



PROJETO DE GRADUAÇÃO 2

**ESCOAMENTO DE HAGEN-POISEUILLE  
EM UM CANAL QUARTO-ELÍPTICO**

**Hugo da Costa Melo Gomes Ferreira**

**Brasília, Setembro de 2022**

**UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA**

FACULDADE DE TECNOLOGIA

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA  
Faculdade de Tecnologia  
Departamento de Engenharia Mecânica

PROJETO DE GRADUAÇÃO 2  
**ESCOAMENTO DE HAGEN-POISEUILLE  
EM UM CANAL QUARTO-ELÍPTICO**

**Hugo da Costa Melo Gomes Ferreira**

*Projeto de Graduação 2 submetido ao Departamento de Engenharia  
Mecânica como requisito parcial para obtenção  
do grau de Engenheiro em Engenharia Mecânica*

Banca Examinadora

Prof. André von Borries Lopes, Dr., University of Manchester  
*Orientador*

---

Prof. José Luiz Alves da Fontoura Rodrigues, Dr., École Centrale de Lyon  
*Examinador interno*

---

Prof. Edgar Amaral Silveira, Dr., Université de Lorraine  
*Examinador interno*

---

Ivan Rosa de Siqueira, M.Sc., Rice University  
*Examinador externo*

---

## FICHA CATALOGRÁFICA

FERREIRA, HUGO DA COSTA MELO GOMES

ESCOAMENTO DE HAGEN-POISEUILLEEM UM CANAL QUARTO-ELÍPTICO [Distrito Federal] 2022.

xvi, 86 p., 210 x 297 mm (EFL/FT/UnB, Engenheiro, Engenharia Mecânica, 2022).

Projeto de Graduação 2 - Universidade de Brasília, Faculdade de Tecnologia.

Departamento de Engenharia Mecânica

- |                                   |                                |
|-----------------------------------|--------------------------------|
| 1. Escoamento de Hagen-Poiseuille | 2. Método de Fourier           |
| 3. Separação de Variáveis         | 4. Transformada Finita de Seno |
| 5. Solução Analítica              | 6. Canal Quarto-elíptico       |
| I. EFL/FT/UnB                     | II. Título (série)             |

## REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

FERREIRA, H.C.M.G. (2022). *ESCOAMENTO DE HAGEN-POISEUILLEEM UM CANAL QUARTO-ELÍPTICO*. Projeto de Graduação 2, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de Brasília, Brasília, DF, 86 p.

## CESSÃO DE DIREITOS

AUTOR: Hugo da Costa Melo Gomes Ferreira &

TÍTULO: ESCOAMENTO DE HAGEN-POISEUILLEEM UM CANAL QUARTO-ELÍPTICO.

GRAU: Engenheiro em Engenharia Mecânica ANO: 2022

É concedida à Universidade de Brasília permissão para reproduzir cópias deste Projeto Final de Graduação e para emprestar ou vender tais cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte desse Projeto Final de Graduação pode ser reproduzida sem autorização por escrito do autor.

---

Hugo da Costa Melo Gomes Ferreira  
Depto. de Engenharia Mecânica (ENM) - FT  
Universidade de Brasília (UnB)  
Campus Darcy Ribeiro  
CEP 70919-970 - Brasília - DF - Brasil

## **Dedicatória**

*Dedico este trabalho a todos os apaixonados por ciências e a todos aqueles que estejam se sentindo incapazes de escrever um trabalho de conclusão de curso. O medo do desconhecido é completamente natural, mas se quiserem um spoiler sobre o final: vai dar certo! Apenas continue a nadar!*

*Hugo da Costa Melo Gomes Ferreira*

## Agradecimentos

*Confesso que foi mais difícil externar tudo que eu estou sentindo agora do que escrever o próprio projeto de graduação. No momento em que se passa um grande filme na minha cabeça, não existe palavra que se destaque mais do que a "GRATIDÃO". Afinal de contas, eu não cheguei aqui sozinho, muito pelo contrário. Dito isto, gostaria de dedicar um tempinho para cada uma das pessoas que fizeram parte deste capítulo da minha vida.*

*Em primeiro lugar, gostaria de agradecer aos meus pais, Júnio e Diléia, por sempre me proporcionarem um ambiente favorável aos meus estudos e por sempre acreditarem em mim. Obrigado por toda segurança, carinho e amor de vocês! Sem esse suporte, nada disso seria possível. Obrigado também aos meus irmãos, Felipe e Beatriz, por sempre estarem do meu lado quando precisei. Espero poder passar todas as minhas experiências para vocês. Eu vos amo!*

*Gostaria também de agradecer aos meus amigos de curso que sempre foram muito solícitos e parceiros. Sem vocês, minha jornada teria sido bem mais difícil. Jamais esquecerei das noites viradas para render nos projetos, das zoeiras internas, das trocas de conhecimento, do nosso espírito de nunca deixar ninguém pra trás! Vocês são muito fora da curva. Tenho certeza que vocês chegarão bem longe! Contem sempre comigo, galera!*

*Um agradecimento especial ao meu orientador e amigo, André Lopes, sem o qual eu jamais conseguiria desenvolver este trabalho. Muito obrigado por cada reunião, conversa e conselho! Obrigado por ter acreditado tanto em mim, obrigado por ter me mostrado que meus limites eram bem maiores do que eu imaginava, muito obrigado por ter feito com que eu me tornasse uma pessoa melhor e obrigado por ter sido o irmão mais velho que eu nunca tive! Você é o cara! Conta sempre comigo!*

*Por último, mas não menos importante – na verdade a mais importante – gostaria de agradecer à minha eterna parceira de vida, Andressa Soares, por ser minha maior fonte de inspiração, por ser meu porto seguro e por cuidar tão bem de mim. Sem o seu apoio, nada disso seria possível! Obrigado por estar sempre me acompanhando de perto e por me deixar fazer o mesmo! É um privilégio enorme te ver conquistando o mundo! Quando eu crescer, quero ser igual a você! Obrigado por fazer com que eu me sinta o homem mais feliz e realizado do mundo! Eu te amo, amore mio!*

*Hugo da Costa Melo Gomes Ferreira*

---

## RESUMO

Visto que ainda não se encontram na literatura estudos envolvendo o escoamento de Hagen-Poiseuille em dutos com seção transversal quarto-elíptica, propõe-se a construção de uma solução analítica deste problema. Para tanto, utilizou-se de recursos como o sistema de coordenadas elípticas, o Método de Fourier e a Transformada Finita de Seno para desenvolvimento dos cálculos necessários. Para introduzir o sistema de coordenadas elípticas e o Método de Fourier, resolveu-se o escoamento de Hagen-Poiseuille para um duto de seção transversal elíptica no seu sistema de coordenadas natural, comparando os resultados encontrados com os obtidos por Boussinesq, em 1868. Já para apresentar a metodologia adotada na aplicação da Transformada Finita de Seno, optou-se por resolver, detalhadamente, o escoamento de Hagen-Poiseuille em um canal retangular. Com base nesta duas metodologias, foi possível encontrar soluções analíticas equivalentes para o escoamento de Hagen-Poiseuille em um canal quarto-elíptico. Parâmetros adimensionais como a vazão, velocidade média e o  $fRe$  foram aferidos satisfatoriamente. Além disso, verificou-se que os resultados convergiram para o limite assintótico da seção quando os semi-eixos tenderam a se igualar, o que validou a solução.

---

## ABSTRACT

Since studies involving the Hagen-Poiseuille flow for a quarter-elliptical cross-section duct are not yet found in the literature, we propose the construction of an analytical solution for this problem. In order to do this, tools such as the elliptic coordinate system, the Fourier Method and the Finite Sine Transformation were used to develop the necessary calculations. Aiming to introduce the elliptic coordinate system and the Fourier Method, the Hagen-Poiseuille flow for an elliptical cross-section duct was solved in its natural coordinate system, comparing the results found with those obtained by Boussinesq, in 1868. In addition, the methodology adopted in the application of the Finite Sine Transformation in the Hagen-Poiseuille flow for a rectangular channel was minutely presented. Based on these two methodologies, it was possible to find equivalent analytical solutions for the Hagen-Poiseuille flow in a quarter-elliptical channel. Dimensionless parameters such as flow, average velocity and  $fRe$  were satisfactorily measured. Furthermore, it was found that the results converged to the section asymptotic limit when the semi-axes tended to equal each other, which validated the solution.

# SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> .....	<b>1</b>
1.1	MOTIVAÇÃO .....	1
1.2	OBJETIVOS.....	3
1.2.1	OBJETIVO PRINCIPAL .....	3
1.2.2	OBJETIVOS INTERMEDIÁRIOS.....	4
1.3	ESTRUTURA DO TRABALHO .....	4
<b>2</b>	<b>REVISÃO DE LITERATURA</b> .....	<b>6</b>
2.1	SEÇÃO ELÍPTICA .....	6
2.2	SEÇÃO SEMI-ELÍPTICA.....	10
2.3	SEÇÃO SETOR CIRCULAR .....	12
<b>3</b>	<b>FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA</b> .....	<b>16</b>
3.1	FORMULAÇÃO GERAL DO PROBLEMA .....	16
3.2	CARACTERÍSTICAS DO PROBLEMA.....	17
3.3	EQUAÇÕES GOVERNANTES.....	17
3.4	CONDIÇÕES DE CONTORNO .....	19
3.5	PERFIL DE VELOCIDADE .....	19
3.6	VAZÃO.....	20
3.7	VELOCIDADE MÉDIA .....	20
3.8	ADIMENSIONALIZAÇÃO DE TERMOS .....	20
3.9	RESOLUÇÃO NO SISTEMA DE COORDENADAS ELÍPTICO .....	22
3.10	RESULTADOS DA SEÇÃO ELÍPTICA .....	33
3.11	MÉTODO DA TRANSFORMADA FINITA DE SENO .....	37
<b>4</b>	<b>FORMULAÇÃO MATEMÁTICA DO PROBLEMA</b> .....	<b>41</b>
<b>5</b>	<b>SOLUÇÃO ANALÍTICA DA SEÇÃO QUARTO-ELÍPTICA</b> .....	<b>43</b>
5.1	SOLUÇÃO VIA TRANSFORMADA FINITA DE SENO.....	43
5.2	SOLUÇÃO VIA MÉTODO DE FOURIER - SEPARAÇÃO DE VARIÁVEIS .....	46
5.2.1	ESTUDO DE SINAL .....	49
5.2.2	APLICAÇÃO NO CASO QUARTO-ELÍPTICO .....	53
<b>6</b>	<b>RESULTADOS DA SEÇÃO QUARTO-ELÍPTICA</b> .....	<b>58</b>
<b>7</b>	<b>CONCLUSÃO</b> .....	<b>62</b>
7.1	DISPOSIÇÕES FINAIS .....	62



<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....</b>	<b>64</b>
<b>APÊNDICES.....</b>	<b>66</b>
<b>I REFERÊNCIAS MATEMÁTICAS.....</b>	<b>67</b>
I.1    OBTENÇÃO DA EXPRESSÃO DA VAZÃO.....	67
I.2    OBTENÇÃO DA VELOCIDADE MÁXIMA EM TERMOS DA RAZÃO DE ASPECTO	68
I.3    OBTENÇÃO DA VAZÃO EM TERMOS DA RAZÃO DE ASPECTO .....	70
I.4    DESENVOLVIMENTO DA TRANSFORMADA FINITA DE SENO .....	72
I.5    VAZÃO NO DUTO QUARTO ELÍPTICO VIA TRANSFORMADA FINITA DE SENO	78
I.6    VAZÃO NO DUTO QUARTO ELÍPTICO VIA MÉTODO DE FOURIER .....	80

## LISTA DE FIGURAS

1.1 Trocador de calor em espiral com dutos elípticos. Retirado de Jian et al. (2019).....	2
1.2 Algumas das seções estudadas no trabalho de Shah e London (1978). .....	2
1.3 Perfil de velocidades para o duto semi-elíptico. Retirado de Alassar e Abushoshah (2012). .....	3
1.4 Distribuição de tensão cisalhante no bordo molhado. Retirado de Alassar e Abushoshah (2012). .....	3
2.1 Linhas de trajetória para uma razão de aspecto de 0,5. Retirado de Thomas e Walters (1965). .....	7
2.2 Resultado gráfico da análise numérica. $\alpha$ corresponde à razão de aspecto, $De$ ao número de Dean e $r$ o raio de curvatura. Retirado de Dong e Ebadian (1991). .....	7
2.3 Campo de velocidade adimensional em uma seção elíptica com razão de aspecto $\alpha = 0,7$ . Em relação ao número de Dean, segue que: (a) $K = 30$ e (b) $K = 130$ . Retirado de Silva, Valle e Ziviani (1999). .....	8
2.4 Campo de velocidade adimensional na direção axial em uma seção elíptica com razão de aspecto: (a) $\alpha = 0,67$ e (b) $\alpha = 0,5$ . Retirado de Nikitin e Yakhot (2005). ..	8
2.5 Geometrias derivadas da fórmula base da Hiper-elipse. Retirado de Tamayol e Bahrami (2009). .....	9
2.6 Geometrias derivadas da fórmula base do polígono regular. Retirado de Tamayol e Bahrami (2009). .....	9
2.7 (a) Linhas com velocidades adimensionais constantes para o duto de seção elíptica. (b) Tabela com o $fRe$ obtido para o duto de seção elíptica. Retirado de Tamayol e Bahrami (2009). .....	10
2.8 Linhas de velocidade constantes no escoamento estudado por Wang (2015). .....	10
2.9 Linhas de velocidade axial adimensional para diferentes índices da Lei de Power. Retirado de Mukherjee, Gupta e Chhabra (2017). .....	11
2.10 Campo de velocidade adimensional para o duto semi-elíptico com $\alpha = 0,5$ sujeito a um gradiente de pressão adimensional igual a: (a) $P = 20$ , (b) $P = 5$ , (c) $P = 0$ e (d) $P = -5$ . Retirado de Lopes e Siqueira (2022). .....	12
2.11 Geometria dos dutos de seção setor circular. Retirado de Soliman, Munis e Trupp (1982). .....	12
2.12 Distribuição de velocidades no desenvolvimento do escoamento. Retirado de Soliman, Munis e Trupp (1982). .....	13
2.13 Tabela resumo dos resultados obtidos por Soliman, Munis e Trupp (1982). .....	14
2.14 Linhas de velocidade e temperatura adimensionais constantes, para um duto setor anular, determinados por iteração. Retirado de Li, Hung e Tao (2002). .....	14
2.15 Linhas de velocidade axial constantes para um duto de seção semicircular. Retirado de Mylavarapu, Sun e Christensen (2016). .....	15

3.1	Duto de seção elíptica .....	16
3.2	Seção elíptica por inteiro e sua condição de contorno. ....	22
3.3	Sistema de coordenadas elípticas. Destacadas em roxo, as curvas de $\xi$ constante, configurando elipses. Em amarelo, as curvas hiperbólicas de $\theta$ constante. ....	25
3.4	Seção quarto elíptica e informações do novo domínio. ....	26
3.5	Intercâmbio entre os domínios. ....	28
3.6	Vazão adimensional da seção elíptica em função da razão de aspecto. ....	33
3.7	Velocidade máxima ( $u_{m\acute{a}x}$ ) e velocidade média ( $\bar{u}$ ) da seção elíptica em função da razão de aspecto. ....	34
3.8	Campo de velocidades adimensional, no sistema de coordenadas cartesiano, para o duto elíptico. As razões de aspecto trabalhadas foram (a) $\alpha = 0.25$ , (b) $\alpha = 0.50$ , (c) $\alpha = 0.75$ e (d) $\alpha = 0.99$ . ....	35
3.9	Campo de velocidades adimensional, no sistema de coordenadas elípticas, para o duto elíptico. As razões de aspecto trabalhadas foram (a) $\alpha = 0.25$ , (b) $\alpha = 0.50$ , (c) $\alpha = 0.75$ e (d) $\alpha = 0.99$ . ....	36
3.10	Domínio da seção retangular. Retirado de Spiga e Morino (1994). ....	37
4.1	Duto de seção quarto elíptica. ....	41
4.2	(a) Domínio em coordenadas cartesianas. (b) Novo domínio proporcionado pelo sistema de coordenadas elípticas. ....	42
5.1	Condições de contorno do retângulo a ser resolvido. ....	47
5.2	Subdivisão do problema geral em problemas parciais. A solução geral é o somatório das contribuições de cada problema parcial. (a) Única condição de contorno não nula: $u(x, 0) = f_1(x)$ , (b) Única condição de contorno não nula: $u(x, b) = f_2(x)$ , (c) Única condição de contorno não nula: $u(0, y) = g_1(y)$ , (d) Única condição de contorno não nula: $u(a, y) = g_2(y)$ . ....	48
6.1	Parâmetros avaliados em função da razão de aspecto: (a) Vazão ( $Q$ ) X Razão de aspecto ( $\alpha$ ), (b) Velocidade média ( $\bar{u}$ ) X Razão de aspecto ( $\alpha$ ), (c) $fRe$ X Razão de aspecto ( $\alpha$ ) e (d) Diâmetro hidráulico ( $D_h$ ) X Razão de aspecto ( $\alpha$ ). ....	60
6.2	Campo de velocidades adimensional, no sistema de coordenadas cartesiano, para o duto quarto elíptico. As razões de aspecto trabalhadas foram (a) $\alpha = 0.25$ , (b) $\alpha = 0.50$ , (c) $\alpha = 0.75$ e (d) $\alpha = 0.99$ . ....	61

## LISTA DE TABELAS

2.1	Sumário de estudos conduzidos no ramo de escoamentos internos ao longo das décadas. ....	15
6.1	Vazão obtida através dos dois métodos analíticos para diferentes razões de aspecto. ....	58
6.2	Velocidade média obtida através dos dos dois métodos analíticos para diferentes razões de aspecto. ....	58
6.3	$fRe$ obtido através dos dois métodos analíticos para diferentes razões de aspecto. ..	59

# LISTA DE SÍMBOLOS

## Símbolos Latinos

$\mathbf{u}$	Vetor velocidade	[m/s]
$u$	Componente do vetor velocidade na direção $x$	[m/s]
$v$	Componente do vetor velocidade na direção $y$	[m/s]
$w$	Componente do vetor velocidade na direção $z$	[m/s]
$Q$	Vazão Volumétrica	[m <sup>3</sup> /s]
$p$	Campo de pressão	[Pa]
$g$	Aceleração da gravidade	[m/s <sup>2</sup> ]
$x$	Eixo de coordenada longitudinal	[m]
$y$	Eixo de coordenada vertical	[m]
$z$	Eixo de coordenada transversal	[m]

## Símbolos Gregos

$\nabla$	Gradiente
$\nabla^2$	Laplaciano
$\partial$	Operador diferencial parcial
$d$	Operador diferencial
$\rho$	Massa específica
$\mu$	Viscosidade dinâmica
$\Sigma$	Somatório
$\infty$	Infinito
$\pi$	Pi
$\alpha$	Razão de aspecto da seção elíptica
$\beta$	Razão de aspecto da seção retangular
$\xi$	Curvas com elipses constantes
$\theta$	Curvas com hipérbolas constantes
$\Phi$	Variável escalar auxiliar
$\mathfrak{S}$	Representação para aplicação da transformada finita de seno

## Grupos Adimensionais

$u^*$	Campo de velocidades adimensional
$Q^*$	Vazão adimensional
$K$	Constante arbitrária de integração
$U$	Escala de adimensionalização da velocidade
$a$	Escala de adimensionalização dos semi-eixos
$A$	Área da seção elíptica
$B$	Constante determinada pelas condições de contorno
$F$	Primeira função da separação de variáveis
$G$	Segunda função da separação de variáveis
$\tilde{V}$	Velocidade do escoamento no duto seção retangular com transformada finita de seno aplicada
$n$	Variante do somatório da transformada para números reais e positivos
$m$	Variante do somatório da transformada para números reais, ímpares e positivos

## Subscritos

$x$	Direção $x$ do eixo de coordenadas
$y$	Direção $y$ do eixo de coordenadas
$z$	Direção $z$ do eixo de coordenadas
$cor$	Termo corrigido
máx	Máximo

## Sobrescritos

$\sim$	Indicador de transformada única
$\approx$	Indicador de transformada dupla
$*$	Simbologia para parâmetros adimensionais
$-$	Simbologia para grandeza média

## Siglas

EDO	Equação Diferencial Ordinária
EDP	Equação Diferencial Parcial

# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 MOTIVAÇÃO

O estudo e a análise de escoamentos em dutos não são uma novidade. Jean Louis Marie Poiseuille, já no século XIX, dedicava-se ao entendimento de como funcionava o bombeamento de sangue, por parte do coração, ao longo de vasos e capilares do corpo humano (Poiseuille, 1844). Com essa motivação, ele escreveu um artigo chamado *Le mouvement des liquides dans les tubes de petits diamètres* (do francês: *O movimento de líquidos em tubos de pequeno diâmetro*). Este trabalho ensejou na formulação da lei que governa o fluxo laminar de fluidos viscosos em tubos cilíndricos, sendo embasamento teórico para muitas das pesquisas conduzidas atualmente.

Concomitantemente e de maneira independente, o engenheiro hidráulico alemão chamado Gotthilf Hagen desenvolveu um estudo semelhante ao de Poiseuille. Ele também formulou equações que descrevem o fluxo de um fluido incompressível de baixa viscosidade através de um tubo de seção transversal circular constante (Hagen, 1839). Esse fato resultou na divisão dos créditos entre os dois cientistas, fazendo com que a formulação dessa teoria fosse intitulada *Escoamento de Hagen-Poiseuille*. Em outros termos, o escoamento de Hagen-Poiseuille se remete ao conjunto de equações capazes de descrever o comportamento de um fluido passando através de um duto de seção constante, movido por um gradiente de pressão. Com isso, torna-se possível obter expressões que representam o perfil de velocidades do escoamento, a vazão, a velocidade média, entre outros parâmetros de interesse.

Essas pesquisas abriram portas para que esse conhecimento fosse explorado em vários seguimentos da engenharia, com a modelagem e formulação matemática de problemas envolvendo escoamentos em dutos dos mais diversos tipos de seções transversais, passando desde os dutos ditos convencionais (seção circular, retangular e similares), até os não-convencionais (seção elíptica, semi-elípticas, senoidais, entre outras).

É oportuno trazer algumas aplicações em que dutos de seção não-convencionais se mostram mais convenientes de serem selecionados em comparação com dutos convencionais. Tubulações que apresentam seção transversal elíptica, por exemplo, são comumente utilizadas em indústrias petroquímica, alimentícias, farmacêuticas. Empresas que atuam nessas áreas geralmente necessitam de um ambiente controlado e eficiente, o que faz com que sejam utilizados, simultaneamente, equipamentos como os trocadores de calor, os aquecedores, os refrigeradores, os condensadores, etc (Alegria, 2011). O artigo escrito por Zhu et al. (2004) esclarece que a escolha de tubulações com seção transversal não-convencional, como no caso da seção elíptica, pode se mostrar mais indicada, em certas situações, por possuir uma geometria mais refinada, o que vem a aumentar as taxas das trocas de calor convectivas. Em certos casos, esses fatores são fundamentais para que as máquinas operem com o máximo de eficiência. A Figura 1.1 ilustra um trocador de calor espiral com tubos de seção elíptica.

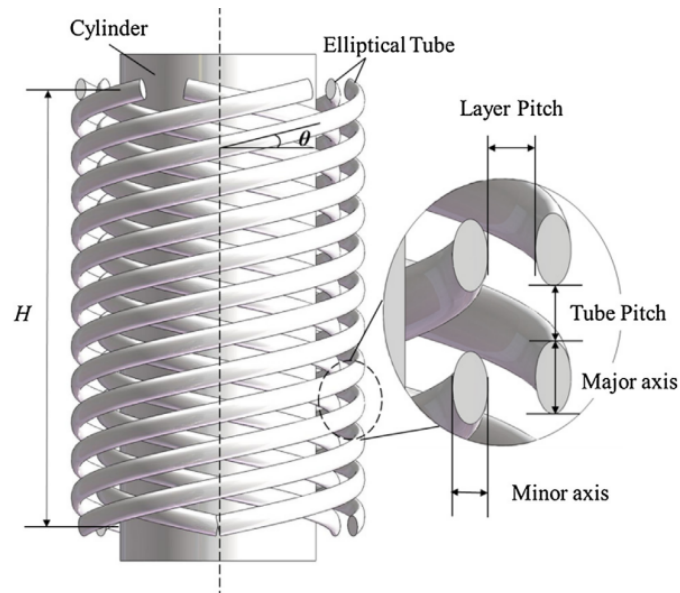


Figura 1.1: Trocador de calor em espiral com dutos elípticos. Retirado de Jian et al. (2019).

Tratando de trabalhos realizados nessa área, Shah e London (1978) compilaram uma série de resultados encontrados para solução do escoamento de Hagen-Poiseuille em dutos de seções transversais dos mais diferentes formatos, passando desde seções transversais clássicas, como a seção circular, até seções não-convencionais, como no caso do duto de setor circular. Vale comentar que trabalhar com seções transversais não-convencionais não é algo trivial. Isso fez com que alguns tipos de seção necessitassem de solução numérica para que se chegasse ao resultado esperado, como no caso da seção senoidal. A Figura 1.2 apresenta algumas das seções exploradas no trabalho de Shah e London (1978).

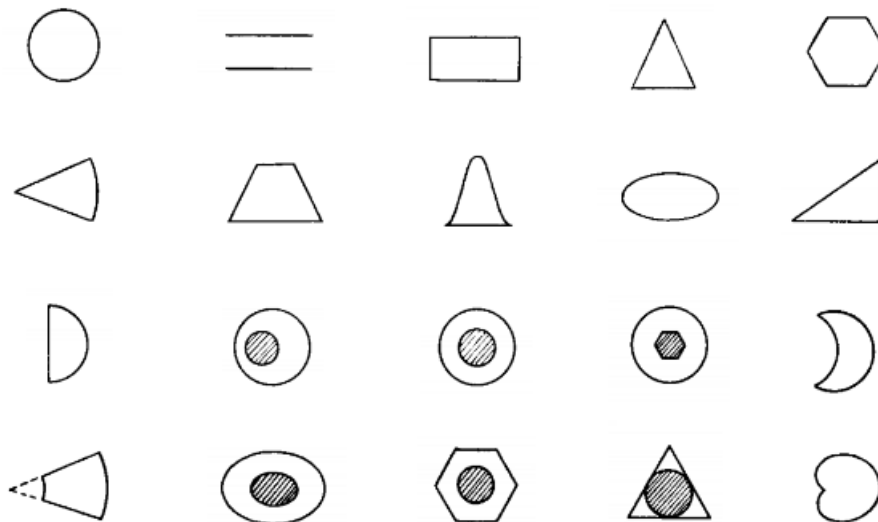


Figura 1.2: Algumas das seções estudadas no trabalho de Shah e London (1978).



Como dito anteriormente, a complexidade enfrentada ao se estudar dutos com perfis não-convencionais impossibilitou com que Shah e London (1978) encontrassem soluções analíticas exatas para alguns tipos de seção. Foi o que aconteceu com o duto de seção transversal semi-elíptica, que só foi resolvido, na última década, por Alassar e Abushoshah (2012). Neste trabalho, os autores conseguiram determinar o perfil de velocidades do escoamento, a distribuição das tensões cisalhantes ao longo do perímetro molhado, além do fator de atrito para diferentes razões de aspecto usando o método da separação de variáveis em coordenadas elípticas. Vale comentar que nesse registro foi adotado como referencial de parede o semi-eixo maior da semi-elipse. A Figura 1.3 representa o perfil de velocidades encontrado para o caso semi-elíptico. Por sua vez, a Figura 1.4 mostra a distribuição de tensão cisalhante nas paredes do duto analisado.

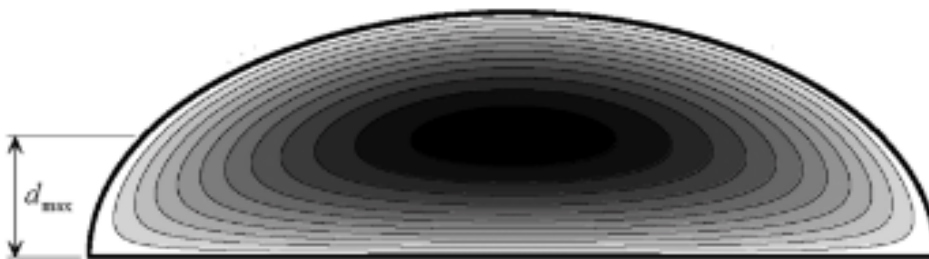


Figura 1.3: Perfil de velocidades para o duto semi-elíptico. Retirado de Alassar e Abushoshah (2012).

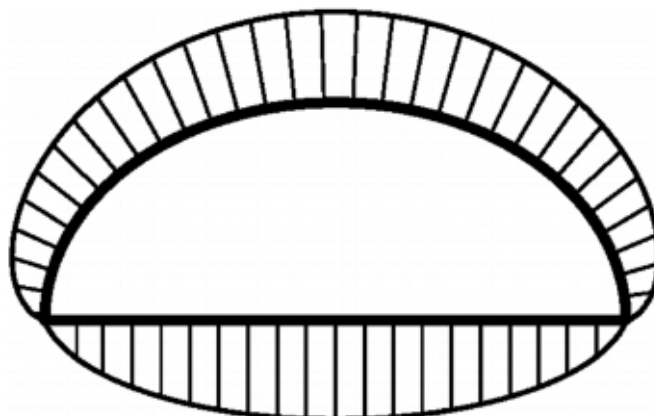


Figura 1.4: Distribuição de tensão cisalhante no bordo molhado. Retirado de Alassar e Abushoshah (2012).

## 1.2 OBJETIVOS

### 1.2.1 Objetivo Principal

Feita toda essa introdução, faz-se oportuno abordar o propósito do trabalho em tela. Visto que ainda não se encontram na literatura estudos tratando do escoamento de Hagen-Poiseuille para um duto de seção transversal quarto-elíptica, propõe-se a construção de uma solução analítica para este problema.

### 1.2.2 Objetivos intermediários

Para que esta meta torne-se ainda mais factível, mostrou-se conveniente fragmentá-la em etapas menores, sendo elas:

1. Entender e formular, genericamente, o escoamento de Hagen-Poiseuille, explicitando suas equações governantes e condições de contorno.
2. Introduzir o sistema de coordenadas natural e o método de Fourier resolvendo, analiticamente, o escoamento de Hagen-Poiseuille para o canal elíptico.
3. Apresentar o procedimento padrão de aplicação da *Transformada Finita de Seno* resolvendo o caso do escoamento ao longo de um canal retangular.
4. Resolver o problema do escoamento de Hagen-Poiseuille através de um canal quarto-elíptico utilizando as duas metodologias analíticas mencionadas.
5. Gerar gráficos e mapas de cores que ilustrem o comportamento do escoamento em cada ponto da seção transversal, para diferentes razões de aspecto.
6. Discutir, comparar e concluir a respeito dos resultados encontrados.

### 1.3 ESTRUTURA DO TRABALHO

O trabalho em tela possui sete capítulos, além de uma seção em anexo que traz, de maneira detalhada, o desenvolvimento de contas apresentadas ao longo do texto. Dito isto, constam no Projeto de Graduação os seguintes tópicos:

- **Capítulo 2:** Trata-se de uma revisão de literatura a cerca de assuntos relacionados ao estudo proposto. Neste, encontram-se informações referentes a trabalhos conduzidos na área da mecânica dos fluidos para escoamentos ao longo de dutos com seções transversais não-convencionais, mais especificamente as seções elípticas, semi-elípticas e setores circulares.
- **Capítulo 3:** Refere-se à formulação genérica do escoamento de Hagen-Poiseuille ao longo de um duto de seção transversal constante e à apresentação das ferramentas a serem utilizadas para que a solução analítica da seção quarto-elíptica seja obtida. Além disso, resolve-se o caso elíptico no seu sistema de coordenadas natural.
- **Capítulo 4:** Aborda-se a formulação matematicamente do problema a ser resolvido, evidenciando as equações governantes e suas condições de contorno.
- **Capítulo 5:** Apresentam-se as soluções analíticas obtidas pelos métodos de Fourier e da transformada finita de seno. Encontram-se as expressões dos parâmetros que descrevem o comportamento do escoamento: vazão, velocidade média,  $fRe$ , entre outros.

- **Capítulo 6:** Discussão dos resultados obtidos
- **Capítulo 7:** Resumo geral do trabalho, conclusão a respeito dos resultados encontrados, sugestão para trabalhos futuros e comentários finais.
- **Apêndice:** Encontram-se demonstrações e desenvolvimentos algébricos de maneira detalhada.

## 2 REVISÃO DE LITERATURA

Ainda não se encontram na literatura estudos analíticos envolvendo a solução do escoamento de Hagen-Poiseuille para um duto com seção transversal quarto-elíptica. Este fato faz com que a revisão de literatura deste trabalho seja baseada em seções transversais semelhantes, como a seção transversal elíptica, semi-elíptica e setor circular. Mesmo não sendo as mesmas seções transversais, esses trabalhos podem ser utilizados como base de comparação para os resultados obtidos para o duto de seção quarto-elíptica, uma vez que se pode levar essa seção para os casos limites e resgatar os valores encontrados para as seções já encontradas na literatura.

### 2.1 SEÇÃO ELÍPTICA

Apesar do escoamento de Hagen-Poiseuille ser um tema bastante explorado na literatura para seções ditas convencionais, estudos envolvendo seções não-convencionais seguiram ritmos completamente diferentes. Um dos primeiros registros em que se encontram sobre soluções analíticas para escoamentos em dutos de seção não-convencionais estão dispostos no trabalho de Boussinesq (1868). Nesta oportunidade, Boussinesq encontrou a solução do escoamento de Hagen-Poiseuille para dutos de diversos tipos de seção transversal constante. Uma das seções analisadas pelo autor envolve o duto de seção transversal elíptica. Para solução desse problema, Boussinesq recorreu a uma hipótese matemática certa que possibilitou com que as equações que descrevem os parâmetros de interesse fossem encontradas sem a utilização do sistema de coordenadas natural.

É possível adicionar ainda mais complexidade à análise do escoamento de Hagen-Poiseuille ao se trabalhar com dutos curvilíneos. Verifica-se, com esse acréscimo, recirculação cruzada nos vórtices contra-rotativos. Esse fenômeno ocorre em decorrência da ação da força centrífuga atuante no escoamento (Dong e Ebadian, 1991). Um dos primeiros artigos a trazer essa proposta foi escrito por Dean (1927). Neste trabalho, o autor desenvolveu uma solução analítica para um escoamento movido por um gradiente de pressão através de um duto curvilíneo de seção transversal circular constante com vistas a comparar, qualitativamente, seus resultados com os encontrados experimentalmente por Eustice (1911). Entretanto, quantitativamente, Dean reconheceu que sua análise careceu de ferramentas mais poderosas para gerar dados mais precisos.

Inspirados pelos registros de Dean (1927), outros autores se dedicaram à análise desse mesmo problema, como se verifica nos trabalhos de Thomas e Walters (1965) e Srivastava (1980). No caso do artigo publicado por Thomas e Walters (1965), encontra-se o estudo analítico de um escoamento, em regime permanente, de um fluido viscoelástico através de um duto curvilíneo de seção elíptica movido por um gradiente de pressão. Neste documento, os autores conseguiram traçar as linhas de correntes e de trajetória do escoamento, o que possibilitou visualização do caminho percorrido pelas partículas de fluido nessas condições específicas. A Figura 2.1 ilustra

as linhas de trajetória e de corrente (regime permanente) para o escoamento com razão de aspecto entre o semi-eixo menor e maior igual a 0,5.

