

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA
INSTITUTO DE FÍSICA

HENRIQUE YUKIO LOURENÇO TUTIDA

**DEDUÇÃO DAS EQUAÇÕES DE EINSTEIN PELO
FORMALISMO LAGRANGIANO**

BRASÍLIA
21 DE MAIO DE 2021

Henrique Yukio Lourenço Tutida

Dedução das Equações de Einstein pelo Formalismo Lagrangiano

Monografia apresentada ao Instituto de Física da Universidade de Brasília como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Bacharel em Física.

Orientador: Mariana Penna Lima Vitenti

Universidade de Brasília – UnB

Instituto de Física

Brasília

21 de maio de 2021

Henrique Yukio Lourenço Tutida

Dedução das Equações de Einstein pelo Formalismo Lagrangiano/ Henrique Yukio Lourenço Tutida. – Brasília, 21 de maio de 2021-

63 p. : il. (algumas color.) ; 30 cm.

Orientador: Mariana Penna Lima Vitenti

Monografia – Universidade de Brasília – UnB

Instituto de Física, 21 de maio de 2021.

1. Palavra-chave1. 2. Palavra-chave2. I. Orientador. II. Universidade xxx. III. Faculdade de xxx. IV. Título

CDU 02:141:005.7

Henrique Yukio Lourenço Tutida

Dedução das Equações de Einstein pelo Formalismo Lagrangiano

Monografia apresentada ao Instituto de Física da Universidade de Brasília como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Bacharel em Física.

Trabalho aprovado. Brasília, 21 de maio de 2021:

Mariana Penna Lima Vitenti
Orientador

Professor
Convidado 1

Professor
Convidado 2

Brasília
21 de maio de 2021

Este trabalho é dedicado à ciência.

Agradecimentos

Com este Trabalho de Conclusão de Curso uma longa jornada se encerra para uma nova se iniciar. Minha aventura pelo curso de Física me proporcionou criar novos amigos inteligentes e incríveis, conhecer novas culturas e o mais importante: entender melhor o Universo.

Primeiro, agradeço à minha orientadora, Mariana Penna Lima Vitenti, que além de ser uma excelente professora é também uma ótima pessoa. Sem ela para me ajudar quando necessário e orientar no que foi preciso, este trabalho não teria sido possível.

Agradeço ao meu professor de Física do ensino médio, Luiz Antônio, que sempre acreditou em mim como um Físico e me apoiou nesta longa caminhada.

E por último, mas não menos importante, agradeço a todos os Físicos e mentes brilhantes que passaram por este planeta. Sem suas ideias, pensamentos e teorias, não poderíamos estar onde hoje estamos.

*“Física é minha vida,
Arte é meu amor.
(Walter Lewin)”*

Resumo

A Relatividade Geral é uma das teorias físicas mais bem sucedidas. Diferentes fenômenos previstos por ela vêm sendo observados no último século como, por exemplo, o efeito de lenteamento gravitacional, buracos negros e ondas gravitacionais. Neste trabalho, iremos realizar um estudo de alguns elementos da Relatividade Geral para deduzirmos as equações de campo de Einstein a partir do princípio de mínima ação. Primariamente fazemos um estudo dos principais elementos da Relatividade Restrita usando, no final, a formulação lagrangeana para encontrar a relação de energia-momento. A seguir, estudamos diferentes tópicos de Geometria Diferencial, apresentando detalhadamente, por exemplo, o que é a derivada covariante e o tensor de curvatura de Riemann. Por fim, revisamos o Princípio de Mínima Ação e, mostramos a dedução detalhada das equações de campo de Einstein a partir deste princípio.

Palavras-chaves: Relatividade Restrita. Transformações de Lorentz. Quadri-vetores. Geometria Diferencial. Princípio da Mínima Ação. Relatividade Geral

Lista de ilustrações

Figura 1 – Cone de luz e linha mundo de uma partícula.	25
Figura 2 – Ilustração de uma variedade e cartas. Fonte: Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity, Sean Carroll.	30
Figura 3 – Transporte paralelo de um vetor em um caminho fechado na superfície de uma esfera. Fonte: Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity, Sean Carroll.	43

Sumário

	Introdução	17
1	RELATIVIDADE RESTRITA	19
1.1	Os Postulados de Einstein	19
1.2	Simultaneidade e Transformações de Lorentz	19
1.3	Contração do Espaço e Dilatação do Tempo	22
1.4	Transformação de Velocidades	23
1.5	Quadrivetores	24
1.6	Quadrivelocidade	26
1.7	Energia e momento	26
2	GEOMETRIA DIFERENCIAL	29
2.1	Variedade	29
2.2	Vetores	30
2.3	Tensores	33
2.4	Métrica	35
2.5	Densidades tensoriais	36
2.6	Formas Diferenciais	38
2.7	Integração	39
2.8	Derivada Covariante e Conexão	40
2.9	Curvatura	45
2.10	Geodésicas	48
3	FORMULAÇÃO LAGRANGIANA	49
3.1	Princípio da Mínima Ação e Equações de Movimento	49
3.2	Equações de Campo de Einstein	50
3.3	Aplicação - Equações de Friedmann	55
	Conclusão	61
	REFERÊNCIAS	63

Introdução

No ano de 1905, Albert Einstein publicou seu famoso paper *On the Electrodynamics of Moving Bodies*, que trata da física de objetos em altas velocidades, próximas a da luz.

Apesar de muitos físicos pensarem que a Física estava completa, que precisavam apenas melhorar as medições, haviam algumas incertezas dentro da comunidade científica. Em 1900, Max Planck publicou seu famoso trabalho sobre a radiação de corpo negro, dando início à Física Quântica e mostrando que ainda havia muito para ser estudado. Posteriormente, em 1905, Einstein publicou seus famosos artigos, entre eles o *On a Heuristic Viewpoint Concerning the Production and Transformation of Light*, explicando o efeito fotoelétrico. Albert Einstein não era um físico famoso ainda, porém seu trabalho com o efeito fotoelétrico chamou a atenção de Max Planck, fazendo a carreira de Einstein se alavancar. O artigo sobre Relatividade Especial não havia recebido muita atenção, pois muitos pensavam que as ideias ali propostas eram absurdas. Mesmo muitos pensando que a teoria estava errada, ela resolvia muitos problemas, como a invariância das equações de Maxwell por transformação de referencial inercial, a dúvida na existência do Éter etc.

O trabalho de Einstein trouxe uma abordagem diferente no estudo da natureza e seus fenômenos. A noção de tempo absoluto foi abandonada e passou a ser mais uma coordenada para descrever os fenômenos físicos. Espaço e tempo não são mais "separados", como na mecânica newtoniana, e agora formam uma única estrutura, o que chamamos de espaço-tempo. Além dessa drástica mudança, as consequências da teoria de Einstein mostravam que o mundo à nossa volta se comporta de modo que não estamos acostumados quando observamos fenômenos em altas velocidades.

A Relatividade Especial foi desenvolvida sem considerar a presença de campos gravitacionais. Em 1915, Einstein publicou então a Teoria Geral da Relatividade, sendo uma nova teoria da gravitação. Até então, a gravitação era descrita pela gravitação de Newton, dada por

$$\mathbf{F} = -\frac{GMm}{r^2}\hat{\mathbf{r}}, \quad (1)$$

onde G é a constante gravitacional, M e m são as massas dos corpos, respectivamente e r é a distância entre os centros dos dois corpos.

Durante alguns séculos a Teoria de Gravitação de Newton descreveu com sucesso alguns fenômenos. No entanto, o avanço nas medidas e observações realizadas mostraram o seu limite de aplicação. A teoria já não era mais adequada para descrever, por exemplo, o periélio de Mercúrio. Com seu novo trabalho, Einstein propôs a solução para esse problema. A Relatividade Geral, além de resolver o problema dos periélios dos planetas,

também prevê outros efeitos como a curvatura do caminho da luz na presença de campos gravitacionais, o redshift e o lenteamento gravitacional, por exemplo.

As equações de campo de Einstein, dadas por

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}, \quad (2)$$

onde $R_{\mu\nu}$ é o tensor de curvatura de Ricci, R é o escalar de curvatura de Ricci, $g_{\mu\nu}$ é a métrica do espaço-tempo, G é a constante gravitacional, c é a velocidade da luz, e $T_{\mu\nu}$ é o tensor de energia-momento, não só obtiveram resultados precisos nos problemas propostos para testar a teoria, como também previram fenômenos como buracos negros e ondas gravitacionais. Estas equações governam a dinâmica da Relatividade Geral, mostrando que a teoria é uma teoria geométrica do espaço-tempo e como ela se relaciona com o conteúdo energético do universo. Hoje, RG é uma das teorias de gravitação mais precisas que conhecemos, sendo utilizada com sucesso para descrever inúmeros fenômenos em diferentes escalas (do Sistema Solar até à evolução do Universo em grandes escalas).

Neste trabalho, iremos realizar um estudo de alguns elementos da Relatividade Geral para deduzirmos as equações de campo de Einstein a partir do princípio de mínima ação. Primeiramente fazemos um estudo dos principais elementos da Relatividade Restrita usando, no final, a formulação lagrangeana para encontrar a relação de energia-momento. No segundo capítulo fazemos um estudo de Geometria Diferencial, apresentando detalhadamente, por exemplo, o que é a derivada covariante e o tensor de curvatura de Riemann. No terceiro, e último, capítulo revisamos o Princípio de Mínima Ação e, finalmente, mostramos a dedução detalhada das equações de campo de Einstein a partir deste princípio.

1 Relatividade Restrita

1.1 Os Postulados de Einstein

Na Relatividade Restrita, Einstein propôs dois postulados para servir de base para todo o desenvolvimento da teoria.

1. Princípio da Relatividade: as leis da física são as mesmas para qualquer referencial inercial;
2. Constância da velocidade da luz: a velocidade da luz no vácuo é a mesma para qualquer referencial inercial.

O primeiro postulado, apesar de parecer mais digerível, traz grandes consequências. Ele implica que não existem referenciais inerciais privilegiados, ou seja, as leis da física, e consequentemente os resultados de experimentos, não devem mudar de um referencial para outro.

A constância da velocidade da luz é menos intuitiva do que o princípio da relatividade. Segundo esse postulado, não importa o referencial inercial no qual são feitas as medidas da velocidade da luz, ela sempre será a mesma, independente das velocidades do observador e da fonte.

Imagine um observador que está em um referencial inercial S parado em relação a outro observador em um referencial S' , que está a uma velocidade V constante em relação a S . Se a pessoa em S' arremessar uma pedra com velocidade v' , qual será a velocidade da pedra que o observador S irá medir? De acordo com as transformações de Galileu, para o observador em S , a velocidade da pedra será $v = V + v'$. Quando fazemos o mesmo experimento, porém trocando a pedra por um feixe de luz saindo de uma lanterna, obtemos que a velocidade da luz medida pelo referencial S seria de $v = c + v'$. Este resultado não está de acordo com os experimentos feitos para medir a velocidade da luz e nem com o segundo postulado de Einstein. Podemos concluir então que as transformações de Galileu não são suficientes para descrever o cenário proposto.

1.2 Simultaneidade e Transformações de Lorentz

Para nossos estudos, vamos utilizar o conceito de evento e espaço-tempo. Um evento pode ser descrito por um ponto em um espaço quadridimensional, chamado espaço-

tempo, onde três dimensões são espaciais e a quarta é temporal. Para um observador em um referencial inercial S , um evento tem coordenadas (x, y, z, t) .

Considere dois referenciais inerciais S e S' , e que a origem de seus sistemas referenciais coincidam. Um observador em S sincroniza seu relógio com um observador em S' . Após a sincronização, o observador em S' começa a se mover a uma velocidade $V < c$ constante para a direita em relação a S . Em um ponto de coordenadas (x_1, y_1, z_1, t_1) , o observador em S aciona um pulso de luz que se propaga com velocidade constante c . Para o observador em S , a frente de onda esférica que está se propagando atinge um ponto qualquer (x_2, y_2, z_2, t_2) em um tempo $t_2 - t_1$, ou seja, para a esfera

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - c^2(t_2 - t_1)^2 = 0, \quad (1.1)$$

em volta do observador, a luz atinge todos os pontos simultaneamente.

Do ponto de vista do observador em S' , também deve haver uma frente de onda esférica se propagando com velocidade c , de acordo com o segundo postulando de Einstein. Entretanto, os eventos registrados têm coordenadas (x'_1, y'_1, z'_1, t'_1) e (x'_2, y'_2, z'_2, t'_2) , e o tempo que a frente de onda leva para atingir um ponto qualquer na esfera

$$(x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 + (z'_2 - z'_1)^2 - c^2(t'_2 - t'_1)^2 = 0 \quad (1.2)$$

é $t'_2 - t'_1$, diferente do que é registrado pelo observador em S . Como S' já estava se movendo antes de o pulso de luz ser ligado, então as frentes de onda atingem pontos quaisquer em tempos diferentes. Conseguimos concluir que dois eventos que são simultâneos em um referencial inercial não é, necessariamente, simultâneo em outro referencial inercial.

As equações (1.1) e (1.2) são chamadas de intervalo entre dois eventos quaisquer, e de acordo com o segundo postulando de Einstein, se esse intervalo é zero em um sistema de coordenadas, então também deve ser zero em qualquer outro sistema de coordenadas. Portanto, temos que

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 - c^2(t_2 - t_1)^2 = (x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 + (z'_2 - z'_1)^2 - c^2(t'_2 - t'_1)^2. \quad (1.3)$$

Daqui em diante, vamos considerar o intervalo como sendo a quantidade

$$ds^2 = cdt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2, \quad (1.4)$$

que é invariante por mudança de sistemas de coordenadas.

Nosso trabalho agora é descobrir quais são as transformações de um referencial para outro que deixa a equação (1.4) invariante.

Considere os mesmos referenciais S e S' , com S' se movendo em relação a S com velocidade constante V . Para facilitar a dedução, vamos assumir um sistema de coordenadas de dois eixos, onde o eixo vertical é o tempo t e o horizontal é o espaço x , esse sistema é chamado de diagrama de Minkowski.

