

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
INSTITUTO DE FÍSICA

JOÃO PAULO DE OLIVEIRA LIMA

**APLICAÇÃO DA FUNÇÃO DE WIGNER AO ESTUDO
DOS EFEITOS DA TEMPERATURA NO FENÔMENO
DA DECOERÊNCIA QUÂNTICA.**

BRASÍLIA
20 DE MAIO DE 2021

João Paulo de Oliveira Lima

Aplicação da Função de Wigner ao estudo dos efeitos da temperatura no fenômeno da decoerência quântica.

Monografia apresentada ao Instituto de Física da Universidade de Brasília como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Bacharel em Física.

Orientador: Marco Cezar Barbosa Fernandes

Universidade de Brasília - UnB

Instituto de Física

Brasília

20 de maio de 2021

João Paulo de Oliveira Lima

Aplicação da Função de Wigner ao estudo dos efeitos da temperatura no fenômeno da decoerência quântica./ João Paulo de Oliveira Lima. – Brasília, 20 de maio de 2021-

92 p. : il. (algumas color.) ; 30 cm.

Orientador: Marco Cezar Barbosa Fernandes

Monografia – Universidade de Brasília - UnB
Instituto de Física, 20 de maio de 2021.

1. Palavra-chave1. 2. Palavra-chave2. I. Orientador. II. Universidade xxx. III. Faculdade de xxx. IV. Título

CDU 02:141:005.7

João Paulo de Oliveira Lima

Aplicação da Função de Wigner ao estudo dos efeitos da temperatura no fenômeno da decoerência quântica.

Monografia apresentada ao Instituto de Física da Universidade de Brasília como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Bacharel em Física.

Trabalho aprovado. Brasília, 20 de maio de 2021:

Marco Cezar Barbosa Fernandes
Orientador

Antônio Carlos Pedroza
Convidado 1

Ronni Geraldo Gomes de Amorim
Convidado 2

Brasília
20 de maio de 2021

*Dedico este trabalho a todas as pessoas que de alguma forma me apoiaram,
e também aos meus colegas de curso, minha formação não seria a mesma sem vocês.*

Agradecimentos

Eu gostaria de agradecer aos meus pais, Walter Dutra Lima e Maristela Aparecida de Oliveira Lima, por terem sempre me incentivado a fazer o que eu quisesse e por terem me dado todo o suporte necessário para concretizar o desejo de ser Físico. A todos os meus professores e amigos que me ajudaram e apoiaram nessa difícil caminhada e foram parte essencial na minha formação acadêmica e pessoal.

Em especial, gostaria de agradecer ao professor Celius Antônio Magalhães pelas magníficas aulas de Cálculo e diversas conversas engrandecedoras que tivemos, e ao meu orientador Marco Cezar Barbosa Fernandes por ter desempenhado tal função com dedicação e amizade, bem como por ter despertado o meu interesse pela mecânica quântica.

Por último, sinto-me na obrigação de agradecer imensamente a todos aqueles que idealizaram e lutaram pela educação pública, e que continuam trabalhando para que esta seja libertadora, e a todos que lutam por uma sociedade igualitária. Para que cada vez mais, gestos de súplica de humildes a poderosos, se convertam em mãos humanas que trabalhem e transformem o mundo, já dizia Paulo Freire. Obrigado por existir UnB.

*“Se eu vi mais longe,
foi por estar sobre ombros de gigantes.
(Isaac Newton)”*

Resumo

Este trabalho apresenta um estudo sobre o fenômeno da decoerência a partir da análise do operador densidade e da função de Wigner. O objetivo principal é verificar como a temperatura influi sobre este fenômeno quântico. A abordagem será feita primeiramente por meio do estudo da evolução da interação entre duas gaussianas via função de Wigner. Posteriormente, pela análise das propriedades térmicas de estados de interesse em tecnologias quânticas, como por exemplo os estados qubits e *Bell-Cat*. Pretende-se então, a partir da análise desses estados quânticos, contribuir para o entendimento do fenômeno da decoerência quântica, que é crucial para as mais diversas aplicações em tecnologias quânticas, em especial a computação quântica.

Palavras-chaves: Decoerência quântica. Computação quântica. Função de Wigner. Operador densidade.

Abstract

This monography presents a study on the phenomenon of decoherence from the analysis of the density operator and the Wigner function. The main objective is to verify how the temperature influences this quantum phenomenon. An analysis of the superposition state of two Gaussians will be presented in order to show how coherence properties of such state respond to variations in the temperature. Subsequently, we look at the thermal properties of states of interest in quantum technologies, such as the qubits and *Bell-Cat* states. It is intended then, from the analysis of these quantum states, to contribute to a better understanding of the phenomenon of quantum decoherence, which is crucial for the most diverse applications in quantum technologies, especially quantum computing.

Key-words: Quantum decoherence. Quantum computing. Wigner function. Density operator.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Esquema emaranhamento quântico. Fonte: Autoral	23
Figura 2 – Esquema da atuação da perda de coerência devido a colisão de fótons em um objeto. Fonte: Autoral. Imagem inspirada em imagens do livro (SCHLOSSHAUER, 2007).	31
Figura 3 – Evolução temporal da interação entre duas gaussianas 1.109 a partir da função de Wigner 1.112. Fonte: Autoral.	54
Figura 4 – Esfera de Bloch para um qubit representado por um ponto s . Fonte: Autoral	56
Figura 5 – Evolução da matrix densidade de acordo com a equação de Redfield-Bloch. Fonte:(JOHANSSON J. ROBERT; NATION, 2012).	60

Lista de abreviaturas e siglas

SI	Sistema Internacional de Unidades (<i>Système international d'unités</i>)
EPR	Paradoxo de Einstein-Podolski-Rosen
IF	Instituto de Física
UnB	Universidade de Brasília

Lista de símbolos

T	temperatura
Z	Função de partição
K_β	Constante de Boltzmann
H	Hamiltoniana
\hbar	Constante de Planck
m	Massa

Sumário

	Introdução	23
1	INTRODUÇÃO A DECOERÊNCIA	27
1.1	Emaranhamento quântico e decoerência	27
1.2	Operador densidade	28
1.3	Decoerência e a ação do ambiente	31
1.4	Decoerência e o amortecimento da interferência	32
1.4.1	Decoerência e ruído	35
1.5	Decoerência e dissipação	36
1.6	Decoerência a partir da teoria de espalhamento	37
1.6.1	Fator de decoerência	39
1.6.2	Determinando o fator de decoerência	42
1.7	Exemplos físicos da decoerência	44
1.7.1	Gás de fótons	44
1.7.2	Moléculas de ar	46
1.8	Decoerência a partir da função de Wigner	47
1.8.1	Função de Wigner	48
1.8.2	Modelo canônico para a decoerência: Movimento Browniano quântico e equação mestre quântica	49
2	DINÂMICA DOS QUBITS	55
2.1	Esfera de Bloch	55
2.2	Equação de Redfield-Bloch	56
3	TERMODINÂMICA QUÂNTICA	63
3.1	Estados quânticos <i>Bell-Cat</i>	63
3.2	Introdução ao formalismo termodinâmico quântico	65
3.3	Termodinâmica quântica aplicada a Bósons	67
3.3.1	Transformação de Bogoliubov	68
3.3.2	Operadores termiais	69
3.4	Estado térmico geral	70
3.5	Operador densidade e os estados Bell-Cat	72
3.6	Termodinâmica quântica aplicada a Férmions	73
3.7	Função de Wigner dos estados termiais <i>Bell-Cat</i>	75
	Conclusão	77

REFERÊNCIAS	81
APÊNDICES	85
APÊNDICE A – ESTADOS COERENTES	87
APÊNDICE B – OS VÁRIOS VÁCUOS	89

Introdução

Durante o estudo para a formulação deste trabalho, a discussão sobre a transição do regime microscópico para o macroscópico foi bastante recorrente, e como veremos, estes dois regimes estão sempre se relacionando, por vezes concordantes mas recorrentemente dissonantes. Um conceito chave para toda a compreensão não somente deste trabalho, mas de todo e qualquer estudo aplicado relacionado à mecânica quântica, é o do emaranhamento quântico. Este conceito foi introduzido por Schrödinger, em uma carta para Einstein (PENROSE, 2016), em que ele usou a palavra em alemão *Verschränkung* e traduzida para o Inglês como *entanglement*. Logo após, em 1935, Schrödinger e Born (SCHRÖDINGER, 1935) publicaram o trabalho sobre o conceito. A importância do fenômeno do emaranhamento foi resumida no seguinte comentário de Schrödinger: *I would not call [entanglement] one but rather the characteristic trait of quantum mechanics, the one that enforces its entire departure from classical lines of thought.*

Na figura 1 abaixo, vemos uma representação simples sobre o estado composto de duas partículas emaranhadas, possuindo uma quantidade conservada, no caso o spin. Os spins representados por setas estão em um estado de superposição para cima e para baixo, e entre eles vemos uma onda, a qual simboliza a função de onda que descreve ambas partículas. É também interessante acrescentar aqui o contexto histórico em que o conceito do emaranhamento está inserido.

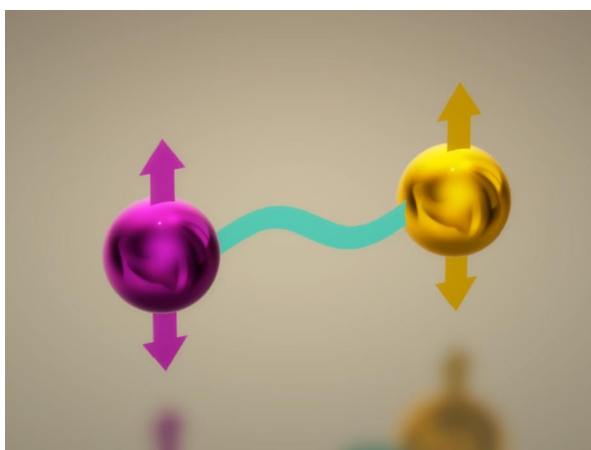


Figura 1 – Esquema emaranhamento quântico. Fonte: Autoral

O início do século 20 na Física foi particularmente interessante, notadamente devido aos desenvolvimentos da teoria da relatividade e da mecânica quântica, sendo esta, motivo de grande debate entre os oponentes Einstein e Bohr. Bohr defendia a teoria de que a observação de um fenômeno, inevitavelmente altera este mesmo evento e o exemplo mais famoso aonde esse efeito se verifica, é no experimento da fenda dupla. Em contra-

partida, no artigo ([EINSTEIN; PODOLSKY; ROSEN, 1935](#)), os autores apontam que esse tipo de conclusão é inconsistente com a realidade, uma vez que uma quantidade física corresponde à realidade quando sua previsibilidade é possível de ser medida sem a mudança do sistema.

Embora o caráter probabilístico da física quântica já fosse conhecido, Einstein-Podolsky-Rosen (EPR) acreditavam que esse caráter probabilístico era devido à falta de conhecimento sobre a teoria. O famoso paradoxo de EPR consiste na linha de raciocínio de que, ou a função de onda não descreve completamente o seu sistema ou então, operadores que não comutam não podem coexistir. Partindo do pressuposto que a função de onda de fato é completa, passamos a ter quantidades físicas não comutantes existindo ao mesmo tempo, e nisso consiste o famoso paradoxo. No fundo o que estava sendo debatido é se a mecânica quântica possui um caráter não local, mas segundo a análise de EPR o estado de uma partícula não pode depender do estado de outra, logo, deveria apresentar um caráter local.

Seguindo esse debate, no artigo ([BOHM; AHARONOV, 1957](#)) o paradoxo é reformulado de uma maneira extremamente interessante ao considerar uma molécula com duas partículas compartilhando uma quantidade conservada, no caso o spin total. Considerando que essas partículas sejam então separadas a uma distância suficientemente grande para que não haja qualquer interação entre elas, ao medirmos o spin no estado singleto de uma delas, automaticamente o spin da outra partícula será determinado, terá que ser o oposto (considerando aferições do spin na mesma direção). Pelo visto, este fenômeno parece ocorrer instantaneamente, de modo a violar o limite da velocidade da luz.

No entanto, essas partículas estão emaranhadas, vide figura 1, ou seja, elas são descritas pela mesma função de onda, e a observação de uma delas é uma mera projeção do único estado que descreve ambas. No artigo ([BELL, 1964](#)) é mostrado que em sistemas emaranhados, medições de quantidades correlacionadas devem produzir resultados diferentes da mecânica quântica se assumirmos que as propriedades do sistema medido foram pré-determinadas e independentes da observação, logo, a violação desta ideia tipifica o caráter não local da mecânica quântica. Bell demonstrou que existem certas relações (desigualdades) entre probabilidades conjuntas dos resultados das medidas de spin em várias direções que são necessariamente satisfeitas por qualquer modelo local, mas que são violadas pelas regras de Born para probabilidades conjuntas em mecânica quântica.

Recordando o famoso experimento mental do gato de Schrödinger, temos um estado anterior no qual não sabemos se o gato está vivo ou morto e depois com a observação teremos um resultado. No entanto, não é ingênuo se perguntar sobre qual seria a revolução nisso. O ponto não é o resultado, mas sim o que tínhamos antes do resultado ser verificado, e além disso, entender que o estado anterior não era determinado e o gato não estava nem morto nem vivo antes de visualizarmos. Novamente, parece que o observador possui

um papel muito importante nesse quesito. A mecânica quântica requer uma mudança de abordagem de como entendemos a física. Sistemas isolados e controlados que funcionam bem para a física clássica já não contribuem, uma vez que partem do entendimento de estados locais. Devido a tais diferenças substanciais, a mecânica quântica permite a formação de estados não-locais a partir de interações locais. A esse fenômeno damos o nome de emaranhamento quântico.

Todo esse contexto histórico é interessante, pois retrata o começo de um debate que ao longo do tempo tem se mostrado cada vez mais frutífero. Em tempos mais recentes, vale aqui citar o fato de que os efeitos do emaranhamento quântico foram observados (MA et al., 2012) se mantendo à distância de 143 Km, onde pares de fótons que foram separados desta distância se comportaram como um único objeto quântico. Existe também aplicações em astronomia que possibilitam a medida do diâmetro de estrelas distantes. Isto é realizado utilizando o fato de que pares de fótons emitidos dos lados opostos da estrela estão automaticamente emaranhados uns com os outros. Isto pode ser entendido através da estatística de Bose-Einstein (PENROSE, 2016). Este efeito foi estabelecido e explicado em 1956 nos artigos (BROWN R. H.; TWISS, 1956) e (BROWN R. H.; TWISS, 2013), por Robert Hanbury Brown e Richard Q. Twiss, sendo conhecido como efeito Hanbury Brown-Twiss. Eles mediram o diâmetro de Sirius como sendo 2.4 milhões de quilômetros assim estabelecendo emaranhamento quântico com efeito nesta distância.

Os recentes avanços em tecnologia originadas dos fenômenos quânticos têm levado a um aumento do interesse em decoerência. De forma sucinta, entende-se por decoerência os processos que limitam a manifestação de efeitos quânticos transformando-os em fenômenos clássicos. Dentre as causas dos processos de decoerência, provavelmente, a mais importante é a interação do sistema quântico com seu ambiente. Nesta interação, ocorre o emaranhamento do sistema com o ambiente o que leva a uma disseminação da coerência quântica em uma quantidade tão grande de graus de liberdade que acaba tornando os efeitos quânticos inobserváveis.

A teoria da decoerência tem sido complementada por experimentos utilizando ondas de matéria acopladas à fótons externos ou moléculas, e por investigações utilizando estados coerentes de fótons, íons confinados e interferometria eletrônica. Nestes contextos, observa-se acordo quantitativo entre as observações experimentais e a teoria da decoerência. Além disso, considera-se também a decoerência devido à emissão de radiação térmica, como vemos nos seguintes trabalhos, (KATO, 2015), (WU; LIN, 2016), (HORNBERGER; HACKERMÜLLER; ARNDT, 2005), (RAZAVIAN et al., 2019) e (FÖLDI; CZIRJÁK; BENEDICT, 2001). Isso para citar alguns, mas os exemplos são ainda mais vastos, podendo assim notar que certamente a temperatura pode ser relacionada a mecanismos relevantes para o entendimento do fenômeno da decoerência.

Dentre as várias áreas de pesquisa do ramo da tecnologia quântica, tais como a

metrologia quântica, sensores quânticos e criptografia quântica, a computação quântica representa um papel importante na estruturação deste trabalho. Através do seu estudo pode se entender melhor a importância da influência da temperatura no fenômeno da decoerência, visto que o funcionamento de computadores quânticos, depende do controle sobre a decoerência. Por essa razão, um dos temas que traremos aqui é sobre a termodinâmica quântica, *Thermal Field Dynamics (TFD)*.

É importante ressaltar que seria possível fazer toda essa discussão através de outras abordagens, mas neste projeto propomos uma análise teórica baseada na função de Wigner, na esfera de Bloch, e na teoria da dinâmica de Campos Térmicos para investigação dos efeitos da temperatura em estados quânticos mais comumente relacionados às tecnologias quânticas e envolvidos na teoria da decoerência, sendo os estados escolhidos para este estudo, uma superposição de Gaussianas, os qubits e os estados *Bell-Cat*.

O projeto aqui proposto está organizado da seguinte maneira. O capítulo 1 traz a discussão a respeito da decoerência de forma mais pragmática, percorrendo cuidadosamente sobre os elementos chave para o entendimento deste fenômeno, como por exemplo sobre o emaranhamento quântico e o operador densidade. O capítulo segue com as seções diferenciando a decoerência de fenômenos clássicos como a dissipação, além de especificar melhor o que seria essa influência do ambiente. Na seção 1.6 examinaremos a decoerência a partir da teoria de espalhamento. Esta seção é importante pois apresenta uma abordagem mais rigorosa matematicamente, além de se relacionar com as seções previamente explanadas. Por meio da teoria de espalhamento foi possível determinar o fator de decoerência para exemplos físicos muito importantes e relevantes tanto para a computação quântica quanto para o seu entendimento em situações do cotidiano. O fim do capítulo trabalha especificamente com a abordagem da função de Wigner e a sua visualização, demonstrando graficamente como a decoerência age para duas gaussianas que interagem gerando fenômenos quânticos.

O capítulo 2 aborda os estados quânticos responsáveis pela codificação da informação na computação quântica, os qubits. Primeiramente é desenvolvida e discutida a esfera de Bloch, pois é uma ferramenta gráfica de grande valia para o estudo dos qubits. Além disso, por meio de vários conceitos desenvolvidos no capítulo 1, apresenta-se uma equação dinâmica para o operador densidade e a seguir, uma visualização da equação é demonstrada na esfera de Bloch. Por último, o capítulo 3 se ocupa do estudo da termodinâmica quântica e a sua aplicação nos estados emaranhados *Bell-Cat*, bem como a formulação do problema pela função de Wigner. Ademais, temos o apêndice A, que retrata sobre os estados coerentes, bem como demonstrações de algumas expressões importantes que foram utilizadas diversas vezes no último capítulo, e o apêndice B, no qual faz-se uma discussão sobre o significado físico e matemático dos vários estados de vácuo.

1 Introdução a decoerência

1.1 Emaranhamento quântico e decoerência

O desenvolvimento desta seção seguiu em grande parte o exposto no livro (SCHLOSSHAUER, 2007).

Considere um sistema S descrito por um vetor de estado $|\psi\rangle$, e que contém dois subsistemas S_1 e S_2 , de modo que o vetor $|\psi\rangle$ de S é dito emaranhado com respeito aos subsistemas caso não seja possível ser escrito como um produto tensorial entre os vetores de estado destes subsistemas. Por exemplo, dado $|\phi_1\rangle$ de S_1 e $|\phi_2\rangle$ de S_2 , $|\psi\rangle$ não representa um estado emaranhado se admitir a decomposição

$$|\Psi\rangle = |\phi_1\rangle \otimes |\phi_2\rangle = |\phi_1\rangle |\phi_2\rangle. \quad (1.1)$$

Deste modo, se temos estados não emaranhados, por exemplo $|\Psi\rangle = |\phi_1\rangle \otimes |\phi_2\rangle$, sabemos então que cada subsistema S_1 e S_2 possui os seus estados quânticos, os quais descrevem completamente as suas propriedades, de modo que mesmo constituindo um sistema maior e mais complexo, eles retêm a sua individualidade.

Em contraste com os estados não emaranhados de sistemas compostos, temos os estados emaranhados. Um exemplo comum de tais estados são os chamados estados de Bell,

$$\begin{aligned} |\phi_{\pm}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle |0\rangle \pm |1\rangle |1\rangle), \\ |\psi_{\pm}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle |1\rangle \pm |1\rangle |0\rangle). \end{aligned} \quad (1.2)$$

Os estados de Bell tem a peculiaridade de que eles não possibilitam conhecimento sobre os subsistemas que os constituem, embora através deles tenhamos conhecimento maximal (dado pela matriz densidade $\hat{\rho}$) sobre o sistema composto como um todo. Nesse contexto, no extremo oposto, temos produtos de estados como $|0\rangle |0\rangle$ do tipo $|\phi\rangle_1 |\phi\rangle_2$ tal que estando o sistema nesse estado global, representando um estado produto puro, então $\hat{\rho}$ será um projetor e saberemos que os dois subsistemas estarão em estados puros independentemente.

De forma sucinta, em sistemas quânticos compostos de dois subsistemas independentes, podemos dizer matematicamente, que em geral, os estados emaranhados são representados através de superposições de produtos tensoriais dos estados dos subsistemas de tal forma que essa superposição não admite decomposição em termos do produto dos estados de um sistema pelo estado do outro sistema. Veja que este é o caso para os estados de Bell acima, pois, não há como decompô-los como um produto dos estados puros $|0\rangle$ e

$|1\rangle$ de um subsistema pelos estados puros $|0\rangle$ e $|1\rangle$ do outro. De forma esquemática:

$$|\text{Bell}\rangle \neq |\text{subsistema 1}\rangle |\text{subsistema 2}\rangle. \quad (1.3)$$

Dito isso, a decoerência irá atuar em estados emaranhados, de modo que as interações locais entre o sistema e o ambiente irão definir as propriedades físicas observáveis do sistema, e para fazermos esta análise iremos utilizar o operador densidade. Dizendo de outra maneira, a coerência quântica, que diz respeito às propriedades quânticas de um sistema, é alocada para o estado-ambiente emaranhado, o que de fato impossibilita a sua observação. Esse processo é crucial para explicar como o regime clássico emerge do quântico (SCHLOSSHAUER, 2007). Para as ações seguintes, iremos falar sobre a importância do operador densidade tanto para o fenômeno da decoerência, bem como para outras operações importantes da Física. Pretende-se buscar aqui uma melhor explicação sobre o fenômeno da decoerência e também ressaltar algumas diferenças com relação a dissipação, que é um efeito clássico.

1.2 Operador densidade

Nesta seção, pretendemos mostrar algumas propriedades do operador ou matriz densidade, de modo a auxiliar e dar embasamento teórico para futuros cálculos.

No último tópico falamos sobre emaranhamento quântico e a interpretação física por trás do fato de ser impossível escrever dois vetores de estado como um produto tensorial separável. A consequência é que, o emaranhamento do sistema e o ambiente torna impossível escrever uma função de onda pura a qual contenha as informações e propriedades do sistema físico independentemente daquela que descreve o ambiente.

A decoerência surge das interações entre dois sistemas, o de interesse e o ambiente, de modo que teremos um estado emaranhado entre estes sistemas. É importante nos atentarmos ao fato de que o observador está preocupado com o sistema de interesse tipicamente, e não o ambiente. Logo, as aferições ficam em geral restritas a este sistema, mas como queremos entender como funciona o fenômeno, não é desprezível o que acontece no ambiente. Por exemplo, obter informações a respeito dos fótons espalhados em um objeto, é tarefa, a princípio, muito complicada.

Entendendo isso, é aqui que entra a importância da matriz densidade, pois ela comporta os graus de liberdade do sistema emaranhado, e nos fornecer uma descrição estatística do sistema na mecânica quântica. Isso implica que as influências do ambiente, fótons, raios cósmicos etc, estarão codificadas nesta matriz (SCHLOSSHAUER, 2007).

