribuição log-normal.

2.6 Bolhas Econômicas

Períodos de estabilidade acabam por gerar instabilidade (Hyman Minsky). Bolhas Econômicas ou especulativas são um fenômeno que ocorre quando o movimento do preço de uma ação tem um crescimento exorbitante devido ao efeito manada dos agentes ao comprar muito desse ativo, diminuindo a demanda no mercado e fazendo com que o mesmo não suporte esse evento; fato que desencadeia uma queda abrupta do preço, um crash. Ou seja, o estouro de uma bolha econômica, uma queda repentina do preço do ativo dentro do mercado financeiro após uma grande alta. Economistas afirmam que esse preço é diretamente proporcional à oferta e à demanda, fatores que são influenciados pelo fluxo contínuo de notícias globais, ou seja, o preço tem memória de longo prazo frente a acontecimentos anteriores, ele depende do passado.

Talvez fique mais claro se pensarmos na história. A humanidade já presenciou vários eventos de bolhas que tiveram uma repercussão mundial, com certeza você se recorda da crise do subprime, a famosa crise imobiliária estadunidense; a crise de 1929, também um grande exemplo, crise essa que correu devido a compra desenfreada de títulos na Bolsa de Valores de Nova York. Esse não é um fenômeno recente, podemos dizer que é bem antigo apenas não havia sido identificado, a bolha da tulipas é uma evidência disso, ela data de 1637.

Os estudiosos da área da economia, da física, da matemática sentiram interesse por esse evento e começaram a tentar modelá-lo a fim de conseguir prever o seu acontecimento. Pesquisas trouxeram a ideia de que a Lei de Potência Log-Periódica descreveria bem uma bolha e sua fase de quebra.

Lei de Potência Log-Periódica

Um ativo econômico tem seu preço aumentado seguindo uma lei de potência adicionada de oscilações da forma log-periódica onde o estouro da bolha ocorre no clímax da equação que descreve esse evento, ou seja, da Lei de Potência Log-Periódica.

Essa equação é da forma:

$$y(t) = A + B(t_c - t)^z + C(t_c - t)^z \cdot cos(\omega \cdot log(t_c - t) + \Phi) \tag{2.22}$$

onde t_c é o tempo provável de estouro (crash); z é o crescimento exponencial; ω é p termo que controla a amplitude de oscilação da função; e A, B, C e Φ são constantes de ajuste da expressão que podem ser pré-definidas ou descobertas durante a fitagem da equação em um sistema.

Você pode olhar pra essa função e realmente enxergar uma bolha. Perceba que podemos tratar a bolha como um sistema de 3 parte:

1. Fase inicial: Crescimento rápido do preço do ativo

2. Fase determinista: Pico do preço do ativo

3. Fase final: Crash, queda abrupta do preço do ativo

A ideia aqui é de uma montanha russa. O crescimento rápido do preço do ativo é a base fundamental da função, esse crescimento não se dá de forma linear, tem-se pequenas subidas e descidas no meio do caminho, oscilações. Estas se tornam mais frequentes quando o termo t se aproxima de t_c e admitem um controle maior por ω levando então a uma amplitude decrescente. Já deu pra vislumbrar o momento onde há o crash, certo? Quando temos $t = t_c$ estamos observando o instante onde é mais provável que essa quebra aconteça e quando $t \geq t_c$ tem-se a observação da equação indo para números complexos.

A Lei de Potência Log-Periódica não mostra o instante do estouro da bolha, tenha isso claro. Ela mostra onde há maior **possibilidade** que ele venha a surgir. Essa é uma de suas particularidades. Podemos também imaginar um fractal e observar que existem inúmeras bolhas dentro de outras bolhas; isso nos leva a analisar um gráfico de operação de mercado como um agente de scalping. Esse é a pessoa no mercado que mira em espaços menores de tempo, consequentemente espaços menores do movimento do preço do ativo tratando de pequenas variações deste e a equação para essas bolhas dentro das bolhas continua sendo a apresentada aqui.

Um aprofundamento desse assunto geraria um questionamento mais profundo do que o proposto por esse trabalho, portanto o importante para a compreensão dos problemas presentes no capítulo 3 é apenas a equação 2.22.

2.7 Distribuição de Renda

O deslumbrante pensamento sobre distribuição de renda leva em consideração um arcabouço histórico profundo e longo, pode-se pensar desde a interpretação de Adam Smith em meados do século XVIII até a fala de Marx durante a revolução industrial.

A compreensão desse conceito com um perfil científico matemático teve ponto de partida no trabalho de Pareto, no século XIX, onde são analisados dados de diferentes sociedades em momentos distintos da história convergindo para o que ficou conhecido como Lei de Pareto. Entretanto outras modelagens físico-matemáticas surgiram no século XX para descrever a dinâmica da renda e suas distribuições de probabilidade. Tais quais estudos utilizando os processos estocásticos e a distribuição de Boltzmann-Gibbs.

Distribuição de Boltzmann-Gibbs (BG)

Quando você pensa em mecânica estatística é muito provável que se recorde de Boltzmann e de Gibbs. Estes foram os desenvolvedores da lei fundamental da mecânica estatística de equilíbrio que afirma que a distribuição de probabilidade de energia ϵ é dada por

$$P(\epsilon) = \mathcal{C} \cdot \exp\left(-\frac{\epsilon}{k_B T}\right) \tag{2.23}$$

onde T é a temperatura e $\mathcal{C}$ é uma constante de normalização. O que torna esse lei ou essa distribuição de BG importante é a conservação da energia total do sistema que está atrelada a ela. Assim, qualquer quantidade conservada em um grande sistema estatístico deve ter uma distribuição de probabilidade exponencial em equilíbrio; ponto que abre portas para utilizar dessa distribuição em muitas modelagens que pouco tem relação com física como, por exemplo, a distribuição de renda [11].

É a visão perfeita para usarmos diante da interação de vários agentes no mercado financeiro $(N \gg 1)$ levando em conta que não é cabível observar essas uma a uma, precisando portanto de uma análise probabilística. Com ela é possível calcular a probabilidade de que um sistema estará em um determinado estado como uma função da energia deste quando aplicado às partículas (agentes).

Segue agora a demonstração para chegarmos nessa equação famosa. Mas antes é preciso compreender que estaremos utilizando ideias provenientes da termodinâmica e estamos considerando que você, leitor, já possui essa base.

Consideremos um sistema subdividido em um átomo e um reservatório que possui temperatura constante; a probabilidade de encontrar esse átomo em um estado i é proporcional ao número de microestados permitidos ao reservatório em questão, ou seja, dado $\Omega_R(s_i)$ sendo a multiplicidade associada ao reservatório $i = 1, 2$ onde s_i é o estado do átomo, tem-se:

$$\frac{P(s_2)}{P(s_1)} = \frac{\Omega_R(s_2)}{\Omega_R(s_1)} \tag{2.24}$$

como a razão das probabilidades para dois estados. Utilizaremos a fórmula da entropia de Boltzmann para fazer a conecção entre a entropia e os microestados dos sistema, maneiras pelas quais os átomos de um sistema podem ser organizados:

$$S = k \cdot ln\Omega \tag{2.25}$$

podemos escrever então:

$$\frac{P(s_2)}{P(s_1)} = \frac{e^{\frac{S_R(s_2)}{k}}}{e^{\frac{S_R(s_1)}{k}}} \tag{2.26}$$

Uma outra maneira de escrever a entropia seria utilizando de um identidade termodinâmica (vide equação abaixo), mas para isso teríamos que considerar que a diferença entre as entropias 1 e 2 são bem pequenas.

$$dS_R = \frac{1}{T}(dU_R + PdV_R - \mu dN_R) \tag{2.27}$$

Essa equação pode assumir uma formação ainda mais simples ao considerarmos que não há variação do número de partículas N dentro do sistema (temos apenas um átomo); e dV_R para cá será um valor desprezível comparado com a energia interna. Logo:

$$S_R(s_2) - S_R(s_1) = \frac{1}{T}[U_R(s_2) - U_R(s_1)] \tag{2.28}$$

$$S_R(s_2) - S_R(s_1) = \frac{-1}{T}[E(s_2) - E(s_1)] \tag{2.29}$$

Aplicando na equação das probabilidades:

$$\frac{P(s_2)}{P(s_1)} = \frac{e^{\frac{-E(s_2)}{kT}}}{e^{\frac{-E(s_1)}{kT}}} \tag{2.30}$$

Isso nos leva a ver que, ao isolar tudo do estado 1 de uma lado e tudo do estado 2 de outro, as frações serão independentes e portanto para que estas assumam o mesmo valor tomamos:

$$\frac{P(s_2)}{e^{\frac{-E(s_2)}{kT}}} = \frac{P(s_1)}{e^{\frac{-E(s_1)}{kT}}} = \mathcal{C} \tag{2.31}$$

Finalmente obtemos a Distribuição de Boltzmann-Gibbs como resultado:

$$P(s) = \mathcal{C} \cdot \exp\left(-\frac{E(s)}{kT}\right) \tag{2.32}$$

onde $\mathcal{C}$ é uma constante, $k = k_B$ é a constante de Boltzmann e T é a temperatura do sistema.