Vimos que a equação (1.4) deve ser invariante por transformações de um referencial para outro. Considere que o sistema de S' esteja rotacionado por um ângulo ψ em relação ao sistema de S . As relações entre as coordenadas (x, ct) de S e (x', ct') de S' são:

$$x = x' \cosh(\psi) + ct' \sinh(\psi), \quad (1.5)$$

$$ct = x' \sinh(\psi) + ct' \cosh(\psi). \quad (1.6)$$

Vamos analisar o movimento de S' do ponto de vista de S . Para $x' = 0$, obtemos que

$$x = ct' \sinh(\psi), \quad (1.7)$$

$$ct = ct' \cosh(\psi), \quad (1.8)$$

então,

$$\tanh(\psi) = \frac{x}{ct} = \frac{V}{c}. \quad (1.9)$$

Usando a relação $\cosh^2(\psi) - \sinh^2(\psi) = 1$, obtemos que

$$\sinh(\psi) = \frac{\frac{V}{c}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad (1.10)$$

$$\cosh(\psi) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \quad (1.11)$$

Aplicando as equações (1.10) e (1.11) em (1.5) e (1.6), obtemos

$$\begin{aligned} x &= \gamma(x' + Vt), \\ t &= \gamma\left(t' + \frac{V}{c^2}x'\right), \\ y &= y', \\ z &= z', \end{aligned} \quad (1.12)$$

onde $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$ é o fator de Lorentz. Estas são as transformações de Lorentz. As transformações (1.12) são para ir de S' para S . Para obter as transformações inversas basta trocar V por $-V$, já que S se move com velocidade $-V$ em relação à S' . Portanto,

$$\begin{aligned}x' &= \gamma(x - Vt), \\t' &= \gamma\left(t - \frac{V}{c^2}x\right), \\y' &= y, \\z' &= z.\end{aligned}\tag{1.13}$$

As transformações de Lorentz, diferentemente das transformações de Galileu, deixam o intervalo ds^2 invariante, como queríamos. No limite em que $V \ll c$, as equações (1.12) coincidem com as transformações de Galileu.

1.3 Contração do Espaço e Dilatação do Tempo

Considere que o observador em S' está com uma vara de comprimento $\Delta x' = x'_2 - x'_1$. Usando a transformação de Lorentz para x' , temos que

$$\begin{aligned}\Delta x' &= \gamma(x_2 - Vt) - \gamma(x_1 - Vt) \\ \Delta x' &= \gamma(x_2 - x_1) \\ \Delta x' &= \gamma\Delta x.\end{aligned}\tag{1.14}$$

Portanto, o observador em S irá medir a vara com comprimento

$$\Delta x = \gamma^{-1}\Delta x',\tag{1.15}$$

onde $\Delta x'$ é o comprimento próprio da vara. O comprimento próprio de uma vara é seu comprimento medido no referencial em que a mesma se encontra em repouso.

Para uma medida $\Delta t = t_2 - t_1$ feita por S de dois eventos que acontecem em um mesmo ponto x' em S' ,

$$\begin{aligned}\Delta t &= \gamma\left(t'_2 + \frac{V^2}{c}x'\right) - \gamma\left(t'_1 + \frac{V^2}{c}x'\right) \\ \Delta t &= \gamma(t'_2 - t'_1) \\ \Delta t &= \gamma\Delta t'.\end{aligned}\tag{1.16}$$

Portanto, o observador em S irá medir um tempo

$$\Delta t = \gamma\Delta t',\tag{1.17}$$

onde $\Delta t' \equiv \tau$ é o tempo próprio. O tempo próprio é o tempo medido entre eventos no referencial onde o relógio se encontra em repouso. Para achar o tempo próprio de um objeto, integramos

$$\tau = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} dt, \quad (1.18)$$

Como consequência dos postulados de Einstein e das transformações de Lorentz, objetos em movimento contraem e relógios em movimento têm suas medidas dilatadas.

1.4 Transformação de Velocidades

Vamos analisar a situação em que S' está se movendo em relação à S com velocidade V e queremos saber qual a relação da velocidade de uma partícula em cada referencial.

Considere as transformações infinitesimais

$$\begin{aligned} dx &= \gamma(dx' + V dt'), \\ dt &= \gamma(dt' + \frac{V}{c^2} dx'), \end{aligned} \quad (1.19)$$

e que

$$\begin{aligned} v &= \frac{dx}{dt}, \\ v' &= \frac{dx'}{dt'} \end{aligned} \quad (1.20)$$

são as velocidades da partícula medidas a partir de cada referencial. A partir disso, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} = v &= \frac{\gamma(dx' + V dt')}{\gamma(dt' + \frac{V}{c^2} dx')} \\ v &= \frac{dx' + V dt'}{dt' + \frac{V}{c^2} dx'} \end{aligned} \quad (1.21)$$

$$v = \frac{v' + V}{1 + v' \frac{V}{c^2}}. \quad (1.22)$$

A equação (1.22) é a regra da soma de velocidades de Einstein, que indica qual é a velocidade de uma partícula em um referencial S dadas a velocidade da partícula no

referencial S' e a velocidade relativa entre esses referenciais. No caso em que $v' = c$,

$$v = \frac{c + V}{1 + c\frac{V}{c^2}} \quad (1.23)$$

$$v = c,$$

ou seja, se um observador em S' ligar uma lanterna e medir a velocidade da luz como c , um observador em S com velocidade relativa V em relação a S' também medirá a velocidade da luz como c , o que está de acordo com a constância da velocidade da luz no vácuo.

No caso geral em que uma partícula se move com velocidade $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$, a equação (22) toma a forma vetorial

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{V} - \frac{1}{c^2}(\mathbf{V} \cdot \mathbf{v}')\mathbf{v}'. \quad (1.24)$$

1.5 Quadrivetores

A partir de agora, vamos denotar as coordenadas (ct, x, y, z) por (x^0, x^1, x^2, x^3) , onde $ct = x^0$, $x = x^1$, $y = x^2$ e $z = x^3$. No espaço euclidiano, podemos ver um ponto (x, y, z) como as componentes de um vetor. Consequentemente, um ponto (x^0, x^1, x^2, x^3) pode ser visto como as componentes do que chamamos de um quadrivetor no espaço pseudoeuclidiano. O tamanho ao quadrado desse vetor,

$$(x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2, \quad (1.25)$$

é um invariante por transformações de Lorentz. Se escrevermos

$$x^\mu = (x^0, \mathbf{x}), \quad (1.26)$$

onde $\mathbf{x} = (x^1, x^2, x^3)$ e $\mu = 0, 1, 2, 3$, temos então

$$x_\mu x^\mu = x_0 x^0 + x_1 x^1 + x_2 x^2 + x_3 x^3. \quad (1.27)$$

Aqui é adotada a convenção de soma de Einstein. Chamamos um vetor qualquer a^μ de contravariante e a_μ de covariante. O produto interno de um quadrivetor é definido como

$$a_\mu a^\mu, \quad (1.28)$$

onde $a^0 = a_0$, $a^1 = -a_1$, $a^2 = -a_2$ e $a^3 = -a_3$, portanto $a^\mu = (a^0, \mathbf{a})$, $a_\mu = (a_0, -\mathbf{a})$ e

$$a_\mu a^\mu = (a^0)^2 - (a^1)^2 - (a^2)^2 - (a^3)^2 = (a'^0)^2 - (a'^1)^2 - (a'^2)^2 - (a'^3)^2 \quad (1.29)$$

é um invariante por rotação e boosts.

A diferença entre o tamanho ao quadrado de um vetor no espaço euclidiano e no espaço pseudoeuclidiano é que no espaço pseudoeuclidiano esse valor pode ser negativo. Para vetores onde $a_\mu a^\mu > 0$, $a_\mu a^\mu < 0$ ou $a_\mu a^\mu = 0$, denotamos como tipo-tempo, tipo-espaço e nulo ou tipo-luz, respectivamente.

O intervalo ds^2 entre dois eventos determina a causalidade de um evento em relação ao outro. No diagrama de Minkowski descrevemos o movimento de uma partícula por sua linha mundo em um cone de luz:

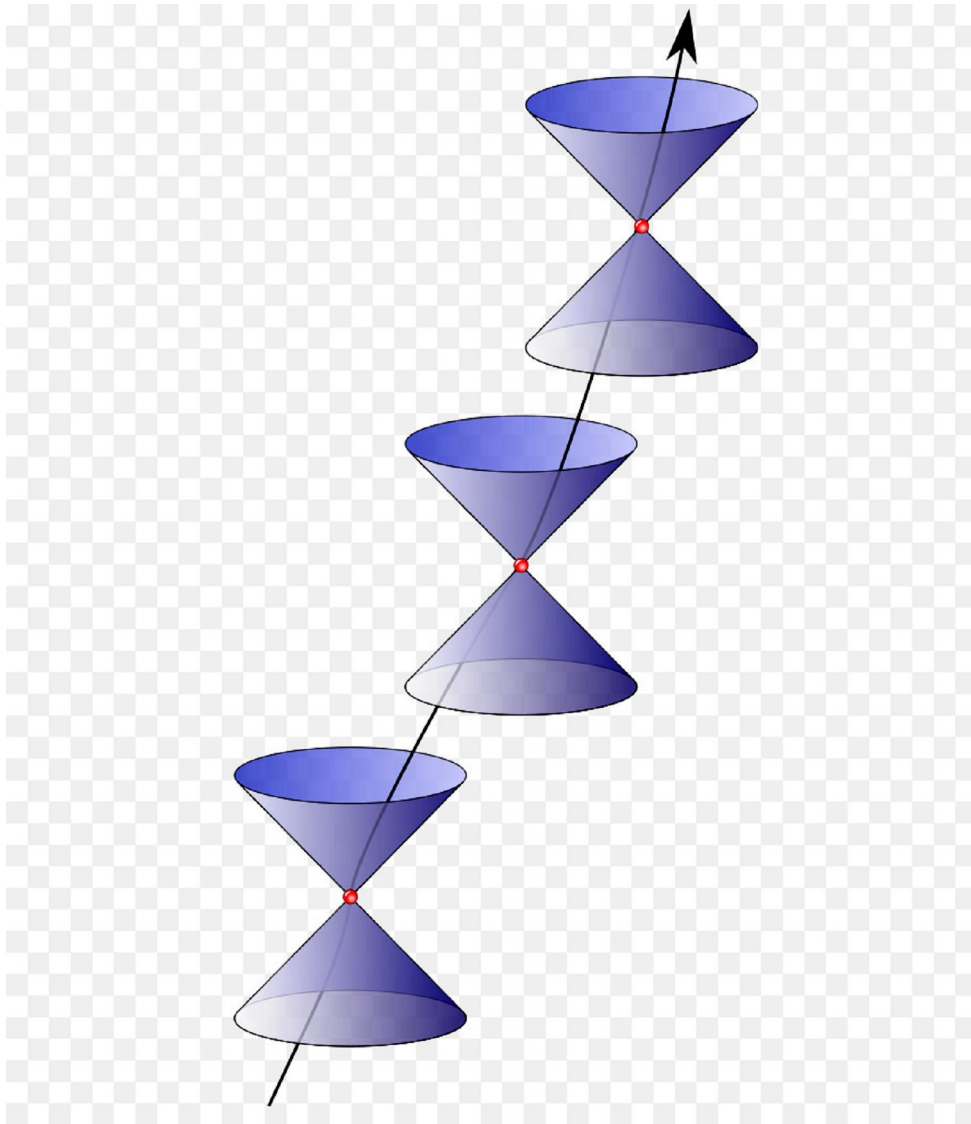


Figura 1 – Cone de luz e linha mundo de uma partícula.

Na imagem, a linha contínua representa o que chamamos de linha mundo da partícula. O vértice do cone é o presente, a parte superior é o futuro e a parte inferior é o passado. Quaisquer eventos que tenham o intervalo do tipo-tempo, se encontram dentro do cone e possuem relação causal. Eventos com intervalo tipo-luz ficam paralelas às bordas

do cone; esses eventos são fenômenos na velocidade da luz. Intervalos tipo-espaço ficam do lado de fora do cone e não têm relação causal com qualquer evento dentro do cone.

Como vimos, ds^2 é invariante por transformação de Lorentz. Portanto, se um evento A tem relação causal com um evento B em um determinado referencial inercial, então o mesmo vale para todos os referenciais inerciais.

1.6 Quadrivelocity

A quadrivelocity de uma partícula é

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{ds}. \quad (1.30)$$

De (1.18), notamos que

$$ds = c dt \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}, \quad (1.31)$$

onde u é a velocidade da partícula. Portanto,

$$u^1 = \frac{dx^1}{ds} = \frac{dx^1}{c dt \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \quad (1.32)$$

e assim,

$$u^\mu = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \frac{\mathbf{u}}{c \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \right). \quad (1.33)$$

1.7 Energia e momento

A lagrangiana de uma partícula livre relativística é ([LANDAU; LIFSHITZ, 1979](#))

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}. \quad (1.34)$$

O momento $\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{u}}$ será dado por

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \frac{\partial L}{\partial \mathbf{u}} \\ \mathbf{p} &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \left(-mc^2 \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \right) \\ \mathbf{p} &= -mc^2 \frac{-\frac{2\mathbf{u}}{c^2}}{2\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \\ \mathbf{p} &= \frac{m\mathbf{u}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}. \end{aligned} \tag{1.35}$$

Para velocidades $u \ll c$, (1.35) volta à forma clássica já conhecida.

A energia E de uma partícula é definida como

$$E = \mathbf{p} \cdot \mathbf{u} - L. \tag{1.36}$$

Usando as equações (1.34) e (1.35), obtemos

$$\begin{aligned} E &= \frac{m\mathbf{u}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \cdot \mathbf{u} - \left(-mc^2 \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \right) \\ E &= \frac{mu^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} + mc^2 \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \\ E &= \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}. \end{aligned} \tag{1.37}$$

Esta fórmula mostra que em relatividade, mesmo se uma partícula livre tiver velocidade $u = 0$, sua energia não é nula. Para este caso ($u = 0$), denotamos que E é a energia de repouso da partícula.

Fazendo o quadrado da equação (1.37) conseguimos obter a relação entre energia e momento:

$$E^2 = m^2 c^4 + p^2 c^2. \tag{1.38}$$

De (1.37) temos que

$$\gamma = \frac{E}{mc^2}. \tag{1.39}$$

Usando este resultado em (1.35), obtemos

$$\mathbf{p} = E \frac{\mathbf{u}}{c^2}. \tag{1.40}$$

O resultado (1.40) nos permite concluir que para $u = c$, o momento e a energia se tornam infinitos. Portanto, para partículas com massa diferente de zero, não é possível alcançar a velocidade da luz. Apenas partículas com massa zero podem ter velocidade $u = c$.