O desenvolvimento teórico e algébrico desta seção tem como referência principal o

livro (KHANNA et al., 2009). Seja a equação de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial |\psi^i(t)\rangle}{\partial t} = H |\psi^i(t)\rangle, \quad (1.4)$$

onde $|\psi^i(t)\rangle$ denota os estados para um ensemble de partículas. Definimos o valor esperado de um operador para o sistema no estado $|\psi^i(t)\rangle$ como:

$$\langle A \rangle^i = \langle \psi^i(t) | A | \psi^i(t) \rangle. \quad (1.5)$$

Introduz-se agora o peso γ_i para cada estado constituinte do *ensemble*, e além disso, expandiremos $|\psi_i(t)\rangle$ na base do espaço de Fock:

$$\langle A \rangle = \sum_i \gamma^i \langle A \rangle^i, \quad (1.6)$$

$$|\psi^i(t)\rangle = \sum_n c_n^i |n\rangle. \quad (1.7)$$

Reescrevendo a expressão 1.5 acima, resulta em

$$\begin{aligned} \langle A \rangle &= \sum_i \gamma^i \langle \psi^i | A | \psi^i \rangle, \\ &= \sum_i \gamma^i \sum_{n,m} (c_n^i)^* c_m^i \langle n | A | m \rangle, \\ &= \sum_{n,m} \rho_{mn} A_{nm} = Tr(\rho A), \end{aligned} \quad (1.8)$$

em que

$$\rho_{mn} = \sum_i \gamma^i (c_n^i)^* c_m^i = \langle m | \rho | n \rangle \quad (1.9)$$

e

$$A_{nm} = \langle n | A | m \rangle. \quad (1.10)$$

Sabendo que a função de onda descreve completamente o nosso sistema, seria interessante escrever o operador densidade em função dela. Para isso, sabendo os coeficientes $(c_n^i)^* = \langle \psi^i | n \rangle$ e $c_m^i = \langle m | \psi^i \rangle$, escrevemos:

$$\begin{aligned} \rho_{mn} &= \sum_i \gamma^i (c_n^i)^* c_m^i, \\ &= \sum_i \gamma^i \langle \psi^i | n \rangle \langle m | \psi^i \rangle, \\ &= \langle m | \sum_i \gamma^i |\psi^i\rangle \langle \psi^i | n \rangle. \end{aligned} \quad (1.11)$$

O que implica em

$$\hat{\rho} = \sum_i \gamma^i |\psi^i\rangle \langle \psi^i|. \quad (1.12)$$

Mas porquê a operação de traço (Tr) é interessante? Considere a expressão abaixo para um estado puro ($\gamma^i = 1$), isto é,

$$Tr(\hat{A}) \equiv \sum_i \langle o_i | \hat{A} | o_i \rangle, \quad (1.13)$$

onde $\{|o_i\rangle\}$ é uma base ortonormal no espaço de Hilbert. Vamos considerar agora o traço do produto $\hat{A} = \hat{\rho}\hat{O}$, sendo \hat{O} um operador de algum observável, com o operador densidade $\hat{\rho}$, isto é,

$$\begin{aligned} Tr(\hat{\rho}\hat{O}) &= \sum_i \langle o_i | (|\psi\rangle\langle\psi|) \hat{O} |o_i\rangle, \\ &= \sum_i \langle o_i | \psi \rangle \langle \psi | \hat{O} |o_i\rangle, \\ &= \langle \hat{O} \rangle. \end{aligned} \tag{1.14}$$

Obtemos assim, o valor esperado do operador \hat{O} para o sistema no estado puro $|\psi\rangle$. De modo que $Tr(\hat{\rho}\hat{O})$ representa uma média sobre todos os possíveis resultados o_i diferindo com relação às probabilidades associadas $\|\langle o_i | \psi \rangle\|^2$ (SCHLOSSHAUER, 2007).

Vale o esforço de uma rápida demonstração agora para encontrar a equação de Liouville-von Neumann que descreve a evolução temporal do operador densidade. Tal equação aparecerá nas seções seguintes.

Calculando-se a derivada da equação 1.12 e utilizando a equação de Schrödinger 1.4, obtemos:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \hat{\rho}(t)}{\partial t} &= i\hbar \sum_i \gamma^i \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} |\psi^i\rangle \right) \langle \psi^i | + |\psi^i\rangle \left(\langle \psi^i | \frac{\partial}{\partial t} \right) \right], \\ &= \sum_i \gamma^i \left[(\hat{H} |\psi^i\rangle) \langle \psi^i | - |\psi^i\rangle (\langle \psi^i | \hat{H}) \right], \\ &= \hat{H} \hat{\rho}(t) - \hat{\rho}(t) \hat{H}. \end{aligned} \tag{1.15}$$

Mais comumente expressa como:

$$i\hbar \frac{\partial \hat{\rho}(t)}{\partial t} = [\hat{H}, \hat{\rho}(t)], \tag{1.16}$$

e podendo ainda ser denotada na forma

$$i\hbar \frac{\partial \hat{\rho}(t)}{\partial t} = \hat{\mathcal{L}} \hat{\rho}(t). \tag{1.17}$$

A forma da equação 1.16, mais frequentemente encontrada na literatura, é a chamada equação de Liouville-von Neumann. Na expressão 1.17, $\mathcal{L} = [H, \cdot]$ é chamado de operador Liouvilliano, *Liouvillian*. Na mecânica estatística quântica, esse operador é comumente utilizado para descrever a evolução de sistemas que seguem a equação de Liouville-von Neumann com H sendo o operador hamiltoniano, de modo que a sua solução formal é:

$$\hat{\rho}(t) = e^{-i(t-t')\hat{\mathcal{L}}} \hat{\rho}(t'). \tag{1.18}$$

É interessante dizer que, para $\gamma^i = 1$, ou seja, quando não há ensemble e sim um estado puro, a equação de Liouville-von Neumann nos fornece as mesmas informações sobre um sistema quântico que a equação de Schrödinger.

1.3 Decoerência e a ação do ambiente

Para explicar este tópico, é interessante fazer um experimento mental sobre como poderíamos identificar um objeto sem o enxergar. Poderíamos bombardear este objeto com várias partículas de modo que pudéssemos obter informações sobre o seu estado e então inferir sobre a sua natureza e propriedades. Objetivamente é isso que acontece conosco e todos os objetos existentes. Tudo que não está em um ambiente completamente controlado, ou idealmente isolado, está sujeito à interação com partículas tais como moléculas de ar e fótons. Essas partículas colidem com a matéria e sendo assim levam consigo informações a seu respeito, é o que vemos na figura 2, que mostra como um objeto é submetido ao efeito da decoerência (interação com o ambiente), e servirá para o entendimento das seções seguintes.

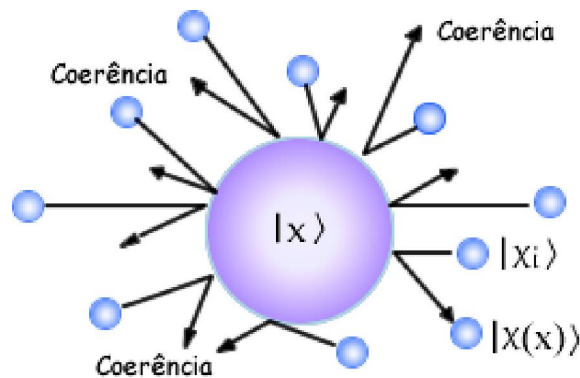


Figura 2 – Esquema da atuação da perda de coerência devido a colisão de fótons em um objeto. Fonte: Autoral. Imagem inspirada em imagens do livro (SCHLOSSHAUER, 2007).

O fenômeno da decoerência ocorre de diversas formas, mas em geral, a quantidade de partículas que compõe o ambiente e o tempo necessário para que um objeto perca suas propriedades quânticas irão depender de alguns fatores como o comprimento de onda da partícula incidente, a temperatura ambiente e a distância entre os entes interagentes. Geralmente, uma partícula apenas ou poucas, não são suficiente para retirar informações expressivas a respeito da forma, natureza ou mesmo propriedades que este objeto possui.

Podemos descrever esse processo na linguagem da mecânica quântica, supondo que N partículas no estado inicial $|E_0\rangle$ serão responsáveis por atingir um dado objeto em algum intervalo de tempo e extrair informações a seu respeito, como por exemplo a sua orientação no espaço. Outra ponderação, é que primeiro vamos considerar que essas partículas serão espalhadas em duas direções para as quais os seus estados $|E_1\rangle$ e $|E_2\rangle$ são facilmente distinguíveis, portanto não haverá interferência entre elas.

Vamos supor agora que este sistema é composto por uma superposição de dois estados quânticos coerentes $|\psi_1\rangle$ e $|\psi_2\rangle$ os quais representam a sua localização referente à posição x_1 e x_2 respectivamente. Sendo assim, antes da colisão ficamos com o seguinte

estado (SCHLOSSHAUER, 2007):

$$|\psi\rangle |E_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\psi_1\rangle + |\psi_2\rangle) |E_0\rangle. \quad (1.19)$$

É sabido que para identificar quaisquer propriedades, é necessário medi-las, e isso, em um laboratório, é facilmente feito com detectores. No entanto, estamos falando de um fenômeno que acontece continuamente na natureza. Isso é muito interessante, pois, é como se tivéssemos detectores ambientais presentes em todos lugares da natureza, pois cada objeto interage com o ambiente a sua volta de alguma forma, o qual irá obter informações físicas do sistema. É como se a interação com o ambiente representasse uma medida contínua do sistema.

Sendo assim, como foi discutido, o estado emaranhado entre o sistema e o ambiente irá evoluir para $|E_1\rangle$ ou para $|E_2\rangle$:

$$\begin{aligned} |\psi_1\rangle |E_0\rangle &\rightarrow |\psi_1\rangle |E_1\rangle, \\ |\psi_2\rangle |E_0\rangle &\rightarrow |\psi_2\rangle |E_2\rangle, \end{aligned} \quad (1.20)$$

o que implica, segundo a equação 1.19, em

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (|\psi_1\rangle \otimes |E_0\rangle + |\psi_2\rangle \otimes |E_0\rangle) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (|\psi_1\rangle |E_1\rangle + |\psi_2\rangle |E_2\rangle). \quad (1.21)$$

Nota-se que a evolução dos sistemas acima, chamada de evolução de Von Neumann, indica uma representação do processo de decoerência.

Por fim, verificamos que os estados $|\psi_1\rangle$ e $|\psi_2\rangle$ estão emaranhados com os chamados estados ambiente $|E_1\rangle$ e $|E_2\rangle$, ou seja, como foi explicitado na expressão acima 1.21, $|\psi_{1,2}\rangle |E_{1,2}\rangle \neq |\psi_{1,2}\rangle \otimes |E_{1,2}\rangle$. Fisicamente temos que, antes, na expressão 1.19, a superposição estava confinada ao próprio sistema, de modo que agora 1.21 está em um sistema composto, e isso implica que a coerência dos estados quânticos não é mais propriedade do sistema isolado. Portanto, verificamos um exemplo de dinâmica de decoerência.

1.4 Decoerência e o amortecimento da interferência

Como o visto na seção anterior, primeiro havíamos considerado que não havia interferência entre $|E_1\rangle$ e $|E_2\rangle$, agora vamos supor o contrário, e já visualizaremos aqui o porquê de termos introduzido o conceito da matriz densidade. Neste ponto do desenvolvimento teórico, devemos falar da matriz de densidade reduzida pois ela será de grande valia para o estudo da decoerência.

A ideia por trás desta descrição matemática, é poder descrever um sistema quântico A que está emaranhado com outro B , formando por exemplo, um sistema puro AB . No entanto, o nosso observador só consegue acessar o sistema A . Por "acessar", entende-se

fazer aferições locais neste sistema quântico, e obter então os seus possíveis resultados de aferição. Sendo assim, o artifício matemático que se tem conhecimento de ser eficiente na tarefa de traduzir as probabilidades das aferições, é justamente a matriz densidade reduzida, dada por:

$$\hat{\rho}_A \equiv Tr_B(\hat{\rho}). \quad (1.22)$$

A operação Tr_B significa traço parcial sobre o sistema quântico B , ou seja, a operação traço será realizada usando uma base ortonormal do espaço de Hilbert (H_B). Sendo assim, as aferições estatísticas de observáveis do sistema quântico A estarão contidas na matriz densidade $\hat{\rho}_A$. Como a decoerência advém da interação entre dois sistemas, o de interesse e o ambiente, a essa interação quântica denominamos emaranhamento quântico e, bem claro que, via de regra, será o observador que irá aferir as propriedades do sistema de interesse e não o ambiente. Por isso a matriz densidade reduzida aparece neste estudo, por ser capaz de obter uma descrição estatística do estado quântico que nos interessa, pois as influências do ambiente nessas ditas aferições locais estarão nela encapsuladas, e por essa propriedade, ela é também claramente não pura.

Vamos construir, então, o operador densidade para a situação exposta na seção anterior. Para tanto, seguiremos de perto a referência (SCHLOSSHAUER, 2007). Dado um estado emaranhado entre dois sistemas A e B ,

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|a_1\rangle |b_1\rangle + |a_2\rangle |b_2\rangle), \quad (1.23)$$

levando em consideração que $|a_i\rangle$ e $|b_i\rangle, i = 1, 2$, pertencem a espaços vetoriais diferentes H_A e H_B , o operador densidade como demonstramos em 1.12 poderá ser escrito como:

$$\begin{aligned} \hat{\rho} &= |\Psi\rangle \langle\Psi| = \frac{1}{2} (|a_1\rangle \otimes |b_1\rangle + |a_2\rangle \otimes |b_2\rangle) (\langle a_1| \otimes \langle b_1| + \langle a_2| \otimes \langle b_2|), \\ &= \frac{1}{2} \sum_{ij=1}^2 |a_i\rangle \langle a_j| \otimes |b_i\rangle \langle b_j|. \end{aligned} \quad (1.24)$$

Considera-se que A representa o sistema quântico de interesse (S) e B o ambiente (ξ), de modo que teremos os vetores $|\psi_i\rangle$ e $|E_i\rangle$ pertencendo a S e ξ respectivamente. A expressão 1.22 e a expansão $|E_i\rangle = \sum \gamma_m^i |\phi_m\rangle$, sendo $|\phi_m\rangle$ uma base ortonormal em H_ξ , viabiliza:

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_S &= Tr_\xi \left(\frac{1}{2} \sum_{ij=1}^2 |\psi_i\rangle \langle\psi_j| \otimes |E_i\rangle \langle E_j| \right), \\ &= \frac{1}{2} \sum_{ij=1}^2 |\psi_i\rangle \langle\psi_j| \sum_k \langle\phi_k| \left(\sum_{mn} \gamma_m^i (\gamma_n^j)^* |\phi_m\rangle \langle\phi_n| \right) |\phi_k\rangle, \\ &= \frac{1}{2} \sum_{ij=1}^2 |\psi_i\rangle \langle\psi_j| \sum_k \gamma_k^i (\gamma_k^j)^*, \\ &= \frac{1}{2} \sum_{ij=1}^2 |\psi_i\rangle \langle\psi_j| \langle E_j| E_i \rangle. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Portanto,

$$\hat{\rho}_S = \frac{1}{2} (|\psi_1\rangle \langle \psi_1| + |\psi_2\rangle \langle \psi_2| + |\psi_1\rangle \langle \psi_2| \langle E_2|E_1\rangle + |\psi_2\rangle \langle \psi_1| \langle E_1|E_2\rangle). \quad (1.26)$$

Os dois termos finais apresentam uma sobreposição entre os estados, portanto interferência, que é o responsável pelos fenômenos quânticos. Logo, a decoerência atuaria de modo a reduzir estes termos, o que resultaria em

$$\hat{\rho} \approx \frac{1}{2} (|\psi_1\rangle \langle \psi_1| + |\psi_2\rangle \langle \psi_2|). \quad (1.27)$$

Será discutido em seções seguintes a respeito da celeridade desse processo no qual há perda da interferência. Neste ponto, uma ilustração adicional sobre decoerência envolvendo um sistema físico mais concreto é de interesse para os propósitos deste trabalho.

Discutiremos a seguir um típico estado quântico em superposição, chamado qubit, utilizado no estudo da informação quântica. Seja o seguinte estado de superposição:

$$|\psi\rangle = \alpha_0 |0\rangle + \alpha_1 |1\rangle. \quad (1.28)$$

Um breve entendimento a respeito do nome qubit advém dos circuitos que processam a informação clássica. Esses circuitos são compostos de transistores, os quais são responsáveis por amplificar ou atenuar correntes elétricas. Essa característica fez deles componentes indispensáveis nos chips eletrônicos, sendo responsáveis pela decodificação de códigos binários constituídos de zero e um (os chamados bits). Eles constituem a unidade básica de informação clássica. Para transpor o bit para o contexto da mecânica quântica, teremos também estados com valores binários, no entanto, essa informação poderá adicionalmente ser codificada num estado de superposição. Isso implica que agora, o estado de superposição irá descrever uma combinação linear de amplitudes de probabilidade, o que nos leva a padrões de interferência (SCHLOSSHAUER, 2007).

A condição a ser satisfeita é que a soma das probabilidades $|\alpha_0|^2 + |\alpha_1|^2$ seja um. Novamente a matriz densidade 1.24 pode ser construída com os estados dados pela equação 1.28:

$$\hat{\rho} = |\psi\rangle \langle \psi| = \begin{pmatrix} \alpha_0 \alpha_0^* & \alpha_0 \alpha_1^* \\ \alpha_1 \alpha_0^* & \alpha_1 \alpha_1^* \end{pmatrix}. \quad (1.29)$$

Note que agora, pode-se acrescentar ao coeficiente do estado $|1\rangle$ na equação 1.28 uma fase de módulo unitário $e^{i\phi}$, tal que: $|\psi\rangle = \alpha_0 |0\rangle + \alpha_1 |1\rangle e^{i\phi}$, de modo que, ainda assim, irá satisfazer a condição da soma das probabilidades ser igual a 1.

Para esse caso do estado em 1.28 com a fase, vamos considerar que ambos os estados que o constitui tenham a mesma probabilidade. A matriz densidade é então dada por

$$\hat{\rho} = |\psi\rangle \langle \psi| = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} e^{-i\phi} \\ \frac{1}{2} e^{i\phi} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \quad (1.30)$$

Para calcularmos a média para um ensemble de N sistemas de estados puros $\{|\psi_i\rangle\}$, o operador densidade pode ser escrito como:

$$\begin{aligned}\hat{\rho} &= \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N |\psi_j\rangle \langle\psi_j|, \\ &= \frac{1}{2} |0\rangle \langle 0| + \frac{1}{2} |1\rangle \langle 1| + \left(\frac{1}{2N} \sum_{j=1}^N e^{i\phi_j} \right) |1\rangle \langle 0| + \left(\frac{1}{2N} \sum_{j=1}^N e^{-i\phi_j} \right) |0\rangle \langle 1|.\end{aligned}\tag{1.31}$$

Podemos notar que em um limite no qual N é grande, as somas das fases aleatórias $e^{\pm i\phi_i}$ tendem a zero na média, logo,

$$\hat{\rho} \rightarrow \frac{1}{2} |0\rangle \langle 0| + \frac{1}{2} |1\rangle \langle 1|.\tag{1.32}$$

Sendo assim a matriz 1.30 se torna:

$$\hat{\rho} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.\tag{1.33}$$

O fenômeno da decoerência está intimamente relacionado com o desaparecimento da interferência entre os estados e como podemos ver, isto é o que acontece nos termos cruzados da matriz 1.30 que tendem a se esvaír. É interessante também notar que a matriz 1.33 evidencia que não é possível escrever um estado de superposição que resulte nesta matriz. Basta olharmos para a matriz 1.29 e notarmos que para os termos fora da diagonal principal sejam nulos, ou α_0 ou α_1 devem ser nulos, o que nos resultaria em uma matriz com alguma das entradas da diagonal principal nula, o que não acontece.

Isso mostra a importância da matriz de densidade, pois, com toda função de onda é possível escrever uma matriz de densidade, mas o contrário nem sempre é possível. É por isso que para o estudo da decoerência, é necessário trabalhar com as matrizes densidade. A matriz 1.33 nos mostra na diagonal principal as probabilidades para os resultados possíveis de uma medida, de modo que os termos fora desta diagonal, representam a coerência quântica do sistema, ou seja, a capacidade da função de onda de interferir consigo mesma. Pode-se dizer então, que a decoerência é responsável por converter probabilidades quânticas em probabilidades clássicas.

1.4.1 Decoerência e ruído

Neste último exemplo, mostramos como obtivemos exatamente o mesmo tipo de resultado 1.32 que aquele discutido anteriormente para a eq.1.27. No entanto, deve-se entender que no caso da eq.1.32, o desaparecimento dos termos de interferência (matricialmente, os termos fora da diagonal principal), tem relação com uma média que se faz entre diversos estados em um ensemble de partículas. Essa fase $e^{i\phi}$ que consideramos pode ser oriunda devido a condições iniciais distintas dos sistemas que constituem o ensemble,

ou, por mais que os sistemas se encontrem no mesmo estado, podem estar sujeitos a diferentes hamiltonianas. Independentemente da razão, essas diferenças de fases vem de causas clássicas. Logo, não corresponde de fato ao que estamos chamando de decoerência. Por isso, na referência (SCHLOSSHAUER, 2007), o autor usa o termo ruído clássico para se referir a este processo, bem como caracteriza essa descrição como decoerência falsa.

Isto nos leva a concluir que a decoerência é tida como um processo no qual há uma defasagem da coerência para sistemas individuais, sendo essa uma propriedade do sistema emaranhado. Logo, o ponto a ser frisado é que, nem todo processo no qual há uma correspondência formal com relação ao operador densidade deve ser encarado como decoerência. Mas, apesar disso, essa abordagem exemplifica de maneira mais visual e pedagógica vários aspectos do fenômeno, tarefa essa que nem sempre é fácil ao se tratar de mecânica quântica, principalmente levando em conta o uso de seus integrantes matemáticos.

1.5 Decoerência e dissipação

Sempre que estudamos algum assunto novo, tentamos associar com algo já conhecido. No contexto do estudo da decoerência é importante delinear a diferença entre decoerência e dissipação nos fenômenos físicos.

A dissipação é um efeito clássico que representa a perda de energia do sistema para o ambiente. Isso ocorre devido a troca de energia entre dois sistemas. Tipicamente podemos pensar em objetos que entram em equilíbrio térmico por exemplo, e a velocidade com qual isso ocorre chamamos de relaxamento, de modo que uma interação forte significa um tempo de relaxamento menor.

O interessante é que se não há dissipação, ainda assim não é correto afirmar que não há interação alguma entre esses sistemas, e portanto em geral haverá decoerência. Logo, dissipação implica decoerência, mas o contrário não é sempre válido. Sendo assim, podemos estimar a ordem de grandeza do tempo de relaxamento de cada um para distingui-los. Na referência (ZUREK, 1986) é demonstrado:

$$\frac{\tau_r}{\tau_d} \approx \left(\frac{\Delta x}{\lambda_{dB}} \right)^2, \quad (1.34)$$

em que a escala de tempo da decoerência τ_d é muito menor que a de dissipação τ_r , Δx é a distância entre dois pacotes de onda e λ_{dB} é o comprimento de lambda de de Broglie de um objeto dado por:

$$\lambda_{dB} = \frac{\hbar}{\sqrt{4mK_B T}}, \quad (1.35)$$

de modo que m representa a partícula do sistema central e T a temperatura do banho térmico do sistema.

Essa grande disparidade entre as escalas de tempo da decoerência e de uma dissipação, justifica o porquê de não termos objetos macroscópicos quânticos, pois os vetores de estados colapsam quase que instantaneamente (ZUREK, 1986). Podemos notar este efeito como ilustra a figura 2, em que temos um objeto macroscópico sendo atingido por vários fótons. O que acontece é que a influência dissipativa do ambiente é desprezível no que concerne ao efeito quântico da decoerência. Logo, a coerência deste objeto macroscópico é quase que instantaneamente retirada do estado de superposição no qual as partículas estavam.

1.6 Decoerência a partir da teoria de espalhamento

Como já foi dito, a decoerência é um processo que se dá pela interação do sistema com o ambiente. Essa interação têm como principais fontes de decoerência a emissão de radiação térmica e do espalhamento causado pela colisão com partículas. No regime quântico, qualquer interação entre a partícula incidente e as colididas levam ao emaranhamento e conseqüentemente a decoerência.

Tendo isso em vista, seguiremos com a construção do modelo de espalhamento com o objetivo de descrever a decoerência a partir da função de Wigner. Nossos desenvolvimentos serão baseados nas referências (SCHLOSSHAUER, 2007) e (JOOS et al., 2013).

Primeiramente, devemos considerar que o objeto S (esfera central na figura 2) será o causador do espalhamento de partículas do ambiente ξ . Inicialmente devemos supor que estes corpos não estão relacionados, ou seja, não estão emaranhados. Portanto, a matriz densidade do sistema composto admite a forma

$$\hat{\rho}(0) = \hat{\rho}_S(0) \otimes \hat{\rho}_\xi(0), \quad (1.36)$$

em que $\hat{\rho}_S(0)$ é o operador densidade do sistema e $\hat{\rho}_\xi(0)$ do ambiente.