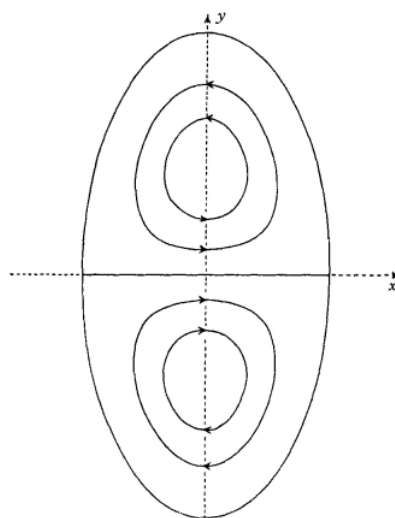


Figura 2.1: Linhas de trajetória para uma razão de aspecto de 0,5. Retirado de Thomas e Walters (1965).

Pouco depois, Topakoglu e Ebadian (1985) desenvolveram uma metodologia capaz de avaliar o escoamento em duto curvilíneo de seção transversal elíptica, intitulada: método da expansão dupla. Essa técnica até gerou expressões condizentes com os experimentos realizados, porém os valores eram limitados a um número finito de expansões realizadas no processo. Além disso, não se encontravam muitos resultados na literatura, para esse tipo de seção, para eventuais validações. Aproveitando essa lacuna, Dong e Ebadian (1991) propuseram um estudo numérico do problema para que um banco de dados mais preciso fosse gerado e colaborasse com trabalhos futuros. Para tanto, os autores recorreram ao método de diferenças finitas, ajustando o bordo do volume de controle para um domínio apropriado. A Figura 2.2 apresenta alguns dos gráficos plotados no trabalho.

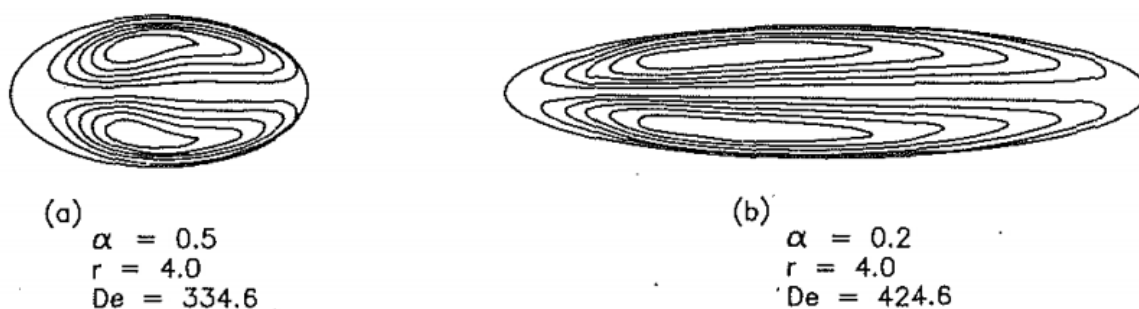


Figura 2.2: Resultado gráfico da análise numérica.  $\alpha$  corresponde à razão de aspecto,  $De$  ao número de Dean e  $r$  o raio de curvatura. Retirado de Dong e Ebadian (1991).

Posteriormente, Silva, Valle e Ziviani (1999) propuseram um estudo numérico para avaliar os efeitos térmicos e hidrodinâmicos do escoamento de Hagen-Poiseuille em dutos curvilíneos com seção transversal elíptica. Para tanto, os autores recorreram ao método de volumes Finitos somado ao ajuste do bordo molhado com o sistema de coordenadas apropriado. Dessa forma,

converteu-se um domínio com formato elíptico em um com formato retangular, de tal sorte que o custo computacional da simulação fosse diminuído. Entre os resultados que puderam ser extraídos dessa pesquisa, pode-se citar a obtenção do campo de velocidades adimensional na seção elíptica e a influência do número de Dean no posicionamento do ponto de velocidade adimensional máxima. Os autores concluíram que o aumento no número de Dean resulta em um deslocamento do ponto de velocidade adimensional máxima para um região cada vez mais externa em relação à curva (Figura 2.3).

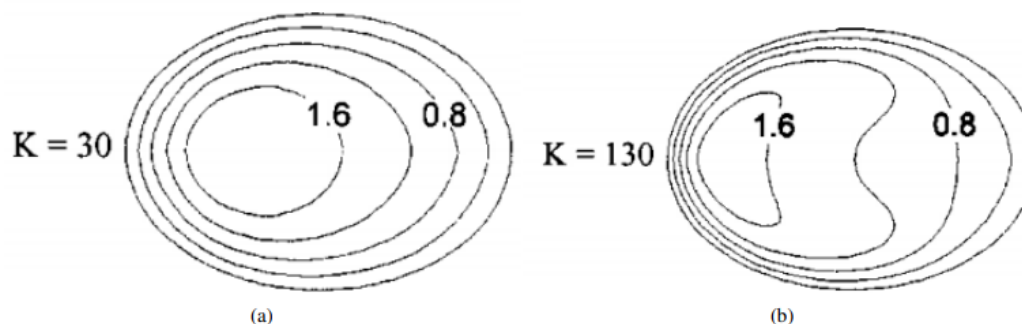


Figura 2.3: Campo de velocidade adimensional em uma seção elíptica com razão de aspecto  $\alpha = 0,7$ . Em relação ao número de Dean, segue que: (a)  $K = 30$  e (b)  $K = 130$ . Retirado de Silva, Valle e Ziviani (1999).

Pouco depois, Nikitin e Yakhot (2005) desenvolveram um estudo numérico, com base no modelo DNS (Direct numerical simulation), para um escoamento turbulento que ocorre ao longo de um canal com seção transversal elíptica. Para implementação desse modelo, os autores recorreram ao método IB (immersed-boundary) para mapear o domínio de interesse de maneira mais conveniente. A vantagem de se utilizar este método está na redução do custo computacional da simulação, uma vez que o domínio da seção transversal será convertido em um retângulo. Por outro lado, tem-se como desvantagem uma maior dificuldade em avaliar o comportamento do escoamento em pontos com quinas, mudanças bruscas, ou outras singularidades, por se tratarem de regiões que necessitam de um maior refinamento de malha. Para contornar esses impasses, faz-se necessária a interpolação dos valores obtidos nos nós correspondentes e um intenso monitoramento do processo para que a simulação retorne uma análise precisa. Entre os resultados obtidos, encontraram-se as curvas do campo de velocidades adimensional para diferentes razões de aspecto (Figura 2.4).

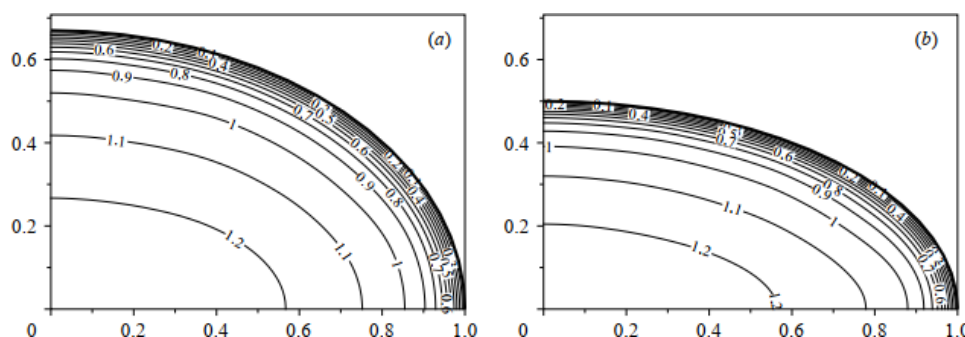


Figura 2.4: Campo de velocidade adimensional na direção axial em uma seção elíptica com razão de aspecto: (a)  $\alpha = 0,67$  e (b)  $\alpha = 0,5$ . Retirado de Nikitin e Yakhot (2005).

Apesar de soluções analíticas exatas terem sido obtidas para grande parte das seções transversais (circulares, elípticas, retangulares, entre diversas outras), ainda não se encontrava na literatura uma fórmula genérica capaz de solucionar várias seções de uma só vez variando apenas alguns índices. Foi pensando nessa possibilidade que Tamayol e Bahrami (2009) desenvolveram um estudo analítico com vistas a obter essa modelagem matemática. A metodologia consistiu em trabalhar com duas geometrias primitivas que permitissem com que geometrias derivadas fossem resgatadas a partir a inserção de índices. As seções primitivas são a hiper-elipse e o polígono regular. A Figura 2.7 apresenta algumas das geometrias derivadas da fórmula generalizada da hiper-elipse. Por sua vez, a Figura 2.6 ilustra algumas das seções passíveis de serem resgatadas a partir da generalização do polígono regular.

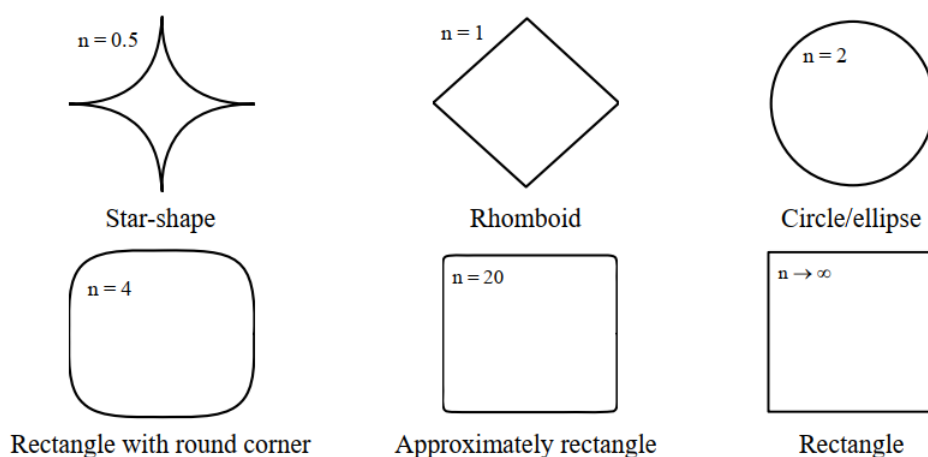


Figura 2.5: Geometrias derivadas da fórmula base da Hiper-elipse. Retirado de Tamayol e Bahrami (2009).

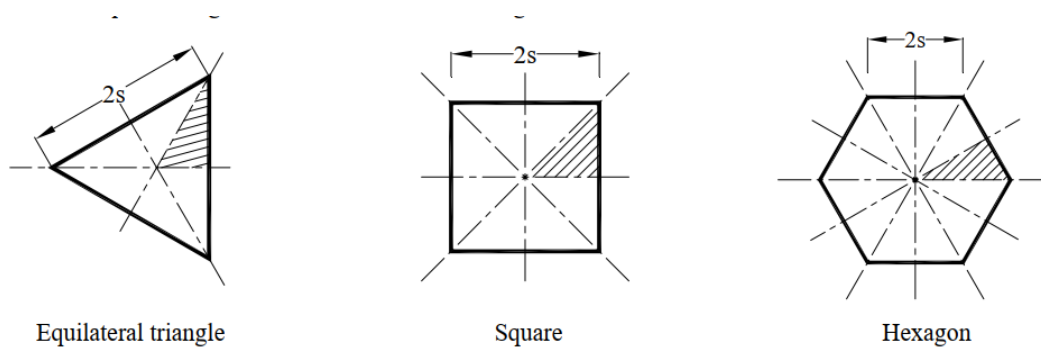


Figura 2.6: Geometrias derivadas da fórmula base do polígono regular. Retirado de Tamayol e Bahrami (2009).

Com essa modelagem, Tamayol e Bahrami (2009) conseguiram desenvolver expressões capazes de descrever o comportamento do escoamento ao longo da seção transversal, além de parâmetros como o  $fRe$  para várias razões de aspecto. A Figura 2.7 (a) apresenta o gráfico obtido pelos autores para as linhas de velocidade adimensional constantes em um duto de seção elíptica. Por sua vez, (b) traz os resultados obtidos para o parâmetro  $fRe$  para diferentes razões de aspecto.

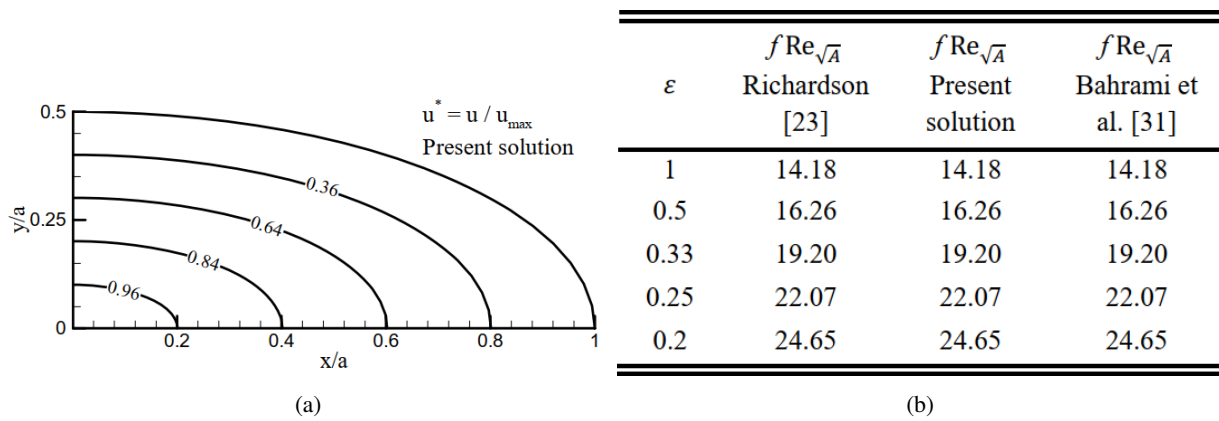


Figura 2.7: (a) Linhas com velocidades adimensionais constantes para o duto de seção elíptica. (b) Tabela com o  $fRe$  obtido para o duto de seção elíptica. Retirado de Tamayol e Bahrami (2009).

## 2.2 SEÇÃO SEMI-ELÍPTICA

Como dito no Capítulo 1, o trabalho de Alassar e Abushoshah (2012) inovou na literatura ao demonstrar uma solução analítica para o escoamento de Hagen-Poiseuille através um duto com seção transversal semi-elíptica constante. Fato é que outros artigos foram escritos com base nessa publicação. É o caso do trabalho feito por Wang (2015), que tinha como objetivo complementar o estudo desenvolvido por Alassar adotando, desta vez, como referencial de parede o semi-eixo menor. Com isso, o autor extraiu dados da velocidade média do escoamento, além das tensões cisalhantes máximas em torno do bordo molhado, tudo isso para diferentes razões de aspecto. A Figura 2.8 apresenta um gráfico contendo as linhas de velocidade constante no escoamento.

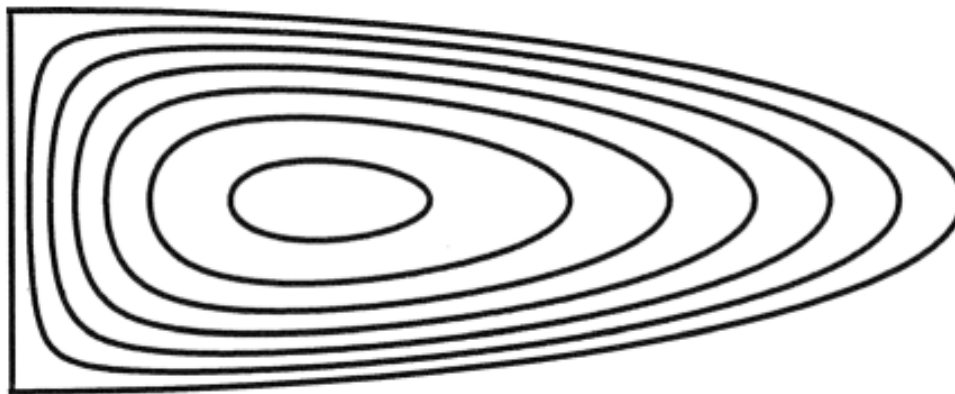


Figura 2.8: Linhas de velocidade constantes no escoamento estudado por Wang (2015).

Outro artigo que citou o trabalho de Alassar e Abushoshah (2012) foi desenvolvido por Mukherjee, Gupta e Chhabra (2017). Neste trabalho, os autores investigaram numericamente a transferência de calor por convecção forçada em um fluido viscoplástico passando através de dutos com diversos tipos de seção transversal, incluindo o duto semi-elíptico. Entre os diversos resultados obtidos, pode-se citar a obtenção de um gráfico (Figura 2.9) representando as linhas de



velocidade axial adimensional constantes para diferentes valores do índice  $n$  proposto na *Lei de Power*.

Assim como o trabalho de Mukherjee, Gupta e Chhabra (2017), a grande maioria dos trabalhos recentes conduzidos para escoamentos desenvolvidos em dutos de seção semi-elíptica tratam da análise de fenômenos da transferência de calor ao longo da estrutura. É o caso do artigo publicado por Alassar (2016), em que o autor estuda a transferência de calor por convecção forçada para um escoamento totalmente desenvolvido em um duto de seção semi-elíptica. Outro exemplo desta tendência diz respeito ao documento publicado por Sarkar, Biswas e Öztöp (2021), em que apresentam-se múltiplas soluções para transferência de calor por convecção natural para dutos de seção semielíptica.

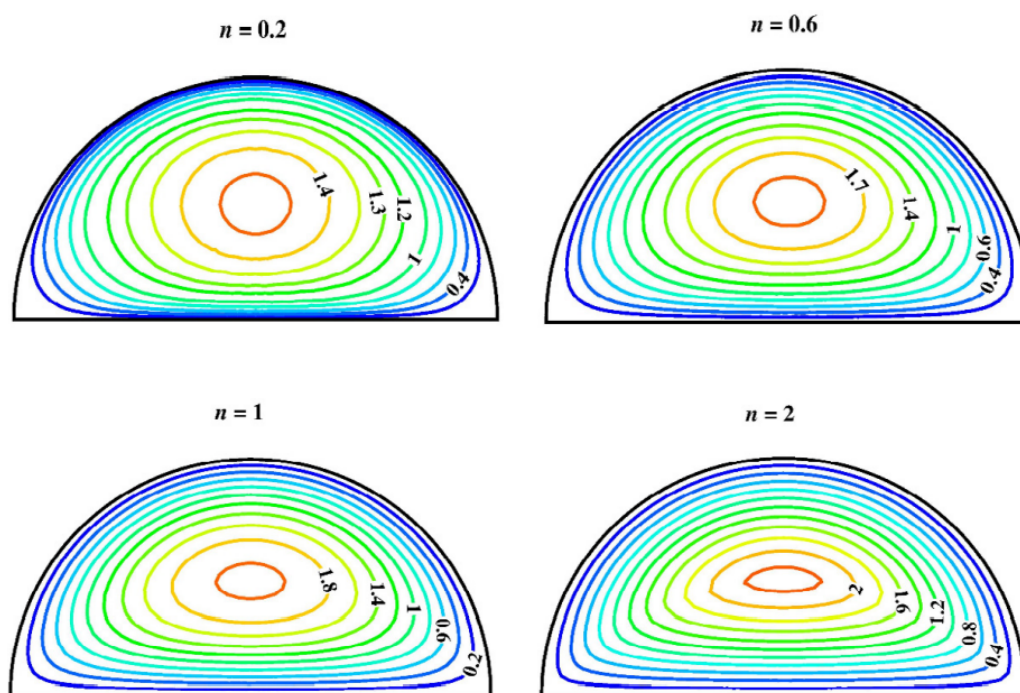


Figura 2.9: Linhas de velocidade axial adimensional para diferentes índices da Lei de Power. Retirado de Mukherjee, Gupta e Chhabra (2017).

Recentemente, Lopes e Siqueira (2022) completaram a literatura disponível para escoamentos envolvendo dutos com seção transversal semi-elíptica ao fornecerem soluções analíticas para os escoamentos de Poiseuille, movido por um gradiente de pressão, Couette, movido pelos efeitos de parede proporcionados por uma placa plana que se move a uma velocidade constante, e Couette-Poiseuille, sendo este a junção dos dois casos. Para solução desses problemas, os autores recorreram ao método da separação de variáveis. Em termos simples, escreveu-se a solução analítica dos problemas como o produto entre duas funções independentes, que podem ser encontradas em posse das condições de contorno. Com isso, foi possível obter expressões para parâmetros que descrevem o comportamento dos escoamentos mencionados, como o campo de velocidades, a velocidade média, a vazão, entre outros. A Figura 2.10 ilustra os campos de velocidade adimensional obtidos pelos pesquisadores para o escoamento de Couette-Poiseuille.

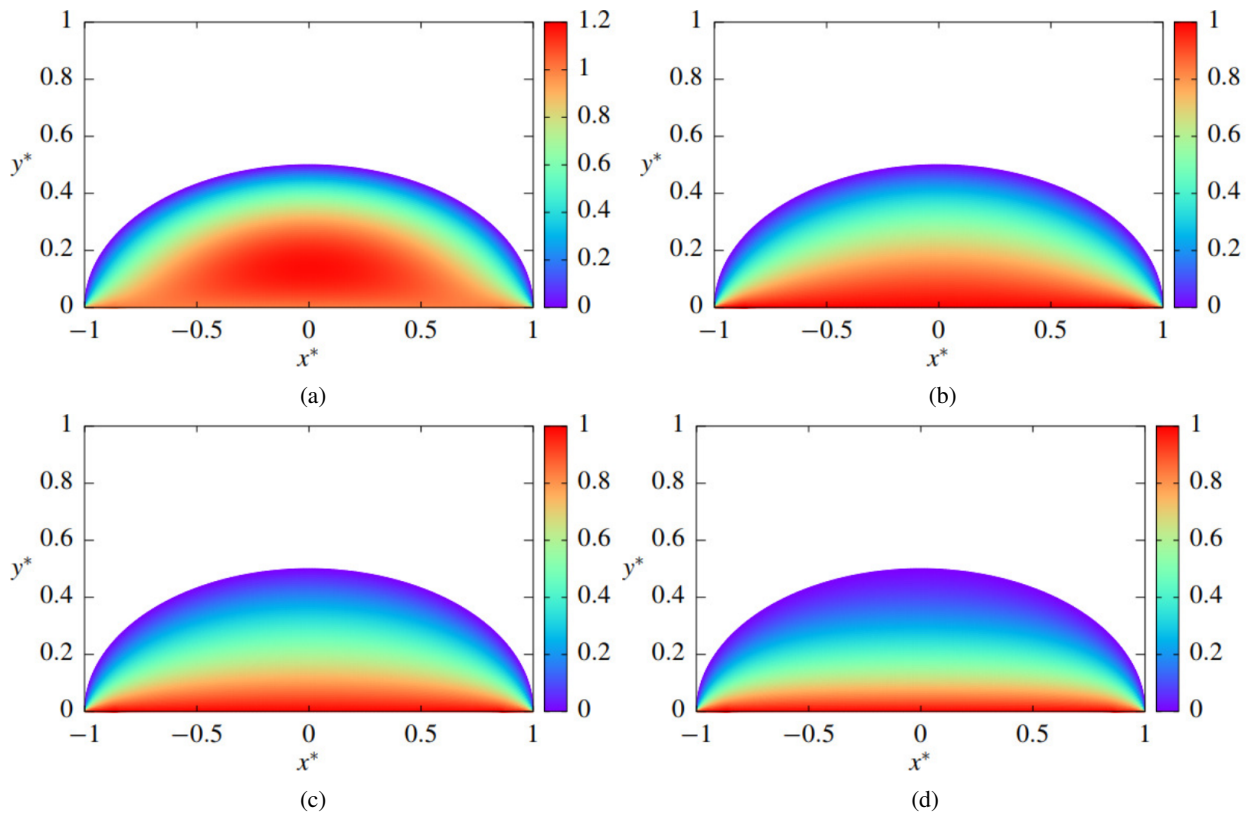


Figura 2.10: Campo de velocidade adimensional para o duto semi-elíptico com  $\alpha = 0,5$  sujeito a um gradiente de pressão adimensional igual a: (a)  $P = 20$ , (b)  $P = 5$ , (c)  $P = 0$  e (d)  $P = -5$ . Retirado de Lopes e Siqueira (2022).

### 2.3 SEÇÃO SETOR CIRCULAR

Estudos envolvendo escoamentos através de dutos de seção transversal quarto-circular carecem de atenção se levada em consideração a situação da literatura atual. Existem, entretanto, artigos que remetem à análise de escoamentos em seções ditas setores circulares (Figura 2.11).

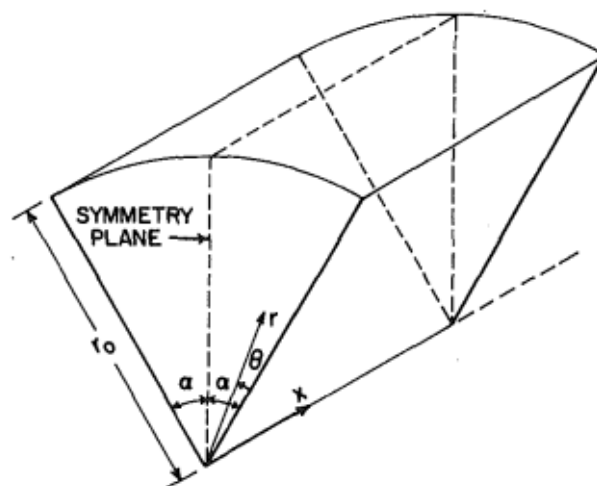


Figura 2.11: Geometria dos dutos de seção setor circular. Retirado de Soliman, Munis e Trupp (1982).

O trabalho numérico desenvolvido por Soliman, Munis e Trupp (1982) buscou contribuir com a diminuição do desconhecimento a respeito do tema. A solução do problema foi obtida com a abordagem de diferenças finitas para montagem das malhas. Entre os resultados apresentados pelos autores, pode-se citar a construção de um gráfico que representa a distribuição de velocidades no decorrer do desenvolvimento do escoamento (Figura 2.12), além da extração de valores para o  $fRe$  – parâmetro adimensional da queda de pressão – para diferentes razões de aspecto e ângulos de abertura  $\alpha$  (Figura 2.13). Esses dados serão úteis para eventuais comparações com o presente trabalho, uma vez que o setor circular com abertura de  $\alpha = 0.25$  corresponde ao caso limite da seção quarto-elíptica.

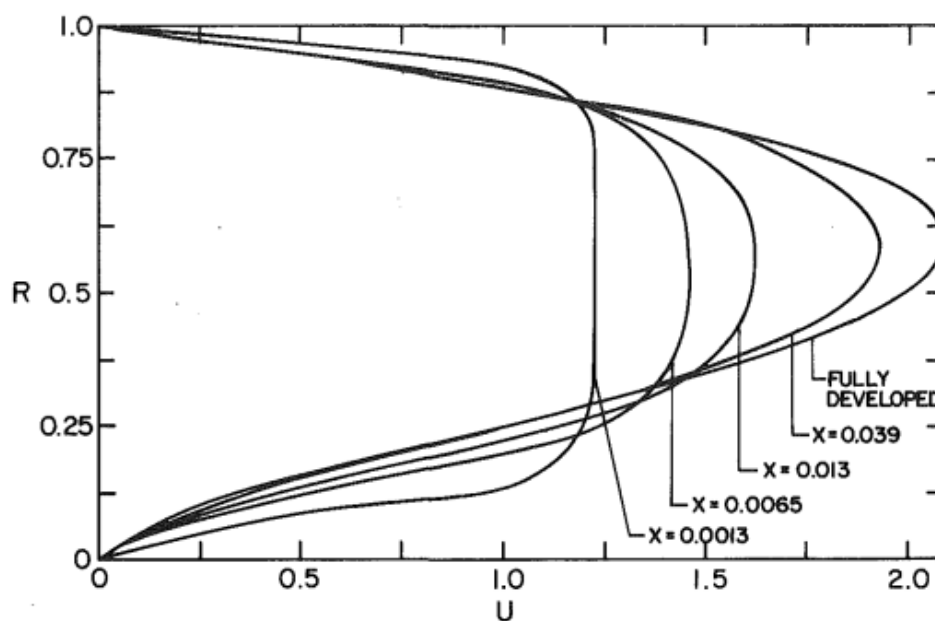


Fig. 3 Velocity distributions at symmetry plane for  $\alpha = \pi/4$

Figura 2.12: Distribuição de velocidades no desenvolvimento do escoamento. Retirado de Soliman, Munis e Trupp (1982).

Um dos artigos derivados do trabalho proposto por Soliman, Munis e Trupp (1982) foi escrito por Li, Hung e Tao (2002). Neste documento, Li, Hung e Tao (2002) propuseram um estudo numérico para avaliar o fenômeno da transferência de calor para um escoamento totalmente desenvolvido e em regime turbulento em um duto de seção setor anular. Como um dos objetivos desta análise, almejou-se realizar um comparativo entre modelos propostos para a descrição da transferência de momento em escoamentos turbulentos. Entre os resultados obtidos no estudo, pode-se citar a distribuição das linhas de velocidade e de temperatura adimensionais constantes (Figura 2.14).

Por sua vez, Mylavarapu, Sun e Christensen (2016) desenvolveram um estudo analítico, com validação computacional, para um escoamento em regime laminar parcialmente e totalmente desenvolvido através de um duto de seção transversal semicircular. Entre os objetivos do artigo, pode-se citar a construção de um gráfico contendo as linhas de velocidade axial adimensional constantes, além da obtenção de parâmetros do escoamento, tais como o fator de atrito de Fan-

X/Le	$\alpha = \pi/32$		$\alpha = \pi/16$		$\alpha = \pi/8$		$\alpha = \pi/4$	
	fRe	K	fRe	K	fRe	K	fRe	K
0.001	109.3	0.207	147.9	0.177	180.4	0.171	226.0	0.154
0.003	66.09	0.335	81.62	0.281	98.27	0.266	115.7	0.241
0.006	48.27	0.456	60.18	0.377	63.69	0.352	78.29	0.314
0.010	38.52	0.568	48.30	0.469	53.91	0.432	60.26	0.380
0.020	28.93	0.758	35.64	0.628	39.59	0.567	43.93	0.492
0.030	25.09	0.887	30.20	0.739	33.47	0.662	37.37	0.571
0.040	22.70	0.991	27.02	0.830	29.89	0.738	33.50	0.635
0.050	21.18	1.076	24.92	0.901	27.51	0.801	30.88	0.689
0.070	19.90	1.211	22.20	1.019	24.41	0.903	27.44	0.778
0.100	17.34	1.364	19.91	1.153	21.78	1.021	24.40	0.881
0.150	15.82	1.540	17.81	1.313	19.40	1.165	21.58	1.007
0.200	14.95	1.664	16.65	1.429	18.05	1.269	19.95	1.100
0.250	14.47	1.756	15.89	1.517	17.09	1.350	18.87	1.171
0.300	14.07	1.828	15.35	1.588	16.54	1.412	18.07	1.229
0.350	13.83	1.885	14.95	1.646	16.06	1.464	17.51	1.275
0.400	13.59	1.930	14.65	1.695	15.66	1.510	17.05	1.315
0.450	13.51	1.970	14.41	1.735	15.34	1.546	16.70	1.347
0.500	13.35	1.997	14.22	1.770	15.11	1.577	16.41	1.375
0.600	13.19	2.051	13.95	1.825	14.79	1.625	15.96	1.418
0.700	13.03	2.091	13.76	1.868	14.55	1.661	15.67	1.451
0.800	12.95	2.118	13.63	1.902	14.39	1.689	15.46	1.475
0.900	12.90	2.139	13.52	1.930	14.23	1.710	15.31	1.494
1.000	12.87	2.156	13.47	1.951	14.15	1.728	15.19	1.509

Figura 2.13: Tabela resumo dos resultados obtidos por Soliman, Munis e Trupp (1982).

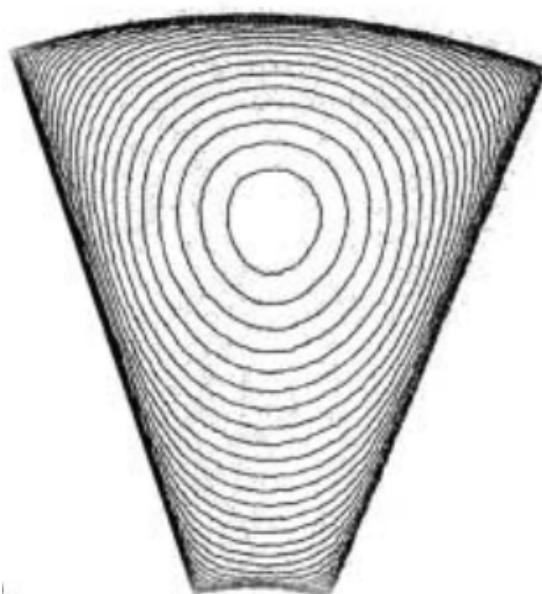


Figura 2.14: Linhas de velocidade e temperatura adimensionais constantes, para um duto setor anular, determinados por iteração. Retirado de Li, Hung e Tao (2002).

ning, os incrementos da queda de pressão e o número de Poiseuille para diferentes razões de aspecto. A Figura 2.15 apresenta as linhas de velocidade axial adimensional constantes para um duto de seção semicircular.

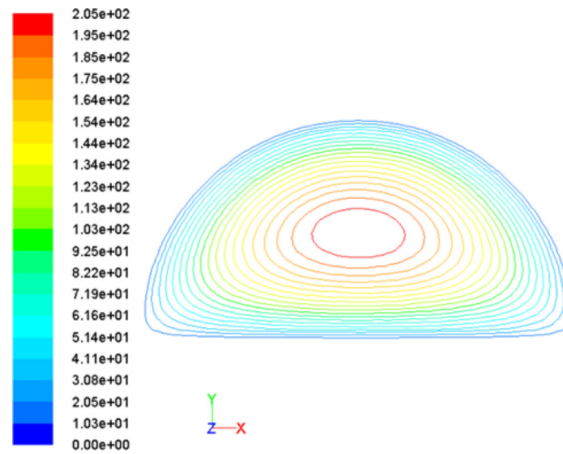


Figura 2.15: Linhas de velocidade axial constantes para um duto de seção semicircular. Retirado de Mylavarapu, Sun e Christensen (2016).

A Tabela 2.1 traz, cronologicamente, alguns dos estudos desenvolvidos no ramo de escoamentos internos ao longo das décadas.

Tabela 2.1: Sumário de estudos conduzidos no ramo de escoamentos internos ao longo das décadas.