O principal ponto para a derivação da distribuição de Boltzmann-Gibbs é a conservação da energia total do sistema. Assim, qualquer quantidade conservada em um grande sistema estatístico deve ter uma distribuição de probabilidade exponencial em equilíbrio. No nosso caso, a conservação do dinheiro[11].

Distribuição de renda na prática

O conceito de distribuição de renda está atrelado a como o dinheiro está distribuído para um agente quando este tem entradas de renda, entradas de faturamento. Ou seja, pode-se pensar que se o agente tem um emprego, este possui uma renda mensal a partir do serviço prestado e o valor arrecadado não é distribuído ou negociado com outro agente (seria bem estranho, confesso), o que nos fornece então uma diferença entre tratar uma distribuição de dinheiro e uma distribuição de renda a primeira vista. Na primeira, temos sim a negociação par a par entre agentes.

Na Economia, trata-se a renda individual r como um processo estocástico de Markov gerado por uma matriz de transições de uma renda para outra. Por esse caminho seria possível tratar a lei de movimento da distribuição de renda como um processo invariante no tempo e independente da memória de longo prazo, uma difusão de receita. Logo, obtendo uma distribuição estacionária de renda para o qual o sistema deve convergir ao longo do tempo.

A equação de Fokker-Planck mostra bem esse tipo de comportamento. Através dela tem-se a descrição da evolução no tempo t da função da distribuição de renda $P(r,t)$:

$$\frac{\partial P(r,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial r}\left[AP + \frac{\partial (BP)}{\partial r}\right] \tag{2.33}$$

Tratando de uma solução estacionária e coeficientes dependentes de r fica óbvio obter a solução:

$$P(r) = \frac{c}{B(r)} \cdot exp\left(-\int_0^r \frac{A(r')}{B(r')}dr\right) \tag{2.34}$$

Com $A = A_0$ e $B = B_0$ (coeficientes constantes) a EDP fica:

$$0 = A_0\frac{\partial P}{\partial r} + B_0\frac{\partial^2 (P)}{\partial r^2} \tag{2.35}$$

Resolvendo essa equação homogênea:

$$P(r) = C_1 \cdot exp\left(\frac{-A_0}{B_0} \cdot r\right) + C_2 \tag{2.36}$$

Observe que esse resultado muito se parece com a distribuição de Boltzmann-Gibbs

(BG), basta escrever um pouco diferente:

$$P(r) \propto exp\left(\frac{-r}{T_r}\right) \quad \text{ou} \quad P(r) = \mathcal{C} \cdot exp\left(\frac{-r}{T_r}\right) \tag{2.37}$$

onde $T_r = \frac{B_0}{A_0}$ representa a temperatura de renda efetiva e $\mathcal{C}$ é uma constante de normalização da função.

A equação anterior é um inconveniente conveniente. Estávamos lidando com um sistema onde a interação par a par não acontece (distribuição de renda) e chegamos a uma equação onde isso é permitido (BG), contudo olharemos a distribuição de BG aqui pensando não na interação par a par das partículas, mas sim nas transferências de energia entre uma partícula e um grande reservatório.

Econofísicos perceberam que a distribuição de renda tem equações distintas para quando estamos tratando da renda da classe baixa e da renda da classe alta. E segundo o artigo *Statistical Mechanics of Money, Wealth and Income* pode-se juntar ambas as equações em uma só obtendo então quase uma composição de BG com lei de potência:

$$P(r) = C \cdot \frac{exp\left(\frac{-r_0}{T_r} \cdot arctan\left(\frac{r}{r_0}\right)\right)}{\left[1 + \left(\frac{r}{r_0}\right)^2\right]^{\left(1+\frac{a}{2b}\right)}} \tag{2.38}$$

Por mais interessante que isso seja, não iremos trabalhar com essa equação nesse projeto, apenas a equação de Boltzmann-Gibbs. Dado que essa aplicação (distribuição de renda) é um ponto de justificativa pra conclusões analisadas dentro do TCC.

CAPÍTULO 3

SIMULAÇÕES DO MERCADO FINANCEIRO E SUAS LOGÍSTICAS

Neste capítulo descreveremos minuciosamente os problemas abordados tratando cada detalhe do algoritmo feito em Phyton e evidenciando as etapas contidas no mesmo. O projeto inteiro está conectado desde os conceitos até a execução dos programas, é importante ressaltar que existe uma interdependência entre eles.

A modelagem se deu em cima de três abordagens: Mercado Financeiro (1), Mercado Financeiro com Bolhas Econômicas (2) e Distribuição de Renda (3). O programa principal (1) do projeto é o problema de Mercado Financeiro, este é construído em cima dos conceitos do Movimento Browniano Geométrico (MGB), ou seja, possui toda uma teoria em cima de processos estocásticos. O segundo programa (2) traz as informações presentes no que foi construído no (1), nenhuma adaptação foi acrescentada a este, apenas houve uma análise diferenciada em cima do mercado, visto que agora estaríamos buscando por um desenho específico produzido pela Lei de Potencia Log-Periódica nos proporcionando um outro combo de resultados. O terceiro programa (3) foi criado pensando na conservação de dinheiro, este está aqui para mostra que quando tratamos de um sistema que não possui um mercado financeiro embutido temos essa conservação, não é atoa que aqui a Lei de Boltzmann-Gibbs pode ser usada como produtora desse tipo de simulação, diferente do que acaba acontecendo quando se tem o mercado feito pelo MBG.

As abordagens presentes no projeto se complementam, tanto em resultados quanto como justificativas da análise. E isso é de suma importância dado que acabam sendo mais elementos para serem observados dentro de uma mesma abordagem (mercado financeiro) propiciando observações mais completas e com origens diferentes.

3.1 Problema 1 - Mercado Financeiro - Movimento Browniano Geométrico

Já se sabe hoje da importância em compreender o comportamento do mercado financeiro para a economia mundial, mas os questionamentos em cima dele permanecem visto que é difícil prever sua dinâmica precisamente, o mais perto que se chega de uma visão "exata"é utilizando-se de mecanismos como os processos estocásticos.

Sabendo-se disso o presente trabalho tratou de criar uma simulação de um mercado financeiro aleatório similar (com alguns adendos) ao que aparece na vida real dentro de plataformas de operação como a *IQ Option*. Utilizando-se da equação do Movimento Browniano Geométrico para essa construção.

$$S(t) = S_0 \cdot \exp\left[\mu - \frac{1}{2}\sigma^2(t - t_0) + \sigma(W(t) - W(t_0))\right] \tag{3.1}$$

nesta o S_0 é o preço inicial do ativo, μ é a taxa de drift do mercado (preço/tempo), $W(t)$ é a estocasticidade da equação ou o retorno das ações (MB), σ é a volatividade histórica do mercado. Ressaltemos que essa equação acaba fugindo um pouco da realidade, pois o termo σ é dado como constante e para um contexto mais verídico precisaríamos tratá-lo como uma variável do tempo dado que os preços das ações admitem saltos causados por notícias globais, mas sabemos que o MBG não leva em consideração o passado. Em contra partida ela funciona muito bem para a nossa proposta aqui pois como não trataremos de ações reais, apenas necessitamos de um mercado similar ao real e é isso que essa equação proporciona.

Observe que dentro da equação 3.1 temos um Movimento Browniano $W(t)$, este é visto como um retorno dos preços e pode assumir valores negativos, diferentemente do preço da ação que devido a presença da exponencial só será negativo se escolhermos o S_0 com um valor abaixo de zero, o que não é o caso, o valor usado foi $S_0 = 50$ para todas as simulações. Além disso, o MB é o responsável pelo formato do gráfico da equação, ele que gera o ruído igual ao que aparece num mercado real.

A simulação não se prende apenas em produzir o mercado de forma crua, também levamos em consideração o elemento interativo que atua sobre ele, ou seja, a atitude do agente dentro do mercado (de que forma ele age quando o preço da ação sobe/desce? O que o leva a comprar/vender um ativo?). Chamamos isso de decisão do agente e é ela que propicia chegarmos no algoritmo que gera a distribuição de lucros no sistema. Logo nos fornece dados para saber o que acontece ao final de todas as interações par a par dos investidores.

A interação dos agentes econômicos é aleatória e se assemelha às interações usadas na distribuição de Boltzmann-Gibbs, ou seja, interações do tipo par a par, como se tivéssemos aqui um sistema de partículas que a cada choque por par tem-se a troca de momento (troca de dinheiro). Levando isso em consideração, para construir um sistema do tipo BG para este problema adotamos N como sendo o número de agentes (valor fixo, inalterável) onde a grandeza total conservada é o dinheiro que o sistema possui. Segue que:

$$m = \frac{M}{N} \tag{3.2}$$

onde *m* é a divisão da quantidade total M de dinheiro do sistema pelo total de agentes N. Aqui o dinheiro é realmente dinheiro, dinheiro físico e isso torna mais claro o porque da conservação deste já que nenhum investidor é gerador de moeda (este ato apenas é permitido ao Banco Central de cada país, nenhuma pessoa pode produzir tal produto).