Para avaliar o efeito de uma colisão na matriz densidade $\hat{\rho}_S$, vamos considerar que a partícula incidente tem massa desprezível em relação a partícula S , de modo que ela se encontra em um estado inicial $|\chi_i\rangle$. Ela então colide com a partícula S no estado posição $|x\rangle$ e sai no estado $|\chi(x)\rangle$ como o ilustrado na figura 2. Podemos então descrever o efeito do espalhamento através da ação do operador \hat{S} , ou seja

$$|x\rangle |\chi_i\rangle \rightarrow \hat{S} |x\rangle |\chi_i\rangle. \quad (1.37)$$

Pode-se reescrever o vetor de estado posição $|x\rangle$ de modo que ele descreva uma localizado no centro, podendo então ser expresso pela ação do operador de translação do sistema gerado pelo momento \hat{p} :

$$|x\rangle = e^{\frac{-i\hat{p}\cdot x}{\hbar}} |x=0\rangle. \quad (1.38)$$

Deste modo a equação 1.37 se torna

$$e^{-\frac{i\hat{p}\cdot\hat{x}}{\hbar}} |0\rangle |\chi_i\rangle \rightarrow \hat{S} e^{-\frac{i\hat{p}\cdot x}{\hbar}} |0\rangle |\chi_i\rangle = \hat{S} e^{-\frac{i(\hat{p}+\hat{q})\cdot x}{\hbar}} |0\rangle e^{\frac{i\hat{q}\cdot x}{\hbar}} |\chi_i\rangle. \quad (1.39)$$

Aqui introduzimos o operador \hat{q} , que é o momento para a partícula espalhada, o que nos possibilita definir um operador momento para o sistema composto $S\xi$, $\hat{P} \equiv \hat{p} + \hat{q}$. Considerando que há invariância de translações do sistema $S\xi$, obtemos que $[\hat{S}, \hat{P}] = 0$. Logo, a expressão 1.39 fica:

$$\hat{S} |x\rangle |\chi_i\rangle = e^{-\frac{i(\hat{p}+\hat{q})\cdot x}{\hbar}} \hat{S} |0\rangle e^{\frac{i\hat{q}\cdot x}{\hbar}} |\chi_i\rangle. \quad (1.40)$$

É importante ressaltar que este desenvolvimento considera que as partículas espalhadas são bem menores que o objeto com a qual elas colidem, logo, por consequência, assume-se que não há recuo no momento da colisão. Sendo assim, pode-se inferir que a atuação do operador \hat{S} no sistema não altera o centro de massa do estado $|x\rangle$, o que nos possibilita fazer os seguintes cálculos,

$$\begin{aligned} \hat{S} |x\rangle |\chi_i\rangle &= e^{-\frac{i(\hat{p}+\hat{q})\cdot x}{\hbar}} |0\rangle \hat{S}_0 e^{\frac{i\hat{q}\cdot x}{\hbar}} |\chi_i\rangle, \\ &= e^{-\frac{i\hat{p}\cdot x}{\hbar}} |0\rangle e^{-\frac{i\hat{q}\cdot x}{\hbar}} \hat{S}_0 e^{\frac{i\hat{q}\cdot x}{\hbar}} |\chi_i\rangle, \\ &= |x\rangle e^{-\frac{i\hat{q}\cdot x}{\hbar}} \hat{S}_0 e^{\frac{i\hat{q}\cdot x}{\hbar}} |\chi_i\rangle, \\ &= |x\rangle \hat{S}_x |\chi_i\rangle \equiv |x\rangle |\chi(x)\rangle. \end{aligned} \quad (1.41)$$

Aqui a notação com sub-índice zero, indica que o operador de espalhamento \hat{S} se refere especificamente ao processo de espalhamento centralizado na origem do sistema. \hat{S}_x é o operador de espalhamento transladado para a posição x , e $|\chi(x)\rangle$ é o estado final da partícula espalhada. A conclusão que podemos tirar, é que o processo de espalhamento transforma o operador de densidade original 1.36,

$$\hat{\rho}(0) = \int dx \int dx' \rho_S(x, x', 0) |x\rangle \langle x'| \otimes |\chi_i\rangle \langle \chi_i|, \quad (1.42)$$

no seguinte operador:

$$\hat{\rho} = \int dx \int dx' \rho_S(x, x', 0) |x\rangle \langle x'| \otimes |\chi(x)\rangle \langle \chi(x')|. \quad (1.43)$$

Pode-se então expressar a matriz densidade do sistema como

$$\hat{\rho}_S = \int dx \int dx' \rho_S(x, x', 0) |x\rangle \langle x'| \langle \chi(x') | \chi(x) \rangle, \quad (1.44)$$

tal que

$$\rho_S(x, x', 0) \rightarrow \rho_S(x, x', 0) \langle \chi(x') | \chi(x) \rangle. \quad (1.45)$$

Conclui-se que há uma supressão local da coerência espacial devido ao espalhamento quantificado pela sobreposição $\langle \chi(x') | \chi(x) \rangle$. Devemos agora calcular o fator de decoerência e a dependência temporal para esta sobreposição.

1.6.1 Fator de decoerência

Para darmos prosseguimento ao nosso desenvolvimento do modelo de espalhamento, devemos escrever o operador de espalhamento $\hat{S}_0 = \hat{I} + i\hat{T}$ em termos do operador \hat{T} , comumente usado na teoria padrão de espalhamento da mecânica quântica (SAKURAI JUN JOHN; COMMINS, 1995). Esse operador é interessante pois os seus elementos na base do momento $\{|q\rangle\}$ das partículas espalhadas, podem ser escritos em termos da amplitude de espalhamento $f(q, q')$ tal como encontramos em (SCHLOSSHAUER, 2007):

$$\langle q|\hat{T}|q'\rangle = \frac{i}{2\pi\hbar q}\delta(q - q')f(q, q') = \frac{i}{2\pi\hbar m}\delta(E - E')f(q, q'), \quad (1.46)$$

de modo que, m é a massa das partículas do ambiente, $q = \|\vec{q}\|$. É importante ressaltar que, como q e x são quantidades vetoriais, omitimos a notação de vetores para essas quantidades.

O termo $\delta(E - E')$ está relacionado com a conservação de energia devido a consideração inicial feita, de que a colisão é elástica. Temos também que a amplitude de espalhamento pode ser mensurada como:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \equiv \frac{\text{fluxo espalhado}}{\text{fluxo incidente}} \equiv \|f(q, q')\|^2. \quad (1.47)$$

Usando 1.41, o *overlap* dos estados espalhados podem ser descritos da seguinte forma:

$$\langle \chi(x')|\chi(x)\rangle = \langle \chi_i|\hat{S}_x^\dagger\hat{S}_x|\chi_i\rangle, \quad (1.48)$$

de modo que, com a operação do traço, obtemos

$$\langle \chi(x')|\chi(x)\rangle = \text{Tr}_\xi(\rho_\xi(0)\hat{S}_x^\dagger\hat{S}_x), \quad (1.49)$$

em que $\rho_\xi(0) = |\chi_i\rangle\langle\chi_i|$.

Dando prosseguimento ao desenvolvimento da teoria, vamos agora introduzir uma nova base ortonormal do momento das partículas espalhadas, a qual se relaciona com a antiga da seguinte forma:

$$|\tilde{q}\rangle \equiv \sqrt{\frac{(2\pi\hbar)^3}{V}}|q\rangle, \quad (1.50)$$

o que necessariamente deve satisfazer tanto a relação de ortonormalidade quanto a relação de completeza

$$\sum_{q \in Q_V} |\tilde{q}\rangle\langle\tilde{q}| = \hat{I}. \quad (1.51)$$

Nesta normalização, temos V representando o volume do ambiente considerado. Isso nos possibilita escrever a matriz densidade inicial para o ambiente, em termos dessa base normalizada:

$$\rho_\xi(0) = \frac{(2\pi\hbar)^3}{V} \sum_{q \in Q_V} \mu(q)|\tilde{q}\rangle\langle\tilde{q}|, \quad (1.52)$$

em que chamamos $\mu(q)$ de densidade no espaço dos *momenta*. Q_V é o conjunto no qual os *momenta* correspondem ao espaço das funções de onda que cumprem as condições de contorno. Temos também que o operador T continua sendo diagonal nesta base normalizada, de modo que podemos agora juntar a equação 1.52 com a 1.49. Logo:

$$\begin{aligned} \langle \chi(x') | \chi(x) \rangle &= \frac{(2\pi\hbar)^3}{V} \sum_{q \in Q_V} \mu(q) \langle \tilde{q} | \hat{S}_x^\dagger \hat{S}_x | \tilde{q} \rangle, \\ &= \frac{(2\pi\hbar)^3}{V} \sum_{q \in Q_V} \mu(q) \langle \tilde{q} | e^{-i\hat{q}x'/\hbar} \hat{S}_0^\dagger e^{-i\hat{q}\cdot(x-x')/\hbar} \hat{S}_0 e^{i\hat{q}x/\hbar} | \tilde{q} \rangle, \\ &= \frac{(2\pi\hbar)^3}{V} \sum_{q \in Q_V} \mu(q) e^{i\hat{q}(x-x')/\hbar} \langle \tilde{q} | \hat{S}_0^\dagger e^{-i\hat{q}\cdot(x-x')/\hbar} \hat{S}_0 | \tilde{q} \rangle. \end{aligned} \quad (1.53)$$

Utilizando a expressão $\hat{S}_0 = \hat{I} + i\hat{T}$, sabendo que \hat{S}_0 é um operador unitário, facilmente verificamos a seguinte relação para o operador T :

$$\begin{aligned} \hat{S}_0 \hat{S}_0^\dagger &= (\hat{I} + i\hat{T}) (\hat{I} - i\hat{T}^\dagger) = \hat{I}, \\ \Rightarrow \hat{T} \hat{T}^\dagger + i(\hat{T} - \hat{T}^\dagger) &= 0. \end{aligned} \quad (1.54)$$

Munidos deste resultado e sabendo que o operador \hat{T} comuta com o operador momento \hat{q} , podemos sem grandes problemas chegar ao seguinte resultado:

$$\begin{aligned} \langle \chi(x') | \chi(x) \rangle &= \frac{(2\pi\hbar)^3}{V} \sum_{q \in Q_V} \mu(q) e^{i\hat{q}\cdot(x-x')/\hbar} \langle \tilde{q} | (I - i\hat{T}^\dagger) e^{-i\hat{q}\cdot(x-x')/\hbar} (I + i\hat{T}) | \tilde{q} \rangle, \\ &= \frac{(2\pi\hbar)^3}{V} \sum_{q \in Q_V} \mu(q) e^{i\hat{q}(x-x')/\hbar} \langle \tilde{q} | (e^{-i\hat{q}(x-x')/\hbar} + i(\hat{T} - \hat{T}^\dagger) e^{-i\hat{q}(x-x')/\hbar} + \hat{T}^\dagger e^{-i\hat{q}(x-x')/\hbar} \hat{T}) | \tilde{q} \rangle, \\ &= \frac{(2\pi\hbar)^3}{V} \sum_{q \in Q_V} \mu(q) (1 - \langle \tilde{q} | \hat{T} \hat{T}^\dagger | \tilde{q} \rangle + e^{i\hat{q}(x-x')/\hbar} \langle \tilde{q} | \hat{T}^\dagger e^{-i\hat{q}\cdot(x-x')/\hbar} \hat{T} | \tilde{q} \rangle). \end{aligned} \quad (1.55)$$

Pode-se simplificar essa expressão analisando-se o segundo e o terceiro termo dentro do somatório se inserirmos a relação de completeza da base dos *momenta*,

$$\langle \chi(x') | \chi(x) \rangle = \frac{(2\pi\hbar)^3}{V} \sum_{q \in Q_V} \mu(q) \left(1 - \sum_{q' \in Q_V} (1 - e^{i(\hat{q}-\hat{q}')\cdot(x-x')/\hbar}) \|\langle \tilde{q} | \hat{T} | \tilde{q}' \rangle\|^2 \right). \quad (1.56)$$

Fazendo o limite para o regime contínuo:

$$\frac{(2\pi\hbar)^3}{V} \sum_{q \in Q_V} \rightarrow \int dq, \quad (1.57)$$

e combinando as equações 1.56 e 1.50, juntamente com $\int \mu(q) dq = 1$, obtemos:

$$\langle \chi(x') | \chi(x) \rangle = 1 - \int \mu(q) \frac{(2\pi\hbar)^3}{V} dq \int (1 - e^{i(\hat{q}-\hat{q}')\cdot(x-x')/\hbar}) \|\langle q | \hat{T} | q' \rangle\|^2 dq'. \quad (1.58)$$

Relacionando as equações 1.45 e 1.58, bem como introduzindo o parâmetro temporal T , que denota o tempo decorrido do espalhamento, podemos escrever:

$$\begin{aligned} \rho_S(x, x', T) - \rho_S(x, x', 0) &= -\rho_S(x, x', 0) \\ &\times \int \mu(q) \frac{(2\pi\hbar)^3}{V} dq \int \left(1 - e^{i(\hat{q}-\hat{q}') \cdot (x-x')/\hbar}\right) \|\langle q | \hat{T} | q' \rangle\|^2 dq'. \end{aligned} \quad (1.59)$$

Precisamos avaliar o ultimo termo quadrado da equação acima, que representa a probabilidade de fazer a transição induzida por espalhamento de $|q\rangle$ para $|q'\rangle$, e para isso tomaremos o quadrado da equação 1.46,

$$\|\langle q | \hat{T} | q' \rangle\|^2 = \frac{1}{(2\pi\hbar m)^2} \delta^2(E - E') \|f(q, q')\|^2. \quad (1.60)$$

Fazendo isso, nos deparamos com a função delta de Dirac ao quadrado, e para isso o método encontrado em (ADLER, 2006) nos mostra o seguinte:

$$\begin{aligned} \delta(E - E') &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-T/2}^{T/2} e^{i(E-E')t/\hbar} dt, \\ \delta^2(E - E') &= \delta(E - E') \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-T/2}^{T/2} e^{i(E-E')t/\hbar} dt, \\ &= \delta(E - E') \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-T/2}^{T/2} dt, \\ &= \delta(E - E') \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T}{2\pi\hbar}. \end{aligned} \quad (1.61)$$

No procedimento acima, percebe-se no integrando que $E = E'$ necessariamente, caso contrário a integral seria nula. A interpretação que se retira é que a transição de probabilidade aumenta aproximadamente de forma linear para valores de T suficientemente grandes. Deve-se assumir também que T é notoriamente menor que o tempo característico da decoerência causada pela colisão das partículas com a esfera da figura 2. Portanto, é possível adotar com base na eq.1.46

$$\delta^2(E - E') = \delta(E - E') \frac{T}{2\pi\hbar} = \delta(q - q') \frac{m}{q} \frac{T}{2\pi\hbar}. \quad (1.62)$$

Agora, devemos utilizar este resultado e substituí-lo na equação 1.60 e por fim na 1.59, de modo que obtemos:

$$\begin{aligned} \rho_S(x, x', T) - \rho_S(x, x', 0) &= -\rho_S(x, x', 0) \\ &\times \frac{T}{V} \int \mu(q) v(q) dq \int \left(1 - e^{i(q-q\hat{n}') \cdot (x-x')/\hbar}\right) \|f(q, q\hat{n}')\|^2 d\hat{n}'. \end{aligned} \quad (1.63)$$

Foi introduzido $v(q) = q/m$ para partículas massivas e para fótons, claramente $v(q) = c$. É importante ressaltar que a equação 1.63 é apenas para um evento único de espalhamento, no qual basta multiplicarmos por N para generalizar para várias partículas. Outra ressalva, é que aqui estamos integrando com relação a $dn' = dq'/q^2$, que é o diferencial de um ângulo sólido.

Para encontrarmos o fator de decoerência, será necessário definirmos a distribuição de probabilidade do momento $\mu(q)$ sabendo que N/V é a densidade de partículas do ambiente e que as partículas possuem uma distribuição isotrópica,

$$\mu(q) \equiv \frac{1}{4\pi} \left(\frac{N}{V}\right)^{-1} \varrho(q) dq d\hat{n}, \quad (1.64)$$

dado que $\varrho(q)$ simboliza a densidade de partículas incidentes, de modo a obtermos $\int \varrho(q) dq = N/V$, como foi dito. Por fim, dividimos a equação 1.63 por T e aplicamos o limite $\lim_{T \rightarrow 0}$:

$$\frac{\partial \rho_S(x, x', t)}{\partial t} = -F(x - x') \rho_S(x, x', t), \quad (1.65)$$

em que

$$F(x - x') = \int \varrho(q) \nu(q) dq \int \left(1 - e^{iq(\hat{n} - \hat{n}') \cdot (x - x')/\hbar}\right) \|f(q\hat{n}, q\hat{n}')\|^2 \frac{d\hat{n}d\hat{n}'}{4\pi}. \quad (1.66)$$

A expressão para o fator de decoerência $F(x - x')$ representa a taxa de decoerência na qual a coerência espacial entre as posições x e x' se tornam localmente suprimidas..

Agora chegamos a um ponto importante deste capítulo. As equações 1.65 e 1.66 são um dos grandes resultados almeçados pois quantificam, mesmo que de forma geral ainda, a influência de um conjunto de partículas incidentes que interagem com um objeto e carregam consigo a coerência quântica.

1.6.2 Determinando o fator de decoerência

Vimos nas equações 1.65 e 1.66 traços gerais de como determinar a dinâmica da decoerência. Para ser mais preciso, vamos tratar do caso no qual será necessário várias partículas interagindo, colidindo e espalhando com relação ao objeto central.

Encontramos essa abordagem nas referências (JOOS; ZEH, 1985), (JOOS et al., 2013) e (SCHLOSSHAUER, 2007). O caso limite que será abordado, é aquele no qual há uma superposição coerente de dois pacotes de onda separados por uma distância $\Delta x = \|x - x'\|$ e no qual as partículas incidentes possuem um comprimento de onda $\lambda_0 \gg \Delta x$, lembrando que este lambda vem da relação de de Broglie, em que temos a relação entre momento q_0 e comprimento de onda:

$$q_0 = \frac{2\pi\hbar}{\lambda_0}. \quad (1.67)$$

Devemos nos recordar que o momento é representado como q , pois, nos referimos ao momento das partículas espalhadas.

Ao assumirmos $\lambda_0 \gg \Delta x$, temos que $q_0 \Delta x / \hbar \ll 1$, sendo assim, podemos expandir o primeiro termo da segunda integral da expressão 1.66,

$$1 - e^{iq(\hat{n} - \hat{n}') \cdot (x - x')/\hbar} \approx -\frac{i}{\hbar} q (\hat{n} - \hat{n}') \cdot (x - x') + \frac{1}{2\hbar^2} q^2 \{(\hat{n} - \hat{n}') \cdot (x - x')\}^2. \quad (1.68)$$

Ao fazermos isso, devemos reavaliar a equação 1.66 para o fator de decoerência. O primeiro termo da expansão acima irá sumir na integração, por termos uma integral em todas as direções \hat{n}' e \hat{n} de uma função ímpar $(\hat{n} - \hat{n}') \cdot (x - x')$ multiplicada por uma par $\|f(q\hat{n}, q\hat{n}')\|^2$. Logo, ficamos com

$$F(x - x') = \int q^2 \varrho(q) v(q) dq \int \{(\hat{n} - \hat{n}') \cdot (x - x')\}^2 \|f(q\hat{n}, q\hat{n}')\|^2 \frac{d\hat{n}d\hat{n}'}{8\pi\hbar^2}. \quad (1.69)$$

Seguindo na ideia de simplificar esta importante expressão, podemos considerar sem perda de generalidade que a escolha do sistemas de coordenadas não altera o fenômeno do espalhamento. Sendo assim, pode-se reescrever o primeiro termo da segunda integral como:

$$\begin{aligned} (x - x')^2 \frac{1}{3} \sum_{i=x,y,z} \{(\hat{n} - \hat{n}') \cdot \hat{i}\}^2 &= \frac{1}{3} (x - x')^2 (\hat{n} - \hat{n}')^2, \\ &= \frac{1}{3} (x - x')^2 2(1 - \hat{n} \cdot \hat{n}'), \\ &= \frac{2}{3} (x - x')^2 (1 - \cos \Theta). \end{aligned} \quad (1.70)$$

Ressalta-se que Θ é o ângulo entre o feixe incidente e o feixe espalhado. Ficamos então com:

$$F(x - x') = (x - x')^2 \int \varrho(q) v(q) q^2 dq \frac{2}{3} \int (1 - \cos \Theta) \|f(q\hat{n}, q\hat{n}')\|^2 \frac{d\hat{n}d\hat{n}'}{8\pi\hbar^2}. \quad (1.71)$$

Podemos considerar também que a seção de choque é independente da direção considerada, logo $\|f(q\hat{n}, q\hat{n}')\|^2$ passa a depender apenas do ângulo Θ e da magnitude do momento q . O que nos leva a:

$$F(x - x') = (x - x')^2 \int \varrho(q) v(q) q^2 dq \frac{2\pi}{3\hbar^2} \int (1 - \cos \Theta) \|f(q, \cos \Theta)\|^2 d \cos \Theta. \quad (1.72)$$

Interpreta-se então a segunda integral como sendo a seção de choque efetiva do processo de espalhamento. Definida em (SCHLOSSHAUER, 2007) como:

$$\sigma_{eff} = \frac{2\pi}{3} \int (1 - \cos \Theta) \|f(q, \cos \Theta)\|^2 d \cos \Theta. \quad (1.73)$$

Voltando à equação 1.65, podemos inscrever a variação da matriz densidade de acordo com a teoria do espalhamento como:

$$\frac{\partial \rho_S(x, x', t)}{\partial t} = -\Lambda (x - x')^2 \rho_S(x, x', t), \quad (1.74)$$

no qual Λ é o responsável pelo caráter físico da decoerência, definido por (SCHLOSSHAUER, 2007):

$$\Lambda \equiv \int \varrho(q) v(q) \frac{q^2}{\hbar^2} \sigma_{eff}(q) dq. \quad (1.75)$$

Por conseguinte, o que se obteve foi que a equação 1.74 leva a uma supressão exponencial dos termos de interferência em função do tempo e Δx , sendo Λ o responsável por quantificar com que intensidade a decoerência espacial será suprimida dada a distância entre pacotes de ondas separados por Δx . A equação 1.74 tem solução

$$\rho_S(x, x', t) = \rho_S(x, x', 0) e^{-\Lambda(\Delta x)^2 t}. \quad (1.76)$$

No esforço de manter a coesão do texto, podemos agora voltar à seção 1.3, *decoerência e a ação do ambiente*, na qual escrevemos os estados $|E_1\rangle$ e $|E_2\rangle$ referentes ao ambiente. Até então possuíamos um desenvolvimento teórico de certa forma intuitivo. No entanto, dado essa nova descoberta, eq.1.76, concluímos que a sobreposição, ou interferência desses estados ambiente vão obedecer a seguinte relação

$$\langle E_x(t) | E_{x'}(t) \rangle \propto e^{-\Lambda(x-x')^2 t}. \quad (1.77)$$

Adicionalmente é interessante ressaltar que se pode obter o tempo característico no qual se dá a perda de coerência quântica, uma vez que ficamos com a expressão de unidade em segundos montando-se a expressão

$$\tau_{\Delta x} = \frac{1}{\Lambda (\Delta x)^2}. \quad (1.78)$$

1.7 Exemplos físicos da decoerência

Dada toda a teoria aqui desenvolvida, é válido ao menos citar alguns exemplos e explaná-los, mesmo que de forma resumida, para entender um pouco como se dá a dinâmica da decoerência. Essa importância será reforçada através da análise da influência da temperatura, pois como veremos nestes exemplos, a temperatura é crucial. Tal análise constitui um dos objetivos propostos para o trabalho. Ademais, este coeficiente Λ é de grande importância para a análise da decoerência via função de Wigner. Dito isso, veremos dois casos com base na referência (SCHLOSSHAUER, 2007).

1.7.1 Gás de fótons

Neste exemplo, temos um gás de fótons a uma temperatura T que irá interagir com uma esfera dielétrica de constante ϵ e raio a . Neste caso, também podemos considerar que $\lambda_0 \gg \Delta x$, como vimos na seção acima. Segundo a abordagem sobre espalhamento por uma pequena esfera dielétrica desenvolvida na bibliografia (JACKSON, 1999), podemos definir a seção de choque $\|f(q\hat{n}, q\hat{n}')\|^2$ de acordo com a Lei de Rayleigh:

$$\|f(q\hat{n}, q\hat{n}')\|^2 = \left(\frac{q}{\hbar}\right)^4 a^6 \left(\frac{\epsilon-1}{\epsilon+2}\right)^2 \frac{1}{2} (1 + \cos \Theta^2). \quad (1.79)$$

Da equação 1.73 podemos então encontrar:

$$\begin{aligned} \sigma_{eff}(q) &= \left(\frac{q}{\hbar}\right)^4 a^6 \left(\frac{\epsilon-1}{\epsilon+2}\right)^2 \frac{\pi}{3} \int (1 - \cos \Theta) (1 + \cos \Theta^2) d \cos \Theta, \\ &= \frac{8\pi}{9} \left(\frac{q}{\hbar}\right)^4 a^6 \left(\frac{\epsilon-1}{\epsilon+2}\right)^2. \end{aligned} \quad (1.80)$$

Desse modo, cumprimos com parte dos requisitos para encontrarmos Λ (1.75). Para identificarmos a densidade de momento $\varrho(q)$, podemos assumir que estamos tratando de um

corpo negro, dado que estamos falando de um gás de fótons. Dado isso, podemos utilizar a distribuição de Planck para tratar da média de fótons com energia $E = cq$ a uma temperatura T ,

$$\langle n(q) \rangle_T = \frac{2}{e^{\frac{cq}{k_B T}} - 1}. \quad (1.81)$$

O numerador se refere ao fato de existir duas direções de polarização para o fóton. Multiplicando a distribuição de Planck 1.81 pelo número de estados por unidade de volume com momento entre q e $q + dq$ (ver relação 1.57),

$$\frac{dq^3}{(2\pi\hbar)^2} = \frac{q^2 dq}{2\pi^2\hbar^3}, \quad (1.82)$$

obtém-se:

$$\varrho(q) = \frac{1}{\pi^2\hbar^3} \frac{q^2}{e^{\frac{cq}{k_B T}} - 1}. \quad (1.83)$$

Desta maneira, o coeficiente de espalhamento Λ se torna:

$$\begin{aligned} \Lambda &= \int \varrho(q) v(q) \sigma_{eff}(q) q^2 dq, \\ &= \int \frac{1}{\pi^2\hbar^3} \left(\frac{q^2}{e^{\frac{cq}{k_B T}} - 1} \right) c \frac{q^2}{\hbar^2} \frac{8\pi}{9} \left(\frac{q}{\hbar} \right)^4 a^6 \left(\frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} \right)^2 dq, \\ &= \frac{8}{9\pi\hbar^9} a^6 c \left(\frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} \right)^2 \int \frac{q^8}{e^{\frac{cq}{k_B T}} - 1} dq. \end{aligned} \quad (1.84)$$

Para resolver a integral podemos utilizar a função Zeta de Riemann. Considerando que temos o número complexo $s = \sigma + it$, caso $Re(s) \equiv \sigma > 1$, podemos usar a seguinte representação da função zeta:

$$\zeta(s) = \frac{1}{(s-1)!} \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx, \quad (1.85)$$

e

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}. \quad (1.86)$$

Para s igual a 9, $x = cq/k_B T$, o que nos possibilita chegar ao seguinte resultado:

$$\Lambda = 8! \frac{8}{9\pi} a^6 c \left(\frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} \right)^2 \left(\frac{K_B T}{\hbar c} \right)^9 \zeta(9). \quad (1.87)$$

Por fim, podemos simplificar este resultado. Desenvolvendo os cálculos e usando os valores $\zeta(9) \approx 1.002$ e $(\epsilon - 1) / (\epsilon + 2) \approx 1$ obtém-se:

$$\Lambda \approx 10^{20} \left(\frac{a}{cm} \right)^6 \left(\frac{T}{K} \right)^9 \cdot \frac{1}{cm^2 \cdot s}. \quad (1.88)$$

Este resultado é muito interessante, pois, nos permite entender com que intensidade ocorrerá a supressão espacial da coerência por meio das equações 1.88 e 1.78. Para exemplificar, vamos considerar fótons a temperatura ambiente ($300K$) e comparar os resultados da constante de espalhamento Λ e a escala de tempo da decoerência $\tau_{\Delta x}$ com

a radiação cósmica de fundo, cujo espectro de radiação é a de um corpo negro a uma temperatura de aproximadamente $3K$.