2 Geometria Diferencial

A partir deste capítulo, é importante para o leitor saber que quantidades tensoriais com índices de letras latinas representam os tensores em si, ou seja, as próprias relações tensoriais. Por outro lado, índices gregos representam as componentes dos tensores em determinado sistema de coordenadas.

2.1 Variedade

Em Cálculo e na Mecânica Clássica geralmente lidamos com problemas no espaço \mathbb{R}^3 ou até mesmo em \mathbb{R}^n e usamos todas as ferramentas de diferenciação e integração desenvolvidas para esses espaços. O problema é que, na Relatividade Geral, o espaço não é necessariamente plano e precisamos lidar com geometrias curvas não convencionais. Para isso iremos aprender o que é uma variedade e como fazer diferenciação e integração em uma variedade.

Variedade é um espaço que pode ser curvo, mas localmente se comporta como o \mathbb{R}^n , do mesmo jeito que a Terra é uma esfera, mas localmente (escalas relativas ao tamanho do ser humano, por exemplo) parece ser plana. Exemplos de variedades são: o próprio \mathbb{R}^n , a n-esfera S^n , o n-torus T^n e outros.

Antes de definir de forma mais rigorosa o que é uma variedade, primeiro devemos lembrar de algumas coisas.

1. Dados dois conjuntos M e N , existe um mapa $\phi : M \rightarrow N$ que leva cada elemento de M à um elemento de N .
2. Dados dois mapas $\phi : A \rightarrow B$ e $\psi : B \rightarrow C$, a composta entre eles é $\psi \circ \phi : A \rightarrow C$.
3. Dado que o mapa $\phi : M \rightarrow N$ é bijetiva, podemos definir uma inversa $\phi^{-1} : N \rightarrow M$.
4. Dois conjuntos M e N são difeomórficos se existe um mapa $\phi : M \rightarrow N$ C^∞ com uma inversa $\phi^{-1} : N \rightarrow M$ também C^∞ . O mapa ϕ é o que chamamos de um difeomorfismo.
5. Uma bola aberta, no \mathbb{R}^n , centrada em $y = (y^1, y^2, \dots, y^n)$ e de raio r é o conjunto de pontos x tal que $|x - y| < r$, onde

$$|x - y| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x^i - y^i)^2}. \quad (2.1)$$

6. Um conjunto aberto em \mathbb{R}^n é um conjunto construído a partir da união de várias bolas abertas.
7. Uma carta consiste de um subconjunto U de um conjunto M e um mapa $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, tal que a imagem $\phi(U)$ é aberta no \mathbb{R}^n .
8. Um atlas C^∞ é uma coleção de cartas $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ que satisfaz duas condições:
 - A união de todos os U_α é igual a M ;
 - Se duas cartas se intersectam, $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, então o mapa $(\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1})$ leva pontos de $\phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \subset \mathbb{R}^n$ para um conjunto aberto $\phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \subset \mathbb{R}^n$, e todos esses mapas devem ser C^∞ .

Dito isto, uma variedade real M , n -dimensional e C^∞ é um conjunto M com um atlas que contém todas as cartas possíveis.

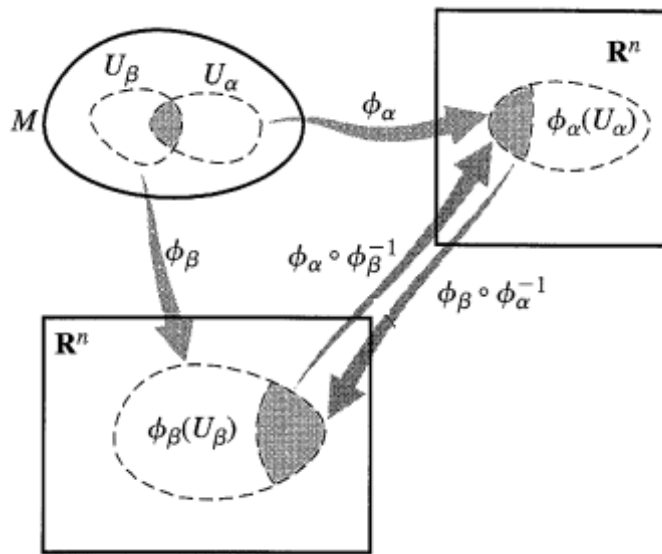


Figura 2 – Ilustração de uma variedade e cartas. Fonte: Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity, Sean Carroll.

2.2 Vetores

Quando lidamos com a física clássica, estamos acostumados a fazer uso de um espaço vetorial tridimensional, escolhendo um ponto como origem para nosso sistema de coordenadas. Em RG não é tão simples, pois a geometria do espaço-tempo é curva, e a estrutura de um espaço vetorial é perdida com essa curvatura. Porém, podemos recuperar esse espaço vetorial em uma variedade fazendo uso do que chamamos de espaços e vetores tangentes.

Um vetor $v = (v^1, v^2, \dots, v^n)$, no \mathbb{R}^n , define o operador derivada direcional $\sum_{\mu} v^{\mu} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}$ e vice versa. Derivadas direcionais têm a importante característica de que são lineares e obedecem à regra de Leibnitz quando atuam em funções.

Agora, considere um espaço \mathcal{F} de todas as funções suaves em M , ou seja, mapas $f : M \rightarrow \mathbb{R} \in C^{\infty}$. Definimos o vetor tangente v em um ponto $p \in M$ como o mapa $v : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$, no qual:

1. $v(af + bg) = av(f) + bv(g), \forall f, g \in \mathcal{F}; a, b \in \mathbb{R};$
2. $v(fg) = f(p)v(g) + g(p)v(f).$

É simples notar que o conjunto T_p de todos os vetores tangentes a p tem a estrutura de um espaço vetorial sob a lei de adição $(v_1 + v_2)(f) = v_1(f) + v_2(f)$ e de multiplicação por escalar $(av)(f) = av(f)$. Outra importante propriedade de T_p é dada pelo seguinte teorema (WALD, 1984):

Teorema 1 *Seja M uma variedade n -dimensional. Seja $p \in M$ e seja T_p o espaço tangente à p . Então, $\dim T_p = n$.*

Prova : Seja $\psi : O \rightarrow U \subset \mathbb{R}^n$ uma carta com $p \in O$. Se $f \in \mathcal{F}$, então por definição $f \circ \psi^{-1} : U \rightarrow \mathbb{R}$ é C^{∞} . Para $\mu = 1, \dots, n$, defina $X_{\mu} : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$X_{\mu}(f) = \left. \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} (f \circ \psi^{-1}) \right|_{\psi(p)}, \quad (2.2)$$

onde (x^1, x^2, \dots, x^n) são as coordenadas cartesianas de \mathbb{R}^n . Então X_1, \dots, X_n são vetores tangentes e linearmente independentes. Para mostrar que esses vetores geram T_p , faremos uso do seguinte resultado: se $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é C^{∞} , então para cada $a = (a^1, \dots, a^n) \in \mathbb{R}^n$ existem funções H_{μ} também C^{∞} tal que $\forall x \in \mathbb{R}^n$ temos que

$$F(x) = F(a) + \sum_{\mu=1}^n (x^{\mu} - a^{\mu}) H_{\mu}(x). \quad (2.3)$$

Assim, temos

$$H_{\mu} = \left. \frac{\partial F}{\partial x^{\mu}} \right|_{x=a}. \quad (2.4)$$

Vamos aplicar esse resultado aqui, sendo $F = f \circ \psi^{-1}$ e $a = \psi(p)$. Então, $\forall q \in O$, temos que

$$f(q) = f(p) + \sum_{\mu=1}^n [x^{\mu} \circ \psi(q) - x^{\mu} \circ \psi(p)] H_{\mu}(\psi(p)). \quad (2.5)$$

Seja $v \in T_p$. Vamos mostrar que v é uma combinação linear de X_μ . Para isso, aplicamos v à f , usando (2.5), a linearidade e as propriedades da regra de Leibnitz de v , e o fato de que v aplicado a uma constante é nulo. Obtemos então,

$$\begin{aligned} v(f) &= v[f(p)] + \sum_{\mu=1}^n \left[[x^\mu \circ \psi(q) - x^\mu \circ \psi(p)]_{q=p} v(H_\mu \circ \psi) + (H_\mu \circ \psi) \Big|_p v[x^\mu \circ \psi - x^\mu \circ \psi(p)] \right] \\ &= \sum_{\mu=1}^n [H_\mu \circ \psi(p)] v(x^\mu \circ \psi). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Porém, pela equação (1.50) $H_\mu \circ \psi(p)$ é $X_\mu(f)$. Portanto, $\forall f \in \mathcal{F}$, temos que

$$v(f) = \sum_{\mu=1}^n v^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}(f), \quad (2.7)$$

onde os coeficientes v^μ são os valores de v aplicado à função $x^\mu \circ \psi$,

$$v^\mu = v(x^\mu \circ \psi). \quad (2.8)$$

Assim, conseguimos expressar um vetor tangente qualquer como a soma dos X_μ :

$$v = \sum_{\mu=1}^n v^\mu X_\mu, \quad (2.9)$$

completando a prova. \square

Normalmente, denotamos X_μ como $\frac{\partial}{\partial x^\mu} \equiv \partial_\mu$. Se tivéssemos escolhido uma carta ψ' diferente, teríamos obtido o mesmo resultado, porém com uma base $\{X_{\mu'}\}$. Para relacionar uma base com outra, usamos a regra da cadeia

$$\partial_{\mu'} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \partial_\mu. \quad (2.10)$$

A lei de transformação para as componentes de um vetor $V = V^\mu \partial_\mu$ pode ser obtida demandando que esse vetor não mude por uma mudança de base. Temos que

$$\begin{aligned} V^\mu \partial_\mu &= V^{\mu'} \partial_{\mu'} \\ &= V^{\mu'} \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \partial_{\mu'}, \end{aligned} \quad (2.11)$$

e já que a matriz $\frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu}$ é a inversa da matriz $\frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}}$,

$$V^{\mu'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu} V^\mu. \quad (2.12)$$

2.3 Tensores

Antes de definirmos o que é um tensor, primeiro devemos ver o que é um vetor dual. Seja V um espaço vetorial finito-dimensional qualquer sobre os reais. Considere V^* como uma coleção de mapeamentos lineares $f : V \rightarrow \mathbb{R}$. Definindo a adição e multiplicação por escalar destes mapas da forma convencional, conseguimos obter a estrutura de espaço vetorial em V^* . Denotamos V^* como o espaço dual à V , e os elementos de V^* são chamados de vetores duais. Se v_1, \dots, v_n é uma base de V , podemos definir os elementos $v^{1*}, \dots, v^{n*} \in V^*$ por

$$v^{\mu*}(v_\nu) = \delta_\nu^\mu, \quad (2.13)$$

onde $\delta_\nu^\mu = 1$ se $\mu = \nu$ e 0 caso contrário.

Agora podemos definir o que é um tensor. Seja V um espaço vetorial finito-dimensional e seja V^* seu dual. Um tensor, T , do tipo (k, l) sobre V é um mapa multilinear

$$T : V^* \times \dots \times V^* \times V \times \dots \times V \rightarrow \mathbb{R}, \quad (2.14)$$

ou seja, dados k vetores duais e l vetores, T produz um número.

Vamos introduzir algumas operações com tensores que serão de grande ajuda para nós.

- Contração: mapeamento $C : \mathcal{J}(k, l) \rightarrow \mathcal{J}(k-1, l-1)$. Seja T um tensor do tipo (k, l) , então

$$CT = \sum_{\sigma=1}^n T(\dots, v^{\sigma*}, \dots; \dots, v_\sigma, \dots), \quad (2.15)$$

onde $\{v_\sigma\}$ é uma base de V , e $\{v_\sigma^*\}$ seu dual.

- Produto tensorial: sejam $T, T' \in \mathcal{J}(k, l)$ tensores do tipo (k, l) e (k', l') , respectivamente. Dados $k+k'$ vetores duais $v^{1*}, \dots, v^{k+k'*}$ e $l+l'$ vetores $w_1, \dots, w_{l+l'}$, definimos a ação do tensor $T \otimes T'$ do tipo $(k+k', l+l')$ nesses vetores como o produto entre $T(v^{1*}, \dots, v^{k*}; w_1, \dots, w_l)$ e $T'(v^{k+1*}, \dots, v^{k+k'*}; w_{l+1}, \dots, w_{l+l'})$.

Assim, vemos que um modo de construir tensores é realizando o produto tensorial entre vetores e vetores duais. Portanto, um tensor T do tipo (k, l) pode ser expresso como

$$T = \sum_{\mu_1 \dots \mu_l=1}^n T^{\mu_1 \dots \mu_k} v_{\mu_1} \dots v_{\mu_l} \otimes \dots \otimes v^{\mu_l*}, \quad (2.16)$$

onde $T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l}$ são as componentes do tensor T com relação às bases $\{v_\mu\}$. A contração, em termos das componentes, pode ser escrita como

$$(CT)^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} = \sum_{\sigma=1}^n T^{\mu_1 \dots \sigma \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \sigma \dots \nu_l}, \quad (2.17)$$

ou, na notação de Einstein,

$$(CT)^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} = T^{\mu_1 \dots \sigma \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \sigma \dots \nu_l}. \quad (2.18)$$

Se T' tem componentes $T'^{\mu'_1 \dots \mu'_k}_{\nu'_1 \dots \nu'_l}$, então $S = T \otimes T'$ tem componentes dadas por

$$S^{\mu_1 \dots \mu_{k+k'}}_{\nu_1 \dots \nu_{l+l'}} = T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} T'^{\mu_{k+1} \dots \mu_{k+k'}}_{\nu_{l+1} \dots \nu_{l+l'}}. \quad (2.19)$$

O que foi mostrado acima se aplica a qualquer espaço vetorial V finito dimensional. No nosso caso, queremos que V seja um espaço tangente, V_p , em um ponto p a uma variedade M . O espaço V_p^* comumente é chamado de *espaço cotangente*. Como visto antes, dado um sistema de coordenadas podemos construir uma base $\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}$ de V_p . A base de V_p^* é denotada por dx^1, \dots, dx^n . Vimos também que as componentes v^μ de um vetor se transformam quando mudamos de sistema de coordenadas da seguinte maneira:

$$v'^{\mu'} = v^\mu \frac{\partial x'^{\mu'}}{\partial x^\mu}. \quad (2.20)$$

Para um vetor dual ω , suas componentes, ω_μ , com respeito às bases $\{dx^\mu\}$ se transformam como

$$\omega'_\mu = \omega_\nu \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^{\mu}}. \quad (2.21)$$

No geral, as componentes de um tensor T do tipo (k, l) se transformam como

$$T'^{\mu'_1 \dots \mu'_k}_{\nu'_1 \dots \nu'_l} = T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} \frac{\partial x'^{\mu'_1}}{\partial x^{\mu_1}} \dots \frac{\partial x'^{\mu'_k}}{\partial x^{\mu_k}} \frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial x'^{\nu'_1}} \dots \frac{\partial x^{\nu_l}}{\partial x'^{\nu'_l}}. \quad (2.22)$$

Outro aspecto importante dos tensores são suas simetrias. Dizemos que um tensor é simétrico em qualquer de seus índices se, ao permutarmos esses índices, o tensor continua o mesmo. Então, se

$$S_{abc} = S_{bac}, \quad (2.23)$$

dizemos que S_{abc} é simétrico em seus dois primeiros índices.