As negociações ocorrem de forma que teremos alguém ganhando dinheiro e alguém perdendo dinheiro (m); o perdedor fornece ao ganhador uma quantidade Δm retirado da sua quantia total individual *m* mantendo então a conservação de dinheiro citada anteriormente. Há uma condição implementada ao código de que nenhum indivíduo assuma um valor negativo de *m*, ou seja, não é possível gerar dívidas. Caso o programa veja essa situação, ele cancela essa negociação e inicia uma nova.

Mas o que seria a negociação aqui? Seria pensar que cada agente possui uma quantidade $N_s(t)$ de ações e durante a interação eles estão realizando a venda ou a compra desses ativos de acordo com uma tomada de decisão descrita por uma função logarítmica de $S(t)/S(t-1)$

que nada mais é do que uma taxa, uma razão entre o preço do ativo agora e o preço do ativo na interação anterior (o hoje dividido pelo ontem). Caso essa razão seja maior que 1, o agente tenderá a comprar, pois o ativo está valorizando; caso essa razão seja menor que que 1, o agente tenderá a vender, pois o ativo está desvalorizando. Essa tomada de decisão do agente depende basicamente da variação do preço da ação

O agente tendo decidido comprar uma ação indica para o algoritmo que houve ali uma troca efetuada entre o par da interação e isso nos resulta em uma riqueza total individual diferente da inicial (aquela antes da negociação). A riqueza tem um conceito diferente do de dinheiro, enquanto dinheiro é apenas papel moeda, riqueza está relacionada a tudo o que o agente possui, como mostra a equação abaixo:

$$RT(t) = B(t) + N_s(t)S(t) \tag{3.3}$$

onde $RT(t)$ é a riqueza total do indivíduo, B(t) é a quantia de dinheiro, $N_s(t)$ é quantidade de ações, S(t) é o preço da ação no tempo. Foram usados valores fixos e iguais de $N_s(t)$, $B(t)$ para cada agente no instante inicial.

Por fim, é calculado a variação de riqueza dos agentes $W(t) - W_0$ a fim de encontrar qual foi o lucro. Perceba que ou ΔW será nulo, ou fornecerá um valor positivo por definição. E assim é construída a distribuição de lucros para o mercado financeiro indicado na equação 3.1.

Descrevendo a simulação passo a passo:

O algoritmo elaborado segue os passos descritos abaixo:

1. Um mercado financeiro é construído por meio das equações:

$$argumento = (\mu - (0.5 \cdot \sigma^2 \cdot \Delta t) + (\sigma \cdot 0.052 \cdot rndnmb)) \tag{3.4}$$

$$s = stime \cdot \exp(argumento) \tag{3.5}$$

   ou seja, temos aqui a equação 3.1 adaptada para o nosso cenário. s é o preço da ação, $stime$ é definido como um vetor de zeros e será preenchido no decorrer da simulação. Rate é dado com valor igual a 0.0535, sigma = 0.34, Δt = 0.00274 e o termo $rndnmb$ é uma variável randômica que nos ajuda a criar o MB.

2. Cria-se uma função de decisão e um for para termos a escolha randômica de dois agentes dentre 500 e utilizarmos disso juntamente com a decisão para posteriormente ser possível colocar condições para a negociação. Vide função:

$$logr = log(s/stime) \tag{3.6}$$

   Lembrando que a decisão tem como base um log.

3. Condições pós seleção dos agentes e decisão dessa interação par a par: foi feito um bloco condicional com um for onde apenas esses dois agentes estão presentes e seguem o principio de que:

   (a) O primeiro sorteado comprará, logo recebe porcentagens de ações e diminui sua quantidade de dinheiro $B(t)$ relacionada a essas ações compradas.

(b) O segundo sorteado venderá, logo diminui sua quantidade de ações em uma certa porcentagem e recebe uma quantidade de dinheiro relacionada a essas ações vendidas.

(c) Caso nessa troca alguém fique com $B(t)$<0 ou uma quantidade $N_s(t)$<0, a negociação para e o algoritmo tenta fazer a troca novamente até seguir o critério aqui apresentado.

4. Tendo feito isso calcula-se qual será a riqueza total dos agentes que fizeram parte dessa interação usando-se:

$$w[k] = b[k] + ns[k] \cdot s \tag{3.7}$$

onde W é a riqueza total $RT(t)$, veio do inglês *wealth*, não confunda com o $W(t)$ usado no texto para descrever o movimento browniano. k é o índice usado no for indo de 0 a 2, ns é o nosso $N_s(t)$.

5. Pronto, agora é possível calcular a variação de $W(t)$, lembrando que todo agente começa com uma riqueza de 3500 ($B(0)$=1000, $S_0 = 50$ e $N_s(0) = 50$). Essa variação é o nosso lucro, este assume valor positivo ($\Delta W > 0$) ou nulo ($\Delta W \leq 0$)

6. Produção da distribuição de lucro dessa simulação.

Em suma, a simulação do problema 1 uniu a dinâmica do mercado (e tudo que a compõe), decisão dos agentes e a condição de negociação para no fim proporcionar uma maneira de se calcular a riqueza total dos agentes e suas variações a fim de construir um histograma, uma distribuição de lucros do mercado financeiro.

3.2 Problema 2 - Bolhas Econômicas - Lei de Potência Log-Periódica

Após a criação de um mercado financeiro por processos estocásticos resolvemos estudar essa função por uma outra lógica. Se olharmos bem a equação veremos que ela é dominada por um movimento browniano e este é o responsável pelo formato da equação e também pela estocasticidade da expressão.

$$S(t) = S_0 \cdot \exp\left[\mu - \frac{1}{2}\sigma^2(t - t_0) + \sigma(W(t) - W(t_0))\right] \tag{3.8}$$

A intenção inicial era trocar esse MB pela função que descreve as bolhas econômicas, mas foi visto teoricamente que isso não seria plausível dado que para mantermos as características do MBG era preciso respeitar o processo de Markov e bolhas fazem o completo oposto, dado que estas contam como parte de suas propriedades a observação do passado.

Então, foi decido pegar esse mercado e não realizar nenhuma modificação nele, nem mesmo em suas constantes e observar se neste conseguiríamos encontrar bolhas. Assim estaríamos sendo condizentes com a teoria do projeto. A ideia do porque disso é que mercados que possuem bolhas geram um lucro grande em uma única operação, se conseguíssemos observar elas dentro de um mercado que desconsidera o passado e que possui uma boa descrição do mercado tradicional, teríamos então uma ótima modelagem para obter uma boa liquidez, principalmente se essas bolhas aparecerem com grande frequência, bem como uma análise diferente do que levaria as bolhas dado que aqui elas talvez não sejam provenientes do efeito manada da venda desenfreada do ativo. E mesmo assim teríamos um mercado de bolhas.

Para conseguir identificar essas bolhas é necessário uma sobreposição de funções, ou seja, verificar que na equação 3.8 há a presença da equação abaixo:

$$y(t) = A + B(t_c - t)^z + C(t_c - t)^z \cdot cos(\omega \cdot log(t_c - t) + \Phi) \tag{3.9}$$

que descreve o crescimentos dos preços no tempo $y(t)$, na fase pré-crash, onde t_c é o tempo crítico, z e ω são parâmetros do mercado (descobertos através da fitagem na equação de mercado 3.8), ϕ é a fase, e A, B, C são constantes de ajuste.

O tempo crítico t_c sinaliza o instante de maior probabilidade de ocorrência do crash e não um instante exato. Estamos lidando com tendência desse estouro acontecer. No campo estatístico podemos tratar de algo que tem muita chance de acontecer num instante, mas não conseguimos lidar com a certeza daquele momento específico.

Por fim, o resultado obtido nessa sobreposição e análise é comparado a fitagem feita no artigo *How to predict craches in financial markets with the Log-Periodic Power Law* em cima da famosa bolha de DJIA antes do seu crash em outubro de 1929.

Descrevendo a abordagem:

O processo de análise segue uma abordagem simples e de compreensão plausível para o presente projeto. Este se deu em cima do que foi proposto no Problema 1 com o mercado financeiro criado em cima de um Movimento Browniano Geométrico, seguindo toda sua produção a risca para que não houvesse contradição na teoria dos processos estocásticos.

A aplicação proposta compactua com uma pesquisa que utiliza apenas do algoritmo descrito no Problema 1 e do aplicativo Qtiplot para sua compressão e discussão. Além destes pontos, alguns dados da fitagem de uma Lei de Potência Log-Periódica do artigo *How to predict craches in financial markets with the Log-Periodic Power Law* são utilizados para uma visão abrangente do que de fato ocorreria com uma bolha no mundo real, em um mercado não fictício e adaptado, visando aqui a interpretação das constantes e do funcionamento das equações e ideias mencionadas anteriormente.

3.3 Problema 3 - Distribuição de Renda

Até então estávamos trabalhando com problemáticas onde possuíamos um sistema que continha um mercado financeiro e uma quantidade fixa de agentes que ao longo da simulação possuíam atitudes em cima do que o mercado apresentava para nós. Entretanto o que será que acontece quando retiramos esse mercado financeiro e apenas mantemos os agentes interagindo (comprando ou vendendo algo entre si, p.ex., um hambúrguer do McDonalds)?