Fixaremos aqui o valor do raio da esfera $a = 10^{-3} \text{ cm}$, e consideraremos também que Δx da equação 1.78 será também 10^{-3} cm , pois estamos mais interessados na variação da temperatura. Para os fótons encontramos $\Lambda = 10^{24} \text{ cm}^{-2}\text{s}^{-1}$, $\tau_{\Delta x} = 10^{-18} \text{ s}$. Para a radiação cósmica, $\Lambda = 10^6 \text{ cm}^{-2}\text{s}^{-1}$, $\tau_{\Delta x} = 1 \text{ s}$. Esses valores são impressionantes, e nos revelam que se a radiação cósmica a $3K$ fosse a única fonte de espalhamento, de decoerência, seria possível manter a coerência quântica do sistema em estudo por um tempo razoável para distâncias de até 10^6 cm , até que a decoerência agisse por completo, diferentemente para os fótons a $300K$, no qual teríamos um tempo 10^{18} vezes menor.

1.7.2 Moléculas de ar

Esse exemplo é interessante pois nos mostra os efeitos do espalhamento das moléculas de ar no fenômeno da decoerência. Basicamente, situação real a todo e qualquer evento não submetido ao vácuo.

Podemos considerar como teste uma partícula de areia, a qual possui em torno de 10^{-3}cm de raio. Para as moléculas de ar, pode-se dizer que às condições normais de pressão, uma massa de uma molécula de ar é da ordem de 10^{-26}Kg . A uma temperatura ambiente de $300K$ e efetuando o cálculo do comprimento de onda termal de de Broglie 1.35, encontraremos que λ_{dB} é da ordem de 10^{-11}m . Em contrapartida, considerando uma temperatura de $3K$, obtemos $\lambda_{dB} \approx 10^{-10}\text{m}$. Nota-se que de qualquer forma $\lambda_{dB} \ll a$.

Deste modo, pode-se considerar a seção de choque $\|f(q\hat{n}, q\hat{n}')\|^2$ como constante, dado que a seção de choque integrada em todas as direções resultará na seção de choque geométrica do objeto πa^2 :

$$\begin{aligned} \int \|f(q\hat{n}, q\hat{n}')\|^2 d\hat{n} &= \int \|f\|^2 d\hat{n} = 4\pi \|f\|^2 = \pi a^2, \\ &\Rightarrow \|f\|^2 = \frac{a^2}{4}. \end{aligned} \quad (1.89)$$

A teoria que desenvolvemos para deduzir o coeficiente de espalhamento Λ foi construída a partir da consideração que $\lambda_{dB} \gg \Delta x$. Portanto, devemos assumir que Δx deve ser muito menor que os comprimentos de onda das moléculas de ar que são espalhadas pelo objeto, os grãos de areia. Tendo isso em consideração podemos, então, utilizar as equações aqui deduzidas. A partir da equação 1.73 e da 1.89, obtemos $\sigma_{eff} = \pi a^2/3$ e podemos escrever:

$$\begin{aligned} \Lambda &= \int \varrho(q) v(q) \frac{q^2}{\hbar^2} \sigma_{eff}(q) dq, \\ &= \frac{\pi a^2}{3\hbar^2} \int \varrho(q) v(q) q^2 dq, \\ &= \frac{\pi a^2}{3\hbar^2} \langle v(q) q^2 \rangle_{\varrho}. \end{aligned} \quad (1.90)$$

Para descobrir a densidade de moléculas de ar $\varrho(q)$, podemos utilizar a distribuição de Maxwell-Boltzmann,

$$\varrho(q) = \frac{N}{V} 4\pi q^2 \left(\frac{1}{2\pi m k_B T} \right)^{3/2} e^{-\frac{q^2}{2mk_B T}}, \quad (1.91)$$

tal que N/V é a densidade total do ar e $v(q) = q/m$, como já vimos anteriormente. Sendo assim, obtemos o último termo para encontrarmos Λ ,

$$\langle v(q) q^2 \rangle_\varrho = \int \varrho(q) v(q) q^2 dq = 4 \frac{N}{V} \sqrt{\frac{m}{\pi}} (2k_B T)^{3/2}, \quad (1.92)$$

o que resulta em:

$$\Lambda = \frac{8}{3\hbar^2} \frac{N}{V} a^2 \sqrt{2\pi m} (k_B T)^{3/2}. \quad (1.93)$$

Pode-se estimar este coeficiente assumindo que o ar se encontra em pressão ambiente, que $N/V \approx 10^{19}$ partículas por cm^3 , e que a massa é aproximadamente $10^{-26} Kg$. Com esses dados obtém-se:

$$\Lambda \approx 10^{39} \left(\frac{a}{cm} \right)^2 \left(\frac{T}{K} \right)^{3/2} \frac{1}{cm^2 s}. \quad (1.94)$$

Novamente, temos uma expressão muito relevante para estudar o efeito da temperatura para o caso de as partículas incidentes do nosso modelo serem moléculas de ar. Para a exemplificação, vamos manter as mesmas considerações do último exemplo, como o valor do raio da esfera $a = 10^{-3} cm$, e consideraremos também que Δx da equação 1.78 será também $10^{-3} cm$. Deste modo, encontra-se que para o ar à pressão normal com temperatura $300K$, $\Lambda = 10^{37} cm^{-2} s^{-1}$ e $\tau_{\Delta x} = 10^{-31} s$.

Esses valores que encontramos mostram o quão relevantes são os efeitos da decoerência, pelo menos a decoerência devida ao espalhamento de partículas. Por essas estimativas fica bem claro que observar fenômenos quânticos de interferência espacial para objetos não microscópicos é basicamente impossível.

1.8 Decoerência a partir da função de Wigner

Até agora estudamos o fenômeno da decoerência a partir do operador densidade e da análise do coeficiente de espalhamento Λ . No entanto, um dos objetivos deste trabalho é entender este fenômeno quântico através da função de Wigner. De acordo com (JOOS et al., 2013), a função de Wigner é uma ferramenta para o estudo da decoerência, pois é capaz de investigar as correlações entre posição e momento em uma interação com o ambiente. Sendo assim, na discussão a seguir buscaremos entender como podemos utilizar a função de Wigner para nos auxiliar no estudo da decoerência e como inserir-la no contexto do que foi desenvolvido até este ponto do trabalho.

1.8.1 Função de Wigner

Na formulação canônica da mecânica clássica, é bem natural a construção do espaço de fase. Conhecendo-se as condições iniciais de um sistema então, com as equações de movimento, é possível associar cada ponto no espaço de fase a um valor de posição e momento. Isso caracteriza completamente o estado dinâmico do sistema.

Na mecânica quântica tal descrição é impraticável devido ao princípio de incerteza $\Delta P \Delta X \geq \hbar/2$ e ao fenômeno do colapso da função de onda no processo de medida. Desse modo, a evolução temporal de um sistema físico quântico só pode descrever a probabilidade que um sistema quântico tem em colapsar para um ou outro estado. Faz-se então necessário o uso de uma distribuição de probabilidades. No entanto, as funções de distribuição de quase-probabilidade também mostraram ser de grande valia para o estudo da mecânica quântica, não apenas como ferramentas de cálculo mas também por fornecer informações sobre as conexões entre a mecânica clássica e quântica. A razão para este último ponto é que as distribuições de quase-probabilidade permitem expressar valores esperados de uma forma que é muito semelhante à das médias clássicas. (HILLERY, 1984).

Vamos considerar classicamente uma partícula que tem uma grandeza física descrita pela função $A(q, p)$. Podemos integrar esta função sob a distribuição do espaço de fase $P_{Cl}(q, p)$, de modo que a média desta função será dada por:

$$\langle A \rangle_{Cl} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} P_{Cl}(q, p) A(q, p) dpdq. \quad (1.95)$$

Para chegarmos na formulação da função de Wigner, precisaremos definir uma distribuição no espaço de fase quântico, e para isso precisaremos do operador densidade. Utilizando uma distribuição quase-probabilística $P_Q(q, p)$, obtemos algo muito similar à expressão 1.95

$$\langle A \rangle_Q = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} P_Q(q, p) A(q, p) dpdq, \quad (1.96)$$

sendo a primeira distribuição deste tipo formulada por Wigner. A distribuição quase-probabilística de Wigner foi formulada para estudar mecânica estatística, porém, à luz da mecânica quântica, de modo a associar uma distribuição de probabilidade num espaço de fase às funções de onda soluções da equação de Schrödinger. Ela é definida como uma transformada de Fourier do operador densidade

$$P_W(q, p) = \frac{1}{\hbar\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \langle q - \nu | \hat{\rho} | q + \nu \rangle \exp\left\{ \frac{2ip\nu}{\hbar} \right\} d\nu. \quad (1.97)$$

Considerando a função $\rho(q', q'') = \psi(q')\psi^*(q'')$, podemos reescrever 1.97 do seguinte modo generalizado para quaisquer dimensões 1.98 (HILLERY, 1984):

$$P_W(q_1 \dots q_n; p_1 \dots p_n) = \left(\frac{1}{\pi\hbar} \right)^n \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \psi(q_1 - \nu_1 \dots q_n - \nu_n) \times \psi^*(q_1 + \nu_1 \dots q_n + \nu_n) \exp\left\{ \frac{2i(p_1\nu_1 + \dots + p_n\nu_n)}{\hbar} \right\}. \quad (1.98)$$

1.8.2 Modelo canônico para a decoerência: Movimento Browniano quântico e equação mestre quântica

Elaborar modelos para o estudo da decoerência, para cada situação física que ela age, parece uma batalha infinita. Por isso, foram criados os chamados modelos padrão da decoerência na tentativa de incluir as mais diversas possibilidades.

Grande parte desses modelos são compostos por um sistema central representado por uma partícula descrita pela posição x e momento p sob a ação de algum potencial, geralmente, o oscilador harmônico, ou, então, spins caso o espaço de estados seja discreto e bidimensional.

Com o objetivo de ilustrar ainda mais o fenômeno da decoerência, nesta subseção pretende-se mostrar as linhas gerais de como tratar essa questão a partir do movimento Browniano. Isso nos conduzirá à interpretação de todo o conteúdo até aqui desenvolvido, e servirá para incluir a função de Wigner no contexto da decoerência. O modelo do movimento Browniano constitui um modelo canônico, um dos mais importantes para a descrição da decoerência, para o entendimento da transição do regime quântico para o clássico e também para estudos sobre sistemas quânticos dissipativos, sendo amplamente estudado em diversas referências, tais como (SCHLOSSHAUER, 2007), (JOOS et al., 2013) e (WILHELM et al., 2007).

Sucintamente, esse modelo parte de uma partícula que se move em uma dimensão espacial e interage linearmente com um ambiente de osciladores harmônicos independentes em equilíbrio térmico a uma temperatura T , ou seja, o ambiente está em equilíbrio térmico, comumente chamado de banho térmico (SCHLOSSHAUER, 2007).

Um passo importante para o entendimento, e amplamente utilizado em equações mestres, é a análise da hamiltoniana do sistema. Equações mestres são equações diferenciais usadas para descrever a evolução de um sistema que pode ser modelado de modo a mapear probabilidades em algum tempo. No caso da mecânica quântica, teremos uma particularidade, pois em geral essas equações clássicas probabilísticas, relacionam-se apenas com a diagonal principal da matriz densidade, e para a análise da decoerência estamos interessados na matriz densidade como um todo.

Nas equações mestre quânticas, as equações diferenciais contemplam todos os elementos da matriz densidade, até mesmo os elementos fora da diagonal principal, os quais são os responsáveis pela coerência quântica. Essa consideração é importante, pois ao final do trabalho ficará mais evidente que grande parte do que foi aqui desenvolvido, é no fundo a dinâmica do operador densidade. Por isso, é crucial falarmos das equações mestre quântica, uma vez que são decisivas para o desfecho deste capítulo e também para o segundo, quando falarmos da esfera de Bloch.

Nessa seção, seguiremos de perto a referência (SCHLOSSHAUER, 2007). Considere

a hamiltoniana total do sistema escrita da seguinte forma:

$$\hat{H} = \hat{H}_S + \hat{H}_\xi + \hat{H}_{int}, \quad (1.99)$$

em que H_S é a hamiltoniana do sistema, H_ξ a hamiltoniana do ambiente, que descreve a coleção de osciladores harmônicos, os quais por definição são não interagentes, e tem a forma:

$$H_\xi = \sum_i \left(\frac{\hat{p}_i^2}{2m_i} + \frac{1}{2} m_i \omega_i^2 \hat{q}_i^2 \right). \quad (1.100)$$

m_i e ω_i , são a massa e a frequência natural do i -ésimo oscilador, enquanto \hat{q}_i e \hat{p}_i são operadores de posição e momento.

A interação entre o sistema e ambiente será tal que a coordenada de posição da partícula central denotada agora por \hat{X} , anteriormente chamada de sistema S, irá ser acoplada linearmente às posições dos osciladores quânticos do ambiente descritos pela equação 1.100, e c_i irá determinar a força desse acoplamento. Essas considerações nos permitem definir a hamiltoniana de interação:

$$H_{int} = \hat{X} \otimes \sum_i c_i \hat{q}_i \equiv \hat{X} \otimes \hat{E}. \quad (1.101)$$

O intuito dessa discussão é mostrar a forma da interação entre o sistema e o ambiente, e identificar a consistência com os conteúdos previamente apresentados. Sabendo disso, podemos inferir da equação 1.101 que superposições espaciais irão sofrer decoerência. Na base $|x\rangle$ do operador de posição \hat{X} , podemos descrever isso matematicamente. Dessa forma a evolução do sistema-ambiente gerado pela hamiltoniana H_{int} pode ser escrita como:

$$e^{-i\hat{H}_{int}t/\hbar} |x\rangle |E_0\rangle = |x\rangle e^{-ix\hat{E}t/\hbar} |E_0\rangle = |x\rangle |E_x(t)\rangle, \quad (1.102)$$

no qual $|E_x(t)\rangle$ significa que o estado do ambiente agora possui informações a respeito da posição do sistema, e a interferência entre estes estados se dá como o colocado na equação 1.77.

Sobre este tema, seguindo a abordagem em (JOOS et al., 2013), podemos escrever classicamente o movimento de uma partícula Browniana pela equação de Langevin:

$$m \frac{d^2 X}{dt^2} + \eta \frac{dX}{dt} + V(x) = F(t), \quad (1.103)$$

em que η é a constante de amortecimento, a variar de acordo com a viscosidade do fluido, $V(x)$ um potencial, e $F(t)$, seria uma força flutuante, o que na média tem valor nulo, $\langle F(t) \rangle = 0$.

De acordo com o teorema de flutuação-dissipação, uma ferramenta muito poderosa na física estatística (CALLEN HERBERT B.; WELTON, 1951) e no estudo sobre

movimento Browniano de Albert Einstein (EINSTEIN, 1905), podemos escrever a relação seguinte

$$\begin{aligned}\langle F(t) F(t') \rangle &= 2\eta K_B T \delta(t - t'), \\ &= 2m^2 D \delta(t - t').\end{aligned}\tag{1.104}$$

Nesta equação acima, o delta de Dirac δ nos indica a restrição de validade da equação 1.103, uma vez que a equação de Langevin é válida para tempos maiores que o tempo de relaxamento, portanto muito rápido e finito. Temos que η é o coeficiente de viscosidade, K_B a constante de Boltzmann, T a temperatura e D o coeficiente de difusão, aqui tomada como $D = \eta K_B T / m^2$.

Uma discussão muito interessante sobre processos dissipativos encontra-se na referência (CALLEN HERBERT B.; WELTON, 1951), o qual mostra que, considerando um sistema-ambiente interagente, pode-se entender que o sistema possui uma espécie de coerência interna, de modo que ao interagir com o ambiente, ou nas palavras dos autores "sistema dissipativo", essa coerência interna é destruída, a energia dissipada, e o sistema é deixado apenas com uma energia de desordem aleatória característica do equilíbrio térmico. Até então, esse tipo de colocação vai ao encontro com os argumentos aqui descritos. O interessante é a interpretação de que essa perda de coerência pode ser entendida como consequência de flutuações aleatórias geradas pela atuação do sistema dissipativo. Uma analogia também super pertinente, é a comparação feita com a radiação espontânea de átomos excitados. O desenvolvimento da eletrodinâmica quântica tornou possível o cálculo deste efeito dissipativo, de modo que essas transições espontâneas seriam na verdade, flutuações aleatórias do campo eletromagnético no vácuo. O vácuo seria o que chamamos de ambiente e o átomo excitado o sistema.

Baseado no conteúdo da referência (RISKEN, 1996) e partindo da equação 1.103, podemos prosseguir e notar que $F(t)$ varia de sistema para sistema dentro do ensemble de partículas, ou seja, é uma quantidade estocástica. Por isso, a solução desta equação é no sentido de encontrar uma distribuição de probabilidade P na qual possamos encontrar essas partículas com um dado momento, por exemplo. Sendo assim, podemos enunciar uma função de distribuição $P(x, p, t)$, de modo que a sua dinâmica será dada pela equação de Kramers, a qual é uma forma especial da equação Fokker-Planck para $P(x, t)$. Sendo esta uma equação de movimento para a função de distribuição, em que as variáveis são macroscópicas e variam de forma estocástica. Essa abordagem é importante, pois tratar com exatidão um problema como o movimento browniano envolveria uma tarefa muito complicada, sem contar que resultaria no desaparecimento da difusão D . Sendo assim, pode-se enunciar esta equação como:

$$\frac{\partial P(x, p, t)}{\partial t} = -\frac{\partial (pP)}{\partial x} + \frac{\partial (V(x) P)}{\partial p} + \frac{\eta}{m} \frac{\partial (pP)}{\partial p} + D \frac{\partial^2 P}{\partial p^2}.\tag{1.105}$$

Segundo a formulação apresentada em (CALDEIRA AMIR O.; LEGGETT, 1983),

ao tratar o problema do movimento Browniano, considera-se o acoplamento de um oscilador a um banho térmico consistindo em osciladores não interagentes descritos pela Hamiltoniana

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(x) + \sum_k \left[\frac{P_k^2}{2M} + \frac{M\omega_k^2 R_k^2}{2} \right] + x \sum_k C_k R_k, \quad (1.106)$$

tal que os dois primeiros termos correspondem à Hamiltoniana do sistema H_S , o terceiro, do ambiente H_ξ e o último termo, a de interação H_{int} , o que segue o formato exposto na eq.1.99. Dando prosseguimento ao objetivo de encontrar uma equação mestre, ou seja, uma equação de dinâmica para o operador densidade, em (CALDEIRA AMIR O.; LEGGETT, 1983) tal equação é demonstrada, no entanto, aqui nos baseamos no exposto na referência (JOOS et al., 2013) em que $\hbar = 1$:

$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = -i [\hat{H}, \hat{\rho}] - i \frac{\eta}{2m} [\hat{x}, \{\hat{p}, \hat{\rho}\}] - \eta K_B T [\hat{x}, [\hat{x}, \hat{p}]]. \quad (1.107)$$

Nesta equação os colchetes representam relações de comutação enquanto as chaves de anticomutação. O termo η é a viscosidade do fluido e o último termo $\eta K_B T$ é Λ . Na representação da posição, pode-se escrever a equação 1.107 como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho(x, x', t)}{\partial t} = & \left[-i \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x'^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) - i \frac{m\tilde{\omega}^2}{2} (x^2 - x'^2) - \Lambda (x - x')^2 \right. \\ & \left. + \frac{\gamma}{2} (x - x') \left(\frac{\partial}{\partial x'} - \frac{\partial}{\partial x} \right) \right] \rho(x, x', t). \end{aligned} \quad (1.108)$$

Uma vez encontrada a equação mestre para o operador densidade, é necessária agora encontrar a distribuição de Wigner para que possamos obter uma representação de estados puros e mistos dessa equação.

Tendo essas explicações em mente, por meio da transformação 1.97, pode-se transformar a equação e encontraremos a equação de Kramers como o visto na expressão 1.105, sendo a Função P , anteriormente empregada, a função de Wigner.

De maneira mais específica agora, um exemplo bem interessante para ser estudado, considerando tudo o que foi estudado até aqui, seria considerar o que acontece com uma superposição de duas Gaussianas, como se encontra em (JOOS et al., 2013). Para esta exemplificação, consideremos,

$$\psi(x) = c_1 e^{-\frac{(x-a)^2}{4b^2}} + c_2 e^{-\frac{(x+a)^2}{4b^2}} \quad (1.109)$$

em que o caso não clássico ocorre para $a \gg b$.

Podemos dizer que a dinâmica do regime microscópico constituinte dos sistemas macroscópicos, é extremamente sensível ao ambiente. Em particular, certas relações de fase serão destruídas localmente devido à interação sistema-ambiente. Tomando o exemplo 1.109, se a posição for medida continuamente, a matriz de densidade resultante a partir

de um pacote de onda gaussiana inicial é determinada pelo conjunto de medições e pela dispersão do pacote de ondas. Assintoticamente, o efeito das medições domina, o que leva a redução de coerência do sistema, enquanto o espalhamento da matriz de densidade aumenta no espaço com o tempo (JOOS; ZEH, 1985).

Sendo assim, de acordo com (JOOS; ZEH, 1985), se considerarmos a matriz de densidade para uma partícula, notaremos que essa matriz, com o tempo será multiplicada por fatores devido a formação de correlações entre partículas, e com isso espera-se que produza uma supressão de termos de interferência entre diferentes posições. Deste modo, conclui-se que é possível expressar o efeito da decoerência, como uma interferência na forma de supressão espacial (JOOS et al., 2013). Tal qual foi demonstrada na solução da equação 1.74:

$$\rho(x, x', t) = \rho(x, x', 0) \exp\left\{-\Lambda t (x - x')^2\right\}. \quad (1.110)$$

Ela descreve o amortecimento irreversível dos termos correspondentes à interferência na matriz de densidade para a posição. Desta maneira, considerando o nosso exemplo da superposição dos pacotes de ondas gaussianas eq.1.109, vemos facilmente que a equação de Kramers 1.105 traduz-se para

$$\frac{\partial W(x, p, t)}{\partial t} = \Lambda \frac{\partial^2 W}{\partial p^2}, \quad (1.111)$$

de modo que a decoerência está associada a uma equação de difusão do momento.

Utilizando as equações 1.98 e 1.109, chegamos na expressão contida na referência (JOOS et al., 2013) para a função de Wigner:

$$\begin{aligned} W(x, p, t) = & \sqrt{\frac{2b^2}{\pi(1+8b^2\Lambda t)}} \left[|c_1|^2 \exp\left(\frac{-(x-a)^2}{2b^2} - \frac{2b^2p^2}{1+8b^2\Lambda t}\right) \right. \\ & + |c_2|^2 \exp\left(\frac{-(x+a)^2}{2b^2} - \frac{2b^2p^2}{1+8b^2\Lambda t}\right) + 2 \exp\left(\frac{-x^2}{2b^2} - \frac{2b^2p^2 + 4a^2\Lambda t}{1+8b^2\Lambda t}\right) \\ & \left. \times \left(\operatorname{Re}(c_1c_2^*) \cos \frac{2ap}{1+8b^2\Lambda t} + \operatorname{Im}(c_1c_2^*) \sin \frac{2ap}{1+8b^2\Lambda t} \right) \right]. \end{aligned} \quad (1.112)$$

Temos nesta equação o termo Λ que representa a taxa de localização. Ademais, nota-se que a última linha apresenta a característica não clássica do sistema. Na decoerência, o que temos é que esses termos oscilatórios vão se esvaír. Vejamos abaixo as figuras obtidas por meio de uma simulação em Python para a interferência entre essas Gaussianas.