Contribuição	Método	Referência
Soluções do escoamento de Hagen-Poiseuille para diversas seções	Analítico	Boussinesq (1868)
Dutos circulares curvilíneos	Experimental	Eustice (1911)
Dutos circulares curvilíneos	Analítico	Dean (1927)
Dutos setores circulares	Numérico: Diferenças finitas	Soliman, Munis e Trupp (1982)
Dutos elípticos curvilíneos	Analítico	Topakoglu e Ebadian (1985)
Dutos elípticos curvilíneos	Numérico: Diferenças finitas	Dong e Ebadian (1991)
Efeitos térmicos e hidrodinâmicos em dutos elípticos curvilíneos	Numérico Volumes finitos	Silva, Valle e Ziviani (1999)
Transferência de calor para um escoamento em regime turbulento através de um duto com seção setor anular	Numérico: SLUR e TDMA	Li, Hung e Tao (2002)
Escoamento turbulento em um canal elíptico	Numérico: DNS	Nikitin e Yakhot (2005)
Formulação por índices do Escoamento de Hagen-Poiseuille	Analítico: Geométrico	Tamayol e Bahrami (2009)
Duto semielíptico - referencial horizontal	Analítico: Método de Fourier	Alassar e Abushoshah (2012)
Duto semielíptico - referencial vertical	Analítico: Método de Fourier	Wang (2015)
Transferência de calor por convecção forçada em dutos semielípticos	Numérico: Newton Raphson	Mukherjee, Gupta e Chhabra (2017)
Transferência de calor por convecção natural em dutos semielípticos	Numérico: Volumes finitos	Sarkar, Biswas e Öztöp (2021)
Escoamento de Couette, Poiseuille e Couette-Poiseuille em um canal semielíptico	Analítico: Método de Fourier	Lopes e Siqueira (2022)

### 3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Em primeiro momento, apresentam-se as equações governantes para o escoamento de Hagen-Poiseuille em um duto de seção transversal constante, as hipóteses simplificadoras utilizadas no problema e algumas conclusões obtidas com o desenvolvimento destes termos. Na sequência, percorre-se o caminho traçado por Boussinesq (1868) para obtenção da solução analítica do escoamento de Hagen-Poiseuille através de um duto de seção elíptica. Posteriormente, encontra-se a mesma solução analítica, porém, utilizando o sistema de coordenadas natural da seção: o sistema de coordenadas elípticas. Faz-se então um comparativo entre as duas soluções com vistas a verificar a equivalência entre as duas abordagens. Por último, apresenta-se, detalhadamente, a *transformada seno finita de Fourier*, aplicando-a para o caso do escoamento através do duto de seção retangular. Apesar de não ser a seção a ser estudada neste trabalho, a metodologia a ser aplicada é a mesma para outros tipos de seção, de tal sorte que todo o algoritmo de resolução pode ser replicado em futuras análises. Objetiva-se, com isso, familiarizar o leitor com o uso desse recurso e mostrar o potencial de conversão de problemas complexos em expressões mais maleáveis.

#### 3.1 FORMULAÇÃO GERAL DO PROBLEMA

Como formulação genérica do problema, pode-se considerar o escoamento unidirecional, em regime permanente, de um fluido Newtoniano incompressível ao longo de um duto de seção transversal constante movido por um gradiente de pressão. A Figura 3.1 ilustra o caso de um duto com seção transversal elíptica constante, além de evidenciar o sistema de coordenadas adotado.

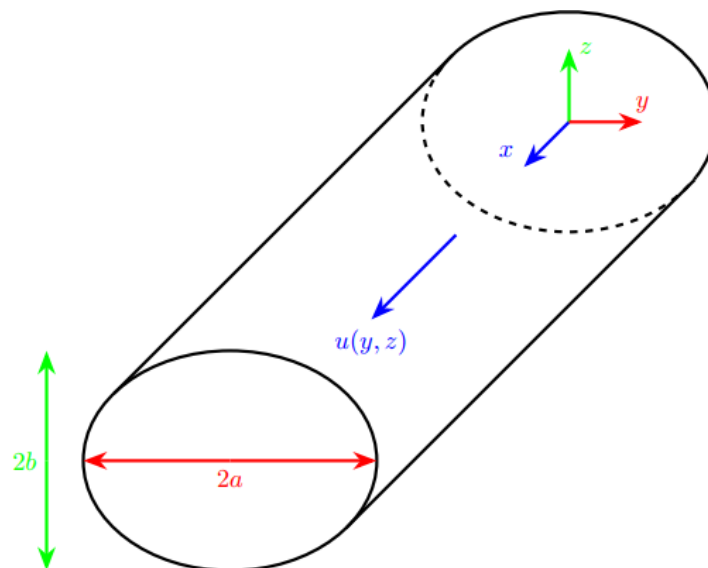


Figura 3.1: Duto de seção elíptica

## 3.2 CARACTERÍSTICAS DO PROBLEMA

De início, é oportuno destacar as principais hipóteses simplificadoras do problema. Entre elas, pode-se citar, primeiramente, a consideração de um escoamento em regime permanente. Isso significa que as propriedades físicas de interesse não variam localmente com o tempo. Ademais, considera-se a unidirecionalidade do problema, isto é, o escoamento se desenvolve ao longo do eixo axial do duto. Vale destacar, ainda, a desconsideração dos efeitos gravitacionais e das demais forças de campo, além de se trabalhar com um fluido Newtoniano incompressível que escoar em regime laminar.

## 3.3 EQUAÇÕES GOVERNANTES

As equações que governam o problema em apreço são as equações de Navier-Stokes e a equação da continuidade. Tratando primeiramente da equação da continuidade, pode-se dizer que essa é a expressão que mostra a independência da velocidade do escoamento com relação à coordenada axial do duto, no caso da Figura 3.1, a coordenada  $x$ . Matematicamente, procede-se da seguinte forma

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (3.1)$$

em que  $u$ ,  $v$  e  $w$  correspondem às componentes do campo vetorial de velocidade  $\mathbf{u}$ .

De maneira geral, como foi admitida a unidirecionalidade do problema, isto é, as componentes  $v$  e  $w$  sendo iguais a zero, a equação se reduz a

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (3.2)$$

o que implica dizer que a componente  $u$  da velocidade do escoamento não pode ser uma função de  $x$ . Consequentemente, tem-se que a função que descreve o comportamento de  $u$  é uma função apenas de  $y$  e de  $z$ . Matematicamente, tem-se que

$$u = u(y, z). \quad (3.3)$$

Em outras palavras, verifica-se bidimensionalidade do escoamento.

Continuando o estudo das equações governantes, tem-se as equações de Navier-Stokes, dada por

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u}, \quad (3.4)$$

em que  $\rho$  corresponde à massa específica do fluido,  $\mathbf{u}$  ao campo vetorial de velocidade do escoamento,  $p$  ao escalar de pressão e  $\mu$  à viscosidade do fluido. Perceba que a componente que conteria o vetor aceleração da gravidade não foi introduzida na equação, uma vez que a força gravitacional e as outras forças de campo foram desprezadas. Além dos parâmetros da equação,

faz-se oportuno apresentar também o operador derivada material, expresso por

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla. \quad (3.5)$$

De início, as equações serão utilizadas em coordenadas cartesianas, de tal forma que

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right), \quad (3.6)$$

$$\rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right), \quad (3.7)$$

$$\rho \left( \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right). \quad (3.8)$$

Com as hipóteses feitas anteriormente, principalmente no que se refere à unidirecionalidade –  $\mathbf{u} = (u, v = 0, w = 0)$  – e ao regime permanente, é fácil ver que essas expressões serão resumidas a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (3.10)$$

e

$$\frac{\partial p}{\partial z} = 0. \quad (3.11)$$

De imediato, pode-se fazer uma importante observação a respeito dessas equações. Percebe-se que foi possível anular a inércia, na Equação (3.9). Em outras palavras, pode-se dizer que a derivada material do vetor velocidade foi zerada, o que implica afirmar que há conservação da velocidade para cada partícula fluida do escoamento ao longo do tempo.

O resultado dessas três equações pode ser sintetizado por uma única expressão, dada por

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx}. \quad (3.12)$$

Outras duas informações podem ser extraídas da Equação (3.12). A primeira delas diz respeito à unidirecionalidade do gradiente de pressão, uma vez que  $p$  está variando apenas com relação ao eixo  $x$ , i.e.,  $p = p(x)$ . Além disso, é fácil perceber que os lados esquerdo e direito da Equação (3.12) estão em função de diferentes variáveis. Enquanto o campo vetorial de velocidades está sendo derivado em termos de  $y$  e de  $z$ , a pressão está sendo derivada apenas em  $x$ . Para que esta igualdade seja verdadeira, os termos a serem derivados devem ser constantes. Isso implica dizer que além de ser unidirecional, o gradiente de pressão do escoamento é constante.



### 3.4 CONDIÇÕES DE CONTORNO

Abordando as condições de contorno do problema, cumpre destacar que há apenas uma: a condição de não-escorregamento. Isto quer dizer que a velocidade do escoamento na interface parede-fluido é igual a zero.

### 3.5 PERFIL DE VELOCIDADE

Neste momento, desenvolve-se o caminho percorrido por Boussinesq (1868) para obtenção do perfil de velocidade do escoamento de Hagen-Poiseuille para um duto de seção transversal elíptica. Apresentada anteriormente, a Figura 3.1 ilustra um duto com seção transversal elíptica constante em que as variáveis  $a$  e  $b$  representam, respectivamente, os semi-eixos maior e menor da elipse. O fluido escoaxialmente através do duto, na direção da coordenada  $x$ .

Para descrever a explicação do tópico anterior em linguagem matemática, faz-se necessário recorrer à equação da elipse e realizar algumas manipulações algébricas

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1. \quad (3.13)$$

Sabendo que pela condição de contorno a velocidade no bordo molhado do duto deve ser igual a zero, propôs-se a seguinte solução

$$u(y, z) = K \left( 1 - \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} \right), \quad (3.14)$$

em que  $K$  é uma constante a ser determinada.

O próximo passo é utilizar essa proposição para o perfil de velocidade na equação de Navier-Stokes já trabalhada, representada pela Equação (3.9). Dessa forma, tem-se que tomando o Laplaciano da Equação (3.14) e aplicando o resultado em (3.9), chega-se na seguinte expressão

$$-2K \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx}. \quad (3.15)$$

Isolando a constante  $K$  da Equação (3.15) e substituindo o resultado na Equação (3.14), pode-se, finalmente, obter a expressão que descreve o perfil de velocidades para o escoamento em um duto de seção elíptica:

$$u(y, z) = -\frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \left( 1 - \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} \right) \quad (3.16)$$

Cumpre destacar que no caso de os semi-eixos  $a$  e  $b$  possuírem o mesmo comprimento, ou seja, adotando  $a = b = R$  e  $y = r \cos \theta$  e  $z = r \sin \theta$ , a Equação (3.16) retorna a expressão encontrada

para o escoamento de Hagen-Poiseuille em um duto com seção circular constante, expressa por

$$u(r, \theta) = -\frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dx} (R^2 - r^2). \quad (3.17)$$

### 3.6 VAZÃO

Conceitualmente, pode-se dizer que vazão corresponde à quantidade volumétrica que atravessa a seção transversal de um escoamento por unidade de tempo. De forma matemática, tem-se que a vazão é dada pela seguinte integral

$$Q = \iint_A u(y, z) dA.$$

Para o caso elíptico, em coordenadas polares, tem-se que a expressão que descreve a vazão é

$$Q = \int_0^{2\pi} \int_0^1 uabr \, dr \, d\theta. \quad (3.18)$$

O resultado dessa integração, detalhado em apêndice (I.1), é dado por

$$Q = -\frac{\pi}{4\mu} \frac{dp}{dx} \frac{a^3b^3}{a^2 + b^2}. \quad (3.19)$$

### 3.7 VELOCIDADE MÉDIA

A obtenção da expressão que retorna a velocidade média do escoamento é simples, bastando apenas dividir a vazão obtida na seção anterior pela área da seção transversal do duto em análise. Dessa forma, tem-se que a velocidade média para um duto com seção elíptica é dada por

$$\bar{u} = \frac{Q}{A} = -\frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dx} \frac{a^2b^2}{a^2 + b^2}. \quad (3.20)$$

### 3.8 ADIMENSIONALIZAÇÃO DE TERMOS

Inicialmente, é intuitivo pensar em analisar o problema com a simples substituição de parâmetros de entrada conhecidos. Essa metodologia pode até funcionar bem para casos específicos e bem comportados. Entretanto, para sintetizar e concatenar as informações obtidas pelas equações governantes em um único gráfico, é útil recorrer à adimensionalização de termos.

Cumprе destacar que não existe uma única maneira de adimensionalizar expressões, de tal forma que deve-se buscar a maneira mais conveniente de se trabalhar com essa ferramenta. Isso

abre espaço para introduzir o raciocínio adotado na adimensionalização da seção do problema em tela, ilustrado na Figura 3.1.

A ideia é fixar o semi-eixo maior e fazer com que o semi-eixo menor varie, possibilitando avaliar a geometria com base no comprimento característico da elipse. Esse comprimento característico é, resumidamente, a razão entre os semi-eixos. Para a análise em questão, é desejável que essa razão esteja dentro do intervalo entre 0 e 1.

Partindo para a álgebra, primeiramente definiu-se as escalas de adimensionalização

$$u = U u^*, \quad y = a y^*, \quad z = a z^*.$$

Substituindo essas escalas na Equação Governante (3.9), obteve-se

$$\frac{U}{a^2} \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} + \frac{U}{a^2} \frac{\partial^2 u^*}{\partial z^{*2}} = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx}. \quad (3.21)$$

Colocando os termos comuns em evidência, pode-se reescrever a Equação (3.21) como

$$\frac{U}{a^2} \left( \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial z^{*2}} \right) = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx}, \quad (3.22)$$

ou ainda

$$\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial z^{*2}} = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} \frac{a^2}{U}. \quad (3.23)$$

Para que o semi-eixo maior fique fixado no valor unitário, é conveniente escolher a expressão de  $U$  como sendo

$$U = -\frac{a^2}{\mu} \frac{dp}{dx}. \quad (3.24)$$

Vale destacar que o sinal negativo consta na escala de adimensionalização para que o escoamento ocorra na direção positiva do eixo  $x$ .

Dessa forma, fica fácil constatar que a equação governante na sua forma adimensional é representada pela expressão

$$\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial z^{*2}} = -1. \quad (3.25)$$

Em termos mais simples, isso significa que a análise da situação problema estará fixada com relação ao semi-eixo maior e variando com relação ao semi-eixo menor, de tal forma que quando  $b$  tender a zero, a análise retornará ao problema de um escoamento entre placas paralelas e quando  $b$  se igualar ao valor de  $a$ , tem-se como retorno o escoamento e Hagen-Poiseuille para um duto de seção circular constante.

Feita toda essa dedução, pode-se utilizar esse resultado de  $U$  para adimensionalizar, também, as expressões encontradas para o perfil de velocidades e para a velocidade média, de tal forma

que a novas equações são dadas, respectivamente, por

$$u^*(y^*, z^*) = -\frac{1}{2(1 + \alpha^2)} (\alpha^2 y^{*2} + z^{*2} - \alpha^2) \quad (3.26)$$

e

$$\bar{u}^* = \frac{1}{4} \left( \frac{\alpha^2}{1 + \alpha^2} \right). \quad (3.27)$$

É oportuno apresentar a simbologia matemática adotada para representar o comprimento característico da elipse, comentado a pouco. Matematicamente, essa razão é definida por

$$\alpha = \frac{b}{a}.$$

### 3.9 RESOLUÇÃO NO SISTEMA DE COORDENADAS ELÍPTICO

Nesta seção, objetiva-se resolver o mesmo problema proposto por Boussinesq (1868), isto é, a obtenção da solução analítica do escoamento de Hagen-Poiseuille para um duto de seção transversal elíptica, porém, desta vez, recorrendo ao sistema de coordenadas natural da seção: as coordenadas elípticas. Dessa forma, considere o escoamento de um fluido Newtoniano incompressível movido por um gradiente de pressão ao longo de um duto de seção transversal elíptico constante. A Figura 3.2 ilustra a seção transversal a ser trabalhada e sua condição de contorno na parede.

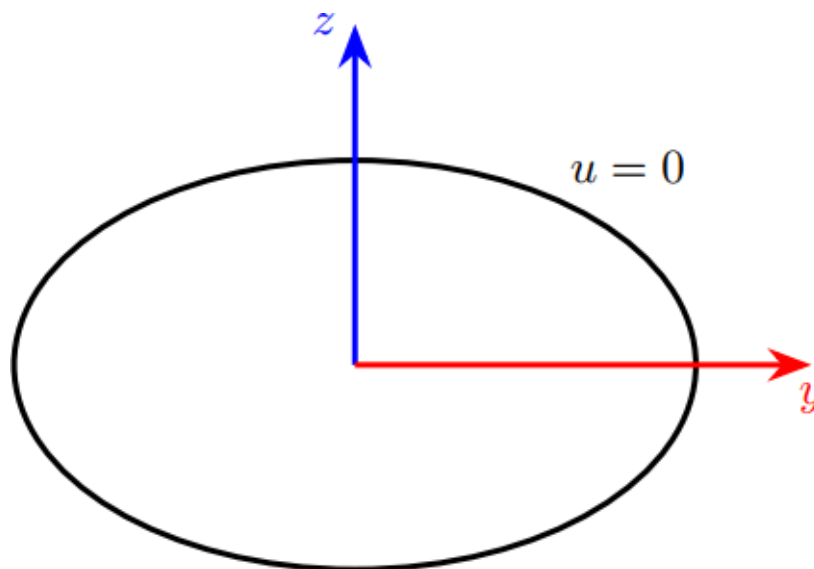


Figura 3.2: Seção elíptica por inteiro e sua condição de contorno.

Vale comentar que, a partir desta seção, todos os termos trabalhados se encontram na sua forma adimensional, a não ser que se mencione o contrário. Dessa forma, pode-se proceder com o desenvolvimento matemático com uma notação menos carregada. Dito isto, inicia-se o

desenvolvimento da solução analítica partindo da equação governante do problema: a equação de Poisson, sendo expressa por

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -1. \quad (3.28)$$

Por sua vez, a condição de contorno, em coordenadas cartesianas, corresponde à própria condição de não-escorregamento no bordo molhado da seção, ou seja

$$u = 0. \quad (3.29)$$

Apresentado o problema em coordenadas cartesianas, é oportuno introduzir as etapas a serem percorridas para resolvê-lo em coordenadas elípticas. Inicialmente, objetiva-se converter a equação de Poisson em uma equação de Laplace. Isso se justifica pelo fato de que se a equação de Laplace for trabalhada no sistema de coordenadas apropriado, há possibilidade de operar matematicamente com a separação de variáveis, o que vem a facilitar as contas. Em seguida, determinam-se as condições de contorno necessárias para resolver a E.D.P.

A equação de Laplace, na sua forma adimensional, é expressa matematicamente como sendo

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0. \quad (3.30)$$

A diferença entre as equações de Poisson e de Laplace é essencialmente o termo de fonte do lado direito da expressão. Enquanto na Equação de Poisson (3.25) verifica-se um termo unitário, na Equação de Laplace (3.30) há um termo nulo. Para converter a equação de Poisson em uma de Laplace, há de se proceder com uma mudança de variáveis com vistas a anular esta constante unitária presente. Desta forma, com base no procedimento adotado por Langlois e Deville (1964), propõe-se a seguinte mudança de variáveis

$$u = A(y^2 + z^2) + \Phi(y, z) + B, \quad (3.31)$$

em que  $A$  e  $B$  correspondem a constantes e  $\Phi$  a uma variável escalar auxiliar que é função de  $y$  e  $z$ .

Aplicando a Equação (3.31) na Equação (3.28), tem-se que

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + 4A = -1. \quad (3.32)$$

É fácil perceber que para zerar a constante unitária deve-se proceder com

$$A = -\frac{1}{4}. \quad (3.33)$$

Feito isso, tem-se como resultado

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0. \quad (3.34)$$

Reescrevendo a Equação (3.31) assumindo a condição de não-escorregamento no bordo molhado (3.29), pode-se então obter a seguinte expressão

$$-\frac{1}{4}(y^2 + z^2) + \Phi(y, z) + B = 0. \quad (3.35)$$

Com isso,

$$\Phi(y, z) = \frac{1}{4}(y^2 + z^2) - B. \quad (3.36)$$

É importante frisar que esta Equação (3.36) se refere a uma condição de contorno válida apenas no bordo da elipse.

A partir deste ponto, pode-se recorrer às identidades que relacionam as coordenadas cartesianas com as coordenadas elípticas. Estas são dadas por

$$y = c \cosh \xi \cos \theta \quad (3.37)$$

e

$$z = c \sinh \xi \sin \theta, \quad (3.38)$$

em que

$$c = \sqrt{1 - \alpha^2}. \quad (3.39)$$

É oportuno destacar que o parâmetro  $\xi$  representa as diversas elipses presentes no plano elíptico para diferentes valores constantes de  $\xi$ . Nesta análise, entende-se como  $\xi_o$  a curva constante que representa o bordo molhado do duto a ser estudado. De maneira semelhante,  $\theta$  corresponde às diversas curvas hiperbólicas presentes para diferentes valores de  $\theta$  constantes. Além disso,  $c$  corresponde à distância do foco para o centro do sistema elíptico. A Figura 3.3 ilustra bem como se distribui esses sistema de coordenadas.

Feito isto, pode-se substituir as Equações (3.37) e (3.38) na Equação (3.36). Dessa forma, tem-se que

$$\Phi(\xi_o, \theta) = \frac{c^2}{4}(\cosh^2 \xi_o \cos^2 \theta + \sinh^2 \xi_o \sin^2 \theta) - B. \quad (3.40)$$

Aplicando as seguintes identidades trigonométricas,

$$\sinh^2 \xi_o = \frac{\cosh 2\xi_o - 1}{2}, \quad (3.41)$$

$$\cosh^2 \xi_o = \frac{\cosh 2\xi_o + 1}{2}, \quad (3.42)$$

$$\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}, \quad (3.43)$$

e

$$\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}, \quad (3.44)$$

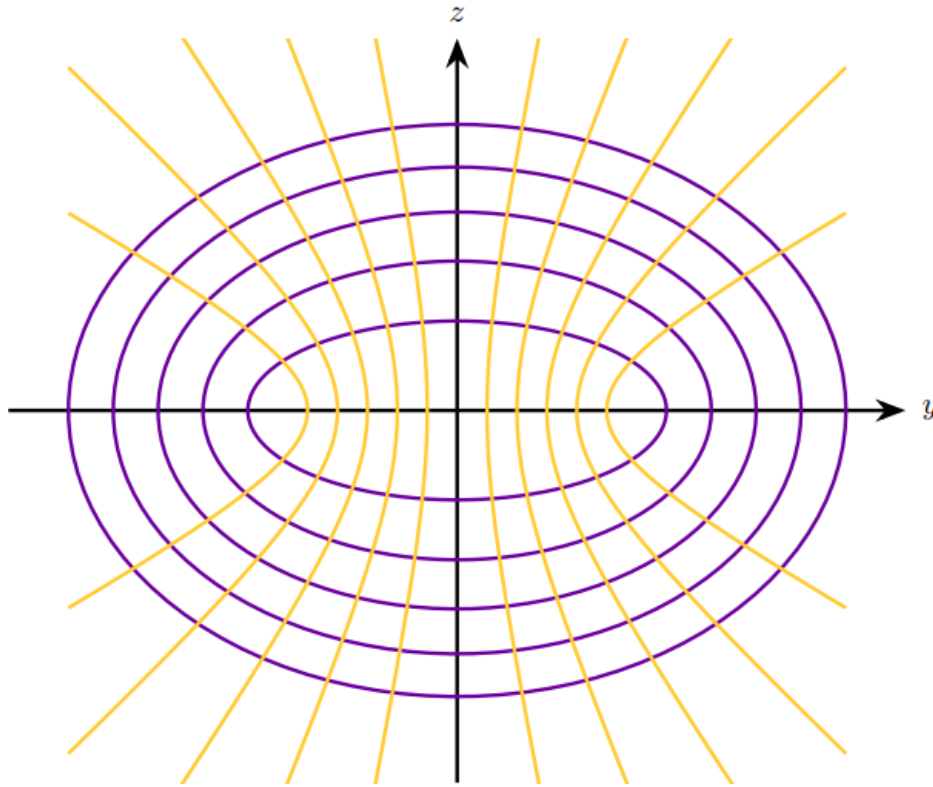


Figura 3.3: Sistema de coordenadas elípticas. Destacadas em roxo, as curvas de  $\xi$  constante, configurando elipses. Em amarelo, as curvas hiperbólicas de  $\theta$  constante.

possível reescrever esta expressão como sendo

$$\Phi(\xi_o, \theta) = \frac{c^2}{8} (\cosh 2\xi_o + \cos 2\theta) - B. \quad (3.45)$$

É fácil perceber que o único termo que varia na Equação (3.45) é o  $\cos 2\theta$ . Dessa forma, pode-se inteligentemente escolher uma constante  $B$  que anule o termo contendo o cosseno hiperbólico. Assim, adota-se

$$B = \frac{c^2}{8} \cosh 2\xi_o. \quad (3.46)$$

Com isso, tem-se que a condição de contorno no bordo molhado é dada por

$$\Phi(\xi_o, \theta) = \frac{c^2}{8} \cos 2\theta. \quad (3.47)$$

Sabe-se que para solucionar a equação de Laplace (3.34), no sistema de coordenadas elípticas, necessitam-se de quatro condições de contorno. Entretanto, apenas uma delas é conhecida de início. Dessa forma, deve-se adotar uma estratégia que vise entregar as condições de contorno restantes. Com isso, propõe-se que se trabalhe com a simetria da elipse, operando apenas com um quarto desta. A Figura 3.4 apresenta o resultado visual desta proposta.

Em primeiro momento, pode-se pensar que a Figura 3.4 apresenta apenas três condições de contorno. Porém, deve-se retomar as identidades que interligam o plano cartesiano com o plano

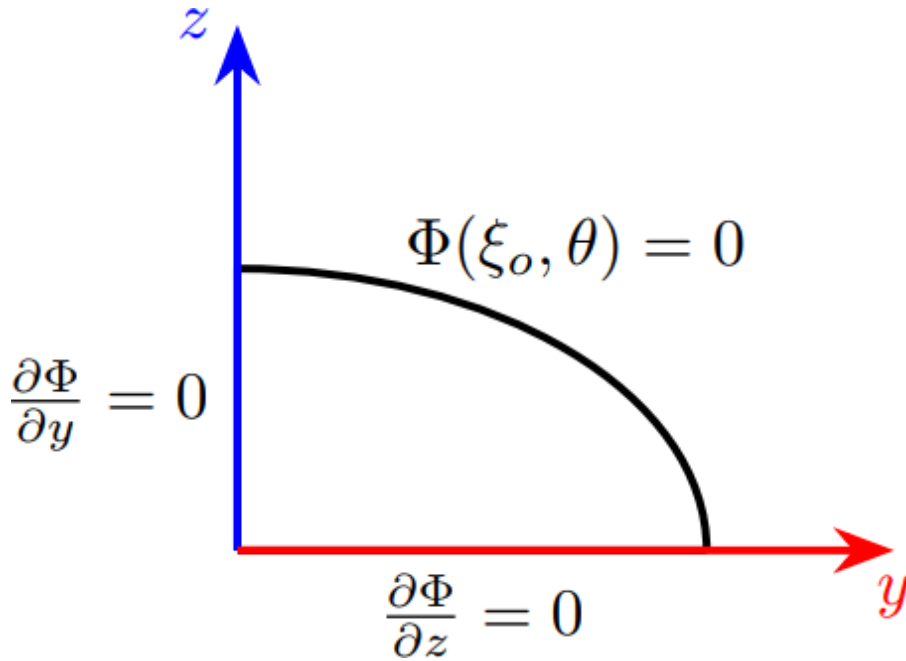


Figura 3.4: Seção quarto elíptica e informações do novo domínio.

elíptico para verificar que existem duas possibilidades para que a Equação (3.38) seja anulada: ou  $\sinh \xi = 0$ , ou  $\sin \theta = 0$ . Além dessas duas, existe também a possibilidade de anulação da Equação (3.37) quando o  $\cos \theta$  é igual a zero, ou seja, em  $\frac{\pi}{2}$ . Com isso, totalizam-se as quatro condições de contorno para solução da equação de Laplace.

É oportuno apresentar a conversão das derivadas parciais em coordenadas cartesianas, observadas na Figura 3.4, para coordenadas elípticas

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{c(\cosh^2 \xi - \cos^2 \theta)} \left( \sinh \xi \cos \theta \frac{\partial}{\partial \xi} - \cosh \xi \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \quad (3.48)$$

e

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{c(\cosh^2 \xi - \cos^2 \theta)} \left( \cosh \xi \sin \theta \frac{\partial}{\partial \xi} + \sinh \xi \cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right). \quad (3.49)$$

Sabendo que a coordenada  $y$  zera quando  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , pode-se utilizar a equivalência da derivada parcial de  $y$  em  $\Phi$  para obter a condição de contorno. Dessa forma, tem-se que

$$\frac{\partial \Phi(\xi, \frac{\pi}{2})}{\partial y} = \frac{1}{c(\cosh^2 \xi - \cos^2 \frac{\pi}{2})} \left( \sinh \xi \cos \frac{\pi}{2} \frac{\partial \Phi(\xi, \frac{\pi}{2})}{\partial \xi} - \cosh \xi \sin \frac{\pi}{2} \frac{\partial \Phi(\xi, \frac{\pi}{2})}{\partial \theta} \right) = 0. \quad (3.50)$$

Consequentemente, tem-se a seguinte condição de contorno

$$\frac{\partial \Phi(\xi, \frac{\pi}{2})}{\partial \theta} = 0. \quad (3.51)$$

De maneira análoga, pode-se encontrar duas novas condições de contorno trabalhando a co-



ordenada  $z$ , uma vez que existem duas possibilidades para este termo ser nulo. Fazendo primeiro  $\theta = 0$ , tem-se que

$$\frac{\partial\Phi(\xi, 0)}{\partial z} = \frac{1}{c(\cosh^2 \xi - \cos^2 0)} \left( \cosh \xi \sin 0 \frac{\partial\Phi(\xi, 0)}{\partial \xi} + \sinh \xi \cos 0 \frac{\partial\Phi(\xi, 0)}{\partial \theta} \right). \quad (3.52)$$

Com isso, a condição de contorno resultante é dada por

$$\frac{\partial\Phi(\xi, 0)}{\partial \theta} = 0. \quad (3.53)$$

A última condição de contorno é dada para quando  $\xi = 0$ . Dessa forma, procede-se da seguinte maneira

$$\frac{\partial\Phi(0, \theta)}{\partial z} = \frac{1}{c(\cosh^2 0 - \cos^2 \theta)} \left( \cosh 0 \sin \theta \frac{\partial\Phi(0, \theta)}{\partial \xi} + \sinh 0 \cos \theta \frac{\partial\Phi(0, \theta)}{\partial \theta} \right). \quad (3.54)$$

Consequentemente, tem-se que a condição de contorno advinda desta expressão é dada por

$$\frac{\partial\Phi(0, \theta)}{\partial \xi} = 0. \quad (3.55)$$

Pode-se então reorganizar todas as quatro condições de contorno. São elas

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi(\xi_0, \theta) = \frac{c^2}{8} \cos 2\theta, \\ \frac{\partial\Phi(\xi, 0)}{\partial \theta} = 0, \\ \frac{\partial\Phi(\xi, \frac{\pi}{2})}{\partial \theta} = 0, \\ \frac{\partial\Phi(0, \theta)}{\partial \xi} = 0. \end{array} \right. \quad (3.56)$$

Além disso, pode-se obter a nova Equação de Laplace. De acordo com Arfken (2005), o Laplaciano em coordenadas elípticas é dado por

$$\nabla^2 = \frac{1}{h^2} \left( \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right), \quad (3.57)$$

em que  $h^2$  corresponde ao módulo do jacobiano resultante da mudança de variáveis, dado por

$$h^2 = c^2(\cosh^2 \xi - \cos^2 \theta). \quad (3.58)$$

Tem-se então que a nova Equação de Laplace, em coordenadas elípticas, pode ser expressa da seguinte forma

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial \theta^2} = 0. \quad (3.59)$$

Em síntese, observa-se que foi possível sair de uma equação de Laplace em coordenadas cartesianas e chegar em uma equação de Laplace em coordenadas elípticas. A grande vantagem deste processo é que uma vez adotado o sistema de coordenadas natural da seção, o domínio que antes era elíptico passa a ser retangular, o que permite a simplificação das operações matemáticas. A Figura 3.5 ilustra este intercâmbio entres os domínios.

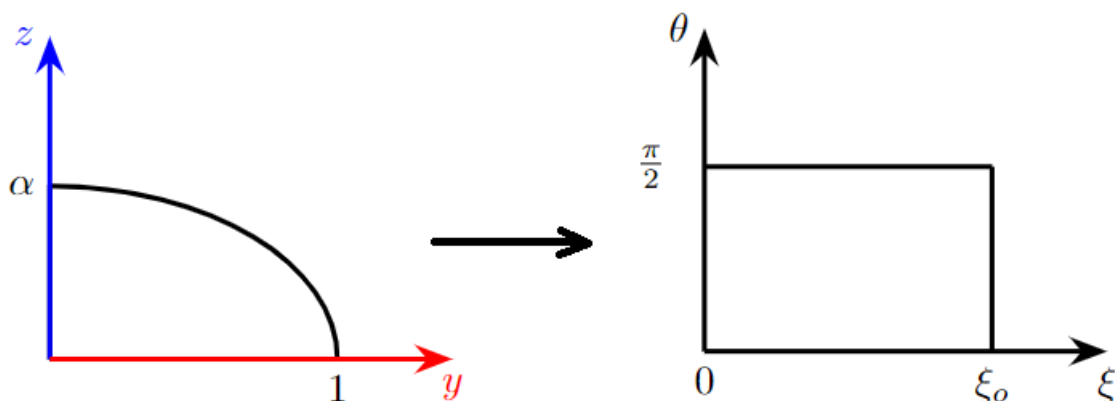


Figura 3.5: Intercâmbio entre os domínios.

Em posse da Equação de Laplace e de suas condições de contorno, pode-se encontrar a solução para a variável escalar  $\Phi$ . Sabe-se que, ao se trabalhar com o sistema de coordenadas natural da seção, é possível abordar o problema com base na técnica de separação de variáveis. Em outras palavras, pode-se escrever o parâmetro a ser resolvido em termos de um produto entre duas funções independentes, da seguinte forma

$$\Phi(\xi, \theta) = F(\xi)G(\theta). \quad (3.60)$$

Aplicando as condições de contorno expressas no Sistema (3.56), tem-se que

$$\begin{cases} F(\xi_0)G(\theta) = \frac{e^2}{8} \cos 2\theta, \\ F(\xi)G'(0) = 0, \\ F(\xi)G'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \\ F'(0)G(\theta) = 0. \end{cases} \quad (3.61)$$

Propondo  $G(\theta) = \cos 2\theta$ , tem-se que sua derivada será dada por  $G'(\theta) = -2 \sin 2\theta$ . Esta proposta atende à solução quando impostas as condições de contorno  $\frac{\partial \Phi(\xi, 0)}{\partial \theta} = 0$  e  $\frac{\partial \Phi(\xi, \frac{\pi}{2})}{\partial \theta} = 0$ , uma vez que a função  $\sin 2\theta$  se anula nos pontos 0 e  $\frac{\pi}{2}$ .