Essa é a proposta de questionamento do problema de Distribuição de Renda. Aqui a interação dos agentes econômicos no sistema é aleatória e se assemelha às interações usadas na distribuição de Boltzmann-Gibbs, interações par a par, quase o mesmo que ocorria no Problema 1, mas enquanto lá tinha-se uma função de troca monetária de Δm, aqui a troca será feita em cima de frações de dinheiro que o agente possui. Ou seja:

$$\Delta m = \gamma \cdot m_j \tag{3.10}$$

onde γ é parte/fração que será considerada do dinheiro, m_j representa a quantidade monetária que o investidor possui no instante da negociação. É inegável a importância dessa definição, porque estamos tratando de uma distribuição, logo uma troca do que possuímos e nesse fato não há uma consideração de crédito imposta (uma possibilidade extra de dinheiro à disposição).

Tal ponto nos leva a mais uma consideração, a de que a riqueza total do agente será dada apenas pelo dinheiro que este possui mesmo com o ganho de n McDonalds entre as simulações:

$$RT(t) = B(t) + n \cdot McDonalds \tag{3.11}$$

dado que o McDonalds não pode ser visto como algo de grande valia (riqueza material) para se somar à RT(t) e portanto esse é desconsiderado dessa equação. Talvez faça mais sentido se for pensado nessas negociações como um mercado feudal ou uma negociação um a um de coisas que não possuem valor de riqueza. Logo, pode-se escrever:

$$RT(t) = B(t) \tag{3.12}$$

É perceptível, só de observar essas equações (3.10; 3.12), que a quantidade de dinheiro do sistema se conserva como previsto pela distribuição de Boltzmann, e mais, em nenhuma momento teremos essa quantia sendo negativa (o agente não entra em débitos). Há uma imposição no código para que este último seja seguido, ou seja, quando em uma interação o agente termina com um valor de m>0, o algoritmo para essa operação tenta novamente até que isso não venha a ocorrer. Ressaltemos que nenhum agente é capaz de produzir qualquer quantia de dinheiro dentro do sistema.

A negociação par a par atribuída no algoritmo é muito mais simples do que a que foi feita quando se tinha um mercado financeiro associado ao sistema. Agora que não se tem um intermediador de operações (mercado) a decisão do agente para uma compra ou uma venda se dá pela aleatoriedade imposta no código, é dito que o primeiro agente selecionado fará uma venda, e portanto o outro agente irá comprar.

Até aqui foi falado apenas sobre distribuição de dinheiro e nada referente a renda, isso se deu devido ao fato de que para a simulação presente ambos possuem a mesma distribuição. A renda é a quantidade de dinheiro que se recebe por prestação de serviços e estamos tratando esta fixa no valor de 500 u.m (unidades monetárias) sendo dada como valor inicial m que o agente possui, m tem o mesmo tamanho para qualquer agente selecionado aleatoriamente pelo algoritmo e se dá pela equação 3.2 no seu estado inicial.

Por fim, é feita uma distribuição de renda que mostra como ficou dispersada a quantidade de 250000 u.m que existe no sistema sabendo-se que estamos tratando com base em 500 agentes. Essa distribuição tenderá com o aumento do número de simulações a fitar como uma lei de Boltzmann-Gibbs, verificação está que é feita por meio do aplicativo QtiPlot.

Descrevendo a simulação passo a passo:

O algoritmo segue os passos descritos abaixo:

1. Um sistema de negociação é construído com a ausência de um mercado financeiro (intermediador). Para isso é feito um for onde ocorre a escolha randômica de dois agentes dentre 500, dando possibilidade para podermos posteriormente criar uma estrutura de decisão do agente em cima da bilateralidade compra e venda.

2. A decisão é pautada na lógica de troca monetária dada pela equação 3.10. E portanto foi

criado um bloco condicional com um for que segue o princípio de que:

(a) O primeiro sorteado venderá, logo recebe uma porcentagem do valor que o comprador possui.

(b) O segundo sorteado comprará, logo diminui sua quantidade monetária em uma porcentagem do valor que possui, quantidade esta que será fornecida para o primeiro sorteado.

(c) Caso nessa troca alguém fique com uma quantia negativa de dinheiro z, a negociação para e o algoritmo tenta fazer a troca novamente até se ter um valor positivo (que é o autorizado pelo problema 3)

3. Produção da distribuição de renda dessa simulação.

A lógica de programação aqui é todo fundamentada na equação 3.10, onde aqui sofre a adaptação para a escolha do sorteado e admite γ como sendo uma constante onde pode-se alterar o seu valor e observar o que isso fornece para a distribuição que será gerada ao fim da simulação desse mercado feudal.

CAPÍTULO 4

RESULTADOS

Este capítulo traz os resultados e análises aplicadas referente ao que foi discuto durante todo o presente projeto. Os resultados dialogam diretamente com a revisão bibliográfica produzida para a compreensão do leitor sobre a abordagem física e a abordagem econômica, lembrando que para a área da econofísica a modelagem precisa estar bem definida no contexto físico para que então possa ser transladada para a economia sem ferir qualquer definição previamente estabelecida. A teoria analítica é fundamental para que isso ocorra, bem como sua replicação computacional.

4.1 Mercado Financeiro por Processos Estocásticos

O mercado financeiro nos intriga quando se trata do seu comportamento, pois este parece um organismo vivo que traz toda sua imprevisibilidade como parte intrínseca do seu movimento.

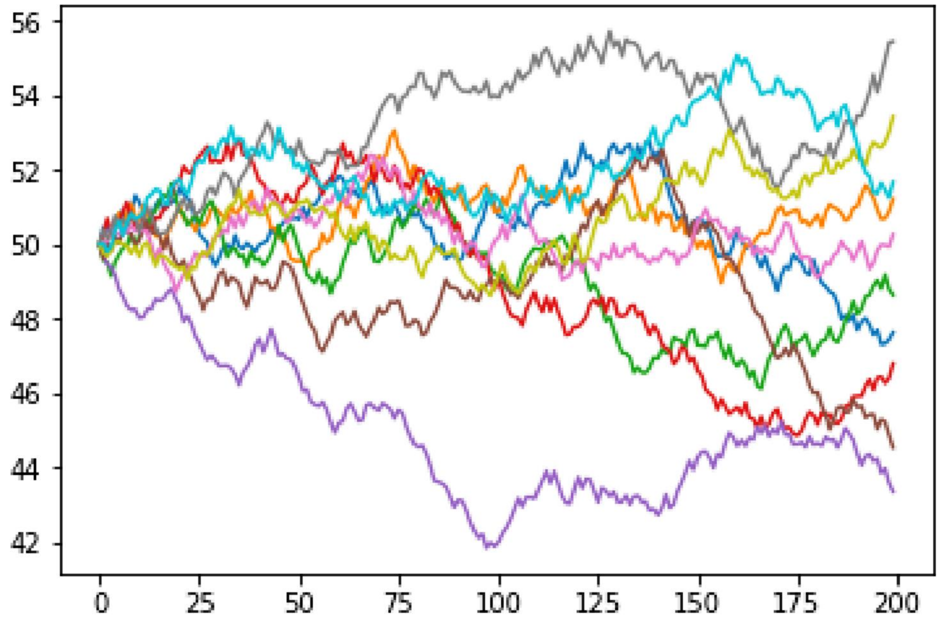

Figura 4.1: Progressão do comportamento no tempo. Dez mercados financeiros do MBG sendo vistos juntos a fim de comparação entre si vislumbrando sua aleatoriedade com base no MB. O eixo x é o tempo t de observação deste e o eixo y a função $S(t)$.

A loucura, também chamada de estocasticidade é uma das suas características mais visíveis, fato não tão simples assim. Ao tomarmos elementos (agentes) atuando dentro do mercado, essa sua complexidade aumenta dado que agora haverá uma interdependência entre ambos se pensarmos no contexto real de uma bolsa de valores. Em contrapartida, como aqui o passado é desconsiderado para a projeção do próximo preço da ação, essa dependência não se torna tão evidente dando maior liberdade para o organismo, mas o comportamento dos investidores possui uma ligação direta com o mercado, lembrando que sua decisão sobre comprar ou vender uma ação é dada por:

$$log\left(\frac{S(t)}{S(t-1))}\right) \tag{4.1}$$

E essa escolha não foi feita atoa. Observe bem o mercado financeiro:

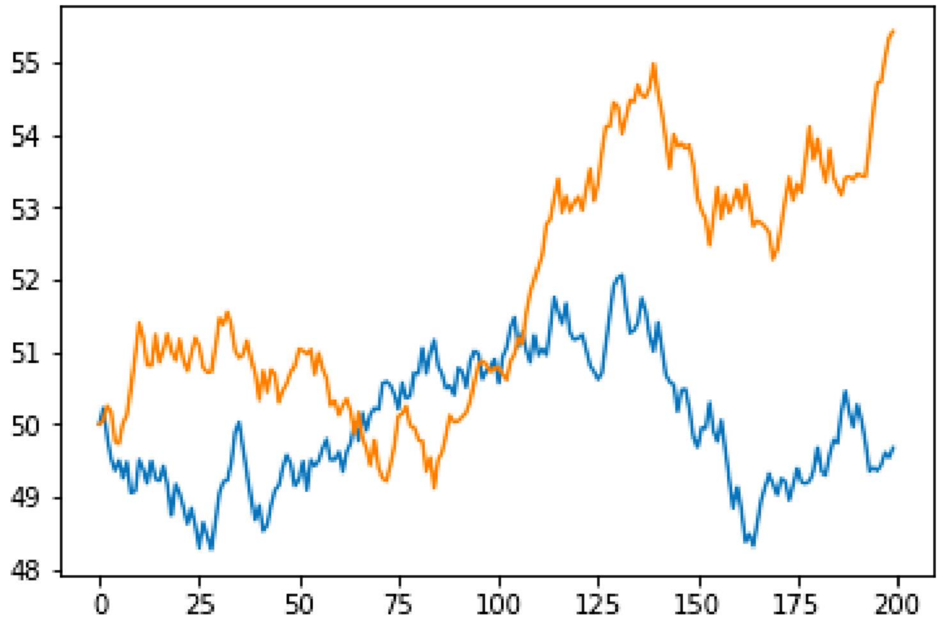

Figura 4.2: Progressão do comportamento no tempo. Dois mercados financeiros do MBG. O eixo x é o tempo t de observação deste e o eixo y a função $S(t)$.

Ele é composto por várias subidas e descidas, logo para tentar prever a tendência do mercado de maneira direta e pontual basta realizar uma derivada no instante em que se está observando, ou partir do pressuposto de uma observação macro e realizar uma divisão entre o preço de hoje e o de ontem com a aplicação log. Esta produz o mesmo resultado de uma derivada quando é feita a sua análise de sinal para informar a direção de inclinação da reta. Caso o algoritmo observe que a conta deu negativa, ele informa ao agente que o ativo sofreu uma queda no seu valor, uma tendência de descida do preço. Caso dê positiva, ele informa que o ativo sofreu um aumento no seu valor, uma tendência de subida do preço. Esse resultado é muito útil quando um investidor utiliza do método $scalping$ para realizar sua operação (método que analisa o movimento do mercado em baixa escala).

Outras funções foram testadas analiticamente para servirem de função decisão do agente, mas nenhuma obteve tanto sucesso nessa simulação quanto a da equação 4.1 e por isso não constam nesse projeto. Testou-se coisas como a função log-periódica, polinômios e exponenciais. Mas ao pensar em movimento browniano, que é o gerador da estocasticidade do sistema e da forma do mercado, a compreensão de retorno financeiro se tornou mais eficiente quando se olhou o sistema como um passo de cada vez no lugar de se observar o movimento completo no tempo, a menos de casos especiais como bolhas econômicas que atribuem um alto retorno monetário em uma visão mais ampla do gráfico.

Nos plots da função do preço no tempo (dinâmica do mercado) foram feitas algumas considerações para a equação 3.1 ficar mais fácil de ser compreendida. Utilizou-se de uma simulação que roda 200 vezes antes de fornecer um resultado e possui 500 agentes interagindo, o mesmo teste foi realizado para 200, 300, 600 agentes fato que não modificou em nada o mercado, pois para um número finito de investidores há um bom comportamento da função, o contrário disso implicaria em um mercado infinito sendo incoerente com proposta e a realidade. As constantes usadas foram escolhidas arbitrariamente a fim de apenas cumprir com seus significados tais quais: taxa de preço pelo tempo ($\mu = 0.0535$), variação do tempo ($\Delta t = 0.00274$) e volatividade do mercado ($\sigma = 0.34$). Usou-se de base para sua definição os artigos *A Guided Walk Down Wall Street; Numerical Solution os Stochastic Differential Equaions with Jumps in Finance*.

A proposta por detrás disso tudo é analisar a distribuição de riquezas e para tanto foi necessário entender o que compõe o sistema que deu origem a essa distribuição, desde a criação do mercado estocástico como ponto intermediador, até os agentes que utilizam deste para tomar atitudes entre si (negociações). Lembrando que a riqueza é atribuída através da soma entre o dinheiro e a quantidade de ativos vezes seu preço.

Observe o gráfico resultante da simulação:

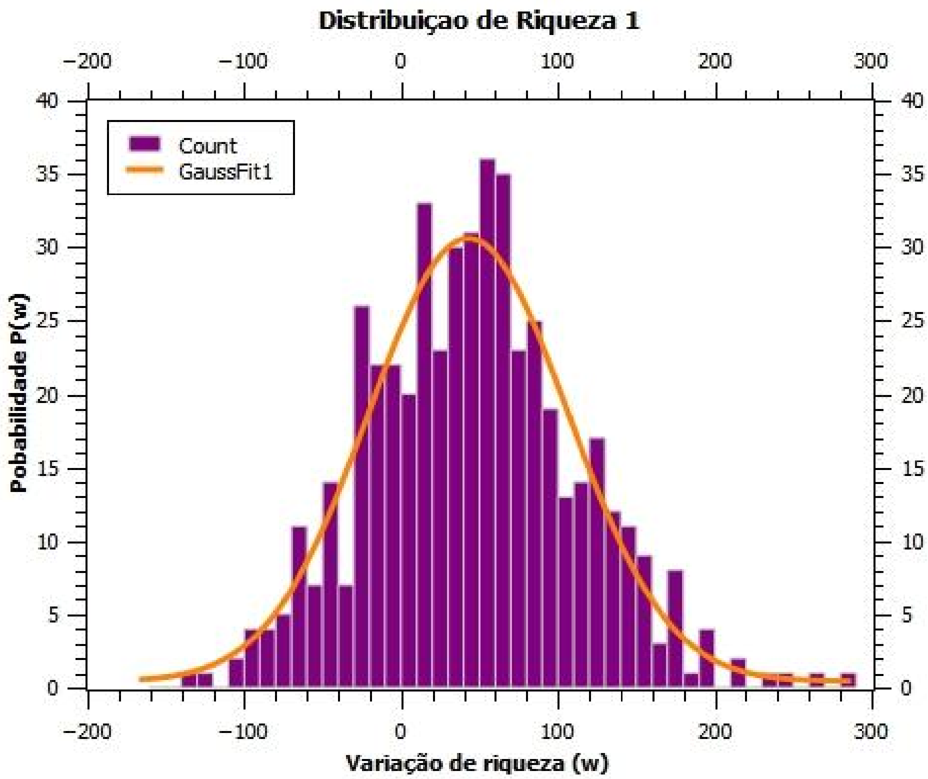

Figura 4.3: O gráfico possui o eixo y sendo a probabilidade da riqueza e o eixo x sendo as pequenas variações de riqueza que surgiram das interações feitas no sistema: mercado financeiro + agentes. Neste temos um fit gaussiano brevemente deslocado para a esquerda associado a distribuição

Essa imagem nos fornece muita informação. Podemos dizer que ela se trata de uma distribuição de riquezas, ou seja, apresenta para nós as probabilidades de se encontrar um agente com uma certa variação de riqueza (ΔW). Logo, de acordo com o capítulo 3, o lucro das negociações fica explicito aqui, dado que quando ΔW é menor ou igual a zero temos um lucro zero, e quando ΔW é maior que zero equivale ao próprio lucro. Isso nos faz dizer que um outro nome possível para essa distribuição poderia ser Distribuição de Lucros.

O eixo x desse gráfico traz que a distribuição está suavemente deslocada para a direita dando a entender que a probabilidade da quantidade de agentes obterem lucro nessa simulação foi altíssima, passando inclusive do centro do fit gaussiano que está centrado em 42,892 $\pm$ 2,946, condizente com o valor da distribuição em roxo que tem centro em 45,60 e cabe dentro do erro da fitagem. Aqui verifica-se que o preço da ação aumentou ao longo do tempo saindo de $S_0 = 50$ u.m para $S(t) = 50,90$ u.m dando mais um motivo pra alta probabilidade de lucros no sistema e uma baixa probabilidade de perdas, lembrando que por mais que exista diminuição da riqueza do agente, este não chegará a ter dívidas, pois isso não é permitido pelo algoritmo.

É sabido que o dinheiro (dinheiro mesmo) que está contido no mercado se conserva, ele se inicia com 500000 u.m e termina com o mesmo valor seguindo bem a ideia da distribuição de Boltzmann. Mas para a riqueza isso é diferente, não existe conservação em decorrência da valorização (neste caso) do preço da ação, portanto o sistema se inicia com W_0 = 1.750.000 e termina com $W(t)$ = 1.772.568, causando uma pequena variação mesmo a estrutura de construção do problema tendo sido feita em cima da distribuição de Boltzmann-Gibbs. A lógica permanece, apenas não há conservação, por isso se encaixou melhor com o fit de uma gaussiana deslocada do zero.