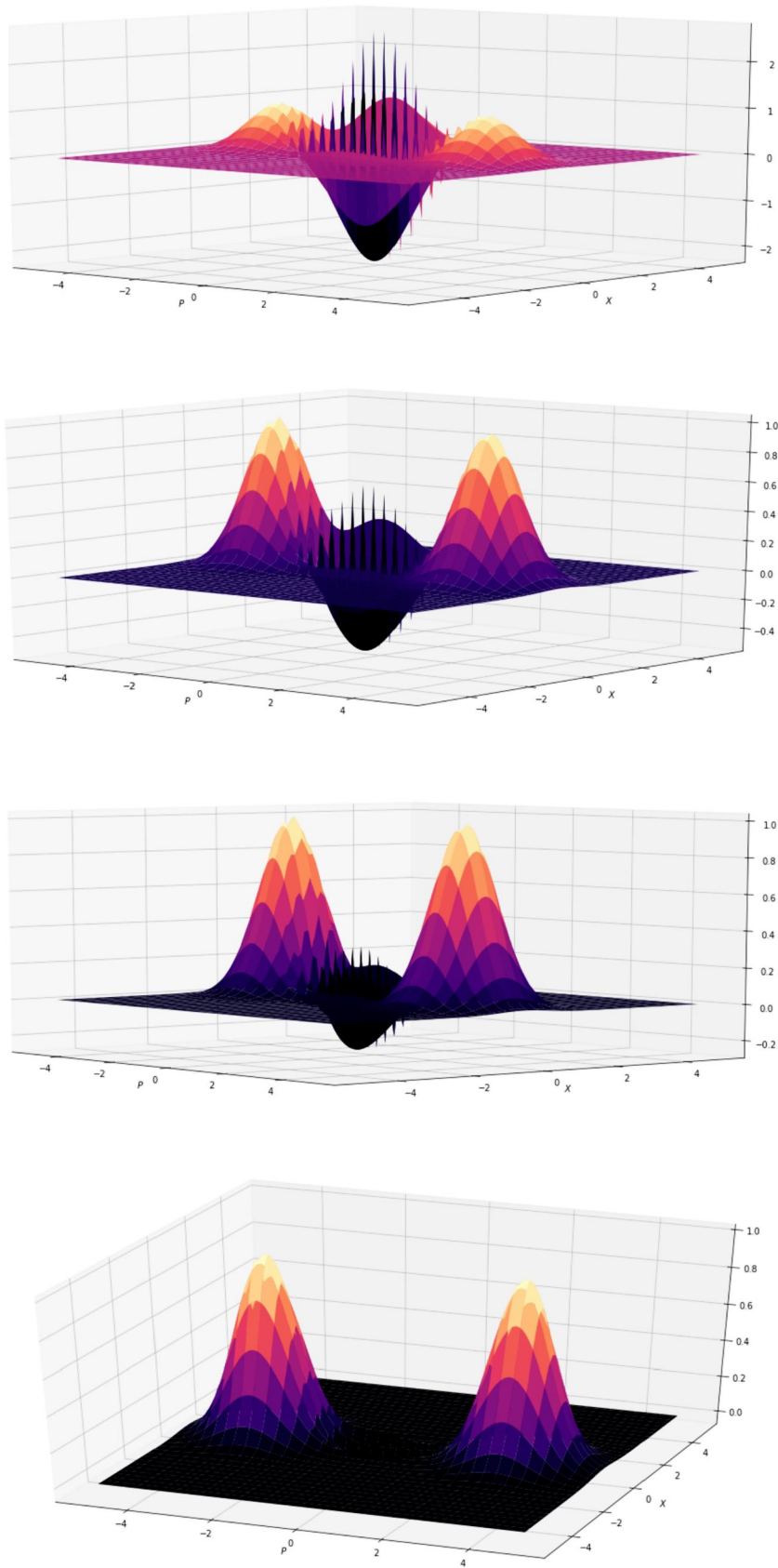


Figura 3 – Evolução temporal da interação entre duas gaussianas 1.109 a partir da função de Wigner 1.112. Fonte: Autoral.

2 Dinâmica dos Qubits

Seguindo no nosso objetivo de estudar os vários aspectos do fenômeno da decoerência, neste capítulo veremos como tratar deste fenômeno sob a ótica dos qubits. Faremos grande parte desse estudo por meio da esfera de Bloch, dado que esta constitui uma ferramenta muito comum nos trabalhos envolvendo os qubits. Sua simplicidade de representação pictórica permite que se ganhe visão física conduzindo aos resultados mais rapidamente, exibindo as principais características de interesse sobre o sistema (FEYNMAN; JR; HELLWARTH, 1957).

2.1 Esfera de Bloch

Podemos construir a esfera de Bloch de acordo com o exposto em (DIÓSI, 2011). Partindo do qubit representado na equação 1.28, pode-se reescrevê-la de maneira análoga como

$$|\psi\rangle = \cos\frac{\theta}{2} |\uparrow\rangle + e^{i\phi} \sin\frac{\theta}{2} |\downarrow\rangle, \quad (2.1)$$

porquê desta maneira fica mais fácil a visualização de um qubit.

Para introduzirmos a esfera de Bloch, é necessário construir a matriz densidade. Para isso, são introduzidas as matrizes de Pauli $\hat{\sigma}$. Definidas como

$$S = \frac{\hbar}{2} \hat{\sigma}, \quad (2.2)$$

em termos da representação matricial de S , o momento angular do spin (SHANKAR, 2012). No plano cartesiano é possível decompor o vetor polarização $\hat{\sigma}$ em termos das matrizes de Pauli para as coordenadas cartesianas

$$\hat{\sigma}_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{\sigma}_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{\sigma}_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (2.3)$$

Pode-se construir um vetor com polarização genérica escrevendo-se $\hat{\sigma} \cdot \hat{n} = \hat{\sigma}_n$, com \hat{n} sendo um vetor unitário tridimensional em uma direção qualquer:

$$\hat{\sigma}_n = n_x \hat{\sigma}_x + n_y \hat{\sigma}_y + n_z \hat{\sigma}_z. \quad (2.4)$$

A polarização $\hat{\sigma}_n$ tem autoestados com autovalores ± 1 , isto é:

$$\hat{\sigma}_n |\pm\psi\rangle = \pm 1 |\pm\psi\rangle. \quad (2.5)$$

De modo que, de acordo com a notação da expressão 2.1 escrevemos,

$$|\psi\rangle_+ = |\uparrow\psi\rangle, \quad |\psi\rangle_- = |\downarrow\psi\rangle. \quad (2.6)$$

Pode-se facilmente encontrar os autoestados da equação 2.5, de modo que podemos obter uma projeção dos spins nos eixos cartesianos x, y e z :

$$|\psi\rangle_{\pm x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \pm 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad |\psi\rangle_{\pm y} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ \pm i \end{bmatrix}, \quad |\psi\rangle_{+z} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad |\psi\rangle_{-z} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (2.7)$$

Como vimos, a matriz densidade é dada pelo produto Ket-Bra. Considere o exemplo para a coordenada y , temos:

$$|\psi\rangle_{+y} \langle\psi|_{+y} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -i \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.8)$$

Sendo assim, repetindo para os outros casos, verifica-se que

$$\rho = |\psi\rangle \langle\psi| = \frac{\hat{I} + \hat{n} \cdot \hat{\sigma}}{2}. \quad (2.9)$$

A expressão acima representa a densidade para estados puros, de modo que $|\hat{n}| = 1$. Agora, se tivermos este número menor que um em módulo, denotaremos este vetor por \hat{s} e teremos a possibilidade de descrever também estados mistos.

Vamos então reescrever a equação 2.9 redefinindo a equação 2.4, isto é,

$$\rho = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 + s_z & s_x - i s_y \\ s_x + i s_y & 1 - s_z \end{bmatrix} = \frac{I + \hat{s} \cdot \hat{\sigma}}{2}. \quad (2.10)$$

Podemos então visualizar a esfera de Bloch construída,

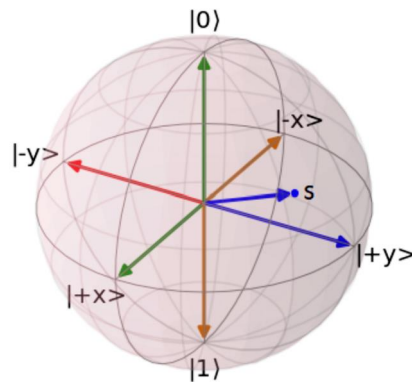


Figura 4 – Esfera de Bloch para um qubit representado por um ponto s . Fonte: Autoral

2.2 Equação de Redfield-Bloch

De acordo com o desenvolvimento da seção anterior sobre a esfera de Bloch chegamos a uma equação muito importante, a eq.2.10. O ponto agora é entender, como fizemos no capítulo anterior, esta abordagem para estudar a dinâmica do qubit sob a influência

do ambiente por meio da matriz densidade, pois a esfera de Bloch é capaz de descrever estados puros e mistos. Foi o que demonstramos nas matrizes 1.30 e 1.33, estado puro e misto respectivamente. A ideia então é obter uma representação do fenômeno da decoerência diagramaticamente usando a esfera de Bloch e entender um pouco sobre a sua dinâmica mostrando como estados puros e mistos são nela representados. Além disso, pode-se mostrar como a temperatura influencia no processo. Para isso precisamos achar a chamada equação Redfield-Bloch.

A equação de Redfield-Bloch é uma equação mestre quântica para sistemas microscópicos. Bem como foi feito no capítulo 1, partiremos da concepção de sistema e ambiente, de modo que este acoplamento entre os sistemas seja fraco o suficiente para considerarmos a chamada aproximação de Born:

$$\hat{\rho}(t) \approx \hat{\rho}_S(t) \otimes \hat{\rho}_\xi. \quad (2.11)$$

Essa equação nos indica que o acoplamento é tal que o ambiente é grande o suficiente - em relação ao sistema - para que mudanças no operador densidade do ambiente devido a interação com o sistema sejam desprezíveis, de forma que o produto tensorial 2.11 permaneça válido, separável, com $\hat{\rho}_\xi$ constante no tempo (SCHLOSSHAUER, 2007).

A abordagem a partir da equação de Redfield-Bloch permite que processos de dissipação sejam obtidos diretamente das propriedades do ambiente. No entanto, não nos garante que propriedades físicas da matriz densidade sejam preservadas, por ser um método perturbativo (JOHANSSON J. ROBERT; NATION, 2012).

Para encontrar esta equação, seguiremos de perto a referência (WILHELM et al., 2007). Podemos então, a partir da equação de Liouville, escrever as equações 1.16 e 1.17, para matriz densidade $W(t)$ do sistema todo,

$$\dot{W}(t) = -\frac{i}{\hbar} [\hat{H}, W(t)] = \mathcal{L}W(t). \quad (2.12)$$

Como visto no capítulo 1, na equação 1.99, \hat{H} e a função de Liouville \mathcal{L} serão escritas como:

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \hat{H}_S + \hat{H}_\xi + \hat{H}_{int}, \\ \mathcal{L} &= \mathcal{L}_S + \mathcal{L}_\xi + \mathcal{L}_{int}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Lembrando, os subíndices S refere-se ao sistema de interesse, no caso o qubit, ξ o ambiente e int denota a interação.

Para este desenvolvimento teórico e matemático, é utilizado uma técnica própria da teoria da irreversibilidade (HOVE, 1957). Pode-se projetar a matriz densidade total $W(t)$ na parte relevante para o problema, qubit. Obtemos assim, a matriz densidade reduzida $\hat{\rho}$ que atua sozinha no sistema,

$$\hat{\rho}(t) = Tr W(t) = P W(t). \quad (2.14)$$

De acordo com um método apresentado nas referências (WILHELM et al., 2007) e em (ZWANZIG, 1960), o operador projetor P é usado para dividir $\rho(t)$ em duas partes. A parte considerada "relevante" $PW(t)$ e a "irrelevante" $(1-P)W(t)$. Considerando que P seleciona os termos da diagonal da nossa matriz densidade, conseqüentemente $(1-P)$ projeta nos termos cruzados. Portanto, podemos decompor W como

$$W = PW + (1 - P)W \quad (2.15)$$

e isso implica nas equações:

$$P\dot{W} = P\mathcal{L}W \quad (2.16)$$

e

$$(1 - P)\dot{W} = (1 - P)\mathcal{L}W. \quad (2.17)$$

A solução para a equação 2.17 pode ser escrita segundo (ZWANZIG, 1960) como:

$$(1 - P)\hat{\rho}(t) = e^{(1-P)\mathcal{L}t} (1 - P)W(0) + \int_0^t e^{(1-P)\mathcal{L}(t-t')} (1 - P)\mathcal{L}\hat{\rho}(t') dt', \quad (2.18)$$

ao substituir esse resultado em 2.16, obtém-se

$$\dot{\hat{\rho}}(t) = P\mathcal{L}\hat{\rho}(t) + \int_0^t P\mathcal{L}e^{(1-P)\mathcal{L}(t-t')} (1 - P)\mathcal{L}\hat{\rho}(t') + P\mathcal{L}e^{(1-P)\mathcal{L}t} (1 - P)W(0) dt'. \quad (2.19)$$

Esta equação é uma generalização da equação mestre de Van Hove (HOVE, 1957). No entanto, vemos que temos uma equação exata, pois depende das condições iniciais $W(0)$. Porém, pode-se retirar esta dependência se escolhermos P de tal forma que possamos descartar este termo. Este desenvolvimento encontra-se vastamente na literatura como em (ZWANZIG, 1960) e (WEISS, 1999). Isso implica que P deve comutar com \mathcal{L}_S , pois assumimos esta escolha específica de P para que possamos descartar o termo não homogêneo, ou seja, $W = \rho \otimes (1 - P)W$ (WILHELM et al., 2007). Portanto, obtemos a chamada equação mestre homogênea

$$\dot{\hat{\rho}}(t) = P(\mathcal{L}_S + \mathcal{L}_I)\hat{\rho}(t) + \int_0^t P\mathcal{L}_I e^{(1-P)\mathcal{L}(t-t')} (1 - P)\mathcal{L}_{int}\hat{\rho}(t') dt'. \quad (2.20)$$

O primeiro termo da equação acima denota a parte reversível da equação e a integral a irreversível. Vimos que para termos uma equação mais geral que não dependesse das condições iniciais $(1 - P)W(0)$, tivemos que considerar que o sistema e o ambiente estão fracamente acoplados, essa é a aproximação de Born, anteriormente utilizada. No entanto, nota-se que a equação 2.20 contém dependência com relação a \mathcal{L}_{int} , e portanto, considera ainda as interações entre os sistemas. Logo, devemos supor a aproximação de que $\mathcal{L} = \mathcal{L}_S + \mathcal{L}_\xi$. Fazendo a aproximação de Markov, devemos considerar que os efeitos causados acoplamento entre os sistemas caem rapidamente, quando comparados com a escala de tempo na qual o sistema varia. Ou seja, na equação 2.20, podemos substituir $t - t'$ por t' e estender o limite de integração ao infinito e obter a equação de Redfield-Bloch,

$$\dot{\hat{\rho}}(t) = P(\mathcal{L}_S + \mathcal{L}_{int})\hat{\rho}(t) + \int_0^\infty P\mathcal{L}_{int}e^{(1-P)(\mathcal{L}_S + \mathcal{L}_\xi)t} (1 - P)\mathcal{L}_{int}\hat{\rho}(t) dt'. \quad (2.21)$$

Como vemos em (WEISS, 1999), equações mestre dessa forma são usadas com sucesso para descrever fenômenos de amortecimento fraco em óptica quântica e dinâmica de spins.

Apesar desta equação ser de grande valia, ainda é muito geral para implementação numérica. Para isso, assume-se que a interação entre o sistema, qubit, e o ambiente, sistema dissipativo, vão ter a forma $H_{int} = \sum_{\alpha} A_{\alpha} \otimes B_{\alpha}$, em que A_{α} são operadores do sistema e B_{α} do ambiente (JOHANSSON J. ROBERT; NATION, 2012). Isso nos permite escrever a equação de Redfield-Bloch para a matriz densidade como:

$$\dot{\rho}_{nm}(t) = -i\omega_{nm}\rho_{nm}(t) - \sum_{k,l} R_{nmkl}\rho_{k,l}(t), \quad (2.22)$$

em que R_{nmkl} é chamado de tensor de Redfield-Bloch.

Desta forma, na referência (JOHANSSON J. ROBERT; NATION, 2012) encontra-se um método para achar este tensor por meio da biblioteca qutip na linguagem Python. Para ilustrar o método, estudaremos um sistema quântico de dois estados, tipicamente um qubit. A hamiltoniana que iremos considerar possui dois termos, como vemos abaixo:

$$H = H_S + H_{int} = -\frac{1}{2}\Delta_0\hat{\sigma}_x - \frac{1}{2}\hat{\sigma}_z \otimes \sum_i^N g_i\hat{\sigma}_z^i = -\frac{1}{2}\Delta_0\hat{\sigma}_x - \frac{1}{2}\hat{\sigma}_z \otimes \hat{E}. \quad (2.23)$$

O primeiro termo é chamado de termo de tunelamento. É o responsável pela dinâmica intrínseca do sistema, criada pelo tunelamento quântico entre os dois poços de potencial $|0\rangle$ e $|1\rangle$. Matematicamente representa-se como

$$H_S^{tun} = -\frac{1}{2}(|0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|) \equiv -\frac{1}{2}\Delta_0\hat{\sigma}_x, \quad (2.24)$$

tal que Δ_0 é chamada de matriz de tunelamento. O H_{int} leva em consideração a simplificação que o spin do sistema está acoplado linearmente com os demais spins do ambiente, sendo a intensidade deste acoplamento dada por g_i . Escreve-se então os autoestados $|n\rangle$ da parte do ambiente da hamiltoniana como:

$$\hat{E}|n\rangle = \xi_n|n\rangle, \quad \xi_n = \sum_i^N (-1)^{n_i} g_i, \quad (2.25)$$

logo, $H_{int} = \xi_n\hat{\sigma}_z/2$, $n_i = 0$ significa *spin down* e $n_i = 1$ significa *spin up*.

Na nossa consideração, teremos a interação entre spin e o ambiente composto de outros spins, situação esta muito relevante para o estudo de sistemas supercondutores e por conseguinte, eficiente para sistemas a temperaturas muito baixas (SCHLOSSHAUER, 2007). Desta maneira, veremos abaixo uma ilustração contendo soluções para a equação de Redfield-Bloch, de modo que os estados mistos ficam evidenciados por se encontrem dentro da esfera e não na superfície.

Um ponto muito importante a ser ressaltado é que existem outros fatores a serem levados em consideração para o próprio estudo da decoerência, e que não foram discutidos

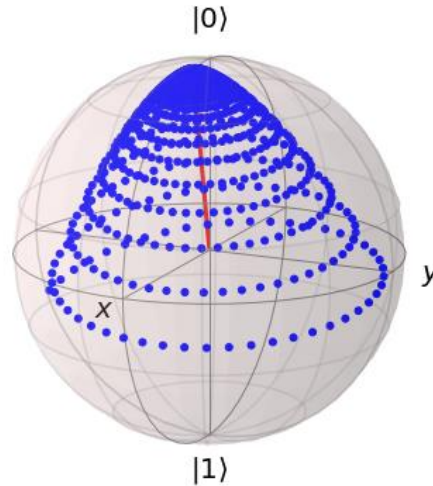


Figura 5 – Evolução da matrix densidade de acordo com a equação de Redfield-Bloch. Fonte:([JOHANSSON J. ROBERT; NATION, 2012](#)).

aqui. Os modelos canônicos para o estudo da decoerência são modos gerais de tratar o problema. Há outros aspectos a serem levados em consideração. Os coeficientes da equação 1.107 por exemplo e a densidade espectral do ambiente,

$$J(\omega) \equiv \sum \frac{c_i^2}{2m_i\omega_i} \delta(\omega - \omega_i), \quad (2.26)$$

de tal modo que ω_i denota as frequências dos osciladores e m_i as massas. Essa quantidade é responsável pelas características físicas do ambiente. Logo, para descrever e interpretar com mais detalhes a influência do ambiente nos mais diversos sistemas, é preciso olhar com cuidado para os coeficientes pois eles vão depender de outros parâmetros, inclusive a densidade espectral.

Para o caso sem a Hamiltoniana de tunelamento 2.24 e considerando que o spin interage com um ambiente de osciladores harmônicos, o fator de decoerência é estimado como ([SCHLOSSHAUER, 2007](#))

$$r(t) \approx e^{-(\pi K_B T)t}, \quad (2.27)$$

ou seja, as interferências entre o *spin up* e o *spin down* do sistema são amortecidas exponencialmente de acordo com a temperatura T .

Considerando a referência ([SCHLOSSHAUER, 2007](#)), os resultados no sentido de obter equações de dinâmica para este tipo de estudo com qubits nos possibilita chegar a conclusões similares ao fazer analogia com o modelo Browniano, pois lidamos com o mesmo sistema dissipativo e com o fato de que possuímos o mesmo acoplamento entre o sistema de interesse e o ambiente, portanto, pode-se fazer algumas asserções similares.

Os coeficientes $\tilde{\omega}$, Λ e γ da eq.1.8.2 no modelo Browniano dependem das quantidades $\eta(\tau)$ e $\nu(\tau)$, que são chamados de núcleo de dissipação e de ruído respectivamente.

Na referência (SCHLOSSHAUER, 2007) esses coeficientes são definidos como:

$$\tilde{\omega}^2 \equiv -\frac{2}{m} \int_0^\infty \eta(\tau) \cos \omega \tau d\tau, \quad (2.28)$$

$$\gamma \equiv \frac{1}{m\omega} \int_0^\infty \eta(\tau) \sin \omega \tau d\tau, \quad (2.29)$$

$$\Lambda \equiv \int_0^\infty \nu(\tau) \cos \omega \tau d\tau, \quad (2.30)$$

de modo que

$$\nu(\tau) \equiv \int_0^\infty J(\omega) \coth \frac{\omega}{2K_B T} \cos \omega \tau d\omega \quad (2.31)$$

e

$$\eta(\tau) \equiv \int_0^\infty J(\omega) \sin \omega \tau d\omega. \quad (2.32)$$

Esses chamados núcleo de dissipação e de ruído, são um exemplo de como o modelo Browniano pode ser usado em modelos de spins por meio de ajustes nas equações mestres para o caso dos qubits. Logo, percebe-se que a equação 1.107, de modo geral, se aplica também ao estudo da dinâmica dos qubits, e evidencia-se também a dependência com relação aos parâmetros supracitados, podendo é claro, sofrer algumas modificações a depender das considerações do problema.

Podemos ver, então, que a Física por trás das equações mestres para estudar a decoerência é fortemente relacionadas aos seus coeficientes e conseqüentemente à densidade espectral e à temperatura. É importante ressaltar a limitação dos modelos para que não se perca o caráter crítico sobre os resultados. No entanto, apesar das aproximações feitas, é possível notar o poder dos modelos e do entendimento acerca do fenômeno da decoerência que podemos obter.

3 Termodinâmica quântica

3.1 Estados quânticos *Bell-Cat*

Grande parte dos experimentos relacionados à computação quântica e consequentemente à informação quântica são realizados com sistemas ópticos quânticos. Deste modo, a utilização da luz como transportadora de informação é o ideal, e o ramo da óptica quântica passa a ser fundamental.

É possível codificar a informação na computação quântica escrevendo-a em termos de osciladores harmônicos quânticos, conhecidos como qumodes. Pode-se escrever estes estados em termos da base de Fock, utilizada para fazer a quantização do campo eletromagnético ou, então, como estados coerentes. O campo quantizado é uma coleção de osciladores quânticos, ou seja, em nossa terminologia, uma coleção de qumodes. O estado quântico do campo eletromagnético mais próximo de um estado clássico bem determinado é o chamado estado coerente, com incerteza mínima simetricamente distribuída no espaço de fase. Eles correspondem ao estado de saída idealmente produzido por uma fonte de laser (vide equação 3.1) (FURASAWA; LOOCK, 2011) e são expressos na forma:

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \quad (3.1)$$

No apêndice A temos a demonstração desta equação, α é um número complexo que está relacionado com a amplitude de campo médio, e $|n\rangle$ é um estado no espaço de Fock. Deve-se introduzir outra relação que será muito utilizada no decorrer deste trabalho, e que também é demonstrada no apêndice A, relacionando $|n\rangle$ com o estado de vácuo $|0\rangle$,

$$|n\rangle = \frac{(\hat{a}^\dagger)^n |0\rangle}{\sqrt{n!}}. \quad (3.2)$$

No artigo (YURKE; STOLER, 1986), vemos que estados *Bell-Cat* podem ser descritos como uma superposição de estados macroscopicamente distinguíveis e são gerados a partir de um estado coerente desde que a dissipação seja mantida suficientemente baixa. Por isso a necessidade de manter o sistema a baixíssimas temperaturas de modo a manter a matéria num condensado de Bose-Einstein em que a interação entre o sistema e o ambiente seja nula. Isto evita que a decoerência aja a ponto de fazer com que o estado perca as propriedades quânticas. Essas superposições são chamadas de estados *Bell-Cat*, devido ao fato de serem obtidas pela evolução temporal dos estados coerentes via equação de Schrödinger de acordo com o argumento da não localidade da mecânica quântica explicitado por John Bell (BELL, 1964).