Um tensor é dito antissimétrico quando, ao permutarmos seus índices, o tensor muda por um sinal. Assim, s

$$A_{abc} = -A_{cba}, \quad (2.24)$$

dizemos que A_{abc} é antissimétrico no primeiro e terceiro índices.

Dado qualquer tensor, podemos simetrizar qualquer número de seus índices superiores ou inferiores. Para isso, somamos todas as permutações dos índices relevantes e dividimos pelo número de termos. Então, por exemplo, se T_{ab} é um tensor do tipo $(0,2)$, definimos

$$T_{(ab)} = \frac{1}{2}(T_{ab} + T_{ba}), \quad (2.25)$$

$$T_{[ab]} = \frac{1}{2}(T_{ab} - T_{ba}). \quad (2.26)$$

De modo mais geral, para um tensor $T_{a_1 \dots a_l}$ do tipo $(0, l)$, definimos

$$T_{(a_1 \dots a_l)} = \frac{1}{l!} \sum_{\pi} T_{a_{\pi(1)} \dots a_{\pi(l)}}, \quad (2.27)$$

$$T_{[a_1 \dots a_l]} = \frac{1}{l!} \sum_{\pi} \delta_{\pi} T_{a_{\pi(1)} \dots a_{\pi(l)}}, \quad (2.28)$$

onde a soma é feita sobre todas as permutações, π , de $1, \dots, l$, e δ_{π} é $+1$ para permutações pares e -1 para permutações ímpares.

2.4 Métrica

Devemos introduzir agora uma noção de métrica. De forma intuitiva, uma métrica nos diz qual a distância infinitesimal ao quadrado associado a um deslocamento infinitesimal. A noção de um deslocamento infinitesimal é precisamente capturada pelo conceito de vetor tangente. Portanto, como uma distância infinitesimal ao quadrado deve ser quadrática no deslocamento, uma métrica g deve ser um mapeamento linear de $T_p \times T_p$ para os números, ou seja, um tensor do tipo $(0,2)$. Além disso, é requerido que g seja simétrico e não-degenerado:

1. $\forall v_1, v_2 \in T_p$ temos que $g(v_1, v_2) = g(v_2, v_1)$;
2. $\forall v \in T_p$, temos que $g(v, v) = 0$ apenas se $v = 0$.

Assim, uma métrica, g , em uma variedade M é um campo tensorial do tipo $(0,2)$, simétrico e não-degenerado, e ela define um produto interno no espaço tangente de cada ponto da variedade.

Numa base, podemos expandir g em termos de suas componentes $g_{\mu\nu}$:

$$g = g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu, \quad (2.29)$$

ou, como é comumente denotado,

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (2.30)$$

o que dá uma noção melhor de "distância infinitesimal ao quadrado". Normalmente, a letra g é usada para denotar o determinante $g = |g_{\mu\nu}|$.

Uma operação que é importante sabermos é a operação de *levantar* e *abaixar* índices de um tensor, o que nos permite obter um novo tensor. Conseguimos fazer isso usando a métrica e sua inversa, ou seja, dado um tensor $T^{\alpha\beta}_{\gamma\delta}$

$$T^{\alpha\beta\mu}_{\delta} = g^{\mu\gamma} T^{\alpha\beta}_{\gamma\delta}, \quad (2.31)$$

$$T_{\mu}{}^{\beta}_{\gamma\delta} = g_{\mu\alpha} T^{\alpha\beta}_{\gamma\delta}, \quad (2.32)$$

$$T_{\mu\nu}{}^{\rho\sigma} = g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} g^{\rho\gamma} g^{\sigma\delta} T^{\alpha\beta}_{\gamma\delta}, \quad (2.33)$$

e assim em diante.

2.5 Densidades tensoriais

Considere o símbolo de Levi-Civita, definido como

$$\tilde{\epsilon}_{\mu_1 \dots \mu_n} = \begin{cases} +1 & \text{se } \mu_1 \dots \mu_n \text{ for uma permutação par,} \\ -1 & \text{se } \mu_1 \dots \mu_n \text{ for uma permutação ímpar,} \\ 0 & \text{caso haja índices repetidos.} \end{cases} \quad (2.34)$$

O símbolo de Levi-Civita pode parecer um objeto tensorial, porém ele é definido para ter os mesmo valores independente do sistema de coordenadas. Para relacionarmos o símbolo de Levi-Civita com um tensor, primeiro notamos que, dada qualquer matriz $M^{\mu}_{\mu'}$ $n \times n$, o determinante $|M|$ obedece

$$\tilde{\epsilon}_{\mu'_1 \dots \mu'_n} |M| = \tilde{\epsilon}_{\mu_1 \dots \mu_n} M^{\mu_1}_{\mu'_1} M^{\mu_2}_{\mu'_2} \dots M^{\mu_n}_{\mu'_n}. \quad (2.35)$$

Fazendo $M_{\mu'}^{\mu} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}}$, temos

$$\begin{aligned}\tilde{\epsilon}_{\mu'_1 \dots \mu'_n} \left| \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}} \right| &= \tilde{\epsilon}_{\mu_1 \dots \mu_n} \frac{\partial x^{\mu_1}}{\partial x^{\mu'_1}} \dots \frac{\partial x^{\mu_n}}{\partial x^{\mu'_n}} \\ \tilde{\epsilon}_{\mu'_1 \dots \mu'_n} &= \left| \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\mu}} \right| \tilde{\epsilon}_{\mu_1 \dots \mu_n} \frac{\partial x^{\mu_1}}{\partial x^{\mu'_1}} \dots \frac{\partial x^{\mu_n}}{\partial x^{\mu'_n}},\end{aligned}\tag{2.36}$$

onde usamos o fato de que a inversa do determinante é igual ao determinante da inversa, $|M^{-1}| = |M|^{-1}$. Portanto, vemos que o símbolo de Levi-Civita se transforma quase como um tensor, exceto pelo determinante do lado direito da igualdade. Os objetos que se transformam como (2.36) são chamados de *densidades tensoriais*. Outro exemplo é a métrica $g_{\mu\nu}$. Considerando a transformação

$$g_{\mu'\nu'} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\nu'}} g_{\mu\nu},\tag{2.37}$$

e calculando o determinante dos dois lados temos

$$\begin{aligned}|g_{\mu'\nu'}| &= \left| \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\nu'}} \right| |g_{\mu\nu}| \\ g' &= \left| \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\mu}} \right|^{-2} g\end{aligned}\tag{2.38}$$

Dizemos que o símbolo de Levi-Civita e o determinante da métrica são densidades tensoriais de peso $w = 1$ e $w = -2$, respectivamente. Podemos transformar uma densidade tensorial em um tensor de forma simples, que é multiplicando por $|g|^{\frac{w}{2}}$. O tensor de Levi-Civita é então

$$\epsilon_{\mu_1 \dots \mu_n} = \sqrt{|g|} \tilde{\epsilon}_{\mu_1 \dots \mu_n}.\tag{2.39}$$

Considere a transformação do tensor de Levi-Civita:

$$\begin{aligned}\epsilon_{\mu'_1 \dots \mu'_n} &= \epsilon_{\mu_1 \dots \mu_n} M_{\mu'_1}^{\mu_1} \dots M_{\mu'_n}^{\mu_n} \\ &= \sqrt{|g|} \tilde{\epsilon}_{\mu_1 \dots \mu_n} M_{\mu'_1}^{\mu_1} \dots M_{\mu'_n}^{\mu_n},\end{aligned}\tag{2.40}$$

e usando (2.36) e (2.38),

$$\begin{aligned}\epsilon_{\mu'_1 \dots \mu'_n} &= \sqrt{|g|} \tilde{\epsilon}_{\mu'_1 \dots \mu'_n} |M| \\ &= \sqrt{|g|} |M| \tilde{\epsilon}_{\mu'_1 \dots \mu'_n} \\ &= \sqrt{|g'|} \tilde{\epsilon}_{\mu'_1 \dots \mu'_n},\end{aligned}\tag{2.41}$$

que é igual à equação (2.39).

2.6 Formas Diferenciais

Seja M uma variedade n -dimensional. Considere a classe de tensores do tipo $(0, p)$ que são antissimétricos. Dizemos que $\omega_{a_1 a_2 \dots a_p}$ é uma p -forma diferencial se

$$\omega_{a_1 \dots a_p} = \omega_{[a_1 \dots a_p]}. \quad (2.42)$$

O espaço de todas as p -formas na variedade M é denotado por $\Lambda^p(M)$. Pela definição de uma p -forma, vemos que uma 0 -forma é um tensor do tipo $(0, 0)$, ou seja, um escalar f . Para construirmos p -formas de ranks maiores, é necessário definir dois mapas:

- Seja Λ^p o espaço de todas as p -formas sobre M . Seja A uma p -forma. Então, definimos o operador *derivada exterior* $d : \Lambda^p \rightarrow \Lambda^{p+1}$ por

$$(dA)_{\mu_1 \dots \mu_{p+1}} = (p+1) \partial_{[\mu_1} A_{\mu_2 \dots \mu_{p+1}]}. \quad (2.43)$$

- Seja Λ^p o espaço das p -formas sobre M e Λ^q o espaço das q -formas sobre M . Sejam A uma p -forma e B uma q -forma. Então o *produto exterior* $\wedge : \Lambda^p \times \Lambda^q \rightarrow \Lambda^{p+q}$, tal que

$$(A \wedge B)_{\mu_1 \dots \mu_{p+q}} = \frac{(p+q)!}{p!q!} A_{[\mu_1 \dots \mu_p} B_{\mu_{p+1} \dots \mu_{p+q}]}. \quad (2.44)$$

Pelo fato do produto exterior ser antissimétrico, podemos escrever de forma mais simples que o produto de duas formas diferenciais quaisquer é

$$A \wedge B = (-1)^{pq} B \wedge A. \quad (2.45)$$

Se considerarmos uma 0 -forma f qualquer, temos que df é uma 1 -forma. Então, para as funções de coordenadas $\{x^\mu\}$ que cobrem a variedade M , os $\{dx^\mu\}$ são 1 -formas. De fato, dados dois sistemas ψ e ψ' , para um vetor dual $\omega = \omega_\mu dx^\mu$, temos

$$\begin{aligned} \omega &= \omega' \\ \omega_\mu dx^\mu &= \omega_{\mu'} dx^{\mu'}, \end{aligned} \quad (2.46)$$

mas pela equação (2.21),

$$\begin{aligned} \omega_\mu dx^\mu &= \omega_\mu \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} dx^{\mu'} \\ dx^\mu &= \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} dx^{\mu'}. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Portanto, $\{dx^\mu\}$ serve como base para $\{x^\mu\}$ e se transforma do mesmo modo que um vetor dual.

2.7 Integração

Sabemos do cálculo no \mathbb{R}^n que, por meio de uma transformação de coordenadas, o elemento de volume, $d^n x$, carrega um fator do Jacobiano:

$$d^n x' = \left| \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\mu}} \right| d^n x. \quad (2.48)$$

Uma integral sobre uma região $\Sigma \subset M$ é um mapa de um campo de n-formas ω para os números reais

$$\int_{\Sigma} : \omega \longrightarrow \mathbb{R}. \quad (2.49)$$

Do ponto de vista de formas diferenciais, em uma variedade M n-dimensional, o integrando é visto como uma n-forma. Então, por exemplo, em uma dimensão, qualquer 1-forma pode ser escrita como $\omega = \omega(x)dx$. Para fazermos cálculos em dimensões maiores, primeiro devemos identificar o elemento de volume $d^n x$ como uma densidade tensorial antissimétrica construída a partir do produto exterior

$$d^n x = dx^0 \wedge \dots \wedge dx^{n-1}. \quad (2.50)$$

Pela definição do produto exterior, podemos escrever

$$dx^0 \wedge \dots \wedge dx^{n-1} = \frac{1}{n!} \tilde{\epsilon}_{\mu_1 \dots \mu_n} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_n}. \quad (2.51)$$

Sob uma mudança de coordenadas $\tilde{\epsilon}_{\mu_1 \dots \mu_n}$ não se altera, porém as 1-formas mudam de acordo com a transformação de vetores duais, obtendo

$$\begin{aligned} \tilde{\epsilon}_{\mu_1 \dots \mu_n} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_n} &= \tilde{\epsilon}_{\mu_1 \dots \mu_n} \frac{\partial x^{\mu_1}}{\partial x^{\mu'_1}} \dots \frac{\partial x^{\mu_n}}{\partial x^{\mu'_n}} dx^{\mu'_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu'_n} \\ &= \left| \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}} \right| \tilde{\epsilon}_{\mu'_1 \dots \mu'_n} dx^{\mu'_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu'_n}. \end{aligned} \quad (2.52)$$

Multiplicando pelo Jacobiano dos dois lados e depois usando (2.50) e (2.51), obtemos de volta (2.48).