Esse é um dos formatos que foi obtido. Após diversas simulações observou-se que os gráficos ficavam dispostos em 3 posições: centrado próximo ao zero, muito deslocado para a esquerda ou muito deslocado para a direita. Perceba que para estes a única mudança está dentro dos valores numéricos e na interpretação de que os agentes podem estar lucrando menos ou mais. Vejamos esses casos:

1. Distribuição muito deslocada para a direita do zero:

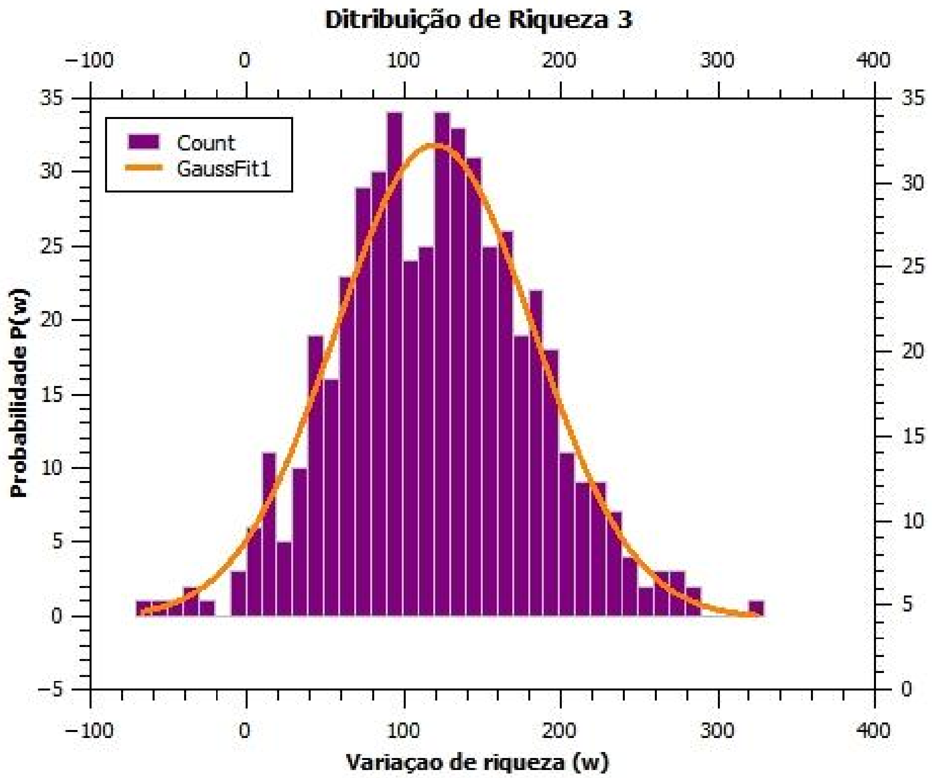

Figura 4.4: O gráfico possui o eixo y sendo a probabilidade da riqueza e o eixo x sendo as pequenas variações de riqueza que surgiram das interações feitas no sistema: mercado financeiro + agentes. Neste temos um fit gaussiano muito deslocado para a direita associado a distribuição

Agora, temos a mesma distribuição com a diferença de que o plot está praticamente todo deslocado para depois do zero no eixo x. Isso implica que existe uma mínima probabilidade do agente sair da simulação com uma diminuição na sua riqueza, é muito mais provável que ele saia com lucros. A distribuição apresentada na figura acima possui seu fit gaussiano centrado em 119,524 $\pm$ 2,307, condizente com o valor da distribuição em roxo que tem centro em 121,50 e cabe dentro do erro da fitagem. Tem-se que o preço da ação aumentou para $S(t) = 52,42$ u.m, o que acaba sendo bem relevante para o agente que possui uma grande quantidade de ativos, isso fica claro quando vemos que o valor final da riqueza fechou em 1.810.535,03. Um aumento acima do encontrado na distribuição anterior, o que faz sentido considerando o deslocamento da figura no eixo x.

2. Distribuição muito deslocada para a esquerda do zero:

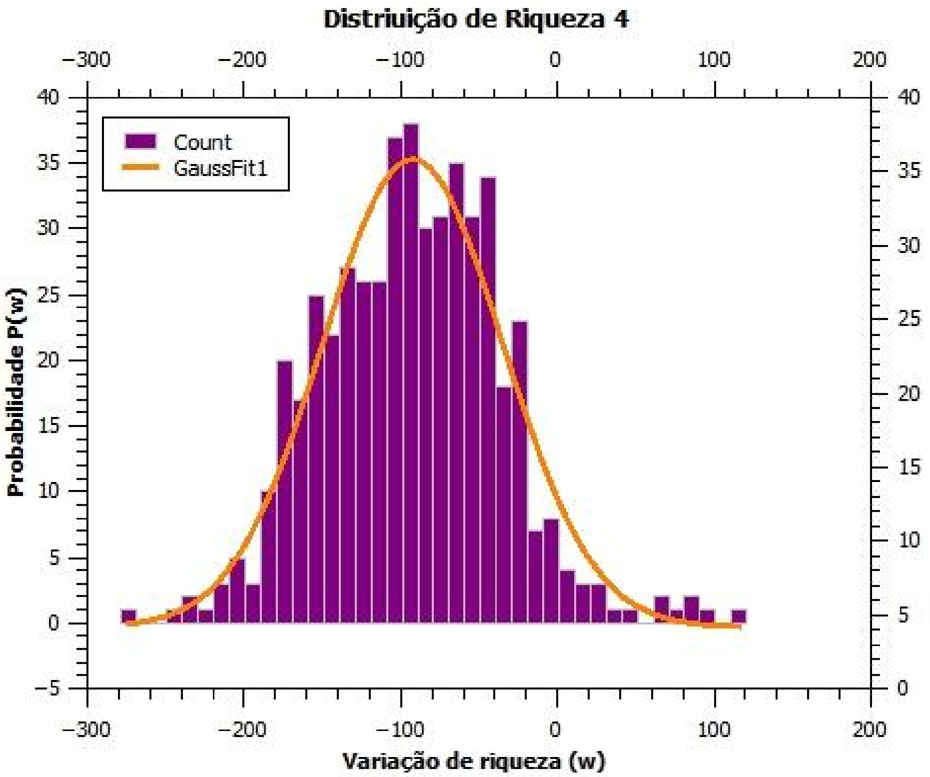

Figura 4.5: O gráfico possui o eixo y sendo a probabilidade da riqueza e o eixo x sendo as pequenas variações de riqueza que surgiram das interações feitas no sistema: mercado financeiro + agentes. Neste temos um fit gaussiano muito deslocado para a esquerda associado a distribuição

Agora, a mesma distribuição está praticamente toda deslocada para antes do zero no eixo x. Isso implica que existe uma mínima probabilidade do agente sair da simulação com um amento na sua riqueza, é muito mais provável que ele saia sem lucros. A distribuição apresentada na figura acima possui seu fit gaussiano centrado em -92,38 $\pm$ 2,54, condizente com o valor da distribuição em roxo que tem centro em -92,50 e até agora foi o melhor encaixe dentro da gaussiana. Tem-se que o preço da ação diminuiu para $S(t) = 48,14$ u.m, o que acaba sendo bem relevante para o agente que possui uma grande quantidade de ativos. O valor final da riqueza fechou em 1.703.443,24.

Tudo ocorrendo conforme o previsto. Pra não dizer que é cem por cento das vezes, durante a simulação surgiu um gráfico diferente que não costuma aparecer ao rodar o programa. Veja:

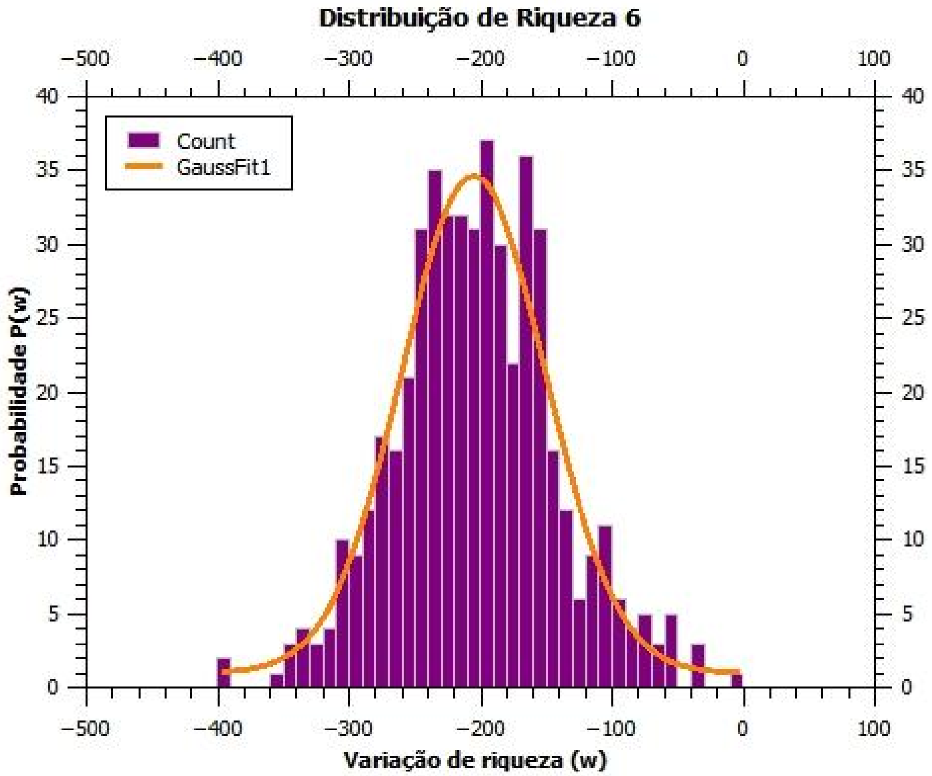

Figura 4.6: O gráfico possui o eixo y sendo a probabilidade da riqueza e o eixo x sendo as pequenas variações de riqueza que surgiram das interações feitas no sistema: mercado financeiro + agentes. Neste temos um fit gaussiano completamente deslocado para a esquerda associado a distribuição