Para a descrição térmica dos estados *Bell-Cat*, utilizamos a abordagem encontrada na referência (LULA-ROCHA et al., 2020). Pode-se escrever a superposição supracitada como:

$$|\alpha_{\pm}\rangle = N_{\pm} [|\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle]; N_{\pm} = \left[2 \left(1 \pm e^{-2|\alpha|^2}\right)\right]^{-1/2}. \quad (3.3)$$

Ao combinar os *Cat-states* com o estado de vácuo, por meio do aparelho óptico chamado *beam splitter*, obtém-se estados emaranhados no espaço de Fock, os quais são chamados de estados *Bell-Cat*:

$$|\phi_{\pm}\rangle = N_{\pm} [|\alpha, \alpha\rangle \pm |-\alpha, -\alpha\rangle], \quad (3.4)$$

$$|\psi_{\pm}\rangle = N_{\pm} [|\alpha, -\alpha\rangle \pm |-\alpha, \alpha\rangle]. \quad (3.5)$$

Pode-se agrupar essas duas expressões em apenas uma introduzindo a notação $k = \pm 1$,

$$|\psi_{k,\pm}\rangle = N_{\pm} [|\alpha, k\alpha\rangle \pm |-\alpha, -k\alpha\rangle], \quad (3.6)$$

em que $N_{\pm} = \left[2 \left(1 \pm e^{-4|\alpha|^2}\right)\right]^{-1/2}$.

O que temos agora, é um modo mais completo de representar o emaranhamento entre dois estados. Conseguimos, por exemplo, escrever os dois qubits codificados nos estados coerentes. Relembrando o exemplo da formulação do emaranhamento quântico com relação aos spins introduzido por Bohm, que foi ludicamente representado na figura 1, podemos considerar que ambos estados possuem igual probabilidade ($N = 1/\sqrt{2}$):

$$|\phi_{\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_1 |0\rangle_2 \pm |1\rangle_1 |1\rangle_2), \quad (3.7)$$

e

$$|\psi_{\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_1 |1\rangle_2 \pm |1\rangle_1 |0\rangle_2). \quad (3.8)$$

Os estados *Bell-Cat* são 4 estados de dois qubits emaranhados. Relembrando da introdução deste trabalho, foi dito sobre a formulação de David Bohm no artigo (BOHM; AHARONOV, 1957), sobre o spin conservado de duas partículas separadas de modo que não haja qualquer tipo de interação entre elas. Comumente chama-se essas partículas de Alice e Bob, respectivamente com os subíndices 1 e 2 (ver equação 3.8).

Vamos supor que Alice faça uma medida sobre o seu estado, bem claro que o resultado deve ser aleatório (0 ou 1), e o mesmo para Bob. No entanto, se eles pudessem se comunicar verificariam que na verdade os seus resultados estariam intimamente relacionados. Ou seja, se Alice mede $|1\rangle$, Bob inevitavelmente obterá $|0\rangle$ e vice-versa. É justamente essa situação que as equações acima estão representando.

3.2 Introdução ao formalismo termodinâmico quântico

Para o desenvolvimento deste tópico será utilizado majoritariamente (KHANNA et al., 2009) e (LULA-ROCHA et al., 2020) como principais referências.

A Termodinâmica é uma teoria que descreve os efeitos e propriedades térmicas macroscópicas da matéria. Apesar de que já era sabido que a matéria é formada por átomos, a teoria em si não leva em conta caráter microscópico algum. Não obstante, à medida que o entendimento da natureza microscópica da matéria foi se desenvolvendo, o interesse em desenvolver uma teoria mais robusta que considerasse teoria quântica de campos a temperaturas diferente de zero também cresceu. O formalismo que iremos tratar neste trabalho foi desenvolvido historicamente por Umezawa (UMEZAWA, 1995).

Primeiramente, devemos definir a função de partição $Z(\beta)$ que é extremamente necessária ao considerarmos um sistema termodinâmico de várias partículas. A função de partição é a grandeza que descreve as propriedades estatísticas de um sistema em equilíbrio termodinâmico e, a partir dela, é possível obter outras quantidades cruciais, como entropia, energia, pressão etc.

Iremos tratar do caso do *ensemble* canônico, que é um *ensemble* comumente usado na mecânica estatística. Considera-se um sistema em contato com um reservatório térmico à temperatura, volume e número de partículas fixos. Sendo assim, dizemos que estamos trabalhando agora no espaço de Hilbert térmico. Iremos desenvolver o formalismo termodinâmico quântico com o objetivo de descrever um ensemble de estados a partir do vácuo $|0(\beta)\rangle$ considerando a temperatura. No apêndice B discutimos melhor a questão do vácuo. O valor médio do operador A é escrito como

$$\langle A \rangle = \frac{1}{Z(\beta)} \text{Tr} \left(e^{-\beta H} A \right), \quad (3.9)$$

tal que $\beta = 1/K_B T$ e $Z(\beta) = \text{Tr} \left(e^{-\beta H} \right)$.

Assumindo $H|n\rangle = E_n|n\rangle$, procuramos estados no espaço de Hilbert dependentes da temperatura de modo que:

$$\langle A \rangle \equiv \langle 0(\beta) | A | 0(\beta) \rangle = \frac{1}{Z(\beta)} \sum_n e^{-\beta E_n} \langle n | A | n \rangle. \quad (3.10)$$

Expandindo $|0(\beta)\rangle$ no espaço de Hilbert, descrito na base de Fock $\{|n\rangle\}$ obtemos:

$$\begin{aligned} |0(\beta)\rangle &= \sum_n |n\rangle \langle n | 0(\beta) \rangle, \\ &= \sum_n g_n(\beta) |n\rangle. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Utilizando esta expansão na equação 3.10, obtemos:

$$\begin{aligned} \langle 0(\beta) | A | 0(\beta) \rangle &= \sum_{nm} g_n^*(\beta) g_m(\beta) \langle n | A | m \rangle, \\ \Rightarrow g_n^*(\beta) g_m(\beta) &= \frac{1}{Z(\beta)} e^{-\beta E_n} \delta_{nm}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

A condição acima não pode ser satisfeita por números complexos. Ela sugere uma condição de ortogonalidade, sugerindo que $g_m(\beta)$ deva ser um elemento de um espaço vetorial. A maneira mais simples de conseguir isso é introduzindo uma duplicação do espaço de Hilbert. Deste modo, devemos fazer um produto tensorial entre os espaços $H \otimes \tilde{H} = H_T$, de modo que teremos a base $|n\rangle \otimes |\tilde{m}\rangle = |n, \tilde{m}\rangle$. Posteriormente ficará mais claro porquê é interessante denotar o vetor $|0(\beta)\rangle$ desta maneira. Reescrevendo respectivamente as equações 3.11 e 3.12 temos:

$$|0(\beta)\rangle = \sum_n f_n(\beta) |n, \tilde{n}\rangle, \quad (3.13)$$

c

$$\langle 0(\beta) | A | 0(\beta) \rangle = \sum_{nm} f_n^*(\beta) f_m(\beta) \langle n, \tilde{n} | A | m, \tilde{m} \rangle, \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \langle n, \tilde{n} | A | m, \tilde{m} \rangle &= \langle n | \otimes \langle \tilde{n} | A | m \rangle \otimes |\tilde{m}\rangle = \langle n | A | m \rangle \langle \tilde{n} | \tilde{m} \rangle = A_{nm} \delta_{nm}, \\ &= \sum_n f_n^*(\beta) f_n(\beta) \langle n | A | n \rangle. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Retomando a equação 3.12, obtemos:

$$\begin{aligned} f_n^*(\beta) f_n(\beta) &= \frac{1}{Z(\beta)} e^{-\beta E_n}, \\ \Rightarrow f_n(\beta) &= \frac{1}{\sqrt{Z(\beta)}} e^{-\beta E_n/2}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Agora podemos identificar o estado termal do espaço de Hilbert duplo, substituindo 3.16 na equação 3.13, obtendo-se

$$|0(\beta)\rangle = \frac{1}{\sqrt{Z(\beta)}} \sum_n e^{-\beta E_n/2} |n, \tilde{n}\rangle. \quad (3.17)$$

Esse artifício de definir um espaço de Hilbert duplo está presente em basicamente todas as teorias nas quais se leva em conta a temperatura. No apêndice B vemos com mais detalhes sobre porquê podemos considerar isso, mas em linhas gerais, pode-se dizer que há uma duplicação dos graus de liberdade no espaço de Hilbert, o que nos permite utilizar a transformação linear de Bogoliubov para descrever os estados termalizados, tal como encontramos nos artigos (LULA-ROCHA et al., 2020) e (TAKAHASHI; UMEZAWA, 1996). Esse é o mecanismo para a introdução da temperatura, de modo a poder visualizar os fenômenos térmicos. Reescreve-se 3.17 como

$$|0(\beta)\rangle = U(\beta) |0, \tilde{0}\rangle, \quad (3.18)$$

onde $U(\beta)$ representa a transformação de Bogoliubov.

3.3 Termodinâmica quântica aplicada a Bósons

Temos dois tipos de partículas fundamentais, os bósons e os férmions. O primeiro obedece à estatística de Bose-Einstein e o segundo à estatística de Fermi-Dirac, que são modelos para se tratar de um conjunto de partículas não distinguíveis.

Na estatística de Bose-Einstein os bósons, que possuem spin inteiros, podem ocupar um conjunto de estados de energia discretos no equilíbrio termodinâmico. A esse estado de agregação dos bósons, damos o nome de condensado de Bose-Einstein, e que pela sua característica de não obedecer ao princípio de exclusão de Pauli, implica que incontáveis bósons podem ocupar o mesmo estado quântico. Em contrapartida na estatística de Fermi-Dirac, temos uma distribuição de férmions, partículas idênticas de spin não inteiro em estados que obedecem ao princípio de Pauli.

O processo de termalização que estamos interessados nesta seção, são dos bósons nos estados *Bell-Cat*. Para isso, trataremos algebricamente via oscilador quântico para duas partículas. Para tanto, utilizaremos os operadores de criação e aniquilação, de modo que $[a_i, a_j^\dagger] = \delta_{ij}$ e $[a_i, a_j] = [a_i^\dagger, a_j^\dagger] = 0$. Escrevendo o hamiltoniano, temos:

$$H = \hbar (\omega_1 a_1^\dagger a_1 + \omega_2 a_2^\dagger a_2) = \hbar (\omega_1 n_1 + \omega_2 n_2). \quad (3.19)$$

Considerando as equações 3.17 & 3.18, e lembrando que estamos trabalhando no espaço termal de Hilbert H_T no qual temos o dobro de graus de liberdade, ficamos com a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} |0(\beta)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{Z(\beta)}} \sum_n e^{-\frac{\beta\hbar}{2}(\omega_1 n_1 + \omega_2 n_2)} |n_1, n_2, \tilde{n}_1, \tilde{n}_2\rangle, \\ &= U(\beta) |0, 0, \tilde{0}, \tilde{0}\rangle. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Precisamos agora redefinir a função de partição considerando este hamiltoniano 3.19. Generalizando a equação 3.20 e utilizando a expressão 3.2, obtemos:

$$\begin{aligned} |0(\beta)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{Z(\beta)}} \sum_n e^{-\frac{\beta\hbar}{2}n\omega} |n, \tilde{n}\rangle, \\ &= \frac{1}{\sqrt{Z(\beta)}} \sum_n e^{-\frac{\beta\hbar}{2}n\omega} \frac{(a^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} \frac{(\tilde{a}^\dagger)^n}{\sqrt{\tilde{n}!}} |0, \tilde{0}\rangle. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Verificando a condição de ortogonalidade,

$$\begin{aligned} \langle 0(\beta) | 0(\beta) \rangle &= 1 = \frac{1}{\sqrt{Z(\beta)}} \sum_{nm} \langle m, \tilde{m} | e^{-\frac{\beta\hbar}{2}\omega(n+m)} |n, \tilde{n}\rangle, \\ &= \frac{1}{\sqrt{Z(\beta)}} \sum_{nm} e^{-\frac{\beta\hbar}{2}\omega(n+m)} \delta_{mn} \delta_{nm}, \\ &= \frac{1}{\sqrt{Z(\beta)}} \sum_n e^{-\beta\hbar\omega n}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Nota-se que temos uma série geométrica, dado que claramente $|1/e^{\hbar\beta\omega}| < 1$. Logo, $Z(\beta) = 1/(1 - e^{-\hbar\beta\omega})$. Reunindo todos os passos aqui realizados, ficamos com a conveniente expressão:

$$|0(\beta)\rangle = \sqrt{1 - e^{-\hbar\beta\omega}} \sum_n \frac{e^{-\frac{\beta\hbar\omega}{2}n}}{n!} (a^\dagger)^n (\tilde{a}^\dagger)^n |0, \tilde{0}\rangle. \quad (3.23)$$

É possível ainda reescrever esta equação de uma maneira mais adequada. Sabemos da expansão por série de Taylor que $\sum_n \frac{X^n}{n!} = e^X$, deste modo:

$$|0(\beta)\rangle = \sqrt{1 - e^{-\hbar\beta\omega}} \exp\left\{e^{-\hbar\beta\omega/2} a^\dagger \tilde{a}^\dagger\right\} |0, \tilde{0}\rangle. \quad (3.24)$$

3.3.1 Transformação de Bogoliubov

Sabendo que $U(\beta)$ na expressão 3.18 pode ser expresso como um operador exponencial unitário, podemos utilizar a relação seguinte, encontrada na página 107 do livro (KHANNA et al., 2009), considerando que $C = [A, B]$,

$$e^{\alpha(A+B)} = e^{\tanh \alpha B} e^{\ln \cosh \alpha C} e^{\tanh \alpha A}. \quad (3.25)$$

Pode-se agora definir:

$$\cosh \theta_i(\beta) = \frac{1}{\sqrt{1 - e^{-\beta\hbar\omega_i}}} = u_i(\beta), \quad (3.26)$$

$$\sinh \theta_i(\beta) = \frac{e^{-\beta\hbar\omega_i/2}}{\sqrt{1 - e^{-\beta\hbar\omega_i}}} = v_i(\beta), \quad (3.27)$$

e

$$\tanh \theta_i(\beta) = e^{-\beta\hbar\omega_i/2}, \quad (3.28)$$

pois, nota-se que com isto,

$$u^2(\beta) - v^2(\beta) = \cosh^2 \theta(\beta) - \sinh^2 \theta(\beta) = 1. \quad (3.29)$$

Reescrevendo a equação 3.24, utilizando a expressão 3.25 e considerando $A = -\tilde{a}a$, $B = a^\dagger \tilde{a}^\dagger$, $C = -\tilde{a}\tilde{a}^\dagger - a^\dagger a$ e $\alpha = \theta(\beta)$, resulta em:

$$\begin{aligned} |0(\beta)\rangle &= \cosh^{-1} \theta(\beta) e^{\tanh \theta(\beta) a^\dagger \tilde{a}^\dagger} |0, \tilde{0}\rangle, \\ &= e^{\tanh \theta a^\dagger \tilde{a}^\dagger} e^{-\ln \cosh \theta(\beta) (\tilde{a}\tilde{a}^\dagger + a^\dagger a)} e^{\tanh \theta(\beta) (-\tilde{a}a)} |0, \tilde{0}\rangle. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Podemos sumarizar a equação acima de acordo com a expressão 3.18, de modo que $U(\beta)$ será:

$$U(\beta) = e^{-iG(\beta)}; \quad G(\beta) = -i\theta(\beta) (\tilde{a}a - \tilde{a}^\dagger a^\dagger). \quad (3.31)$$

3.3.2 Operadores termais

Podemos agora definir os operadores termais. Tínhamos anteriormente os operadores lineares de criação e aniquilação atuando no espaço de Fock, os quais, agora irão atuar no espaço duplo de Hilbert H_T , por isso precisamos definir o operador unitário de Bogoliubov. Sendo assim, geramos as seguintes relações:

$$\begin{aligned} a(\beta) &= U(\beta) a U^\dagger(\beta), \\ a^\dagger(\beta) &= U(\beta) a^\dagger U^\dagger(\beta), \\ \tilde{a}(\beta) &= U(\beta) \tilde{a} U^\dagger(\beta), \\ \tilde{a}^\dagger(\beta) &= U(\beta) \tilde{a}^\dagger U^\dagger(\beta). \end{aligned} \quad (3.32)$$

Até aqui, o vetor $|0(\beta)\rangle$ foi bastante utilizado, mas pouco foi discutido. Sendo assim, vamos aplicar os operadores termais neste vetor e ver o que acontece,

$$\begin{aligned} a(\beta) |0(\beta)\rangle &= U(\beta) a U^\dagger(\beta) U(\beta) |0, \tilde{0}\rangle, \\ &= U(\beta) a |0, \tilde{0}\rangle = 0, \\ \Rightarrow \tilde{a}(\beta) |0(\beta)\rangle &= 0. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Percebemos o porquê que a utilizada notação é conveniente, pois $|0(\beta)\rangle$ representa o vácuo para os operadores termais $a(\beta)$ e $\tilde{a}(\beta)$, de modo que o chamamos de estado puro, e para outros operadores não termais, um estado termal.

Agora veremos como relacionar os operadores termais com os convencionais a e a^\dagger dado que eles aparecem frequentemente nos problemas físicos. Para isso iremos utilizar as definições supracitadas.

Reescrevendo a primeira equação das expressões 3.32, temos

$$a(\beta) = e^{-iG(\beta)} a e^{iG(\beta)}. \quad (3.34)$$

Utilizando a fórmula de *Baker–Campbell–Hausdorff* com a simplificação de notação, $G(\beta) = G$ e $\theta(\beta) = \theta$, escrevemos

$$e^{-iG} a e^{iG} = a + (-i) [G, a] + \frac{(-i)^2}{2!} [G, [G, a]] + \frac{(-i)^3}{3!} [G, [G, [G, a]]] + \dots \quad (3.35)$$

$$\begin{aligned} a(\beta) &= \left(1 + \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + \dots\right) a - \left(\theta + \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + \dots\right) \tilde{a}^\dagger, \\ &= \cosh \theta(\beta) a - \sinh \theta(\beta) \tilde{a}^\dagger, \\ &= u(\beta) a - v(\beta) \tilde{a}^\dagger. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Analogamente, ficamos com as relações:

$$\begin{aligned} a(\beta) &= u(\beta) a - v(\beta) \tilde{a}^\dagger, \\ a^\dagger(\beta) &= u(\beta) a^\dagger - v(\beta) \tilde{a}, \\ \tilde{a}(\beta) &= u(\beta) \tilde{a} - v(\beta) a^\dagger, \\ \tilde{a}^\dagger(\beta) &= u(\beta) \tilde{a}^\dagger - v(\beta) a. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Invertendo estas relações, obtém-se

$$\begin{aligned}
a &= u(\beta) a(\beta) + v(\beta) \tilde{a}^\dagger(\beta), \\
\tilde{a} &= u(\beta) \tilde{a}(\beta) + v(\beta) a^\dagger(\beta), \\
a^\dagger &= u(\beta) a^\dagger(\beta) + v(\beta) \tilde{a}(\beta), \\
\tilde{a}^\dagger &= u(\beta) \tilde{a}^\dagger(\beta) + v(\beta) a(\beta).
\end{aligned} \tag{3.38}$$

Para exemplificar, podemos calcular a distribuição de Bose-Einstein para um sistema em equilíbrio térmico, calculando o valor esperado do operador número $N = a^\dagger a$, isto é,

$$\begin{aligned}
\langle N \rangle &= \langle 0(\beta) | a^\dagger a | 0(\beta) \rangle, \\
&= \langle 0(\beta) | \left[\left(u(\beta) a^\dagger(\beta) + v(\beta) \tilde{a}(\beta) \right) \left(u(\beta) a(\beta) + v(\beta) \tilde{a}^\dagger(\beta) \right) \right] | 0(\beta) \rangle, \\
&= v^2(\beta) = \frac{1}{e^{\hbar\beta\omega} - 1}.
\end{aligned} \tag{3.39}$$

Além disto, podemos definir uma hamiltoniana que seja independente da temperatura, ou seja, independente de β . Demonstra-se facilmente com as expressões encontradas em 3.29, 3.38 e 3.39, que

$$a^\dagger(\beta) a(\beta) - \tilde{a}^\dagger(\beta) \tilde{a}(\beta) = a^\dagger a - \tilde{a}^\dagger \tilde{a}. \tag{3.40}$$

Sendo assim, podemos definir o hamiltoniano $\hat{H} := H - \tilde{H}$:

$$\begin{aligned}
\hat{H}(\beta) &= H(\beta) - \tilde{H}(\beta) = \hbar\omega \left(a^\dagger(\beta) a(\beta) - \tilde{a}^\dagger(\beta) \tilde{a}(\beta) \right), \\
&= \hbar\omega \left(a^\dagger a - \tilde{a}^\dagger \tilde{a} \right).
\end{aligned} \tag{3.41}$$

Vamos aplicar este recém definido operador nos estados termiais do vácuo,

$$\begin{aligned}
\hat{H} | 0(\beta) \rangle &= 0, \\
\hat{H} a^\dagger(\beta) | 0(\beta) \rangle &= \hbar\omega a^\dagger(\beta) | 0(\beta) \rangle, \\
\hat{H} \tilde{a}^\dagger(\beta) | 0(\beta) \rangle &= -\hbar\omega \tilde{a}^\dagger(\beta) | 0(\beta) \rangle, \\
\hat{H} a^\dagger(\beta) \tilde{a}^\dagger(\beta) | 0(\beta) \rangle &= 0.
\end{aligned} \tag{3.42}$$

Com isso, percebemos que o espaço de Fock termal é construído a partir do vácuo $| 0(\beta) \rangle$ e é gerado pelo estados

$$\{ | 0(\beta) \rangle; a^\dagger(\beta) | 0(\beta) \rangle; \tilde{a}^\dagger(\beta) | 0(\beta) \rangle \dots \frac{(a^\dagger(\beta))^n (\tilde{a}^\dagger(\beta))^m}{\sqrt{n!} \sqrt{m!}} | 0(\beta) \rangle \}. \tag{3.43}$$

3.4 Estado térmico geral

As equações até aqui desenvolvidas nos permitem escrever de uma maneira mais compacta e geral os estados termiais em função do estado termal no vácuo:

$$|\Psi(\beta)\rangle = f(a, a^\dagger; \beta) | 0(\beta) \rangle. \tag{3.44}$$

Qual seria o valor esperado de um operador qualquer A por exemplo nesse estado? Necessitamos então encontrar o operador densidade $\rho_{|\Psi(\beta)\rangle}$. Repetindo o que já foi feito anteriormente, ficamos com:

$$\begin{aligned}
\langle \Psi(\beta) | A | \Psi(\beta) \rangle &= \text{Tr} \left(\rho_{|\Psi(\beta)\rangle} A \right), \\
&= \langle 0(\beta) | f^\dagger(a, a^\dagger; \beta) A f(a, a^\dagger; \beta) | 0(\beta) \rangle, \\
&= \text{Tr} \left(f(a, a^\dagger; \beta) \rho_\beta f^\dagger(a, a^\dagger; \beta) A \right), \\
\Rightarrow \rho_{|\Psi(\beta)\rangle} &= f(a, a^\dagger; \beta) \rho_\beta f^\dagger(a, a^\dagger; \beta); \quad \rho_\beta = \frac{e^{-\beta H}}{Z(\beta)}.
\end{aligned} \tag{3.45}$$

Uma das aplicações possíveis para este formalismo é encontrar os estados termais Bell-Cat, e para isso, necessitamos de mais uma etapa. No hamiltoniano 3.19 vemos que ele é composto por uma combinação linear dos operadores a , a^\dagger e \hat{n} . Estes operadores obedecem à estrutura algébrica específica, além disso, esse conjunto de operadores juntamente com o operador unitário I formam uma álgebra de Lie do grupo Heisenberg-Weil o qual será denotado por $H_4(\beta)$ obedecendo as seguintes relações algébricas (ZHANG; FENGT; GILMORE, 1990):

$$\begin{aligned}
[\hat{n}, a^\dagger] &= a^\dagger, & [\hat{n}, I] &= 0, \\
[\hat{n}, a] &= -a, & [a^\dagger, I] &= 0, \\
[a, a^\dagger] &= I, & [a, I] &= 0.
\end{aligned} \tag{3.46}$$

Pode-se falar, então, sobre o que é um subgrupo estável e o espaço Coset, pois são importantes para o entendimento do operador deslocamento que gera estados coerentes. O subgrupo representa um conjunto de operações geradas pelo operador número \hat{N} e identidade I tal que teremos operações da forma $h = \exp\{i(\delta\hat{N} + \phi I)\}$. Esse grupo possui esse nome por deixar os estados invariantes $h|0\rangle = |0\rangle e^{i\phi}$. O espaço Coset terá a seguinte representação, considerando que estamos tratando caso para dois bósons (LULA-ROCHA et al., 2020):

$$\frac{H_4^1(\beta) \oplus H_4^2(\beta)}{\overline{U}_\beta^1(1) \otimes \overline{U}_\beta^1(1) \otimes \overline{U}_\beta^2(1) \otimes \overline{U}_\beta^2(1)}, \tag{3.47}$$

de modo que H_4^i é gerado por $[\hat{n}_i, a_i(\beta), a_i^\dagger(\beta), I_i]$ e $\overline{U}_\beta^i(1) \otimes \overline{U}_\beta^i(1)$ (grupo estável), por $[\hat{n}_i, I_i]$, com i representando o número de partículas.