Queremos construir um elemento de volume invariante, para isso multiplicamos por $\sqrt{|g|}$:

$$\sqrt{|g'|} dx^{0'} \wedge \dots \wedge dx^{(n-1)'} = \sqrt{|g|} dx^0 \wedge \dots \wedge dx^{n-1}. \quad (2.53)$$

Para simplicidade, vamos denotar o elemento de volume apenas como $\sqrt{|g|}d^n x$, basta ter em mente que é uma n -forma. Podemos relacionar o tensor de Levi-Civita com o resultado que encontramos. Usando as bases explicitamente, temos

$$\begin{aligned}
\epsilon &= \epsilon_{\mu_1 \dots \mu_n} dx^{\mu_1} \otimes \dots \otimes dx^{\mu_n} \\
&= \frac{1}{n!} \epsilon_{\mu_1 \dots \mu_n} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_n} \\
&= \frac{1}{n!} \sqrt{|g|} \tilde{\epsilon}_{\mu_1 \dots \mu_n} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_n} \\
&= \sqrt{|g|} dx^0 \wedge \dots \wedge dx^{n-1} \\
&= \sqrt{|g|} d^n x.
\end{aligned} \tag{2.54}$$

Concluindo: a integral I de um escalar ϕ sobre uma variedade n -dimensional é dada por

$$I = \int \phi(x) \epsilon = \int \phi(x) \sqrt{|g|} d^n x. \tag{2.55}$$

2.8 Derivada Covariante e Conexão

Um operador derivada covariante em uma variedade M é um mapa que leva um campo tensorial do tipo (k, l) para um campo tensorial do tipo $(k, l + 1)$ e satisfaz as seguintes propriedades:

1. Linearidade: $\forall A, B \in \mathcal{J}(k, l)$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$\nabla_c (\alpha A^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l} + \beta B^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l}) = \alpha \nabla_c A^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l} + \beta \nabla_c B^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l}. \tag{2.56}$$

2. Regra de Leibnitz: $\forall A \in \mathcal{J}(k, l), B \in \mathcal{J}(k', l')$,

$$\nabla_c [A^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l} B^{c_1 \dots c_{k'}}_{b_1 \dots b_{l'}}] = [\nabla_c A^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l}] B^{c_1 \dots c_{k'}}_{b_1 \dots b_{l'}} + A^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l} [\nabla_c B^{c_1 \dots c_{k'}}_{b_1 \dots b_{l'}}]. \tag{2.57}$$

3. Comutatividade com contração: $\forall A \in \mathcal{J}(k, l)$,

$$\nabla_d (A^{a_1 \dots c \dots a_k}_{b_1 \dots c \dots b_l}) = \nabla_d A^{a_1 \dots c \dots a_k}_{b_1 \dots c \dots b_l}. \tag{2.58}$$

4. Consistência com a noção de vetores tangentes como derivadas direcionais: $\forall f \in \mathcal{F}$ e $\forall t^a \in T_p$

$$t(f) = t^a \nabla_a f. \tag{2.59}$$

5. Livre de torção: $\forall f \in \mathcal{F}$

$$\nabla_a \nabla_b f = \nabla_b \nabla_a f. \tag{2.60}$$

Vale a pena notar que com as condições 4 e 5 junto da regra de Leibnitz, conseguimos obter o comutador para dois campos vetoriais v^a e w^b , em termos do operador ∇_a . Aplicado à qualquer função suave f , temos que

$$\begin{aligned} [v, w](f) &= v\{w(f)\} - w\{v(f)\} \\ &= v^a \nabla_a (w^b \nabla_b f) - w^a \nabla_a (v^b \nabla_b f) \\ &= \{v^a \nabla_a w^b - w^a \nabla_a v^b\} \nabla_b f \\ [v, w]^b &= v^a \nabla_a w^b - w^a \nabla_a v^b. \end{aligned} \quad (2.61)$$

Precisamos responder à seguinte questão: o quão único são os operadores derivada? Pela condição (4), quaisquer operadores ∇_a e $\tilde{\nabla}_a$ devem ter a mesma ação em um campo escalar. Para sabermos como esses operadores agem em tensores de rank maior, seja w_b um campo vetorial dual e considere a diferença $\tilde{\nabla}_a(fw_b) - \nabla_a(fw_b)$ para qualquer campo escalar f . Pela regra de Leibnitz, temos

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_a(fw_b) - \nabla_a(fw_b) &= (\tilde{\nabla}_a f)w_b + f\tilde{\nabla}_a w_b - (\nabla_a f)w_b - f\nabla_a w_b \\ &= f(\tilde{\nabla}_a w_b - \nabla_a w_b). \end{aligned} \quad (2.62)$$

A equação (2.62) mostra que a diferença $\tilde{\nabla}_a w_b - \nabla_a w_b$ depende apenas do valor de w_b em um ponto p qualquer. Para vermos isso, vamos supor que w'_b seja igual à w_b em p e mostraremos que obtemos o mesmo resultado se substituirmos w_b por w'_b . A partir de (2.3), podemos expandir w'_b como

$$w'_b = w_b + \sum_{\alpha=1}^n f_{(\alpha)} \mu_b^{(\alpha)}. \quad (2.63)$$

Sabemos que se calculados em um mesmo ponto p , $w'_b = w_b$. Usando o resultado de (2.62)

$$\begin{aligned} w'_b - w_b &= \sum_{\alpha=1}^n f_{(\alpha)} \mu_b^{(\alpha)} \\ (\tilde{\nabla}_a - \nabla_a)(w'_b - w_b) &= \sum_{\alpha=1}^n (\tilde{\nabla}_a - \nabla_a) f_{(\alpha)} \mu_b^{(\alpha)} \\ \tilde{\nabla}_a(w'_b - w_b) - \nabla_a(w'_b - w_b) &= \sum_{\alpha=1}^n \{\tilde{\nabla}_a(f_{(\alpha)} \mu_b^{(\alpha)}) - \nabla_a(f_{(\alpha)} \mu_b^{(\alpha)})\} \\ &= \sum_{\alpha=1}^n f_{(\alpha)} \{\tilde{\nabla}_a \mu_b^{(\alpha)} - \nabla_a \mu_b^{(\alpha)}\}. \end{aligned} \quad (2.64)$$

Em p , temos que $w'_b - w_b = 0$ e cada $f_{(\alpha)} = 0$, portanto, obtemos

$$(\tilde{\nabla}_a - \nabla_a)w'_b = (\tilde{\nabla}_a - \nabla_a)w_b, \quad (2.65)$$

provando o que queríamos.

Assim, mostramos que $\tilde{\nabla}_a - \nabla_a$ é um mapeamento dos duais, que são tensores do tipo $(0, 1)$ em p para tensores do tipo $(0, 2)$ em p . Podemos ver que, pela propriedade (1), esse mapeamento é linear. Consequentemente, $\tilde{\nabla}_a - \nabla_a$ define um tensor do tipo $(1, 2)$ em p , ao qual chamaremos de C_{ab}^c . Portanto, dados dois operadores $\tilde{\nabla}_a$ e ∇_a , existe um campo tensorial C_{ab}^c tal que

$$\nabla_a w_b = \tilde{\nabla}_a w_b - C_{ab}^c w_c, \quad (2.66)$$

onde $C_{ab}^c w_c$ é um tensor do tipo $(0, 2)$.

Uma propriedade simétrica de C_{ab}^c segue imediatamente da propriedade (5): se fizermos $w_b = \nabla_b f = \tilde{\nabla}_b f$, obtemos que

$$\nabla_a \nabla_b f = \tilde{\nabla}_a \tilde{\nabla}_b f - C_{ab}^c \nabla_c f. \quad (2.67)$$

Dado que $\nabla_a \nabla_b f$ e $\tilde{\nabla}_a \tilde{\nabla}_b f$ são simétricos em a e b , temos que C_{ab}^c deve também ser simétrico:

$$C_{ab}^c = C_{ba}^c. \quad (2.68)$$

A diferença na ação de $\tilde{\nabla}_a$ e ∇_a em campos vetoriais e campos tensoriais de ranks maiores é determinada pela equação (2.66), a regra de Leibnitz e a propriedade (4). Para todo campo vetorial t^a e campo dual w_a , temos que

$$(\tilde{\nabla}_a - \nabla_a)(w_b t^b) = 0, \quad (2.69)$$

já que $w_b t^b$ é um campo escalar. Por outro lado,

$$\begin{aligned} (\tilde{\nabla}_a - \nabla_a)(w_b t^b) &= (\tilde{\nabla}_a w_b) t^b + w_b (\tilde{\nabla}_a t^b) - \{(\nabla_a w_b) t^b + w_b (\nabla_a t^b)\} \\ &= (\tilde{\nabla}_a w_b) t^b + w_b (\tilde{\nabla}_a t^b) - \{(\tilde{\nabla}_a w_b - C_{ab}^c w_c) t^b + w_b (\nabla_a t^b)\} \\ &= w_b (\tilde{\nabla}_a t^b) + (C_{ab}^c w_c) t^b - w_b (\nabla_a t^b) \\ &= (C_{ab}^c w_c) t^b + w_b (\tilde{\nabla}_a - \nabla_a) t^b \\ &= C_{ac}^b w_b t^c + w_b (\tilde{\nabla}_a - \nabla_a) t^b \\ &= w_b [(\tilde{\nabla}_a - \nabla_a) t^b + C_{ac}^b t^c] = 0, \end{aligned} \quad (2.70)$$

onde substituímos o índice mudo. Assim, obtemos que, para todo w_b

$$\nabla_a t^b = \tilde{\nabla}_a t^b + C_{ac}^b t^c. \quad (2.71)$$

É possível ver que a derivada é completamente caracterizada pelo campo tensorial C . Generalizando para tensores de ranks maiores, para cada índice superior adicionamos um campo tensorial $+C$ e cada índice inferior adicionamos um campo tensorial $-C$. Portanto, para qualquer $T \in \mathcal{J}(k, l)$

$$\nabla_a T^{b_1 \dots b_k}_{c_1 \dots c_l} = \tilde{\nabla}_a T^{b_1 \dots b_k}_{c_1 \dots c_l} + \sum_i C_{ad}^{b_i} T^{b_1 \dots d \dots b_k}_{c_1 \dots c_l} - \sum_j C_{ac_j}^d T^{b_1 \dots b_k}_{c_1 \dots d \dots c_l}. \quad (2.72)$$

Para nosso propósito, usaremos a aplicação mais comum da equação (2.71), no qual $\tilde{\nabla}_a$ é simplesmente a derivada ordinária ∂_a que já conhecemos. Neste caso, C_{ac}^b é denotado por Γ_{ac}^b e chamado de *símbolo de Christoffel*, assim (2.71) fica

$$\nabla_a t^b = \partial_a t^b + \Gamma_{ac}^b t^c. \quad (2.73)$$

Agora que sabemos como calcular a derivada de tensores, precisamos construir a noção de *transporte paralelo*. Considere um vetor, v^a , em um ponto p numa curva fechada no plano. Ao mover o vetor ao longo da curva, sempre apontando para a mesma direção, ele irá retornar ao ponto p do mesmo modo que saiu, por isso denotamos de transporte paralelo. Porém, ao tentarmos fazer o mesmo em uma curva fechada numa esfera, o vetor, v^a , estará apontando para outra direção quando retornar para o ponto de partida, como é mostrado na figura abaixo.

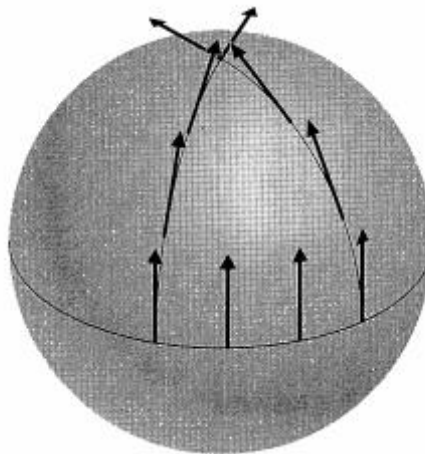


Figura 3 – Transporte paralelo de um vetor em um caminho fechado na superfície de uma esfera. Fonte: Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity, Sean Carroll.

Essa diferença do vetor que vemos ao realizar o transporte paralelo numa esfera, nos dá uma noção de curvatura. Dado um operador derivada ∇_a , podemos definir a noção

de transporte paralelo de um vetor ao longo de uma curva C com uma tangente t^a . Um vetor v^a é paralelamente transportado em uma curva se a equação

$$t^a \nabla_a v^b = 0 \quad (2.74)$$

é satisfeita por toda a curva. Generalizando, um tensor qualquer é transportado paralelamente ao longo de uma curva se

$$t^a \nabla_a T^{b_1 \dots b_k}_{c_1 \dots c_l} = 0. \quad (2.75)$$

Ao escolher um sistema de coordenadas, podemos usar a equação (2.73) para expressar (2.74) como

$$t^a \partial_a v^b + t^a \Gamma_{ac}^b v^c = 0, \quad (2.76)$$

ou, em termos das componentes de um sistema de coordenadas e um parâmetro t ao longo da curva

$$\frac{dv^\nu}{dt} + \Gamma_{\mu\lambda}^\nu t^\mu v^\lambda = 0. \quad (2.77)$$

Esse resultado mostra que o transporte paralelo de v^a depende apenas dos valores de v^a na curva, ao contrário de um campo vetorial.