Para encontrar a função  $F(\xi)$ , recorre-se à própria Equação de Laplace, operando da seguinte maneira

$$\frac{\partial^2 F(\xi) \cos(2\theta)}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 F(\xi) \cos(2\theta)}{\partial \theta^2} = 0. \quad (3.62)$$

Consequentemente,

$$\frac{d^2 F(\xi)}{d\xi^2} \cos(2\theta) - 4F(\xi) \cos(2\theta) = 0, \quad (3.63)$$

ou seja,

$$\frac{d^2 F(\xi)}{d\xi^2} - 4F(\xi) = 0. \quad (3.64)$$

A solução desta E.D.O de segunda ordem é expressa por

$$F(\xi) = C_1 e^{2\xi} + C_2 e^{-2\xi}, \quad (3.65)$$

em que  $C_1$  e  $C_2$  são constantes a serem determinadas.

A Equação (3.65) pode ser reescrita, de maneira equivalente, em termos de cosseno e seno hiperbólico, da seguinte forma

$$F(\xi) = P \cosh 2\xi + Q \sinh 2\xi, \quad (3.66)$$

em que  $P$  e  $Q$  constam como novas constantes a serem encontradas.

Do sistema de Equações (3.61), pode-se tirar a informação de que  $F'(0) = 0$ . Com isso, tem-se que

$$F'(0) = -2P \sinh 0 + 2Q \cosh 0 = 0, \quad (3.67)$$

o que implica em

$$Q = 0. \quad (3.68)$$

Percebe-se então que  $F(\xi)$  se reduz a

$$F(\xi) = P \cosh 2\xi. \quad (3.69)$$

Aplicando a condição de contorno  $F(\xi_o)G(\theta) = \frac{c^2}{8} \cos 2\theta$ , segue que

$$P \cosh 2\xi_o \cos 2\theta = \frac{c^2}{8} \cos 2\theta \quad (3.70)$$

Isolando  $P$ , encontra-se

$$P = \frac{c^2}{8 \cosh 2\xi_o}. \quad (3.71)$$

Substituindo a Equação (3.71) na Equação (3.69), pode-se obter a expressão final para  $F(\xi)$

$$F(\xi) = \frac{c^2 \cosh 2\xi}{8 \cosh 2\xi_o}. \quad (3.72)$$

Tendo os resultados de  $F(\xi)$  e  $G(\theta)$ , é possível encontrar a solução para a variável  $\Phi$ , expressa por

$$\Phi(\xi, \theta) = \frac{c^2 \cosh 2\xi \cos 2\theta}{8 \cosh 2\xi_o} \quad (3.73)$$

O último passo antes da obtenção da solução analítica para o escoamento de Hagen-Poiseuille ao longo de duto de seção transversal elíptica constante é substituir a expressão encontrada para  $\Phi$  (3.73) na equação do perfil de velocidades expressa anteriormente por (3.31). Com isso, tem-se que

$$u = -\frac{c^2}{4}(\cosh^2 \xi \cos^2 \theta + \sinh^2 \xi \sin^2 \theta) + \frac{c^2 \cosh 2\xi \cos 2\theta}{8 \cosh 2\xi_o} + \frac{c^2}{8} \cosh 2\xi_o. \quad (3.74)$$

Trabalhando com as identidades trigonométricas apresentadas nas Equações (3.41), (3.42), (3.43) e (3.44), pode-se reescrever a Equação (3.74) da seguinte forma

$$u = \frac{-c^2}{4} \left[ \frac{(\cosh 2\xi_o + 1)(1 + \cos 2\theta)}{2} + \frac{(\cosh 2\xi_o - 1)(1 - \cos 2\theta)}{2} \right] + \frac{c^2 \cosh 2\xi \cos 2\theta}{8 \cosh 2\xi_o} + \frac{c^2}{8} \cosh 2\xi_o. \quad (3.75)$$

Manipulando algebricamente, chega-se em

$$u = \frac{c^2}{8 \cosh 2\xi_o} (\cosh^2 2\xi_o + \cosh 2\xi \cos 2\theta - \cosh 2\xi_o \cosh 2\xi - \cos 2\theta \cosh 2\xi_o), \quad (3.76)$$

donde segue que

$$u = \frac{c^2}{8 \cosh 2\xi_o} (\cosh 2\xi_o - \cos 2\theta)(\cosh 2\xi_o - \cosh 2\xi). \quad (3.77)$$

Apesar da Equação (3.77) já mapear a velocidade do escoamento em cada ponto da seção transversal da elipse, faz-se oportuno obter também uma expressão para a velocidade máxima em termos da razão de aspecto ( $\alpha$ ). Sabe-se que essa velocidade máxima ocorre no centro do duto, representado pelas coordenadas ( $\xi = 0, \theta = \frac{\pi}{2}$ ). Nessas condições, a Equação (3.77) se reduz a

$$u_{\text{máx}} = \frac{c^2}{8 \cosh 2\xi_o} (\cosh 2\xi_o + 1)(\cosh 2\xi_o - 1). \quad (3.78)$$

Recorrendo às identidades trigonométricas (3.41) e (3.42), é fácil perceber que

$$(\cosh 2\xi_o + 1)(\cosh 2\xi_o - 1) = 4 \sinh^2 \xi_o \cosh^2 \xi_o. \quad (3.79)$$

Substituindo (3.79) em (3.78), tem-se que

$$u_{\text{máx}} = \frac{c^2}{2 \cosh 2\xi_o} \sinh^2 \xi_o \cosh^2 \xi_o. \quad (3.80)$$

Dado que (detalhado em Apêndice I.2)

$$\sinh^2 \xi_o = \frac{\alpha^2}{1 - \alpha^2} \quad (3.81)$$

e

$$\cosh^2 \xi_o = \frac{1}{1 - \alpha^2}, \quad (3.82)$$

e recorrendo às identidades expressas nas Equações (3.39) e (3.42), pode-se chegar na expressão que indica a velocidade máxima do escoamento em termos da razão de aspecto

$$u_{\text{máx}} = \frac{\alpha^2}{2(1 + \alpha^2)}. \quad (3.83)$$

Outro parâmetro que será objeto de análise é a vazão em termos da razão de aspecto. Para determinar essa expressão, alguns passos devem ser percorridos. Inicialmente, multiplica-se a Equação (3.77), que indica a velocidade do escoamento em coordenadas elípticas, pelo módulo do Jacobiano decorrente da mudança de variáveis, já introduzido na Equação (3.58). O resultado dessa operação é dado por

$$u_{cor} = \frac{c^4(\cosh^2 \xi - \cos^2 \theta)}{8 \cosh 2\xi_o} (\cosh 2\xi_o - \cos 2\theta)(\cosh 2\xi_o - \cosh 2\xi), \quad (3.84)$$

em que  $u_{cor}$  corresponde à velocidade já corrigida pelo jacobiano da transformação. Realizando algumas distributivas, pode-se obter

$$u_{cor} = \frac{c^4(\cosh^2 \xi - \cos^2 \theta)}{8} \left( \cosh 2\xi_o + \frac{\cosh 2\xi \cos 2\theta}{\cosh 2\xi_o} - \cosh 2\xi - \cos 2\theta \right). \quad (3.85)$$

Recorrendo às identidades trigonométricas tratadas nas Equações (3.42) e (3.44), chega-se em

$$u_{cor} = \frac{c^4}{8} \frac{(\cosh 2\xi_o + 1 - \cos 2\theta - 1)}{2} \left( \cosh 2\xi_o + \frac{\cosh 2\xi \cos 2\theta}{\cosh 2\xi_o} - \cosh 2\xi - \cos 2\theta \right). \quad (3.86)$$

Efetuada as devidas manipulações algébricas, obtém-se a seguinte expressão

$$u_{cor} = \frac{c^4}{16} \left[ \cosh 2\xi \cosh 2\xi_o + \frac{\cosh^2 2\xi \cos 2\theta}{\cosh 2\xi_o} - \cosh^2 2\xi - \cosh 2\xi_o \cos 2\theta - \frac{\cosh 2\xi \cos^2 2\theta}{\cosh 2\xi_o} + \cos^2 2\theta \right]. \quad (3.87)$$

O próximo passo é integrar a Equação (3.87), no domínio da elipse, de tal forma que seja retornada a vazão. Matematicamente,

$$Q = \int_0^{\xi_o} \int_0^{2\pi} u_{cor} d\theta d\xi, \quad (3.88)$$

ou ainda

$$Q = \int_0^{\xi_o} \int_0^{2\pi} \frac{c^4}{16} \left[ \cosh 2\xi \cosh 2\xi_o + \frac{\cosh^2 2\xi \cos 2\theta}{\cosh 2\xi_o} - \cosh^2 2\xi - \cosh 2\xi_o \cos 2\theta - \frac{\cosh 2\xi \cos^2 2\theta}{\cosh 2\xi_o} + \cos^2 2\theta \right] d\theta d\xi. \quad (3.89)$$

A resolução desta integral é encontrada detalhadamente no Apêndice I.3. Fato é que seu resultado é expresso por

$$Q = \frac{\pi c^4 \sinh^3 2\xi_o}{32 \cosh 2\xi_o}. \quad (3.90)$$

Partindo para a adimensionalização da vazão, pode-se reescrever a Equação (3.90) em termos da tangente hiperbólica, da seguinte forma

$$Q = \frac{\pi c^4}{32} \sinh^2 2\xi_o \tanh 2\xi_o. \quad (3.91)$$

Neste momento, duas propriedades da trigonometria hiperbólica são necessárias, sendo elas

$$\tanh (A + B) = \frac{\tanh A + \tanh B}{1 + \tanh A \tanh B} \quad (3.92)$$

e

$$\sinh (A + B) = \sinh A \cosh B + \sinh B \cosh A. \quad (3.93)$$

Recorrendo às identidades (3.92) e (3.93), tem-se que

$$Q = \frac{\pi c^4}{32} (4 \sinh^2 \xi_o \cosh^2 \xi) \left( \frac{2 \tanh \xi_o}{1 + \tanh^2 \xi_o} \right). \quad (3.94)$$

Simplificando, a expressão reduz-se a

$$Q = \frac{\pi c^4}{8} (\sinh^2 \xi_o \cosh^2 \xi) \left( \frac{2 \tanh \xi_o}{1 + \tanh^2 \xi_o} \right). \quad (3.95)$$

Recorrendo às identidades (3.39), (3.81), (3.82) e sabendo que

$$\tanh \xi_o = \alpha, \quad (3.96)$$

obtém-se

$$Q = \frac{\pi(1 - \alpha^2)^2}{8} \left[ \frac{\alpha^2}{(1 - \alpha^2)^2} \right] \left[ \frac{2\alpha}{1 + \alpha^2} \right], \quad (3.97)$$

donde segue que

$$Q = \frac{\pi \alpha^3}{4(1 + \alpha^2)}. \quad (3.98)$$

Aproveitando-se do resultado da vazão adimensional, pode-se ainda determinar a expressão da velocidade média, bastando apenas dividir a Equação (3.98) pela área da elipse já adimensionalizada. Na prática, tem-se que a área dimensional da elipse é dada por  $\pi$  vezes o produto entre os semi-eixos. Como estes foram adimensionalizados em termos de  $a$ , segue que a área adimensional é

$$A = \pi \left( \frac{a}{a} \right) \left( \frac{b}{a} \right), \quad (3.99)$$

ou ainda, em termos da razão de aspecto

$$A = \pi\alpha. \quad (3.100)$$

Finalmente, dividindo a Equação (3.98) pela Equação (3.100), obtém-se como resultado

$$\bar{u} = \frac{Q}{A} = \frac{\alpha^2}{4(1 + \alpha^2)}. \quad (3.101)$$

### 3.10 RESULTADOS DA SEÇÃO ELÍPTICA

Em primeiro momento, avaliou-se o comportamento da vazão em termos da razão de aspecto (Figura 3.6). A curva deste parâmetro adimensional apresentou comportamento crescente e não linear. Em outras palavras, é possível verificar que a vazão tende a aumentar cada vez mais à medida que a seção se aproxima do caso assintótico – a seção circular ( $\alpha = 1$ ). Ademais, percebe-se que quando a razão de aspecto assume valor unitário, obtém-se como resposta  $Q = 0,392699$ . Este resultado possui o mesmo valor que os dados encontrados na literatura para o escoamento de Hagen-Poiseuille em um duto com seção circular constante, o que valida a análise.

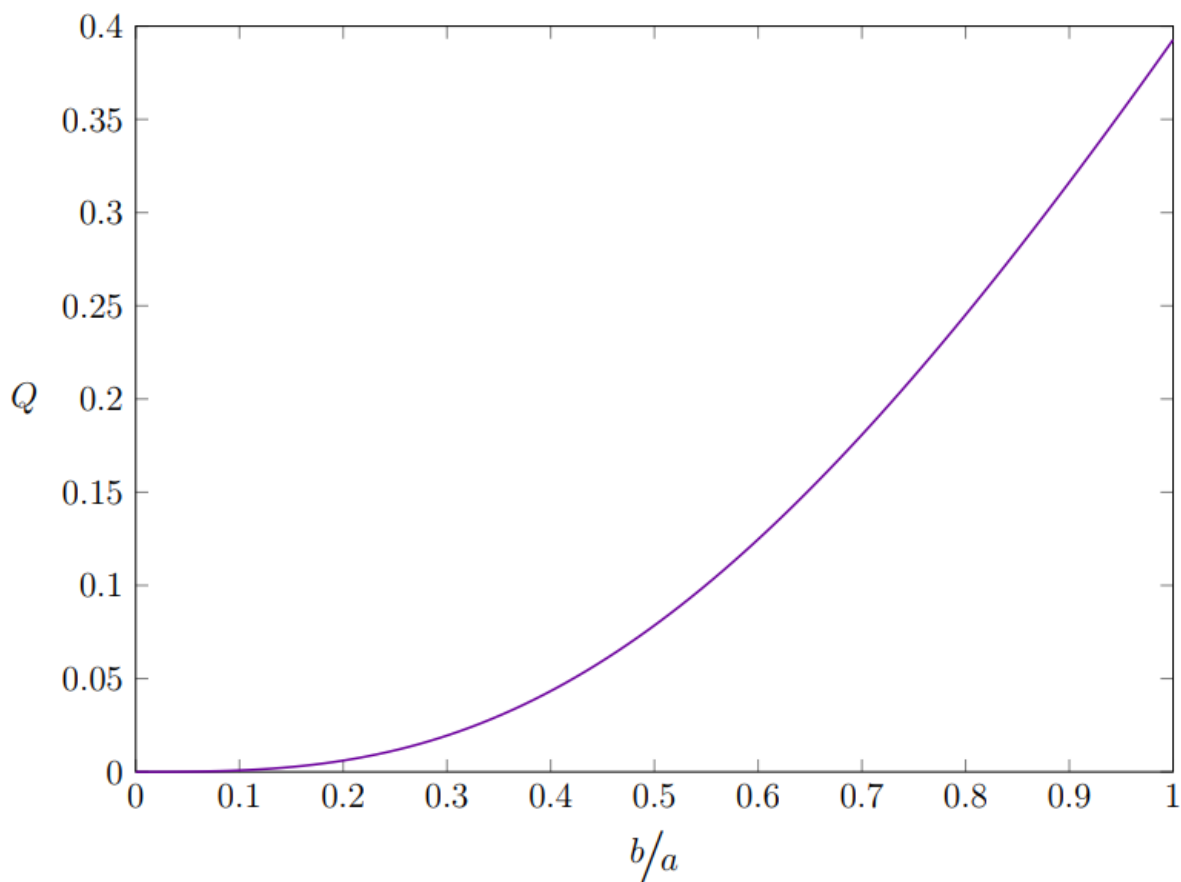


Figura 3.6: Vazão adimensional da seção elíptica em função da razão de aspecto.

Na Figura 3.7, outros dois parâmetros adimensionais foram investigados em termos da razão de aspecto: a velocidade máxima e a velocidade média. As curvas de velocidade máxima e média apresentaram comportamento crescente, porém, diferentemente da vazão, esses parâmetros possuem comportamento quase que linear a partir de  $\alpha = 0,3$ . Neste gráfico, percebe-se que quando a razão de aspecto se igualou a 1, a velocidade média assumiu valor de  $\bar{u} = \frac{1}{8}$ , enquanto a velocidade máxima resultou em  $u_{\text{máx}} = \frac{1}{4}$ , sendo este o limite assintótico da seção encontrado na literatura.

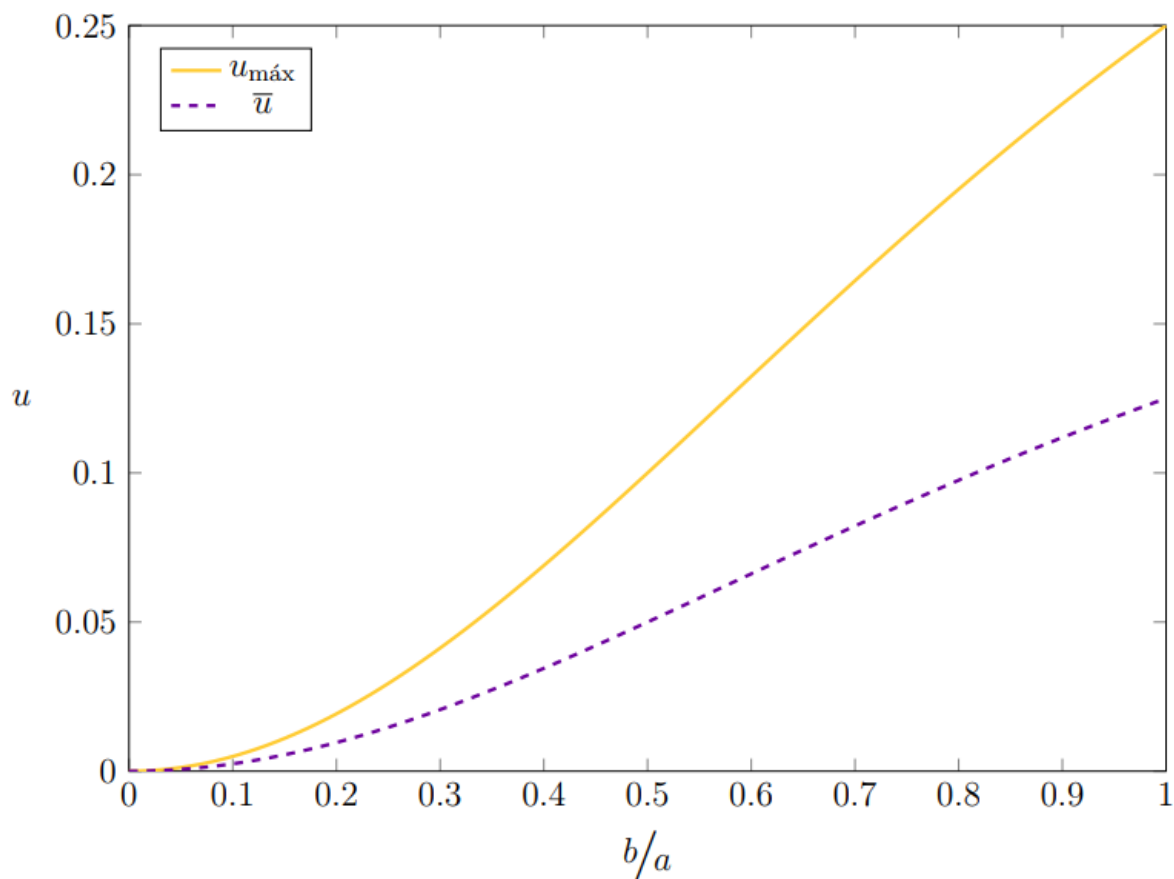


Figura 3.7: Velocidade máxima ( $u_{\text{máx}}$ ) e velocidade média ( $\bar{u}$ ) da seção elíptica em função da razão de aspecto.

A Figura 3.8 ilustra o mapa de cores contendo o campo de velocidades adimensional, no sistema de coordenadas cartesiano, referente ao escoamento de Hagen-Poiseuille em um duto com seção transversal elíptica. Foram investigadas quatro razões de aspecto diferentes, sendo elas: (a)  $\alpha = 0,25$ , (b)  $\alpha = 0,50$ , (c)  $\alpha = 0,75$  e (d)  $\alpha = 0,99$ .

Algumas características específicas do escoamento de Hagen-Poiseuille podem ser notadas na Figura 3.8. Em primeiro lugar, pode-se destacar a região de maior velocidade concentrada na faixa central da seção transversal. Ademais, no bordo molhado verificam-se regiões com velocidade nula, que é justificada pela presença da condição de não-escorregamento nas paredes do canal. Por último, em escoamentos desse gênero, espera-se que a velocidade adimensional aumente à medida que a razão de aspecto cresce. Isso se dá por conta da diminuição dos efeitos de paredes proporcionada pelo afastamento do domínio em relação ao centro da seção.



Tratando especificamente dos resultados numéricos, pode-se dizer que para uma razão de aspecto  $\alpha = 0,25$ , aferiu-se uma velocidade máxima de  $u_{\text{máx}} = 0,029$ . Ao aumentar a razão de aspecto para  $\alpha = 0,5$ , verificou-se que a velocidade máxima na seção subiu para  $u_{\text{máx}} = 0,100$ . Para uma razão de aspecto de  $\alpha = 0,75$ , obteve-se como resultado  $u_{\text{máx}} = 0,180$ . Por último, aplicou-se uma razão de aspecto  $\alpha = 0,99$ , resultando em uma velocidade máxima de  $u_{\text{máx}} = 0,247$ .

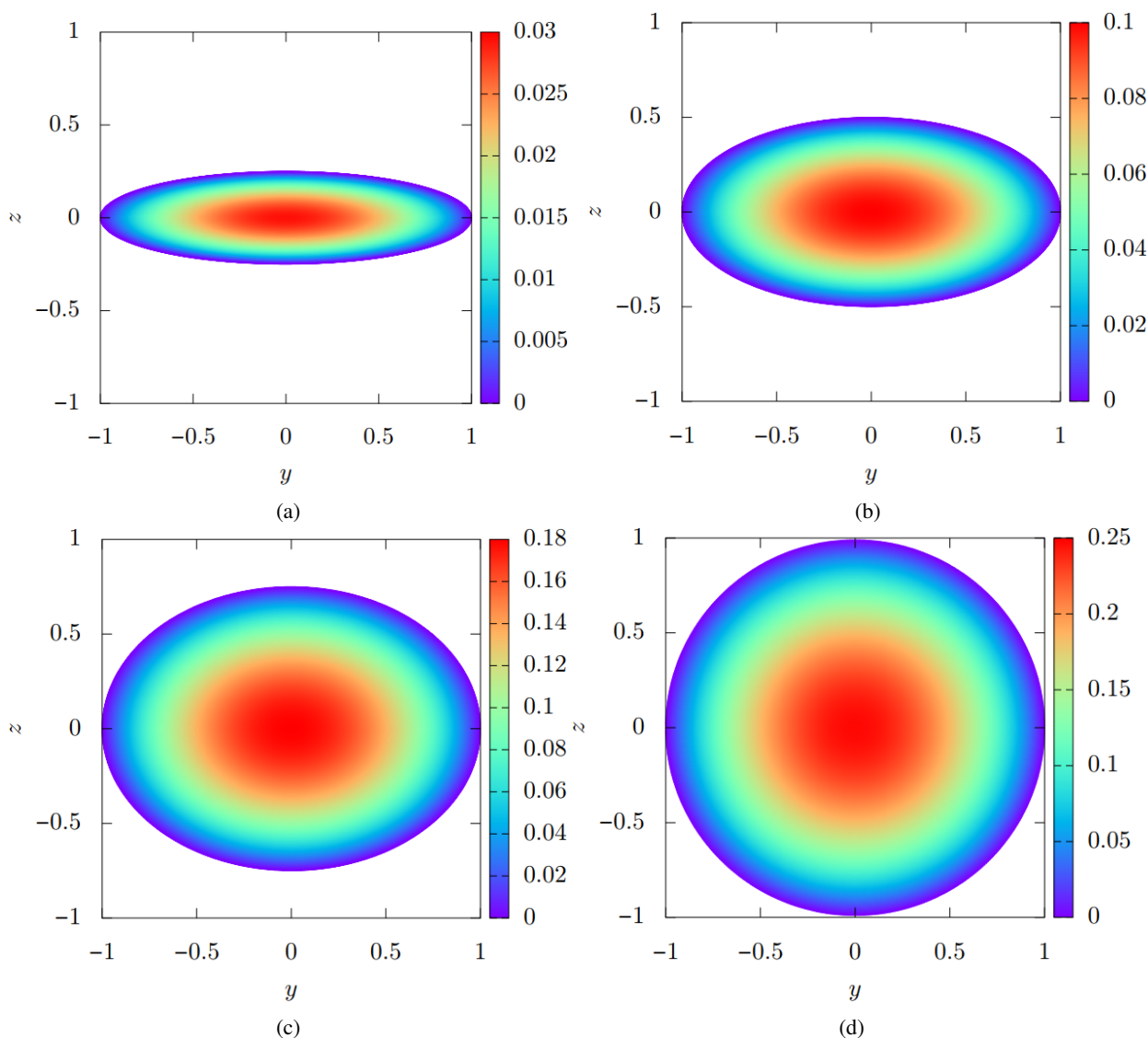


Figura 3.8: Campo de velocidades adimensional, no sistema de coordenadas cartesiano, para o duto elíptico. As razões de aspecto trabalhadas foram (a)  $\alpha = 0.25$ , (b)  $\alpha = 0.50$ , (c)  $\alpha = 0.75$  e (d)  $\alpha = 0.99$ .

Buscou-se ainda gerar o mapa de cores do campo de velocidades adimensional do escoamento no sistema de coordenadas elípticas. A principal diferença está no intercâmbio entre domínios. Na Figura 3.8, verificam-se elipses dispostas no plano cartesiano. Por outro lado, a Figura 3.9 ilustra a mesma resposta, porém em um domínio retangular. Este tipo de domínio pode se mostrar vantajoso no caso de implementações numéricas, por exemplo.

Nos gráficos da Figura 3.9, percebe-se que as zonas de velocidade máxima encontram-se dispostas na faixa de pontos que possuem como coordenada  $\theta = \frac{\pi}{2}$  e  $\theta = \frac{3\pi}{2}$ . Ademais, observa-se que essas faixas tendem a se juntar à medida que o problema caminha para o caso assintótico.

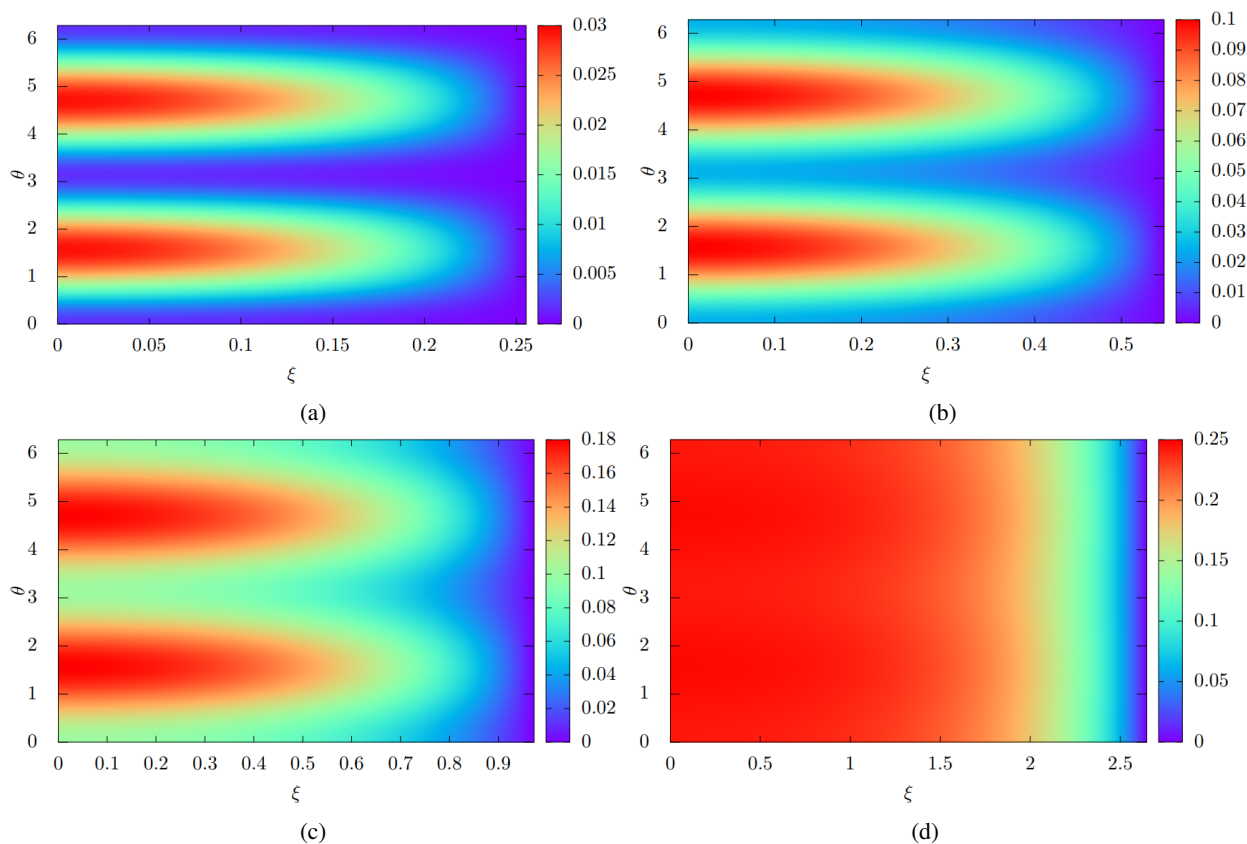


Figura 3.9: Campo de velocidades adimensional, no sistema de coordenadas elípticas, para o duto elíptico. As razões de aspecto trabalhadas foram (a)  $\alpha = 0.25$ , (b)  $\alpha = 0.50$ , (c)  $\alpha = 0.75$  e (d)  $\alpha = 0.99$ .

### 3.11 MÉTODO DA TRANSFORMADA FINITA DE SENO

O método da transformada finita de seno apresenta-se como uma ferramenta poderosa para solução de equações diferenciais parciais de segunda ordem em domínios retangulares com condições de contorno de Dirichlet homogêneas (Brown, 1944).

O trabalho realizado por Spiga e Morino (1994) apresentou, de maneira sintética, uma metodologia para analisar o comportamento do perfil de velocidade para o escoamento de Poiseuille em um duto de seção transversal retangular, assumindo fluido Newtoniano em regime permanente e escoamento laminar completamente desenvolvido (Figura 3.10). Para tanto, os pesquisadores desenvolveram as transformadas finitas de seno com vistas a converter equações diferenciais em expressões simplesmente algébricas, o que além facilitar a solução analítica, reduz o custo computacional para eventuais validações numéricas.

Ainda tratando do trabalho de Spiga e Morino (1994), pode-se dizer que a expressão que governa a situação problema é a equação de Poisson, dada por

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{d\zeta}, \quad (3.102)$$

deduzida anteriormente na Seção 3.3. Conforme dito anteriormente, esta equação é válida para qualquer escoamento de Poiseuille em um duto de seção transversal constante. A seção transversal do escoamento estudado por Spiga e Morino (1994) possui formato retangular de comprimento da base  $a$  e altura  $b$ , além de serem verificadas as condições de não-escorregamento em cada uma das paredes do duto, ou seja,

$$u(0, \eta) = u(a, \eta) = u(\xi, 0) = u(\xi, b) = 0. \quad (3.103)$$

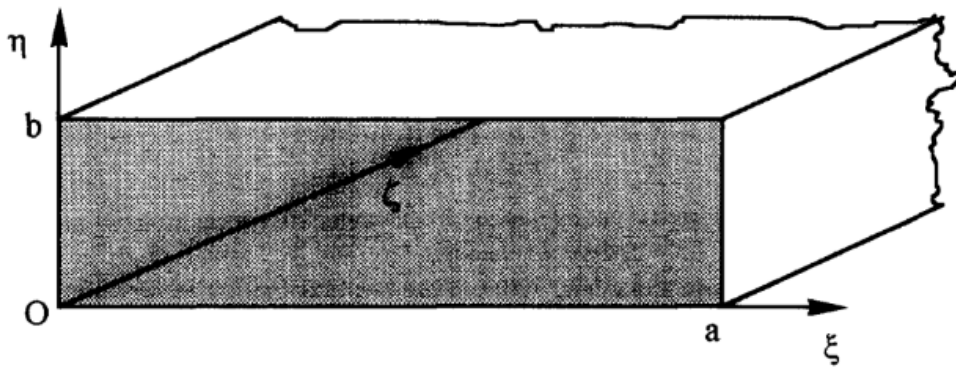


Figura 3.10: Domínio da seção retangular. Retirado de Spiga e Morino (1994).

Seguindo o trabalho de Spiga e Morino (1994), as variáveis serão adimensionalizadas de acordo com

$$u = -\frac{a^2}{\mu} \frac{dp}{d\zeta} V, \quad \xi = ax, \quad \eta = ay. \quad (3.104)$$

Aplicando essas escalas na equação (3.102), obtém-se

$$-\frac{1}{\mu} \frac{dp}{d\zeta} \left( \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right) = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{d\zeta}, \quad (3.105)$$

donde segue que

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = -1. \quad (3.106)$$

Repetindo o mesmo procedimento para as condições de contorno (3.103), obtemos que

$$V(0, y) = V(1, y) = V(x, 0) = V(x, \beta) = 0, \quad (3.107)$$

em que

$$\beta = \frac{b}{a} \quad (3.108)$$

é a razão entre altura e comprimento do duto retangular.

Ainda sobre o sistema de coordenadas na sua forma adimensional, vale comentar sobre os intervalos abarcados para cada um dos eixos:  $x \in [0, 1]$  e  $y \in [0, \beta]$ .

Apresentada a situação problema, esta seção objetiva explicar, de maneira detalhada, cada uma das etapas necessárias para utilização das transformadas finitas de seno. Dessa forma, será possível dar suporte e encorajar leitores menos experientes a utilizarem essa ferramenta em seus trabalhos.

A definição de transformada finita de seno em  $x \in [0, L]$  pode ser expressa através da seguinte equação

$$\tilde{V}(n, y) = \int_0^L V(x, y) \operatorname{sen} \left( n\pi \frac{x}{L} \right) dx, \quad (3.109)$$

em que  $n$  é um número inteiro positivo.

No caso em que  $L = 1$ , integrando por partes a equação (3.109) e usando as condições de contorno (3.107), é possível verificar (vide Apêndice I.4) a seguinte identidade

$$\frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial x^2} = \int_0^L \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \operatorname{sen}(n\pi x) dx = -n^2 \pi^2 \tilde{V}(n, y). \quad (3.110)$$

Feitas essa consideração, é possível aplicar a metodologia da transformada finita de seno para resolver a equação diferencial de segunda ordem expressa por (3.106). Primeiro, multiplica-se cada um dos termos da equação por  $\operatorname{sen}(n\pi x)$  e integra-se em  $x$  de 0 a 1, de tal sorte que

$$\int_0^1 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \operatorname{sen}(n\pi x) dx + \int_0^1 \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \operatorname{sen}(n\pi x) dx = - \int_0^1 \operatorname{sen}(n\pi x) dx. \quad (3.111)$$

Das definições apresentadas para as transformadas finitas de seno, vê-se que a expressão

(3.111) pode ser reescrita da seguinte maneira

$$\frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial y^2} = -\frac{1 - \cos(n\pi)}{n\pi}. \quad (3.112)$$

Recorrendo à identidade verificada em (3.110) e notando que  $\cos(n\pi) = (-1)^n$ , segue que

$$-n^2\pi^2\tilde{V}(n, y) + \frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial y^2} = -\frac{1 - (-1)^n}{n\pi}. \quad (3.113)$$

De maneira análoga, mas para a definição de transformada finita de seno em  $y \in [0, \beta]$

$$\tilde{\tilde{V}}(n, m) = \int_0^\beta \tilde{V}(n, y) \operatorname{sen}\left(m\pi\frac{y}{\beta}\right) dy, \quad (3.114)$$

é possível obter a seguinte expressão (Apêndice I.4)

$$\frac{\partial^2 \tilde{\tilde{V}}}{\partial y^2} = \int_0^\beta \frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial y^2} \operatorname{sen}\left(m\pi\frac{y}{\beta}\right) dy = -\frac{m^2\pi^2}{\beta^2} \tilde{\tilde{V}}(n, m). \quad (3.115)$$

em que  $m$  é um número inteiro positivo.