Neste a distribuição se encontra completamente deslocada para o lado esquerdo do zero informando que não há chance de lucros envolvidos nessa simulação. Até então tudo que havíamos encontrado tinha alguma, mesmo que muito mínima, probabilidade de agentes obterem lucro. O fit forneceu que o comprimento lateral da gaussiana tem um erro de $\pm$ 6,93, o que nos ajuda a concluir que neste mercado financeiro estocástico $S(t)$ permite que exista pelo menos uma pessoa lucrando nas operações, mesmo que a probabilidade seja pequena, mas ela existe e é isso que importa.

O problema de Mercado Financeiro por Processos Estocásticos nos trouxe por meio da criação de um intermediador diversas possibilidades de questionamentos e optamos por compreender o funcionamento do lucro nesse sistema, ponto fundamental para quem decide investir num mercado de ações com esse tipo de comportamento.

4.2 Bolhas Econômicas em um Mercado Estocásticos

O mercado financeiro é realmente uma incógnita para os estudiosos, por mais que cheguemos em modelos muito similares sempre haverão fatores que não se comportam bem para essa caixinha. Pois se trata de um laboratório onde muitos fatores são desconsiderados ou se quer vistos.

Em contrapartida trazer modelagens para ele propicia observar comportamentos específicos que são presentes com bastante frequência, como por exemplo as bolhas econômicas. Um padrão recorrente no mercado que muitas vezes é visto de maneira macro (grandes bolhas como a bolha imobiliária dos Estados Unidos) ou micro (pequenas bolhas tratadas de maneira mais pontual por um tipo específico de investidor já citado aqui, o agente que utiliza de $scalping$ para operar).

Seguindo de fato a abordagem presente nas bolhas econômicas seria necessário um outro TCC, pois para a compreensão deste é necessário o modelo de Black-Sholes onde este gera um mercado condizente com a perspectiva de uma lei de potênia log-periódica. O presente trabalho não foi suficiente para identificar esse fenômeno da melhor forma.

Observou-se que o mercado gerado no problema anterior, que é o mesmo mercado gerado aqui, não apresenta quedas bruscas recorrentes, ponto fundamental de uma bolha, vide sessão 2.6. Lembrando que ela possui um subida muito grande e após esta quase saturar o mercado financeiro tem-se sua queda saindo de um ponto muito alto para um ponto extremamente baixo. As quedas esperadas podem ser encontradas ao rodar o algoritmo por n vezes, tornando-se algo quase humanamente inviável, portanto é dito que da maneira como foi construído o nosso código, este é insuficiente para uma visualização de bolhas.

Não somente isso, o mercado estocástico aqui foi produzido de forma a gerar um gráfico onde as subidas com o movimento browniano são um cenário que se vê com frequência e as descidas acontecem de maneira controlada quase não havendo um despencamento do preço da ação, ou seja, quedas bruscas que são o esperado para haver um alto faturamento pelo investidor ou uma perda muito grande também pensando que este não obteve sucesso na compreensão do mercado com bolhas.

Outro resultado obtido foi de que as bolhas seriam raras caso não houvesse um efeito manada, um efeito no qual os agentes compram desenfreadamente as ações a partir de uma tendência de imitação de um agente em relação ao outro, fazendo com que seu preço acabe quase saturando o sistema em algum momento. O mercado da simulação é claro sobre esse histórico, ele não leva em consideração o passado, fato influenciador para gerar um efeito como este (mas não o único). Além disso, desconsiderando o agente, tem-se que uma bolha não acontece sem a influência de um histórico, o preço do passado influenciando o preço do futuro, algo que o processo de Markov estudado não admite.

Apesar da ideia principal do problema aqui presente ter sido encontrar as bolhas dentro do mercado que nós criamos e isso não ter sido bem sucedido, esse acontecimento foi crucial para uma análise do contrário, do porque isso não aconteceu como foi esperado. Logo, considera-se tais pontos um resultado de sucesso. Nem todo problema dará certo e é preciso compreender os motivos.

4.3 Distribuição de Renda

Entramos em um problema onde o mercado financeiro passa a não existir e mesmo assim possuímos um mercado. Anteriormente, no problema 1, o mercado era dado como um das partes do sistema, como se você fosse comprar algo e usasse o seu cartão. O mercado era visto como o seu cartão, uma pessoa intervindo na negociação. Agora, o mercado é arcaico, pode-se pensar nas negociações um a um, onde você negocia direto, sem um interventor.

Partimos da construção do sistema como um problema de Boltzmann-Gibbs, similar ao que foi feito anteriormente nesse projeto para o Mercado Financeiro Estocástico, uma interação par a par dos 500 agentes aqui inseridos. A diferença é que estamos trabalhando em cima da equação 3.10, onde a cada operação há uma troca de monetária em cima de uma parte do dinheiro que o negociador possui:

$$\Delta m = \gamma \cdot m_j \tag{4.2}$$

Foi atribuído um valor fixo para γ = 0.333 e γ = 0.5, dinheiro inicial de cada agente B_0 = 500 u.m. Isso nos gera uma riqueza de $W_0 = 250.000$ u.m sendo negociadas dentro do sistema, visto que a riqueza será a mesma coisa que a quantidade de dinheiro aqui (equação 3.12).

Observe o gráfico resultante da simulação:

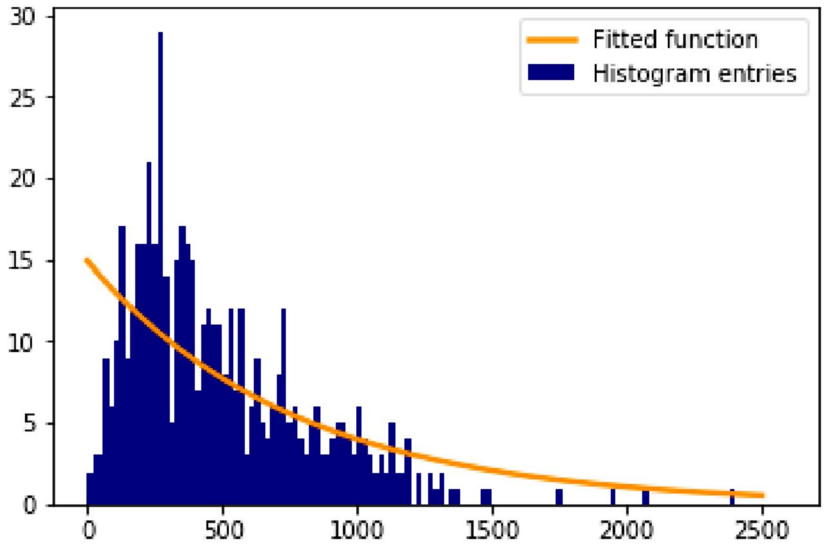

Figura 4.7: O gráfico possui o eixo x sendo o dinheiro e o eixo y sendo a probabilidade em cima dele. Houve um acréscimo de um fit da distribuição de Boltzmann-Gibbs e o γ = 0.333

Essa imagem se trata de uma distribuição de renda, ou seja, apresenta para nós as probabilidade de se encontrar um agente com uma certa quantia de dinheiro. Logo, o fato de não termos citado o termo $renda$ começa a fazer sentido, pois renda, dinheiro e riqueza para essa abordagem se tratam da mesma coisa e portanto admitem a mesma distribuição. Lembrando que isso nem sempre acontece, mas tomamos a cautela de trazer esse resultado para cá.

O eixo x apresenta um início do histograma apenas no zero, fato que decorre de não considerarmos a possibilidade de dívidas para o agente, bem como o valor que este negocia sempre sendo parte do que ele tem, então torna-se matematicamente impossível ele obter um valor negativo após uma operação. Foi percebido que o gráfico começa a subir como uma gaussiana, porém decai como algo muito similar a uma distribuição de Boltzmann-Gibbs.

Dado essa observação fitou-se um BG para averiguar a ideia. Foi visto que a distribuição começa a se parecer com este, mas não se comporta perfeitamente bem com o fator γ = 0.333. Dando a entender que não houve conservação da renda atribuída, um motivo poderia ser que os agentes não negociaram com 100% dos números quebrados de dinheiro, fazendo com que estes não entrassem nas interações, não fazendo parte então da distribuição apresentada. Mesmo assim, pode-se concluir que a renda é conservada, pois isso foi uma falha dentro da interação. O fit feito em Python nos forneceu a normalização $\mathcal{C} = 14,92720$ e a $T_r = 759,34958$ (temperatura de renda efetiva).