Apesar de termos definido como fazer o transporte paralelo de um vetor apenas usando a estrutura da variedade, ainda existe o problema de que várias derivadas distintas são possíveis de serem escolhidas, sem preferência por qualquer uma em específico. Para resolver isso, vamos usar o seguinte teorema

Teorema 2 *Seja g_{ab} uma métrica. Portanto, existe um operador derivada ∇_a tal que $\nabla_a g_{bc} = 0$.*

Prova: Seja $\tilde{\nabla}_a$ um operador derivada qualquer. Queremos determinar o operador derivada ∇_a a partir de $\tilde{\nabla}_a$ e C_{ab}^c . Para isso, mostraremos que existe uma solução única para C_{ab}^c . Pela equação (2.72), C_{ab}^c deve satisfazer

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla_a g_{bc} = \tilde{\nabla}_a g_{bc} - C_{ab}^d g_{dc} - C_{ac}^d g_{bd} \\ \tilde{\nabla}_a g_{bc} &= C_{cab} + C_{bac}. \end{aligned} \quad (2.78)$$

Permutando os índices, temos

$$C_{cba} + C_{abc} = \tilde{\nabla}_b g_{ac}, \quad (2.79)$$

$$C_{bca} + C_{acb} = \tilde{\nabla}_c g_{ab}. \quad (2.80)$$

Somando (2.78) e (2.79), depois subtraindo (2.80) e usando a simetria de C_{ab}^c , obtemos

$$\begin{aligned} 2C_{cab} &= \tilde{\nabla}_a g_{bc} + \tilde{\nabla}_b g_{ac} - \tilde{\nabla}_c g_{ab} \\ C_{ab}^c &= \frac{1}{2} g^{cd} [\tilde{\nabla}_a g_{bd} + \tilde{\nabla}_b g_{ad} - \tilde{\nabla}_d g_{ab}]. \end{aligned} \quad (2.81)$$

Essa escolha de C_{ab}^c resolve a equação $\nabla_a g_{bc} = 0$ e é única, completando a prova.

□

Podemos ver, então, que uma métrica g_{ab} determina um operador ∇_a . Em particular, em termos de uma derivada ordinária o símbolo de Christoffel é

$$\Gamma_{ab}^c = \frac{1}{2} g^{cd} [\partial_a g_{bd} + \partial_b g_{ad} - \partial_d g_{ab}], \quad (2.82)$$

assim, as componentes das bases das coordenadas do símbolo de Christoffel são

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} \left[\frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} \right]. \quad (2.83)$$

2.9 Curvatura

Nesta seção iremos construir de forma matemática a noção de curvatura. Para isso iremos usar o transporte paralelo de um vetor, como discutido anteriormente, e a partir daí obter o tensor de curvatura de Riemann.

Seja ∇_a um operador derivada, w_a um campo dual e f uma função suave. Calculamos a ação de $\nabla_a \nabla_b$ em $f w_a$:

$$\begin{aligned} \nabla_a \nabla_b (f w_c) &= \nabla_a (w_c \nabla_b f + f \nabla_b w_c) \\ &= \nabla_a (w_c \nabla_b f) + \nabla_a (f \nabla_b w_c) \\ &= \nabla_b f \nabla_a w_c + (\nabla_a \nabla_b f) w_c + \nabla_a f \nabla_b w_c + f \nabla_a \nabla_b w_c. \end{aligned} \quad (2.84)$$

Subtraindo de (2.84) o tensor $\nabla_b \nabla_a (f w_c)$, os três primeiros termos do lado direito da igualdade irão se cancelar com os termos correspondentes de $\nabla_b \nabla_a (f w_c)$ e obtemos

$$(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a)(f w_c) = f(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a)w_c. \quad (2.85)$$

Seguindo o mesmo raciocínio da seção anterior, vemos que o tensor $(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a)w_c$ em um ponto p depende apenas do valor de w_c em p . Portanto, $(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a)$

define um mapeamento linear dos duais em p para tensores do tipo $(0, 3)$ em p , ou seja, sua ação é a de um tensor do tipo $(1, 3)$. Assim, concluímos que existe um campo tensorial $R_{abc}{}^d$ tal que para todos os duais w_c , temos

$$\nabla_a \nabla_b w_c - \nabla_b \nabla_a w_c = R_{abc}{}^d w_d. \quad (2.86)$$

$R_{abc}{}^d$ é chamado de tensor de curvatura de Riemann. Este tensor está diretamente relacionado com o fato de não conseguirmos fazer um vetor retornar ao seu valor inicial ao ser transportado paralelamente em uma curva fechada na variedade M , ou seja, há uma dependência com o caminho tomado para transportar o vetor.

A partir do mesmo procedimento usado para obter a expressão (2.71), podemos encontrar a ação de $(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a)$ em um vetor t^a

$$\begin{aligned} 0 &= (\nabla_a \nabla_b w_c - \nabla_b \nabla_a)(t^c w_c) \\ &= \nabla_a \nabla_b (t^c w_c) - \nabla_b \nabla_a (t^c w_c) \\ &= \nabla_a (w_c \nabla_b t^c + t^c \nabla_b w_c) - \nabla_b (w_c \nabla_a t^c + t^c \nabla_a w_c) \\ &= w_c \nabla_a \nabla_b t^c + t^c \nabla_a \nabla_b w_c - w_c \nabla_b \nabla_a t^c - t^c \nabla_b \nabla_a w_c \\ &= w_c (\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a) t^c + t^c (\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a) w_c \\ &= w_c (\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a) t^c + t^c R_{abc}{}^d w_d, \end{aligned} \quad (2.87)$$

assim, obtemos

$$(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a) t^c = -R_{abd}{}^c t^d. \quad (2.88)$$

De forma mais geral, para um tensor T do tipo (k, l)

$$(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a) T^{c_1 \dots c_k}{}_{d_1 \dots d_l} = - \sum_{i=1}^k R_{abe}{}^{c_i} T^{c_1 \dots e \dots c_k}{}_{d_1 \dots d_l} + \sum_{j=1}^l R_{abd_j}{}^e T^{c_1 \dots c_k}{}_{d_1 \dots e \dots d_l}. \quad (2.89)$$

A seguir, apresentamos quatro propriedades importantes do tensor de Riemann (WALD, 1984):

1. $R_{abc}{}^d = -R_{bac}{}^d$;
2. $R_{[abc]}{}^d = 0$;
3. Para o operador derivada ∇_a associado com a métrica por $\nabla_a g_{bc} = 0$, temos que

$$R_{abcd} = -R_{abdc}; \quad (2.90)$$

4. Identidade de Bianchi:

$$\nabla_{[a}R_{bc]d}{}^e = 0. \quad (2.91)$$

Agora, ao fazermos a contração do tensor de Riemann, obtemos o *tensor* de Ricci, R_{ac} ,

$$R_{ac} = R_{abc}{}^b, \quad (2.92)$$

que é simétrico, ou seja, $R_{ac} = R_{ca}$. Calculando o traço do tensor de Ricci, podemos obter o *escalar* de Ricci:

$$R = R_a{}^a = g^{ac}R_{ac}. \quad (2.93)$$

Expandindo a identidade de Bianchi e usando a propriedade (1) do tensor de Riemann, temos

$$\begin{aligned} \nabla_{[a}R_{bc]d}{}^e &= \nabla_a R_{bcd}{}^e - \nabla_a R_{cbd}{}^e + \nabla_c R_{abd}{}^e - \nabla_b R_{acd}{}^e + \nabla_b R_{cad}{}^e - \nabla_c R_{bad}{}^e \\ &= \nabla_a R_{bcd}{}^e + \nabla_a R_{bcd}{}^e - \nabla_c R_{bad}{}^e + \nabla_b R_{cad}{}^e + \nabla_b R_{cad}{}^e - \nabla_c R_{bad}{}^e \\ &= 2\nabla_a R_{bcd}{}^e - 2\nabla_c R_{bad}{}^e + 2\nabla_b R_{cad}{}^e \\ &= \nabla_a R_{bcd}{}^e + \nabla_b R_{cad}{}^e - \nabla_c R_{bad}{}^e = 0. \end{aligned} \quad (2.94)$$

Agora, contraindo os índices a e c ,

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla_a R_{bcd}{}^e g_{fe} g^{af} + \nabla_b R_{cad}{}^e g_{fe} g^{af} - \nabla_c R_{bad}{}^e g_{fe} g^{af} \\ 0 &= \nabla_a R_{bcd}{}^a + \nabla_b R_{cad}{}^a - \nabla_c R_{bad}{}^a \\ 0 &= \nabla_a R_{bcd}{}^a + \nabla_b R_{cd} - \nabla_c R_{bd}. \end{aligned} \quad (2.95)$$

Levantando o índice d e então contraindo os índices b e d

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla_a R_{bcd}{}^a g^{bd} + \nabla_b R_{cd} g^{bd} - \nabla_c R_{bd} g^{bd} \\ 0 &= \nabla_a R_{bc}{}^{ba} + \nabla_b R_c{}^b - \nabla_c R_b{}^b \\ 0 &= \nabla_a R_c{}^a + \nabla_a R_c{}^a - \nabla_c R \\ 0 &= 2\nabla_a R_c{}^a - \nabla_c R, \end{aligned} \quad (2.96)$$

ou

$$\nabla^a G_{ab} = 0, \quad (2.97)$$

onde

$$G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab}. \quad (2.98)$$

O tensor G_{ab} é chamado de tensor de Einstein.

2.10 Geodésicas

No \mathbb{R}^n , a menor distância entre dois pontos é uma linha reta. Porém, em espaços curvos não conseguimos traçar uma linha reta, mas sim uma *geodésica*, que é o caminho mais curto em um espaço curvo.

Dado um operador derivada, ∇_a , definimos uma geodésica como uma curva que transporta paralelamente seu vetor tangente, T^a , ou seja, deve satisfazer a equação

$$T^a \nabla_a T^b = 0. \quad (2.99)$$

Em um sistema de coordenada qualquer ψ , a geodésica é mapeada em uma curva $x^\mu(t)$ em \mathbb{R}^n . Pela equação (2.77), as componentes, T^μ , de T^a satisfazem

$$\frac{dT^\mu}{dt} + \Gamma_{\sigma\nu}^\mu T^\sigma T^\nu = 0. \quad (2.100)$$

Porém, sabemos que as componentes T^μ são

$$T^\mu = \frac{dx^\mu}{dt}. \quad (2.101)$$

Portanto, a equação da geodésica se torna

$$\frac{d^2 x^\mu}{dt^2} + \Gamma_{\sigma\nu}^\mu \frac{dx^\sigma}{dt} \frac{dx^\nu}{dt} = 0. \quad (2.102)$$

Essa é a equação da geodésica. Vemos facilmente que essa equação nos dá a noção de linha reta se o símbolo de Christoffel for zero, ou seja, em um espaço plano temos que (2.102) se reduz a

$$\frac{d^2 x^\mu}{dt^2} = 0, \quad (2.103)$$

que é a equação de movimento de uma partícula livre.

3 Formulação Lagrangiana

3.1 Princípio da Mínima Ação e Equações de Movimento

Para caracterizar o movimento de uma partícula com coordenadas $\{q_i(t)\}$ e velocidades $\{\dot{q}_i(t)\}$ generalizadas, podemos utilizar o princípio da mínima ação, exigindo que a ação S ,

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt, \quad (3.1)$$

tenha uma variação $\delta S = 0$ entre dois pontos fixos quaisquer, onde L é a lagrangiana do sistema. Assim,

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{t_1}^{t_2} \delta L dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} [L(q + \delta q, \dot{q} + \delta \dot{q}, t) - L(q, \dot{q}, t)] dt, \end{aligned} \quad (3.2)$$

e expandindo em série de Taylor (*GELFAND; FOMIN, 1963*) até os termos de primeira ordem,

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{t_1}^{t_2} \left[L(q, \dot{q}, t) + \frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} - L(q, \dot{q}, t) \right] dt \\ \delta S &= \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right] dt = 0. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Pelas condições de que $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$, obtemos

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0, \quad (3.4)$$

que são as equações de Euler-Lagrange.

Na teoria de campos, ao invés de partículas, lidamos com campos. Para descrever o sistema, substituímos as coordenadas $\{q_i(t)\}$ por um conjunto $\{\Phi^i(x^\mu)\}$ de campos que são funções de x^μ , ou seja, pontos do espaço-tempo. A lagrangiana L do sistema pode ser vista como a integral de uma densidade de lagrangiana \mathcal{L} que é função de Φ^i e $\partial_\mu \Phi^i$:

$$L = \int \mathcal{L}(\Phi^i, \partial_\mu \Phi^i) d^3 x. \quad (3.5)$$

Assim, a ação S fica

$$S = \int L dt = \int \mathcal{L} d^4 x. \quad (3.6)$$

A equação de Euler-Lagrange para a teoria de campos, é então

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi^i} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi^i)} = 0.$$

3.2 Equações de Campo de Einstein

Nesta seção queremos obter as equações de campo de Einstein a partir do Princípio da Mínima Ação. A ação, S , é uma integral de uma densidade lagrangeana, \mathcal{L} , sobre todo o espaço-tempo M

$$S = \int_M d^4x \mathcal{L}. \quad (3.7)$$

A ação deve ser invariante sob transformações de coordenadas, ou seja, não deve depender da nossa escolha de sistema de referência. Vimos anteriormente que o elemento de volume, $d^n x$, é uma densidade tensorial, portanto \mathcal{L} também é, e que para obtermos um volume invariante multiplicamos por $\sqrt{|g|}$. Então, pela equação (2.55), temos que a ação deve ser

$$S = \int_M d^4x \sqrt{-g} \hat{\mathcal{L}}, \quad (3.8)$$

onde $\mathcal{L} = \sqrt{-g} \hat{\mathcal{L}}$ e $\hat{\mathcal{L}}$ é um escalar. Como nossa variável dinâmica agora é a métrica, $g_{\mu\nu}$, queremos que $\hat{\mathcal{L}}$ seja construída a partir dela, ou seja, que dependa apenas de características intrínsecas à geometria do espaço. O único escalar que é independente da escolha de coordenadas e descreve a curvatura do espaço é o escalar de Ricci, R . Portanto, a ação mais simples que podemos escrever tem a forma

$$S_H = \int_M d^4x \sqrt{-g} R, \quad (3.9)$$

conhecida como *ação de Einstein-Hilbert*.