Definido o espaço Coset, devemos definir o operador unitário de deslocamento, o qual jaz neste espaço, para que prossigamos a fim de descrever os estados *Bell-Cat*. O operador é:

$$D(\alpha; \beta) = e^{\alpha a^\dagger(\beta) - \alpha^* a(\beta)}. \tag{3.48}$$

Para o nosso exemplo de duas partículas, temos que α_i são números complexos e, deste modo, obtemos a seguinte propriedade:

$$\begin{aligned}
D(\alpha_1, \alpha_2; \beta) &= \exp\{\alpha_1 a_1^\dagger(\beta) - \alpha_1^* a_1(\beta)\} \cdot \exp\{\alpha_2 a_2^\dagger(\beta) - \alpha_2^* a_2(\beta)\}, \\
&= D_1(\alpha; \beta) D_2(\alpha; \beta).
\end{aligned} \tag{3.49}$$

3.5 Operador densidade e os estados Bell-Cat

Nós estamos interessados na análise dos estados termais *Bell-Cat*. Para realizar esta análise, devemos escrever a matriz densidade. Consideramos a expressão colocada anteriormente

$$|\psi_{k,\pm}\rangle = N_{\pm} [|\alpha, k\alpha\rangle \pm |-\alpha, -k\alpha\rangle]. \quad (3.50)$$

Analogamente podemos reescrever esta expressão em termos dos operadores de deslocamento, tendo em mente que o estado coerente relaciona-se com o operador deslocamento $|\alpha\rangle = D(\alpha)|0\rangle$. Assim, escrevemos:

$$|\psi_{k,\pm}(\beta)\rangle = N_{\pm} [D_1(\alpha; \beta) D_2(k\alpha; \beta) \pm D_1(-\alpha; \beta) D_2(-k\alpha; \beta)] |0(\beta)\rangle. \quad (3.51)$$

Devemos também lembrar das equações 3.1 para o estado coerente e 3.20 referente à transformação de Bogoliubov. Com isto, seguem as relações

$$D_1(\alpha; \beta) D_2(k\alpha; \beta) |0(\beta)\rangle = U(\beta) e^{\frac{-1}{2}|\alpha|^2} e^{\frac{-1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n_1 n_2}^{\infty} \frac{\alpha^{n_1}}{\sqrt{n_1!}} \frac{\alpha^{n_2} k^{n_2}}{\sqrt{n_2!}} |n_1, n_2, \tilde{0}, \tilde{0}\rangle \quad (3.52)$$

e

$$D_1(-\alpha; \beta) D_2(-k\alpha; \beta) |0(\beta)\rangle = U(\beta) e^{-|\alpha|^2} \sum_{n_1 n_2}^{\infty} (-1)^{n_1+n_2} \frac{\alpha^{n_1}}{\sqrt{n_1!}} \frac{\alpha^{n_2} k^{n_2}}{\sqrt{n_2!}} |n_1, n_2, \tilde{0}, \tilde{0}\rangle. \quad (3.53)$$

Considerando (TRINDADE et al., 2013),

$$|n(\beta)\rangle = \frac{[a^\dagger(\beta)]^n}{\sqrt{n!}} |0(\beta)\rangle, \quad (3.54)$$

podemos escrever os estados termalizados *Bell-Cat* 3.51 como:

$$\begin{aligned} |\psi_{k,\pm}(\beta)\rangle &= N_{\pm} e^{-|\alpha|^2} \sum_{n_1, n_2}^{\infty} \left[\frac{\alpha^{n_1+n_2}}{\sqrt{n_1!}} \frac{k^{n_2}}{\sqrt{n_2!}} \pm (-1)^{n_1+n_2} \frac{\alpha^{n_1+n_2}}{\sqrt{n_1!}} \frac{k^{n_2}}{\sqrt{n_2!}} \right] |n_1, n_2, \tilde{0}, \tilde{0}\rangle, \\ &= N_{\pm} e^{-|\alpha|^2} \sum_{n, m=0}^{\infty} \frac{\alpha^{n+m} k^m}{n! m!} [1 \pm (-1)^{n+m}] \frac{(a_1^\dagger)^n (a_2^\dagger)^m}{(u_1(\beta))^n (u_2(\beta))^m} |0(\beta)\rangle. \end{aligned} \quad (3.55)$$

Por último, procuramos uma expressão matemática que nos dê as informações térmicas dos estados *Bell-Cat*, e para isso devemos construir o operador densidade termal $\rho_{|\psi_{k,\pm}(\beta)\rangle}$ a fim de obtermos as propriedades térmicas do sistema. Este operador pode ser encontrado do seguinte modo (KHANNA et al., 2009):

$$|\psi_{k,\pm}(\beta)\rangle = \sum_{n, m=0}^{\infty} \frac{c_{n, m}}{n! m!} \frac{(a_1^\dagger)^n (a_2^\dagger)^m}{(u_1(\beta))^n (u_2(\beta))^m} |0(\beta)\rangle. \quad (3.56)$$

Considerando a equação 3.45, obtemos

$$\begin{aligned}
& \langle \psi_{k,\pm}(\beta) | A | \psi_{k,\pm}(\beta) \rangle \\
&= \sum_{\{n,m\}} \frac{c_{n,m}}{n!m!} \frac{c_{\tilde{n},\tilde{m}}^*}{\tilde{n}!\tilde{m}!} \frac{1}{(u_1(\beta))^{n+\tilde{n}} (u_2(\beta))^{m+\tilde{m}}} \langle 0(\beta) | (a_1)^\dagger{}^n (a_2)^\dagger{}^m A (a_1)^\dagger{}^{\tilde{n}} (a_2)^\dagger{}^{\tilde{m}} | 0(\beta) \rangle, \\
&= \sum_{\{n,m\}} \frac{c_{n,m}}{n!m!} \frac{c_{\tilde{n},\tilde{m}}^*}{\tilde{n}!\tilde{m}!} \frac{1}{(u_1(\beta))^{n+\tilde{n}} (u_2(\beta))^{m+\tilde{m}}} \text{Tr} \left[\rho_\beta (a_1)^\dagger{}^n (a_2)^\dagger{}^m A (a_1)^\dagger{}^{\tilde{n}} (a_2)^\dagger{}^{\tilde{m}} \right], \\
&= \text{Tr} \left[\left(\sum_{\{n,m\}} \frac{c_{n,m}}{n!m!} \frac{c_{\tilde{n},\tilde{m}}^*}{\tilde{n}!\tilde{m}!} \frac{1}{(u_1(\beta))^{n+\tilde{n}} (u_2(\beta))^{m+\tilde{m}}} (a_1)^\dagger{}^n (a_2)^\dagger{}^m \rho_\beta (a_1)^\dagger{}^{\tilde{n}} (a_2)^\dagger{}^{\tilde{m}} \right) A \right].
\end{aligned} \tag{3.57}$$

Nota-se que o termo entre parênteses é $\rho_{|\psi_{k,\pm}(\beta)\rangle}$, podendo ser escrito como:

$$\begin{aligned}
\rho_{|\psi_{k,\pm}(\beta)\rangle} &:= \frac{e^{-2|\alpha|^2}}{2(1 \pm e^{-4|\alpha|^2})} \sum_{\{n,m\}} \frac{\alpha^{n+m} (\alpha^*)^{\tilde{n}+\tilde{m}} k^{m+\tilde{m}}}{n! \cdot m! \cdot \tilde{n}! \cdot \tilde{m}!} [1 \pm (-1)^{n+m}] \\
&\times [1 \pm (-1)^{\tilde{n}+\tilde{m}}] \left(\sqrt{1 - e^{-\hbar\beta\omega_1}} \right)^{n+\tilde{n}} \left(\sqrt{1 - e^{-\hbar\beta\omega_2}} \right)^{m+\tilde{m}} \\
&\times \frac{(e^{-\hbar\beta\omega_1})^{n_1}}{(1 - e^{-\hbar\beta\omega_1})} \cdot \frac{(e^{-\hbar\beta\omega_2})^{n_2}}{(1 - e^{-\hbar\beta\omega_2})} \sqrt{(n_1 + n)! (n_2 + m)!} \sqrt{(n_1 + \tilde{n})! (n_2 + \tilde{m})!} \\
&\times |n_1 + n, n_2 + m\rangle \langle n_1 + \tilde{n}, n_2 + \tilde{m}|,
\end{aligned} \tag{3.58}$$

tal que $\sum_{\{n,m\}}^\infty$ é uma notação reduzida para $\sum_{n,m=0}^\infty \sum_{\tilde{n},\tilde{m}=0}^\infty \sum_{n_1,n_2=0}^\infty$ (LULA-ROCHA et al., 2020).

3.6 Termodinâmica quântica aplicada a Férmions

Veremos agora como construir o estado $|0(\beta)\rangle$ para um *ensemble* de férmions livres de frequência ω seguindo a abordagem do (TAKAHASHI; UMEZAWA, 1996).

A abordagem é muito semelhante ao exposto para o caso dos Bósons, portanto, menos detalhamento é necessário. Seja o hamiltoniano do sistema,

$$H = \hbar\omega a^\dagger a. \tag{3.59}$$

Considerando o vetor de estado do vácuo $|0\rangle$, temos

$$\begin{aligned}
H |0\rangle &= 0, \\
a |0\rangle &= 0, \\
Ha^\dagger |0\rangle &= \omega a^\dagger |0\rangle.
\end{aligned} \tag{3.60}$$

Como vimos, para trabalharmos com $|0(\beta)\rangle$, precisamos considerar o espaço de Hilbert térmico H_T . Sendo assim, vamos denotar o Hamiltoniano 3.59 do sistema como

$$\tilde{H} = \hbar\omega \tilde{a}^\dagger \tilde{a}. \tag{3.61}$$

Como foi feito para os bósons no procedimento 3.22, utilizando a ortogonalidade dos estados de acordo com a expressão 3.17, $|0(\beta)\rangle$ ficamos com

$$|0(\beta)\rangle = \frac{1}{\sqrt{1 + e^{-\hbar\beta\omega}}} \left[|0, \tilde{0}\rangle + e^{-\hbar\beta\omega/2} a^\dagger \tilde{a}^\dagger |0, \tilde{0}\rangle \right]. \quad (3.62)$$

Se utilizarmos a transformação de Bogoliubov como o feito na seção 1.61 para o caso dos bósons nos estados $|0\rangle$, podemos obter $|0(\beta)\rangle$. Precisamos definir então,

$$u(\beta) := \frac{1}{\sqrt{1 + e^{-\hbar\beta\omega}}} \quad (3.63)$$

e

$$v(\beta) := \sqrt{\frac{e^{-\hbar\beta\omega}}{1 + e^{-\hbar\beta\omega}}}. \quad (3.64)$$

Como $u(\beta)^2 + v(\beta)^2 = 1$,

$$u(\beta) = \cos \theta(\beta) \quad (3.65)$$

e

$$v(\beta) = \sin \theta(\beta). \quad (3.66)$$

A expressão 3.62 se torna

$$|0(\beta)\rangle = \left[u(\beta) + v(\beta) a^\dagger \tilde{a}^\dagger \right] |0, \tilde{0}\rangle. \quad (3.67)$$

Como o realizado com as relações 3.31, pode-se resumir a equação 3.67 como

$$|0(\beta)\rangle = e^{-iG_F(\beta)} |0, \tilde{0}\rangle; \quad U(\beta) = e^{-iG_F(\beta)} \quad (3.68)$$

tal que,

$$G_F(\beta) = -i\theta(\beta) (\tilde{a}a - a^\dagger \tilde{a}^\dagger). \quad (3.69)$$

Com base no que foi feito na seção 1.62 nas equações 3.32, ficamos com

$$\begin{aligned} a(\beta) &= u(\beta) a - v(\beta) \tilde{a}^\dagger, \\ \tilde{a}(\beta) &= u(\beta) \tilde{a} + v(\beta) a^\dagger, \\ a^\dagger(\beta) &= u(\beta) a^\dagger - v(\beta) \tilde{a}, \\ \tilde{a}^\dagger(\beta) &= u(\beta) \tilde{a}^\dagger + v(\beta) a. \end{aligned} \quad (3.70)$$

Podemos também inverter estas relações:

$$\begin{aligned} a &= u(\beta) a(\beta) + v(\beta) \tilde{a}^\dagger(\beta), \\ \tilde{a} &= u(\beta) \tilde{a}(\beta) - v(\beta) a^\dagger(\beta), \\ a^\dagger &= u(\beta) a^\dagger(\beta) + v(\beta) \tilde{a}(\beta), \\ \tilde{a}^\dagger &= u(\beta) \tilde{a}^\dagger(\beta) - v(\beta) a(\beta). \end{aligned} \quad (3.71)$$

Tal como mostramos para o caso da distribuição de Bose-Einstein, podemos tomar o valor esperado de $a^\dagger a$, e veremos que obtemos a distribuição de Fermi-Dirac:

$$\begin{aligned} \langle 0(\beta) | a^\dagger a | 0(\beta) \rangle &= \frac{1}{1 + e^{-\hbar\beta\omega}} \langle 0, \tilde{0} | \left(1 + e^{-\hbar\beta\omega/2} \tilde{a}a\right) a^\dagger a \left(1 + e^{-\hbar\beta\omega/2} a^\dagger \tilde{a}^\dagger\right) | 0, \tilde{0} \rangle, \\ &= \frac{1}{1 + e^{\hbar\beta\omega}} \equiv f_F(\omega). \end{aligned} \quad (3.72)$$

Repetindo o procedimento da forma como o realizado para os bósons, percebe-se que $H - \tilde{H} = \hat{H}$. Aplicando este novo operador nos estados termais do vácuo, resulta:

$$\begin{aligned} \hat{H} | 0(\beta) \rangle &= 0, \\ \hat{H} a^\dagger(\beta) | 0(\beta) \rangle &= \omega a^\dagger(\beta) | 0(\beta) \rangle, \\ \hat{H} \tilde{a}^\dagger(\beta) | 0(\beta) \rangle &= -\omega \tilde{a}^\dagger(\beta) | 0(\beta) \rangle, \\ \hat{H} a^\dagger(\beta) \tilde{a}^\dagger(\beta) | 0(\beta) \rangle &= 0. \end{aligned} \quad (3.73)$$

O espaço de Fock então passa a ser gerado pelo conjunto de vetores

$$\{| 0(\beta) \rangle; a^\dagger(\beta) | 0(\beta) \rangle; \tilde{a}^\dagger(\beta) | 0(\beta) \rangle; a^\dagger(\beta) \tilde{a}^\dagger(\beta) | 0(\beta) \rangle\}. \quad (3.74)$$

3.7 Função de Wigner dos estados termais *Bell-Cat*

Nas seções 1.6 e 2.2 discutimos os principais aspectos da decoerência relacionada a teoria do espalhamento para uma superposição de gaussianas, para os qubits, e agora dos estados quânticos *Bell-Cat*, bem como um desenvolvimento teórico da termodinâmica quântica para bósons e férmions. Com relação aos estados *Bell-Cat*, vimos a termalização, agora vamos tratar este problema às luzes da função de Wigner.

Pode-se representar um estado quântico por meio da função de Wigner, que é uma distribuição de quase-probabilidade a qual admite valores negativos, sendo esses valores negativos, associados às propriedades quânticas de um sistema. Podemos expressar a função de Wigner na forma (LULA-ROCHA et al., 2020):

$$W(q, p) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \langle q - \frac{\nu}{2} | \rho | q + \frac{\nu}{2} \rangle e^{\frac{i\nu p}{\hbar}} d\nu. \quad (3.75)$$

Na equação 3.58 apresenta-se o operador densidade termal $\rho_{|\psi_{k,\pm}(\beta)\rangle}$, e como mostrado na referência (LULA-ROCHA et al., 2020), a função de Wigner 3.75 correspondente tem a forma:

$$\begin{aligned} W_{\alpha,\beta}^{k,\pm}(q_1, p_1, q_2, p_2) &= W_{\alpha,\beta;1}^{k,\pm}(q_1, p_1) W_{\alpha,\beta;2}^{k,\pm}(q_2, p_2), \\ &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\nu_1 d\nu_2 e^{\frac{i\nu_1 p_1}{\hbar}} e^{\frac{i\nu_2 p_2}{\hbar}} \\ &\quad \times \langle q_1 - \frac{\nu_1}{2}, q_2 - \frac{\nu_2}{2} | \rho_{\psi_{k,\pm}(\beta)} | q_1 + \frac{\nu_1}{2}, q_2 + \frac{\nu_2}{2} \rangle. \end{aligned} \quad (3.76)$$

Em que $W_{\alpha,\beta;j}^\pm(q_j, p_j)$, $j = 1, 2$, representa a função de Wigner para cada oscilador harmônico de bósons do sistema, no caso, estamos trabalhando com dois, tal como vemos no

hamiltoniano 3.19. É importante notar que esta função de Wigner contém o parâmetro temperatura descrito pela variável β . Por fim, pode-se calcular a função acima tal como na referência (LULA-ROCHA et al., 2020), sendo $L_n^m(x)$ polinômios de Laguerre:

$$\begin{aligned}
W_{\alpha,\beta}^{k,\pm}(q_1, p_1, q_2, p_2) &= \frac{\left(1 - e^{-\beta\hbar\omega_1}\right) \left(1 - e^{-\beta\hbar\omega_2}\right) e^{-\frac{q_1^2}{b_1^2} - \frac{p_1^2 b_1^2}{\hbar^2}} e^{-\frac{q_2^2}{b_2^2} - \frac{p_2^2 b_2^2}{\hbar^2}}}{2\pi^2 \hbar^2 \left(e^{2\|\alpha\|^2} \pm e^{-2\|\alpha\|^2}\right)} \\
&\times \sum_{\{n,m\}} \frac{\alpha^{n+m} (\alpha^*)^{\tilde{n}+\tilde{m}} k^{m+\tilde{m}}}{n! m! \tilde{n}! \tilde{m}! n_1! n_2!} \left[1 \pm (-1)^{n+m}\right] \left[1 \pm (-1)^{\tilde{n}+\tilde{m}}\right] \\
&\times \left(\sqrt{1 - e^{-\beta\hbar\omega_1}}\right)^{n+\tilde{n}} \left(\sqrt{1 - e^{-\beta\hbar\omega_2}}\right)^{m+\tilde{m}} \left(e^{-\beta\hbar\omega_1}\right)^{n_1} \\
&\times \left(e^{-\beta\hbar\omega_2}\right)^{n_2} (n_1 + \min(n, \tilde{n}))! (n_2 + \min(m, \tilde{m}))! (-1)^{n_1+n} \\
&\times (-1)^{n_2+m-\min(0,n-\tilde{n})-\min(0,m-\tilde{m})} \left(\sqrt{2}\right)^{\|n-\tilde{n}\|} \left(\sqrt{2}\right)^{\|m-\tilde{m}\|} \\
&\times \chi_1^{\|n-\tilde{n}\|} \chi_2^{\|m-\tilde{m}\|} L_{n_1+\min(n,\tilde{n})}^{\|n-\tilde{n}\|} \left(\frac{2q_1^2}{b_1^2} + \frac{2p_1^2 b_1^2}{\hbar^2}\right) \\
&\times L_{n_2+\min(m,\tilde{m})}^{\|m-\tilde{m}\|} \left(\frac{2q_2^2}{b_2^2} + \frac{2p_2^2 b_2^2}{\hbar^2}\right), \tag{3.77}
\end{aligned}$$

tal que

$$b_j^2 = \frac{\hbar}{m\omega_j}; \quad \chi_j = \left\{ \begin{array}{l} \frac{q_j}{b_j} + i \frac{p_j b_j}{\hbar}, \quad \text{para } n \geq \tilde{n} \\ \frac{q_j}{b_j} - i \frac{p_j b_j}{\hbar}, \quad \text{para } n < \tilde{n} \end{array} \right\}. \tag{3.78}$$

Sendo assim, uma expressão para a função de Wigner termalizada foi encontrada para os estados *Bell-Cat*, de modo que variando a temperatura podemos obter mais detalhes a respeito de efeitos térmicos neste estado quântico. A partir do que já foi detalhado neste trabalho, espera-se que a medida que a temperatura aumente, aumente também a rapidez com a qual a decoerência irá agir, de modo que volume negativo que se observa por exemplo na figura 3, tende a zero.

Conclusão

O fenômeno da decoerência é sem dúvida um dos grandes desafios que físicos e engenheiros devem enfrentar para que se avance no desenvolvimento de computadores quânticos. Não é exagero dizer que estamos no processo de uma revolução quântica, e assim como toda inovação tecnológica, a sua influência na sociedade será incontestável. É necessário ressaltar que apesar dos computadores quânticos serem capazes de grandes feitos, por se embasarem no fenômeno da superposição quântica, eles não são equipamentos propostos para substituírem os computadores como conhecemos hoje, pelo menos por enquanto, e sim para realizarem atividades altamente específicas. Mas isso não reduz em nada os infinitos benefícios que vamos ter com o seu aperfeiçoamento e grande poder de cálculo.

Dentre os vários fatores que afetam o fenômeno da decoerência, tentamos dar um enfoque maior na influência da temperatura, mas, outros fatores inevitavelmente influenciam, tal como, a quantidade e o tipo de partículas.

No capítulo 1, primeiramente foram delineados conceitos básicos para o entendimento deste trabalho como o emaranhamento quântico e a sua contextualização na decoerência quântica, bem como o operador densidade. Mostramos também como ocorre a perda da coerência quântica, que pode ser entendida à luz da matriz densidade como o processo pelo qual os termos fora da diagonal principal se esvaem. Além disso, foi ressaltado a característica quântica do fenômeno ao reiterarmos as diferenças com relação a ruídos e ao fenômeno clássico da dissipação.

Na seção sobre a decoerência e a dissipação vimos que a perda de coerência quântica está correlacionada com a distância espacial entre as entidades interagentes como indicado na equação 1.34, de modo que notamos facilmente a influência da temperatura diretamente no tempo de relaxamento da decoerência e de dissipação. Quanto maior a temperatura, maior é a discrepância entre as escalas temporais, ou seja, mais rapidamente os estados quânticos perdem coerência.

A partir da seção 1.6 introduzimos a teoria do espalhamento com o objetivo de quantificar a decoerência a um exemplo físico. Deste modo, foi possível mostrar que a decoerência está ligada a uma supressão espacial da interferência entre os estados quânticos interagentes. Posteriormente ao determinar o fator de decoerência, foi possível ver de maneira explícita como este coeficiente varia em função de parâmetros como a temperatura.

Adicionalmente, foi introduzida a função de Wigner para o estudo da decoerência a partir do modelo canônico baseado no movimento Browniano. Com base nos conhecimentos prévios percorridos, foi possível elaborar uma equação de dinâmica para o operador

densidade, também chamada de equação mestre. Então, por meio da função de Wigner mostrou-se que a decoerência está relacionada com uma equação de difusão do momento, efeito este demonstrado na simulação representada na figura 3, sendo estas imagens muito claras quanto ao desaparecimento de poços negativos na representação de Wigner a medida que há a perda de propriedades quânticas do sistema composto.

No capítulo 2 trabalhamos com o conceito da esfera de Bloch para estudar a dinâmica de um qubit. Portanto, em uma primeira instância, tratamos de mostrar o que é a esfera de Bloch e como chegar na expressão para o operador densidade que a define. Isso é importante, pois também para este estado quântico, qubit, as equações mestres são cruciais e são capazes de nos informar sobre processos que ocorrem em estados mistos. Partindo desta contextualização, uma teoria que usamos para nos auxiliar na demonstração da equação de Redfield-Bloch foi a teoria da irreversibilidade, o que nos possibilitou encontrar outra equação de dinâmica para o operador densidade em termos dos chamados tensores de Redfield-Bloch. Este resultado foi importante, pois nos possibilitou por meios computacionais mostrar pontos no interior da esfera de Bloch, os quais denotam estados mistos. Sendo assim, verificou-se um processo de decoerência para este par de qubits, que é o que se tenta evitar ao máximo em um computador quântico.