Agora, multiplica-se cada um dos termos da Equação (3.115) por  $\operatorname{sen}\left(m\pi\frac{y}{\beta}\right)$  e integra-se em  $y$  de 0 a  $\beta$ . Dessa forma, tem-se que

$$\begin{aligned} -n^2\pi^2 \int_0^\beta \tilde{V}(n, y) \operatorname{sen}\left(m\pi\frac{y}{\beta}\right) dy + \int_0^\beta \frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial y^2} \operatorname{sen}\left(m\pi\frac{y}{\beta}\right) dy \\ = -\frac{1 - (-1)^n}{n\pi} \int_0^\beta \operatorname{sen}\left(m\pi\frac{y}{\beta}\right) dy, \end{aligned} \quad (3.116)$$

donde segue que

$$-n^2\pi^2\tilde{\tilde{V}}(n, m) - \frac{m^2\pi^2}{\beta^2}\tilde{\tilde{V}}(n, m) = -\frac{[1 - (-1)^n][1 - (-1)^m]}{n\pi m\pi}. \quad (3.117)$$

Isolando  $\tilde{\tilde{V}}(n, m)$ , obtém-se

$$\tilde{\tilde{V}}(n, m) = \frac{\beta^3}{\pi^4 nm} \frac{[1 - (-1)^n][1 - (-1)^m]}{(m^2 + \beta^2 n^2)}. \quad (3.118)$$

Como última etapa do processo, deve-se aplicar a transformada inversa para que se obtenha a expressão final em termos das variáveis cartesianas. Começando com a transformada em relação a  $x$ , tem-se que sua formulação genérica é dada por

$$\mathfrak{S}_x \{V(x, y)\} = \int_0^{L_x} V(x, y) \operatorname{sen}\left(n\pi\frac{x}{L_x}\right) dx = \tilde{V}(n, y), \quad (3.119)$$

em que  $\mathfrak{S}$  consta como uma simbologia que representa a aplicação da transformada finita de seno

em uma função qualquer e  $L_x$  o comprimento do limite de integração. Seguindo a metodologia proposta por Brown (1943), tem-se a seguinte fórmula de inversão para a transformada em  $x$

$$\mathfrak{S}_x^{-1} \{ \tilde{V}(n, y) \} = \frac{2}{L_x} \sum_{n=1}^{\infty} V(n, y) \operatorname{sen} \left( n\pi \frac{x}{L_x} \right) = V(x, y). \quad (3.120)$$

De maneira análoga, desenvolve-se o raciocínio para a transformada em  $y$ , sendo genericamente expressa por

$$\mathfrak{S}_y \{ \tilde{V}(n, y) \} = \int_0^{L_y} \tilde{V}(n, y) \operatorname{sen} \left( m\pi \frac{y}{L_y} \right) dy = \tilde{\tilde{V}}(n, m), \quad (3.121)$$

em que  $L_y$  representa o comprimento do intervalo de integração. Para inverter, aplica-se a seguinte fórmula

$$\mathfrak{S}_y^{-1} \{ \tilde{\tilde{V}}(n, m) \} = \frac{2}{L_y} \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{\tilde{V}}(n, m) \operatorname{sen} \left( n\pi \frac{y}{L_y} \right) = V(n, y). \quad (3.122)$$

Combinando as inversas dispostas nas equações (3.120) e (3.122), pode-se construir uma expressão que realiza as duas operações inversas simultaneamente

$$\mathfrak{S}_x^{-1} \left\{ \mathfrak{S}_y^{-1} \left\{ \tilde{\tilde{V}}(n, m) \right\} \right\} = \frac{4}{L_x L_y} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \tilde{\tilde{V}}(n, m) \operatorname{sen} \left( n\pi \frac{x}{L_x} \right) \operatorname{sen} \left( m\pi \frac{y}{L_y} \right) \right\} = V(x, y). \quad (3.123)$$

Voltando para resolução do problema, dado que no caso retangular os limites de integração constam como  $L_x = 1$  e  $L_y = \beta$ , pode-se substituir a Equação (3.118) na Equação (3.123), para obter

$$V(x, y) = \frac{4}{\beta} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{\beta^3}{\pi^4 n m} \frac{[1 - (-1)^n][1 - (-1)^m]}{(m^2 + \beta^2 n^2)} \operatorname{sen}(n\pi x) \operatorname{sen} \left( m\pi \frac{y}{\beta} \right) \right\}. \quad (3.124)$$

Notando que para índices pares o termo do somatório é sempre zerado e que para índices ímpares os termos entre colchetes retornam o produto 4, pode-se reduzir a Equação (3.124) a

$$V(x, y) = \frac{16\beta^2}{\pi^4} \sum_{n \text{ ímpar}}^{\infty} \sum_{m \text{ ímpar}}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(n\pi x) \operatorname{sen} \left( m\pi \frac{y}{\beta} \right)}{n m (m^2 + \beta^2 n^2)}, \quad (3.125)$$

sendo esta a expressão analítica para o campo de velocidades no canal retangular.

## 4 FORMULAÇÃO MATEMÁTICA DO PROBLEMA

Considere um duto com seção transversal constante em formato quarto-elíptico em que, em seu interior, verifica-se um escoamento induzido por um gradiente de pressão. Este problema é popularmente conhecido como escoamento de Hagen-Poiseuille. Para fins de simplificação, uma série de hipóteses e considerações iniciais são feitas, entre elas a de fluido Newtoniano incompressível, escoamento unidirecional em regime permanente e desconsideração das forças de campo. A Figura 4.1 ilustra o perfil da tubulação trabalhada e explicita o sistema de coordenadas adotado.

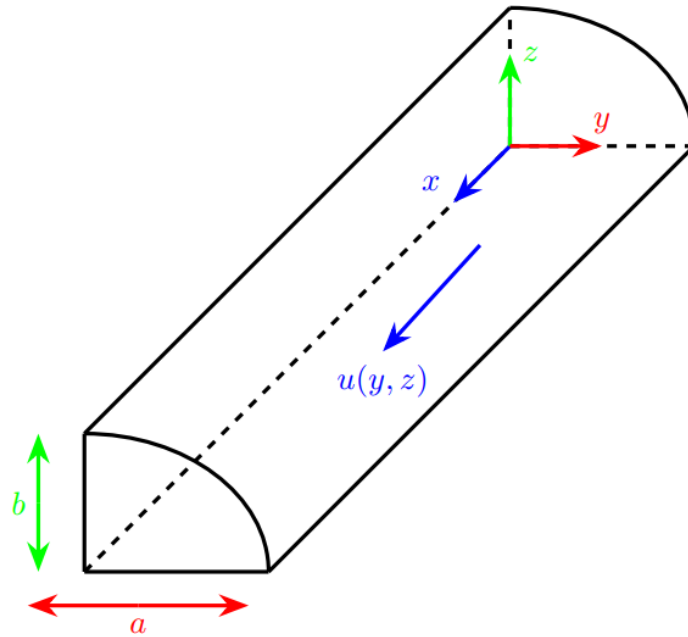


Figura 4.1: Duto de seção quarto elíptica

A equação governante deste problema é a Equação de Poisson. Esta expressão já foi apresentada no Capítulo 3 como sendo

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -1. \quad (4.1)$$

Com base nas expressões introduzidas no Capítulo 3, mais especificamente as Equações (3.58) e (3.59), pode-se reescrever a equação governante do problema, em coordenadas elípticas, como sendo

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = -h^2. \quad (4.2)$$

ou

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = -c^2(\cosh^2 \xi - \cos^2 \theta). \quad (4.3)$$

É oportuno comentar que  $h^2$  consta como o quadrado do Jacobiano da mudança de variáveis.

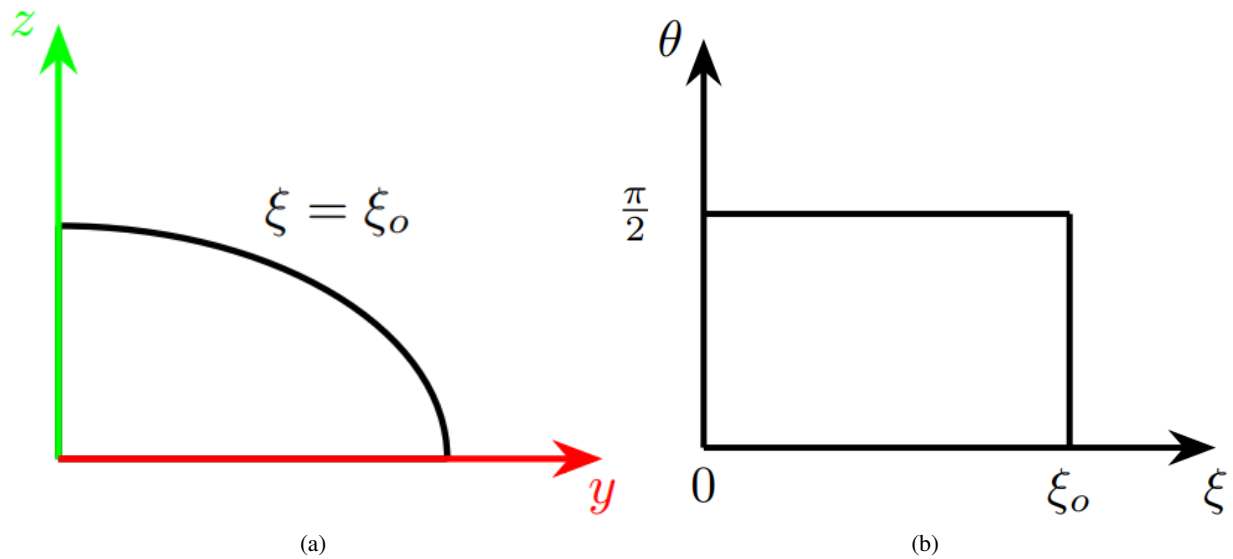


Figura 4.2: (a) Domínio em coordenadas cartesianas. (b) Novo domínio proporcionado pelo sistema de coordenadas elípticas.

Ao reformular a equação governante trazendo-a para o sistema de coordenadas natural, é possível converter um domínio que antes era curvilíneo em um domínio retangular. Essa manobra implica na facilitação das operações matemáticas necessárias para obtenção da solução analítica.

Ao se trabalhar com o sistema de coordenadas elíptico, é fácil notar que são necessárias quatro condições de contorno para poder resolver o problema. Em termos matemáticos, para descrever a condição de não-escorregamento no bordo molhado do duto, tem-se as seguintes condições de contorno

$$\left\{ \begin{array}{l} u(\xi_0, \theta) = 0, \\ u(\xi, 0) = 0, \\ u(0, \theta) = 0, \\ u(\xi, \frac{\pi}{2}) = 0. \end{array} \right. \quad (4.4)$$



# 5 SOLUÇÃO ANALÍTICA DA SEÇÃO QUARTO-ELÍPTICA

## 5.1 SOLUÇÃO VIA TRANSFORMADA FINITA DE SENO

Este capítulo é dedicado ao desenvolvimento da solução analítica do escoamento de Hagen-Poiseuille em um canal quarto-elíptico, problema já formulado no Capítulo 4.

A equação governante do problema é a equação de Poisson, expressa, em coordenadas elípticas, como sendo

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = -c^2(\cosh^2 \xi - \cos^2 \theta). \quad (5.1)$$

Aplicando a transformada finita de seno primeiramente em termos de  $\theta$ , segue

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \sin\left(n\pi \frac{2\theta}{\pi}\right) d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \sin\left(n\pi \frac{2\theta}{\pi}\right) d\theta = -c^2 \left[ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cosh^2 \xi \sin\left(n\pi \frac{2\theta}{\pi}\right) d\theta - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta \sin\left(n\pi \frac{2\theta}{\pi}\right) d\theta \right], \quad (5.2)$$

ou ainda

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \sin(2n\theta) d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \sin(2n\theta) d\theta = -c^2 \left[ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cosh^2 \xi \sin(2n\theta) d\theta - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta \sin(2n\theta) d\theta \right]. \quad (5.3)$$

Aplicando a definição de transformada finita de seno e sabendo que os resultados das integrações são dados por

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \sin(2n\theta) d\theta = \frac{\partial^2 \tilde{u}(\xi, n)}{\partial \theta^2} = -4n^2 \tilde{u}(\xi, n), \quad (5.4)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cosh^2 \xi \sin(2n\theta) d\theta = \cosh^2 \xi \left( \frac{1 - \cos(n\pi)}{2n} \right) \quad (5.5)$$

e

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta \sin(2n\theta) d\theta = \frac{\cos(n\pi) + 2n^2 - 1}{4n(n^2 - 1)}, \quad (5.6)$$

pode-se reescrever a Equação (5.3) da seguinte forma

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}(\xi, n)}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}(\xi, n)}{\partial \theta^2} = -c^2 \left[ \cosh^2 \xi \left( \frac{1 - \cos(n\pi)}{2n} \right) - \frac{\cos(n\pi) + 2n^2 - 1}{4n(n^2 - 1)} \right]. \quad (5.7)$$

Notando que  $\cos(n\pi) = (-1)^n$  e substituindo a relação existente na Equação (5.4) na Equação (5.7), obtém-se

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}(\xi, n)}{\partial \xi^2} - 4n^2 \tilde{u}(\xi, n) = -c^2 \left[ \cosh^2 \xi \left( \frac{1 - (-1)^n}{2n} \right) - \frac{(-1)^n + 2n^2 - 1}{4n(n^2 - 1)} \right]. \quad (5.8)$$

Aplicando a Transformada finita de seno em relação a  $\xi$ , tem-se que

$$\int_0^{\xi_0} \frac{\partial^2 \tilde{u}(\xi, n)}{\partial \xi^2} \operatorname{sen} \left( m\pi \frac{\xi}{\xi_0} \right) d\xi - \int_0^{\xi_0} 4n^2 \tilde{u}(\xi, n) \operatorname{sen} \left( m\pi \frac{\xi}{\xi_0} \right) d\xi = -c^2 \left[ \frac{1 - (-1)^n}{2n} \int_0^{\xi_0} \cosh^2 \xi \operatorname{sen} \left( m\pi \frac{\xi}{\xi_0} \right) d\xi - \frac{(-1)^n + 2n^2 - 1}{4n(n^2 - 1)} \int_0^{\xi_0} \operatorname{sen} \left( m\pi \frac{\xi}{\xi_0} \right) d\xi \right]. \quad (5.9)$$

Utilizando o conceito de transformada finita de seno e sabendo que os resultados das integrais são dados por

$$\int_0^{\xi_0} \frac{\partial^2 \tilde{u}(\xi, n)}{\partial \xi^2} \operatorname{sen} \left( m\pi \frac{\xi}{\xi_0} \right) d\xi = \frac{\partial^2 \tilde{u}(m, n)}{\partial \xi^2} = -\frac{m^2 \pi^2}{\xi_0^2} \tilde{u}(m, n), \quad (5.10)$$

$$\int_0^{\xi_0} \cosh^2 \xi \operatorname{sen} \left( m\pi \frac{\xi}{\xi_0} \right) d\xi = - \left[ \frac{\xi_0 (\cos(m\pi) (\pi^2 m^2 \cosh^2 \xi_0 + 2\xi_0^2) - \pi^2 m^2 - 2\xi_0^2)}{\pi m (\pi^2 m^2 + 4\xi_0^2)} \right] \quad (5.11)$$

e

$$\int_0^{\xi_0} \operatorname{sen} \left( m\pi \frac{\xi}{\xi_0} \right) d\xi = \left[ \frac{\xi_0 (1 - \cos(m\pi))}{\pi m} \right], \quad (5.12)$$

pode-se reescrever a Equação (5.9) como sendo

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}(m, n)}{\partial \xi^2} - 4n^2 \tilde{u}(m, n) = c^2 \left\{ \left[ \frac{(-1)^n + 2n^2 - 1}{4n(n^2 - 1)} \right] \left[ \frac{\xi_0 (1 - \cos(m\pi))}{\pi m} \right] + \left[ \frac{1 - (-1)^n}{2n} \right] \left[ \frac{\xi_0 (\cos(m\pi) (\pi^2 m^2 \cosh^2 \xi_0 + 2\xi_0^2) - \pi^2 m^2 - 2\xi_0^2)}{\pi m (\pi^2 m^2 + 4\xi_0^2)} \right] \right\}. \quad (5.13)$$

Notando que  $\cos(m\pi) = (-1)^m$  e substituindo (5.10) na Equação (5.13), obtém-se

$$-\frac{m^2 \pi^2}{\xi_0^2} \tilde{u}(m, n) - 4n^2 \tilde{u}(m, n) = c^2 \left\{ \left[ \frac{(-1)^n + 2n^2 - 1}{4n(n^2 - 1)} \right] \left[ \frac{\xi_0 (1 - (-1)^m)}{\pi m} \right] + \left[ \frac{1 - (-1)^n}{2n} \right] \left[ \frac{\xi_0 ((-1)^m (\pi^2 m^2 \cosh^2 \xi_0 + 2\xi_0^2) - \pi^2 m^2 - 2\xi_0^2)}{\pi m (\pi^2 m^2 + 4\xi_0^2)} \right] \right\}. \quad (5.14)$$

Isolando  $\tilde{u}(m, n)$ , chega-se em

$$\tilde{u}(m, n) = -\frac{c^2 \xi_0^2}{m^2 \pi^2 + 4n^2 \xi_0^2} \left\{ \left[ \frac{(-1)^n + 2n^2 - 1}{4n(n^2 - 1)} \right] \left[ \frac{\xi_0 (1 - (-1)^m)}{\pi m} \right] + \left[ \frac{1 - (-1)^n}{2n} \right] \left[ \frac{\xi_0 ((-1)^m (\pi^2 m^2 \cosh^2 \xi_0 + 2\xi_0^2) - \pi^2 m^2 - 2\xi_0^2)}{\pi m (\pi^2 m^2 + 4\xi_0^2)} \right] \right\}. \quad (5.15)$$

Aplicando a fórmula da transformada inversa, dada por

$$\mathfrak{S}_\theta^{-1} \left\{ \mathfrak{S}_\xi^{-1} \left\{ \tilde{u}(m, n) \right\} \right\} = \frac{4}{L_\xi L_\theta} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \tilde{u}(n, m) \operatorname{sen} \left( n\pi \frac{\theta}{L_\theta} \right) \operatorname{sen} \left( m\pi \frac{\xi}{L_\xi} \right) \right\} = V(\xi, \theta), \quad (5.16)$$

em que  $L_\xi = \xi_o$  e  $L_\theta = \frac{\pi}{2}$ , segue que

$$V(\xi, \theta) = -\frac{8c^2\xi_o}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{\operatorname{sen}(2n\theta) \operatorname{sen} \left( m\pi \frac{\xi}{\xi_o} \right)}{m^2\pi^2 + 4n^2\xi_o^2} \left\{ \left[ \frac{(-1)^n + 2n^2 - 1}{4n(n^2 - 1)} \right] \left[ \frac{\xi_o(1 - (-1)^m)}{\pi m} \right] \right. \right. \\ \left. \left. + \left[ \frac{1 - (-1)^n}{2n} \right] \left[ \frac{\xi_o((-1)^m(\pi^2 m^2 \cosh^2 \xi_o + 2\xi_o^2) - \pi^2 m^2 - 2\xi_o^2)}{\pi m(\pi^2 m^2 + 4\xi_o^2)} \right] \right\} \right\}, \quad (5.17)$$

sendo esse o campo de velocidades da seção quarto-elíptica no sistema de coordenadas natural.

Para determinação da vazão, integra-se o campo de velocidades (5.17) no domínio da elipse. Com isso, obtém-se

$$Q = \int_0^{\xi_o} \int_0^{\frac{\pi}{2}} V(\xi, \theta) dA, \quad (5.18)$$

em que  $dA = \|J\| d\theta d\xi$ , sendo  $\|J\| = \operatorname{sech}^2 \xi_o (\cosh^2 \xi - \cos^2 \theta)$ . O resultado da integração, detalhadamente encontrada Vide Apêndice I.5, é dado por

$$Q = -\frac{8c^2\xi_o}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{K(m, n)}{m^2\pi^2 + 4n^2\xi_o^2} \left\{ \left[ \frac{(-1)^n + 2n^2 - 1}{4n(n^2 - 1)} \right] \left[ \frac{\xi_o(1 - (-1)^m)}{\pi m} \right] \right. \right. \\ \left. \left. + \left[ \frac{1 - (-1)^n}{2n} \right] \left[ \frac{\xi_o((-1)^m(\pi^2 m^2 \cosh^2 \xi_o + 2\xi_o^2) - \pi^2 m^2 - 2\xi_o^2)}{\pi m(\pi^2 m^2 + 4\xi_o^2)} \right] \right\} \right\}, \quad (5.19)$$

em que

$$K(m, n) = \frac{\xi_o m ((-1)^n - 1) [4\xi_o^2 + \pi^2 + (-1)^m (4\xi_o^2 + m^2\pi^2 + \pi^2(m^2 - 1) \cosh^2 2\xi_o)]}{4n\pi(4\xi_o^2 + \pi^2 m^2)(m^2 - 1) \cosh^2 \xi_o}. \quad (5.20)$$

Para determinação da velocidade média do escoamento, basta dividir a expressão da vazão pela área da seção transversal do duto. Uma vez que a área adimensional da seção quarto-elíptica é dada por  $A = \frac{\pi\alpha}{4}$ , tem-se que

$$\bar{u} = -\frac{32c^2\xi_o}{\pi^2\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{K(m, n)}{m^2\pi^2 + 4n^2\xi_o^2} \left\{ \left[ \frac{(-1)^n + 2n^2 - 1}{4n(n^2 - 1)} \right] \left[ \frac{\xi_o(1 - (-1)^m)}{\pi m} \right] \right. \right. \\ \left. \left. + \left[ \frac{1 - (-1)^n}{2n} \right] \left[ \frac{\xi_o((-1)^m(\pi^2 m^2 \cosh^2 \xi_o + 2\xi_o^2) - \pi^2 m^2 - 2\xi_o^2)}{\pi m(\pi^2 m^2 + 4\xi_o^2)} \right] \right\} \right\}, \quad (5.21)$$

Pode-se ainda calcular o diâmetro hidráulico da seção, expresso por

$$D_h = \frac{4A}{\mathcal{P}}, \quad (5.22)$$

em que  $A$  corresponde à área da seção quarto-elíptica e  $\mathcal{P}$  ao perímetro da mesma.

Ademais, em posse do diâmetro hidráulico e da velocidade média, pode-se aferir a queda de pressão do escoamento, com base no  $fRe$ , dado por

$$fRe = \frac{D_h^2}{2\bar{u}}, \quad (5.23)$$

em que  $f$  corresponde ao fator de atrito de Fanning.

## 5.2 SOLUÇÃO VIA MÉTODO DE FOURIER - SEPARAÇÃO DE VARIÁVEIS

A técnica da separação de variáveis apresenta-se como uma ferramenta poderosa para determinação de uma solução para a Equação de Laplace quando esta se encontra no sistema de coordenadas apropriado. De modo geral, o Método de Fourier consiste em expressar a solução da E.D.P. em termos do produto entre duas funções independentes, da seguinte forma

$$u(x, y) = X(x)Y(y). \quad (5.24)$$

Substituindo essa proposta (5.24) na Equação de Laplace (3.30),

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (5.25)$$

segue que

$$X''Y + XY'' = 0. \quad (5.26)$$

Reorganizando as variáveis, pode-se chegar em

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y}. \quad (5.27)$$

É fácil perceber que, para que essa igualdade seja verdadeira, as variáveis  $X$  e  $Y$  devem ser constantes, de tal forma que

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = K. \quad (5.28)$$

A partir desse momento, faz-se necessário um estudo de sinal para saber qual orientação adotar para a constante  $K$ . Para realização desta análise, necessitam-se das condições de contorno do problema. Dessa forma, com vistas a dar prosseguimento na revisão metodológica, propõe-se o estudo da Equação de Laplace em um retângulo

$$\begin{array}{c}
 u(x, b) = f_2(x) \\
 \begin{array}{c}
 \text{(*)} \\
 \nabla^2 u = 0 \\
 u(0, y) = g_1(y) \quad u(a, y) = g_2(y) \\
 u(x, 0) = f_1(x)
 \end{array}
 \end{array}$$

Figura 5.1: Condições de contorno do retângulo a ser resolvido.

sujeito às seguintes condições de contorno

$$\begin{cases}
 u(0, y) = g_1(y), \\
 u(x, b) = f_2(x), \\
 u(x, 0) = f_1(x), \\
 u(a, y) = g_2(y).
 \end{cases} \quad (5.29)$$

Por se tratar de uma equação linear, pode-se fragmentar o problema geral em subproblemas menores, de tal forma a obter condições de contorno nulas em três das quatro paredes do retângulo. Com essa manobra, é possível operar com a separação de variáveis e resolver o problema. A solução almejada consta como o somatório das soluções de cada um dos subproblemas. Dito isto, propõe-se a seguinte repartição

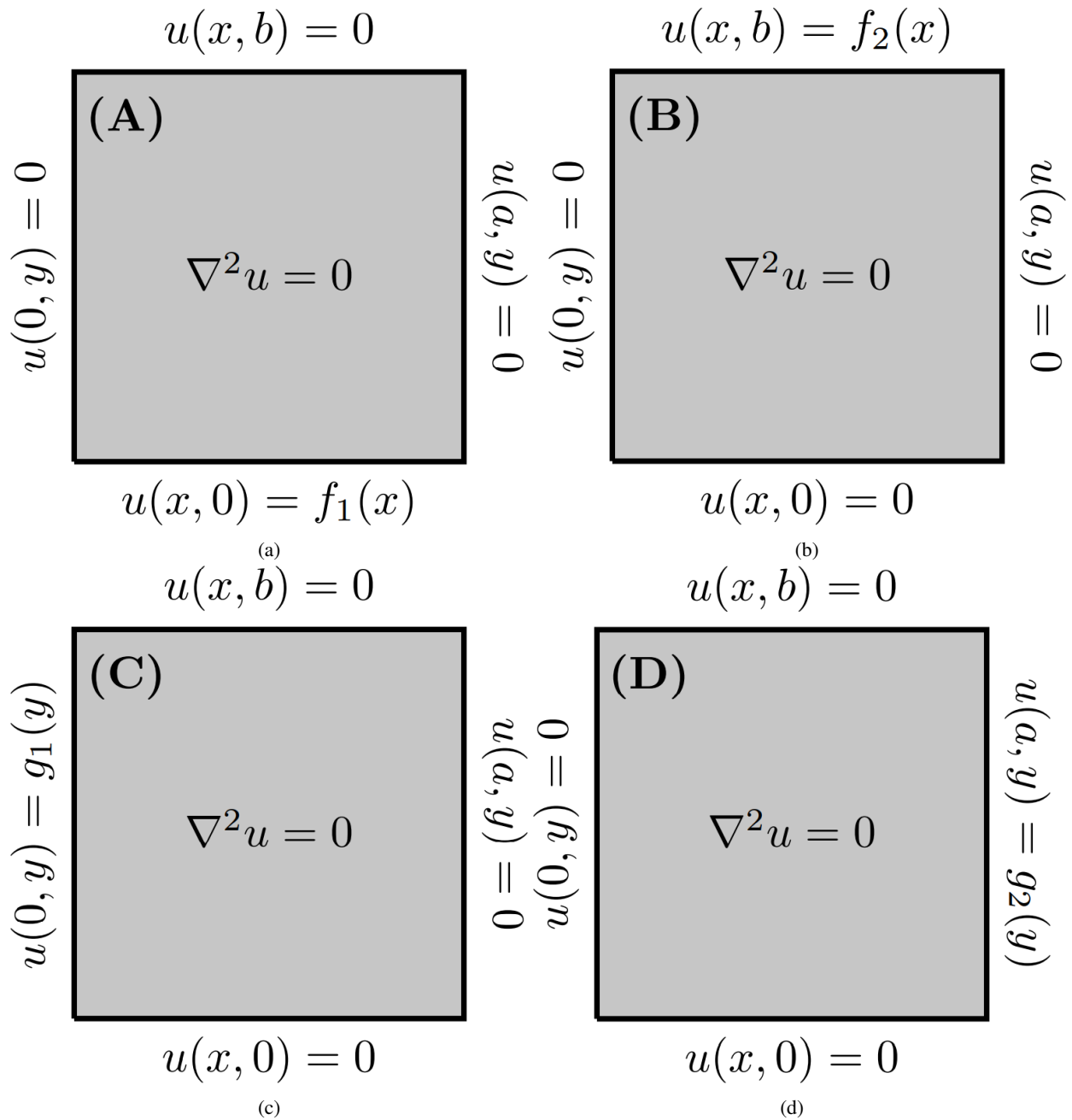


Figura 5.2: Subdivisão do problema geral em problemas parciais. A solução geral é o somatório das contribuições de cada problema parcial. (a) Única condição de contorno não nula:  $u(x, 0) = f_1(x)$ , (b) Única condição de contorno não nula:  $u(x, b) = f_2(x)$ , (c) Única condição de contorno não nula:  $u(0, y) = g_1(y)$ , (d) Única condição de contorno não nula:  $u(a, y) = g_2(y)$ .

Como a solução de cada um dos subproblemas se dá de maneira análoga, optou-se por resolver apenas no retângulo B, visando detalhar os passos a serem desbravados. Dessa forma, trabalha-se com as seguintes condições de contorno

$$\begin{cases} u(0, y) = 0, \\ u(x, b) = f_2(x), \\ u(x, 0) = 0, \\ u(a, y) = 0. \end{cases} \quad (5.30)$$

### 5.2.1 Estudo de Sinal

No estudo de sinal, objetiva-se encontrar uma solução que não seja trivial. Existem três possibilidades para atribuir à constante  $K$ : positivo, negativo ou nulo.

$K = 0$ :

Fazendo primeiramente para o caso em que a constante  $K$  é nula, tem-se que

$$\frac{X''}{X} = 0. \quad (5.31)$$

Integrando duas vezes, obtém-se

$$X = C_1x + C_2, \quad (5.32)$$

em que  $C_1$  e  $C_2$  correspondem a constantes de integração. Pela primeira condição de contorno do Sistema (5.30), aplicando

$$X(0) = C_1 \cdot 0 + C_2 = 0, \quad (5.33)$$

tem-se como resultado  $C_2 = 0$ , ou ainda

$$X(x) = C_1x. \quad (5.34)$$

Recorrendo à quarta condição de contorno, tem-se que

$$X(a) = C_1a. \quad (5.35)$$

Diante disso, observa-se que a igualdade (5.35) só será satisfeita se  $C_1 = 0$ , uma vez que o comprimento  $a$  não é nulo. Isso implica em uma solução trivial que não interessa à análise.

$K > 0$ :

Fazendo agora para o caso em que a constante  $K$  assume um valor positivo, a E.D.O. a ser trabalhada consta como

$$X'' - KX = 0. \quad (5.36)$$

A solução geral para a Equação (5.36) segue o seguinte formato

$$X = C_3 \cosh(\sqrt{K}x) + C_4 \sinh(\sqrt{K}x). \quad (5.37)$$

Trabalhando novamente com a primeira condição de contorno do Sistema (5.30), tem-se a seguinte expressão

$$X(0) = C_3 \cosh(\sqrt{K}.0) + C_4 \sinh(\sqrt{K}.0) = 0, \quad (5.38)$$

gerando como resultado  $C_3 = 0$ . Recorrendo à quarta condição de contorno do mesmo sistema, segue que

$$X(a) = C_4 \sinh(\sqrt{K}a) = 0. \quad (5.39)$$

Dado que o comprimento  $a$  não pode ser nulo e que  $K$  é uma constante arbitrária positiva, conclui-se que a única possibilidade para que esse termo se anule ocorre quando  $C_4 = 0$ , o que implica em outra solução trivial.