Outros plots com o mesmo γ foram realizados, mas todos possuíam praticamente a mesma figura, isso ocorreu por existir uma saturação na simulação desse algoritmo, não sendo possível observar mais dados por comparação de gráficos.

Observemos agora o caso quando o γ = 0.5 na figura 4.8. O fit para a distribuição de BG foi bem mais condizente, nos levando a entender que o erro em algumas interações no plot anterior realmente tem fundamento e que há de fato uma conservação da renda no presente problema. Foi obtido $\mathcal{C} = 14,92720$ e T_r = 759,34958.

Testou-se o fit de uma gaussiana na figura 4.9 a fim de perceber se mesmo com a distribuição iniciando-se no zero este não seria um fit possível para cá. Concluiu-se que o fit não cumpre com o desejado e o BG se encaixa melhor para a calda direita da distribuição. O presente gráfico foi feito no aplicativo $QtiPlot$, diferentemente dos outros que foram feitos no próprio Python e acabou ocasionando em um curva um pouco abaixo do que era esperado quando se observa os dois plots anteriores. O aplicativo forneceu uma gaussiana centrada no ponto 346,895 ± 16,945 e um ajuste R^2 de 0,679. Esta deu inicio ao fit no ponto 7 e se estendeu até o ponto 2279.

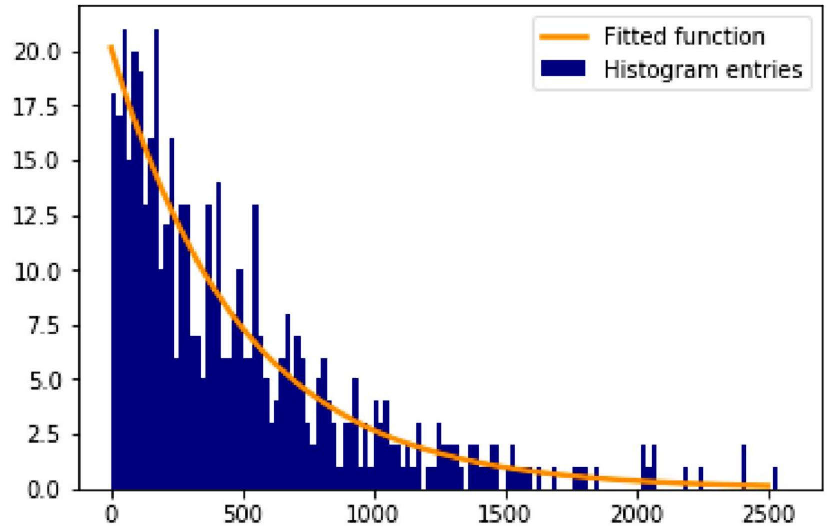

Figura 4.8: O gráfico possui o eixo x sendo o dinheiro e o eixo y sendo a probabilidade em cima dele. Houve um acréscimo de um fit da distribuição de Boltzmann-Gibbs e γ = 0.5

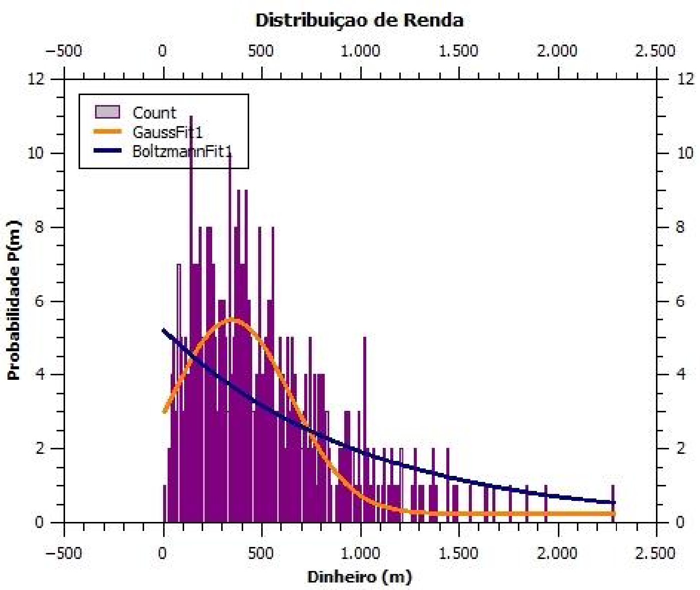

Figura 4.9: O gráfico possui o eixo x sendo o dinheiro e o eixo y sendo a probabilidade em cima dele. Houve um acréscimo de um fit da distribuição de Boltzmann-Gibbs

Como último resultado tem-se que as distribuições de renda apresentadas vão depender do fator γ para assumirem um bom comportamento em cima de uma distribuição de Boltzmann-Gibbs. Caso queiramos um fit dito perfeito para BG considerando, as taxas de erro, teríamos que tratar o Δm como constante atribuindo a este um valor fixo. Tal informação interage melhor com o que é proposto por essa distribuição.

CAPÍTULO 5

CONCLUSÕES

Estudamos o comportamento de um mercado financeiro gerado por processos estocásticos que demandam de características específicas para funcionarem corretamente, estas foram abordadas na revisão bibliográfica com uma seguimentação propícia para a compreensão crescente do leitor em questão. Partindo desse conceito abordagens como bolhas econômicas e distribuição de renda foram discutidas quase como contra exemplos dessa nossa perspectiva inicial para que o diálogo em cima de mercado financeiro tivesse uma análise diferente de outros trabalhos.

A primeira, bolhas econômicas partiu da ideia de encontrar dentro do mercado gerado um sistema de bolhas, entretanto este não o foi bem sucedido nos levando a compreender o que de fato é necessário para que este aconteça, como por exemplo, um mercado que trabalha realmente com o passado na sua construção (dado que tendo o mercado pronto é possível discutir assuntos que tratam do passado, mas este mercado em sua produção não levou o passado em conta), uma estrutura mais bem comportada de uma função log-periódica; mas além disso foi de suma importância para trazer uma nova visão em cima do porque, dado que essa investigação nos deixa mais perto de uma modelagem que favoreça esse tipo de situação. O fato do problema ter dado errado foi importante para a visualização de novas perspectivas sobre um mercado financeiro construído a partir de processos estocásticos.

A segunda, distribuição de renda, nos trouxe a ideia de ausência de mercado e como teríamos os agentes se comportando neste tipo de cenário onde mais se parece com um mercado feudal ou um mercado de escambo do que o que realmente tem-se em uma bolsa de valores. Houve a conservação do dinheiro dentro do sistema, bem como da riqueza individual e por consequência da riqueza global também. Tal fato se concretiza em decorrência da verificação da presença da distribuição de Boltzmann-Gibbs dentro do sistema. A teoria dessa distribuição nos fala exatamente sobre essa conservação e aqui serviu de paralelo entre energia conservada e dinheiro e riqueza conservada.

Este trabalho analisou através de uma logística diferente os temas acima a fim de contribuir para o estudo do presente tema com uma visão diferente da que se encontrar internet a dentro, e seu maior resultado foi o aprendizado de que mercado financeiro nem de longe é algo simples. Investir em uma bolsa de valores não se trata de um jogo, mas de um estrutura lógica de ação que muitas vezes vai dar errado, pois se trata de um organismo vivo, algo não tão previsível como se costuma imaginar.

Referências Bibliográficas

[1] Joseph L. McCauley. *Stochastic Calculus and Differential Equations for Physics and Finance*. Cambridge University Press, 2013.

[2] Michael Schirber. Financial brownian motion. Disponível em: `https://physics.aps.org/articles/v11/s36` – acesso em 20 nov. 2020.

[3] Bodo Herzog. An econophysics model of financial bubbles. *Natural Science*, 7(01):55, 2015.

[4] Helena. Estocástico. Disponível em: `https://origemdapalavra.com.br/pergunta/estocastico/` – acesso em 10 nov. 2020.

[5] R. Coleman. *Stochastic Processes*. Problem Solvers. Springer Netherlands, 1974.

[6] Giovani L Vasconcelos. A guided walk down wall street: an introduction to econophysics. *Brazilian Journal of Physics*, 34(3B):1039–1065, 2004.

[7] J. Voit. *The Statistical Mechanics of Financial Markets*. Theoretical and Mathematical Physics. Springer Berlin Heidelberg, 2013.

[8] W. Paul and J. Baschnagel. *Stochastic Processes: From Physics to Finance*. Springer International Publishing, 2013.

[9] Fábio Macêdo. Mendes. *Processos estocásticos em física: teoria e fundamentos*. PhD thesis.

[10] Dennis Fernandes Alves Bessada. *Generalizações do movimento browniano e suas aplicações à física e a finanças*. PhD thesis.

[11] Adrian A Dragulescu. Applications of physics to economics and finance: Money, income, wealth, and the stock market. *arXiv preprint cond-mat/0307341*, 2003.