Lembrando que $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ e variando a ação em relação à métrica - por conveniência iremos variar em relação à inversa da métrica - temos

$$\begin{aligned} \delta S_H &= \delta \int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \\ &= \int d^4x \delta(\sqrt{-g} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}) \\ &= \int d^4x (\delta\sqrt{-g} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}) \\ &= \int d^4x \delta\sqrt{-g} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + \int d^4x \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + \int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

A segunda integral já está em termos da variação da métrica, $\delta g^{\mu\nu}$, então não precisamos mexer nela. Para encontrarmos a variação de $\sqrt{-g}$ na primeira integral vamos fazer uso da fórmula de Jacobi:

$$\delta(\det M) = (\det M)\text{tr}(M^{-1}\delta M). \quad (3.11)$$

Fazendo $M = g_{\mu\nu}$, temos

$$\begin{aligned} \delta g &= g\text{tr}(g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}) \\ &= g(g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}), \end{aligned} \quad (3.12)$$

onde usamos o fato de que há um somatório implícito em $(g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu})$, então o traço é trivial. Para encontrar a variação da métrica usamos a identidade $g^{\mu\lambda}g_{\lambda\nu} = \delta_\nu^\mu$

$$\begin{aligned} g^{\mu\lambda}g_{\lambda\nu} &= \delta_\nu^\mu \\ \delta(g^{\mu\lambda}g_{\lambda\nu}) &= \delta(\delta_\nu^\mu) \\ \delta g^{\mu\lambda}g_{\lambda\nu} + g^{\mu\lambda}\delta g_{\lambda\nu} &= 0 \\ g_{\rho\mu}\delta g^{\mu\lambda}g_{\lambda\nu} + g_{\rho\mu}g^{\mu\lambda}\delta g_{\lambda\nu} &= 0 \\ g_{\rho\mu}g_{\lambda\nu}\delta g^{\mu\lambda} + \delta_\rho^\lambda\delta g_{\lambda\nu} &= 0 \\ \delta g_{\rho\nu} &= -g_{\rho\mu}g_{\nu\lambda}\delta g^{\mu\lambda} \end{aligned} \quad (3.13)$$

ou, renomeando os índices

$$\delta g_{\mu\nu} = -g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma}\delta g^{\rho\sigma}. \quad (3.14)$$

Substituindo em (3.12)

$$\begin{aligned} \delta g &= -g(g^{\mu\nu}g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma}\delta g^{\rho\sigma}) \\ &= -g(\delta_\rho^\nu g_{\nu\sigma}\delta g^{\rho\sigma}) \\ &= -g(g_{\rho\sigma}\delta g^{\rho\sigma}) \\ &= -g(g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Agora, podemos obter $\delta\sqrt{-g}$ variando $\sqrt{-g}$ em relação à g :

$$\begin{aligned} \frac{\delta\sqrt{-g}}{\delta g} &= -\frac{1}{2\sqrt{-g}} \\ \Rightarrow \delta\sqrt{-g} &= -\frac{1}{2\sqrt{-g}}\delta g \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{-g}}[-g(g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu})] \\ &= -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Substituindo este resultado na primeira integral de (3.10), obtemos

$$\begin{aligned} \int d^4x R \delta \sqrt{-g} &= - \int d^4x R \frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \\ &= - \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} g_{\mu\nu} R \delta g^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Agora, precisamos calcular $\delta R_{\mu\nu}$. Para isso, devemos lembrar que o tensor de Ricci é o tensor de Riemann contraído. Primeiro, para um vetor dual ω_a :

$$\begin{aligned} \nabla_b \omega_c &= \partial_b \omega_c - \Gamma_{bc}^d \omega_d \\ \Rightarrow \nabla_a \nabla_b \omega_c &= \partial_a (\partial_b \omega_c - \Gamma_{bc}^d \omega_d) \\ &\quad - \Gamma_{ab}^e (\partial_e \omega_c - \Gamma_{ec}^d \omega_d) \\ &\quad - \Gamma_{ac}^e (\partial_b \omega_e - \Gamma_{be}^d \omega_d). \end{aligned} \quad (3.18)$$

Assim, podemos expressar (2.86) como

$$\begin{aligned} R_{abc}{}^d \omega_d &= \nabla_a \nabla_b \omega_c - \nabla_b \nabla_a \omega_c \\ &= \partial_a (\partial_b \omega_c - \Gamma_{bc}^d \omega_d) - \Gamma_{ab}^e (\partial_e \omega_c - \Gamma_{ec}^d \omega_d) - \Gamma_{ac}^e (\partial_b \omega_e - \Gamma_{be}^d \omega_d) \\ &\quad - \partial_b (\partial_a \omega_c - \Gamma_{ac}^d \omega_d) + \Gamma_{ba}^e (\partial_e \omega_c - \Gamma_{ec}^d \omega_d) + \Gamma_{bc}^e (\partial_a \omega_e - \Gamma_{ae}^d \omega_d) \\ &= \partial_a \partial_b \omega_c - \partial_a (\Gamma_{bc}^d \omega_d) - \Gamma_{ab}^e \partial_e \omega_c + \Gamma_{ab}^e \Gamma_{ec}^d \omega_d - \Gamma_{ac}^e \partial_b \omega_e + \Gamma_{ac}^e \Gamma_{be}^d \omega_d \\ &\quad - \partial_b \partial_a \omega_c + \partial_b (\Gamma_{ac}^d \omega_d) + \Gamma_{ba}^e \partial_e \omega_c - \Gamma_{ba}^e \Gamma_{ec}^d \omega_d + \Gamma_{bc}^e \partial_a \omega_e - \Gamma_{bc}^e \Gamma_{ae}^d \omega_d \\ &= -\partial_a \Gamma_{bc}^d \omega_d - \Gamma_{bc}^d \partial_a \omega_d - \Gamma_{ac}^e \partial_b \omega_e + \Gamma_{ac}^e \Gamma_{be}^d \omega_d + \partial_b \Gamma_{ac}^d \omega_d + \Gamma_{ac}^d \partial_b \omega_d \\ &\quad + \Gamma_{bc}^e \partial_a \omega_e - \Gamma_{bc}^e \Gamma_{ae}^d \omega_d \\ &= -\partial_a \Gamma_{bc}^d \omega_d + \partial_b \Gamma_{ac}^d \omega_d + \Gamma_{ca}^e \Gamma_{be}^d \omega_d - \Gamma_{cb}^e \Gamma_{ae}^d \omega_d \\ &= [-2(\partial_{[a} \Gamma_{b]c}^d) + 2(\Gamma_{c[a}^e \Gamma_{b]e}^d)] \omega_d, \end{aligned} \quad (3.19)$$

onde usamos o fato de que os símbolos de Christoffel são simétricos e as derivadas parciais comutam. Portanto, as componentes do tensor de Riemann podem ser escritas como

$$R_{\mu\nu\rho}{}^\sigma = \partial_\nu \Gamma_{\mu\rho}^\sigma - \partial_\mu \Gamma_{\nu\rho}^\sigma + \Gamma_{\mu\rho}^\alpha \Gamma_{\alpha\nu}^\sigma - \Gamma_{\nu\rho}^\alpha \Gamma_{\alpha\mu}^\sigma. \quad (3.20)$$

Variando o tensor de Riemann

$$\begin{aligned} \delta R_{\mu\nu\rho}{}^\sigma &= \delta \partial_\nu \Gamma_{\mu\rho}^\sigma - \delta \partial_\mu \Gamma_{\nu\rho}^\sigma + \delta(\Gamma_{\mu\rho}^\alpha \Gamma_{\alpha\nu}^\sigma) - \delta(\Gamma_{\nu\rho}^\alpha \Gamma_{\alpha\mu}^\sigma) \\ &= \partial_\nu \delta \Gamma_{\mu\rho}^\sigma - \partial_\mu \delta \Gamma_{\nu\rho}^\sigma + \delta \Gamma_{\mu\rho}^\alpha \Gamma_{\alpha\nu}^\sigma + \Gamma_{\mu\rho}^\alpha \delta \Gamma_{\alpha\nu}^\sigma - \delta \Gamma_{\nu\rho}^\alpha \Gamma_{\alpha\mu}^\sigma - \Gamma_{\nu\rho}^\alpha \delta \Gamma_{\alpha\mu}^\sigma. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Note que, dado um vetor dual ω_μ temos que

$$\begin{aligned}\nabla_\mu\omega_\nu - \hat{\nabla}_\mu\omega_\nu &= \partial_\mu\omega_\nu - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda\omega_\lambda - (\partial_\mu\omega_\nu - \hat{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda\omega_\lambda) \\ &= \hat{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda\omega_\lambda - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda\omega_\lambda \\ &= S^\lambda_{\mu\nu}\omega_\lambda,\end{aligned}\tag{3.22}$$

onde definimos $S^\lambda_{\mu\nu} = \hat{\Gamma}_{\mu\nu}^\lambda - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda$. Como o lado esquerdo da igualdade é um tensor, então o lado direito também deve ser um tensor. Portanto, a diferença entre dois símbolos de Christoffel é um tensor.

Como $\delta\Gamma_{\mu\nu}^\rho$ é a diferença entre dois símbolos de Christoffel, então é um tensor. Portanto, podemos calcular a derivada de $\delta\Gamma_{\mu\nu}^\rho \equiv S^\rho_{\mu\nu}$:

$$\nabla_\mu S^\rho_{\sigma\nu} = \partial_\mu S^\rho_{\sigma\nu} + \Gamma_{\mu\alpha}^\rho S^\alpha_{\sigma\nu} - \Gamma_{\mu\sigma}^\alpha S^\rho_{\alpha\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^\alpha S^\rho_{\sigma\alpha}.\tag{3.23}$$

Retornando à equação (3.21) e usando o resultado obtido acima

$$\begin{aligned}\delta R_{\mu\nu\rho}{}^\sigma &= \partial_\nu S^\sigma_{\mu\rho} - \partial_\mu S^\sigma_{\nu\rho} + \Gamma_{\nu\alpha}^\sigma S^\alpha_{\mu\rho} + \Gamma_{\mu\rho}^\sigma S^\sigma_{\alpha\nu} - \Gamma_{\mu\alpha}^\sigma S^\alpha_{\nu\rho} - \Gamma_{\nu\rho}^\alpha S^\sigma_{\alpha\mu} \\ &= \nabla_\nu S^\sigma_{\mu\rho} - \Gamma_{\nu\alpha}^\sigma S^\alpha_{\mu\rho} + \Gamma_{\nu\mu}^\alpha S^\sigma_{\alpha\rho} + \Gamma_{\nu\rho}^\alpha S^\sigma_{\mu\alpha} \\ &\quad - \nabla_\mu S^\sigma_{\nu\rho} + \Gamma_{\mu\alpha}^\sigma S^\alpha_{\nu\rho} - \Gamma_{\mu\nu}^\alpha S^\sigma_{\alpha\rho} - \Gamma_{\mu\rho}^\alpha S^\sigma_{\nu\alpha} \\ &\quad + \Gamma_{\nu\alpha}^\sigma S^\alpha_{\mu\rho} + \Gamma_{\mu\rho}^\sigma S^\sigma_{\alpha\nu} - \Gamma_{\mu\alpha}^\sigma S^\alpha_{\nu\rho} - \Gamma_{\nu\rho}^\sigma S^\sigma_{\alpha\mu} \\ &= \nabla_\nu S^\sigma_{\mu\rho} - \nabla_\mu S^\sigma_{\nu\rho}.\end{aligned}\tag{3.24}$$

Assim, contraindo (3.24) obtemos a variação do tensor de Ricci

$$\delta R_{\mu\nu} = \delta R_{\mu\lambda\nu}{}^\lambda = \nabla_\lambda S^\lambda_{\mu\nu} - \nabla_\mu S^\lambda_{\lambda\nu}.\tag{3.25}$$

Colocando este resultado na terceira integral de (3.10), temos que

$$\begin{aligned}\int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} &= \int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} (\nabla_\lambda S^\lambda_{\mu\nu} - \nabla_\mu S^\lambda_{\lambda\nu}) \\ &= \int d^4x \sqrt{-g} (g^{\mu\nu} \nabla_\lambda S^\lambda_{\mu\nu} - g^{\mu\nu} \nabla_\mu S^\lambda_{\lambda\nu}) \\ &= \int d^4x \sqrt{-g} (g^{\mu\nu} \nabla_\sigma S^\sigma_{\mu\nu} - g^{\sigma\nu} \nabla_\sigma S^\lambda_{\lambda\nu}) \\ &= \int d^4x \sqrt{-g} \nabla_\sigma (g^{\mu\nu} S^\sigma_{\mu\nu} - g^{\sigma\nu} S^\lambda_{\lambda\nu}),\end{aligned}\tag{3.26}$$

onde trocamos os índices mudos λ e μ para colocar a derivada para fora. A integral acima é o mesmo que uma integral no volume do divergente de um vetor. Então, pelo Teorema de Stokes essa integral deve ser igual à uma contribuição de termos de contorno

no infinito, o qual pode ser zero fazendo nossa variação ser zero no infinito. Portanto, temos que

$$\begin{aligned}\delta S_H &= \int d^4x \delta\sqrt{-g} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + \int d^4x \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \\ &= -\frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} g_{\mu\nu} R \delta g^{\mu\nu} + \int d^4x \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \\ &= \int d^4x \sqrt{-g} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \right) \delta g^{\mu\nu}.\end{aligned}\quad (3.27)$$

Lembrando que $\delta S_H = 0$, então o integrando deve ser zero. Assim obtemos as Equações de Campo de Einstein no vácuo:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 0. \quad (3.28)$$

Para obtermos as equações de Einstein completas, devemos adicionar uma ação devido a presença de matéria no espaço. Portanto, temos que a nova ação é

$$S = \kappa S_H + S_m, \quad (3.29)$$

onde κ é uma constante. Pela definição de derivada funcional do cálculo de variações, podemos escrever δS_H como:

$$\delta S_H = \int d^4x \frac{\delta S_H}{\delta g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu}. \quad (3.30)$$

Assim, vemos que

$$\begin{aligned}\frac{\delta S_H}{\delta g^{\mu\nu}} &= \sqrt{-g} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \right) \\ \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_H}{\delta g^{\mu\nu}} &= R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}.\end{aligned}\quad (3.31)$$

Variando a ação toda, obtemos

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\kappa \delta S_H}{\delta g^{\mu\nu}} + \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_m}{\delta g^{\mu\nu}} = 0. \quad (3.32)$$

Rearranjando,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\kappa \delta S_H}{\delta g^{\mu\nu}} &= -\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_m}{\delta g^{\mu\nu}} \\ \kappa \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \right) &= -\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_m}{\delta g^{\mu\nu}}.\end{aligned}\quad (3.33)$$

Agora, podemos definir o tensor de energia-momento como

$$T_{\mu\nu} = -2 \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_m}{\delta g^{\mu\nu}}. \quad (3.34)$$

Isso nos permite obter as Equações de Campo de Einstein:

$$\begin{aligned} \kappa(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}) &= \frac{1}{2}T_{\mu\nu} \\ \Rightarrow R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} &= \frac{1}{2\kappa}T_{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (3.35)$$

onde $\kappa = \frac{1}{16\pi G}$.