$K < 0$ :

Como última possibilidade do estudo de sinal, deve-se testar o caso em que a constante  $K$  assume valor negativo. A E.D.O. a ser desbravada é então dada por

$$X'' + KX = 0. \quad (5.40)$$

Como solução geral para a E.D.O. (5.40), trabalha-se com a seguinte expressão

$$X = C_5 \cos(\sqrt{K}x) + C_6 \sen(\sqrt{K}x). \quad (5.41)$$

Adotando a primeira condição de contorno do Sistema (5.30), ou seja, aplicando

$$X(0) = C_5 \cos(\sqrt{K}.0) + C_6 \sen(\sqrt{K}.0) = 0, \quad (5.42)$$

pode-se concluir que  $C_5 = 0$  para que a igualdade (5.42) seja atendida. Aplicando a quarta condição de contorno do mesmo sistema, obtém-se

$$X(a) = C_6 \sen(\sqrt{K}a) = 0. \quad (5.43)$$

Sabe-se que a constante de integração  $C_6$  não pode ser zerada, pois isso acarretaria em uma nova solução trivial, o que não é almejado. Com isso, há de se trabalhar para que o argumento da função seno seja anulado. Para tanto, deve-se ter em mente que esse argumento é sempre nulo para múltiplos de  $\pi$ . Dessa forma, segue que

$$a\sqrt{K} = n\pi, \quad (5.44)$$

em que  $n$  é um número inteiro positivo. Dado que  $\lambda_n = \sqrt{K}$ , pode-se reescrever a Equação (5.44)



como

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{a}. \quad (5.45)$$

Dito isto, a solução para a função  $X$ , em termos de  $x$ , pode ser expressa por

$$X(x) = H_n \text{sen}(\lambda_n x). \quad (5.46)$$

Sabendo que a constante arbitrária  $K$  deve ser negativa, pode-se prosseguir com a resolução da E.D.O. para encontrar uma solução para a função de  $Y$ . Com isso, tem-se que

$$Y'' - KY = 0. \quad (5.47)$$

Como visto anteriormente, equações diferenciais ordinárias como o formato encontrado na Equação (5.47) possuem solução geral da seguinte forma

$$Y = C_7 \cosh(\sqrt{K}y) + C_8 \sinh(\sqrt{K}y). \quad (5.48)$$

Ao aplicar a terceira condição de contorno do Sistema (5.30) na Equação (5.48), segue que

$$Y(0) = C_7 \cosh(\sqrt{K} \cdot 0) + C_8 \sinh(\sqrt{K} \cdot 0). \quad (5.49)$$

É possível observar que  $C_7 = 0$  para que a igualdade (5.49) seja satisfeita. Isso implica dizer que a solução para a função  $Y$ , em termos de  $y$ , é dada da pela seguinte expressão

$$Y(y) = C_8 \sinh(\sqrt{K}y), \quad (5.50)$$

ou ainda

$$Y(y) = J_n \sinh(\lambda_n y). \quad (5.51)$$

Em posse das duas funções independentes, pode-se operar com a multiplicação destas para compor a solução da Equação de Laplace. Sendo assim,

$$u_2(x, y) = H_n \text{sen}(\lambda_n x) J_n \sinh(\lambda_n y). \quad (5.52)$$

Dado que a multiplicação entre  $H_n$  e  $J_n$  pode resultar na formação de uma nova constante arbitrária em termos de  $n$ , segue que

$$u_2(x, y) = B_n \text{sen}(\lambda_n x) \sinh(\lambda_n y). \quad (5.53)$$

Observa-se que cada valor de  $n$  retorna uma solução possível para Equação de Laplace. Além do mais, pelo fato da Equação de Laplace ser linear, o somatório de todas as soluções, para cada valor de  $n$ , também consta como uma solução. Dessa forma, a solução geral deste problema é

dada com base na seguinte expressão

$$u_2(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{a} \right) \sinh \left( \frac{n\pi y}{a} \right). \quad (5.54)$$

Para determinação do coeficiente  $B_n$ , deve-se aplicar a segunda condição de contorno do Sistema (5.30) na Equação (5.54), de tal forma que

$$u_2(x, b) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen} (\lambda_n x) \sinh (\lambda_n b) = f_2(x). \quad (5.55)$$

Aproveitando-se da propriedade da ortogonalidade da função seno

$$\int_0^a \operatorname{sen} (\lambda_n x) \operatorname{sen} (\lambda_k x) dx = \begin{cases} 0, & \text{se } k \neq n, \\ \frac{a}{2}, & \text{se } k = n, \\ 0, & \text{se } k = n = 0, \end{cases} \quad (5.56)$$

pode-se proceder com a seguinte manipulação algébrica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^a B_n \operatorname{sen} (\lambda_n x) \sinh (\lambda_n b) \operatorname{sen} (\lambda_k x) dx = \int_0^a f_2(x) \operatorname{sen} (\lambda_k x) dx, \quad (5.57)$$

ou ainda

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n \sinh (\lambda_n b) \int_0^a \operatorname{sen} (\lambda_n x) \operatorname{sen} (\lambda_k x) dx = \int_0^a f_2(x) \operatorname{sen} (\lambda_k x) dx. \quad (5.58)$$

Fazendo  $k = n$ , segue que a Equação (5.58) pode ser reescrita como

$$B_n \sinh (\lambda_n b) \int_0^a \operatorname{sen}^2 (\lambda_n x) dx = \int_0^a f_2(x) \operatorname{sen} (\lambda_n x) dx. \quad (5.59)$$

Realizando a devida integral, obtém-se

$$B_n \sinh (\lambda_n b) \frac{a}{2} = \int_0^a f_2(x) \operatorname{sen} (\lambda_n x) dx. \quad (5.60)$$

Finalmente, isolando o coeficiente  $B_n$ , tem-se como expressão resultante

$$B_n = \frac{2}{a \sinh \left( \frac{n\pi b}{a} \right)} \int_0^a f_2(x) \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{a} \right) dx. \quad (5.61)$$

Se aplicado procedimento análogo para cada um dos outros casos, pode-se obter as seguintes soluções

**CASO A:**

$$u_1(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{a} \right) \sinh \left( \frac{n\pi(b-y)}{a} \right), \quad (5.62)$$

sendo  $A_n$  dado por

$$A_n = \frac{2}{a \sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right)} \int_0^a f_1(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx. \quad (5.63)$$

**CASO C:**

$$u_3(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \sinh\left(\frac{n\pi(a-x)}{b}\right), \quad (5.64)$$

sendo  $C_n$  dado por

$$C_n = \frac{2}{b \sinh\left(\frac{n\pi a}{b}\right)} \int_0^b g_1(y) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dy. \quad (5.65)$$

**CASO D:**

$$u_4(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \sinh\left(\frac{n\pi x}{b}\right), \quad (5.66)$$

sendo  $D_n$  dado por

$$D_n = \frac{2}{b \sinh\left(\frac{n\pi a}{b}\right)} \int_0^b g_2(y) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dy. \quad (5.67)$$

A solução geral do problema é então dada por

$$u(x, y) = u_1(x, y) + u_2(x, y) + u_3(x, y) + u_4(x, y). \quad (5.68)$$

### 5.2.2 Aplicação no Caso Quarto-elíptico

Esquematisado o processo necessário para utilizar a técnica de separação de variáveis na solução de equações de Laplace, pode-se resolver o escoamento de Hagen-Poiseuille para o duto quarto-elíptico. A equação governante e as condições de contorno já foram apresentadas anteriormente, no Capítulo 4, sendo estas dadas, respectivamente, por

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = -c^2 (\cosh^2 \xi - \cos^2 \theta) \quad (5.69)$$

e

$$\begin{cases} u(\xi_0, \theta) = 0, \\ u(\xi, 0) = 0, \\ u(0, \theta) = 0, \\ u(\xi, \frac{\pi}{2}) = 0. \end{cases} \quad (5.70)$$

Propondo a seguinte mudança de variáveis

$$W(\xi, \theta) = u(\xi, \theta) + \frac{1}{2} \operatorname{sech}^2 \xi_0 \operatorname{senh}^2 \xi \operatorname{sen}^2 \theta, \quad (5.71)$$

segue que a Equação governante (5.69) será convertida em uma equação de Laplace da forma

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} = 0. \quad (5.72)$$

O preço que se paga com essa mudança de variáveis é a alteração das condições de contorno, que antes eram nulas. Dessa forma, as novas condições de contorno do problema constam como

$$\begin{cases} W(\xi, 0) = 0, & (A) \\ W(\xi, \frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2} \operatorname{sech}^2 \xi_o \sinh^2 \xi, & (B) \\ W(0, \theta) = 0, & (C) \\ W(\xi_o, \theta) = \frac{1}{2} \tanh^2 \xi_o \sin^2 \theta. & (D) \end{cases} \quad (5.73)$$

Da mesma forma que foi possível resolver o problema retangular, dividindo o problema geral em subproblemas menores, pode-se proceder com uma estratégia análoga para encontrar a solução analítica do caso quarto-elíptico

$$W(\xi, \theta) = W_A(\xi, \theta) + W_B(\xi, \theta) + W_C(\xi, \theta) + W_D(\xi, \theta). \quad (5.74)$$

Como não há contribuição das condições de contorno (A) e (C), a solução resume-se ao somatório das contribuições parciais de (B) e (D), de tal modo que

$$W(\xi, \theta) = W_B(\xi, \theta) + W_D(\xi, \theta). \quad (5.75)$$

### SUBPROBLEMA B:

A Equação governante do subproblema B é a Equação de Laplace, sendo expressa como

$$\frac{\partial^2 W_B}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 W_B}{\partial \theta^2} = 0. \quad (5.76)$$

As condições de contorno deste subproblema são dadas por

$$\begin{cases} W_B(\xi, 0) = 0, \\ W_B(\xi, \frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2} \operatorname{sech}^2 \xi_o \sinh^2 \xi, \\ W_B(0, \theta) = 0, \\ W_B(\xi_o, \theta) = 0. \end{cases} \quad (5.77)$$

Como visto anteriormente, a solução para esse tipo de problema, em que apenas uma das condições de parede não é nula, assume a seguinte forma

$$W_B(\xi, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi\xi}{\xi_o} \right) \sinh \left( \frac{n\pi\theta}{\xi_o} \right). \quad (5.78)$$

Para determinação do coeficiente  $B_n$ , procede-se da seguinte maneira

$$B_n = \frac{2}{\xi_o \operatorname{senh} \left( \frac{n\pi^2}{2\xi_o} \right)} \int_0^{\xi_o} \frac{1}{2} \operatorname{sech}^2 \xi_o \sinh^2 \xi \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi\xi}{\xi_o} \right) d\xi. \quad (5.79)$$

Resolvendo primeiramente a integral, tem-se que

$$\int_0^{\xi_o} \frac{1}{2} \operatorname{sech}^2 \xi_o \sinh^2 \xi \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi\xi}{\xi_o} \right) d\xi = \frac{\xi_o e^{-2\xi_o}}{8n\pi(4\xi_o^2 + n^2\pi^2) \cosh^2 \xi_o} \left\{ e^{4\xi_o} [2\pi n \operatorname{sen}(n\pi)\xi_o - n^2\pi^2 \cos(n\pi)] + e^{2\xi_o} [8\xi_o^2(\cos(n\pi) - 1) + 2n^2\pi^2 \cos(n\pi)] - 2n\pi\xi_o \operatorname{sen}(n\pi) - n^2\pi^2 \cos(n\pi) \right\}. \quad (5.80)$$

Observando que a função seno é nula para qualquer múltiplo de  $\pi$  e que  $\cos(n\pi) = (-1)^n$ , pode-se reduzir a Equação (5.80) a

$$\int_0^{\xi_o} \frac{1}{2} \operatorname{sech}^2 \xi_o \sinh^2 \xi \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi\xi}{\xi_o} \right) d\xi = \frac{\xi_o}{8n\pi(4\xi_o^2 + n^2\pi^2) \cosh^2 \xi_o} \left\{ -\pi^2 n^2 (-1)^n e^{2\xi_o} + 8\xi_o^2 [(-1)^n - 1] + 2\pi^2 n^2 (-1)^n - n^2 \pi^2 (-1)^n e^{-2\xi_o} \right\}, \quad (5.81)$$

ou ainda

$$\int_0^{\xi_o} \frac{1}{2} \operatorname{sech}^2 \xi_o \sinh^2 \xi \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi\xi}{\xi_o} \right) d\xi = \frac{\xi_o}{8n\pi(4\xi_o^2 + n^2\pi^2) \cosh^2 \xi_o} \left\{ 8\xi_o^2 [(-1)^n - 1] + 2\pi^2 n^2 (-1)^n - \pi^2 n^2 (-1)^n [e^{2\xi_o} + e^{-2\xi_o}] \right\}. \quad (5.82)$$

Notando que  $e^{2\xi_o} + e^{-2\xi_o} = 2 \cosh(2\xi_o)$ , pode-se reescrever a Equação (5.82) como

$$\int_0^{\xi_o} \frac{1}{2} \operatorname{sech}^2 \xi_o \sinh^2 \xi \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi\xi}{\xi_o} \right) d\xi = \frac{\xi_o}{8n\pi(4\xi_o^2 + n^2\pi^2) \cosh^2 \xi_o} \left\{ 8\xi_o^2 [(-1)^n - 1] + 2\pi^2 n^2 (-1)^n - 2\pi^2 n^2 (-1)^n \cosh(2\xi_o) \right\}. \quad (5.83)$$

Aplicando a Equação (5.83) em (5.79), tem-se que

$$B_n = \frac{4\xi_o^2 [(-1)^n - 1] + \pi^2 n^2 (-1)^n - \pi^2 n^2 (-1)^n \cosh(2\xi_o)}{4n\pi(4\xi_o^2 + n^2\pi^2) \operatorname{senh} \left( \frac{n\pi^2}{2\xi_o} \right) \cosh^2 \xi_o}. \quad (5.84)$$

Sabendo que  $\cosh 2\xi_o = 2 \operatorname{senh}^2 \xi_o + 1$ , pode-se reescrever a Equação (5.84) como sendo

$$B_n = \frac{4\xi_o^2 [(-1)^n - 1] + \pi^2 n^2 (-1)^n - \pi^2 n^2 (-1)^n (2 \operatorname{senh}^2 \xi_o + 1)}{4n\pi(4\xi_o^2 + n^2\pi^2) \operatorname{senh} \left( \frac{n\pi^2}{2\xi_o} \right) \cosh^2 \xi_o}. \quad (5.85)$$

Finalmente, realizando as devidas manipulações algébricas, pode-se chegar na seguinte expressão

$$B_n = \frac{(-1)^n [2\xi_o^2 - n^2\pi^2 \operatorname{senh}^2 \xi_o] - 2\xi_o^2}{n\pi(4\xi_o^2 + n^2\pi^2) \operatorname{senh} \left( \frac{n\pi^2}{2\xi_o} \right) \cosh^2 \xi_o}. \quad (5.86)$$

**SUBPROBLEMA D:**

A Equação governante do subproblema  $D$  é a Equação de Laplace, sendo expressa como

$$\frac{\partial^2 W_D}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 W_D}{\partial \theta^2} = 0. \quad (5.87)$$

As condições de contorno deste subproblema são dadas por

$$\begin{cases} W_D(\xi, 0) = 0, \\ W_D(\xi, \frac{\pi}{2}) = 0, \\ W_D(0, \theta) = 0, \\ W_D(\xi_o, \theta) = \frac{1}{2} \tanh^2 \xi_o \sin^2 \theta. \end{cases} \quad (5.88)$$

Como visto anteriormente, a solução para esse tipo de problema, em que apenas uma das condições de parede não é nula, assume a seguinte forma

$$W_D(\xi, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sinh(2n\xi) \sin(2n\theta). \quad (5.89)$$

Para determinação de  $D_n$ , resolve-se a seguinte equação

$$D_n = \frac{4}{\pi \sinh(2n\xi_o)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \tanh^2(\xi_o) \sin^2(\theta) \sin(2n\theta) d\theta. \quad (5.90)$$

Procedendo com a integração, tem-se que

$$D_n = \frac{4}{\pi \sinh(2n\xi_o)} \left[ -\frac{\tanh^2(\xi_o) [(2n^2 - 1) \cos(n\pi) + 1]}{8n(n^2 - 1)} \right], \quad (5.91)$$

ou ainda, sabendo que  $\cos(n\pi) = (-1)^n$ ,

$$D_n = \frac{4}{\pi \sinh(2n\xi_o)} \left[ -\frac{\tanh^2(\xi_o) [2(-1)^n n^2 - (-1)^n + 1]}{8n(n^2 - 1)} \right]. \quad (5.92)$$

Manipulando algebricamente, segue que

$$D_n = -\frac{\tanh^2(\xi_o) [2(-1)^n n^2 - (-1)^n + 1]}{2\pi n(n^2 - 1) \sinh(2n\xi_o)}. \quad (5.93)$$

Com base na Equação (5.93), é intuitivo pensar que há uma divisão por zero quando  $n$  assume o valor 1. Entretanto, deve-se tomar o limite de quando  $n$  tende a 1 para verificar que

$$D_1 = \frac{\operatorname{csch}(2\xi_o) \tanh^2(\xi_o)}{\pi}, \quad (5.94)$$

ou ainda

$$D_1 = \frac{1}{2\pi} \frac{\sinh(\xi_o)}{\cosh^3(\xi_o)}. \quad (5.95)$$

Resolvidos os subproblemas, para encontrar a solução geral basta somar cada uma das soluções parciais, de tal modo que

$$W(\xi, \theta) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sinh(\xi_o)}{\cosh^3(\xi_o)} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi\xi}{\xi_o}\right) \sinh\left(\frac{n\pi\theta}{\xi_o}\right) + \sum_{n=2}^{\infty} D_n \sinh(2n\xi) \operatorname{sen}(2n\theta). \quad (5.96)$$

Substituindo a Equação (5.96) na (5.71), pode-se determinar a expressão que indica o campo de velocidades do escoamento em um duto quarto-elíptico

$$u(\xi, \theta) = -\frac{1}{2} \frac{\sinh^2 \xi \operatorname{sen}^2 \theta}{\cosh^2 \xi_o} + \frac{1}{2\pi} \frac{\sinh(\xi_o) \sinh(2\xi) \operatorname{sen}(2\theta)}{\cosh^3(\xi_o)} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi\xi}{\xi_o}\right) \sinh\left(\frac{n\pi\theta}{\xi_o}\right) + \sum_{n=2}^{\infty} D_n \sinh(2n\xi) \operatorname{sen}(2n\theta). \quad (5.97)$$

Em posse da expressão para o campo de velocidades, pode-se obter também a vazão, bastando integrar a Equação (5.98) no domínio da elipse. Dessa forma, segue que

$$Q = \int_0^{\xi_o} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\cosh^2 \xi - \cos^2 \theta)}{\cosh^2 \xi_o} \left\{ -\frac{1}{2} \frac{\sinh^2 \xi \operatorname{sen}^2 \theta}{\cosh^2 \xi_o} + \frac{1}{2\pi} \frac{\sinh(\xi_o) \sinh(2\xi) \operatorname{sen}(2\theta)}{\cosh^3(\xi_o)} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi\xi}{\xi_o}\right) \sinh\left(\frac{n\pi\theta}{\xi_o}\right) + \sum_{n=2}^{\infty} D_n \sinh(2n\xi) \operatorname{sen}(2n\theta) \right\} d\theta d\xi. \quad (5.98)$$

Os detalhes desta integração podem ser vistos Vide Apêndice I.6. Fato é que seu resultado é expresso por

$$Q = -\frac{(\pi^2 - 8)}{32\pi} \tanh^3 \xi_o + \frac{\xi_o^2}{\cosh^2 \xi_o} \sum_{n=1}^{\infty} B_n G_n + \frac{1}{8 \cosh^2 \xi_o} \sum_{n=2}^{\infty} D_n H_n, \quad (5.99)$$

em que

$$G_n = \frac{(-1)^n \left[ \sinh^2 \xi_o - \cosh\left(\frac{\pi^2 n}{2\xi_o}\right) \cosh^2 \xi_o \right] + \cosh\left(\frac{\pi^2 n}{2\xi_o}\right)}{4\xi_o^2 + \pi^2 n^2}$$

e

$$H_n = \frac{2n(-1)^n - \sinh(2\xi_o) \sinh(2\xi_o n) [1 - (-1)^n] - 2n \cosh(2\xi_o n) [(-1)^n \cosh^2 \xi_o - \sinh^2 \xi_o]}{(n-1)n(n+1)}.$$

Para determinação da expressão para a velocidade média do escoamento, basta pegar o resultado obtido para a vazão e dividir pela área da seção transversal do duto. Uma vez que a área adimensional da seção quarto-elíptica é dada por  $A = \frac{\pi\alpha}{4}$ , tem-se que

$$\bar{u} = \frac{4}{\pi\alpha} \left\{ -\frac{(\pi^2 - 8)}{32\pi} \tanh^3 \xi_o + \frac{\xi_o^2}{\cosh^2 \xi_o} \sum_{n=1}^{\infty} B_n G_n + \frac{1}{8 \cosh^2 \xi_o} \sum_{n=2}^{\infty} D_n H_n \right\}. \quad (5.100)$$

## 6 RESULTADOS DA SEÇÃO QUARTO-ELÍPTICA

Em posse das expressões analíticas que descrevem o comportamento do escoamento de Hagen-Poiseuille em um canal quarto-elíptico, tem-se como nova meta comprovar a equivalência entre as duas abordagens analíticas adotadas, além de validá-las através de um comparativo efetuado com base em dados disponíveis na literatura.

Tratando inicialmente da vazão adimensional, selecionou-se quatro razões de aspecto para aferição dos resultados obtidos para cada uma das abordagens. A Tabela 6.1 compila os resultados encontrados.

Tabela 6.1: Vazão obtida através dos dois métodos analíticos para diferentes razões de aspecto.

$Q$	Transformada Finita de Seno	Método de Fourier	Diferença entre os métodos
$\alpha = 0,25$	$6,510 \times 10^{-4}$	$6,440 \times 10^{-4}$	$7,0 \times 10^{-6}$
$\alpha = 0,50$	$4,216 \times 10^{-3}$	$4,214 \times 10^{-3}$	$2,0 \times 10^{-6}$
$\alpha = 0,75$	$1,116 \times 10^{-2}$	$1,115 \times 10^{-2}$	$6,0 \times 10^{-6}$
$\alpha = 0,99$	$2,016 \times 10^{-2}$	$2,014 \times 10^{-2}$	$2,5 \times 10^{-5}$

De acordo com a nota publicada por Lopes e Alassar (2022), o limite assintótico, i.e. momento em que os semi-eixos se igualam, da vazão é dado por

$$Q = \frac{\pi}{24} - \frac{\ln 2}{2\pi} = 2,058 \times 10^{-2}. \quad (6.1)$$

Percebe-se que à medida que a razão de aspecto se aproxima do valor unitário, a solução converge para o limite assintótico apresentado.

Procedeu-se com a mesma análise para a velocidade média adimensional do escoamento. A Tabela 6.2 retorna os resultados encontrados para este parâmetro.

Tabela 6.2: Velocidade média obtida através dos dois métodos analíticos para diferentes razões de aspecto.

$\bar{u}$	Transformada Finita de Seno	Método de Fourier	Diferença entre os métodos
$\alpha = 0,25$	$3,309 \times 10^{-3}$	$3,282 \times 10^{-3}$	$2,7 \times 10^{-5}$
$\alpha = 0,50$	$1,073 \times 10^{-2}$	$1,073 \times 10^{-2}$	$1,0 \times 10^{-6}$
$\alpha = 0,75$	$1,895 \times 10^{-2}$	$1,894 \times 10^{-2}$	$7,0 \times 10^{-6}$
$\alpha = 0,99$	$2,594 \times 10^{-2}$	$2,590 \times 10^{-2}$	$3,3 \times 10^{-4}$

A nota publicada por Lopes e Alassar (2022) também traz o limite assintótico da velocidade média, expresso por

$$\bar{u} = \frac{1}{6} - \frac{2 \ln 2}{\pi^2} = 2,620 \times 10^{-2}. \quad (6.2)$$

Mais uma vez, nota-se que a solução converge para o limite assintótico quando os semi-eixos tendem a se igualar.



Analogamente, pode-se analisar o parâmetro de queda de pressão do escoamento ( $fRe$ ). A Tabela 6.3 compila os resultados obtidos no processo.

Tabela 6.3:  $fRe$  obtido através dos dois métodos analíticos para diferentes razões de aspecto.

$fRe$	Transformada Finita de Seno	Método de Fourier	Diferença entre os métodos
$\alpha = 0,25$	17,278	17,421	$1,43 \times 10^{-1}$
$\alpha = 0,50$	15,638	15,639	$6,20 \times 10^{-4}$
$\alpha = 0,75$	14,937	14,942	$5,24 \times 10^{-3}$
$\alpha = 0,99$	14,772	14,790	$1,85 \times 10^{-2}$

Encontra-se ainda na nota publicada por Lopes e Alassar (2022) o limite assintótico para o  $fRe$ , que corresponde a

$$fRe = \frac{12\pi^4}{(\pi^2 - 12 \ln 2)(\pi + 4)^2} = 14,768. \quad (6.3)$$

Novamente, é possível observar que a solução se manteve tendente a atender o limite assintótico no caso de os semi-eixos se igualarem.

É oportuno comentar a respeito do número de termos adotados nos somatórios de cada uma das abordagens. No caso da solução via Transformada finita de seno, implementaram-se somatórios que vão de 0 a 50 para as variáveis  $m$  e  $n$ . Já para a solução via Método de Fourier, estabeleceu-se um somatório que vai de 0 a 70 para a variável  $n$ .

Partindo agora para a análise gráfica, a Figura 6.1 traz quatro parâmetros adimensionais do escoamento em termos da razão de aspecto, sendo eles: (a) a vazão, (b) a velocidade média, (c) o  $fRe$  e (d) o diâmetro hidráulico.

Tratando primeiramente da vazão, percebe-se esta apresenta comportamento crescente com tendência de aumentar cada vez mais à medida que a seção se aproxima do caso quarto-circular. Ademais, o gráfico respeita o limite assintótico encontrado por Lopes e Alassar (2022), sendo  $Q \approx 0,020581$  quando  $\alpha \rightarrow 1$ , o que indica precisão dos resultados.

O gráfico da velocidade média também mostra tendência de crescimento à medida que a razão de aspecto se aproxima de 1. Entretanto, diferentemente da vazão, a velocidade média aparentar ter comportamento de crescimento quase que linear entre  $\alpha = 0,3$  e  $0,9$ . Além disso, este gráfico também respeitou o limite assintótico proposto por Lopes e Alassar (2022), uma vez que  $\bar{u} \approx 0,026205$  quando  $\alpha \rightarrow 1$ , indicando validação da expressão para a velocidade média.

O parâmetro de queda de pressão,  $fRe$ , também foi avaliado em termos da razão de aspecto. Diferentemente dos outros parâmetros, é possível observar comportamento decrescente da curva, que começa com valores da ordem de  $fRe = 22,965855$  quando  $\alpha \approx 0$  e  $fRe = 14,768763$  à medida que a seção se aproxima do limite assintótico  $\alpha \rightarrow 1$ . Mais uma vez, percebe-se que os valores foram fidedignos aos dados encontrados na nota publicada por Lopes e Alassar (2022), o que valida resultado.

Estudou-se ainda a curva do diâmetro hidráulico da seção em termos da razão de aspecto. O gráfico resultante apresenta comportamento crescente, mas não linear. Verifica-se  $D_h = 0$  em  $\alpha = 0$  e  $D_h = 0,879801$  quando a razão de aspecto toma valor  $\alpha = 1$ .

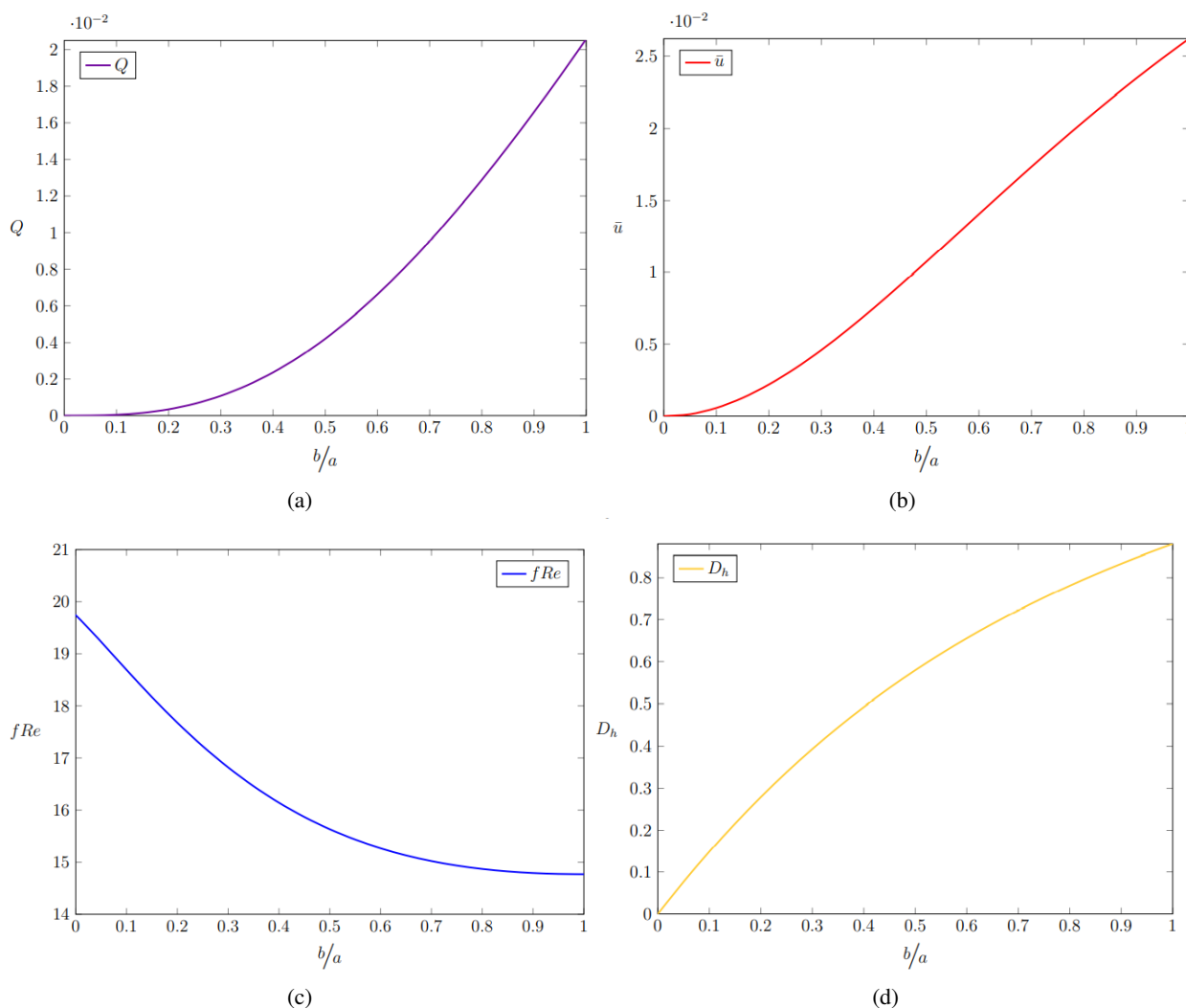


Figura 6.1: Parâmetros avaliados em função da razão de aspecto: (a) Vazão ( $Q$ ) X Razão de aspecto ( $\alpha$ ), (b) Velocidade média ( $\bar{u}$ ) X Razão de aspecto ( $\alpha$ ), (c)  $fRe$  X Razão de aspecto ( $\alpha$ ) e (d) Diâmetro hidráulico ( $D_h$ ) X Razão de aspecto ( $\alpha$ ).

O campo de velocidades adimensional referente a escoamentos de Hagen-Poiseuille em dutos com seções transversais constantes é caracterizado por conter uma região de maior velocidade em seu interior, ao passo que no bordo encontra-se uma região com velocidade nula – devido à condição de não-escorregamento. Ademais, espera-se que esta velocidade adimensional cresça no interior da seção à medida que a razão de aspecto aumenta. Apesar desse aumento parecer contraintuitivo, há de se ter em mente que a análise está sendo baseada em termos de um parâmetro adimensional, que não externa o comportamento do fenômeno em sua literalidade.

A Figura 6.2 apresenta os mapas de cores que traduzem o comportamento do campo de velocidades adimensional na seção quarto-elíptica para diferentes razões de aspecto, sendo elas: (a)  $\alpha = 0,25$ , (b)  $\alpha = 0,50$ , (c)  $\alpha = 0,75$  e (d)  $\alpha = 0,99$ . Percebe-se aumento gradual da ve-

localidade adimensional à medida que a razão de aspecto se aproxima do caso assintótico – caso quarto-circular. Isso pode ser justificado por conta da diminuição dos efeitos da condição de não-escorregamento no escoamento quando o domínio do bordo tende a se afastar cada vez mais. Dessa forma, verificou-se velocidade adimensional máxima de  $u = 0,006883$  para  $\alpha = 0,25$ ,  $u = 0,022440$  para  $\alpha = 0,50$ ,  $u = 0,039810$  para  $\alpha = 0,75$  e  $u = 0,054730$  para  $\alpha = 0,99$ . Vale notar que o comportamento do campo de velocidades adimensional encontrado neste trabalho foi coerente com os resultados por Kyritsi-Yiallourou e Georgiou (2018) para o limite assintótico da seção, o que valida o método.

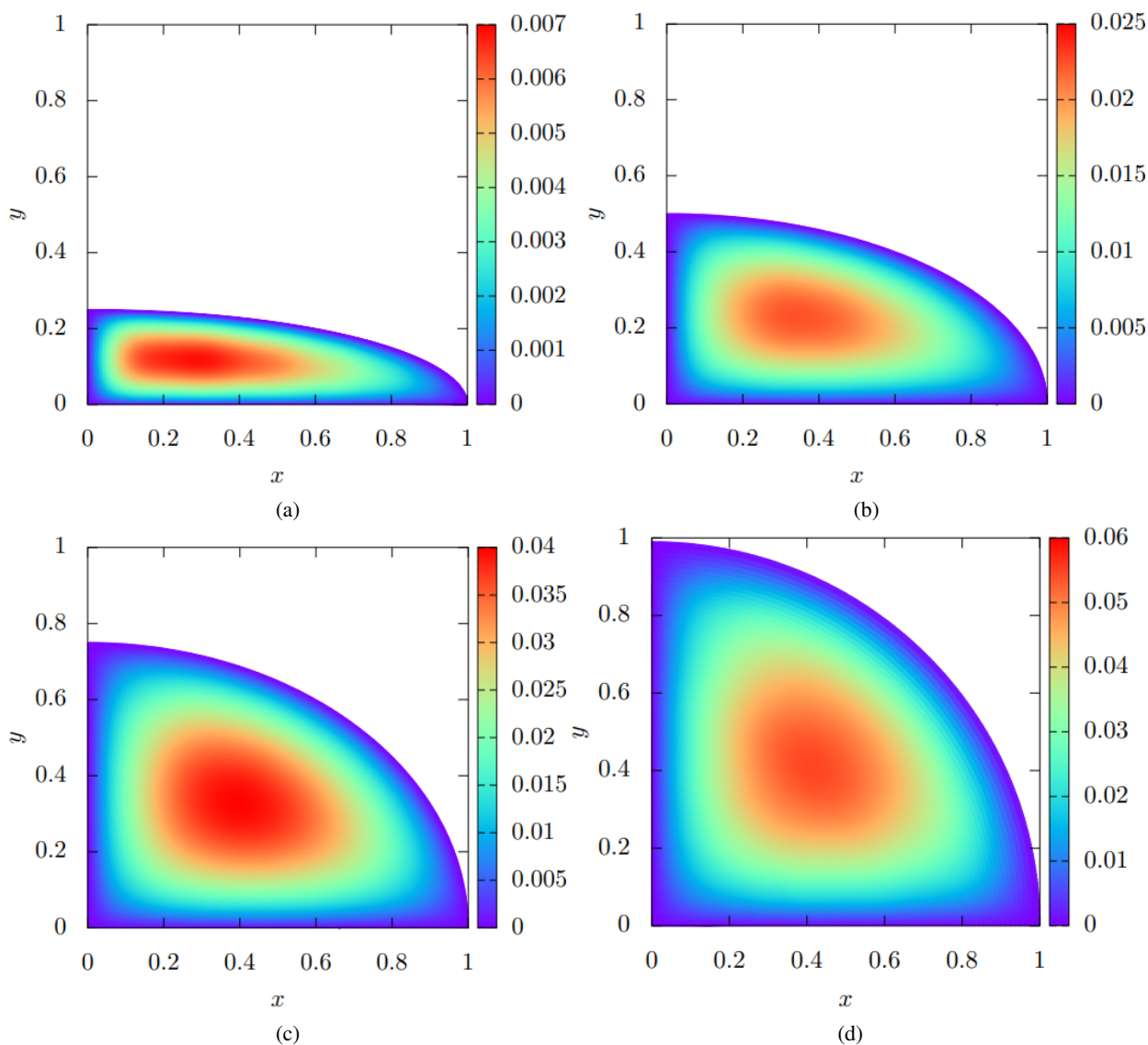


Figura 6.2: Campo de velocidades adimensional, no sistema de coordenadas cartesiano, para o duto quarto elíptico. As razões de aspecto trabalhadas foram (a)  $\alpha = 0.25$ , (b)  $\alpha = 0.50$ , (c)  $\alpha = 0.75$  e (d)  $\alpha = 0.99$ .

# 7 CONCLUSÃO

Este capítulo dispõe sobre um panorama geral do que foi feito ao longo deste trabalho, revisando as ferramentas utilizadas durante a elaboração da pesquisa, discutindo acerca dos resultados encontrados e concluindo a respeito dos dados extraídos. Além disso, comenta-se sobre o poder que as ferramentas apresentadas neste trabalho possuem na resolução de problemas de outras áreas do conhecimento. Por fim, apresentam-se sugestões para trabalhos futuros que venham a se desenvolver neste mesmo seguimento.