No capítulo 3 focamos no estudo da termodinâmica quântica para exemplificar a atuação da decoerência quântica nos estados emaranhados *Bell-Cat*. Estes estados quânticos passaram por um processo de termalização, de modo que foi possível construir o operador densidade e, posteriormente, a função de Wigner com dependência explícita da temperatura. Durante o processo de termalização dos estados quânticos *Bell-Cat*, foi necessário introduzirmos um espaço duplo de Hilbert para que fôsse possível realizarmos operações como a transformação de Bogoliubov, que é crucial para a termodinâmica quântica. Outro conceito muito recorrente tanto nos capítulos anteriores, mas de maneira explícita no capítulo 3, é o vácuo. Devido a sua importância, expomos no apêndice B uma discussão acerca dos vários vácuos e como isso se relaciona com a ideia de fenômenos macroscópicos que são gerados a partir do regime quântico, bem como a justificativa sobre a utilização do espaço duplo de Hilbert para tratar estados térmicos.

É notório no decorrer deste trabalho a importância do operador densidade para o estudo da decoerência. O entendimento de que os fenômenos quânticos e, consequentemente, a decoerência estão relacionados aos elementos cruzados da matriz densidade, foi discutido na seção *decoerência e amortecimento da interferência* e constituiu um fundamento chave para compreender todos os desdobramentos desenvolvido nos capítulos 1, 2 e 3. As equações mestres que utilizamos partem desse entendimento, sendo as figuras 3, 4 e 5 representações do estudo do operador densidade. Portanto, apesar de partirmos de estados diferentes em cada capítulo, conceitos semelhantes foram usados em todos e, além disso, eles se correlacionam. Vemos no capítulo 1 a importância da função de Wigner para

o estudo de propriedades não clássicas em estados quânticos bem como a influência da temperatura neste processo. No entanto, isso só foi possível por meio do estudo mais detalhado sobre o operador densidade, que é também amplamente explorado no capítulo 2, e, no capítulo 3, reforçamos isto com a teoria da termodinâmica quântica. Por conseguinte, nota-se que diversos conhecimentos se relacionam ou se repetem em todas as 3 diferentes abordagens, o que nos indica um grau de concordância teórica muito interessante e promissora tecnologicamente falando.

Este trabalho se propôs a tratar de um tema que se mostrou ser muito vasto. De modo que o entendimento mais detalhado sobre a influência da temperatura no fenômeno da decoerência através da função de Wigner, requiere o estudo de vários outros temas. O desenvolvimento da teoria do espalhamento por exemplo, foi algo que foi necessário para demonstrarmos como a função de Wigner pode ser escrita como uma equação de difusão para o momento 1.111, que foi o que ilustramos a respeito da evolução temporal, equação 1.112, por meio da figura 3. Outra teoria também muito interessante e que sugere um método para demonstrar a equação de Redfield-Bloch 2.22 é a da teoria da irreversibilidade, a qual não foi desenvolvida com rigor, mas que foi de grande ajuda para os desenvolvimentos apresentados no capítulo 2.

Ao final deste trabalho, é esperado que cause ao leitor pouco ou nada familiarizado com o fenômeno da decoerência, função de Wigner, termodinâmica quântica ou mesmo a proeminente área da computação quântica, algum tipo de provocação para que se busque mais a respeito do tema ou dos temas, e também que as informações aqui sumarizadas sirvam de ajuda e de fonte de estudo. Para compor este trabalho foi necessário muita pesquisa, e portanto, alta quantidade de referências bibliográficas. Os exemplos citados acima são alguns dos tópicos que foi dada mais atenção, no entanto existem alguns outros nos quais não foi possível desenvolver com mais rigor. Todavia, os conceitos pouco explanados se encontram nas referências, logo, isso possibilita aperfeiçoar o que aqui já foi feito.

Referências

- ADLER, S. L. Normalization of collisional decoherence: squaring the delta function, and an independent cross-check. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, v. 39, n. 45, p. 14067, 2006. Citado na página 41.
- BELL, J. S. On the einstein podolsky rosen paradox. *Physics Physique Fizika*, v. 1, n. 3, p. 195, 1964. Citado 2 vezes nas páginas 24 e 63.
- BOHM, D.; AHARONOV, Y. Discussion of experimental proof for the paradox of einstein, rosen, and podolsky. *Physical Review*, v. 108, n. 4, p. 1070, 1957. Citado 2 vezes nas páginas 24 e 64.
- BROWN R. H.; TWISS, R. Q. Correlation between photons in two coherent beams of light. *Nature*, v. 177, n. 4497, p. 27–29, 1956. Citado na página 25.
- BROWN R. H.; TWISS, R. Q. *A Test of a New Type of Stellar Interferometer on Sirius. In: A Source Book in Astronomy and Astrophysics, 1900–1975.* [S.l.]: Harvard University Press., 2013. 8-12 p. Citado na página 25.
- CALDEIRA AMIR O.; LEGGETT, A. J. Path integral approach to quantum brownian motion. *Physica A: Statistical mechanics and its Applications*, v. 121, n. 3, p. 587–616, 1983. Citado 2 vezes nas páginas 51 e 52.
- CALLEN HERBERT B.; WELTON, T. A. Irreversibility and generalized noise. *Physical Review*, v. 83, n. 1, p. 34, 1951. Citado 3 vezes nas páginas 50, 51 e 89.
- DIÓSI, L. *A short course in quantum information theory: an approach from theoretical physics.* [S.l.]: Springer, 2011. Citado na página 55.
- EINSTEIN, A. Über die von der molekularkinetischen theorie der wärme geforderte bewegung von in ruhenden flüssigkeiten suspendierten teilchen. *Annalen der physik*, v. 4, p. 549–560, 1905. Citado na página 51.
- EINSTEIN, A.; PODOLSKY, B.; ROSEN, N. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? *Physical Review*, v. 47, n. 10, p. 777–780, 1935. Citado na página 24.
- FEYNMAN, R. P.; JR, F. L. V.; HELLWARTH, R. W. Geometrical representation of the schrödinger equation for solving maser problems. *Journal of applied physics*, v. 28, n. 1, p. 49–52, 1957. Citado na página 55.
- FURASAWA, A.; LOOCK, P. V. *Quantum teleportation and entanglement.* [S.l.]: WILEY-VCH Verlag GmbH Co. KGaA, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 63 e 90.
- FÖLDI, P.; CZIRJÁK, A.; BENEDICT, M. G. Rapid and slow decoherence in conjunction with dissipation in a system of two-level atoms. *Physical Review A*, v. 63, n. 3, p. 033807, 2001. Citado na página 25.
- HILLERY, M. O. S. M. Distribution functions in physics: fundamentals. *Physics reports*, v. 106, n. 3, p. 121–167, 1984. Citado na página 48.

HORNBERGER, K.; HACKERMÜLLER, L.; ARNDT, M. Influence of molecular temperature on the coherence of fullerenes in a near-field interferometer. *Physical Review A*, v. 71, n. 2, p. 023601, 2005. Citado na página 25.

HOVE, L. V. The approach to equilibrium in quantum statistics: A perturbation treatment to general order. *Physica*, v. 23, n. 1-5, p. 441–480, 1957. Citado 2 vezes nas páginas 57 e 58.

JACKSON, J. D. *Classical electrodynamics*. [S.l.]: John Wiley Sons, Inc., 1999. Citado na página 44.

JOHANSSON J. ROBERT; NATION, P. D. N. F. Qutip: An open-source python framework for the dynamics of open quantum systems. *Computer Physics Communications*, v. 183, n. 8, p. 1760–1772, 2012. Citado 4 vezes nas páginas 15, 57, 59 e 60.

JOOS, E. et al. *Decoherence and the appearance of a classical world in quantum theory*. [S.l.]: Springer Science Business Media, 2013. Citado 7 vezes nas páginas 37, 42, 47, 49, 50, 52 e 53.

JOOS, E.; ZEH, H. D. The emergence of classical properties through interaction with the environment. *Zeitschrift für Physik B Condensed Matter*, v. 59, n. 2, p. 223–243, 1985. Citado 2 vezes nas páginas 42 e 53.

KATO, K. Quasi-bell entangled coherent states and its quantum discrimination problem in the presence of thermal noise. *International Society for Optics and Photonics*, v. 9615, n. 13n14, p. 96150N, 2015. Citado na página 25.

KHANNA, F. C. et al. *Thermal quantum field theory: algebraic aspects and applications*. [S.l.]: World Scientific, 2009. Citado 4 vezes nas páginas 29, 65, 68 e 72.

LULA-ROCHA, V. N. A. et al. Negativity of the wigner function and thermal effects of bell-cat states. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, v. 53, n. 41, p. 415302, 2020. Citado 7 vezes nas páginas 64, 65, 66, 71, 73, 75 e 76.

MA, X.-S. et al. Quantum teleportation over 143 kilometres using active feed-forward. *Nature*, v. 489, n. 7415, p. 269–273, 2012. Citado na página 25.

PENROSE, R. *Fashion, faith, and fantasy in the new physics of the universe*. [S.l.]: Princeton University Press, 2016. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 25.

RAZAVIAN, S. et al. Quantum thermometry by single-qubit dephasing. *The European Physical Journal Plus*, v. 134, n. 6, p. 284, 2019. Citado na página 25.

RISKEN, H. *Fokker-planck equation*. In: *The Fokker-Planck Equation*. [S.l.]: Springer, Berlin, Heidelberg, 1996. Citado na página 51.

SAKURAI JUN JOHN; COMMINS, E. D. *Modern quantum mechanics*. [S.l.]: revised edition, 1995. Citado na página 39.

SCHLOSSHAUER, M. A. *Decoherence: and the quantum-to-classical transition*. [S.l.]: Springer Science Business Media, 2007. Citado 19 vezes nas páginas 15, 27, 28, 30, 31, 32, 33, 34, 36, 37, 39, 42, 43, 44, 49, 57, 59, 60 e 61.

- SCHRÖDINGER, E. *Discussion of probability relations between separated systems. In: Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society.* [S.l.]: Cambridge University Press., 1935. 555-563 p. Citado na página 23.
- SHANKAR, R. *Principles of quantum mechanics.* [S.l.]: Springer Science Business Media, 2012. Citado na página 55.
- TAKAHASHI, Y.; UMEZAWA, H. Thermo field dynamics. *International journal of modern Physics B*, v. 10, n. 13n14, p. 1755–1805, 1996. Citado 2 vezes nas páginas 66 e 73.
- TRINDADE, M. A. S. et al. Quantum information, thermofield dynamics and thermalized bosonic oscillator. *International Journal of Modern Physics B*, v. 27, n. 24, p. 1350133, 2013. Citado na página 72.
- UMEZAWA, H. *Advanced field theory: Micro, macro, and thermal physics.* [S.l.]: AIP, 1995. Citado 5 vezes nas páginas 65, 89, 90, 91 e 92.
- WEISS, U. *Quantum dissipative systems.* [S.l.]: World scientific, 1999. Citado 2 vezes nas páginas 58 e 59.
- WILHELM, F. K. et al. *Superconducting qubits ii: Decoherence. In: Manipulating Quantum Coherence in Solid State Systems.* [S.l.]: Springer, Dordrecht, 2007. Citado 3 vezes nas páginas 49, 57 e 58.
- WU, W.; LIN, H.-Q. Effect of bath temperature on the decoherence of quantum dissipative systems. *Physical Review A*, v. 94, n. 6, p. 062116, 2016. Citado na página 25.
- YURKE, B.; STOLER, D. Generating quantum mechanical superpositions of macroscopically distinguishable states via amplitude dispersion. *Physical review letters*, v. 57, n. 1, p. 13, 1986. Citado na página 63.
- ZHANG, W.-M.; FENGT, D. H.; GILMORE, R. Coherent states: theory and some applications. *Reviews of Modern Physics*, v. 62, n. 4, p. 867, 1990. Citado 3 vezes nas páginas 71, 87 e 88.
- ZUREK, W. H. *Reduction of the Wavepacket: How Long Does it Take?. In: Moore G.T., Scully M.O. (eds) Frontiers of Nonequilibrium Statistical Physics. NATO ASI Series (Series B: Physics).* [S.l.]: Springer, Boston, MA, 1986. Citado 2 vezes nas páginas 36 e 37.
- ZWANZIG, R. Ensemble method in the theory of irreversibility. *The Journal of Chemical Physics*, v. 33, n. 5, p. 1338–1341, 1960. Citado na página 58.

Apêndices

APÊNDICE A – Estados coerentes

O espaço Coset possui um conjunto de elementos que provém uma decomposição única para todo operador $g \in H$, de modo que $g = D(\alpha) \cdot h$. Sendo assim, ficamos por exemplo, com o seguinte resultado se aplicarmos g num estado de vácuo, (ZHANG; FENGT; GILMORE, 1990)

$$\begin{aligned} g|0\rangle &= D(\alpha)h|0\rangle \\ &= D(\alpha)|0\rangle e^{i\phi} \equiv |\alpha\rangle e^{i\phi}. \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

Deste modo, encontramos o estado coerente. Podemos codificar a informação na computação quântica escrevendo-a em termos de osciladores harmônicos quânticos, mais conhecidos como *qumodes*. Deste modo, resolvendo o oscilador na base de energia:

$$H|E\rangle = \left(\frac{\hat{P}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{X}^2 \right) |E\rangle = E|E\rangle. \quad (\text{A.2})$$

Considerando os operadores de criação e aniquilação, obtemos:

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{X} + i\sqrt{\frac{1}{2m\omega\hbar}}\hat{P}, \\ \hat{a}^\dagger &= \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{X} - i\sqrt{\frac{1}{2m\omega\hbar}}\hat{P}, \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

$$\hat{a}^\dagger\hat{a} = \frac{m\omega}{2\hbar}\hat{X}^2 + \frac{1}{2m\omega\hbar}\hat{P}^2 + \frac{i}{2\hbar}[\hat{X}, \hat{P}] = \frac{H}{\hbar\omega} - 1/2. \quad (\text{A.4})$$

Definindo o operador número $|\hat{n}\rangle = \hat{a}^\dagger a$, ficamos com o hamiltoniano

$$H = \hbar\omega \left(\hat{n} + \frac{1}{2} \right). \quad (\text{A.5})$$

Aplicando os operadores de criação e aniquilação em um estado no espaço de Fock, obtemos

$$\hat{a}^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle, \quad (\text{A.6})$$

$$\hat{a} |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle. \quad (\text{A.7})$$

$|n\rangle$ são os auto-estados energéticos do oscilador, matematicamente isso fica evidente, uma vez que $\hat{n}|n\rangle = n|n\rangle$. Logo, n é o nível energético de uma partícula. Aplicando suscetivamente \hat{a}^\dagger , obtemos uma expressão muito interessante para $|n\rangle$:

$$\begin{aligned} \hat{a}^\dagger |0\rangle &= \sqrt{1} |1\rangle \\ (\hat{a}^\dagger)^2 |0\rangle &= \sqrt{1}\sqrt{2} |2\rangle \\ (\hat{a}^\dagger)^n |0\rangle &= \sqrt{n!} |n\rangle \\ \Rightarrow |n\rangle &= \frac{(\hat{a}^\dagger)^n |0\rangle}{\sqrt{n!}}. \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Os estados coerentes são os auto-estados do operador de aniquilação

$$\hat{a} |\alpha\rangle = \alpha |\alpha\rangle, \quad (\text{A.9})$$

partindo do vácuo, pode-se escrever o estado coerente como:

$$|\alpha\rangle = D(\hat{\alpha}) |0\rangle. \quad (\text{A.10})$$

No artigo (ZHANG; FENGT; GILMORE, 1990) vemos que o operador deslocamento pode ser escrita a partir da fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff como:

$$D(\alpha) = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{\alpha a^\dagger} e^{-\alpha^* a}. \quad (\text{A.11})$$

Logo, podemos dar prosseguimento à equação A.10 considerando a equação A.8 e usando a expansão de Taylor da função exponencial

$$\begin{aligned} |\alpha\rangle &= D(\alpha) |0\rangle \\ &= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_0^\infty \frac{(\alpha a^\dagger)^n}{n!} |0\rangle \\ &= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_0^\infty \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

APÊNDICE B – Os vários vácuos

Quando se fala em vácuo, costuma-se pensar como sendo equivalente ao vazio, à ausência, de modo que não se poderia tirar interpretação física mais interessante alguma. Anteriormente, citamos uma comparação do vácuo como sendo o sistema dissipativo para um sistema de átomos excitados que emitem radiação espontaneamente (CALLEN HERBERT B.; WELTON, 1951). Esse tipo de entendimento foi possível graças ao aperfeiçoamento no estudo de teoria quântica de campos e do eletromagnetismo quântico, o que trouxe um certo protagonismo ao vácuo, protagonismo este, perdido ao descartarem a antiga hipótese do éter.

Uma percepção muito relevante trazida no livro (UMEZAWA, 1995), é a de que com a teoria quântica de campos, ao termos um número grande de partículas, elas podem formar um condensado no vácuo e assim gerar objetos com propriedades macroscópicas, tais como o que acontece ao agrupar partículas com o mesmo sentido de spin gerando um momento magnético em um objeto ferromagnético.

De modo mais matemático, vemos nas expressões 3.2, 3.33 e 3.42, equações esta demonstradas no apêndice A, consequências e interpretações as quais deseja-se explicar com mais detalhamento, dado que é um conceito abstrato, ainda mais quando se fala em vácuo termal.

No decorrer das equações previamente escritas, tivemos estados representados por $|0\rangle$ e $|0(\beta)\rangle$. Em ambos os casos, o que estamos dizendo é que o número de partículas é zero, no entanto percebe-se que pode-se falar em vários tipos de vácuo. Sendo assim, vamos considerar as seguintes expressões para os conhecidos operadores canônicos:

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1. \quad (\text{B.1})$$

Considerando que

$$q = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \quad (\text{B.2})$$

e

$$p = \frac{1}{i\sqrt{2}} (\hat{a} - \hat{a}^\dagger), \quad (\text{B.3})$$

ficamos com

$$[q, p] = i. \quad (\text{B.4})$$

Sabemos que o operador número é definido como $\hat{N} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$, e deste modo representa-se os seus autovetores por $|n\rangle$. Portanto,

$$N |n\rangle = n |n\rangle, \quad \delta_{nm} = \langle n|m\rangle. \quad (\text{B.5})$$

Teremos então o autovetor $|0\rangle\rangle$ para o menor valor de n , este autovetor é chamado de vácuo,

$$a|0\rangle\rangle = 0 \quad (\text{B.6})$$

ou

$$N|0\rangle\rangle = \hat{a}^\dagger \hat{a}|0\rangle\rangle = 0. \quad (\text{B.7})$$

Para entender melhor essa questão sobre a existência de vários vácuos, podemos nos recordar de alguns fenômenos interessantes que aparecem no estudo de eletrodinâmica quântica, que se ocupa basicamente no estudo de como luz e matéria interagem. Sabe-se que campos de radiação podem ser considerados como um conjunto de fótons. No entanto, se não nos deixarmos levar pela aparente simplicidade desta afirmação, é natural querer entender como uma radiação, que podemos considerar como sendo uma manifestação macroscópica, surge de fótons, ou seja de propriedades quânticas. Ou então, como algo de natureza contínua pode surgir de algo corpuscular. Portanto, os estados destes objetos macroscópicos, não seriam autoestados do operador número, mas sim estados com altíssima incerteza no número de partículas e conseqüentemente de característica contínua.

O ponto importante a se notar é que, como vemos no livro (FURASAWA; LOOCK, 2011), uma das conseqüências da descrição quântica da luz, é que teremos relações de incerteza não somente para posição e momento, mas também para o campo eletromagnético. Pois os campos quantizados podem ser escritos como uma coleção de osciladores harmônicos quânticos, *quimodes*. Portanto, em um *laser* por exemplo, a luz emitida apresentará flutuações quânticas intrínsecas. Sendo assim, o estado quântico de um campo eletromagnético mais próximo de um estado clássico bem determinado são os famosos estados coerentes. Estes estados funcionam de maneira que uma diminuição na amplitude dos fótons " n " acarretam no aumento da incerteza de fase " θ ", caso contrário há violação do princípio de incerteza de Heisenberg, que pode ser estendido para

$$\Delta\theta\Delta n \geq \frac{\hbar}{2}. \quad (\text{B.8})$$

Sendo mais específico, essa equação nos mostra também que, para produzir uma radiação altamente direcionada, que é o caso dos *lasers*, é necessário diminuir a incerteza na fase ao máximo, o que inevitavelmente nos leva a precisar de muitos fótons. Logo, teremos um vácuo para este caso, no qual muitos fótons estarão condensados.

Vamos obter agora uma expressão para um condensado de partículas a partir do vácuo $|0\rangle\rangle$. Vamos ver um exemplo de como um condensado de partículas podem modificar um vácuo. Partindo da expressão B.6, escrevemos a chamada transformação de Bogoliubov para estados coerentes (UMEZAWA, 1995),

$$a \rightarrow \alpha(\theta) = a + \theta, \quad (\text{B.9})$$

sendo α um operador que obedece $[\alpha, \alpha^\dagger] = 1$ e θ um número clássico.

O vácuo para $\alpha(\theta)$ será denotado por $|0(\theta)\rangle$, tal que:

$$\alpha(\theta)|0(\theta)\rangle = 0, \quad (\text{B.10})$$

e com isso, da expressão B.9, tiramos que $|0(\theta)\rangle$ é o estado coerente para a ,

$$a|0(\theta)\rangle = -\theta|0(\theta)\rangle. \quad (\text{B.11})$$

Do mesmo modo que fizemos na seção *Operadores termais*, na expressão 3.32, para relacionar os operadores termais $a(\beta)$ com a , pode-se obter

$$\alpha(\theta) = U(\theta)aU(\theta)^{-1}, \quad (\text{B.12})$$

com

$$U(\theta) = e^{iG(\theta)}; \quad G(\theta) = -i(\theta^*a - \theta a^\dagger). \quad (\text{B.13})$$

O operador $U(\theta)$ se torna

$$U(\theta) = \exp\left\{-\frac{\|\theta\|^2}{2}\right\} \exp\{-\theta a^\dagger\} \exp\{\theta^* a\}, \quad (\text{B.14})$$

e então podemos relacionar os dois vácuos como

$$|0(\theta)\rangle = \exp\left\{-\frac{\|\theta\|^2}{2}\right\} \exp\{-\theta a^\dagger\} |0\rangle. \quad (\text{B.15})$$

Logo notamos que o estado de vácuo $|0(\theta)\rangle$ pode ser escrito como uma superposição coerente de estados de partículas originadas do estado de vácuo $|0\rangle$.

Considerando as prévias explanações, podemos inferir algumas conclusões de procedimentos tomados nas seções do capítulo 3, tanto para o caso bosônico como para o fermiônico. Nas equações 3.30 e 3.62 temos que no estado do vácuo termal $|0(\beta)\rangle$, os osciladores $a\tilde{a}$ estão condensados. Ou seja, quando escrevemos as expressões 3.43 e 3.74, estamos dizendo que é possível definir o espaço de Fock equivalentemente ao operar a^\dagger e \tilde{a}^\dagger ou α^\dagger e $\tilde{\alpha}^\dagger$. Em outras palavras, todos os vetores em um espaço podem ser escritos em termos de uma soma bem definida de vetores de outros espaços, o que significa que possuímos apenas um espaço de Fock, dado que todos os estados de Fock são equivalentes (UMEZAWA, 1995).

Sendo assim, o estudo sobre dois operadores não comutantes que geram observáveis de espectro contínuo, chamado de estados comprimidos, proporcionam efeitos quânticos no vácuo, que podem ser relacionados com efeitos térmicos (UMEZAWA, 1995). Sendo estes estados extremamente importantes para a termodinâmica quântica, que foi a teoria vista no capítulo 3.

Desta forma, entende-se que a transformação de Bogoliubov demonstrada na seção *Operadores termais* e equações 3.37 criam ruídos em estados puros, sendo estes, ruídos

termais. Isso é interessante pois, ruídos são esperados em estados mistos e não em estados puros (UMEZAWA, 1995)! O ponto importante de ser ressaltado é que este ruído termal introduzido pela transformação de Bogoliubov, também pode ser expresso por uma média estatística de estados mistos. Para demonstrar isso consideramos que m é o autovalor de $a^\dagger a$, e \tilde{m} de $\tilde{a}^\dagger \tilde{a}$. De modo que possamos escrever os seguintes estados puros:

$$|0\rangle = c_1 \sum_{m=0}^{\infty} \rho^\alpha |m, \tilde{m}\rangle, \quad (\text{B.16})$$

e

$$\langle 0| = c_2 \sum_{m=0}^{\infty} \langle m, \tilde{m}| \rho^{1-\alpha}, \quad (\text{B.17})$$

tal que $\langle 0|0\rangle = 1$, e $\rho = f^{a^\dagger a}$, com $f \equiv e^{-\omega/K_B T}$. As equações acima definem o vácuo como um condensado de pares térmicos, portanto, podemos encontrar o valor esperado para um operador A

$$\langle 0| A(a, a^\dagger) |0\rangle = \text{Tr} \left[\frac{\rho A(a, a^\dagger)}{\text{Tr} \rho} \right]. \quad (\text{B.18})$$

Conseguimos assim mostrar aqui a ideia por traz de uma das primeiras expressões colocadas no começo do desenvolvimento da teoria da termodinâmica quântica no capítulo 3. Sendo assim, essa ideia de considerar que condensados de partículas podem ser responsáveis por manifestações de fenômenos macroscópicos, bem como a introdução desse estado til, dá fundamentação para o dito na seção *Introdução ao formalismo termodinâmico quântico*, sobre a duplicação do espaço de Hilbert. Sendo este o espaço vetorial que foi designado a responder por fenômenos de caráter térmico.