3.3 Aplicação - Equações de Friedmann

Uma aplicação importante que podemos fazer com as equações de Einstein é utilizando a métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker ([CARROLL, 2004](#)),

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left(\frac{1}{1 - \kappa r^2} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right), \quad (3.36)$$

onde t é a coordenada temporal, (r, θ, ϕ) são as coordenadas esféricas e $\kappa = \frac{R}{6}$, onde seu valor determina a geometria da variedade. Essa métrica descreve o Universo como uma variedade homogênea e isotrópica espacialmente, mas que evolui no tempo. Observações mostram que galáxias, estrelas e outros corpos estão, em geral, se afastando uns dos outros, ou seja, o Universo está em expansão.

Vimos que a parte geométrica da equação de Einstein depende de $R_{\mu\nu}$, R , além da própria métrica. Portanto, primeiramente, vamos calcular os símbolos de Christoffel (2.83). Vários dos símbolos serão zero:

$$\begin{aligned} 0 &= \Gamma_{tt}^t = \Gamma_{tr}^t = \Gamma_{t\theta}^t = \Gamma_{t\phi}^t = \Gamma_{r\theta}^t = \Gamma_{r\phi}^t = \Gamma_{\theta\phi}^t = \Gamma_{tt}^r = \Gamma_{t\theta}^r \\ &= \Gamma_{t\phi}^r = \Gamma_{r\theta}^r = \Gamma_{r\phi}^r = \Gamma_{\theta\phi}^r = \Gamma_{tt}^\theta = \Gamma_{rr}^\theta = \Gamma_{\theta\theta}^\theta = \Gamma_{r\phi}^\theta = \Gamma_{t\phi}^\theta \\ &= \Gamma_{tr}^\theta = \Gamma_{\theta\phi}^\theta = \Gamma_{tt}^\phi = \Gamma_{rr}^\phi = \Gamma_{\theta\theta}^\phi = \Gamma_{\phi\phi}^\phi = \Gamma_{tr}^\phi = \Gamma_{t\theta}^\phi = \Gamma_{r\theta}^\phi. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Os símbolos de Christoffel que não são nulos estão abaixo. Primeiro, para $\sigma = t$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{rr}^t &= \frac{1}{2}g^{t\rho}(\partial_r g_{r\rho} + \partial_r g_{\rho r} - \partial_\rho g_{rr}) \\
&= \frac{1}{2}(g^{t\rho}\partial_r g_{r\rho} + g^{t\rho}\partial_r g_{\rho r} - g^{t\rho}\partial_\rho g_{rr}) \\
&= \frac{1}{2}(-g^{t\rho}\partial_\rho g_{rr}) \\
&= -\frac{1}{2}(g^{tt}\partial_t g_{rr}) \\
&= -\frac{1}{2}\left(-1 \cdot \partial_t \left(\frac{a^2(t)}{1 - \kappa r^2}\right)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1 - \kappa r^2} \cdot \partial_t(a^2(t))\right) \\
&= \frac{1}{1 - \kappa r^2}a(t)\dot{a}.
\end{aligned} \tag{3.38}$$

Usamos nas contas acima que $\dot{a} \equiv \frac{d}{dt}a(t)$. Do mesmo modo, para os outros índices

$$\Gamma_{\theta\theta}^t = r^2 a(t)\dot{a}, \tag{3.39}$$

$$\Gamma_{\phi\phi}^t = r^2 \sin^2 \theta a(t)\dot{a}. \tag{3.40}$$

Para $\sigma = r$,

$$\Gamma_{rr}^r = \frac{\kappa r}{(1 - \kappa r^2)}, \tag{3.41}$$

$$\Gamma_{\theta\theta}^r = -(1 - \kappa r^2)r, \tag{3.42}$$

$$\Gamma_{\phi\phi}^r = -(1 - \kappa r^2)r \sin^2 \theta, \tag{3.43}$$

$$\Gamma_{tr}^r = \frac{\dot{a}}{a(t)}. \tag{3.44}$$

Para $\sigma = \theta$,

$$\Gamma_{\phi\phi}^\theta = -\sin \theta \cos \theta, \tag{3.45}$$

$$\Gamma_{t\theta}^\theta = \frac{\dot{a}}{a(t)}, \tag{3.46}$$

$$\Gamma_{r\theta}^\theta = \frac{1}{r}. \tag{3.47}$$

Por último, para $\sigma = \phi$,

$$\Gamma_{t\phi}^\phi = \frac{\dot{a}}{a(t)}, \quad (3.48)$$

$$\Gamma_{r\phi}^\phi = \frac{1}{r}, \quad (3.49)$$

$$\Gamma_{\theta\phi}^\phi = \cot \theta. \quad (3.50)$$

Agora, lembrando que o tensor de Riemman é dado por (3.20), vamos contraí-lo para obter o tensor de Ricci:

$$R_{\mu\rho} = R_{\mu\nu\rho}{}^\nu = \partial_\nu \Gamma_{\mu\rho}^\nu - \partial_\mu \Gamma_{\nu\rho}^\nu + \Gamma_{\mu\rho}^\alpha \Gamma_{\alpha\nu}^\nu - \Gamma_{\nu\rho}^\alpha \Gamma_{\alpha\mu}^\nu. \quad (3.51)$$

Utilizando os resultados para os símbolos de Christoffel calculados acima, conseguimos então determinar as componentes para o tensor de Ricci. Lembrando que as coordenadas $(t, r, \theta, \phi) \equiv (x^0, x^1, x^2, x^3)$,

$$\begin{aligned} R_{tt} \equiv R_{00} &= \partial_\nu \Gamma_{00}^\nu - \partial_0 \Gamma_{\nu 0}^\nu + \Gamma_{00}^\alpha \Gamma_{\alpha\nu}^\nu - \Gamma_{\nu 0}^\alpha \Gamma_{\alpha 0}^\nu \\ &= \partial_0 \Gamma_{00}^0 + \partial_1 \Gamma_{00}^1 + \partial_2 \Gamma_{00}^2 + \partial_3 \Gamma_{00}^3 \\ &\quad - \partial_0 \Gamma_{00}^0 - \partial_0 \Gamma_{10}^1 - \partial_0 \Gamma_{20}^2 - \partial_0 \Gamma_{30}^3 \\ &\quad + \Gamma_{00}^0 \Gamma_{00}^0 + \Gamma_{00}^0 \Gamma_{01}^1 + \Gamma_{00}^0 \Gamma_{02}^2 + \Gamma_{00}^0 \Gamma_{03}^3 \\ &\quad + \Gamma_{00}^1 \Gamma_{10}^0 + \Gamma_{00}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{00}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{00}^1 \Gamma_{13}^3 \\ &\quad + \Gamma_{00}^2 \Gamma_{20}^0 + \Gamma_{00}^2 \Gamma_{21}^1 + \Gamma_{00}^2 \Gamma_{22}^2 + \Gamma_{00}^2 \Gamma_{23}^3 \\ &\quad + \Gamma_{00}^3 \Gamma_{30}^0 + \Gamma_{00}^3 \Gamma_{31}^1 + \Gamma_{00}^3 \Gamma_{32}^2 + \Gamma_{00}^3 \Gamma_{33}^3 \\ &\quad - \Gamma_{00}^0 \Gamma_{00}^0 - \Gamma_{00}^1 \Gamma_{10}^0 - \Gamma_{00}^2 \Gamma_{20}^0 - \Gamma_{00}^3 \Gamma_{30}^0 \\ &\quad - \Gamma_{10}^0 \Gamma_{00}^1 - \Gamma_{10}^1 \Gamma_{10}^1 - \Gamma_{10}^2 \Gamma_{10}^2 - \Gamma_{10}^3 \Gamma_{10}^3 \\ &\quad - \Gamma_{20}^0 \Gamma_{00}^2 - \Gamma_{20}^1 \Gamma_{10}^2 - \Gamma_{20}^2 \Gamma_{20}^2 - \Gamma_{20}^3 \Gamma_{20}^3 \\ &\quad - \Gamma_{30}^0 \Gamma_{00}^3 - \Gamma_{30}^1 \Gamma_{10}^3 - \Gamma_{30}^2 \Gamma_{20}^3 - \Gamma_{30}^3 \Gamma_{30}^3 \\ &= -\partial_0 \Gamma_{10}^1 - \partial_0 \Gamma_{20}^2 - \partial_0 \Gamma_{30}^3 - \Gamma_{10}^1 \Gamma_{10}^1 - \Gamma_{20}^2 \Gamma_{20}^2 - \Gamma_{30}^3 \Gamma_{30}^3, \end{aligned} \quad (3.52)$$

e substituindo tudo,

$$R_{00} = -3 \frac{\ddot{a}a - \dot{a}^2}{a^2} - 3 \frac{\dot{a}^2}{a^2} = -3 \frac{\ddot{a}}{a}. \quad (3.53)$$

Usando o mesmo procedimento para os outros índices,

$$R_{rr} = R_{11} = \frac{\ddot{a}a + 2\dot{a}^2 + 2\kappa}{1 - \kappa r^2}, \quad (3.54)$$

$$R_{\theta\theta} = R_{22} = (2\dot{a}^2 + a\ddot{a} + 2\kappa)r^2, \quad (3.55)$$

$$R_{\phi\phi} = R_{33} = r^2(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2\kappa) \sin^2 \theta. \quad (3.56)$$

Multiplicando $R_{\mu\nu}$ pela inversa da métrica, $g^{\mu\nu}$, podemos levantar o segundo índice para então calcularmos o escalar de Ricci,

$$R_{\mu\nu}g^{\rho\nu} = R_{\mu}{}^{\rho} = \begin{pmatrix} 3\frac{\dot{a}}{a} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\ddot{a}a+2\dot{a}^2+2\kappa}{1-\kappa r^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (2\dot{a}^2 + a\ddot{a} + 2\kappa)r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2\kappa) \sin^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (3.57)$$

Assim, obtemos que o escalar de Ricci é

$$\begin{aligned} R &= 3\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\ddot{a}a + 2\dot{a}^2 + 2\kappa}{1 - \kappa r^2} + (2\dot{a}^2 + a\ddot{a} + 2\kappa)r^2 + r^2(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2\kappa) \sin^2 \theta \\ &= 6 \left[\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{\kappa}{a^2} \right]. \end{aligned} \quad (3.58)$$

Antes de escrevermos as equações de Einstein,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}, \quad (3.59)$$

vamos descrever o tensor energia-momento.

$T_{\mu\nu}$ é o tensor de energia-momento. Quando observamos o Universo em grande escala, as galáxias podem ser vistas como "partículas de poeira". Então, iremos escolher modelar a energia e a matéria como um fluido perfeito. O tensor $T_{\mu\nu}$ para um fluido perfeito é dado por (CARROLL, 2004)

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}, \quad (3.60)$$

onde ρ é a densidade e p é a pressão devido a radiação e matéria presente no universo.

Portanto, para $\mu\nu = 00$, temos

$$\begin{aligned}
 R_{00} - \frac{1}{2}Rg_{00} &= 8\pi GT_{00} \\
 -3\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{1}{2}6\left[\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{\kappa}{a^2}\right](-1) &= 8\pi G\rho \\
 -3\frac{\ddot{a}}{a} + 3\left[\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{\kappa}{a^2}\right] &= 8\pi G\rho \\
 3\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + 3\frac{\kappa}{a^2} &= 8\pi G\rho \\
 \frac{3\dot{a}}{a^2} &= 8\pi G\rho - \frac{3\kappa}{a^2}.
 \end{aligned} \tag{3.61}$$

As componentes espaciais $\mu\nu = ij$ geram as equações

$$\frac{3\ddot{a}}{a} = -4\pi(\rho + 3p). \tag{3.62}$$

Juntas, (3.61) e (3.62), são as equações de Friedmann, que descrevem a evolução de um universo homogêneo e isotrópico. Se $\kappa = -1$, a geometria do espaço é a de uma 3-esfera; para $\kappa = 0$, temos que a geometria é a de um plano; se $\kappa = 1$, então a geometria é de um hiperbolóide.

Conclusão

Neste trabalho, conseguimos mostrar a relevância da Relatividade Especial e suas consequências. Fenômenos como contração do espaço e dilatação do tempo, transformações de Lorentz e a famosa relação entre energia e massa $E = mc^2$, foram deduzidos e discutidos, todos a partir dos postulados de Einstein e de análises geométricas.

Com o estudo detalhado de alguns elementos de Geometria Diferencial e da dedução das equações de Einstein, a partir do cálculo variacional, conseguimos ver o caráter geométrico que a Teoria da Relatividade Geral (ou Teoria da Gravitação de Einstein) apresenta, mostrando a relação direta entre a curvatura do espaço-tempo e a quantidade de matéria e energia presentes no universo. Várias aplicações podem ser feitas usando RG, desde soluções que modelam a evolução do universo, como mostrado na última seção, até soluções que modelam buracos negros, estrelas, órbitas de planetas, lenteamento gravitacional etc.

O resultado que conseguimos encontrar foi um resultado obtido pelo matemático Hilbert, também conhecido pelo *espaço de Hilbert* da Mecânica Quântica, de forma paralela e quase que ao mesmo tempo ao trabalho de Einstein. Hilbert seguiu um caminho independente para obter as equações de movimento que é uma das poucas teorias que é invariante por toda a Física, que é o método de minimização da ação. Finalmente, vale dizer que essa metodologia tem sido amplamente utilizada no estudo de teorias de gravitação modificada como as chamadas teorias $F(R)$, por exemplo.

Referências

CARROLL, S. M. *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*. [S.l.]: Addison Wesley, 2004. Citado 2 vezes nas páginas 55 e 58.

GELFAND, I. M.; FOMIN, S. V. *Calculus of Variations*. [S.l.]: Printice-Hall, Inc., 1963. Citado na página 49.

LANDAU, L. D.; LIFSHITZ, E. M. *The Classical Theory of Fields 4th edition*. [S.l.]: Butterworth Heinemann, 1979. Citado na página 26.

WALD, R. M. *General Relativity*. [S.l.]: The University of Chicago Press, 1984. Citado 2 vezes nas páginas 31 e 46.