## 7.1 DISPOSIÇÕES FINAIS

Pode-se dizer que o objetivo do presente trabalho de encontrar uma solução analítica para o escoamento de Hagen-Poiseuille em um duto com seção transversal quarto-elíptica constante foi alcançado com sucesso. A validação da solução foi feita por meio da comparação entre duas abordagens analíticas diferentes: o método de Fourier e a transformada finita de seno.

Em primeiro momento, os esforços foram direcionados para a apresentação das ferramentas necessárias para o desenvolvimento da solução analítica do problema. O sistema de coordenadas elípticas e o método de Fourier foram introduzidos ao leitor resolvendo o caso anteriormente desbravado por Boussinesq (1868), quando este propôs uma solução analítica para o escoamento de um fluido Newtoniano incompressível, movido por um gradiente de pressão, que percorre um canal com seção transversal elíptica. Nesta oportunidade, geraram-se gráficos e mapas de cores que ilustram o comportamento do escoamento sujeito a essas condições, sendo estes resultados condizentes com os encontrados por Boussinesq.

Posteriormente, apresentou-se, detalhadamente, o procedimento adotado na aplicação da transformada finita de seno para obtenção de uma solução para o escoamento de Hagen-Poiseuille em um canal retangular constante. O algoritmo de resolução da transformada finita de seno é o mesmo para qualquer seção transversal constante, de tal modo que foi possível aproveitar o formulário adquirido neste exemplo para produzir a solução do caso quarto-elíptico. No final desta seção, encontra-se a expressão que descreve o campo de velocidades na seção retangular.

Com a utilização das duas técnicas mencionadas, encontraram-se expressões analíticas que descrevem o comportamento do escoamento através do duto quarto-elíptico. Foram obtidos parâmetros como o campo de velocidades, a velocidade média, a vazão, o diâmetro Hidráulico, além do  $fRe$  para quatro razões de aspecto ( $\alpha$ ) diferentes: 0.25, 0.50, 0.75 e 0.99. Verificou-se que ambas as soluções produziram resultados suficientemente próximos. Prova disso é que os resultados da vazão e da velocidade média começam a diferir a partir da quinta casa decimal, quando utilizada a mesma razão de aspecto. Isso indica que há equivalência entre as duas abordagens.

Ademais, comparando estes resultados com os dados encontrados na literatura para o limite assintótico da seção quarto-elíptica, observou-se convergência dos valores para o que era esperado, o que valida a análise.

É oportuno comentar que o Software utilizado para implementação da solução analítica foi o Synder Python, auxiliado por uma máquina com capacidade computacional de 16 GB de memória RAM. O tempo estimado para cada coleta de resultados variou entre 8 e 10 minutos. O custo computacional mostrou relação diretamente proporcional ao número de índices adotados nos somatórios. Com vistas a obter o menor tempo de operação possível com resultados satisfatoriamente adequados, optou-se por trabalhar com índices de até 70 nos somatórios das expressões encontradas.

Vale frisar que as ferramentas apresentadas neste trabalho não se restringem a aplicações envolvendo mecânica dos fluidos. Problemas de outras áreas do conhecimento podem ser solucionados por meio do mesmo algoritmo de resolução, desde que envolvam condições de contorno semelhantes às encontradas nesta pesquisa, assim como comenta Bazant (2016).

Como proposta para trabalhos futuros, sugere-se a investigação analítica e numérica do escoamento de Hagen-Poiseuille para os demais casos de seções que envolvem perfis elípticos: seção transversal com três quartos de elipse, seção transversal com quatro quartos de elipse e seção setor elíptico, i.e, com qualquer ângulo de abertura entre os semi-eixos. Dessa forma, seriam preenchidas as lacunas ainda existentes na literatura para escoamentos de Hagen-Poiseuille envolvendo esse tipo de seção. Além disso, pode-se trabalhar com escoamentos em regime turbulento, dutos curvilíneos ou até mesmo com a análise das trocas de calor por convecção natural e forçada.

# REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- 1 JIAN, G.; WANG, S.; SUN, L.; WEN, J. Numerical investigation on the application of elliptical tubes in a spiral-wound heat exchanger used in LNG plant. International Journal of Heat and Mass Transfer, Elsevier, v. 130, p. 333–341, 2019.
- 2 SHAH, R.; LONDON, A. Laminar flow forced convection in ducts. [S.l.]: Elsevier, 1978. v. 1.
- 3 ALASSAR, R. S.; ABUSHOSHAH, M. Hagen–poiseuille flow in semi-elliptic microchannels. Journal of Fluids Engineering, American Society of Mechanical Engineers Digital Collection, v. 134, n. 12, 2012.
- 4 THOMAS, R.; WALTERS, K. On the flow of an elastico-viscous liquid in a curved pipe of elliptic cross-section under a pressure-gradient. Journal of Fluid Mechanics, Cambridge University Press, v. 21, n. 1, p. 173–182, 1965.
- 5 DONG, Z.; EBADIAN, M. Numerical analysis of laminar flow in curved elliptic ducts. 1991.
- 6 SILVA, R. J.; VALLE, R. M.; ZIVIANI, M. Numerical hydrodynamic and thermal analysis of laminar flow in curved elliptic and rectangular ducts. International Journal of Thermal Sciences, Elsevier, v. 38, n. 7, p. 585–594, 1999.
- 7 NIKITIN, N.; YAKHOT, A. Direct numerical simulation of turbulent flow in elliptical ducts. Journal of Fluid Mechanics, Cambridge University Press, v. 532, p. 141–164, 2005.
- 8 TAMAYOL, A.; BAHRAMI, M. Analytical solutions for laminar fully-developed flow in microchannels with non-circular cross-section. In: Fluids Engineering Division Summer Meeting. [S.l.: s.n.], 2009. v. 43727, p. 1323–1333.
- 9 WANG, C. On viscous flow in semi-elliptic ducts. Journal of Fluids Engineering, American Society of Mechanical Engineers Digital Collection, v. 137, n. 11, 2015.
- 10 MUKHERJEE, S.; GUPTA, A.; CHHABRA, R. Laminar forced convection in power-law and bingham plastic fluids in ducts of semi-circular and other cross-sections. International Journal of Heat and Mass Transfer, Elsevier, v. 104, p. 112–141, 2017.
- 11 LOPES, A. v. B.; SIQUEIRA, I. Couette–poiseuille flow in semi-elliptic channels. Journal of Fluids Engineering, American Society of Mechanical Engineers, v. 144, n. 10, p. 101302, 2022.
- 12 SOLIMAN, H.; MUNIS, A.; TRUPP, A. Laminar flow in the entrance region of circular sector ducts. ASME Journal of Applied Mechanics, v. 49, p. 640–642, 1982.
- 13 LI, Z.-Y.; HUNG, T.-C.; TAO, W.-Q. Numerical simulation of fully developed turbulent flow and heat transfer in annular-sector ducts. Heat and Mass Transfer, Springer, v. 38, n. 4, p. 369–377, 2002.
- 14 MYLAVARAPU, S. K.; SUN, X.; CHRISTENSEN, R. N. Hydrodynamically developing and fully developed laminar flows in a semicircular duct: Analytical and computational analyses. Nuclear Science and Engineering, Taylor & Francis, v. 182, n. 3, p. 319–331, 2016.
- 15 SPIGA, M.; MORINO, G. A symmetric solution for velocity profile in laminar flow through rectangular ducts. International Communications in Heat and Mass Transfer, Elsevier, v. 21, n. 4, p. 469–475, 1994.
- 16 POISEUILLE, J. L. Recherches expérimentales sur le mouvement des liquides dans les tubes de très-petits diamètres. [S.l.]: Imprimerie Royale, 1844.

- 17 HAGEN, G. Ueber die bewegung des wassers in engen cylindrischen röhren. Annalen der Physik, Wiley Online Library, v. 122, n. 3, p. 423–442, 1839.
- 18 ALEGRIA, L. M. C. Soluções analíticas e numéricas para o escoamento laminar desenvolvido de fluido viscoplástico em dutos e anulares elípticos. Dissertação (Mestrado) — Universidade Tecnológica Federal do Paraná, 2011.
- 19 ZHU, Y.; SHU, C.; QIU, J.; TANI, J. Numerical simulation of natural convection between two elliptical cylinders using dq method. International Journal of Heat and Mass Transfer, Elsevier, v. 47, n. 4, p. 797–808, 2004.
- 20 BOUSSINESQ, J. Mémoire sur l'influence des frottements dans les mouvements réguliers des fluids. Journal de mathématiques pures et appliquées, v. 13, n. 2, p. 377–424, 1868.
- 21 DEAN, W. R. Xvi. note on the motion of fluid in a curved pipe. The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science, Taylor & Francis, v. 4, n. 20, p. 208–223, 1927.
- 22 EUSTICE, J. Experiments on stream-line motion in curved pipes. Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character, The Royal Society London, v. 85, n. 576, p. 119–131, 1911.
- 23 SRIVASTAVA, R. On the motion of a fluid in a curved pipe of elliptical cross-section. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik ZAMP, Springer, v. 31, n. 2, p. 297–303, 1980.
- 24 TOPAKOGLU, H.; EBADIAN, M. On the steady laminar flow of an incompressible viscous fluid in a curved pipe of elliptical cross-section. Journal of Fluid Mechanics, Cambridge University Press, v. 158, p. 329–340, 1985.
- 25 ALASSAR, R. Fully developed forced convection through semi-elliptic ducts. Applied Mathematics and Mechanics, Springer, v. 37, n. 1, p. 37–44, 2016.
- 26 SARKAR, U.; BISWAS, N.; ÖZTOP, H. F. Multiplicity of solution for natural convective heat transfer and entropy generation in a semi-elliptical enclosure. Physics of Fluids, AIP Publishing LLC, v. 33, n. 1, p. 013606, 2021.
- 27 LANGLOIS, W. E.; DEVILLE, M. O. Slow viscous flow. [S.l.]: Springer, 1964. v. 173436.
- 28 ARFKEN, G. B. Mathematical methods for physicists. 2005.
- 29 BROWN, H. K. Resolution of temperature problems by the use of finite Fourier transformations. Bulletin of the American Mathematical Society, American Mathematical Society, v. 50, n. 6, p. 376–385, 1944.
- 30 BROWN, H. K. The resolution of boundary value problems by means of the finite Fourier transformation: General vibration of a string. Journal of Applied Physics, American Institute of Physics, v. 14, n. 11, p. 609–618, 1943.
- 31 LOPES, A. v. B.; ALASSAR, R. S. Comment on “Newtonian Poiseuille flow in ducts of annular-sector cross-sections with Navier slip”. European Journal of Mechanics-B/Fluids, Elsevier, v. 96, p. 105–107, 2022.
- 32 KYRITSI-YIALLOUROU, S.; GEORGIU, G. C. Newtonian Poiseuille flow in ducts of annular-sector cross-sections with Navier slip. European Journal of Mechanics-B/Fluids, Elsevier, v. 72, p. 87–102, 2018.
- 33 BAZANT, M. Z. Exact solutions and physical analogies for unidirectional flows. Physical Review Fluids, APS, v. 1, n. 2, p. 024001, 2016.

## APÊNDICES



# I. REFERÊNCIAS MATEMÁTICAS

## I.1 OBTENÇÃO DA EXPRESSÃO DA VAZÃO

A vazão é dada por

$$Q = \iint u \, dA.$$

Fazendo  $y = ar \cos \theta$  e  $z = br \sin \theta$ , temos que

$$Q = \iint u |J| \, dr \, d\theta,$$

em que  $J$  é o Jacobiano da transformação, i.e.,

$$\begin{aligned} J &= \frac{\partial(y, z)}{\partial(r, \theta)} \\ &= \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Por conseguinte,

$$\begin{aligned} J &= \begin{vmatrix} a \cos \theta & -ar \sin \theta \\ b \sin \theta & br \cos \theta \end{vmatrix} \\ &= abr \cos^2 \theta + abr \sin^2 \theta \\ &= abr. \end{aligned}$$

A elipse nas novas variáveis é descrita por

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} \\ &= \frac{a^2 r^2 \cos^2 \theta}{a^2} + \frac{b^2 r^2 \sin^2 \theta}{b^2} \\ &= r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta \\ &= r^2, \end{aligned}$$

ou seja,  $r = 1$ , de modo que  $0 \leq r \leq 1$  e  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ . Por outro lado, o perfil de velocidades pode ser escrito como

$$\begin{aligned} u &= u_0 \left( 1 - \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} \right) \\ &= u_0 \left( 1 - \frac{a^2 r^2 \cos^2 \theta}{a^2} - \frac{b^2 r^2 \sin^2 \theta}{b^2} \right) \\ &= u_0 (1 - r^2 \cos^2 \theta - r^2 \sin^2 \theta) \\ &= u_0 (1 - r^2). \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} Q &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 uabr \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 u_0 (1 - r^2) ab r \, dr \, d\theta \\ &= u_0 ab \int_0^1 (r - r^3) \, dr \int_0^{2\pi} 1 \, d\theta \\ &= 2\pi u_0 ab \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) \\ &= \frac{\pi ab u_0}{2}. \end{aligned}$$

Utilizando o resultado do item (a), segue que

$$\begin{aligned} Q &= -\frac{1}{2\mu} \left( \frac{a^2 b^2}{b^2 + a^2} \right) \frac{dp}{dx} \frac{\pi ab}{2} \\ &= -\frac{\pi}{4\mu} \left( \frac{a^3 b^3}{b^2 + a^2} \right) \frac{dp}{dx}. \end{aligned}$$

## I.2 OBTENÇÃO DA VELOCIDADE MÁXIMA EM TERMOS DA RAZÃO DE ASPECTO

Sabendo que

$$\tanh \xi_o = \frac{\sinh \xi_o}{\cosh \xi_o} = \alpha, \quad (\text{I.1})$$

é fácil perceber que

$$\sinh \xi_o = \alpha \cosh \xi_o. \quad (\text{I.2})$$

Dessa forma, recorrendo à identidade fundamental da trigonometria hiperbólica, tem-se que

$$\cosh^2 \xi_o - \sinh^2 \xi_o = 1. \quad (\text{I.3})$$

Aplicando (I.2) em (I.3), chega-se em

$$\cosh^2 \xi_o - \alpha^2 \cosh^2 \xi_o = 1, \quad (\text{I.4})$$

manipulando algebricamente, segue que

$$\cosh \xi_o = \sqrt{\frac{1}{1 - \alpha^2}}. \quad (\text{I.5})$$

Realizando procedimento análogo, pode-se obter a expressão do seno hiperbólico em termos da razão de aspecto. Com isso, aplicando (I.2) em (I.3), porém deixando a expressão em termos de seno hiperbólico, tem-se que

$$\frac{\sinh^2 \xi_o}{\alpha^2} - \sinh^2 \xi_o = 1. \quad (\text{I.6})$$

Manipulando algebricamente, é possível obter a seguinte expressão

$$\sinh \xi_o = \sqrt{\frac{\alpha^2}{1 - \alpha^2}}. \quad (\text{I.7})$$

A respeito da parte final das contas, em que utilizou-se das Equações (3.39), (3.42), (3.82) e (3.81) para encontrar a expressão para a velocidade máxima, procedeu-se de seguinte forma

$$u_{\text{máx}} = \frac{c^2}{2 \cosh 2\xi_o} \sinh^2 \xi_o \cosh^2 \xi_o. \quad (\text{I.8})$$

Substituindo as equações mencionadas na expressão da velocidade máxima, tem-se

$$u_{\text{máx}} = \frac{\frac{\alpha^2(1-\alpha^2)}{(1-\alpha^2)^2}}{2 \left[ 2 \left( \frac{1}{1-\alpha^2} \right) - 1 \right]}. \quad (\text{I.9})$$

Simplificando a expressão, segue que

$$u_{\text{máx}} = \frac{\alpha^2}{2(1 + \alpha^2)}. \quad (\text{I.10})$$

### I.3 OBTENÇÃO DA VAZÃO EM TERMOS DA RAZÃO DE ASPECTO

Uma vez encontrada a velocidade do escoamento em coordenadas elípticas

$$u = \frac{c^2}{8 \cosh 2\xi_o} (\cosh 2\xi_o - \cos 2\theta)(\cosh 2\xi_o - \cosh 2\xi), \quad (\text{I.11})$$

pode-se expandir seus termos e obter a seguinte expressão

$$u = \frac{c^2}{8 \cosh 2\xi_o} (\cosh^2 \xi_o + \cosh 2\xi \cos \theta - \cosh 2\xi_o \cosh 2\xi - \cos 2\theta \cosh 2\xi_o), \quad (\text{I.12})$$

ou ainda

$$u = \frac{c^2}{8} \left( \cosh 2\xi_o + \frac{\cosh 2\xi \cos 2\theta}{\cosh 2\xi_o} - \cosh 2\xi - \cos 2\theta \right). \quad (\text{I.13})$$

Multiplicando essa velocidade pelo módulo do jacobiano das coordenadas elípticas, dado por

$$J = c^2 (\cosh^2 \xi - \cos^2 \theta), \quad (\text{I.14})$$

tem-se que a velocidade corrigida é dada por

$$u_{cor} = \frac{c^4 (\cosh^2 \xi - \cos^2 \theta)}{8} \left( \cosh 2\xi_o + \frac{\cosh 2\xi \cos 2\theta}{\cosh 2\xi_o} - \cosh 2\xi - \cos 2\theta \right). \quad (\text{I.15})$$

Recorrendo às identidades trigonométricas tratadas nas Equações (3.42) e (3.44), chega-se em

$$u_{cor} = \frac{c^4 (\cosh 2\xi_o + 1 - \cos 2\theta - 1)}{8 \cdot 2} \left( \cosh 2\xi_o + \frac{\cosh 2\xi \cos 2\theta}{\cosh 2\xi_o} - \cosh 2\xi - \cos 2\theta \right). \quad (\text{I.16})$$

Realizando a devida distribuição, obtém-se a seguinte expressão

$$u_{cor} = \frac{c^4}{16} \left[ \cosh 2\xi \cosh 2\xi_o + \frac{\cosh^2 2\xi \cos 2\theta}{\cosh 2\xi_o} - \cosh^2 2\xi - \cosh 2\xi_o \cos 2\theta - \frac{\cosh 2\xi \cos^2 2\theta}{\cosh 2\xi_o} + \cos^2 2\theta \right]. \quad (\text{I.17})$$

O próximo passo é aplicar a integral dupla no domínio da elipse para que seja retornada a vazão. Dito isto,

$$Q = \int_0^{\xi_o} \int_0^{2\pi} \frac{c^4}{16} \left[ \cosh 2\xi \cosh 2\xi_o + \frac{\cosh^2 2\xi \cos 2\theta}{\cosh 2\xi_o} - \cosh^2 2\xi - \cosh 2\xi_o \cos 2\theta - \frac{\cosh 2\xi \cos^2 2\theta}{\cosh 2\xi_o} + \cos^2 2\theta \right] d\theta d\xi. \quad (\text{I.18})$$

Integrando primeiramente em relação a  $\theta$ , obtém-se o seguinte resultado

$$Q = \frac{c^4}{16} \int_0^{\xi_o} \left[ \cosh 2\xi \cosh 2\xi_o \theta \Big|_0^{2\pi} + \frac{\cosh^2 2\xi}{\cosh 2\xi_o} \frac{\sen 2\theta}{2} \Big|_0^{2\pi} - \cosh^2 2\xi \theta \Big|_0^{2\pi} - \cosh 2\xi_o \frac{\sen 2\theta}{2} \Big|_0^{2\pi} - \frac{\cosh 2\xi}{\cosh 2\xi_o} \left( \frac{\theta}{2} + \frac{\sen 4\theta}{8} \right) \Big|_0^{2\pi} + \left( \frac{\theta}{2} + \frac{\sen 4\theta}{8} \right) \Big|_0^{2\pi} \right] d\xi, \quad (\text{I.19})$$

donde segue que

$$Q = \frac{c^4}{16} \int_0^{\xi_o} \left[ 2\pi \cosh 2\xi \cosh 2\xi_o - 2\pi \cosh^2 2\xi - \frac{\pi \cosh 2\xi}{\cosh 2\xi_o} + \pi \right]. \quad (\text{I.20})$$

Integrando agora com respeito a  $\xi$ , obtém-se a seguinte expressão

$$Q = \frac{\pi c^4}{16} \left[ \cosh 2\xi_o \senh 2\xi \Big|_0^{\xi_o} - \left( \frac{\cosh 2\xi \senh 2\xi}{2} + \xi \right) \Big|_0^{\xi_o} - \frac{1}{\cosh 2\xi_o} \left( \frac{\senh 2\xi}{2} \right) \Big|_0^{\xi_o} + \xi \Big|_0^{\xi_o} \right], \quad (\text{I.21})$$

ou ainda

$$Q = \frac{\pi c^4}{16} \left[ \frac{\cosh 2\xi_o \senh 2\xi_o}{2} - \frac{\senh 2\xi_o}{2 \cosh 2\xi_o} \right]. \quad (\text{I.22})$$

Manipulando algebricamente esta expressão, tem-se que

$$Q = \frac{\pi c^4}{32} \left[ \frac{\cosh^2 2\xi_o \senh 2\xi_o - \senh 2\xi_o}{\cosh 2\xi_o} \right], \quad (\text{I.23})$$

donde segue que

$$Q = \frac{\pi c^4}{32} \left[ \frac{\senh 2\xi_o (\cosh^2 2\xi_o - 1)}{\cosh 2\xi_o} \right] = \frac{\pi c^4}{32} \left[ \frac{\senh^3 2\xi_o}{\cosh 2\xi_o} \right]. \quad (\text{I.24})$$

Partindo para a adimensionalização da vazão, pode-se reescrever a Equação (I.24) em termos da

tangente hiperbólica, da seguinte forma

$$Q = \frac{\pi c^4}{32} \sinh^2 2\xi_o \tanh 2\xi_o. \quad (\text{I.25})$$

Neste momento, duas propriedades da trigonometria hiperbólica são necessárias. São elas

$$\tanh (A + B) = \frac{\tanh A + \tanh B}{1 + \tanh A \tanh B} \quad (\text{I.26})$$

e

$$\sinh (A + B) = \sinh A \cosh B + \sinh B \cosh A. \quad (\text{I.27})$$

Recorrendo às identidades (I.26) e (I.27), tem-se que

$$Q = \frac{\pi c^4}{32} (4 \sinh^2 \xi_o \cosh^2 \xi) \left( \frac{2 \tanh \xi_o}{1 + \tanh^2 \xi_o} \right). \quad (\text{I.28})$$

Simplificando, tem-se que

$$Q = \frac{\pi c^4}{8} (\sinh^2 \xi_o \cosh^2 \xi) \left( \frac{2 \tanh \xi_o}{1 + \tanh^2 \xi_o} \right). \quad (\text{I.29})$$

Recorrendo às identidades (3.39), (3.81), (3.82) e sabendo que

$$\tanh \xi_o = \alpha, \quad (\text{I.30})$$

obté-m-se

$$Q = \frac{\pi(1 - \alpha^2)^2}{8} \left[ \frac{\alpha^2}{(1 - \alpha^2)^2} \right] \left[ \frac{2\alpha}{1 + \alpha^2} \right], \quad (\text{I.31})$$

donde segue que

$$Q = \frac{\pi \alpha^3}{4(1 + \alpha^2)}. \quad (\text{I.32})$$

#### I.4 DESENVOLVIMENTO DA TRANSFORMADA FINITA DE SENO

A definição de transformada finita de seno em  $x$  pode ser expressa através da seguinte equação

$$\tilde{V}(n, y) = \int_0^L V(x, y) \operatorname{sen} \left( n\pi \frac{x}{L} \right) dx. \quad (\text{I.33})$$

Em que  $n$  corresponde a um número inteiro positivo.

Objetiva-se mostrar que

$$\frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial x^2} = -n^2 \pi^2 \tilde{V}(n, y) \quad (\text{I.34})$$

Aplicando o método da integral por partes em (I.33), tem-se que

$$\begin{aligned} u &= V(x, y) & v &= -\frac{L}{n\pi} \cos\left(n\pi \frac{x}{L}\right) \\ du &= \frac{\partial V(x, y)}{\partial x} dx & dv &= \text{sen}\left(n\pi \frac{x}{L}\right) dx \end{aligned}$$

Sabe-se que pelo método da integral por partes

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Substituindo as variáveis conhecidas, tem-se que

$$\tilde{V}(n, y) = -\frac{L}{n\pi} V(1, y) \cos(n\pi) + \frac{L}{n\pi} V(0, y) + \frac{L}{n\pi} \int_0^L \frac{\partial}{\partial x} V(x, y) \cos\left(n\pi \frac{x}{L}\right) dx. \quad (\text{I.35})$$

Perceba que o resultado do cosseno irá variar a depender do valor de  $n$ . Para  $n$  par, a função retorna o valor 1, pois  $2\pi, 4\pi, 6\pi$  são pontos coincidentes no plano trigonométrico. Diferentemente, tem-se que, para  $n$  com valor ímpar, a função cosseno retorna o valor  $-1$ , uma vez que  $\pi, 3\pi, 5\pi$  apontam para o mesmo ponto da circunferência. Vale lembrar que os valores adotados para  $n$  são números inteiros positivos. Dessa forma, pode-se representar essa alternância, de maneira matemática, da seguinte forma

$$\tilde{V}(n, y) = -\frac{L}{n\pi} (-1)^n V(1, y) + \frac{L}{n\pi} V(0, y) + \frac{L}{n\pi} \int_0^L \frac{\partial}{\partial x} V(x, y) \cos\left(n\pi \frac{x}{L}\right) dx \quad (\text{I.36})$$

Pode-se integrar por partes o último termo da expressão (I.36), de tal forma que

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial}{\partial x} V(x, y) & v &= \frac{L}{n\pi} \text{sen}\left(n\pi \frac{x}{L}\right) \\ du &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} V(x, y) dx & dv &= \cos\left(n\pi \frac{x}{L}\right) dx \end{aligned}$$

Reaplicando a fórmula da integral por partes

$$\int_0^L \frac{\partial}{\partial x} V(x, y) \cos\left(n\pi \frac{x}{L}\right) dx = \frac{L}{n\pi} \frac{\partial V(1, y)}{\partial x} \operatorname{sen}(n\pi) - \frac{L}{n\pi} \frac{\partial V(0, y)}{\partial x} \operatorname{sen}(0) - \frac{L}{n\pi} \int_0^L \frac{\partial^2}{\partial x^2} V(x, y) \operatorname{sen}\left(n\pi \frac{x}{L}\right) dx. \quad (\text{I.37})$$

É imediato perceber que os dois primeiros termos do lado direito da equação (I.37) são zerados, uma vez que os limites de integração a serem aplicados na função seno são 0 e um múltiplo de  $\pi$ , de tal forma que resta

$$\int_0^L \frac{\partial}{\partial x} V(x, y) \cos\left(n\pi \frac{x}{L}\right) dx = -\frac{L}{n\pi} \int_0^L \frac{\partial^2}{\partial x^2} V(x, y) \operatorname{sen}\left(n\pi \frac{x}{L}\right) dx. \quad (\text{I.38})$$

Perceba também que a expressão encontrada na integral da equação (I.38) possui o mesmo formato do que foi apresentado para a definição de transformada finita de seno, na equação (I.33). Dessa forma, é fácil perceber que expressão pode ser reduzida a

$$\int_0^L \frac{\partial}{\partial x} V(x, y) \cos\left(n\pi \frac{x}{L}\right) dx = -\frac{L}{n\pi} \frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial x^2}. \quad (\text{I.39})$$

Retornando para a equação (I.36), tem-se que

$$\tilde{V}(n, y) = -\frac{L}{n\pi} (-1)^n V(1, y) + \frac{L}{n\pi} V(0, y) + \frac{L}{n\pi} \left( -\frac{L}{n\pi} \frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial x^2} \right) \quad (\text{I.40})$$

$$\tilde{V}(n, y) = -\frac{L}{n\pi} (-1)^n V(1, y) + \frac{L}{n\pi} V(0, y) - \frac{L^2}{n^2 \pi^2} \frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial x^2} \quad (\text{I.41})$$

Isolando  $\frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial x^2}$ , pode-se chegar na seguinte expressão

$$\frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial x^2} = -\frac{n^2 \pi^2}{L^2} \tilde{V}(n, y) + \frac{n\pi}{L} [(-1)^n V(1, y) - V(0, y)] \quad (\text{I.42})$$

Pelo fato de a condição de contorno de não-escorregamento no bordo molhado estar presente, pode-se dizer que o segundo termo do lado direito da equação (I.42) é igual a zero. Com isso, resta a seguinte expressão

$$\frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial x^2} = -\frac{n^2 \pi^2}{L^2} \tilde{V}(n, y) \quad (\text{I.43})$$



Como queríamos demonstrar.

O processo pode ser desenvolvido de maneira análoga para o caso da integral da transformada seno de Fourier se der na coordenada  $y$ . Com isso, faz-se mister demonstrar que

$$\frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial y^2} = -\frac{m^2 \pi^2}{\beta^2} \tilde{V}(n, y) \quad (\text{I.44})$$

Parte-se da definição da transformada seno de Fourier na coordenada  $y$ .

$$\tilde{V}(n, y) = \int_0^\beta V(n, y) \operatorname{sen}\left(m\pi \frac{y}{\beta}\right) dy \quad (\text{I.45})$$

Aplicando a técnica da integral por partes, tem-se que

$$\begin{aligned} u &= V(n, y) & v &= -\frac{\beta}{m\pi} \cos\left(m\pi \frac{y}{\beta}\right) \\ du &= \frac{\partial}{\partial y} V(n, y) dy & dv &= \operatorname{sen}\left(m\pi \frac{y}{\beta}\right) dy \end{aligned}$$

Reaplicando a fórmula da integral por partes

$$\tilde{V}(n, y) = -\frac{\beta}{m\pi} V(n, \beta) \cos(m\pi) + \frac{\beta}{m\pi} V(n, 0) - \int_0^\beta -\frac{\beta}{m\pi} \frac{\partial}{\partial y} V(n, y) \cos\left(m\pi \frac{y}{\beta}\right) dy \quad (\text{I.46})$$

$$\tilde{V}(n, y) = -\frac{\beta}{m\pi} [V(n, \beta) \cos(m\pi) - V(n, 0)] + \frac{\beta}{m\pi} \int_0^\beta \frac{\partial}{\partial y} V(n, y) \cos\left(m\pi \frac{y}{\beta}\right) dy \quad (\text{I.47})$$

Como dito anteriormente, o cosseno da equação (I.47) possui comportamento alternado, sempre variando entre  $-1$  e  $1$ , para  $m$  - inteiro positivo - ímpar e par, respectivamente. Dessa forma, pode-se reorganizar esse raciocínio em linguagem matemática, de tal sorte que

$$\tilde{V}(n, y) = -\frac{\beta}{m\pi} [(-1)^m V(n, \beta) - V(n, 0)] + \frac{\beta}{m\pi} \int_0^\beta \frac{\partial}{\partial y} V(n, y) \cos\left(m\pi \frac{y}{\beta}\right) dy. \quad (\text{I.48})$$

Continuando o processo, pode-se resolver a integral da equação (I.48) através de uma nova integração por partes.

$$u = \frac{\partial}{\partial y} V(n, y) \quad v = \frac{\beta}{m\pi} \operatorname{sen} \left( m\pi \frac{y}{\beta} \right)$$

$$du = \frac{\partial^2}{\partial y^2} V(n, y) dy \quad dv = \cos \left( m\pi \frac{y}{\beta} \right) dy$$

Reaplicando a fórmula da integral por partes, tem-se que

$$\tilde{V}(n, y) = \frac{\beta}{m\pi} \frac{\partial}{\partial y} V(n, \beta) \operatorname{sen}(m\pi) - \frac{\beta}{m\pi} \frac{\partial}{\partial y} V(n, 0) \operatorname{sen}(0) - \int_0^\beta \frac{\beta}{m\pi} \frac{\partial^2}{\partial y^2} V(n, y) \operatorname{sen} \left( m\pi \frac{y}{\beta} \right) dy. \quad (\text{I.49})$$

Perceba que os dois primeiros termos se anulam, independente do valor de  $m$  de tal sorte que resta

$$\tilde{V}(n, y) = -\frac{\beta}{m\pi} \int_0^\beta \frac{\partial^2}{\partial y^2} V(n, y) \operatorname{sen} \left( m\pi \frac{y}{\beta} \right) dy. \quad (\text{I.50})$$

A integral em destaque possui o mesmo formato da transformada seno de Fourier, de tal forma que a expressão pode se reduzir a

$$\tilde{V}(n, y) = -\frac{\beta}{m\pi} \frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial y^2}. \quad (\text{I.51})$$

Retornando para a equação (I.48), tem-se que

$$\tilde{V}(n, y) = -\frac{\beta}{m\pi} [(-1)^m V(n, \beta) - V(n, 0)] + \frac{\beta}{m\pi} \left( -\frac{\beta}{m\pi} \frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial y^2} \right) \quad (\text{I.52})$$

$$\tilde{V}(n, y) = -\frac{\beta}{m\pi} [(-1)^m V(n, \beta) - V(n, 0)] - \frac{\beta^2}{m^2 \pi^2} \frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial y^2}. \quad (\text{I.53})$$

Pelas condições de contorno do problema, a velocidade do escoamento nas paredes do duto é igual a zero. Dessa forma, o primeiro termo da direita na equação (I.53) se anula. Com isso, resta apenas a seguinte expressão

$$\tilde{V}(n, y) = -\frac{\beta^2}{m^2 \pi^2} \frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial y^2}. \quad (\text{I.54})$$

Isolando  $\frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial y^2}$

$$\frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial y^2} = -\frac{m^2 \pi^2}{\beta^2} \tilde{V}(n, y). \quad (\text{I.55})$$

Como queríamos demonstrar.

Feitas essas demonstrações, é possível aplicar essa metodologia para resolver a equação diferencial de segunda ordem expressa por (9). Tem-se que

$$\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} = -1$$

Primeiro, multiplica-se cada um dos termos da equação por  $\sin(n\pi x)dx$  e integra-se de 0 a 1, de tal sorte que

$$\int_0^1 \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^2} \sin(n\pi x) dx + \int_0^1 \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^2} \sin(n\pi x) dx = - \int_0^1 \sin(n\pi x) dx \quad (\text{I.56})$$

Viu-se, dos cálculos anteriores, que a expressão em destaque pode ser reescrita da seguinte maneira

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}^*}{\partial y^2} = -\frac{1 - \cos(n\pi)}{n\pi} \quad (\text{I.57})$$

$$-n^2 \pi^2 \tilde{u}(n, y) - \frac{m^2 \pi^2}{\beta^2} \tilde{u}(n, y) = -\frac{1 - (-1)^n}{n\pi} \quad (\text{I.58})$$

Agora, multiplica-se cada um dos termos por  $\sin\left(m\pi \frac{y}{\beta}\right)dy$  e integra-se de 0 a  $\beta$ . Dessa forma, tem-se que

$$\begin{aligned} -n^2 \pi^2 \int_0^\beta \tilde{u}(n, y) \sin\left(m\pi \frac{y}{\beta}\right) dy - \frac{m^2 \pi^2}{\beta^2} \int_0^\beta \tilde{u}(n, y) \sin\left(m\pi \frac{y}{\beta}\right) dy \\ = -\frac{1 - (-1)^n}{n\pi} \int_0^\beta \sin\left(m\pi \frac{y}{\beta}\right) dy \end{aligned} \quad (\text{I.59})$$

$$-n^2 \pi^2 \tilde{\tilde{u}}(n, m) - \frac{m^2 \pi^2}{\beta^2} \tilde{\tilde{u}}(n, m) = -\frac{[1 - (-1)^n]}{n\pi} \frac{[1 - (-1)^m]}{m\pi} \quad (\text{I.60})$$

Isolando  $\tilde{u}(n, m)$

$$\tilde{u}(n, m) = \frac{\beta^3}{\pi^4 n m} \frac{[1 - (-1)^n][1 - (-1)^m]}{(m^2 + \beta^2 n^2)} \quad (\text{I.61})$$

## I.5 VAZÃO NO DUTO QUARTO ELÍPTICO VIA TRANSFORMADA FINITA DE SENO

A vazão pode ser calculada por meio da seguinte integral

$$Q = \int_0^{\xi_o} \int_0^{\frac{\pi}{2}} V(\xi, \theta) dA, \quad (\text{I.62})$$

em que

$$V(\xi, \theta) = -\frac{8c^2 \xi_o}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{\text{sen}(2n\theta) \text{sen}\left(\frac{m\pi\xi}{\xi_o}\right)}{m^2 \pi^2 + 4n^2 \xi_o^2} \left\{ \left[ \frac{(-1)^n + 2n^2 - 1}{4n(n^2 - 1)} \right] \left[ \frac{\xi_o(1 - (-1)^m)}{\pi m} \right] \right. \right. \\ \left. \left. + \left[ \frac{1 - (-1)^n}{2n} \right] \left[ \frac{\xi_o((-1)^m(\pi^2 m^2 \cosh^2 \xi_o + 2\xi_o^2) - \pi^2 m^2 - 2\xi_o^2)}{\pi m(\pi^2 m^2 + 4\xi_o^2)} \right] \right\} \right\}. \quad (\text{I.63})$$

e

$$dA = \|J\| d\theta d\xi, \quad (\text{I.64})$$

sendo  $\|J\| = \text{sech}^2 \xi_o (\cosh^2 \xi - \cos^2 \theta)$ .

Percebe-se que os únicos termos que dependem de  $\xi$  e  $\theta$  são  $\text{sen}(2n\theta)$  e  $\text{sen}\left(\frac{m\pi\xi}{\xi_o}\right)$ . Dito isto, a integral a ser resolvida consta como sendo

$$K = \int_0^{\xi_o} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{sen}(2n\theta) \text{sen}\left(m\pi \frac{\xi}{\xi_o}\right) (\cosh^2 \xi - \cos^2 \theta)}{\cosh^2 \xi_o} d\theta d\xi. \quad (\text{I.65})$$

As integrais podem ser resolvidas individualmente, sendo elas

$$\int_0^{\xi_o} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{sen}(2n\theta) \text{sen}\left(m\pi \frac{\xi}{\xi_o}\right) \cosh^2 \xi_o}{\cosh^2 \xi_o} d\theta d\xi \quad (\text{I.66})$$

e

$$\int_0^{\xi_o} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{sen}(2n\theta) \text{sen}\left(m\pi \frac{\xi}{\xi_o}\right) \cos^2 \theta}{\cosh^2 \xi_o} d\theta d\xi. \quad (\text{I.67})$$

Começando com a Equação (I.66), segue que integrando primeiramente com respeito a  $\theta$ , obtém-se

$$\int_0^{\xi_o} \frac{(1 - \cos(n\pi)) \cosh^2 \xi}{2n \cosh^2 \xi_o} d\xi. \quad (\text{I.68})$$

Integrando agora com relação a  $\xi$ , tem-se como resultado

$$\frac{1}{8\pi mn(4\xi_o^2 + m^2\pi^2) \cosh^2 \xi_o} \left\{ (\cos(n\pi) - 1)\xi_o e^{-2\xi_o} \left[ e^{4\xi_o} (2\pi m \xi_o \sin(\pi m) - \pi^2 m^2 \cos(\pi m)) \right. \right. \\ \left. \left. + e^{2\xi_o} (8\xi_o - 8 \cos(\pi m))\xi_o - 2\pi^2 m^2 \cos(\pi m) + 4\pi^2 m^2 \right] - 2\pi m \xi_o \sin(\pi m) - \pi^2 m^2 \cos(\pi m) \right\}. \quad (\text{I.69})$$

Notando que  $\cos(\pi m) = (-1)^m$ ,  $\cos(\pi n) = (-1)^n$  e que  $\sin(\pi m) = 0$ , pode-se reduzir a Equação (I.69) a

$$\frac{((-1)^n - 1) [-\pi^2 m^2 \xi_o (1)^m (e^{2\xi_o} + e^{-2\xi_o}) + 8\xi_o^2 - 8(-1)^m \xi_o^2 + 4\pi^2 m^2 - 2\pi^2 m^2 \xi_o (-1)^m]}{8\pi mn(4\xi_o^2 + m^2\pi^2) \cosh^2 \xi_o}. \quad (\text{I.70})$$

Sabendo que  $e^{2\xi_o} + e^{-2\xi_o} = 2 \cosh 2\xi_o$  e procedendo com as devidas manipulações algébricas, pode-se reescrever a Equação (I.70) como

$$\frac{(1 - (-1)^n) [2\pi^2 m^2 \xi_o (1)^m \cosh 2\xi_o - 8\xi_o^2 (1 - (-1)^m) - 4\pi^2 m^2 + 2\pi^2 m^2 \xi_o (-1)^m]}{8\pi mn(4\xi_o^2 + m^2\pi^2) \cosh^2 \xi_o}. \quad (\text{I.71})$$

Agora, realiza-se a integração da Equação (I.67). Integrando primeiramente com respeito a  $\theta$ , tem-se como resposta

$$\int_0^{\xi_o} \left[ \frac{(\cos(n\pi) + 2n^2 - 1) \sin\left(\frac{m\pi\xi}{\xi_o}\right)}{4n(n^2 - 1) \cosh^2 \xi_o} \right] d\xi. \quad (\text{I.72})$$

Procedendo com a integral em relação a variável  $\xi$ , segue que

$$-\frac{\xi_o (\cos(n\pi) + 2n^2 - 1) (\cos(\pi m) - 1)}{4\pi mn(n^2 - 1) \cosh^2 \xi_o}. \quad (\text{I.73})$$

Notando que  $\cos(\pi m) = (-1)^m$  e que  $\cos(\pi n) = (-1)^n$ , pode-se reduzir a Equação (I.73) como

$$-\frac{\xi_o ((-1)^n + 2n^2 - 1) ((-1)^m - 1)}{4\pi mn(n^2 - 1) \cosh^2 \xi_o}. \quad (\text{I.74})$$

Sem prejuízos matemáticos, permuta-se os índices  $m$  e  $n$ , donde segue que

$$-\frac{\xi_o ((-1)^m + 2m^2 - 1) ((-1)^n - 1)}{4\pi mn(m^2 - 1) \cosh^2 \xi_o}, \quad (\text{I.75})$$

sendo este o resultado final da integral (I.67).

Se somados os resultados das expressões obtidas com as integrais (I.66) e (I.67), tem-se como resultado uma função em termos de  $m$  e  $n$  dada por

$$K(m, n) = \frac{\xi_o m ((-1)^n - 1) [4\xi_o^2 + \pi^2 + (-1)^m (4\xi_o^2 + m^2\pi^2 + \pi^2(m^2 - 1) \cosh^2 2\xi_o)]}{4n\pi(4\xi_o^2 + \pi^2 m^2)(m^2 - 1) \cosh^2 \xi_o}. \quad (\text{I.76})$$

Dessa forma, a vazão para o duto quarto-elíptico com base no método da Transformada Finita de Seno é dada por

$$Q = -\frac{8c^2\xi_o}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{K(m, n)}{m^2\pi^2 + 4n^2\xi_o^2} \left\{ \left[ \frac{(-1)^n + 2n^2 - 1}{4n(n^2 - 1)} \right] \left[ \frac{\xi_o(1 - (-1)^m)}{\pi m} \right] \right. \right. \\ \left. \left. + \left[ \frac{1 - (-1)^n}{2n} \right] \left[ \frac{\xi_o((-1)^m(\pi^2 m^2 \cosh^2 \xi_o + 2\xi_o^2) - \pi^2 m^2 - 2\xi_o^2)}{\pi m(\pi^2 m^2 + 4\xi_o^2)} \right] \right\} \right\}, \quad (\text{I.77})$$

## I.6 VAZÃO NO DUTO QUARTO ELÍPTICO VIA MÉTODO DE FOURIER

A vazão é dada pela seguinte expressão

$$Q = \int_0^{\xi_o} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\cosh^2 \xi - \cos^2 \theta)}{\cosh^2 \xi_o} \left\{ -\frac{1}{2} \frac{\sinh^2 \xi \sin^2 \theta}{\cosh^2 \xi_o} + \frac{1}{2\pi} \frac{\sinh(\xi_o) \sinh(2\xi) \sin(2\theta)}{\cosh^3(\xi_o)} \right. \\ \left. + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi\xi}{\xi_o}\right) \sinh\left(\frac{n\pi\theta}{\xi_o}\right) + \sum_{n=2}^{\infty} D_n \sinh(2n\xi) \sin(2n\theta) \right\} d\theta d\xi. \quad (\text{I.78})$$

As integrais podem ser resolvidas individualmente, sendo elas

$$-\frac{1}{2} \int_0^{\xi_o} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sinh^2 \xi \sin^2 \theta (\cosh^2 \xi - \cos^2 \theta)}{\cosh^4 \xi_o} d\theta d\xi, \quad (\text{I.79})$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{\xi_o} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sinh(\xi_o) \sinh(2\xi) \sin(2\theta) (\cosh^2 \xi - \cos^2 \theta)}{\cosh^5(\xi_o)} d\theta d\xi, \quad (\text{I.80})$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n \int_0^{\xi_o} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\left(\frac{n\pi\xi}{\xi_o}\right) \sinh\left(\frac{n\pi\theta}{\xi_o}\right) (\cosh^2 \xi - \cos^2 \theta)}{\cosh^2 \xi_o} d\theta d\xi, \quad (\text{I.81})$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} D_n \int_0^{\xi_o} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sinh(2n\xi) \sin(2n\theta) (\cosh^2 \xi - \cos^2 \theta)}{\cosh^2 \xi_o} d\theta d\xi. \quad (\text{I.82})$$

Trabalhando inicialmente com a Equação (I.79), pode-se realizar uma distributiva para fragmentar ainda mais a integral. Dessa forma, tem-se que

$$-\frac{1}{2} \int_0^{\xi_o} \left[ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sinh^2 \xi \sin^2 \theta \cosh^2 \xi}{\cosh^4 \xi_o} d\theta - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sinh^2 \xi \sin^2 \theta \cos^2 \theta}{\cosh^4 \xi_o} d\theta \right] d\xi. \quad (\text{I.83})$$

Integrando primeiramente em relação a  $\theta$ , obtém-se

$$-\frac{1}{2} \left[ \frac{\pi \sinh^2 \xi \cosh^2 \xi}{4 \cosh^4 \xi_o} - \frac{\pi \sinh^2 \xi}{16 \cosh^4 \xi_o} \right] d\xi. \quad (\text{I.84})$$

Integrando a Equação (I.84) em relação a  $\xi$

$$-\frac{\pi}{8} \left[ \int_0^{\xi_0} \frac{\sinh^2 \xi \cosh^2 \xi}{\cosh^4 \xi_0} d\xi - \frac{1}{4} \int_0^{\xi_0} \frac{\sinh^2 \xi}{\cosh^4 \xi_0} d\xi \right], \quad (\text{I.85})$$

tem-se como resultado

$$-\frac{\pi}{8} \left[ \frac{e^{-4\xi_0}(e^{8\xi_0} - 8\xi_0 e^{4\xi_0} - 1)}{64 \cosh^4 \xi_0} - \frac{e^{-2\xi_0}(e^{4\xi_0} - 4\xi_0 e^{2\xi_0} - 1)}{32 \cosh^4 \xi_0} \right]. \quad (\text{I.86})$$

Manipulando algebricamente, obtém-se

$$-\frac{\pi}{8} \left[ \frac{(e^{4\xi_0} - e^{-4\xi_0}) - 8\xi_0 - 2(e^{2\xi_0} - e^{-2\xi_0}) + 8\xi_0}{64 \cosh^4 \xi_0} \right], \quad (\text{I.87})$$

Recorrendo à identidade da trigonometria hiperbólica

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad (\text{I.88})$$

pode-se chegar na seguinte expressão

$$-\frac{\pi}{8} \left[ \frac{\sinh 4\xi_0 - 2 \sinh 2\xi_0}{32 \cosh^4 \xi_0} \right]. \quad (\text{I.89})$$

Sabendo que  $\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x$ , segue que

$$-\frac{\pi}{8} \left[ \frac{\sinh \xi_0 \cosh \xi_0 \cosh 2\xi_0 - \sinh \xi_0 \cosh \xi_0}{8 \cosh^4 \xi_0} \right]. \quad (\text{I.90})$$

Colocando os termos comuns em evidência, tem-se

$$-\frac{\pi}{8} \left[ \frac{\sinh \xi_0 \cosh \xi_0 (\cosh 2\xi_0 - 1)}{8 \cosh^4 \xi_0} \right]. \quad (\text{I.91})$$

Dado que  $2 \sinh^2 \xi_0 = \cosh 2\xi_0 - 1$ , pode-se usar essa relação para obter como expressão final

$$-\frac{\pi}{32} \frac{\sinh^3 \xi_0}{\cosh^3 \xi_0}. \quad (\text{I.92})$$

Agora, realiza-se a integração da Equação (I.80). Aplicando a distributiva para fragmentar ainda mais a integral, tem-se

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{\xi_0} \left[ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sinh(\xi_0) \sinh(2\xi) \sin(2\theta) \cosh^2 \xi}{\cosh^5(\xi_0)} d\theta - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sinh(\xi_0) \sinh(2\xi) \sin(2\theta) \cos^2 \theta}{\cosh^5(\xi_0)} d\theta \right] d\xi. \quad (\text{I.93})$$

Integrando primeiramente com respeito a  $\theta$ , obtém-se

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{\xi_0} \left[ \frac{\sinh(\xi_0) \sinh(2\xi) \cosh^2 \xi}{\cosh^5(\xi_0)} - \frac{\sinh(\xi_0) \sinh(2\xi)}{2 \cosh^5(\xi_0)} \right] d\xi. \quad (\text{I.94})$$

Integrando a Equação (I.94) em relação a  $\xi$

$$\frac{1}{2\pi} \left[ \int_0^{\xi_0} \frac{\sinh(\xi_0) \sinh(2\xi) \cosh^2 \xi}{\cosh^5(\xi_0)} d\xi - \int_0^{\xi_0} \frac{\sinh(\xi_0) \sinh(2\xi)}{2 \cosh^5(\xi_0)} d\xi \right], \quad (\text{I.95})$$

tem-se como resultado

$$\frac{1}{2\pi} \left[ \frac{[e^{-4\xi_0}(e^{8\xi_0} + 4e^{6\xi_0} + 4e^{2\xi_0} + 1) - 10] \sinh \xi_0}{32 \cosh^5 \xi_0} - \frac{\sinh^3 \xi_0}{2 \cosh^5 \xi_0} \right]. \quad (\text{I.96})$$

Recorrendo à identidade da trigonometria hiperbólica

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad (\text{I.97})$$

pode-se obter a seguinte expressão

$$\frac{1}{2\pi} \left[ \frac{[2 \cosh 4\xi_0 + 8 \cosh 2\xi_0 - 10] \sinh \xi_0}{32 \cosh^5 \xi_0} - \frac{\sinh^3 \xi_0}{2 \cosh^5 \xi_0} \right]. \quad (\text{I.98})$$

Ao manipular algebricamente a Equação (I.98), chega-se em

$$\frac{1}{2\pi} \left[ \frac{[2(\cosh^2(2\xi_0) + \sinh^2(2\xi_0)) + 8(\cosh^2(\xi_0) + \sinh^2(\xi_0)) - 10] \sinh \xi_0}{32 \cosh^5 \xi_0} - \frac{\sinh^3 \xi_0}{2 \cosh^5 \xi_0} \right]. \quad (\text{I.99})$$

Sabendo que  $\cosh 2\xi_0 = 2 \sinh^2 \xi_0 + 1$  e que  $\cosh^2 2\xi_0 = 1 + \sinh^2 2\xi_0$ , pode-se reescrever a Equação (I.99) como

$$\frac{1}{2\pi} \left[ \frac{[2(1 + 2 \sinh^2(2\xi_0)) + 8(2 \sinh^2 \xi_0 + 1) - 10] \sinh \xi_0}{32 \cosh^5 \xi_0} - \frac{\sinh^3 \xi_0}{2 \cosh^5 \xi_0} \right]. \quad (\text{I.100})$$

Realizando novas distributivas, segue que

$$\frac{1}{2\pi} \left[ \frac{4 \sinh^2(2\xi_0) \sinh \xi_0 + 16 \sinh^3 \xi_0}{32 \cosh^5 \xi_0} - \frac{\sinh^3 \xi_0}{2 \cosh^5 \xi_0} \right]. \quad (\text{I.101})$$

Somando as frações, pode-se obter a seguinte expressão

$$\frac{1}{16\pi} \frac{\sinh^2 2\xi_0 \sinh \xi_0}{\cosh^5 \xi_0}. \quad (\text{I.102})$$



Dado que  $\sinh^2 2\xi_o = 4 \sinh^2 \xi_o \cosh^2 \xi_o$ , pode-se finalmente reescrever a Equação (I.102) como

$$\frac{1}{4\pi} \frac{\sinh^3 \xi_o}{\cosh^3 \xi_o}. \quad (\text{I.103})$$

Parte-se agora para a integral da Equação (I.81). Realizando a distributiva, tem-se

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n \int_0^{\xi_o} \left[ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{sen} \left( \frac{n\pi\xi}{\xi_o} \right) \sinh \left( \frac{n\pi\theta}{\xi_o} \right) \cosh^2 \xi}{\cosh^2 \xi_o} d\theta - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{sen} \left( \frac{n\pi\xi}{\xi_o} \right) \sinh \left( \frac{n\pi\theta}{\xi_o} \right) \cos^2 \theta}{\cosh^2 \xi_o} d\theta \right] d\xi, \quad (\text{I.104})$$

Integrando primeiramente com respeito a  $\theta$ , obtém-se

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n \left[ \int_0^{\xi_o} \frac{\xi_o \cosh^2 \xi \left( \cosh \left( \frac{\pi^2 n}{2\xi_o} \right) - 1 \right) \text{sen} \left( \frac{n\pi\xi}{\xi_o} \right)}{n\pi \cosh^2 \xi_o} d\xi - \int_0^{\xi_o} \frac{\text{sen} \left( \frac{n\pi\xi}{\xi_o} \right) \left( \xi_o^3 e^{\frac{\pi^2 n}{2\xi_o}} - 2\xi_o^3 - \xi_o \pi^2 n^2 + \xi_o^3 e^{-\frac{\pi^2 n}{2\xi_o}} \right)}{n\pi (4\xi_o^2 + n^2 \pi^2) \cosh^2 \xi_o} d\xi \right]. \quad (\text{I.105})$$

Percebendo que  $e^{\frac{\pi^2 n}{2\xi_o}} + e^{-\frac{\pi^2 n}{2\xi_o}} = 2 \cosh \left( \frac{\pi^2 n}{2\xi_o} \right)$ , pode-se reescrever a Equação (I.105) como

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n \left[ \int_0^{\xi_o} \frac{\xi_o \cosh^2 \xi \left( \cosh \left( \frac{\pi^2 n}{2\xi_o} \right) - 1 \right) \text{sen} \left( \frac{n\pi\xi}{\xi_o} \right)}{n\pi \cosh^2 \xi_o} d\xi - \int_0^{\xi_o} \frac{\text{sen} \left( \frac{n\pi\xi}{\xi_o} \right) \left( 2\xi_o^3 \cosh \left( \frac{\pi^2 n}{2\xi_o} \right) - 2\xi_o^3 - \xi_o \pi^2 n^2 \right)}{n\pi (4\xi_o^2 + n^2 \pi^2) \cosh^2 \xi_o} d\xi \right]. \quad (\text{I.106})$$

Integrando a Equação (I.106) em relação a  $\xi$

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n \left\{ \frac{\xi_o^2 \left( \cosh \left( \frac{\pi^2 n}{2\xi_o} \right) - 1 \right)}{4n^2 \pi^2 (4\xi_o^2 + n^2 \pi^2) \cosh^2 (\xi_o)} \left[ -2\pi^2 n^2 \cos (n\pi) \cosh (2\xi_o) + 8\xi_o^2 - 8\xi_o^2 \cos (n\pi) \right. \right. \\ \left. \left. - 2n^2 \pi^2 \cos (n\pi) + 4n^2 \pi^2 \right] + \frac{\xi_o^2 (\cos (n\pi) - 1) \left[ 2 \left( \cosh \left( \frac{\pi^2 n}{2\xi_o} \right) - 1 \right) \xi_o^2 - n^2 \pi^2 \right]}{n^2 \pi^2 (4\xi_o^2 + n^2 \pi^2) \cosh^2 (\xi_o)} \right\}. \quad (\text{I.107})$$

Observando que  $\cos (n\pi) = (-1)^n$  e procedendo com a soma entre as frações, pode-se obter a

seguinte expressão

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n \left\{ \frac{\xi_o^2}{4n^2\pi^2(4\xi_o^2 + n^2\pi^2) \cosh^2(\xi_o)} \left[ -2\pi^2 n^2 (-1)^n \cosh 2\xi_o \cosh\left(\frac{\pi^2 n}{2\xi_o}\right) + 2\pi^2 n^2 (-1)^n \right. \right. \\ \left. \left. - 4n^2\pi^2 (-1)^n - 2\pi^2 n^2 (-1)^n \cosh\left(\frac{\pi^2 n}{2\xi_o}\right) + 4n^2\pi^2 \cosh\left(\frac{\pi^2 n}{2\xi_o}\right) + 2\pi^2 n^2 (-1)^n \cosh 2\xi_o \right] \right\} \quad (\text{I.108})$$

Utilizando as seguintes identidades da trigonometria hiperbólica

$$\cosh(x+x) = \cosh^2 x + \sinh^2 x \quad (\text{I.109})$$

e

$$\cosh(2x) = 2 \sinh^2 \xi_o + 1, \quad (\text{I.110})$$

pode-se reescrever a Equação (I.108) como

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n \left\{ \frac{\xi_o^2}{4n^2\pi^2(4\xi_o^2 + n^2\pi^2) \cosh^2(\xi_o)} \left[ -2\pi^2 n^2 (-1)^n \cosh\left(\frac{\pi^2 n}{2\xi_o}\right) (\cosh^2 \xi_o + \sinh^2 \xi_o) \right. \right. \\ \left. \left. + 2\pi^2 n^2 (-1)^n - 4n^2\pi^2 (-1)^n - 2\pi^2 n^2 (-1)^n \cosh\left(\frac{\pi^2 n}{2\xi_o}\right) + 4n^2\pi^2 \cosh\left(\frac{\pi^2 n}{2\xi_o}\right) \right. \right. \\ \left. \left. + 2\pi^2 n^2 (-1)^n (2 \sinh^2 \xi_o + 1) \right] \right\} \quad (\text{I.111})$$

Operando com as distributivas, segue que

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n \left\{ \frac{\xi_o^2}{4n^2\pi^2(4\xi_o^2 + n^2\pi^2) \cosh^2(\xi_o)} \left[ 4n^2\pi^2 \cosh\left(\frac{\pi^2 n}{2\xi_o}\right) - 2\pi^2 n^2 (-1)^n \cosh\left(\frac{\pi^2 n}{2\xi_o}\right) \right. \right. \\ \left. \left. - 2\pi^2 n^2 (-1)^n \cosh\left(\frac{\pi^2 n}{2\xi_o}\right) \cosh^2 \xi_o - 2\pi^2 n^2 (-1)^n \cosh\left(\frac{\pi^2 n}{2\xi_o}\right) \sinh^2 \xi_o \right. \right. \\ \left. \left. + 4\pi^2 n^2 (-1)^n \sinh^2 \xi_o \right] \right\} \quad (\text{I.112})$$

Sabendo que  $\sinh^2 \xi_o = \cosh^2 \xi_o - 1$ , pode-se substituir na Equação (I.112)

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n \left\{ \frac{\xi_o^2}{4n^2\pi^2(4\xi_o^2 + n^2\pi^2) \cosh^2(\xi_o)} \left[ 4n^2\pi^2 \cosh\left(\frac{\pi^2 n}{2\xi_o}\right) - 2\pi^2 n^2 (-1)^n \cosh\left(\frac{\pi^2 n}{2\xi_o}\right) \right. \right. \\ \left. \left. - 2\pi^2 n^2 (-1)^n \cosh\left(\frac{\pi^2 n}{2\xi_o}\right) \cosh^2 \xi_o - 2\pi^2 n^2 (-1)^n \cosh\left(\frac{\pi^2 n}{2\xi_o}\right) (\cosh^2 \xi_o - 1) \right. \right. \\ \left. \left. + 4\pi^2 n^2 (-1)^n \sinh^2 \xi_o \right] \right\}, \quad (\text{I.113})$$

resultando em

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n \left\{ \frac{\xi_o^2}{(4\xi_o^2 + n^2\pi^2) \cosh^2(\xi_o)} \left[ \cosh\left(\frac{\pi^2 n}{2\xi_o}\right) - (-1)^n \cosh\left(\frac{\pi^2 n}{2\xi_o}\right) \cosh^2 \xi_o \right. \right. \\ \left. \left. + (-1)^n \sinh^2 \xi_o \right] \right\}. \quad (\text{I.114})$$

Finalmente, pode-se obter a seguinte expressão

$$\frac{\xi_o^2}{\cosh^2 \xi_o} \sum_{n=1}^{\infty} B_n G_n, \quad (\text{I.115})$$

em que

$$G_n = \frac{(-1)^n [\sinh^2 \xi_o - \cosh\left(\frac{\pi^2 n}{2\xi_o}\right) \cosh^2 \xi_o] + \cosh\left(\frac{\pi^2 n}{2\xi_o}\right)}{(4\xi_o^2 + n^2 \pi^2) \cosh^2(\xi_o)}.$$

Por último, resolve-se a integral da Equação (I.82). Aplicando a distributiva com vistas a fragmentar ainda mais o problema, segue que

$$\sum_{n=2}^{\infty} D_n \int_0^{\xi_o} \left[ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sinh(2n\xi) \operatorname{sen}(2n\theta) \cosh^2 \xi}{\cosh^2 \xi_o} d\theta - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sinh(2n\xi) \operatorname{sen}(2n\theta) \cos^2 \theta}{\cosh^2 \xi_o} d\theta \right] d\xi. \quad (\text{I.116})$$

Integrando primeiramente com respeito a  $\theta$ , obtém-se

$$\sum_{n=2}^{\infty} D_n \left[ - \int_0^{\xi_o} \frac{(\cos(n\pi) - 1) \sinh(2n\xi) \cosh^2 \xi}{2n \cosh^2 \xi_o} d\xi - \int_0^{\xi_o} \frac{(\cos(\pi n) + 2n^2 - 1) \sinh(2n\xi)}{4n(n^2 - 1) \cosh^2 \xi_o} d\xi \right]. \quad (\text{I.117})$$

Integrando a Equação (I.117) em relação a  $\xi$ , tem-se como resultado

$$\sum_{n=2}^{\infty} D_n \left\{ - \frac{(\cos(n\pi) - 1) e^{-2n\xi_o - 2\xi_o}}{32n^2(n^2 - 1) \cosh^2 \xi_o} \left[ n^2 - n + e^{2n\xi_o + 2\xi_o} (4 - 8n^2) + e^{4n\xi_o} (n + n^2 + e^{4\xi_o} (n^2 - n)) \right. \right. \\ \left. \left. + e^{2\xi_o} (2n^2 - 2) + e^{4\xi_o} (n^2 + n) + e^{2\xi_o} (2n^2 - 2) \right] - \frac{(\cos(\pi n) + 2n^2 - 1) (\cosh(2n\xi_o) - 1)}{8n^2(n^2 - 1) \cosh^2 \xi_o} \right\}. \quad (\text{I.118})$$

Sabendo que  $\cos(n\pi) = (-1)^n$  e procedendo com as devidas somas e distributivas, pode-se chegar na seguinte expressão

$$\sum_{n=2}^{\infty} D_n \left\{ \frac{1}{32n^2(n^2 - 1) \cosh^2 \xi_o} \left[ 8n^2(-1)^n - 4(-1)^n \cosh(2n\xi_o) - 8n^2 \cosh(2n\xi_o) \right. \right. \\ \left. \left. + 4 \cosh(2n\xi_o) + n^2 e^{2n\xi_o + 2\xi_o} - n e^{2n\xi_o + 2\xi_o} + 2n^2 e^{2n\xi_o} - 2e^{2n\xi_o} + n^2 e^{2n\xi_o - 2\xi_o} + n e^{2n\xi_o - 2\xi_o} \right. \right. \\ \left. \left. + n^2 e^{-2n\xi_o + 2\xi_o} + n e^{-2n\xi_o + 2\xi_o} + 2n^2 e^{-2n\xi_o} - 2e^{-2n\xi_o} + n^2 e^{-2n\xi_o - 2\xi_o} - n e^{-2n\xi_o - 2\xi_o} - n^2(-1)^n e^{2n\xi_o + 2\xi_o} \right. \right. \\ \left. \left. + n(-1)^n e^{2n\xi_o + 2\xi_o} - 2n^2(-1)^n e^{2n\xi_o} + 2(-1)^n e^{2n\xi_o} - n^2(-1)^n e^{2n\xi_o - 2\xi_o} - n(-1)^n e^{2n\xi_o - 2\xi_o} \right. \right. \\ \left. \left. - n^2(-1)^n e^{-2n\xi_o + 2\xi_o} - n(-1)^n e^{-2n\xi_o + 2\xi_o} - 2n^2(-1)^n e^{-2n\xi_o} + 2(-1)^n e^{-2n\xi_o} - n^2(-1)^n e^{-2n\xi_o - 2\xi_o} \right. \right. \\ \left. \left. + n(-1)^n e^{-2n\xi_o - 2\xi_o} \right] \right\}. \quad (\text{I.119})$$

Colocando os termos em comum em evidência, segue que

$$\sum_{n=2}^{\infty} D_n \left\{ \frac{1}{32n^2(n^2-1) \cosh^2 \xi_o} \left[ 8n^2(-1)^n - 4(-1)^n \cosh(2n\xi_o) - 8n^2 \cosh(2n\xi_o) \right. \right. \\ \left. \left. + 4 \cosh(2n\xi_o) + n^2(e^{2n\xi_o+2\xi_o} + e^{-(2n\xi_o+2\xi_o)}) - n(e^{2n\xi_o+2\xi_o} + e^{-(2n\xi_o+2\xi_o)}) \right. \right. \\ \left. \left. + 2n^2(e^{2n\xi_o} + e^{-2n\xi_o}) - 2(e^{2n\xi_o} + e^{-2n\xi_o}) + n^2(e^{2n\xi_o-2\xi_o} + e^{-(2n\xi_o-2\xi_o)}) + n(e^{2n\xi_o-2\xi_o} + e^{-(2n\xi_o-2\xi_o)}) \right. \right. \\ \left. \left. - n^2(-1)^n(e^{2n\xi_o+2\xi_o} + e^{-(2n\xi_o+2\xi_o)}) + n(-1)^n(e^{2n\xi_o+2\xi_o} + e^{-(2n\xi_o+2\xi_o)}) - 2n^2(-1)^n(e^{2n\xi_o} + e^{-2n\xi_o}) \right. \right. \\ \left. \left. + 2(-1)^n(e^{2n\xi_o} + e^{-2n\xi_o}) - n^2(-1)^n(e^{2n\xi_o-2\xi_o} + e^{-(2n\xi_o-2\xi_o)}) - n(-1)^n(e^{2n\xi_o-2\xi_o} + e^{-(2n\xi_o-2\xi_o)}) \right] \right\}. \quad (\text{I.120})$$

Recorrendo à identidade (I.97), apresentada anteriormente, pode-se reescrever a Equação (I.120) como

$$\sum_{n=2}^{\infty} D_n \left\{ \frac{1}{32n^2(n^2-1) \cosh^2 \xi_o} \left[ 8n^2(-1)^n - 4n^2 \cosh(2n\xi_o) + 2n^2 \cosh(2n\xi_o + 2\xi_o) \right. \right. \\ \left. \left. - 2n \cosh(2n\xi_o + 2\xi_o) + 2n^2 \cosh(2n\xi_o - 2\xi_o) + 2n \cosh(2n\xi_o - 2\xi_o) \right. \right. \\ \left. \left. - 2n^2(-1)^n \cosh(2n\xi_o + 2\xi_o) + 2n(-1)^n \cosh(2n\xi_o + 2\xi_o) - 4n^2(-1)^n \cosh(2n\xi_o) \right. \right. \\ \left. \left. - 2n^2(-1)^n \cosh(2n\xi_o - 2\xi_o) - 2n(-1)^n \cosh(2n\xi_o - 2\xi_o) \right] \right\}. \quad (\text{I.121})$$

Recorrendo à identidade (I.109), pode-se reescrever a Equação (I.121) como

$$\sum_{n=2}^{\infty} D_n \left\{ \frac{1}{32n^2(n^2-1) \cosh^2 \xi_o} \left[ 8n^2(-1)^n - 4n^2 \cosh(2n\xi_o) + 4n^2 \cosh(2n\xi_o) \cosh(2\xi_o) \right. \right. \\ \left. \left. - 4n \sinh(2\xi_o) \sinh(2n\xi_o) - 4n^2(-1)^n \cosh(2n\xi_o) \cosh(2\xi_o) \right. \right. \\ \left. \left. + 4n(-1)^n \sinh(2\xi_o) \sinh(2n\xi_o) \right] \right\}, \quad (\text{I.122})$$

ou ainda

$$\frac{1}{8 \cosh^2 \xi_o} \sum_{n=2}^{\infty} D_n H_n, \quad (\text{I.123})$$

em que

$$H_n = \frac{2n(-1)^n - \sinh 2\xi_o \sinh 2n\xi_o [1 - (-1)^n] - 2n \cosh 2n\xi_o [(-1)^n \cosh^{\xi_o} - \sinh^2 \xi_o]}{(n-1)n(n+1)}.$$

Dessa forma, segue que a vazão para o duto quarto-elíptico com base no método da separação de variáveis é dado pela soma entra as Equações (I.92), (I.103), (I.115) e (I.123), sendo expressa como

$$Q = -\frac{(\pi^2 - 8)}{32\pi} \tanh^3 \xi_o + \frac{\xi_o^2}{\cosh^2 \xi_o} \sum_{n=1}^{\infty} B_n G_n + \frac{1}{8 \cosh^2 \xi_o} \sum_{n=2}^{\infty} D_n H_n. \quad (\text{I.124})$$